Lucas de Souza Barbosa

Investigando com o GeoGebra 3D: O Método Axiomático em Atividades de Geometria Espacial e Esférica

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2017

Lucas de Souza Barbosa

Investigando com o GeoGebra 3D: O Método Axiomático em Atividades de Geometria Espacial e Esférica

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Lucas de Souza Barbosa junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Coorientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2017

Ficha catalográfica

B238i Barbosa, Lucas de Souza.
Investigando com o GeoGebra 3D: o método axiomático em atividades de geometria espacial e esférica / Lucas de Souza Barbosa. – 2017.
143 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2017.
Orientadora: Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.
Coorientadora: Dra. Cristiana Andrade Poffal.

1. Geometria espacial 2. Geometria não euclidiana 3. Ensino de geometria 4. Investigação matemática 5. GeoGebra I. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider II. Poffal, Cristiana Andrade III. Título.

CDU 514:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Lucas de Souza Barbosa

Investigando com o GeoGebra 3D: O Método Axiomático em Atividades de Geometria Espacial e Esférica

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Lucas de Souza Barbosa junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 18 de março de 2017

Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Orientadora - FURG)

Cristiana Andrade Poffal

Cristiana Andrade Poffal
(Coorientadora - FURG)

Daiane Freitas

Daiane Silva de Freitas
(Avaliador - FURG)

Giovanni da Silva Nunes
(Avaliador - UFPEL)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Março, 2017

Este trabalho é dedicado a minha mãe Rosemerie de Souza Barbosa, cuja luta nos últimos meses serviu de inspiração e exemplo de perseverança, ao meu pai Rogério Schwartz Barbosa, por seu apoio incondicional à nossa família, proporcionando condições para plenamente conluir este curso.

Agradecimentos

Agradeço às professoras orientadoras Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti e Dra. Cristiana Andrade Poffal, por acreditarem e investirem na realização desse trabalho.

Aos meus pais e meu irmão, que apoiaram e possibilitaram a realização desse curso.

Às colegas de turma Gabriela Pereira e Patricia Cesário, cujas amizades tornaram essa jornada mais agradável.

À Direção e aos alunos da Escola Estadual de Educação Básica Osmar da Rocha Grafulha, que possibilitaram a realização do curso e da atividade proposta nesse material.

Aos Professores Giovanni da Silva Nunes e Daiane Silva de Freitas, membros da Banca Examinadora, por terem atendido ao convite para desempenhar este papel, dispondo de seu tempo e conhecimento para analisar este trabalho.

Ao corpo docente do Polo FURG do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho propõe atividades de Geometria usando o ambiente 3D do software GeoGebra. A sugestão dessas atividades é fundamentada nas dificuldades do ensino e aprendizagem de Geometria levantados, entre eles os problemas de representação de entes geométricos e a dificuldade de validar as propriedades usando demonstrações. Uma metodologia proposta é a investigação Matemática, que mostra como alunos podem se envolver na produção do próprio conhecimento, ao gerar conjecturas e tentar justificá-las ou refutá-las. A primeira atividade consiste na apresentação dos axiomas da Geometria Euclidiana Espacial e na exploração das posições relativas entre retas e planos no espaço. De acordo com o relato da aplicação e a análise de questionários posteriores a sua realização, a atividade foi aprimorada e se encontra em anexo para impressão. A segunda atividade trata de uma nova possibilidade em Geometria, a saber, a Geometria não euclidiana, que é resultado de um episódio particular da História da Matemática, que envolve muitos matemáticos importantes num período de quase dois milênios, levando a sofisticação da Matemática que conhecemos hoje e a descoberta de novas possibilidades em Geometria. O contexto histórico de seu surgimento é retratado. Para fundamentar as atividades foram estudados propriedades da Geometria Espacial de posição e propriedades das esferas, que servem de modelo numa Geometria não Euclidiana conhecida como Elíptica.

Palavras-chaves: Geometria Espacial, Geometrias não euclidianas, Ensino de Geometria, Investigação Matemática, GeoGebra.

Abstract

This work proposes Geometry activities using the 3D environment of the GeoGebra software. The suggestion of these activities is based on the known difficulties of teaching and learning of Geometry, among them the problems of representation of geometric entities and the difficulty of validating its properties using demonstrations. A proposed methodology is Mathematical Investigation, which shows how students can get involved in the production of their own knowledge, generating conjectures and trying to justify or refute them. The first activity consists in the presentation of the axioms of Euclidean Spatial Geometry and in the exploration of the relative positions between straight lines and planes in space. According to the report of the application and the analysis of questionnaires after its implementation, the activity has been improved and is attached for printing. The second activity deals with a new possibility in Geometry, namely non-Euclidean geometry, which is the result of a particular episode in the History of Mathematics, which involves many important mathematicians in a period of almost two millennia, leading to the sophistication of Mathematics that we know Today and the discovery of new possibilities in Geometry. The historical context of its emergence is portrayed. In order to support the activities, the properties of spatial geometry were studied, along with properties of the spheres, which serves as a model in a non-Euclidean geometry known as Elliptical Geometry .

Key-words: Spatial Geometry, Non-Euclidean Geometries, Geometry Teaching, Mathematical Investigation, GeoGebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho consiste na sugestão e relato da aplicação de duas atividades para o ensino de Geometria Espacial de Posição (aquela que envolve propriedades elementares dos pontos, retas e planos no espaço) usando recursos da Janela de Visualização 3D do software GeoGebra. Além disso, tratam-se de uma atividade que visa provocar uma reflexão do estudante sobre a Matemática como ciência pura, exemplificando a construção de novos conceitos a partir do sistema axiomático. Buscou-se levar os discentes a concluir axiomas e propriedades relativas a pontos, retas e planos, bem como escrever sobre as possíveis posições relativas entre esses elementos.

Esta proposta pode ser aplicada nos três níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior), e aqui é relatada a aplicação da atividade para uma turma do 3º Ano do Ensino Médio.

Muitas vezes a Geometria é relegada ao final do ano letivo, com seu ensino condicionado ao tempo que restar, se restar. Com isso, uma grande parcela de alunos chega ao final do Ensino Médio sem ter uma base muito forte em Geometria, levando-o a apresentar dificuldades nos estudos de Geometria Analítica e Espacial próprios desse nível de ensino. Também percebe-se que a maioria dos alunos não conhece de fato o trabalho de um matemático, tampouco a Matemática como ciência viva, em desenvolvimento. Visando contribuir para preencher essas lacunas, a atividade apresenta a Geometria Espacial de posição através da Investigação Matemática, cuja proposta é mostrar aos alunos o trabalho de um matemático e como pode ser produzido o conhecimento em Matemática, além de desenvolver o raciocínio lógico. O estudante é estimulado a fazer conjecturas, dar exemplos, contra-exemplos, generalizações e usar da lógica matemática para resolver problemas. Ao fazer conjecturas e registrá-las por escrito, é desenvolvida e observada a escrita matemática dos alunos, permitindo avaliar e aprimorar o ensino desses tópicos.

O abandono da Geometria pela escola tem fundamento histórico, segundo a trajetória do ensino de Geometria no Brasil traçado por (SANTOS; NACARATO, 2014). Nos anos 1970 e 1980, sob influência do Movimento Matemática Moderna, os conteúdos de Geometria passaram aos capítulos finais e focados principalmente na linguagem, e não na compreensão dos conceitos, juntamente da visão de que esses tópicos eram irrelevantes para a formação do aluno. (SANTOS; NACARATO, 2014) ainda aponta que por ser essencialmente agrícola no século XX e por ter uma grande taxa de analfabetismo, o quase inexistente ensino de Geometria era basicamente utilitarista, limitando-se ao cálculo de áreas e de volumes. Muitos professores tiveram suas formações iniciais deficientes em Geometria devido a esses fatos, e reproduziram essas deficiências em suas práticas, o que acabou caracterizando o ensino de Geometria encontrado hoje. Soma-se a isso a complexidade das relações entre retas, pontos e planos no espaço em comparação com as mesmas no plano, agravada pela dificuldade de realizar esses estudos com material concreto.

A importância da Investigação Matemática é reafirmada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, quando esses destacam que a Matemática não deve ter apenas caráter formativo e instrumental,

> mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p. 40)

O mesmo texto destaca entre as competências e habilidades norteadoras para o ensino de Matemática, a habilidade de utilizar recursos tecnológicos como instrumentos de produção e comunicação e de reconhecer as limitações e potencialidades de instrumentos como a calculadora e o computador.

Espera-se que, assim como os alunos, o professor possa repensar sua prática a partir dessa proposta, seja aplicando ou estruturando atividades semelhantes. Dessa forma não somente as atividades são aprimoradas, mas também o ensino de Geometria Espacial, que além das dificuldades históricas, também apresenta o grande desafio de fazer a transição do plano para o espaço. (LIMA et al., 2006) recomenda "evitar apresentar o assunto já de forma completamente arrumada para o aluno", destacando que exemplos provocativos devem ser empregados para construir a classificação da posição relativa de retas e planos com a participação dos alunos.

Além desta introdução, o trabalho apresenta no Capítulo 2 o contexto histórico do surgimento de sistemas axiomáticos e da Geometria como ela é aceita hoje, bem como a descoberta de geometrias não euclidianas. O capítulo 3 mostra a fundamentação matemática das atividades propostas, ou seja, a Geometria Espacial de posição, com seus postulados e alguns resultados sobre a posição relativas de retas e planos. Já o capítulo 4 serve como fundamentação pedagógica das atividades propostas e da necessidade deste trabalho. O Capítulo 5 trata da atividade de Geometria Espacial realizada, sua proposta, o relato de aplicação e os resultados encontrados. O capítulo 6 propõe uma atividade sobre Geometria Esférica usando o GeoGebra. Após a Conclusão do trabalho, no Apêndice, uma versão reformada da primeira atividade encontra-se disponível para impressão, junto de uma versão para impressão da atividade de Geometria Esférica.

Em seguida, no Capítulo 2, apresentamos a história da Geometria e dos fundamentos da Matemática, que retrata como a Matemática se tornou a ciência dedutiva que é hoje.

2 A Geometria e a Formulação Axiomática da Matemática

Um capítulo particularmente interessante da História da Matemática é a história do surgimento da formulação axiomática da Geometria. Essa formulação desencadeou um processo de mais de dois milênios em que foram aperfeiçoadas a Matemática, a ciência e a própria interpretação do mundo que rodeia os homens, culminando no surgimento de geometrias muito diferentes da de Euclides. Vários matemáticos de renome protagonizaram esse capítulo partindo do grego Euclides no século III a.C. até Riemman no século XIX. Para reconstruir essa trajetória, será inicialmente analisado o maior trabalho de Euclides, os *Elementos* e seu impacto no mundo científico.

A partir de Tales de Mileto no século VI a.C., a matemática grega apoiou-se num sistema em que cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, essas, a partir de outras, e assim sucessivamente. No entanto, os gregos repararam que esse processo não podia seguir infinitamente: eram necessários assumir algumas proposições como verdadeiras para que a partir delas pudessem ser demonstradas todas as outras. Como a Matemática grega era feita numa linguagem geométrica, diferente da atual, foi natural que a escolha das proposições verdadeiras se dessem dentro do que hoje é conhecido como Geometria Euclidiana Plana.

Muitos filósofos, matemáticos e engenheiros contribuíram para a Matemática daquela civilização, mas um homem teve o trabalho de analisar e compilar o conhecimento produzido ao longo de 250 anos. Esse homem era Euclides, e a compilação, uma obra chamada de *Elementos*. Pouco sabe-se sobre a bibliografia de Euclides, tampouco sobre em que período ele viveu, mas sua obra (que consiste dos Elementos e de alguns outros tratados científicos) é um dos poucos registros da Geometria grega antes de Cristo, exceto por alguns textos atribuídos a Hipócrates de Quio (século V a.C.).

Euclides apresentou nos Elementos o primeiro sistema axiomático que se tem registro, sendo a primeira tentativa de fundamentar rigorosamente a Matemática. Não sabe-se qual foi o objetivo de Euclides ao escrever os Elementos, mas (ÁVILA, 2013) destaca duas possibilidades: o ensino de Matemática ou simplesmente sistematizar o conhecimento até então desenvolvido. (BARBOSA, 1995b) acresenta a possibilidade de Euclides ter escrito os Elementos para fundamentar os sólidos de Platão e os números racionais de Teteto. De fato, o livro serviu a todos esses propósitos e foi o meio pelo qual vários filósofos e cientistas importantes aprenderam Matemática, até quase 2 milênios depois da sua publicação. Fala-se em Matemática, não apenas Geometria, pois o exposto em Elementos não trata somente da segunda. Apresenta também proposições a respeito da Aritmética e da Álgebra, evidentemente em uma linguagem geométrica. Uma das características da obra de Euclides é o não uso de fórmulas, certas relações são expressas apenas por meio de comparação ou proporção. (ÁVILA, 2013) exemplifica:

> enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado;

Como já comentado, os Elementos não tratam apenas de Geometria. De fato, o livro é dividido em treze volumes (ou livros), apenas alguns dos quais tratam de geometria especificamente. O volume (ou livro) I desenvolve o que é conhecido hoje como Geometria Euclidiana Plana, o II apresenta o que (ÁVILA, 2013) denomina de álgebra geométrica, incluindo um estudo do quadrado da soma de dois termos por meio de áreas de retângulos. Os volumes III e IV tratam do círculo e da construção de polígonos regulares, respectivamente. O quinto é sobre a teoria das proporções de Eudoxo, o sexto trata da semelhança de Figuras, o sétimo da Teoria dos Números, apresentando uma demonstração geométrica para a infinidade dos números primos. O oitavo livro expõe proporções e sequências numéricas, enquanto o nono traz números perfeitos e a soma de uma série geométrica. Os livros X a XII tratam de incomensurabilidade, Geometria Espacial e Poliedros Regulares, respectivamente.

Inicialmente, Euclides apresenta dez axiomas divididos em noções comuns e postulados. Noções comuns são enunciados aceitáveis para toda a ciência e compreensíveis por qualquer pessoa. Postulados seriam hipóteses exclusivas da Geometria. São eles:

- Noções Comuns

  1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
  2. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
  3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
  4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
  5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes

- Postulados

  I. Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos.
  II. Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta.
  III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
  IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-são no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Nota-se que os dez axiomas propostos por Euclides são autoevidentes e possuem uma formulação bastante curta, exceto, pelo quinto postulado. Tem-se prova que desde a Antiguidade muitos matemáticos acreditaram que este postulado era apenas uma proposição que Euclides não conseguiu demonstrar. Essa ideia é fundamentada na estrutura do primeiro volume de Elementos. O quinto postulado não é usado nas primeiras 28 proposições propostas por Euclides. Além disso, a proposição 28 é tecnicamente o inverso do quinto postulado, como pode ser verificado:

Proposição 28 Uma reta corta duas outras formando ângulos designados como na Figura 1 . Se $\alpha + \beta$ é igual a dois ângulos retos, então, as duas retas são paralelas.

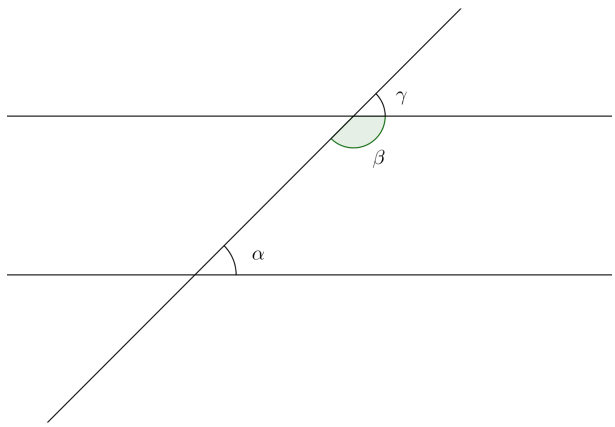


Figura 1 – Proposição 28 de Euclides

A prova dessa proposição, considerando a Figura 1 consiste em observar que $\alpha + \beta = 180^{\circ} \Leftrightarrow \alpha = \gamma$. O quinto postulado trata do que ocorre quando $\alpha + \beta$ for diferente de dois ângulos retos.

Segundo registros de Proclus, Euclides viveu durante o reinado de Ptolomeu I, e este tentou realizar uma prova para este postulado. Proclus notou que a prova estava incorreta (usava a noção de congruência de figuras) e tentou realizar uma demonstração própria, usando a equidistância de retas paralelas, algo que sabe-se ser equivalente ao quinto postulado. Durante muito tempo outros matemáticos tentaram provar o quinto postulado usando os quatro primeiros e a Geometria por eles gerada (as 28 primeiras proposições de Euclides), mas hoje sabe-se que isso é impossível. Muitas dessas provas serão aqui apenas mencionadas, mas podem ser encontradas com detalhes em (BARBOSA, 1995b).

Elementos teve diversas versões e foi traduzido para várias línguas. Após o declínio da civilização Grega, os árabes foram os responsáveis pelo avanço da Matemática. Uma versão dos elementos em árabe foi editada por Nasir-Edin, que viveu de 1201 a 1274. Esse matemático e astrônomo árabe escreveu um tratado sobre o postulado de Euclides, em que tentou demonstrar o quinto postulado. Sua prova foi a primeira a relacionar o quinto postulado com a soma dos ângulos internos de um triângulo, algo que será importante para o desenvolvimento de novas geometrias, como será visto adiante. Outras versões dos Elementos dos séculos XII e XIII baseadas em textos árabes e gregos, não contêm qualquer crítica ao quinto postulado. Tais críticas só se acentuaram a partir da impressão de Os Comentários de Proclus, traduzido para o latim em 1533. A partir daí, uma nova série de Matemáticos abordou e tentou demonstrar o quinto postulado, a maioria deles usando a ideia de que retas paralelas são equidistantes, exceto J. Wallis (1616-1703).

As tentativas de demonstração seguiram com o matemático e filósofo italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). Ele tinha uma particular apreciação pelo método de redução ao absurdo, inclusive escrevendo um tratado de Lógica usando o método de Euclides para fundamentar a Lógica Formal. Usando seu método preferido de demonstração, Saccheri negou o quinto postulado e demonstrou uma série de teoremas, até chegar numa contradição. O trabalho de Saccheri foi tão importante que a figura usada por ele na demonstração ficou conhecida como Quadrilátero de Saccheri, exibido na Figura 2.

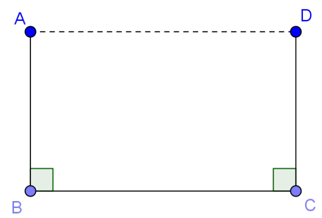


Figura 2 – Quadrilátero de Saccheri

Nesse quadrilátero ABCD, $\overline{AB} = \overline{DC}$ e ambos são perpendiculares a $\overline{BC}$. (BIANCONI, 2011) discorre amplamente sobre as conclusões de Saccheri, por meio de exercícios. Em resumo, Sacheri mostrou que os ângulos internos nos vértices A e D são congruentes usando os quatro primeiros postulados e considerou três possibilidades relativas a medida do ângulo $\measuredangle BAC$ e, pela congruência de ambos, também sobre $\measuredangle CDA$. A de que ele seja reto (hipótese do ângulo reto), obtuso (hipótese do ângulo obtuso) e agudo (hipótese do ângulo agudo).

Segundo (BIANCONI, 2011),

> Ele então mostrou que a hipótese do ângulo reto era equivalente ao quinto postulado; a do ângulo obtuso era contraditória, mas do ângulo agudo teve muitas dificuldades para chegar a uma contradição. Estudiosos da obra de Saccheri acham que no final de sua obra ele "provou" o quinto postulado (numa gritante falha de argumentação, completamente fora da fineza dos argumentos anteriores).(BIANCONI, 2011, p.1)

A dificuldade de Saccheri de mostrar a hipótese do ângulo agudo levou Saccheri a provar vários teoremas clássicos da Geometria não euclidiana, em especial da Geometria Hiperbólica, mesmo sem que ele notasse que o fez.

Heinrich Lambert (1728-1777) adotou um quadrilátero parecido com o de Saccheri, mas com três ângulos retos, considerando, inclusive, as mesmas três hipóteses de Saccheri para o quarto ângulo. Assim como seu precursor, descartou a hipótese do ângulo reto, mas chegou a conclusões mais significativas que aquelas propostas por Saccheri, a saber: a área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma dos ângulos internos do triângulo e dois ângulos retos; a hipótese do ângulo obtuso é verdadeira se o triângulo for esférico, não plano, pois nesse caso a soma dos ângulos internos é maior do que dois retos e a área do triângulo é proporcional ao excesso gerado pela diferença entre a soma e dois ângulos retos; as propriedades por ele afirmadas sobre triângulos esféricos podem ser demonstradas independente das retas paralelas; a hipótese do ângulo agudo deve ocorrer na superfície de uma esfera de raio imaginário.

Nota-se que Lambert se aproximou muito da descoberta da Geometria Elíptica (quando a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos) e da Geometria Hiperbólica.

Essa incessante busca para uma prova do quinto postulado levou não só ao surgimento de novas geometrias, mas maneiras de axiomatizar a Geometria Euclidiana. No esforço de negar o quinto postulado foram encontradas proposições que poderiam substituí-lo, os chamados postulados *substitutos*. A teoria gerada pelos 4 primeiros postulados junto do substituto deve coincidir com a Geometria Euclidiana. Segundo (BARBOSA, 1995b), para que uma proposição P seja um postulado substituto deve-se provar que:

(i) P é uma proposição da Geometria Euclidiana;

(ii) Na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados junto de P, é possível demonstrar o quinto postulado de Euclides como uma proposição.

Para a segunda parte, pode-se contar com as vinte e oito primeiras proposições de Euclides, uma vez que deve ser assumida a validade dos quatro primeiros postulados. O postulado substituto mais conhecido e utilizado por grande parte das bibliografias atuais é o

Axioma de Playfair: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

É por sua formulação que o quinto postulado é hoje referenciado como o Postulado das Paralelas de Euclides (apesar de o postulado de Euclides não mencionar paralelas).

O axioma de Playfair é um substituto pois:

(i) Ele é uma proposição da Geometria euclidiana: Dados uma reta m e um ponto P fora de m. Trace a reta perpendicular à m passando por P, a saber p. Em seguida, trace a reta n, perpendicular a p passando por P (Figura 3). A Proposição 27 de

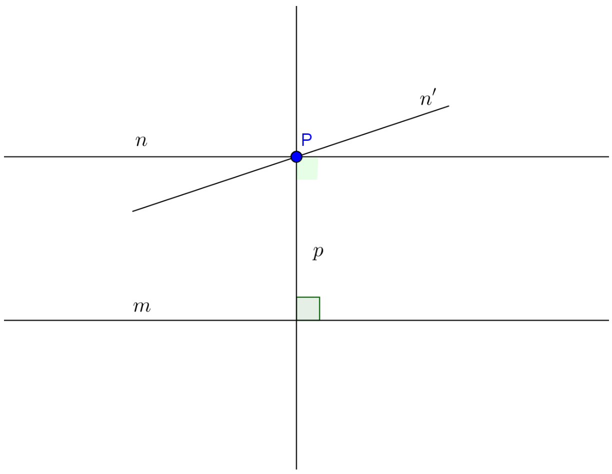


Figura 3 – Verificação do Axioma de Playfair, substituto na Geometria Euclidiana

Euclides afirma que

Proposição 27 Se uma reta corta outras duas formando ângulos correspondentes iguais, então, as duas retas são paralelas.

Como os ângulos formados pelas retas m e n com a reta p são ambos retos, $m \parallel n$. Suponha que exista uma reta n', diferente de n paralela à m passando por P. Esta reta forma um ângulo agudo com n. Logo, pelo quinto postulado de Euclides, n' intercepta m, o que é um absurdo. Logo, por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a reta dada.

(ii) O quinto postulado pode ser demonstrado usando os quatro primeiros e o Axioma de Playfair. Considere a Figura 4 onde deve-se supor que $\alpha + \beta$ é menor que dois ângulos retos e que as duas retas m e m' são paralelas. Traça-se pelo ponto $S \in m'$ uma reta n' formando um ângulo β' tal que $\alpha + \beta'$ seja igual a dois ângulos retos. Pela Proposição 27, $n' \parallel m$. Logo m' e n' são duas retas paralelas a m passando por S, o que é um absurdo segundo o Axioma de Playfair. Assim, m e m' não podem ser paralelas, ou seja, devem se encontrar no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos (quinto postulado de Euclides).

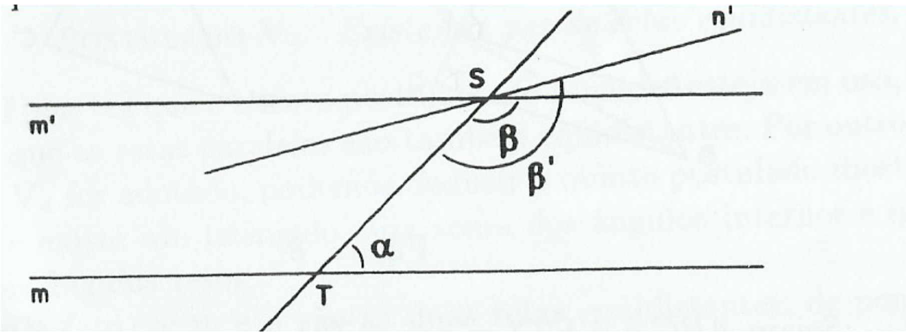


Figura 4 – Demonstração do quinto postulado usando o Axioma de Playfair

Fonte:(BARBOSA, 1995b, p.10)

(BARBOSA, 1995b) ainda cita e demonstra que muitos outros postulados podem ser substitutos, por exemplo:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Existe um par de ângulos semelhantes e não congruentes.
- Existe um par de retas equidistantes.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por esses três pontos.
- Se três ângulos de um quadrilátero são retos, o último também é reto.
- Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.

O profundo estudo da Geometria proposta por Euclides por várias mentes importantes levou a um amplo conhecimento sobre o assunto. Era uma questão de tempo até que alguém notasse que as hipóteses geradas ao negar o quinto postulado para tentar demonstrá-lo levavam a geometrias diferentes da Euclidiana. Apesar de Lambert chegar muito perto de encontrá-las, muitas evidências apontam que o responsável por fazê-lo foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Em várias correspondências e comentários a respeito de tentativas de provas do quinto postulado, Gauss destaca que já havia obtido vários resultados de uma Geometria diferente, como mostra uma carta traduzida em (BARBOSA, 1995b):

> A hipótese de que a soma dos ângulos é menor que 180° leva a uma Geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana) mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no

> sentido que posso resolver qualquer problema nela, [...] Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nessa Geometria não euclidiana não tiveram sucesso. (BARBOSA, 1995b, p.38-39)

Gauss foi um dos primeiros a usar o termo Geometria não euclidiana, mas nunca publicou os resultados que encontrou, talvez por medo de perseguição da Igreja Católica na época da Inquisição.

Um amigo de Gauss durante o seu período em Göttingen, Wolfgang Bolyai (Bolyai Farkas, 1775-1856) também estudava a Geometria Euclidiana, tentando obter uma demonstração para o quinto postulado de Euclides. Uma de suas provas foi refutada por Gauss e a outra foi por ele ignorada. Concentrado em outras áreas, seu filho, Johann Bolyai (Bolyai Janos, 1802-1860) teve particular interesse pelo estudo da Teoria das Paralelas. Assim como seu precursor, Johann substituiu o quinto postulado por uma afirmação contrária a ele, desenvolvendo vários resultados de uma Geometria diferente. Foi Johann que levantou a possibilidade de desenvolver uma Geometria Geral, da qual a Geometria Euclidiana seria apenas um caso particular. Como será visto adiante, foi essa uma das ideias que consolidou as Geometrias não euclidianas, a partir do trabalho de Riemann, que será destacado em seguida.

Bolyai notou que ao negar o quinto postulado, uma das hipóteses poderia ser verdadeira: não poderia existir qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta ou poderia haver mais de uma reta paralela à reta dada passando por um ponto fora dela. A primeira hipótese foi por ele descartada, pois essa decorre dos quatro primeiros postulados. Ele observou que se existissem duas retas paralelas, teriam de haver infinitas retas paralelas a uma reta passando por um ponto fora dela. Ao comunicar ao seu pai os resultados que havia encontrado, Wolfgang Bolyai os encaminhou para Gauss, para descobrir sua opinião. Gauss nunca recebeu o material enviado por Wolfgang e mesmo assim as conclusões de Johann foram publicadas como anexo de *Tentamen*, uma obra de seu pai. Ao receber tal obra, Gauss escreveu a Wolfgang que o trabalho do filho dele era muito próximo do que o próprio Gauss havia encontrado e sobre o que ele refletia por um período de mais de trinta anos, confessando que preferiria que seu trabalho não fosse descoberto em vida, tamanha estranheza dos resultados encontrados. Johann ficou desapontado com a resposta de Gauss, mas esse não era o único com quem dividiria a descoberta de uma nova Geometria.

Por volta de 1829, o russo Nikolai Ivanovich Lobatchewski (1793-1856) publicou um artigo sobre uma conferência que realizou em 1826 para os Matemáticos da Universidade de Kasan. Nessa conferência ele sugeriu uma Geometria muito semelhante a encontrada por Gauss e Bolyai, mas usando métodos diferentes de demonstração. Segundo (FEITOSA; LOCCI, 1981) foi essa a primeira publicação oficial sobre Geometrias não euclidianas, que expõe a conferência de Lobatchewski e toda a teoria por ele desenvolvida. Essa teoria consiste na substituição do quinto postulado pela proposição “por um ponto P fora de uma reta podemos traçar mais de uma reta do plano que não a encontra” e uma das conclusões era de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois ângulos retos.

Gauss e Bolyai não ficaram sabendo da descoberta de Lobatchewski até anos mais tarde. Primeiramente por ser escrita em russo, e depois por não atrair muita atenção no seu país de origem. Para reverter essa situação, Lobatchewski escreveu tratados em alemão e francês, mas morreu sem ter seu trabalho reconhecido. Foi somente em 1846 que Gauss reconhece seus méritos, destacando que os resultados eram parecidos com os seus, mas mostrados de maneira diferente. Em 1848, o pai de Johann Bolyai obteve acesso, com ajuda de Gauss, ao material de Lobatchewski, repassando-o a seu filho. Somente depois da morte de Johann que foram encontrados anotações suas enaltecendo o trabalho de Lobatchewski e esperando que um dia tal conhecimento fosse aceito em qualquer lugar do mundo.

Ainda assim, a Geometria Hiperbólica desenvolvida por esses três Matemáticos não foi amplamente aceita pela comunidade científica do século XIX. Seria necessário encontrar um novo olhar a respeito da natureza da Geometria, e, mais importante ainda, era preciso revisitar os Elementos de Euclides. Sendo a primeira tentativa de aplicação de uma teoria axiomática, dificilmente o trabalho de Euclides seria isento de defeitos. De fato, Euclides usou de várias hipóteses não contempladas em seus axiomas, dentre as quais, (BARBOSA, 1995b) destaca: retas são conjuntos ilimitados; Axioma de Pasch (sendo A, B e C três pontos não colineares e sendo m uma reta que não contém nenhum destes pontos, se m corta o segmento $\overline{AB}$, então ela também corta o o segmento $\overline{BC}$) e a continuidade das retas. Além disso, a própria formulação dos postulados possui omissões graves, como no primeiro postulado, em que a reta determinada por dois pontos não tem a exigência da unicidade, ou no segundo, quando não se admite que uma reta pode ser continuada de uma única maneira. Esses problemas levaram vários Matemáticos do final do século XIX e início do século XX a tentar aperfeiçoar a teoria de Euclides. O mais notável foi David Hilbert (1862-1943), cujas notas de aula de um curso sobre Geometria foram publicadas em 1889, entituladas Fundamentos de Geometria. Hilbert elaborou um novo conjunto de axiomas separados em grupos, cada grupo com um conceito central de onde derivam todas as proposições. Esses grupos são

1. Axiomas de incidência (noção de estar em).
2. Axiomas de ordem (noção de ocorrer primeiro).
3. Axiomas de congruência (noção de congruência).
4. Axioma de continuidade.

5. Axioma das paralelas.

Esses axiomas são os mesmos adotados por (BARBOSA, 1995a), recomendado se o leitor deseja aprofundar seus conhecimento em Geometria Euclidiana.

Outro passo para a aceitação das Geometrias não euclidianas foi a criação de modelos de Geometria não euclidiana que permitiam interpretar os fatos da nova geometria em termos da própria Geometria Euclidiana. Eugênio Beltrami (1835-1900) em 1868, ao propor um desses modelos, acabou por demonstrar que é impossível construir uma demonstração para o quinto postulado. Mostrou que a possibilidade de se encontrar uma contradição na geometria hiperbólica é a mesma que na geometria euclidiana: a geometria euclidiana é consistente se, e somente se, a geometria hiperbólica é consistente. Os modelos forneceram visualizações concretas das novas e estranhas proposições, mudando a ênfase dos objetos em estudo para as propriedades entre eles. (ALVES; FILHO, 2013) escreve que

> é irrelevante o que são os pontos e as retas propriamente ditos. O importante são as propriedades e relações entre eles enunciadas nos postulados e nas proposições que deles decorrem. A partir dessa ideia surgem os chamados modelos de Geometria (considerada como um sistema axiomático), que nada mais são do que uma interpretação para os seus conceitos primitivos de modo que seus postulados tornem-se afirmações verdadeiras.

Os principais modelos de Geometria Hiperbólica são os propostos por Beltrami, Klein e Poincaré. O modelo elaborado por Beltrami (1835-1900) consiste em considerar o plano como uma superfície chamada de pseudo-esfera (Figura 5), onde a Geometria

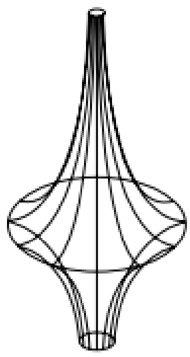


Figura 5 – Pseudo-esfera, modelo exposto por Beltrami para a Geometria Hiperbólica

Fonte:(FEITOSA; LOCCI, 1981, p.68)

proposta por Bolyai, Lobatchewski e Gauss ocorre toda sobre ela. O modelo de Poincaré é um disco plano, conhecido como Disco de Poincaré e (ALVES; FILHO, 2013) o descreve, mostrando como podem ser visualizadas algumas propriedades da Geometria Hiperbólica.

Voltando às hipóteses de Lambert e Saccheri, sabemos que a hipótese do ângulo reto corresponde a Geometria Euclidiana, a do ângulo agudo gera a Geometria Hiperbólica. Para que a hipótese do ângulo obtuso seja verdadeira, é necessário modificar o primeiro postulado de Euclides e substituir o quinto pela proposição: duas retas sempre se interceptam, o que implica na não existência de retas paralelas na geometria associada a hipótese do ângulo obtuso. Para que ela seja válida, temos que modificar o primeiro postulado para que ele garanta a existência de uma reta, não necessariamente única, que passa(m) por dois pontos dados. Com isso, tem-se a Geometria Elíptica, que na verdade já tinha uma versão primitiva em utilização por navegadores, envolvendo a trigonometria associada a essa geometria. Foi George Friederich Riemann (1826-1866) que propôs essa Geometria, que também ficou conhecida como Geometria Riemanniana. O seu modelo mais simples é uma esfera, que seria o plano, e retas são os círculos máximos dessa esfera, como mostra a Figura 6.

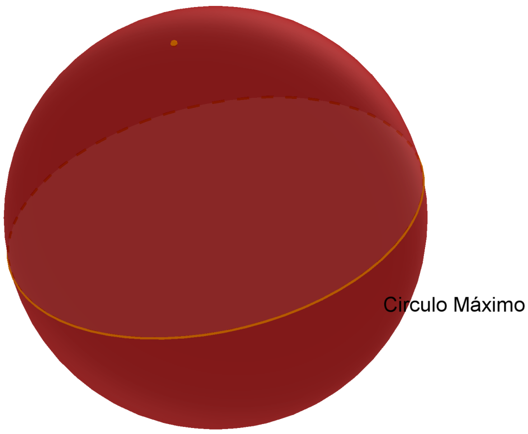


Figura 6 – Modelo de Geometria Elíptica com um círculo máximo representando uma reta

No entanto, Riemann foi além da Geometria Elíptica. Em 1854, sua tese de doutorado "As hipóteses sobre as quais se baseiam a Geometria" unificou as Geometrias Euclidianas, Hiperbólica e Elíptica usando da Geometria Diferencial que havia sido desenvolvida por Gauss (Riemann, aliás, foi um dos mais brilhantes alunos de Gauss). Segundo (FEITOSA; LOCCI, 1981), Riemann notou um importante conceito até então ignorado no estudo de Geometrias:

> Riemann percebeu que entre os conceitos mais importantes em qualquer geometria está o de "métrica" que é uma função para determinar a distância entre dois pontos que podem estar infinitesimalmente próximos um do outro. Na geometria euclidiana ordinária, por exemplo, o espaço com a métrica usual (fórmula da distância) é chamado de espaço euclidiano. Um espaço com uma métrica formulada por Riemann passou a

> ser chamado de espaço riemanniano e o espaço euclidiano é, localmente, apenas um caso especial deste.

Com a definição do conceito de curvatura também desenvolvido por seu mestre Gauss, estabeleceu que os modelos de geometria dependem da curvatura da superfície considerada. Por exemplo, a curvatura normal do plano é zero, enquanto que a de uma esfera é positiva e a de uma pseudo-esfera é negativa, correspondendo, respectivamente a modelos de Geometria Euclidiana, Elíptica e Hiperbólica. A contribuição de Riemann para a validação e generalização das Geometrias não euclidianas é fundamental e serve de fechamento para um dos mais longos capítulos da História da Matemática. Além disso, a descoberta de Riemann foi fundamental para a descoberta da Teoria da Relatividade geral de Einstein.

Outra questão que pode ser levantada em relação ao método axiomático é: o que garante que, mesmo depois de provadas um número muito grande de proposições, não se encontrará um absurdo, ou uma proposição que não seja demonstrável usando os axiomas? O que poderia garantir que o método proposto por Euclides e aprimorado por Hilbert era a prova de defeitos? Mais ainda, pode a Matemática ser totalmente fundamentada no método axiomático? A preocupação com perguntas como essas acompanhou muitos matemáticos e filósofos, durante todo o século XIX. A disciplina de Fundamentos da Matemática procura debater e validar o fazer dos Matemáticos, em especial a relação entre o conhecimento produzido e os sistemas axiomáticos. Essa preocupação com o rigor atingia não só a Geometria, mas também a Álgebra e a Análise. Na Análise, todos os conjuntos numéricos dos Racionais, Irracionais e Inteiros haviam sido construídos com axiomática consistente a partir dos números Naturais, e Richard Dedekind (1831-1916) mostrou que era possível construir os números Naturais usando a noção de conjunto, enquanto Giuseppe Peano (1858-1932) mostrou ser possível construir esses números usando noções primitivas e postulados. Além disso, Hilbert propôs uma correspondência entre elementos geométricos e elementos algébricos, expressando pontos como coordenadas de números reais e retas e círculos por equações que representavam esses pontos.

Com a colocação de Hilbert, a Geometria estaria associada a Análise, e com os trabalhos de Dedekind e posteriormente de Georg Cantor (1845-1918), tudo estaria associado à teoria de conjuntos. Portanto, seria possível desenvolver toda a Matemática a partir da Teoria de Conjuntos, mas mesmo assim, as perguntas propostas no parágrafo anterior ainda se manteriam, ainda mais com as sérias contradições encontradas na Teoria de Conjuntos. Em 1931 o lógico austríaco Kurt Gödel (1606-1978) publicou um artigo em que afirmava que a consistência de qualquer sistema axiomático que incluísse a Aritmética não pode ser estabelecida usando a lógica usual. Ele prova essa afirmação usando o seu teorema da incompletude, que diz que "se uma teoria formal abrangendo a Aritmética for consistente, ela necessariamente será incompleta" (ÁVILA, 2013, p.446).

Isso significa que sempre haverá uma proposição sobre algum conjunto numérico que a teoria não saberá dizer se é verdadeira ou falsa. Com isso Gödel desconstrói a ideia da Matemática como a ciência da certeza absoluta, mostrando que a Matemática pode ser uma ciência em construção, mas cuja validade é evidente por todo o conhecimento por ela fundamentado (em especial a física e a engenharia).

A proposição de Euclides de compilar e organizar toda a Matemática grega por meio de um sistema axiomático tomou por base a Geometria, dada geometrização da Matemática grega. Durante muitos séculos vários Matemáticos estudaram a teoria que Euclides propôs nos Elementos, o que levou ao questionamento do trabalho de Euclides e posteriormente, das próprias bases que fundamentam a Matemática. Na tentativa de demonstrar o quinto postulado, foram encontrados postulados equivalentes a ele e com a sua substituição por afirmações contrárias, novas geometrias foram descobertas, principalmente a Hiperbólica e a Elíptica. Riemann foi o responsável por unificá-las, mostrando que a Geometria Euclidiana é só um caso específico de Geometria num contexto mais amplo, que considera a Geometria Diferencial e a curvatura de superfícies. O caso específico da Geometria Elíptica numa esfera será tratado na seção 3.2.

No próximo capítulo apresentamos uma formulação axiomática da Geometria Espacial Euclidiana de posição, que serve de fundamentação para a atividade de Geometria Espacial que aparece posteriormente. Também são apresentadas algumas propriedades a respeito dos círculos máximos de uma esfera, que fundamentam a segunda atividade, sobre Geometria Esférica.

3 Geometria Espacial Euclidiana de Posição

Neste capítulo é apresentada uma axiomatização para a Geometria Espacial de Posição. Em geral, segundo (DOLCE; POMPEO, 1993), conceitos, termos e entes geométricos são determinados através de *definições* e as proposições ou propriedades são aferidas e justificadas por meio de demonstrações. (LIMA et al., 2006) define uma formulação axiomática como um conjunto de noções primitivas, que são aceitas sem definição, e um conjunto de axiomas ou postulados, que são propriedades assumidas verdadeiras sem demonstrações. Para (CARVALHO, 2005), a escolha dos elementos desses conjuntos deve ser feita com cuidado para que eles expressem indiscutivelmente a intuição e a experiência em lidar com os elementos geométricos básicos. Outro cuidado a ser tomado é o de que a teoria por eles gerada seja:

- *Consistente* - partindo dos postulados, não deve ser possível chegar a contradições ou absurdos;
- *Suficiente* - é sempre possível verificar a validade de uma afirmativa através dos postulados ou das proposições decorrentes deles.

Observados esses critérios, a escolha dos postulados é livre. Nas três bibliografias citadas nessa seção, há pequenas diferenças entre propriedades tomadas como axiomas e quais são decorrentes deles. A teoria aqui desenvolvida se dá partindo dos axiomas propostos por (DOLCE; POMPEO, 1993), por ser considerada mais completa (pois não assume a Geometria Plana inteira válida, como (CARVALHO, 2005)), ser muito utilizada em cursos de Geometria Espacial na graduação e por apresentar uma abordagem acessível para o Ensino Médio. São abordados os postulados, teoremas e proposições relevantes para a atividade sugerida.

3.1 Ponto, Reta e Plano

Os elementos primitivos da Geometria Espacial são o ponto, a reta e o plano, exibidos na Figura 7. Como é feito usualmente, pontos são denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino, retas por letras minúsculas desse alfabeto e planos por letras minúsculas do alfabeto grego. O espaço é o conjunto de todos pontos e retas, sendo planos subconjuntos de pontos do espaço.

Postulado 1. *Postulado de Existência*

a) Existe uma reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

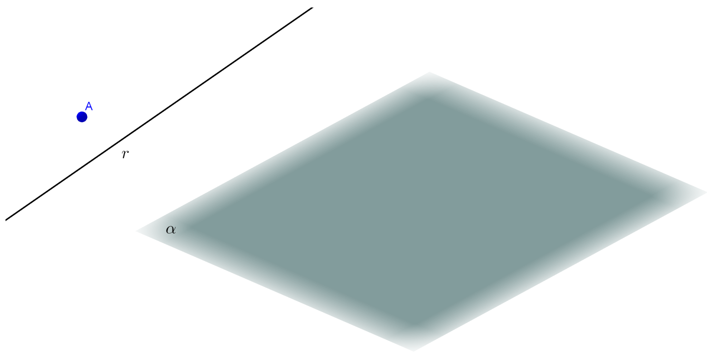


Figura 7 – Ponto A, reta r e plano α

b) Existe um plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

Postulado 2. *Postulado de determinação*

a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.

b) Três pontos não colineares determinam um único plano que os contém.

No sentido desse postulado, dados dois pontos A e B, a reta que passa por eles é denotada por $\overleftrightarrow{AB}$. Já o plano determinado por três pontos dados, A, B e C, será denotado por (A, B, C). As Figuras 8 e 9 mostram esses elementos.

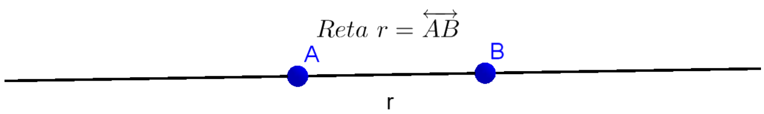


Figura 8 – Postulado de determinação - Reta

Postulado 3. *Postulado de inclusão*
Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

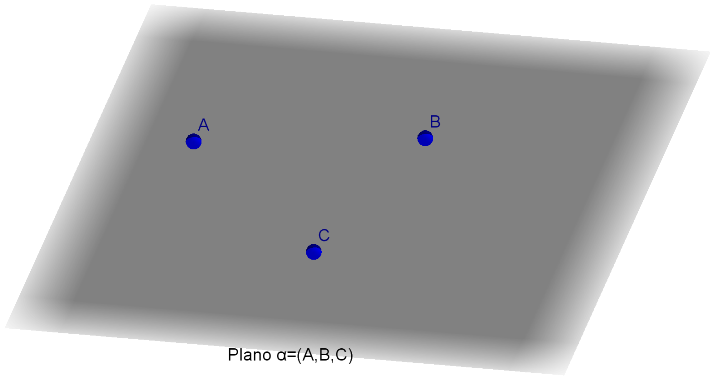


Figura 9 – Postulado de determinação - Plano

Definição 1. Duas retas são chamadas de concorrentes se, e só se, elas têm um único ponto em comum, ou seja, se sua intersecção tem apenas um ponto.

A Figura 10 mostra retas r e s que são concorrentes. Indica-se que $r \cap s = \{P\}$.

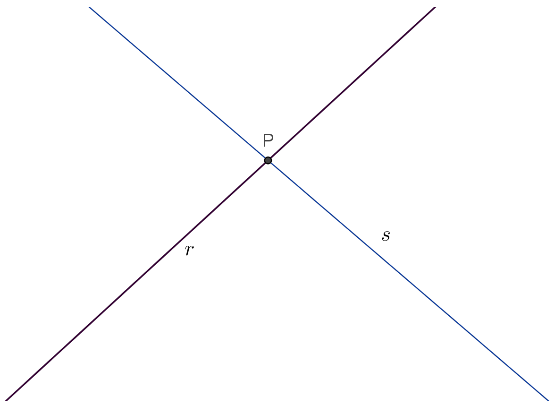


Figura 10 – Retas Concorrentes

Definição 2. Duas retas são paralelas se, e somente se, são coplanares e não têm pontos em comum.

Quando duas retas r e s denotam o mesmo conjunto de pontos, diz-se que são coincidentes. Assim, é importante destacar que não existem retas distintas coincidentes.

A Figura 11 mostra retas paralelas r e s contidas num plano α. Esse fato é denotado por $r \parallel s$. Com estes postulados já é possível provar algumas proposições.

Proposição 1. Num plano existem infinitas retas.

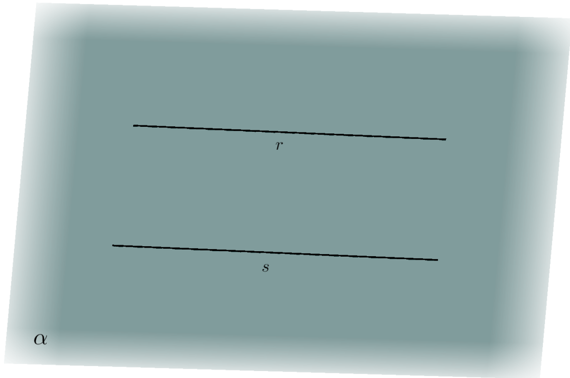


Figura 11 – Retas Paralelas

Demonstração. Seja um plano α e nele dois pontos distintos, A e B. Pelo Postulado 2, esses pontos determinam uma única reta, r. O Postulado 3 garante que $r \subset \alpha$, pois A e B pertencem a α. Seja um ponto C de α fora de r. Os pontos A e C determinam uma única reta $s \subset \alpha$, enquanto B e C determinam uma única reta $t \subset \alpha$, como mostra a Figura 12. Realizando o mesmo procedimento, podemos construir em α tantas retas quantas forem

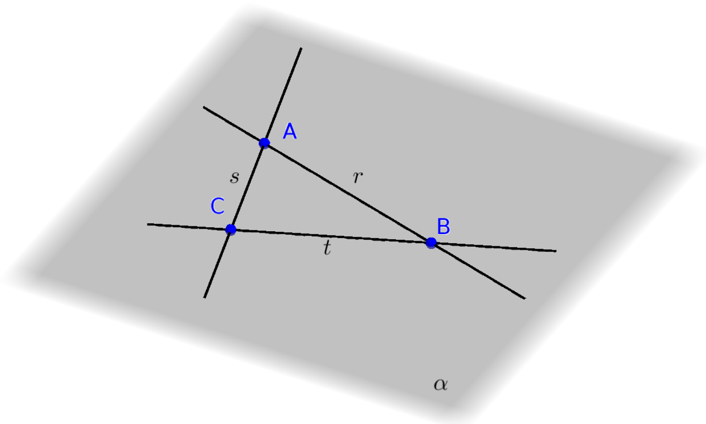


Figura 12 – Construção de infinitas retas no plano desejadas, ou seja, infinitas retas. □

Proposição 2. No espaço há infinitas retas.

Demonstração. Sejam A e B dois pontos no espaço. Seja r a reta por eles determinada. Seja C um ponto do espaço fora da reta r. Os pontos A e C determinam uma única reta t, enquanto que os pontos B e C determinam uma única reta, u, como mostra a Figura 13 Usando esse procedimento, é possível construir quantas retas quanto desejarmos, ou

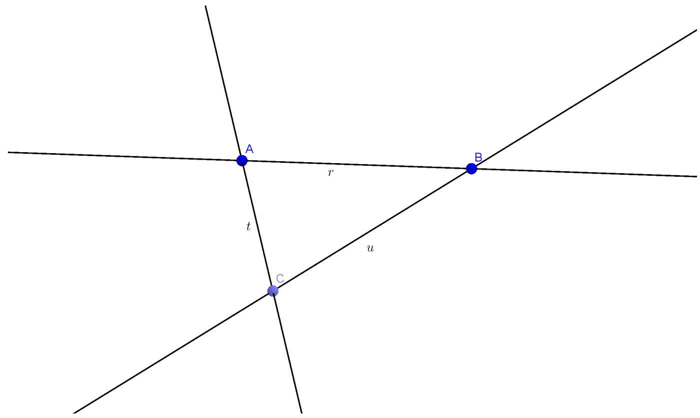


Figura 13 – Construção de infinitas retas no espaço

seja, infinitas retas. □

É sabido que dados três pontos no espaço, existe um único plano por eles determinado (Postulado 2). No entanto, existem outras maneiras de determinar planos. Elas estão expostas nos Teoremas 1, 2 e 3.

Teorema 1. Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém.

Demonstração. Existência: Seja r uma reta no espaço e P um ponto fora dela. Tome em r, dois pontos distintos, A e B. Como A, B e P são pontos não colineares, pelo Postulado 2, existe um único plano α que os contém. A Figura 14 ilustra essa situação. A reta r tem dois pontos nesse plano e, pelo Postulado 3, está contida em α. *Unicidade*: Suponha que existam planos distintos α e α' que passam por r e P. Sejam A e B pontos distintos de r. Aí, tem-se que $\alpha = (A, B, P)$ e que $\alpha' = (A, B, P)$. Logo, $\alpha = \alpha'$, contrariando a hipótese de ser possível existir dois planos que contenham simultaneamente r e P. Portanto, o plano determinado por uma reta e um ponto é único. □

Teorema 2. Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.

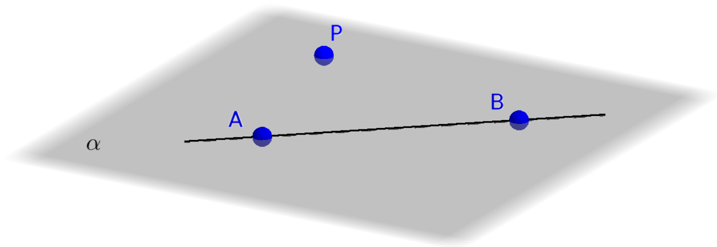


Figura 14 – Plano determinado por uma reta e um ponto

Demonstração. Existência: Sejam r e s duas retas concorrentes no espaço. Assim, $r \cap s = \{P\}$. Sejam os pontos $A \in r$ e $B \in s$, ambos diferentes de P. Como os pontos A, B e P são não colineares, eles determinam um único plano α, pelo Postulado 2. Como $A \in r$ e $P \in r$ então $r \subset \alpha$ (Figura 15).

Analogamente, como $B \in s$ e $P \in s$, então $s \subset \alpha$. Portanto, existe um único plano α que é determinado por r e s.

Unicidade: Suponha a existência de planos distintos α e α', ambos determinados pelas retas concorrentes r e s, com $r \cap s = \{P\}$. Sejam os pontos $A \in r$ e $B \in s$. Assim, $\alpha = (A, B, P)$ e $\alpha' = (A, B, P)$. Portanto, $\alpha = \alpha'$, contrariando a hipótese de α e α' serem distintos. Logo, existe um único plano determinado por duas retas concorrentes. $\square$

Teorema 3. Se duas retas distintas são paralelas entre si, então elas determinam um único plano que as contém.

Demonstração. Existência: Decorre diretamente da definição de retas paralelas (Definição 2). *Unicidade*: Suponha que existam planos α e α' que contenham as retas paralelas r e s. Tome A e B distintos em r e $P \in s$. Aí, $\alpha = (A, B, P)$ e $\alpha' = (A, B, P)$. Dessas duas igualdades decorre que $\alpha = \alpha'$. Assim, o plano determinado por duas retas paralelas é único.

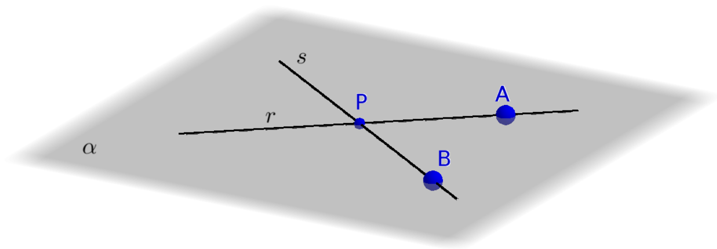


Figura 15 – Plano determinado por duas retas concorrentes

Unicidade: Suponha a existência de dois planos distintos, α e β tais que ambos contenham as retas paralelas r e s. Tomam-se os pontos $A, B \in \alpha$ e $P \in \beta$. Nesse caso, tem-se que $\alpha = (A, B, P)$ e que $\beta = (A, B, P)$. Logo, $\alpha = \beta$, contrariando a hipótese de α e β serem distintos. □

Assim, é possível determinar planos de quatro maneiras, como destaca a Tabela 1.

Tabela 1 – Determinação de Planos

Elementos	Postulado/Proposição	Notação
Três pontos não colineares, A, B e C	Postulado 2	(A, B, C)
Uma reta r e um ponto $P \notin r$	Teorema 1	(r, P)
Duas retas, r e s, concorrentes	Teorema 2	(r, s)
Duas retas, r e s, paralelas	Teorema 3	(r, s)

Proposição 3. Por uma reta passam infinitos planos.

Demonstração. Seja uma reta r no espaço e um ponto A tal que $A \notin r$. Pelo Teorema 1, existe um plano $\alpha = (r, A)$ determinado por r e A. Tome um ponto B fora de (r, A).

Novamente pelo Teorema 1, é determinado um plano $\beta = (r, B)$ que contém r e é diferente de (r, A). O mesmo pode ser feito para um ponto C fora de α e β, com $\gamma = (r, C)$. A Figura 16 ilustra a construção. O Postulado 1 garante que esse procedimento pode ser

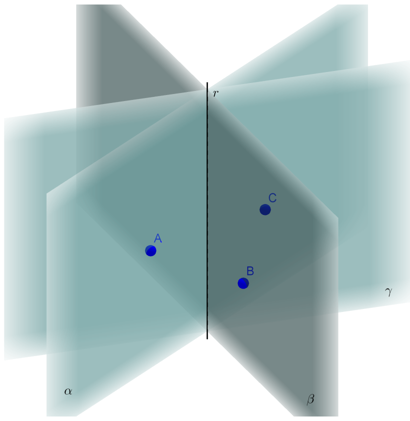


Figura 16 – Construção de infinitos planos no espaço

repetido quantas vezes quanto for desejado, construindo assim infinitos planos que passam por r. $\square$

As definições 2 e 1 introduziram retas Paralelas e Concorrentes, e os Teoremas 1 e 2 mostraram que cada par dessas classes de reta determina um único plano que as contém. Ainda resta estudar o caso em que dados duas retas, não existe um plano que as contenha.

Definição 3. Duas retas são chamadas de retas *reversas* se, e somente se, não existe plano que as contenha.

A Figura 17 exibe retas reversas obtidas do GeoGebra. Os detalhes de como construí-las são mostrados na Questão 7 da atividade proposta. Sejam duas retas reversas

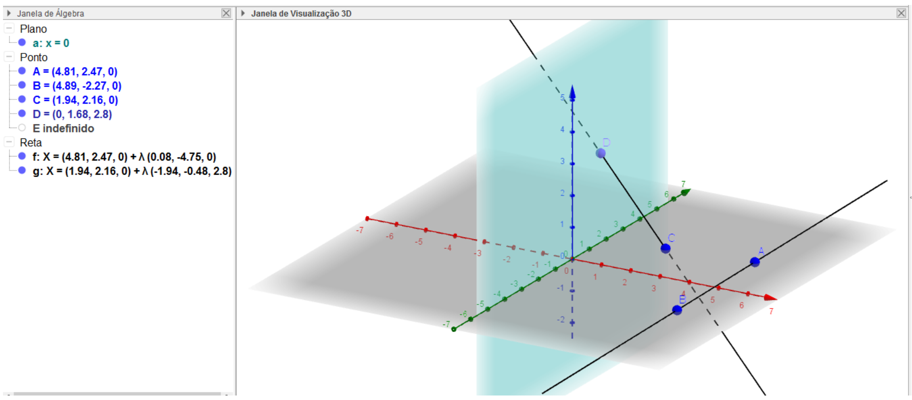


Figura 17 – Retas Reversas construídas no GeoGebra

p e q, elas não podem ser paralelas nem concorrentes (pois essas determinam um plano que as contém). Também por não serem concorrentes, não pode ocorrer que a intersecção de ambas seja um único ponto. Pelo Postulado 2, se elas tiverem mais de um ponto em comum, elas são coincidentes. Portanto, pode-se afirmar que $p \cap q = \varnothing$

As Figuras 18 e 19 mostram uma sistematização das possíveis posições relativas entre duas retas. Observa-se que os esquemas referem-se a duas retas r e s distintas, excluindo assim o caso em que r e s são coincidentes.

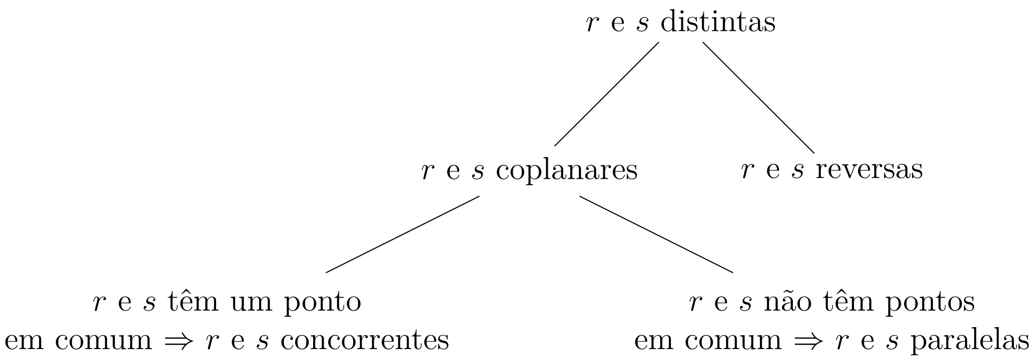


Figura 18 – Primeira sistematização das posições relativas entre duas retas

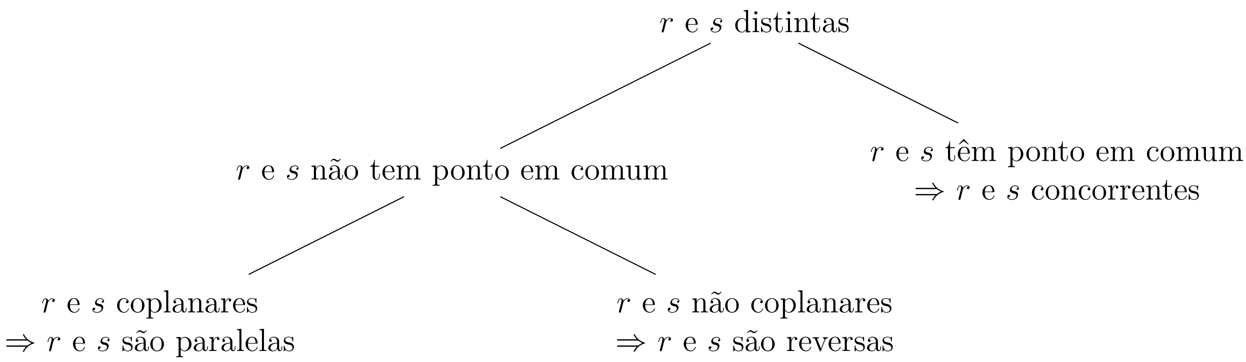


Figura 19 – Segunda sistematização das posições relativas entre duas retas

Para o estudo das posições relativas entre dois planos, um novo postulado faz-se necessário.

Postulado 4. Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles têm pelo menos um outro ponto em comum.

Teorema 4. *Teorema da intersecção.* Se dois pontos distintos têm um ponto em comum, então a intersecção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

Demonstração. Sejam α e β planos distintos do espaço e P um ponto que pertence a ambos os planos. Pelo Postulado 4, existe um outro ponto, Q tal que $Q \in \alpha$ e $Q \in \beta$(item a) da Figura 20).

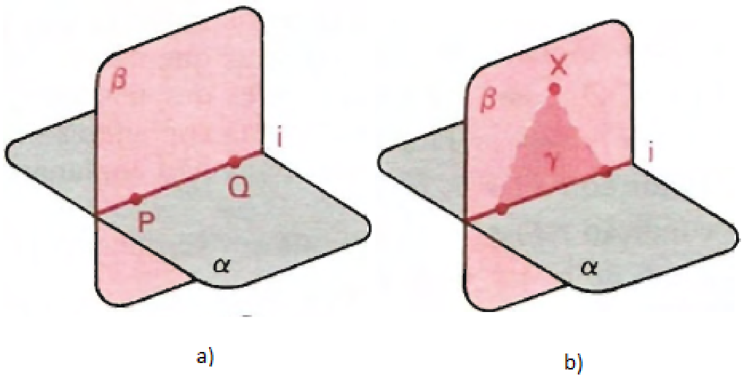


Figura 20 – Demonstração do Teorema 4

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.14)

O Postulado 2 garante a existência de uma reta i que contém os pontos P e Q. Como i tem dois pontos em α e dois pontos em β, o Postulado 3 garante que $i \subset \alpha$ e $i \subset \beta$. Assim, a reta i é comum aos planos α e β. Resta mostrar que os pontos dessa reta são os únicos pontos de intersecção entre α e β. Deseja-se mostrar que $\alpha \cap \beta = i$. Para isso, é preciso mostrar que:

(i) $i \subset (\alpha \cap \beta)$: Isso já foi provado na primeira parte dessa demonstração.

(ii) $(\alpha \cap \beta) \subset i$: Suponha suponha para obter um absurdo que exista um ponto X tal que $X \in \alpha$ e $X \in \beta$, mas $X \notin i$. Assim, existe o plano (i, X). No entanto, como $X \in \alpha$ e $i \subset \alpha$, $(i, X) = \alpha$ (item b) da Figura 20). Analogamente, pode-se escrever que $(i, X) = \beta$, pois $X \in \beta$ e $i \subset \beta$. Portanto, $\alpha = (i, X) = \beta$, ou seja, $\alpha = \beta$. Essa última igualdade é um absurdo, pois era suposto que α e β eram planos distintos. Logo, $\nexists X$ tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$.

Assim fica provado que todos os pontos que pertencem em α e em β estão em i. $\square$

Definição 4. Dois planos distintos que se interceptam (ou se cortam) são chamados de *Secantes* ou *Concorrentes*. A reta comum é a intersecção desses planos ou o *traço* de um deles no outro.

Uma propriedade interessante pode ser aferida a partir da definição de planos secantes.

Teorema 5. *Teorema dos três planos secantes.* Se três planos distintos são dois a dois secantes, segundo três retas, ou essas retas passam por um mesmo ponto ou são paralelas duas a duas.

Demonstração. Sejam três planos distintos, α, β e γ, tais que são dois a dois secantes, ou seja, $\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \alpha = c$. As retas a, b e c podem ser:

1º caso - Coincidentes: Nesse caso, as três retas têm todos os pontos em comum, ou seja, a, b e c passam por um mesmo ponto. Esse caso é ilustrado pela Figura 21.

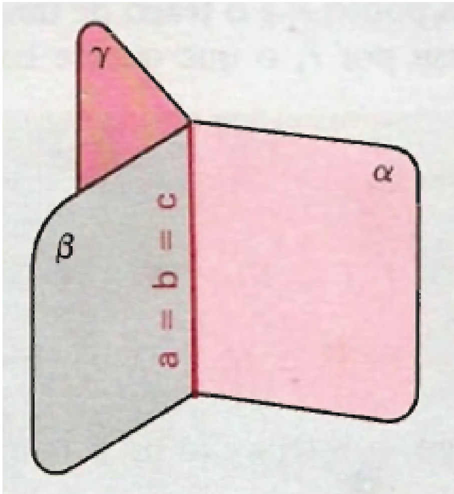


Figura 21 – Planos dois a dois secantes segundo retas coincidentes

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.14)

2º caso - Duas a duas distintas, duas delas concorrentes: Suponha agora que $a \neq b$, $a \neq c$ e $c \neq b$. Suponha que a e b são concorrentes, ou seja, existe um ponto P tal que $a \cap b = \{P\}$. Usando as igualdades $\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \alpha = c$, e fazendo as substituições necessárias, obtemos as implicações:

$$a \cap b = \{P\} \Rightarrow (\beta \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \gamma) = \{P\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$$

$$\Rightarrow (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow c \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow P \in c.$$

Assim, $a \cap b \cap c = \{P\}$, ou seja, as três retas incidem num mesmo ponto, como mostra a Figura 22.

3º caso - Duas a duas distintas, duas delas paralelas: Suponha que as retas a e b sejam paralelas e distintas. As retas a e c são coplanares, ambas pertencem ao plano β. Suponha que existe um ponto Q tal que $a \cap c = \{Q\}$. Pelo item anterior, a e c são concorrentes e devemos ter que $a \cap b \cap c = \{Q\}$. Isso implica que $a \cap b = \{Q\}$, o que é um absurdo, pois a e b são paralelas. Portanto, a e c são também paralelas. Adotando um procedimento análogo, prova-se que $b \parallel c$. Assim, se um par de retas distintas for paralela, as outras retas serão, duas a duas, paralelas. A Figura 23 é um exemplo desse caso. □

Antes de continuar estudando as posições relativas entre dois planos, é necessário estudar as posições relativas entre uma reta e um plano.

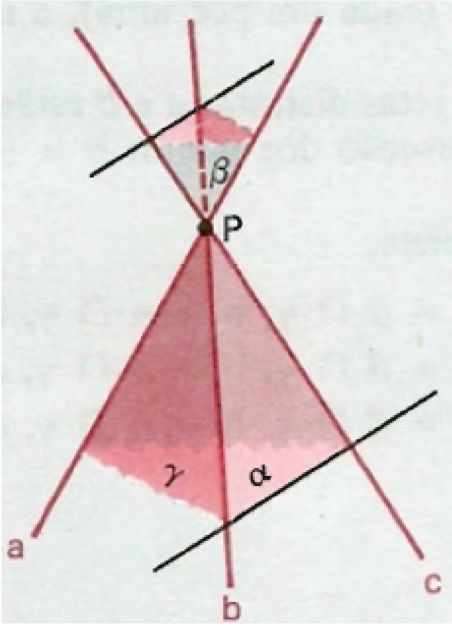


Figura 22 – Planos dois a dois secantes segundo duas retas concorrentes

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.15)

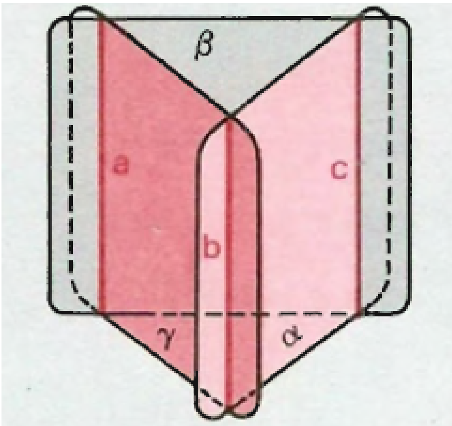


Figura 23 – Planos dois a dois secantes segundo retas paralelas

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.15)

Definição 5. Se uma reta r e um plano α possuem um único ponto em comum, r e α são chamamos de *concorrentes* ou *secantes*.

A Figura 24 mostra a reta r concorrente ao plano α. Nesse caso, escreve-se que $r \cap \alpha = \{A\}$.

Definição 6. Uma reta é paralela a um plano (ou o plano é paralelo à reta) se, e somente se, eles não têm ponto em comum.

A Figura 25 mostra o plano α e a reta r, a reta r é paralela ao plano α e vice-versa.

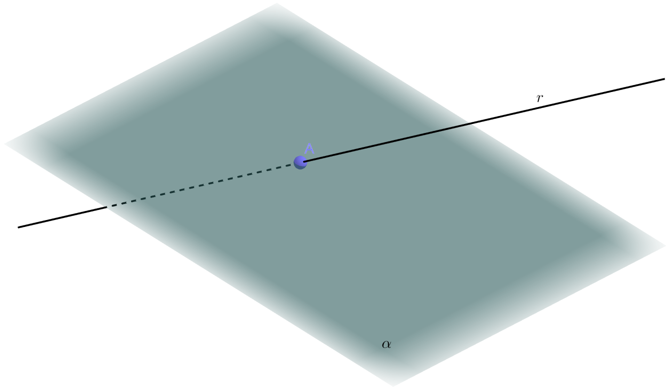


Figura 24 – Plano e reta concorrentes ou secantes

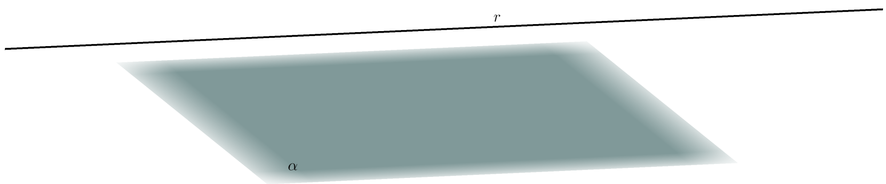


Figura 25 – Reta e plano paralelos

Nota-se essa situação por $r \cap \alpha = \varnothing$.

Teorema 6. *Existência de retas e planos paralelos.*

a) Condição necessária: Se um reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

b) Condição Suficiente: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

Demonstração. Condição Necessária: Seja um plano α no espaço, uma reta $b \subset \alpha$ e uma reta a não contida no plano α tal que $a \parallel b$. Como a e b são paralelas, existe um plano $\beta = (a, b)$, diferente de α, que as contém. Como $b \subset \alpha$ e $b \subset \beta$, tem-se que $\alpha \cap \beta = b$

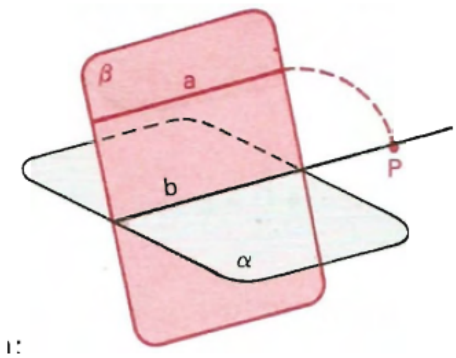


Figura 26 – Demonstração da condição necessária para que uma reta seja paralela ao plano

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.19)

(Figura 26). Suponha que a e α tem um ponto em comum P. Daí tem-se que $P \in a$ e $a \subset \beta$, ou seja, $P \in \beta$. Isso implica que $a \cap b = \{P\}$, o que é um absurdo, pois a e b são paralelas. Portanto a e α não tem ponto em comum, isto é, $a \parallel \alpha$.

Condição Suficiente: Seja um plano α, uma reta a tal que $a \parallel \alpha$ e β um plano que passa por a e intercepta β numa reta b, como mostra a Figura 27. As retas a e b são

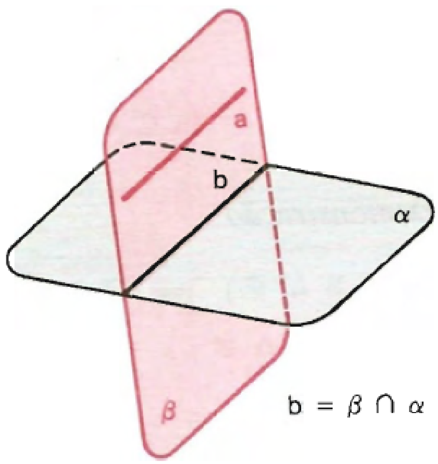


Figura 27 – Demonstração da condição suficiente para que uma reta seja paralela ao plano

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.19)

coplanares, pois estão em β. Como $a \cap \alpha = \varnothing$ e $b \subset \alpha$, $a \cap b = \varnothing$. Portanto, $a \parallel b$. $\square$

Agora, é possível analisar todas as posições relativas entre uma reta r e um plano α segundo a Tabela 2.

Resta analisar as posições relativas entre dois planos. A demonstração da condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos depende da versão espacial do

Tabela 2 – Posições Relativas entre uma reta r e um plano α

Posição	Condição	Postulado/Proposição
$r \subset \alpha$	r tem dois pontos em α	Postulado 3
r e α são secantes ou concorrentes	intersecção de r e α é um único ponto P	Definição 5
r e α são paralelos	r e α não possuem pontos em comum	Definição 10

polêmico quinto Postulado de Euclides e uma decorrência direta dele, exposta em seguida.

Postulado 5. *Postulado das paralelas - postulado de Euclides* Por um ponto não pertencente a uma reta existe uma única reta paralela a uma reta dada.

Proposição 4. Se duas retas distintas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

Demonstração. Se um par delas for coincidente, a afirmação é imediata. Sejam as retas a, b e c distintas no espaço tais que $a \parallel c$ e $b \parallel c$. Da definição retas paralelas, existem os planos $\beta = (a, c)$ e $\alpha = (b, c)$. Daí, $\alpha \cap \beta = c$. Seja um ponto P pertencente a b. Tome o plano $\gamma = (a, P)$. O ponto P pertence ao plano γ e também pertence ao plano α. Do Postulado 4, α e γ têm uma reta x em comum (Figura 28). Como α, β e γ são planos

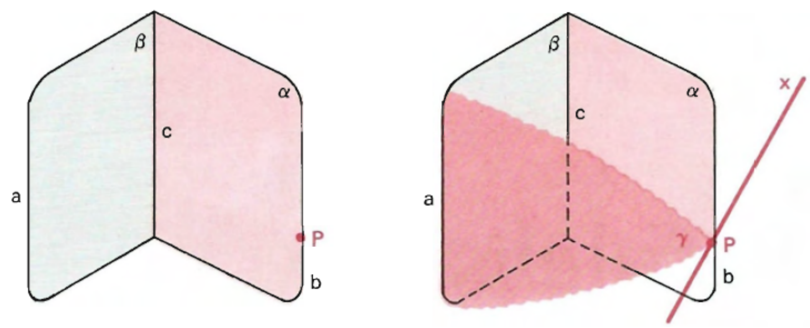


Figura 28 – Demonstração da transitividade da relação de paralelismo entre retas no espaço

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.18)

secantes e $a \parallel c$, então $a \parallel x$ e $c \parallel x$, pelo Teorema 5. O ponto P pertence às retas b e x e ambas são paralelas à reta c. O postulado 5 garante que isso não pode ocorrer. Logo, $x = b$. Como $a \parallel x$ e $x = b$, temos que $a \parallel b$. $\square$

A Figura 28 ilustra a Proposição 4.

Definição 7. Dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto em comum.

Assim, dois planos α e β são paralelos se $\alpha \cap \beta = \varnothing$. A Figura 29 exibe planos paralelos.

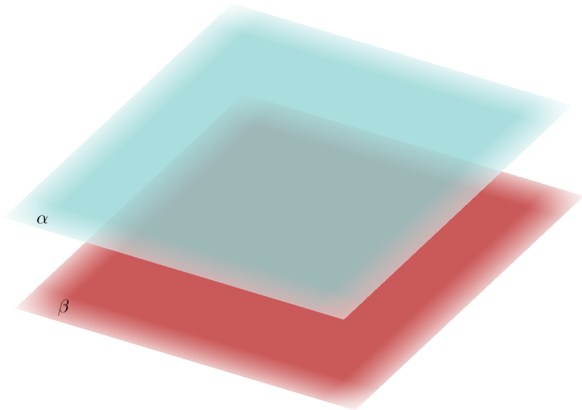


Figura 29 – Planos paralelos no espaço

Teorema 7. *Existência de Planos Paralelos* Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes ambas paralelas ao outro.

Demonstração. A condição necessária é evidente. Para a condição suficiente, sejam α e β planos distintos no espaço, a e b retas concorrentes em β e ambas paralelas a α. Suponha que exista uma reta i tal que $\alpha \cap \beta = i$, como mostra a Figura 30. Como $a \parallel \alpha$ e $b \parallel \alpha$,

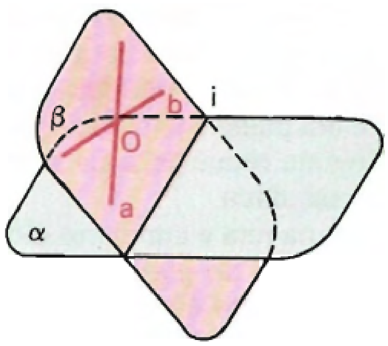


Figura 30 – Demonstração da condição suficiente para que planos sejam paralelos no espaço

Fonte:(DOLCE; POMPEO, 1993, p.26)

temos que $a \parallel i$ e $b \parallel i$. Mas a e b são concorrentes em O, ou seja, não podem ser ambas paralelas a i. $\square$

A Figura 31 resume as principais posições relativas entre dois planos.

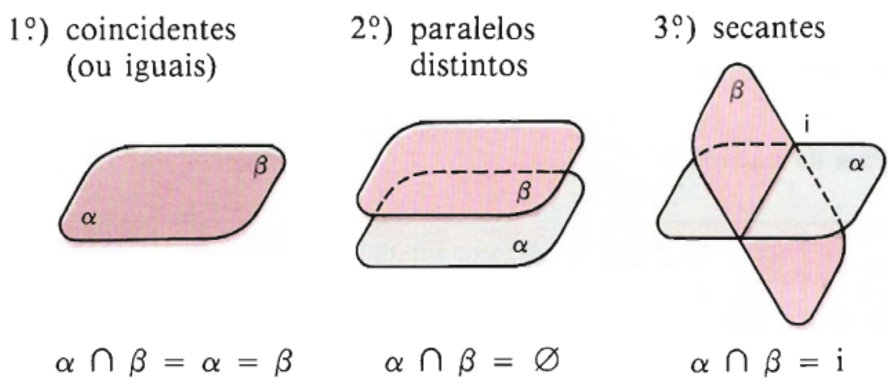


Figura 31 – Posições relativas de dois planos no espaço

Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1993, p.26)

Nesta seção, além de mostrar como são introduzidos entes matemáticos e como é verificada a validade de proposições nessa área da ciência, foi desenvolvida toda a teoria que fundamenta a atividade proposta no capítulo 5. O que foi aqui desenvolvido é uma pequena mostra de uma axiomatização da Geometria Espacial de Posição. Na seção 3.2 é realizado um estudo sobre a esfera e seus elementos, fundamentando a atividade proposta em 6.

3.2 Esfera: elementos e propriedades

Nessa seção será estudada a Esfera, algumas de suas propriedades e seus elementos, de forma a fundamentar a atividade proposta no capítulo 6. Esse estudo foi realizado pois a esfera é um dos possíveis modelos de uma Geometria não euclidiana conhecida como Geometria Elíptica, cujo surgimento é contextualizado na seção 2. Além disso, para que as propriedades da esfera sejam compreendidas, é importante que conceitos como círculos e ângulos já tenham sido estudados. O estudo se inicia com algumas definições sobre esfera e seus elementos, propostas por (NETO, 2013) e (GIMENES, 2015).

Definição 8. Sejam dados o ponto O do espaço e um número real positivo R. A esfera Σ de centro O e raio R é o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam R de O.

A Figura 32 mostra um exemplo de esfera de centro O e raio R. Pode-se denotá-la por $\Sigma(O; R)$ ou simplesmente por Σ. Pontos cuja distância ao centro da esfera é maior do que o raio são chamados de pontos exteriores, enquanto pontos cuja distância ao centro da esfera é menor do que a medida do raio são chamados de pontos interiores. Para o que segue, com frequência faz-se referência a esfera explicitando apenas o seu centro e omitindo o raio sempre que isso não causar prejuízo. Assim, cita-se "a esfera Σ de centro O"para indicar a esfera Σ de centro O e raio R qualquer.

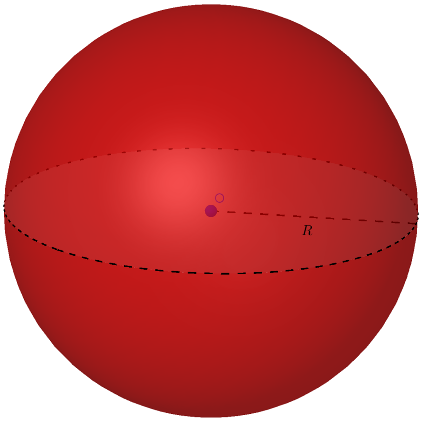


Figura 32 – Esfera de centro O e raio R

Definição 9. Dados dois pontos, A e B pertencentes a uma esfera Σ de centro O o segmento de reta que os une, AB é chamado de *corda* da esfera. A corda AB é um *diâmetro* da esfera se $O \in AB$, e nesse caso é dito que A e B são pontos *antípodas*.

Na Figura 33, A, B, C, D, E e F são pontos, AB e CD são cordas, enquanto que EF é um diâmetro e os pontos E e F são antípodas. Costuma-se dizer que pontos antípodas são diametralmente opostos, por serem extremos opostos de um mesmo diâmetro.

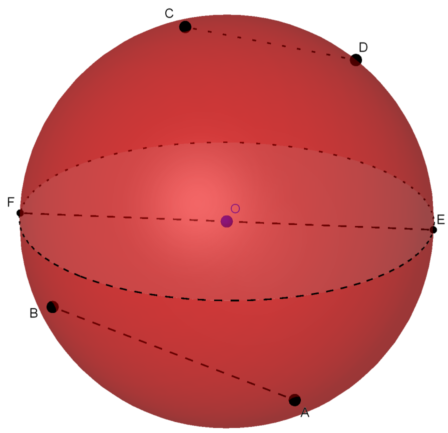


Figura 33 – Cordas e diâmetro em uma esfera de centro O

A Proposição 5 analisa o caso em que o plano intercepta uma esfera.

Proposição 5. Sejam dados, no espaço, um plano α e uma esfera Σ, de centro O e raio R. Seja d distância de O a α. Se $d < R$, então a intersecção de α e Σ é um círculo Γ de raio $\sqrt{R^2 - D^2}$ e centro situado no pé da perpendicular baixada de O a α.

Demonstração. Seja O' o pé da perpendicular baixada de O a α, de forma de $\overline{OO'} = d$, como mostra a Figura 34 .

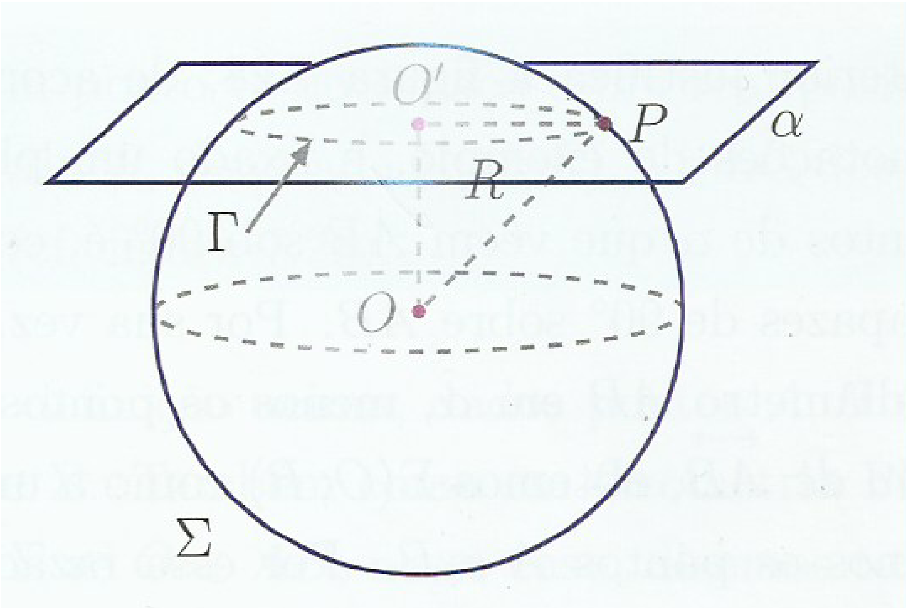


Figura 34 – Esfera de centro O e raio R

Fonte: (NETO, 2013, p.318)

Para mostrar que $\alpha \cap \Sigma = \Gamma$, mostra-se que:

- $\alpha \cap \Sigma \subset \Gamma$: Suponha que $P \in \alpha \cap \Sigma$. Tem-se que $\measuredangle PO'O = 90^{o}$ e o triângulo $PO'O$ é retângulo em O'. Pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$\overline{OP}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{OO'}^2 \Rightarrow \overline{O'P}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OO'}^2 = R^2 - d^2.$$

Ou seja, $\overline{O'P} = \sqrt{R^2 - d^2}$. Portanto P pertence ao círculo de centro O' e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$.

- $\Gamma \subset \alpha \cap \Sigma$. Se $P \in \Gamma$, então $\overline{O'P} = \sqrt{R^2 - d^2}$ e vale a recíproca das implicações anteriores, levando à conclusão de que $\overline{OP} = R$, ou seja, $P \in \Sigma$.

□

Com essa proposição, é possível escrever as definições de alguns elementos importantes da esfera.

Definição 10. *Círculo máximo* ou *Equador* de uma esfera Σ é a intersecção de uma esfera com um plano que contém o centro da esfera.

Definição 11. As extremidades de um diâmetro perpendicular ao plano de um círculo máximo Γ são chamadas de *Polo Norte* ou *Polo Sul* de uma esfera em relação a Γ.

A Figura 35 mostra uma esfera com um círculo máximo ou equador e os polos correspondentes. Uma propriedade importante de um círculo máximo de uma esfera, é que ele possui o mesmo raio, e por consequência o mesmo diâmetro, da esfera em que está contido.

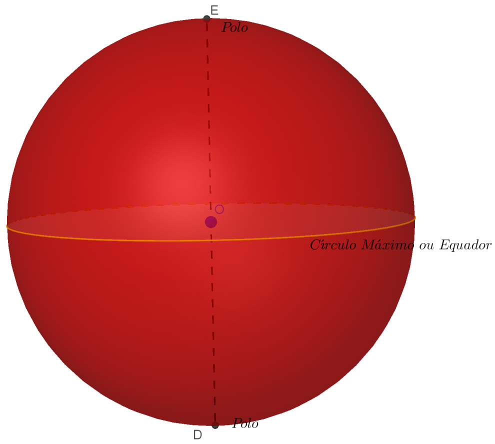


Figura 35 – Esfera com círculo máximo e Polos relativos ao mesmo

Proposição 6. Dados dois pontos distintos A e B não antípodas de uma esfera, existe um único círculo máximo da esfera que passa por A e B.

Demonstração. Seja Σ uma esfera de centro O e sejam A, B pontos distintos não antípodas de Σ. Seja α o plano que passa por A, B e O, ele existe e é único pois A e B não são antípodas, portanto não colineares com O. Como o plano contém o centro da esfera, ele a intercepta e sua intersecção com a esfera é o equador Γ, que contém os pontos A e B. □

Proposição 7. Dados dois pontos A e B antípodas de uma esfera, existem infinitos círculos máximos da esfera que passam por A e B.

Demonstração. Qualquer plano que contenha os pontos A e B contém a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Como os pontos são antípodas, $O \in \overleftrightarrow{AB}$ e, consequentemente, o centro da esfera pertence ao plano. Cada plano que contém o centro da esfera determina um círculo máximo sobre ela. Como existem infinitos pontos na esfera distintos de A e B, podemos construir infinitos planos distintos que contém a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Em cada plano construído, temos um círculo máximo distinto dos anteriores. Portanto, existem infinitos círculos máximos que passam por A e B. A Figura 36 mostra alguns desses círculos máximos.

□

Definição 12. Dados dois pontos distintos numa esfera, a distância entre esses pontos sobre a superfície esférica é o comprimento do menor arco de círculo máximo que contém esses pontos. Esse menor arco é chamado de Segmento Esférico. O segmento esférico definido por dois pontos não antípodas é único.

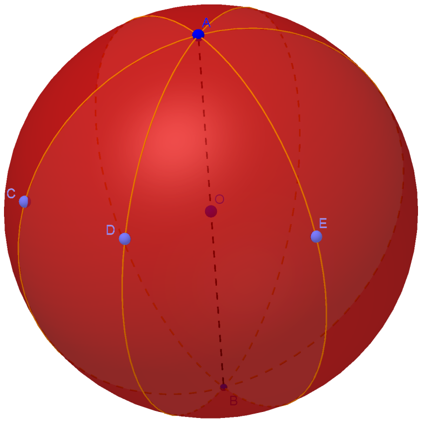


Figura 36 – Vários equadores de uma esfera passando por um par de pontos antípodas

A noção de distância numa superfície esférica é diferente da noção de distância no plano e no espaço. Essa é uma das características que diferencia a Geometria Euclidiana e a Geometria Elíptica. Na Geometria Elíptica, os círculos máximos são o equivalente as retas na Geometria Euclidiana, é natural que um segmento de reta nessa Geometria seja um arcos de circunferência. A Figura 37 ilustra a distância entre os pontos B e C de uma esfera, isto é, o segmento esférico BC. Com a noção de distância numa esfera é possível caracterizar o Polo como o ponto cuja distância em relação a qualquer ponto do círculo máximo associado a ele é constante.

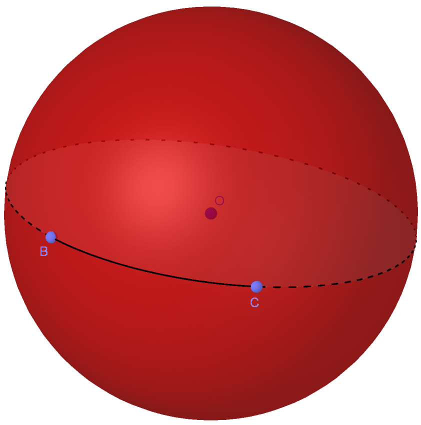


Figura 37 – Distância entre os pontos B e C numa esfera de centro A

Proposição 8. A intersecção de dois círculos máximos distintos consiste de exatamente dois pontos antípodas.

Demonstração. Sejam Γ e Γ' dois círculos máximos distintos de uma esfera Σ de centro O. Existem planos α e α' que interceptam Σ segundo os círculos Γ e Γ', respectivamente. por serem círculos máximos, ambos planos contém o centro da esfera, logo não são paralelos.

Sua intersecção deve ser uma reta que contém O, o centro da esfera. A intersecção dessa reta com a esfera resulta em dois pontos antípodas, que por sua vez pertencem simultaneamente aos círculos máximos Γ e Γ'. $\square$

A intersecção de dois círculos máximos é ilustrada na Figura 38. Na Geometria Elíptica, portanto, duas retas nunca são paralelas, uma vez que elas sempre se interceptam.

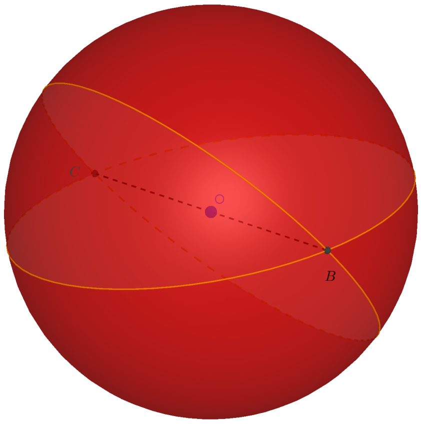


Figura 38 – Intersecção de dois círculos máximos

O próximo passo neste estudo é determinar ângulos formados por círculos máximos, também chamados de retas esféricas.

Definição 13. Um ângulo esférico de vértice A é a união de dois círculos máximos que passam por A. A medida desse ângulo é igual a medida do ângulo entre as retas tangentes desses círculos no ponto A.

A Figura 39 mostra o ângulo entre os círculos máximos na esfera. Nota-se que a definição de ângulo na Geometria Esférica é equivalente a definição de ângulo na Geometria Euclidiana, mas se apóia nessa última para definir como se deve medir ângulos. O ângulo entre dois equadores pode variar de 0^o a 180^o, sendo nos dois extremos desse intervalo de variação os equadores coincidem.

A próxima definição estabelece círculos máximos perpendiculares, que equivalem a retas perpendiculares na Geometria Euclidiana Plana.

Definição 14. Dois equadores que formam um ângulo de 90^o, são chamados de perpendiculares. (Figura 40)

As próximas proposições analisam algumas propriedades relativas a equadores perpendiculares.

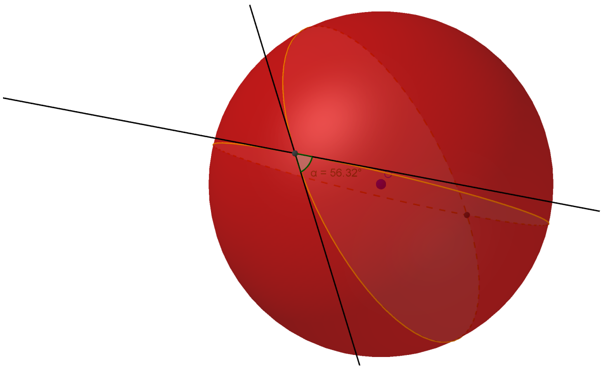


Figura 39 – Ângulo entre retas esféricas

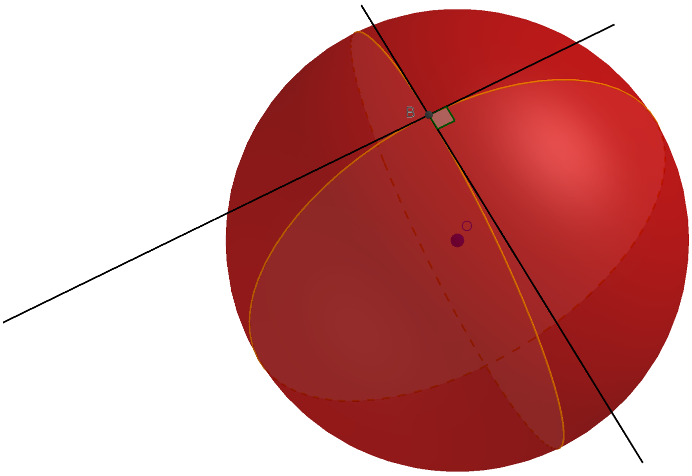


Figura 40 – Círculos máximos perpendiculares passando por B

Proposição 9. Se um ponto P pertence a um círculo máximo Γ de uma esfera Σ de centro O, então existe um único círculo máximo de Σ que passa por P e é perpendicular a Γ.

Demonstração. Seja Γ um círculo máximo de Σ, α o plano que determina Γ e $P \in \Gamma$. Toma-se o plano β que passa pela reta que contém P e O e é perpendicular a α. Como β passa pelo centro de Σ, β determina um círculo máximo em Σ, que é perpendicular a Γ. A Figura 41 ilustra a situação. Suponha que exista dois círculos máximos perpendiculares Γ passando por P. Aí existiriam dois planos perpendiculares a α passando pela reta que contém O e P, o que é um absurdo. Logo, existe um único círculo máximo que passa por P e é perpendicular a Γ. $\square$

O caso da unicidade do círculo máximo perpendicular vale apenas no caso em que o ponto está sobre o próprio, como na Proposição 9.

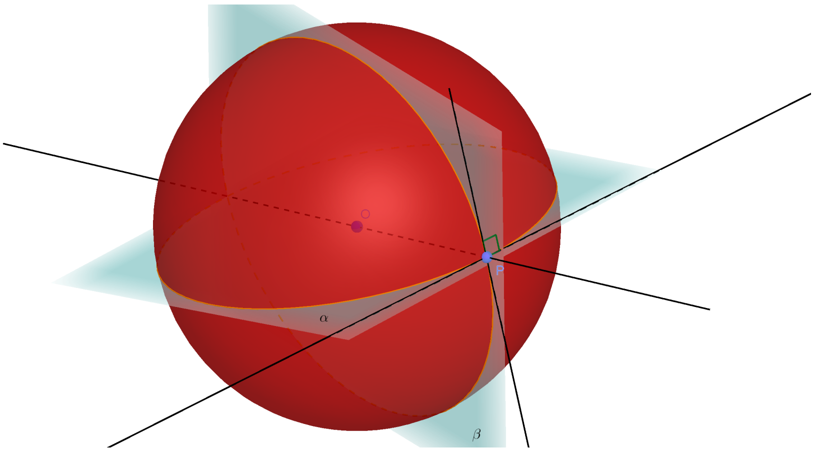


Figura 41 – Círculos máximos perpendiculares passando por P

Proposição 10. Dados uma esfera Σ de centro O, um círculo máximo Γ de Σ e um ponto P que não pertence a Γ. Então existe um círculo máximo que passa por P e é perpendicular a Γ.

Demonstração. Seja α o plano que determina Γ. Toma-se o plano β, perpendicular a α que passa pela reta determinada por P e O. Note que a reta $\overleftrightarrow{OP}$ não é necessariamente perpendicular a α. Como β contém o centro da esfera, o plano β determina um círculo máximo Γ' em Σ que é perpendicular a Γ. $\square$

A unicidade do círculo máximo perpendicular a Γ passando por P não é garantida pois existe o caso de P ser um polo relativo a Γ. Nesse caso, há infinitos equadores que passam por P e são perpendiculares a Γ. A Figura 42 mostra quatro círculos máximos perpendiculares ao círculo máximo relativo ao polo P.

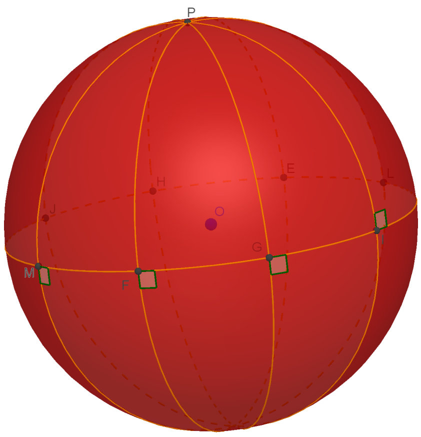


Figura 42 – Círculos máximos perpendiculares que passam por um polo

Nota-se que o estudo realizado sobre a esfera trouxe contribuições importantes não só para a análise de propriedades relativas a Geometria Elíptica, mas também ilustra o uso de propriedades de planos e retas no espaço, algumas delas expostas na primeira parte desse capítulo.

O próximo capítulo é um levantamento das maiores dificuldades no ensino aprendizagem de Geometria, com propostas de como essas dificuldades podem ser superadas.

4 A Interface entre a Investigação Matemática e a Geometria Dinâmica

A Geometria deveria estar presente durante toda a formação de um aluno na Matemática da Educação Básica. Ela serve como base histórica para o desenvolvimento da Matemática como a conhecemos hoje, fato esse evidenciado no capítulo 2. Documentos oficiais fazem anotações nesse sentido, por exemplo (BRASIL, 2006) cita que a Geometria deve preparar o aluno não só para lidar com problemas do cotidiano, mas também "apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas". Outro manual escreve:

> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.(BRASIL, 2004, p.123)

No entanto, o ensino-aprendizagem de Geometria, sendo parte do ensino da Matemática, ainda é defasado no Brasil. Evidências disso são as pesquisas que indicam as dificuldades dos estudantes ingressantes no Ensino Superior, na área das ciências exatas. (RODRIGUEZ; MENEGHETTI; POFFAL, 2015) faz um panorama dessas pesquisas no país, destacando várias fragilidades no conhecimento básico do aluno e nas concepções de Matemática desses discentes. O caso específico da Geometria foi pesquisado por (GRAVINA, 1996), que relata que o grande número de reprovações nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial é devido ao déficit de raciocínio lógico, dedutivo, e da falta de capacidade de generalizações apresentada pela maioria dos estudantes ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática.

Neste capítulo, serão abordadas as diferentes dificuldades do ensino-aprendizagem de Geometria, bem como serão apontados caminhos para superação dessas dificuldades. Uma delas está ligada ao histórico do Ensino da Geometria no Brasil e já foi brevemente tratada no Capítulo 1, enquanto a outra é intrínseca à natureza da Geometria como forma de conhecimento. Para vencê-las é necessário entender como é formado o conhecimento geométrico, além de descobrir ferramentas e metodologias que podem ser usadas para aprimorá-lo. O conjunto de ferramentas sugerido corresponde à Geometria Dinâmica, softwares que possibilitam construir entes geométricos a partir de suas propriedades e após de manipulá-los para observar diversas configurações possíveis. Como metodologia, é apresentada a Investigação Matemática, que propõe trazer o espírito investigativo próprio dos cientistas, para a sala de aula de Matemática.

A Geometria Euclidiana é considerada a melhor representação do espaço habitado pelo homem. Mesmo com essa distinção, seu ensino é problemático, pois os objetos de estudo são, em última análise, abstratos. As figuras perfeitas da Geometria existem num mundo de ideias, e as propriedades que regem essas figuras são estabelecidas por um sistema axiomático, cujo principal exemplo é debatido no capítulo 2.

Assim, para aprender Geometria é necessário entender definições, propriedades, teoremas sobre elementos, que podem ser representados e encontrados no mundo real, mas essas são apenas representações imperfeitas de objetos abstratos. Com isso, para que os alunos tenham real contato com a natureza da Geometria, é necessário que eles assimilem que as representações apresentam defeitos e que é preciso alcançar um certo grau de abstração para realmente operar sobre elas. Para abstrair é preciso criar imagens mentais dos entes geométricos e as proposições que são estudados.

Deseja-se que, através de um desenho ou uma figura com vários elementos geométricos, sejam assimiladas definições e propriedades que correspondem a uma classe inteira de figuras. É nessa assimilação de imagens mentais que residem alguns problemas do ensino aprendizagem de Geometria. Segundo (GRAVINA, 1996), é comum livros e manuais inserirem, após definições de entes geométricos, como exemplo, ilustrações de determinado objeto, mas com características específicas que não são parte oficial da definição. Por exemplo, triângulos de modo geral são acutângulos com um dos lados paralelos a base da folha (ou a linha do texto). Quadrados e retângulos tem representações semelhantes. Com isso, essas propriedades são incorporadas a definição e a imagem mental que se faz da figura. Para verificar isso, basta solicitar a maioria das pessoas que se desenhe um quadrado ou um triângulo e verificar as características (o próprio leitor pode fazê-lo agora).

Segundo (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012), é preciso diferenciar as imagens de objetos geométricos em *desenhos* e *figuras*. Os primeiros são imagens particulares, com características dadas no enunciado de uma questão, por exemplo. Já as figuras são a "representação genérica de uma classe de objetos matemáticos, que compartilham um conjunto comum de propriedades". Assim, devem-se usar figuras (preferencialmente mais de uma) para representar triângulos e quadrados para tornar claro que sua definição é dada apenas a partir de algumas de suas características, que independem de particularidades como tamanho e posição. Quando um aluno notar que uma imagem é uma figura, não um desenho, ocorre a abstração da ideia do ente matemático estudado, tornando possível a representação mental desses para generalizações a seu respeito.

Um estudo semelhante do caso das representações que produzem imagens mentais é proposto por (FISCHBEIN, 1993 apud GRAVINA, 1996). Segundo esse autor, as imagens geométricas têm duas componentes. O *componente conceitual* consiste no conjunto de palavras, sejam elas faladas ou escritas, que definem as propriedades do objeto estudado. Esse conjunto de palavras (ou símbolos) pode variar de acordo com o grau de formalismo do sistema axiomático adotado. O *componente figural* é semelhante ao conceito de desenho proposto por (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012) e consiste nas propriedades de natureza visual, como formato, posição na folha e dimensões do objeto. Um exemplo de erro produzido pelo conceito figural é o caso da tangência entre duas circunferências. É comum, segundo (RIBEIRO, 2013), os alunos assumirem que "círculos tangentes se interceptam em infinitos pontos", pois a representação de componentes figurais dessa situação dificilmente conseguem exibir o único ponto de intersecção entre essas circunferências.

Na aprendizagem mais avançada de Geometria, como aquela que se impõe a estudantes no Ensino Médio, vários objetos interagem em um mesmo desenho, cada um com suas componentes conceitual e figural. (GRAVINA, 1996) chama isso de configuração, explicando que uma propriedade, definição ou teorema da Geometria é sempre expressa por meio de uma configuração complexa e que

> Deduzir uma propriedade significa estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos (hipóteses) às propriedades ditas decorrentes (teses). Esta cadeia de raciocínios é o que denominamos de argumentação lógica e dedutiva. O desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades.(GRAVINA, 1996, p.3)

Assim, é na interpretação do desenho que se desencadeia o raciocínio que deduz a propriedade. As duas dificuldades destacadas por (GRAVINA, 1996) ao estudar um desenho consistem na percepção de configurações simples dentro de configurações complexas, que servem de "elos" no desencadeamento lógico-dedutivo e o controle do desenho para que características únicas da representação não sejam incorporadas às propriedades da figura. Para sanar esse tipo de dificuldades, o aprendizado de Geometria deve caminhar para a harmonização dos dois componentes de uma figura, levando ao aluno a compreensão do que é característica do objeto estudado, e portando pode ser utilizado como hipótese, e o que é apenas determinado pelo seu componente figural (não pode ser utilizado como hipótese).

Outro aspecto do conhecimento geométrico que torna seu ensino complicado é a maneira como as propriedades são validadas, ou seja, a justificativa que as torna verdadeiras. Não apenas em Geometria, mas em toda a Matemática, o veredito sobre uma sentença verdadeira ou falsa vem de uma cadeia de uma argumentação lógica-dedutiva que é conhecida como prova ou demonstração. Segundo (ORDEM, 2015), é comum professores de Geometria validarem teoremas e proposições para seus alunos apresentando alguns exemplos de situação em que tal propriedade é verdadeira. No mesmo trabalho, (ORDEM, 2015) destaca que esse tipo de validação pode levar os estudantes a pensar que esse método empírico é o único que torna as proposições matemáticas verdadeiras. O professor deve destacar, em sua prática, o poder da generalidade argumentativa de uma demonstração e afastar a sugestão de que uma demonstração serve apenas para verificar casos particulares ou é apenas um exercício para treinar a mente.

No entanto, não é recomendável simplesmente apresentar toda uma teoria axiomática sem estimular os alunos a desenvolver o raciocínio lógico por trás de cada passo da demonstração. Outro problema é que, quando são solicitadas, demonstrações são sempre sobre afirmações verdadeiras, nunca sobre afirmações que devem ser refutadas ou cuja veracidade deve ser decidida pelo aluno. Esse último caso é clássico da escola tradicional: o aluno recebe passivamente a demonstração como um conhecimento acabado, não participando de sua construção. O trabalho de um Matemático não é apenas demonstrar, é também procurar propriedades não evidentes, prática essa que está muito distante da prática em sala de aula. Assim, conjecturar e procurar propriedades é tão importante quanto demonstrá-las, já que mostra a Matemática como um conhecimento em construção.

Como ilustrado no parágrafo anterior, a introdução da ideia de demonstração ou prova em Matemática deve ser feita com cuidado. Por isso, alguns estudiosos defendem tipologias de provas, cada uma delas com níveis de cognição, que levam ao aluno a compreender o sentido e a importância de uma demonstração. Uma classificação dos níveis de prova é proposto por (BALACHEFF, 1987 apud ORDEM, 2015). Esse autor as divide em dois níveis principais, e cada nível em subníveis. O primeiro nível consiste das *Provas Pragmáticas*, que ocorrem quando a sustentação da prova depende de recursos de ação, observação de figuras, construção e manipulação das mesmas. Um exemplo desse tipo de justificativa é quando diz-se que dois triângulos são semelhantes quando um é ampliação (ou redução) do outro. Divide-se as provas em 3 níveis:

Empirismo Ingênuo Nível básico de validação de uma propriedade. Consiste em validar a conjectura a partir da verificação de alguns casos. Segundo (ORDEM, 2015), "este meio muito rudimentar (e insuficiente) de prova é uma das primeiras formas do processo de generalização".

Experiência Crucial Esse segundo caso é baseado na validação de uma conjectura usando um caso ou exemplo especialmente selecionado com esse fim. Ao observar que a proposição funciona naquele caso específico, o aluno será capaz de concluir que a proposição funciona para todos os casos. Geralmente o objeto escolhido para propiciar a experiência crucial é representante de uma classe de objetos.

Exemplo Genérico O terceiro nível ocorre também com um exemplo escolhido, mas mediante a operações ou transformações sobre ele, seguida de uma busca de justificação na teoria.

O próximo passo na evolução da tipologia de prova proposta por (BALACHEFF, 1987 apud ORDEM, 2015) são as *Provas Intelectuais.* Nesse caso a prova de uma propriedade é fundamentada em proposições anteriores e suas implicações, comumente escritas em linguagem matemática. Os dois níveis em que se dividem são:

Experiência Mental Esse nível marca a transição entre prova pragmática e prova intelectual. O aluno ainda pode usar exemplos particulares, não como elementos de convicção, mas para ajudar a organizar a justificativa e como suporte da argumentação.

Cálculo Simbólico As justificativas são provadas somente por manipulação e transformações de símbolos.

Além da verificação a respeito dos níveis em que se encontram os alunos quanto a essa tipologia, é importante fazer o máximo para avançá-lo, como escreve (ORDEM, 2015, p.101),

> a evolução das provas pragmáticas para as provas intelectuais e demonstração não é só marcada por uma evolução de características linguísticas, mas também pelo status e natureza dos conhecimentos. As provas pragmáticas apoiam-se em saberes práticos, essencialmente envolvendo a ação, enquanto as provas intelectuais exigem que tal conhecimento seja tomado como um objeto de reflexão ou debate.(...) Nesse nível, as ações interiorizadas tendem a generalidade, desprovidas de concretização particular, constituindo-se na gênese cognitiva da demonstração.

A Figura 43 apresenta a tipologia de prova proposto por Balacheff num esquema.

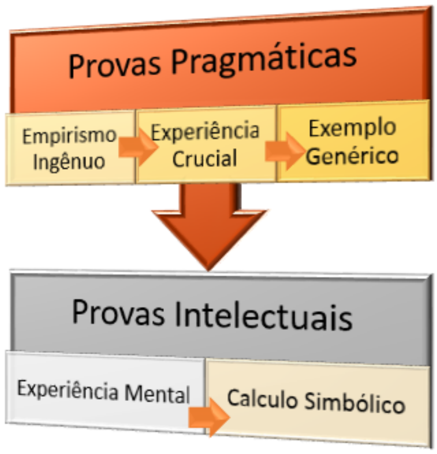


Figura 43 – Tipologia de provas por Balacheff

A classificação de Balacheff exibe um processo em que o conceito de prova ou demonstração é aprimorado pelo aluno, até chegar no nível de Prova Intelectual, aceito pela comunidade dos Matemáticos. Harel e Sowder (HAREL; SOWDER, 1998 apud ORDEM, 2015) propuseram um sistema que avalia as várias maneiras de convencimento de um aluno a respeito de uma propriedade. Essas maneiras não dizem respeito apenas ao conhecimento matemático, mas a qualquer afirmação cuja validade esteja em jogo. Os autores propõem uma tipificação baseada em "esquemas de prova", onde provar significa averiguar, persuadir e convencer, seja uma comunidade, outro indivíduo ou a si próprio a respeito da veracidade de uma afirmação. Os esquemas propostos dividem-se em três tipos, cada um deles "representa uma fase no desenvolvimento cognitivo, a capacidade intelectual no desenvolvimento matemático dos alunos" (ORDEM, 2015, p.102). Os três esquemas propostos, com suas subdivisões, são:

Esquemas de Prova de Convicção Externa Nesse caso, o argumento usado para convencer o indivíduo ou a si próprio de uma prova é externo ao problema. As subdivisões definem o que podem ser essa fonte externa:

Prova Autoritária Quando a validação da conjectura é feita pelo professor ou um livro texto, e outras fontes semelhantes.

Prova Ritual Ao observar o argumento, o indivíduo decide se ele é verdadeiro ou falso de acordo com sua aparência.

Prova Simbólica Nesse caso o indivíduo que quer se convencer de um argumento não considerando a natureza e o sentido dos símbolos nele envolvidos. Um exemplo desse tipo dado por (HAREL; SOWDER, 2007 apud ORDEM, 2015) é um erro usualmente cometido por alunos do ensino básico:

$$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a+\cancel{b}}{c+\cancel{b}} = \frac{a}{c}$$

Esquemas de Prova Empírica Aqui a validação é dada pela verificação de um número limitado de exemplos, manipulação experimental e fatos físicos. Também se subdivide em três classes:

Prova Indutiva O aluno constata a veracidade de uma proposição por meio de análise quantitativa. Exemplos desse caso são medições diretas e a substituição numérica em expressões algébricas. O indivíduo verifica uma condição geral usando casos particulares. Um exemplo prático disso é quando são substituídos alguns números naturais na expressão $2n-1, n \in \mathbb{N}$ e verifica-se que para esses valores de n o valor numérico da expressão é ímpar, logo não importa qual seja o valor de n, a expressão $2n-1$ será sempre ímpar. É importante destacar que casos como esses podem ser usados como contra-exemplos: pode-se afirmar, por exemplo, que a expressão $2n-1$ não produz valores numéricos sempre pares, pois já foram encontrados valores numéricos ímpares.

Prova Perceptiva Os alunos tentam verificar o valor lógico de uma afirmação por meio de percepções de uma ou várias figuras. Um exemplo clássico de convencimento por percepção é quando é ilustrando o gráfico da função $f(n) = \frac{1}{n}$ para mostrar que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ converge para zero.

Apesar de não ser uma demonstração matemática formal, o esquema de prova empírica é ótimo para gerar exemplos, contra-exemplos, e até ideias de demonstração.

Esquema de Prova Analítica Aqui a veracidade de uma afirmação é decidida usando argumentos abstratos e dedução lógica. Suas subcategorias têm em comum três características: a generalidade da prova obtida (não se usam exemplos isolados ou exceções), o pensamento operacional (antecipação de resultados) e a inferência lógica.

Provas Transformacionais Nesse caso a prova se baseia em transformações no objeto e "antecipação dos resultados que logo são convertidos em argumentos dedutivos".

Provas Axiomáticas Quando é estabelecido um sistema axiomático previamente e a prova é baseada somente nos axiomas e proposições que são decorrentes dele.

Notam-se algumas correlações entre as duas tipologias de provas propostas. O primeiro nível de prova de Harel e Sowder não é considerado por Balacheff, enquanto que o empirismo ingênuo e a experiência crucial correspondem aos esquemas de provas empíricas proposto por Harel e Sowder. O caso do exemplo genérico corresponde às provas transformacionais de Harel e Sowder por partilharem características como generalidade e inferência lógica a partir de algum ponto da teoria. O esquema de provas analíticas correspondem às provas intelectuais de Balacheff. Esses dois critérios de classificação de provas permitem verificar e fazer evoluir o nível cognitivo dos processos de validação não apenas dos alunos, mas dos seus respectivos professores, provocando-os a refletir sobre a melhor maneira de convencer os alunos da validade de uma proposição. Uma opção para provocar nesses alunos o sentido de investigação e o trabalho de um matemático são as investigações matemáticas, metodologia para a sala de aula descrita nos próximos parágrafos.

Investigar significa, segundo (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005), formular questões de interesse cujas respostas não estão totalmente prontas ou organizadas e procurar essas respostas de modo fundamentado e rigoroso. Os cientistas trabalham usando esse tipo de metodologia, mas em problemas que estão na fronteira do conhecimento, com objetivo de expandí-lo. Nada impede que em sala de aula se façam investigações a respeito de temas mais elementares, pertinentes aos currículos escolares e ao conteúdo que o professor objetiva ensinar. O trabalho de investigação feito pelos matemáticos é um caso a parte das demais ciências. São formuladas conjecturas, que em seguida são testadas, e finalmente são provadas. Enquanto os esquemas de prova supracitados caminham para levar o aluno a testar (caso das provas empíricas) e demonstrar proposições (provas intelectuais ou analíticas), a investigação matemática permite que o mesmo elabore suas próprias conjecturas, para depois validá-las (ou verificar que são incorretas).

A história da Matemática mostra que obter demonstrações ou soluções para alguns problemas pode ser demorado e muitas vezes pode levar a um tipo de conhecimento inesperado, como é ilustrado no capítulo 2, em que a busca pela prova do quinto postulado proposto por Euclides levou a descoberta de outras possibilidades de Geometria. Assim, ao propor uma aula de investigação, o professor pode estabelecer pontos de partida a avaliação, mas pode ser que os alunos encontrem resultados diversos. Essa particularidade da investigação Matemática faz com que os alunos mobilizem seus recursos cognitivos e afetivos com a intenção de atingir um objetivo, ou seja, aprender.

A investigação Matemática ocorre, de modo geral, em quatro etapas. Primeiro, são exploradas, reconhecidas e formuladas questões acerca da tarefa proposta. Em seguida são organizados os dados já disponíveis (teoria prévia) e são formuladas conjecturas. Após a realização de testes, essas conjecturas são refinadas. O último passo é validá-las, e é nesse momento em que os alunos expressam a que nível de validação do conhecimento Matemático (de acordo com os propostos acima) foram expostos. Os passos de uma investigação matemática podem ocorrer simultaneamente, mas o passo final deve ser obrigatório, não importando o nível de validação alcançado pelos alunos.

A melhor ferramenta para avaliar o processo investigativo e como os alunos validam o conhecimento matemático é por meio de um registro escrito da atividade de investigação. Esse registro pode ser feito após a discussão dos alunos a respeito das propriedades por eles aferidas, pois segundo (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005) "a aula de matemática, habitualmente, não é um lugar em que os alunos estejam habituados a comunicar suas ideias nem a argumentar com seus pares. É a partir da análise desses materiais que o professor pode planejar os próximos passos no sentido de contribuir para a maturação do aluno quanto a demonstração. Outra vantagem do registro escrito dos alunos é o desenvolvimento da sua escrita matemática, que no caso da investigação pode ser trabalhada de forma natural com os alunos, já que a escrita vem do seu pensamento. Ao escrever o conhecimento que já sistematizou, o aluno o resignificará e provavelmente notará alguns detalhes importantes da teoria que só a ideia interiorizada seria incapaz de notar imediatamente.

No caso específico da Geometria, a investigação desenvolve várias capacidades, entre elas

> a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução matemática. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005, p.71)

Investigações geométricas exibem uma Geometria que vai além dos tradicionais métodos que usam da memorização de fórmulas e exercícios de determinados tipos. Além disso atividades investigativas em Geometria podem ser propostas nos mais diversos níveis de ensino, basta ter o cuidado de selecionar um recorte de investigação adequado para cada nível.

Para apoiar as investigações matemáticas existe um conjunto de ferramentas denominadas TICs, Tecnologias de Informação e Comunicação. Essas ferramentas foram destacadas por (FIORENTINI; LORENZATO, 2006) no seu levantamento sobre tendências de pesquisa em Educação Matemática. A difusão e o acesso a tecnologias como computadores, televisão, internet, lousas digitais e até calculadoras levaram investigadores a tentar criar metodologias para o ensino de Matemática, tanto para professores quanto para alunos. Essas metodologias não se limitam unicamente aos temas tradicionais, mas também mostram possibilidades de temas diversos, como fractais e análises estatísticas mais complexas. Há uma crença entre pais, alunos, professores e sistemas de governo, que "as novas tecnologias são uma panacéia para solucionar os males da educação atual" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Mas alerta-se que as investigações nesse sentido ainda não chegaram a conclusões satisfatórias, e que sua implementação só será possível quando existirem profissionais qualificados para usá-las da melhor maneira adequada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, na área de Matemática e suas tecnologias, (BRASIL, 2000), recomendam que um objetivo do ensino de Matemática seja favorecer o uso de tecnologias, não apenas as já tradicionais citadas nesse parágrafo, mas toda tecnologia que possa vir a surgir. Além disso, aprender a trabalhar nos ambientes cooperativos gerados pelas novas tecnologias, onde juntas pessoas complementam seus próprios trabalhos e de outros, com intuito da produção e desenvolvimento do conhecimento.

Uma classe muito especial das ferramentas desenvolvidas com tecnologia para o ensino de Matemática são as ferramentas de Geometria Dinâmica. Uma analogia que serve de justificativa para o uso desses ambientes é a seguinte:

> Segundo um conhecido dito popular, *uma imagem vale mais do que mil palavras*. Em ambientes de geometria dinâmica são utilizadas literalmente centenas de imagens sobrepostas, que se articulam entre si e são manipuladas de forma interativa. Imagine, então, quantas ideias podem ser traduzidas, com o auxílio da geometria dinâmica! (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.114)

Os objetos são construídos a partir de propriedades ou relações entre eles. Após a construção, o usuário tem a possibilidade de movimentar elementos livres da configuração, gerando as "centenas de imagens" que são comentadas na analogia. Essa movimentação é conhecida como o recurso arrastar em softwares de geometria dinâmica como o GeoGebra. Ao usar esse recurso, as propriedades dos objetos são mantidas, mas a imagem se transforma. Ou seja, o componente conceitual se mantém, enquanto o componente figural se apresenta de várias formas. Com isso são amenizadas as dificuldades de representação geradas pelo uso de lápis e papel e as representações estereotípicas de livros didáticos.

O ato de arrastar nos ambientes de geometria dinâmica é objeto de vários estudos. Entre eles, (ARZARELLO et al., 2002) relata que o recurso arrastar media aspectos do relacionamento entre a percepção e a teoria, seja ele invocado com um objetivo específico ou simples experimentação que pode levar a descoberta de propriedades interessantes. Ao verificar mudanças de formas já prontas ou sugeridas, o usuário pode observar invariantes geométricos daquela observação, ou seja, propriedades que são mantidas pela figura independente da posição dos objetos livres. Também é possível que ao mover objetos criados aleatoriamente pela tela se explicitem propriedades antes ocultas pela estaticidade do desenho.

A geometria dinâmica também possibilita a produção de conjecturas, fase essencial da investigação matemática. Também permite testá-las, refiná-las ou mesmo refutá-las. Sob a perspectiva dos processos cognitivos de validação de propriedades, permite exploração na sua fase mais empírica, ao mesmo tempo em que pode servir de motivação para a introdução da necessidade de argumentos matemáticos. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012) destaca que é possível construir atividades em que o simples uso de figuras pode levar a conclusões incorretas, sendo essa a motivação para introduzir a ideia de justificar a propriedade por meio de argumentos exteriores ao software.

A prática de uso de softwares de geometria dinâmica favorece a evolução cognitiva da relação entre percepção e abstração, percorrendo os caminhos propostos por Balacheff e Herel e Sowder. Na verdade, estudos do uso dessa categoria de softwares já produziram uma tipologia de cognição, expostas por (ARZARELLO et al., 2002): No *Processo de ascensão*, a observação e manipulação do desenho levam a teoria, através da observação de regularidades e invariantes. Já o *Processo de descensão*, o conhecimento é prévio e a exploração serve para justificar, checar propriedades ou refutá-las. Esses processos variam de acordo com o tipo de atividade proposta ou podem aparecer numa mesma atividade, um em complemento do outro, dependendo do que o sujeito entende seja dado e o que sua percepção diz que deve ser procurado.

Para o caso especial da Geometria Espacial, a última versão do GeoGebra disponibiliza, pela primeira vez, um modo de visualização em 3 dimensões de sólidos geométricos, planos e retas no espaço. É possível empregar, além do recurso de arrastar, uma ferramenta de visualização da figura sob vários ângulos. Esse material é um representante daqueles que (SANTOS; NACARATO, 2014) destaca no trecho:

> o que propicia aumentar o nível de conhecimento sobre um sólido geométrico e as figuras planas que o compõem e estabelecer algumas propriedades está diretamente relacionado com a diversidade de materiais que o professor pode disponibilizar em sala de aula para o aluno manipular, desenhar, visualizar, e, sobretudo, formar uma imagem mental sobre o

objeto a ser estudado. (p.17)

Como já foi destacado, a formação da imagem mental de entes geométricos é muito importante em geometria, uma vez que os objetos dessa ciência são abstratos.

Neste capítulo foram levantados os principais problemas no ensino e aprendizagem de Geometria e intrínsecos à ela. As principais dificuldades encontradas foram quanto a representação dos objetos geométricos e a maneira como são justificadas as propriedades. A primeira ocorre quando há confusão entre componentes conceituais e figurais associados a cada propriedade e revela a importância da construção de imagens mentais para entes geométricos. A validação de propriedades em Geometria é através de demonstrações e esse conceito pode ser trabalhado com os alunos. No entanto, mostrar uma demonstração sem que os alunos entendam o motivo dela ser necessária a torna inútil. É preciso que a ideia de demonstração seja construída, passando do empírico para o formal. Para ajudar nesse processo, a investigação matemática e a Geometria dinâmica são ferramentas que estimulam a formulação de conjecturas, seu refinamento e provocam o aluno a justificá-las. Além disso, softwares como o GeoGebra ajudam na superação das dificuldades de visualização mencionadas anteriormente.

Baseado nas dificuldades aqui elencadas, no próximo capítulo são propostas atividades que permitem aos alunos a visualização dos primeiros axiomas da Geometria Euclidiana Espacial, bem como algumas definições e propriedades elementares. As atividades propõem um processo de ascensão, pois primeiro as figuras são construídas, e após é refletido sobre as propriedades relativas a elas. São propostas questões que estimulam a investigação de cada figura, numa investigação mais dirigida. Busca-se que os alunos passem do empirismo ingênuo e exemplo genérico (como é o caso de algumas construções da atividade) para níveis mais avançados de prova, na escala de Balacheff.

5 Proposta de Atividade sobre Geometria Euclidiana Espacial: Pontos, retas e planos

5.1 Conteúdos

A atividade proposta trabalha dentro da Geometria Espacial o conteúdo de Pontos, Retas e Planos no Espaço. Esse conteúdo costuma ser lecionado no 3º ano do Ensino Médio, na maioria dos Sistemas de Ensino.

5.2 Pré-requisitos

Para que os objetivos propostos para esta atividade sejam atendidos, os alunos devem ter conhecimentos de Geometria Plana, especificamente sobre os três entes primitivos Ponto, Reta e Plano e as posições relativas de duas retas.

É importante apresentar aos alunos o conceito de Sistema Axiomático e o modo de trabalho do Matemático, especialmente o da área de Matemática Pura. Recomenda-se apresentar os axiomas como "Regras do Jogo" e os Teoremas como consequências dessas regras, que se tornam, por sua vez, novas regras. Destacam-se a condição de Consistência do Sistema Axiomático (um modelo axiomático é dito consistente quando dele não é possível chegar a uma contradição) e a de Suficiência (deve ser possível determinar a veracidade de uma afirmação a partir dos Axiomas e de proposições geradas a partir deles). Apesar do fato que as demonstrações são omitidas, enfatiza-se que é fundamental a compreensão de que os axiomas são necessários para a construção da teoria.

5.3 Público Alvo

O público alvo desta atividade são alunos do Ensino Médio, ou mesmo do Ensino Fundamental que em breve estudarão Poliedros e/ou Geometria Analítica no espaço.

5.4 Duração

Para esta atividade estima-se a duração de 4 aulas de 50 minutos cada.

5.5 Objetivos

Os objetivos da atividade são:

- Apresentação da Geometria Espacial por meio de axiomas;
- Estimular a Investigação Matemática, incentivando os alunos a conjeturar propriedades das retas, planos e pontos no espaço;
- Usar dispositivos eletrônicos para melhor visualizar elementos primitivos da Geometria no espaço, sem que eles estejam em algum poliedro ou sólido geométrico;
- Explorar as posições relativas de retas e planos no espaço;
- Apresentar aos alunos o software GeoGebra, que pode ser uma ferramenta importante para estudos posteriores;
- Trabalhar com as limitações do software disponibilizado e da representação em duas dimensões de objetos que estão definidos no espaço;
- Comparar os resultados com os materiais habitualmente utilizados, por exemplo régua, compasso, papel e lápis;
- Explorar o emprego da linguagem matemática;
- Colaborar para a formação de imagens mentais e generalizações em Geometria;
- Evoluir a concepção de prova em Matemática, partindo do empírico para o teórico.

Na seção 5.6 descreve-se a primeira atividade proposta, conforme ela foi aplicada. Após a aplicação, houveram alterações para aprimorar o trabalho. Essa redação final da atividade encontra-se no apêndice A.

5.6 Descrição e solução da Atividade

☞ Para cada questão proposta, use uma nova janela do GeoGebra, sem as construções anteriores. Para isso, no menu Arquivo, clique em Novo (alternativamente, abra uma Nova Janela a partir desse mesmo menu). Antes, porém, você pode salvá-las para revê-las usando o menu Arquivo>Gravar.

☞ Para abrir a janela de visualização 3D, clique em Exibir no menu superior, e em seguida em Janela de Visualização 3D.

Introdução

1. Plote 5 pontos, usando a Janela 3D. Para isso, com a ferramenta Ponto selecionada, escolha um local no plano cinza do sistema cartesiano e, em seguida, arraste o ponto até altura desejada.

2. Usando a ferramenta Reta, selecione dois pontos construídos no item anterior. Será construída a reta que passa por esses dois pontos. Faça esse procedimento para traçar mais duas retas.

3. Plote 3 planos. Para traçar planos, clique em Plano ou Plano por três pontos e em seguida, selecione três pontos. Note que os elementos aparecem separados por categoria na janela de álgebra, que pode ser usada para seleção de objetos (como pontos) também.

4. Utilize a ferramenta Girar Janela de Visualização 3D, segure e arraste o cursor para visualizar a construção sob diferentes ângulos.

Questões Propostas

Postulados

Questão 1. *Postulado de Existência - Reta*

a) Marque dois pontos no espaço e use a ferramenta Reta para construir a reta que passa por esses dois pontos.

b) Em seguida, selecione a ferramenta Ponto em objeto e marque pontos sobre a reta traçada anteriormente.

c) Quantos pontos é possível traçar nessa reta?

d) Usando a ferramenta Ponto, trace pontos que não estejam sobre a reta dos ítens anteriores. Quantos pontos é possível traçar fora dessa reta?

Solução 1. O objetivo da presente questão é levar o aluno a concluir que existem infinitos pontos em uma reta, bem como fora dela. A Figura 44 mostra a construção após o item b), enquanto que a Figura 45 mostra um exemplo da construção ao final da questão.

Questão 2. *Postulado de Existência - Plano*

a) Use a ferramenta Plano para construir um plano no espaço.

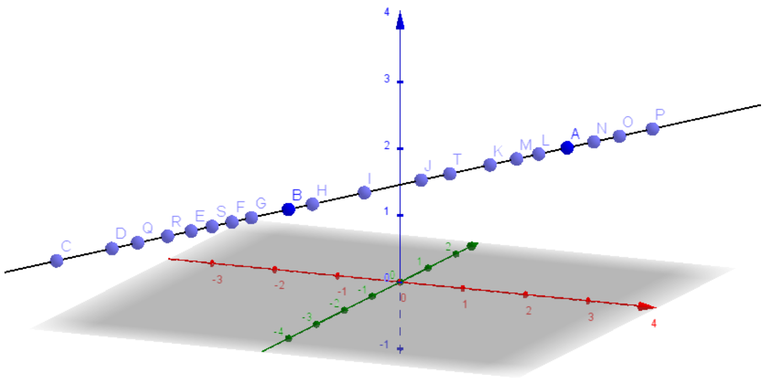


Figura 44 – Questão 1 b)

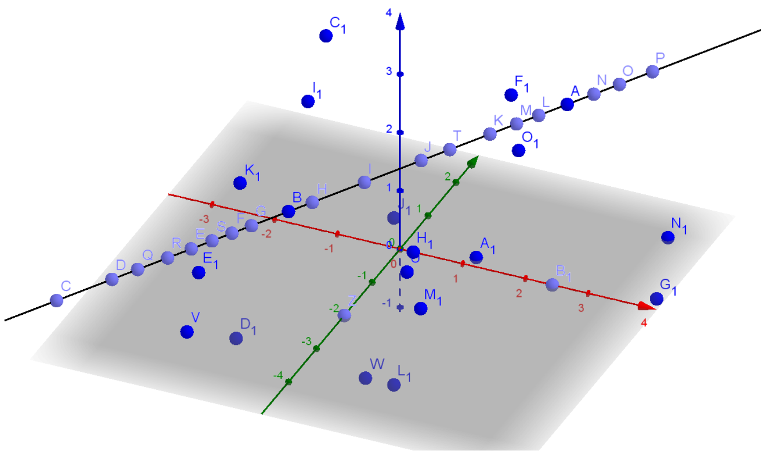


Figura 45 – Questão 1 - Conclusão

b) Em seguida, selecione a ferramenta Ponto em objeto e marque pontos sobre o plano traçado anteriormente.

c) Quantos pontos é possível traçar nesse plano?

d) Usando a ferramenta Ponto, trace pontos que não estejam sobre o plano construído. Quantos pontos é possível traçar fora desse plano?

Solução 2. Essa questão é análoga à primeira, mas com o plano no lugar da reta. Seu objetivo é mostrar que num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos. A Figura 46 mostra um exemplo de construção para o item b). A Figura 47 exibe uma visualização que permite observar com mais clareza pontos que estão ou não no plano.

Questão 3. *Postulado de Determinação - Reta*

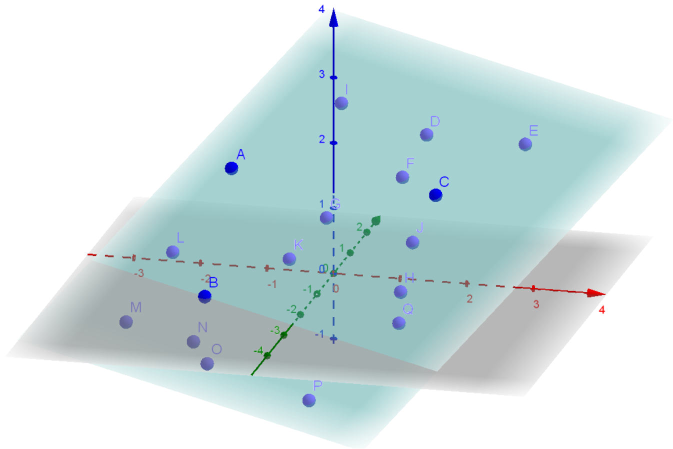


Figura 46 – Questão 2 b)

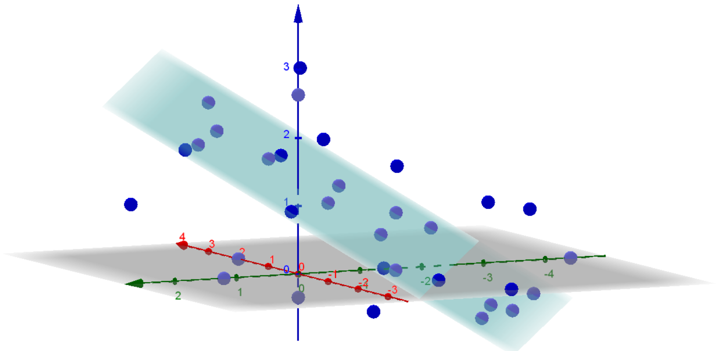


Figura 47 – Questão 2 - Conclusão

a) Plote 3 pontos na Janela de Visualização 3D e trace algumas retas que contenham ao menos dois desses pontos.

b) Escolhendo 2 desses pontos, é possível que duas retas distintas contenham esses pontos?

c) É sempre possível construir uma única reta com três pontos quaisquer?

Solução 3. Nesse item serão construídas três retas, já que dificilmente serão escolhidos aleatoriamente três pontos colineares entre todos os pontos do espaço. Caso eventualmente sejam escolhidos pontos com essa característica, as questões ainda prevalecem, pois pode-se destacar, por exemplo, que a reta traçada é uma reta que passa por dois pontos, e o terceiro não foi necessário para sua construção no GeoGebra. O caso dos pontos não colineares é destacado na Figura 48.

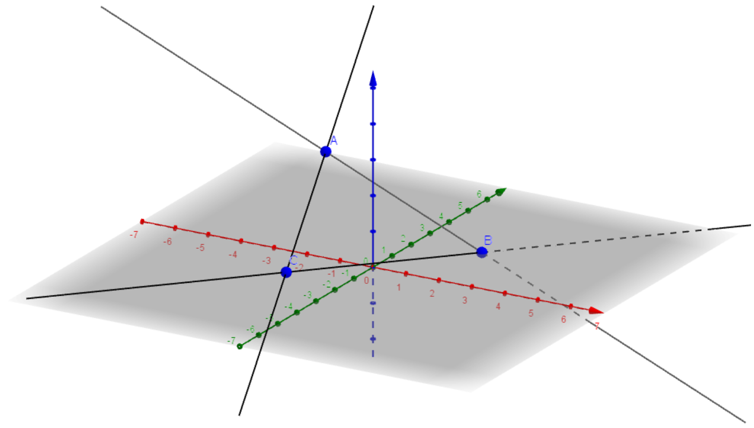


Figura 48 – Questão 3

Questão 4. *Postulado de Determinação - Plano*

a) Use a ferramenta Plano por três pontos para traçar um plano na janela de visualização 3D do GeoGebra.

b) É possível obter um plano distinto (ou seja, diferente) que contenha os mesmos três pontos?

Dica: Oculte o Plano criado no item a) clicando no pequeno círculo azul à esquerda desse plano na Janela de Álgebra. Use a ferramenta Plano ou Plano por três pontos para traçar outro plano que passa pelos pontos usados para construir o primeiro plano. Observe que os planos coincidem.

Solução 4. Semelhante à Questão 3, o objetivo dessa questão é mostrar que três pontos determinam um único plano. A Figura 49 exibe o plano construído usando três pontos e a Janela de Álgebra de acordo com a dica sugerida.

Questão 5. *Postulado de Inclusão*

a) Construa um plano usando a ferramenta Plano por três pontos.

b) Construa as três retas que passam por pares desses pontos.

c) As retas que você construiu estão contidas no plano determinado pelos três pontos? Gire a janela de visualização, se necessário.

d) Trace um ponto fora do plano do Item a), selecionando um ponto no plano cinza e o deslocando até a altura desejada. Construa reta que passa por esse ponto e um dos pontos marcados em a).

e) Qual a intersecção entre a reta construída em d) e o plano construído no item a)?

Dica: Use a ferramenta Intersecção entre dois objetos para auxiliá-lo.

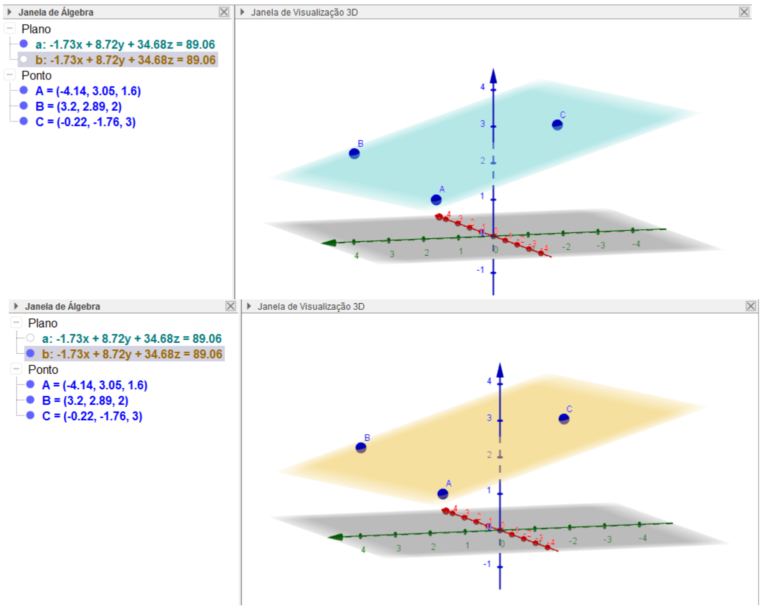


Figura 49 – Questão 4

Solução 5. Nessa questão, espera-se que o aluno conclua que retas podem estar contidas em um plano (se contiver dois pontos nesse plano - item c), Figura 50) ou pode ter apenas um ponto em comum com o plano e, portanto, não estar contida no plano, como ilustra a Figura 51.

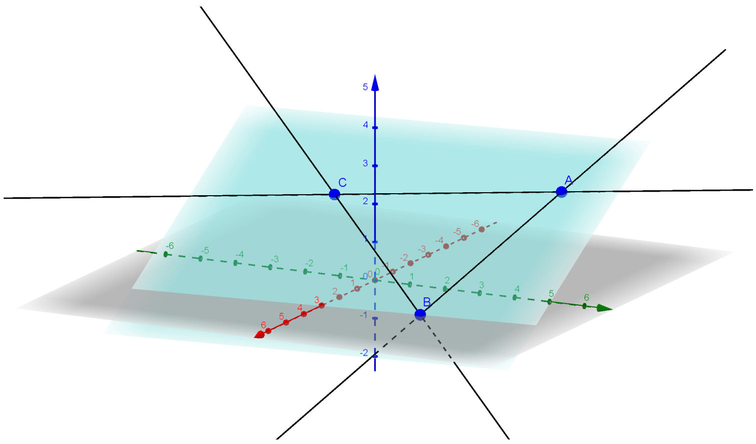


Figura 50 – Questão 5 c)

Posições Relativas de Retas no espaço

Questão 6. Lembre que, no plano, dadas duas retas, há duas possíveis posições relativas entre elas: paralelas (quando elas não possuem um ponto em comum) e concorrentes (quando elas possuem um ponto de intersecção).

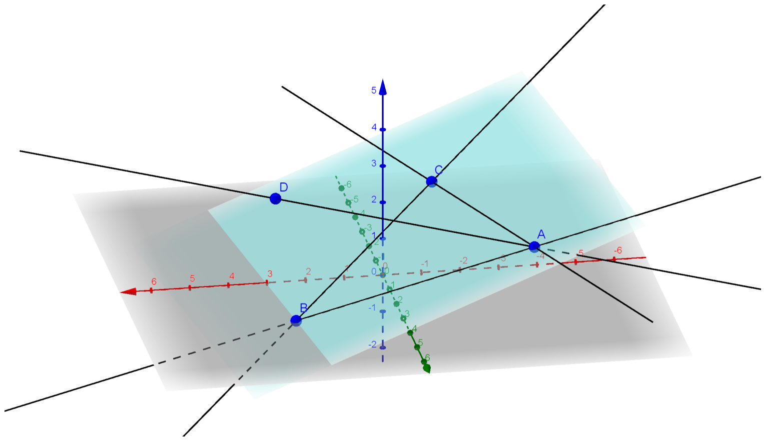


Figura 51 – Questão 5- Conclusão

a) Em uma nova janela do GeoGebra, clique em Exibir e, em seguida, em Janela de visualização 3D (2D se a 3D for a que já estiver aberta). Se você estiver usando o GeoGebra 3D no Tablet, veja a versão alternativa (6) para essa questão.

b) Marque 2 pontos na Janela de Visualização 2D e a reta que passa por eles. Veja que a mesma reta aparece na Janela de Visualização 3D.

c) Na Janela 2D, trace um ponto que não pertença a reta construída e trace uma reta paralela a essa usando a ferramenta Reta Paralela.Veja que o conceito de retas paralelas pode ser generalizado para o espaço. Qual a condição deve ser adicionada a definição de retas paralelas no plano para que essa definição seja válida no espaço?

Questão 6 Alternativa

a) Marque 2 pontos na Janela de Visualização 3D e a reta que passa por eles.

b) Trace um ponto fora da reta construída.

c) Usando a ferramenta Reta Paralela, selecione o ponto traçado no item b) e a reta construída no item a).

d) É possível construir um plano que contenha as retas paralelas construídas no item c)?

Dica: use a ferramenta Plano e selecione as retas paralelas.

e) Qual condição deve ser adicionada à definição de retas paralelas no plano para que essa definição seja válida no espaço?

Solução 6. A Figura 52 mostra as janelas de visualização 2D e 3D lado a lado, com pontos construídos na janela 2D. Com isso é esperado que os alunos concluam que assim como existem retas paralelas no plano, existem retas paralelas no espaço. Além disso, essa generalização deve levar a concluir que duas retas paralelas no espaço devem estar contidas num plano. A questão 6 alternativa foi criada pois, apesar de estar disponível em tablets e smartphones com sistema operacional Android, o GeoGebra 3D é um aplicativo desvinculado do GeoGebra tradicional, ou seja, não é possível comparar as janelas de visualização lado a lado como é feito em computadores.

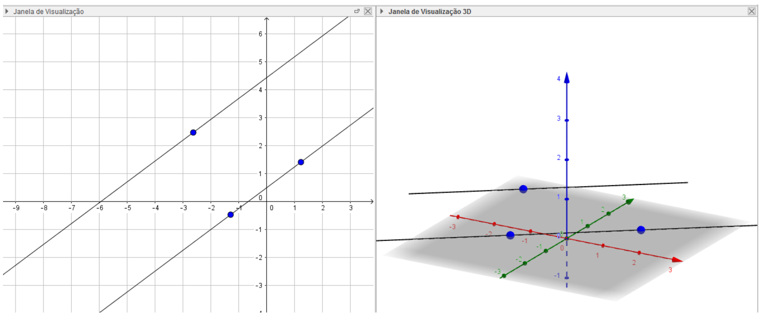


Figura 52 – Questão 6 - Janelas de visualização 2D e 3D lado a lado

Questão 7. *Construindo Retas Reversas*

Digite, no campo Entrada, $x = 0$. Essa equação vai gerar um novo plano no espaço. Trace, agora, três pontos, A, B e C no plano OXY (o plano cinza) e o ponto D no plano construído (sem que D esteja em ambos os planos). Trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$.

a) Qual a posição relativa dessas duas retas?

Dica: Para verificar se elas são concorrentes, utilize a ferramenta Intersecção entre dois objetos e veja se há pontos em comum.

b) Tente traçar o plano que contém ambas as retas usando a ferramenta Plano e selecionando as duas retas. Na versão para tablet e celular, o aplicativo não permite a seleção de duas retas reversas para intersecção.

c) As retas construídas são chamadas de *retas reversas*. Escreva uma possível definição para esse conceito.

Solução 7. Aqui, são construídas retas que não têm intersecção, porém não são paralelas. A ideia da construção é que como as retas estão contidas em planos diferentes e não são paralelas, elas devem ser reversas. A Figura 53 ilustra a situação, incluindo o ponto E, que aparece como indefinido, pois tentou-se construí-lo como a intersecção de duas retas reversas.

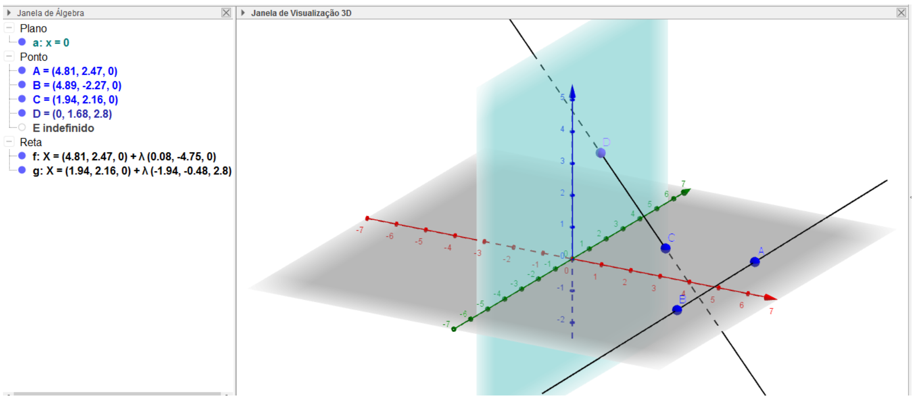


Figura 53 – Questão 7 - Retas Reversas

Questão 8. *Retas Perpendiculares no Espaço*

Construa retas perpendiculares no espaço (retas concorrentes que formam um ângulo reto):

a) Na Janela 3D do GeoGebra, trace dois pontos e a reta que passa por eles.

b) Em seguida, trace um ponto fora dessa reta.

c) Finalmente, use a ferramenta reta perpendicular (observação: a ferramenta a ser usada no tablet ou celular é Reta Perpendicular, cujo item mostra um plano e a reta perpendicular a ele) e selecione o ponto e a reta.

d) Para verificar a perpendicularidade, use a ferramenta Ângulo e selecione as duas retas.

e) Usando a ferramenta Plano construa também o plano determinado pelas duas retas.

f) Um par de retas concorrentes estará sempre contido no plano determinado por elas?

Solução 8. A construção de retas perpendiculares substitui aqui a construção de retas concorrentes quaisquer com objetivo de abreviar a atividade, além de mostrar que retas concorrentes também estão sempre contidas num mesmo plano. Uma possível posição das retas perpendiculares é exibida na Figura 54, junto do plano que contém essas retas.

Posições Relativas de uma Reta e um Plano no espaço

Questão 9. *Planos por uma reta*

a) Trace dois pontos, A e B, na Janela 3D do GeoGebra.

b) Construa a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

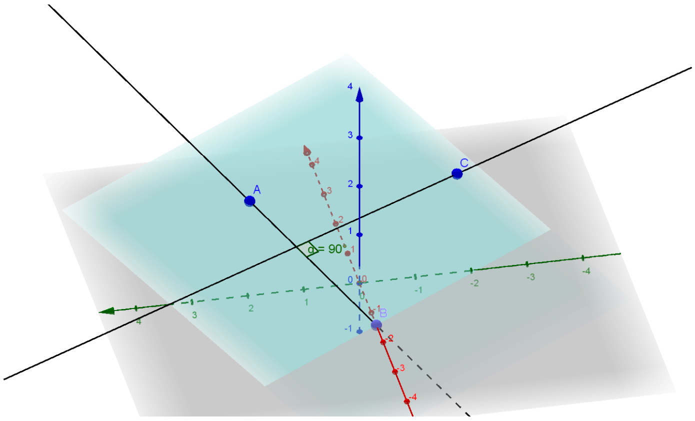


Figura 54 – Questão 8 - Retas Perpendiculares

c) Trace cinco pontos fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em diferentes posições do espaço.

d) Usando a ferramenta Plano, selecione um dos pontos marcados e a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Faça isso para os demais pontos plotados. Quantos planos passam por uma reta?

Solução 9. É esperado concluir dessa questão que por uma reta passam infinitos planos. Por eventuais limitações de software e hardware que podem ser encontradas, foram solicitados apenas cinco pontos fora da reta, gerando cinco planos que a contém. A ideia é que o estudante note que assim como foram feitos cinco planos com cinco pontos, podem ser feitos infinitos planos com todos os pontos do espaço. A Figura 55 mostra a situação com os cinco planos.

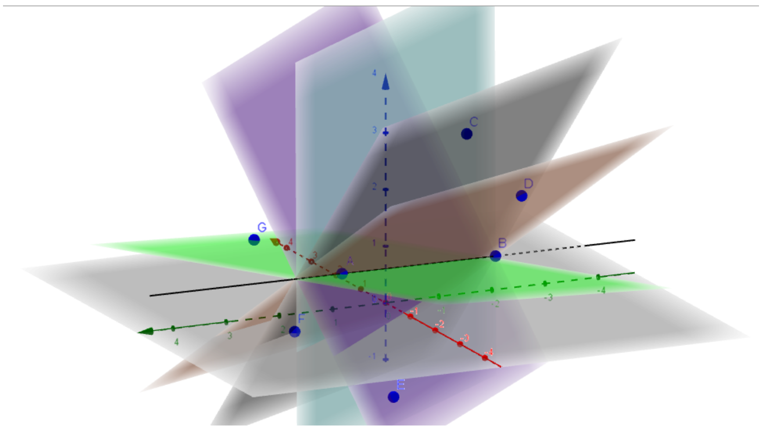


Figura 55 – Planos passando por uma reta

Questão 10. *Retas e Planos Paralelos*

Já vimos que se uma reta tem dois pontos em um plano, então ela pertence a esse plano pelo item a da Questão 5. Também vimos que uma reta pode ter um ponto em comum com um plano, também da Questão 5. Uma reta e um plano podem não ter pontos em comum?

a) Construa um plano definido por um ponto e uma reta e trace um ponto fora do plano construído.

b) Trace a reta paralela a reta usada para construir o plano passando pelo ponto fora dele.

c) Qual a intersecção da reta e o plano?

Dica: Utilize a ferramenta "Intersecção entre dois objetos". Nesse caso diz-se que o plano e a reta são *paralelos*.

Solução 10. Veja a Figura 56 de um exemplo da situação proposta. Aqui o aluno deve concluir que é possível que uma reta seja paralela a um plano. Novamente a utilização da ferramenta de intersecção de dois objetos se mostra útil para verificar que a intersecção é indefinida, ou seja, que não existe.

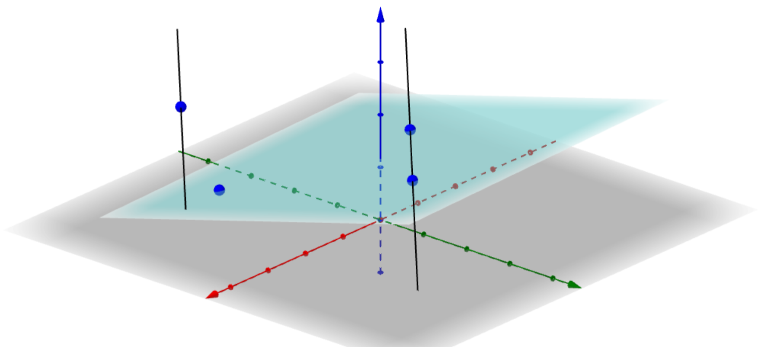


Figura 56 – Questão 10 - Reta Paralela a um Plano

Posições Relativas de dois Planos

Questão 11. *Intersecção de Planos*

a) A Intersecção de dois planos pode ser um único ponto? Tente construir dois planos cuja intersecção seja um único ponto no GeoGebra 3D.

b) Use a ferramenta Intersecção de duas Superfícies para verificar as intersecções dos planos.

c) Escreva uma propriedade sobre a intersecção de dois planos.

Solução 11. Nessa questão, o estudante é provocado a usar sua criatividade e as ferramentas do GeoGebra para criar um caso em que a intersecção entre dois planos seja um único ponto. Como é sabido, não é possível fazer construção com tais propriedades. Espera-se que após algumas tentativas com o uso da ferramenta de intersecção, o aluno conclua que a intersecção de dois planos é sempre uma reta.

Questão 12. *Planos Paralelos*

a) Construa um plano definido por três pontos e marque um ponto fora dele.

b) Usando a ferramenta Plano Paralelo construa um plano paralelo ao primeiro, passando pelo ponto fora dele.

Solução 12. Essa atividade mostra que existem planos paralelos e convida o aluno a escrever com suas próprias palavras a definição de planos paralelos. Com isso espera-se que o aluno também desenvolva a escrita em Matemática. A Figura 57 ilustra a situação.

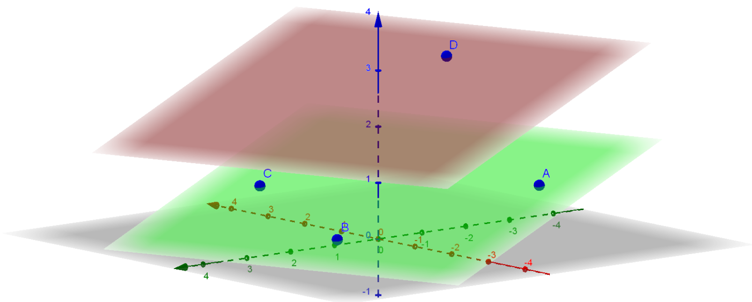


Figura 57 – Questão 12 - Planos Paralelos

Questões de avaliação da atividade

Complete a Tabela 3 escrevendo, a cada linha, as conclusões da questão, de acordo com o que foi discutido durante a realização da atividade. Se necessário, revise ou refaça as questões.

Tabela 3 – Questões e as propriedades associadas - Geometria Espacial

Questão	Conclusão
Questão 1)	____________________ ____________________
Questão 2)	____________________ ____________________
Questão 3)	____________________ ____________________
Questão 4)	____________________ ____________________
Questão 5)	____________________ ____________________
Questão 6)	____________________ ____________________
Questão 7)	____________________ ____________________
Questão 8)	____________________ ____________________
Questão 9)	____________________ ____________________
Questão 10)	____________________ ____________________
Questão 11)	____________________ ____________________
Questão 12)	____________________ ____________________

1. Dados 2 pontos no espaço, quais e quantos elementos (retas, planos) podem ser construídos?

2. **a)** Dados os pontos A, B e C não colineares (ou seja, que não estão estão sob uma mesma reta) no espaço. Enumere as retas que podem ser construídos, fazendo também um breve roteiro de como construir esses elementos no GeoGebra.

   b) Faça o mesmo do item a), para planos.

3. Dadas duas retas, r e s no espaço, quais são as possíveis posições relativas entre elas? Defina cada posição com suas palavras.

4. **a)** Se as retas da Questão 3 forem paralelas, é possível construir um plano a partir delas? Caso responda sim, escreva como você construiria o plano no GeoGebra.

   b) E se elas forem reversas, é possível construir um plano que as contenha? Se a resposta for afirmativa, escreva como esse plano seria construído no GeoGebra.

5. **a)** Dados um plano α e uma reta r do espaço, quais as possíveis posições relativas entre eles?

   b) Por uma reta passam quantos planos?

   b) Escreva dois roteiros para a construção de planos concorrentes no espaço usando o GeoGebra.

6. Dados dois planos no espaço, quais são as possíveis posições relativas entre eles? Escreva a definição de cada posição com suas palavras.

7. Esboce as figuras para as questões 7, 9 e 11 usando apenas lápis, borracha e papel.

8. Quais as vantagens você notou ao usar o software, comparando-o com as figuras da questão 7? Se as figuras que você construiu estivessem em um livro didático, você acredita que seria capaz de visualizar as situações de maneira satisfatória?

___

___

___

5.7 Relato da Aplicação da Atividade

A atividade proposta na seção 5.6 foi aplicada para uma turma de Terceiro Ano do Ensino Médio Politécnico na Escola Estadual de Educação Básica Osmar da Rocha Grafulha (conhecido anteriormente como CIEP). A escola está localizada no Bairro Fragata da cidade de Pelotas, Rio Grande do Sul e atende um público de poder econômico diversificado, com grande maioria dos alunos de classe média baixa, residentes de regiões adjacentes a escola. A escola conta com um laboratório de informática com 11 computadores, 10 dos quais funcionam com sistema operacional Windows 7 e um deles com Windows XP. As atividades foram realizadas no período regular de aula, como parte inicial dos estudos de Geometria Espacial, prevista no conteúdo programático do Terceiro Ano do Ensino Médio.

A turma é composta de 22 alunos (sem incluir matriculados que não comparecem as aulas) com idades de 16 a 18 anos, 5 deles com alguma reprovação em anos anteriores. Segundo relatos dos alunos, a maioria não estudou ou não recorda ter estudado Geometria no Ensino Fundamental ou anos anteriores do Ensino Médio. Isso foi constatado durante as aulas de Geometria Analítica ministradas pelo pesquisador, pois os alunos pareceram ter uma base pouco sólida em Geometria Plana, como por exemplo, propriedades e posições relativas entre retas, circunferências e pontos no plano. Isso se junta a dificuldades em Matemática Básica (operações básicas, resolução de equações de primeiro e segundo grau) e uma visão de que os exercícios de Matemática devem apenas reproduzir alguns modelos e métodos. Quando era proposto um exercício que fugia desse modelo, os alunos tinham dificuldade em interpretá-lo e procurar estratégias para resolvê-lo.

Antes da aplicação da atividade foi ministrada uma aula em que foram relembrados os entes primitivos da Geometria: Ponto, reta e plano bem como suas notações. A partir daí, foi exposto que esses elementos, junto de algumas proposições fundamentais (conhecidas como postulados), permitem o desenvolvimento de toda a Teoria da Geometria Euclidiana. Foram também relembradas as posições relativas estudadas na Geometria Analítica Plana. Durante a exposição, os alunos pareceram interessados e faziam perguntas pertinentes. Quando perguntados a respeito dos conceitos expostos, a maioria dos alunos respondeu de forma satisfatória.

A primeira parte da atividade foi realizada no dia 5 de dezembro, uma terça-feira, durante uma hora-aula de 50 minutos. 19 alunos compareceram nesse dia e nos seguintes. Os computadores já se encontravam equipados com a última versão disponível do GeoGebra para Windows. Como haviam mais alunos que computadores, foi solicitado que eles se organizassem em duplas. Devido ao número ímpar de alunos, uma das duplas foi transformada num trio. Depois que os alunos abriram o GeoGebra, foi-lhes explicado que este se trata de um software de Geometria Dinâmica, que permite a criação e modificação de objetos matemáticos de acordo com o objetivo de estudo do usuário. A seguir, foram apresentadas as janelas de visualização e de álgebra, lembrando-os da relação entre retas e circunferências com determinados tipos de equações. Em seguida, as duplas foram instruídas a abrir a Janela de Visualização 3D, onde foram apresentados o plano $z = 0$ que serve como base para o traçado de pontos e os três eixos coordenados. A Figura 58 mostra a Janela de Visualização 3D inicial. O plano $z = 0$ exibido nessa figura é identificado na totalidade desse trabalho como “Plano Cinza”. Também foram apresentados os botões de ferramentas e suas respectivas descrições/ajudas, para que eles fossem acionados com maior facilidade quando mencionados no texto da atividade.

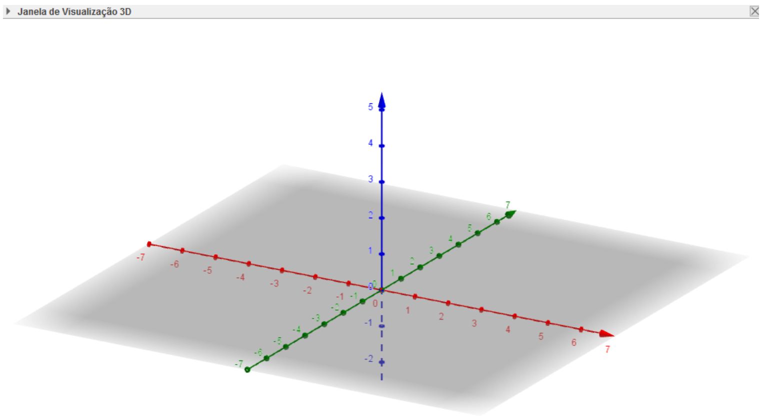


Figura 58 – Janela de Visualização 3D

Neste primeiro encontro foi realizada apenas a introdução da atividade proposta. As duplas realizavam as atividades independentemente, com a ajuda e supervisão do docente. Em um primeiro momento, alguns alunos apresentaram dificuldade para criar pontos no espaço, criando pontos apenas no plano base, ou mesmo somente nos eixos coordenados. Foi solicitado que a janela de visualização fosse girada, para que essa peculiaridade fosse observada e posteriormente contornada, com todos os discentes construindo pontos de maneira correta. Notou-se que a observação de colegas realizando a atividade também foi de grande ajuda, já que alguns apresentavam uma naturalidade maior para lidar com o software (possivelmente por maior contato com informática em geral). Também observavam e debatiam as diferentes posições dos elementos de outras duplas, muitas vezes perguntando o porquê de tamanhas diferenças. A construção de retas e planos ocorreu mais naturalmente, com pleno uso da rotação da janela de visualização.

Os alunos notaram que, sob alguns ângulos, as figuras parecem ter propriedades diferentes, como nas visualizações na direção dos planos coordenados, onde a figura parecia pertencer toda a um mesmo plano. Também notaram que partes pontilhadas em retas e pontos opacos indicaram que estes estavam sobrepostos pelo plano base ou outro objeto. Também tiveram interesse em deixar detalhes estéticos, perguntando se era possível esconder “as letras” dos elementos e mudar sua cor. Foi-lhes explicado como ocultar rótulos e mudar cores usando a janela de propriedade de cada objeto. Essas perguntas apareceram naturalmente, imediatamente depois do primeiro contato com o software.

Devido a limitações do hardware de alguns computadores, algumas dificuldades técnicas foram encontradas. Em alguns, ao girar a janela de visualização havia travamentos ou a animação de giro era omitida (só era exibida e figura na posição inicial e na posição final). Um outro computador (que operava com Windows XP) apenas plotava um plano por vez, isto é, para que cada plano fosse visualizado, todos os outros deviam ser ocultados. Em 2 computadores o traçado dos planos não era completo, apresentando apenas algumas partes "desbotadas" e seccionadas em quadrados. No entanto, ainda era possível visualizar propriedades desses planos. Os alunos que ficaram nesses computadores não foram afetados por essas dificuldades, uma vez que interagiam com demais colegas e debatiam as diferenças de resultados encontrados.

A aula que deu seguimento a realização da atividade foi dia 10 de dezembro, em mais um período de 50 minutos. As mesmas duplas ocuparam seus lugares e receberam uma folha com as atividades de Introdução e questões de 1 a 5. O procedimento de aplicação dessa atividade foi diferente: o docente pesquisador lia a questão e aguardava a construção de todas as duplas, enquanto ajudava alguns alunos em eventuais dificuldades referentes a questão recém lida. Após uma breve discussão a respeito da questão, os alunos eram convidados a escrever, com suas palavras, a propriedade que poderia ser generalizada a partir dela, na Tabela 3 de avaliação da atividade. Durante a realização da atividade alguns alunos precisaram ser relembrados de como fazer algumas construções básicas, principalmente pontos. Geralmente os discentes só notavam que haviam construído todos os pontos sob o plano $z = 0$ ao plotar um plano que acabava coincidindo com o plano base. Alguns alunos perguntaram se era possível retirar os eixos coordenados da figura e todos foram instruídos em como ocultá-los, bem como ocultar o plano cinza. Alguns alunos preferiram deixar os eixos ocultos, mas todos preferiram deixar o plano cinza em todas as figuras. Nas questões em que era necessário construir pontos sobre retas e planos e pontos fora deles, alguns alunos não conseguiam fazer e foram orientados a mudar a visualização (girar a janela) para procurar uma melhor maneira de visualizar as figuras construídas.

No dia 12 de dezembro foi realizada a última parte da atividade, consistindo das questões 5 a 12 e a entrega do questionário de avaliação. O procedimento adotado foi o mesmo da aula anterior, os alunos realizavam a atividade ao mesmo tempo, sob instrução do professor e após a discussão de cada questão, escreviam conclusões na tabela apropriada. A Questão 6 solicita a exibição das janelas de visualização 2D e 3D juntas e alguns alunos não seguiram as instruções corretamente, construindo pontos na Janela 3D, ao invés da Janela de Visualização 2D. Na questão sobre retas reversas, ao digitar a equação do plano, os alunos perguntaram se era possível usar o GeoGebra para obter a equação de qualquer figura por eles conhecida, tanto no plano quanto no espaço, e a resposta foi deixada em aberto, para que os mesmos tentassem respondê-la sozinhos. Na Questão 9, onde eram necessários cinco planos, alguns computadores que não haviam apresentado qualquer problema citado anteriormente travaram não para visualizar a figura, mas para girá-la. Algumas duplas escolheram também pontos muito próximos, dificultando a visualização da propriedade requerida. O restante das atividades ocorreu tranquilamente, sem episódios a destacar.

Ao final do preenchimento da tabela, foi entregue um o questionário de avaliação da atividade, de onde serão aferidos resultados referentes a recepção da mesma pelos alunos e sua efetividade no ensino de Geometria Espacial de Posição. Os alunos o levaram para casa e o entregaram na aula seguinte, devidamente identificados, pois foram informados que tal trabalho fazia parte da avaliação do terceiro trimestre daquele ano letivo. Os arquivos com as atividades realizadas foram salvos nos computadores de cada dupla, conforme elas realizavam cada questão. Esses arquivos foram posteriormente recolhidos para análise. A discussão desses questionários está na seção 5.10.

Foram usados 4 períodos de 50 minutos para a realização da atividade proposta, para uma turma de terceiro ano do Ensino Médio. Os alunos conseguiram desenvolvê-las sem maiores dificuldades, salvo as dificuldades técnicas causadas pelos computadores disponibilizados. Alguns alunos foram além das construções propostas enquanto aguardavam os demais colegas realizarem suas construções, explorando recursos do GeoGebra para construção principalmente de sólidos e polígonos. A atividade transcorreu sem maiores complicações e os momentos de discussão entre as questões foram produtivos, pois permitiam a cada dupla observar o trabalho dos colegas para argumentar as propriedades aferidas. Isso mostrou como a investigação matemática pode ser benéfica para os alunos, bem como lhes fornece um novo significado para o trabalho em Matemática, mais próximo dos profissionais da área e onde eles puderam desenvolver suas habilidades de levantar hipóteses e conjecturar.

5.8 Resultados

Nesta seção são avaliadas as conclusões de cada um dos nove grupos que realizaram a atividade proposta e um questionário aplicado posteriormente, que foi respondido a distância. As conclusões são analisadas por meio da Tabela 3, que ia sendo preenchida após a realização de cada questão pela turma, como foi relatado na seção 5.7. Para essa análise, são verificados o número de respostas esperadas, o número de respostas inesperadas, além da classificação dessas últimas em corretas ou incorretas. São destacadas algumas respostas interessantes, seja pelo uso da linguagem Matemática, conclusões inesperadas, mesmo que tais questões apresentem respostas incorretas. Na análise do questionário, são avaliados a contribuição da atividade na aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial de Posição, a efetividade do software comparada com outros meios de representação de figuras espaciais e se os alunos assimilaram os comandos do software para construção de figuras espaciais.

5.9 Análise da Tabela de Conclusões

As conclusões, propriedades ou definições esperadas estão exibidas na Tabela 4.

Tabela 4 – Conclusões, propriedades e definições esperadas - Geometria Espacial

Questão	Axioma/Propriedade
Questão 1)	*Existe reta, e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.*
Questão 2)	*Existe plano, e num plano, bem como fora dele, há uma infinidade de pontos.*
Questão 3)	*Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.*
Questão 4)	*Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.*
Questão 5)	*Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano / Se uma reta e um plano apresentam em comum apenas um ponto, a reta e o plano são secantes.*
Questão 6)	*Duas retas são paralelas se são coplanares e não têm pontos em comum.*
Questão 7)	*Duas Retas são chamadas reversas se não existe plano que as contém.*
Questão 8)	*Duas retas são concorrentes se e somente se têm um único ponto em comum e estão contidas num plano.*
Questão 9)	*Por uma reta passam infinitos planos.*
Questão 10)	*Uma reta é paralela a um plano se, e somente se, eles não possuem ponto em comum.*
Questão 11)	*A intersecção de dois planos é uma única reta.*
Questão 12)	*Dois planos são paralelos se não possuírem pontos em comum.*

As duas primeiras questões, que ilustram o Postulado de Existência de retas e planos, foram respondidas corretamente por todos os alunos, ou seja, todos concluíram que existem infinitos pontos numa reta e fora dela e que o mesmo ocorre para planos. Algumas respostas incomuns incluem uma confusão de número com pontos: “Na reta pode ter números infinitos e fora dela também são infinitos ponto”. Pode ser que se trate de uma simples troca da palavra “números” por “pontos” ou que os alunos tenham associado os pontos a suas coordenadas correspondentes na reta real. Uma outra dupla usou o termo “colocar pontos numa reta” para indicar que os pontos pertencem à reta.

As demais respostas apresentaram escrita e expressão de ideias satisfatórias, como é o exemplo exposto na Figura 59.

A Questão 3 foi respondida de maneira inesperada por três das duplas. Uma das duplas escreveu que “Dois pontos não passam numa mesma reta” mas concluiu corretamente que “uma reta não pode passar sempre por três pontos”. Foi o mesmo caso de outra dupla, que também escreveu a conclusão esperada para três pontos, mas concluiu que “Não é possível duas retas contenham os mesmos pontos” (Figura 59). Uma terceira dupla preencheu o espaço apenas com “Sim”, que é uma resposta errada para ambas as perguntas propostas na Questão 3. Foram consideradas respostas esperadas algumas conclusões que se assemelham à resposta correta ou que implicam na resposta correta. Por exemplo: “Não é possível fazer retas distintas usando dois pontos. Não, pois os três pontos precisam estar alinhados”. A segunda frase refere-se a pergunta contida no item b) da Questão 3. Apesar desses erros, todas as respostas da questão 4 foram satisfatórias, escrevendo, por exemplo, a conclusão da Figura 60. Três grupos chegaram a conclusão de que “Apenas 1 plano passa por três pontos”, que é uma afirmação mais geral e próxima do resultado esperado que a anterior.

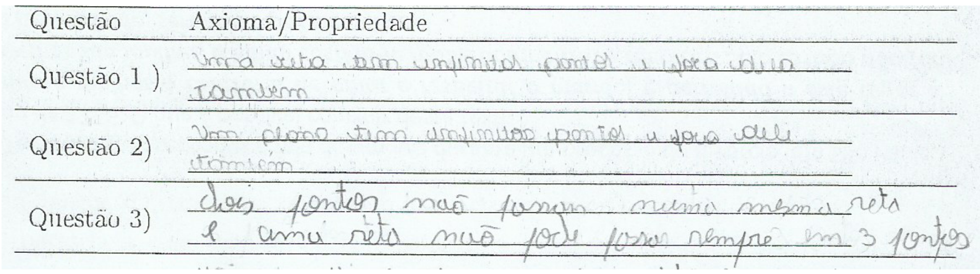
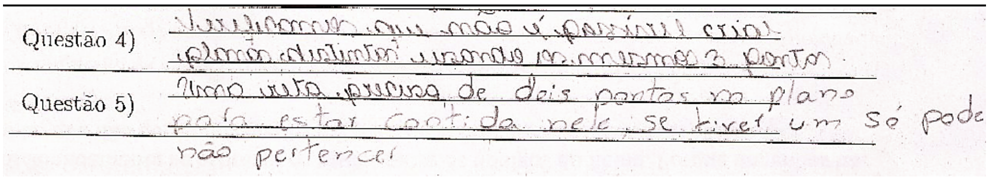


Figura 59 – Conclusões das questões 1, 2 e 3 obtidas por alunos

Na Questão 5, apenas uma resposta fora dos padrões esperados foi identificada. No espaço destinado a referida questão os alunos escreveram “Uma outra reta”. Acredita-se que isso se trata de resposta direta ao item d) de tal questão. A análise do arquivo com a construção feita pelos alunos não mostra indícios da outra reta que pode por eles ter sido citada. Nas respostas corretas, observou-se o uso de palavras como “cruzar” para indicar que os pontos estavam contidos em um plano, como em “A reta só estar (sic) contida no plano se cruzar dois pontos dentro do plano”. Também foram utilizadas expressões com “obter pontos no plano” e “precisa ter” como alternativas para indicar a relação de pertinência. Duas tabelas complementaram a conclusão com “(...) se tiver um ponto só pode não pertencer”, se referindo ao caso da intersecção da reta e do plano (Figura 60).

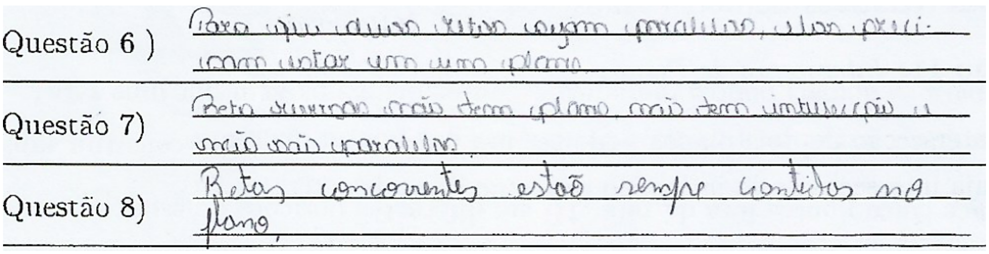
Nas questões 6, 7 e 8, que tratam das posições relativas das retas no espaço, o aproveitamento foi de 100%. No entanto, nenhuma das duplas destacou que retas paralelas não têm pontos em comum, apenas que, no espaço, é necessário que elas estejam


Questão 4) Verificamos que não é possível criar planos distintos usando os mesmos 3 pontos.

Questão 5) Uma reta precisa de dois pontos no plano para estar contida nele, se tiver um só pode não pertencer

Figura 60 – Conclusão de uma das duplas - Questões 4 e 5

contidas em um plano. Acredita-se que o conceito de retas paralelas do plano tenha sido transportado para o espaço, por isso a não referência ao caso da intersecção. Um exemplo de resposta que evidencia isso é "Para que duas retas sejam paralelas no espaço elas precisam estar em um plano". A Questão 7 foi a que mais produziu complementos em relação à resposta esperada. Além de destacar que essas retas não têm intersecção, todas as duplas ainda destacaram que não existe plano que as contenham. Quatro destacaram, ainda, que retas reversas não são paralelas (já que ambos pares desses tipos de retas não possuem intersecção). Seria necessário destacar qual dentre essas propriedades define retas reversas e quais são consequências dessa definição, para que o conceito fique bem definido, porém esse não era o enfoque da atividade. A resposta mais geral, dentre as conclusões dadas pelos alunos, é: "Retas reversas não têm intersecção e não são paralelas. Não existe um plano que possa conter elas". Análogo ao ocorrido para retas paralelas, nenhum aluno destacou que retas concorrentes tem apenas um ponto de intersecção. Quatro trabalhos destacaram que "existe (sic) retas concorrentes no espaço", o que indica que os alunos generalizaram a condição de concorrência do plano para o espaço. Todas as duplas, exceto uma, destacaram que duas retas concorrentes no espaço sempre determinam um plano. A Figura 61 destaca o preenchimento da tabela por uma dupla de alunos.


Questão 6) Para que duas retas sejam paralelas elas precisam estar em um plano

Questão 7) Retas reversas não tem plano, não tem intersecção e não são paralelas

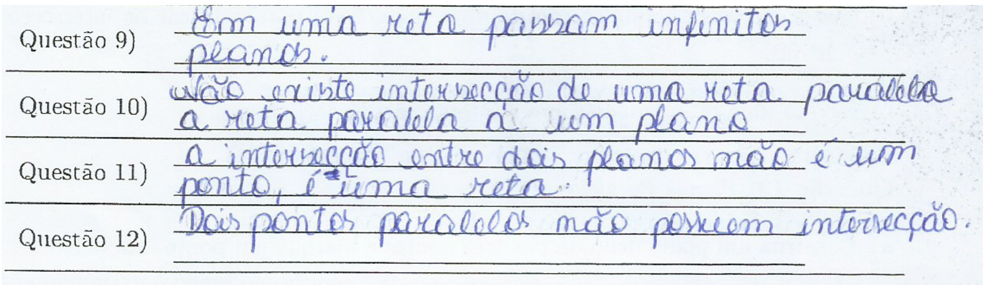
Questão 8) Retas concorrentes estão sempre contidos no plano.

Figura 61 – Conclusão das questões 6, 7 e 8 na tabela preenchida por alunos

A questão 9 foi respondida satisfatoriamente por todos os alunos. A questão 10 apresentou seis definições satisfatórias quanto à posição relativa de retas e planos. As três respostas incorretas incluíram a generalização "Não existe uma intersecção entre um plano e uma reta" e "Não existe intersecção de uma reta paralela a reta paralela a um plano". A primeira afirmação está incorreta, uma vez que generaliza um caso que é particular. A conclusão ficaria correta se fosse acrescentado "...paralela a ele". Já a segunda conclusão pode ter sido induzida pela própria questão, já que nela a reta paralela ao plano é construída usando a relação de paralelismo de uma reta do plano e uma outra, que não está contida no plano. Além dessas observações, três trabalhos comentaram que "Uma reta paralela a uma reta do plano também é paralela ao plano", sendo essa a única conclusão de uma dessas duplas, enquanto as outras duas incluíram também a propriedade da intersecção.

As questões 11 e 12 se referem as posições relativas de dois planos, sem considerar o caso da coincidência. Conclusões esperadas aparecem em todos os trabalhos, salvo algumas exceções. Na questão 11, todas as duplas concluíram corretamente que a intersecção de dois planos não pode ser apenas um ponto, mas sim uma reta. Entretanto, em um trabalho consta "A intersecção de dois pontos sempre vai dar uma reta" no espaço correspondente a questão 11, resposta essa que foi considerada correta, pois houve a troca da palavra *planos* por *pontos*. A questão sobre planos paralelos, 12, foi respondida de maneira satisfatória por todos os alunos, que destacaram que a intersecção de planos paralelos é vazia. A mesma dupla que fez a troca das palavras ponto e plano na questão anterior cometeu a inversão novamente, e uma outra dupla escreveu que "Dois planos paralelos não se intersectam, assim não possuem coeficiente angular", o que é inesperado, primeiro, pois o foco da atividade não era a equação do plano, e segundo, pois a equação do plano exibida pelo GeoGebra no arquivo correspondente a questão é a equação paramétrica do plano, forma essa que não foi estudada nem para retas, nem para circunferências.

A Figura 62 exibe as respostas de alguns alunos para as questões 9, 10, 11 e 12, algumas delas discutidas nos parágrafos anteriores.


Questão 9) Em uma reta passam infinitos planos.

Questão 10) Não existe intersecção de uma reta paralela a reta paralela a um plano

Questão 11) a intersecção entre dois planos não é um ponto, é uma reta.

Questão 12) Dois pontos paralelos não possuem intersecção.

Figura 62 – Conclusão das questões 9, 10, 11 e 12

A análise da Tabela de conjecturas criadas pelos alunos mostrou que a atividade foi efetiva para a construção de relações entre pontos, retas e planos no espaço. O aproveitamento de cada questão, exibido na Tabela 5, comprova tal efetividade. A maioria das duplas a preencheu com os resultados esperados, com alguns estudantes fazendo adições interessantes e inesperadas, poucas delas enganadas. Também pode ser observada como a linguagem matemática é empregada pelos alunos, algo que será abordado na próxima seção, quando serão analisadas as respostas ao questionário proposto ao final da atividade.

Tabela 5 – Aproveitamento de cada Questão

Questão	Respostas Esperadas	Respostas Inesperadas
Questão 1	9	0
Questão 2	9	0
Questão 3	6	3
Questão 4	9	0
Questão 5	8	1
Questão 6	9	0
Questão 7	9	0
Questão 8	9	0
Questão 9	9	0
Questão 10	6	3
Questão 11	8	1
Questão 12	7	2

5.10 Análise dos Questionários

Essa seção analisa os questionários entregues aos alunos após a realização da atividade e respondidos à distância, num prazo de cinco dias entre a entrega do formulário e das respostas. As primeiras questões versam sobre Geometria Espacial de Posição e propõem que os discentes façam uma sistematização dos assuntos tratados na atividade e revisem os principais comandos do software. Assim, o questionário serve não apenas como parte da avaliação da atividade, mas como complemento e fechamento para a mesma. A segunda parte do questionário tem por objetivo avaliar a atividade comparando-as com outros meio de representação das mesmas figuras e as vantagens do uso de um software de Geometria Dinâmica.

O primeiro item do questionário trata das possíveis construções no espaço dados dois pontos. Sabe-se que dois pontos A e B no espaço, definem uma única reta, $\overleftrightarrow{AB}$ que passa por A e por B. Essa seria a resposta correta e esperada dos alunos. No entanto, apesar de sete duplas responderem corretamente, algumas complementaram a resposta com construções referentes a outras questões da atividade. Quatro grupos destacaram que é possível construir infinitos planos e pontos, possivelmente se referindo às Questões 9 e 3. Um exemplo de resposta desse tipo é: “Uma reta e nelas infinitos pontos e planos”. Essa resposta mostra que esses alunos já desenvolveram a capacidade de visualizar pontos no espaço, visto que a resposta esperada valia também para o caso 2D. Outras duas duplas escreveram que é possível construir infinitos planos e pontos, sem mencionar a reta, mas mesmo não escrevendo-a, pode ser que a tenham considerado, pois falam do traçado de infinitos planos. Para a construção desses planos seriam necessários mais pontos que os dois dados, tornando esse tipo de conclusão incorreta para a pergunta, mas é interessante para mostrar o ponto de vista dos alunos quanto à possibilidade de objetos a serem criados no espaço.

Todos os alunos responderam corretamente a Questão 2, que trata das construções possíveis com três pontos. No item a), escreveram que é possível construir três retas e escreveram como construí-las de maneira simples, indicando que usariam as ferramentas Ponto e Reta, sem detalhar como construíram as retas e os pontos. Estes foram especificados por letras maiúsculas na maioria dos trabalhos, mas em três deles foram usados letras minúsculas. Com isso, as retas foram representadas também por letras minúsculas como por exemplo ab, enquanto outras foram representadas como $\overline{AB}$ e também apenas pelas letras maiúsculas AB. Cabe salientar que durante o estudo de Geometria Analítica a única notação de reta apresentada foi a que usa letras minúsculas. Já para o item b), nenhum trabalho denominou o único plano determinado por três pontos, mas indicaram que usariam a ferramenta "Plano por três pontos" para construí-lo (exceto por uma das duplas, que não citou nenhum método). Como visto em 5.7, os alunos preferiram ocultar os rótulos durante a realização da atividade, o que pode ter contribuído para os erros de notação dos elementos, além da pouca experiência dos alunos com a Geometria. É interessante destacar que, diferente da primeira questão, os alunos não apresentaram construções complementares como retas e infinitos pontos, apesar de o mesmo raciocínio da questão anterior poder ser empregado para construir tais elementos.

A próxima questão solicitava que os alunos sistematizassem as posições relativas entre duas retas, r e s, no espaço. Todas as duplas destacaram que os possíveis casos são Retas paralelas, reversas, concorrentes e coincidentes, apesar desse caso não ter sido retratado na atividade. Possivelmente os alunos tenham usado outras fontes de pesquisa para responder a pergunta, além da atividade proposta. Mesmo assim, houve respostas diversas que devem ser analisadas. Para retas paralelas, todas as duplas destacaram que não possuem ponto de intersecção, com quatro descrevendo essa propriedade com expressões como "retas que não se cruzam" ou que "não se tocam" e apenas quatro destacaram que elas devem pertencer ao mesmo plano. Dois grupos trataram essa classificação usando a Geometria Analítica estudada anteriormente: "São retas que possuem a mesma inclinação, ou seja, não se cruzam". Todos os alunos destacaram que retas concorrentes são retas que possuem intersecção, no entanto, três questionários usaram apenas esse fato para defini-las, enquanto o restante destacou que "Retas concorrentes possuem um único ponto em comum". É importante salientar que a intersecção de duas retas pode ser também infinita (retas coincidentes), e portanto deve-se explicitar, na definição, que essas retas possuem apenas um ponto em comum. Ainda sobre retas concorrentes, todos os grupos escreveram que retas desse tipo que "formam um ângulo de 90°" são chamadas de retas perpendiculares. Quanto a retas concidentes, todos os grupos as definiram como retas que possuem todos os pontos em comum, com dois destacando que essas retas pertencem a um mesmo plano, o que é uma afirmação falsa. Nota-se, ao analisar a presente questão, que os alunos tem dificuldade de diferenciar retas "contidas num plano", "que determinam um plano" e "existe um plano que as contém". Para sanar essa dificuldade acrescentamos uma questão na versão revisada da atividade, disponível em anexo. A moda entre as definições de retas reversas foi que pares desse tipo de retas "pertencem a planos separados" ou distintos. Ainda assim, quatro grupos destacaram que não existe intersecção e que elas não são paralelas, como foi escrito pela maioria dos grupos quando responderam a Questão 7. Especula-se que as duplas que usaram apenas a definição com planos distintos usaram de outras fontes para responder o questionário, uma vez que nenhuma dupla citou somente esse fato quando definiu Retas Reversas na Tabela 3.

A Questão 4 buscava aferir o conhecimento dos comandos do software, intercalando-os com as propriedades de Geometria Espacial estudadas. Todos os discentes responderam as questões corretamente, ou seja, escreveram que é possível construir um plano passando por um par de retas paralelas e que o mesmo não pode ser construído para retas reversas. As construções para o plano que passa por duas retas paralelas foram diversos, mas três construções foram incorretas. Uma delas é exibida na Figura 63. Essa construção é válida

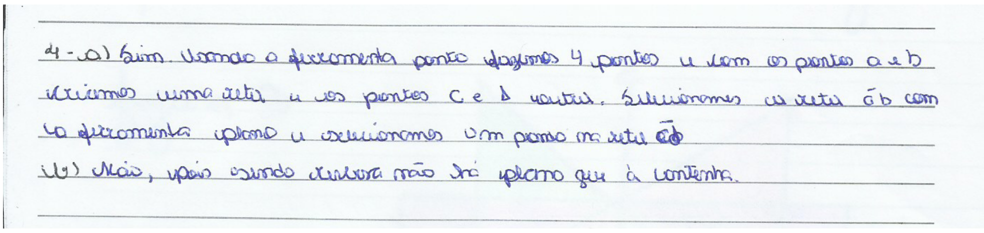


Figura 63 – Solução com construção incorreta

para qualquer par de retas e não garante o paralelismo, além de utilizar, mais uma vez, notação não usual para pontos. As retas inclusive podem ser reversas, não possibilitando a criação do plano que as contém, como destacado pelos próprios alunos no item b). Outra construção incorreta aparece na Figura 64. Houve algum erro de interpretação, uma vez que esses passos constroem uma figura semelhante à Questão 9 da atividade. A construção correta mencionada mais frequentemente já considera dadas as retas r e s. Ela sugere construir um ponto em uma das retas e, usando a ferramenta plano, selecionar o ponto criado e a outra reta. Um exemplo desse caso está exposto na Figura 65.

Uma outra construção correta mostra como construir as retas paralelas: "Utilizando a ferramenta ponto, criando dois no espaço sendo A e B e um terceiro ponto, na ferramenta reta selecionaria os pontos A e B, depois em reta paralela seleciona a reta

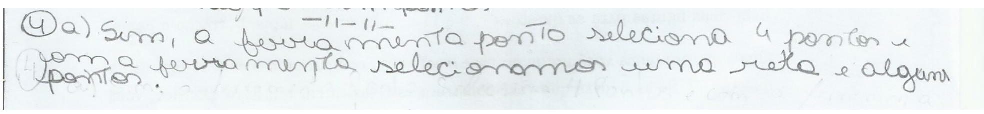
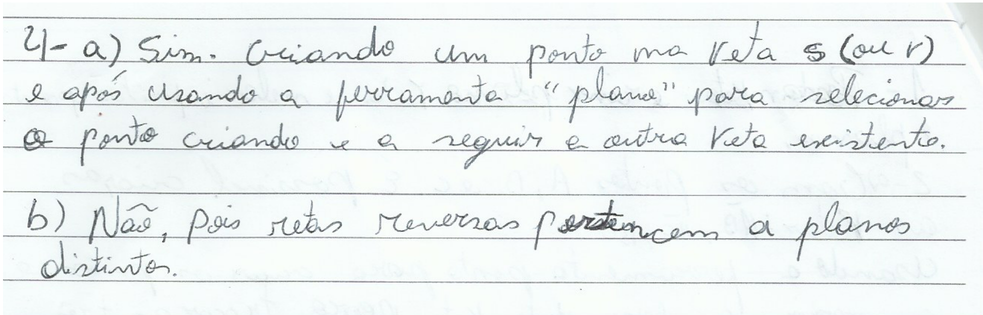


Figura 64 – Resposta com uma construção incorreta


4- a) Sim. Criando um ponto na reta s (ou r) e após usando a ferramenta "plano" para selecionar o ponto criando e a seguir a outra reta existente.

b) Não, pois retas reversas pertencem a planos distintos.

Figura 65 – Solução com uma das construções possíveis

(criada pelos pontos A,B) e o ponto C (terceiro ponto). Na janela de visualização 3D selecionando os três pontos com a ferramenta Plano por três pontos". Este caso não considera que as retas sejam dadas e apresenta a ferramenta plano por três pontos para construir o plano.

A Questão 5 do questionário solicita que os alunos citem as posições relativas de um plano e uma reta. Apenas um grupo as citou sem definir e todos os outros, além de citarem, definiram com suas palavras essas posições. Com a exceção de uma dupla (que citou apenas Paralelos como posição), todos os alunos citaram que as possíveis posições relativas entre uma reta e um plano são: paralelos, concorrentes (ou secantes) e contida (quando a reta está contida no plano). Sete questionários definiram que uma reta é paralela a um plano "se não tiverem nenhum plano em comum". Uma dupla expressou a ideia de intersecção vazia escrevendo "nenhum ponto que seja igual". O caso de reta e plano concorrentes foi definido por "se somente ter um ponto em comum" por todos os alunos que escreveram a definição. Cabe notar que essas duplas usaram o termo secante apesar desse termo não ter sido definido no trabalho, reforçando a hipótese de que foi usada outra fonte para a escrita das respostas desse questionário. A definição de reta contida no plano foi expressa de duas formas: "Se garantirmos que pelo menos dois pontos da reta estejam no plano" e "quando todos os pontos da reta também são pontos do plano". A primeira definição apareceu em cinco dos questionários, enquanto a segunda apenas duas. Ambas as definições podem ser consideradas corretas, mas a primeira está mais próxima da conclusão retirada da Questão 5. A Figura 66 mostra a resposta de uma das duplas. Todas as definições estão corretas e ainda são apresentadas ilustrações de cada situação, ilustrações essas típicas de livros didáticos. Todos os alunos responderam corretamente o item b), escrevendo que por uma reta passam infinitos planos. Fica assim verificada a eficácia da Questão 9.

O item c) da Questão 4 solicita dois roteiros para construção de planos concorrentes. A maioria dos alunos fez as mesmas duas construções, com pequenas diferenças na redação dos textos. Ambas as sugestões começam com a construção de um plano

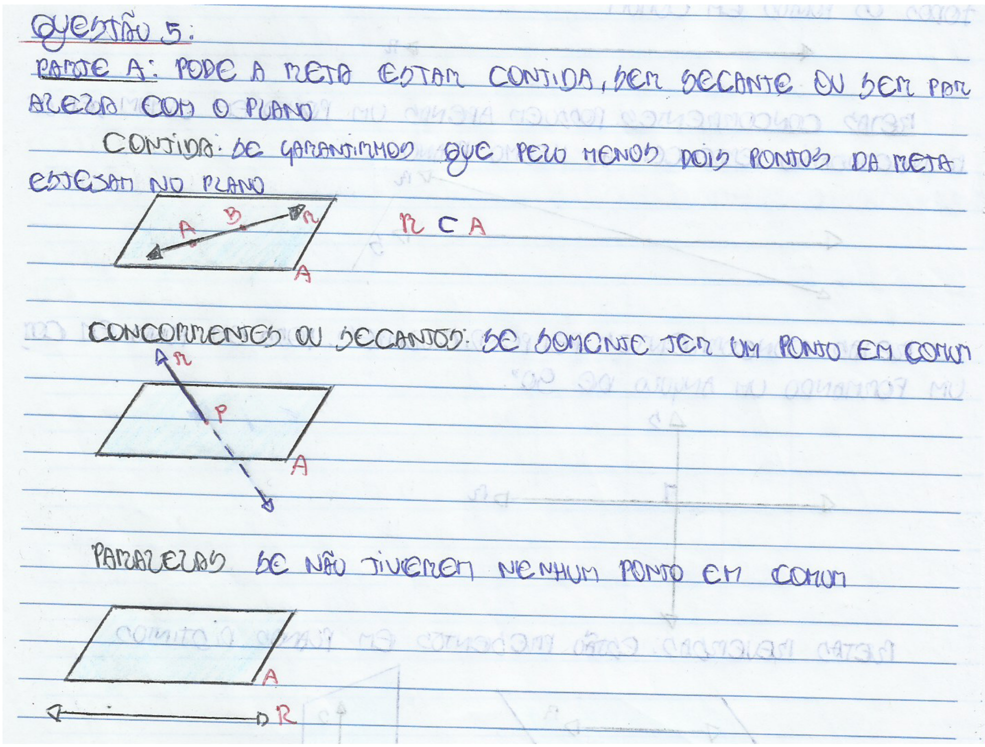


Figura 66 – Resposta dada por uma dupla que incluiu figuras típicas de livro didático

passando por três pontos, embora alguns trabalhos não citem explicitamente que o estão construindo, apenas que estão usando a ferramenta Plano por três pontos. Após a determinação desse plano, os roteiros seguem caminhos diferentes. Um deles procede (caminho seguido por sete duplas) para a criação de uma reta fora do plano (apenas um grupo especificou que essa reta deveria estar fora do plano, os outros mencionaram “uma reta no espaço” ou “reta qualquer”), enquanto o outro (6 questionários) cria “um ponto no espaço” (nenhum grupo especificou que esse ponto deve ser exterior ao plano). No primeiro caso o plano concorrente ao primeiro é criado usando a ferramenta Plano e selecionando a reta fora do plano e um dos pontos do plano, enquanto que o segundo é obtido usando a ferramenta Plano por três pontos e selecionando o ponto “do espaço” e dois pontos do plano. A redação exata de uma dupla de alunos é exibida na Figura 67. Uma das duplas não respondeu a essa questão, outra respondeu apenas com uma construção (a primeira). Uma terceira dupla criou soluções parecidas com a dos seus colegas, mas com erros fundamentais na ordem de construção dos elementos, como mostra a Figura 68.

No questionário, o item 6 solicitava a posição relativa entre dois planos e suas definições. Oito duplas citaram que pares de planos podem ser paralelos e coincidentes, enquanto sete duplas citaram planos concorrentes (ou secantes, termo esse que não é apresentado na Atividade). Um dos grupos não respondeu a essa questão. Para as definições de planos concorrentes, todos os alunos destacaram que sua intersecção é uma reta, ou que tais planos “formam uma reta” - termo usado por três questionários. Planos

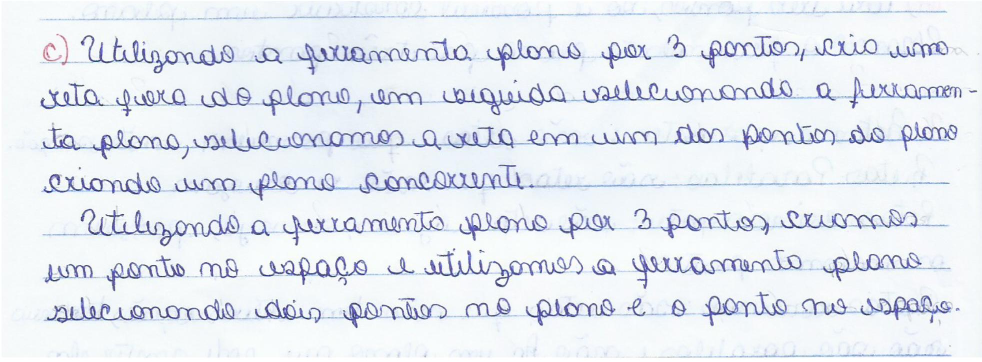

c) Utilizando a ferramenta plano por 3 pontos, cria uma reta fora do plano, em seguida selecionando a ferramen- ta plano, selecionamos a reta em um dos pontos do plano criando um plano concorrente.
Utilizando a ferramenta plano por 3 pontos criamos um ponto no espaço e utilizamos a ferramenta plano selecionando dois pontos no plano e o ponto no espaço.

Figura 67 – Roteiro para construção de planos concorrentes

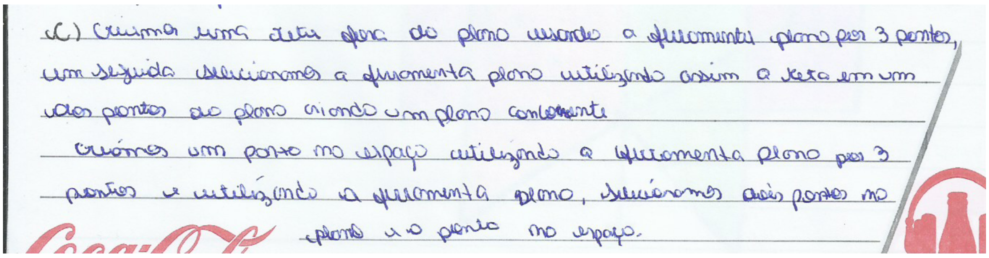

c) Criamos uma reta fora do plano usando a ferramenta plano por 3 pontos, em seguida selecionamos a ferramenta plano utilizando assim a reta em um dos pontos do plano criando um plano concorrente
Criamos um ponto no espaço utilizando a ferramenta plano por 3 pontos e utilizando a ferramenta plano, selecionamos dois pontos no plano e o ponto no espaço.

Figura 68 – Roteiro incorreto para a construção de planos concorrentes

coincidentes foram definidos como planos “com todos os pontos em comum” por quatro duplas e “tendo infinitos pontos em comum” por três. Essa última definição está incorreta, uma vez que a intersecção de dois planos pode ser uma reta, e esta tem infinitos pontos. Possivelmente a confusão foi causada pela comparação com as outras posições relativas (entre reta a plano e entre duas retas), ou mesmo com o sentido das palavras *infinitos* e *todos*. Também foram usadas as palavras “iguais” ou “idênticos” em complemento as definições anteriores. Planos paralelos foram definidos por unanimidade como “se não tiverem pontos em comum”, mas quatro duplas acrescentaram que dois planos seriam também paralelos quando “uma reta do plano A for paralela a uma pertencente ao plano B”. Isso não é sempre verdade: por exemplo, sejam dois planos concorrentes, α e β. Assim, eles possuem uma reta r como intersecção. Dado um ponto de cada plano, $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ - que não pertençam também a reta de intersecção, existe uma única reta paralela a reta r passando por cada um dos pontos escolhidos sejam s a reta paralela a r que passa por A e t a reta que paralela a r que passa por B. Por transitividade, s e t são paralelas, em planos distintos, mas os planos são concorrentes. Essa conclusão pode ter sido induzida pela generalização da propriedade de paralelismo entre uma reta e um plano. A Figura 69 mostra a resposta de um dos questionários para essa questão. Uma outra dupla, além de omitir a possibilidade de planos concorrentes, condensou o caso dos planos paralelos e coincidentes. Eles escreveram como resposta “Paralelos se coincidem (tem todos os pontos em comum) ou se não tem nenhum ponto”. É possível que os discentes tenham

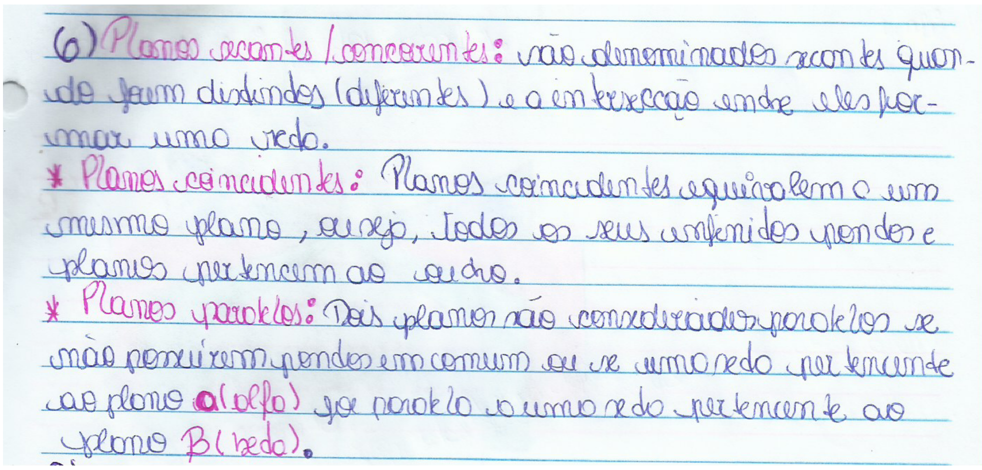


Figura 69 – Posições relativas entre dois planos

tentado unir as definições encontradas em algum livro (em algumas bibliografias o caso de coincidência é um caso especial de paralelismo) em apenas uma resposta, mais curta, seja por falta de tempo seja por praticidade.

A penúltima questão solicitava o esboço de figuras referentes as questões 7, 9 e 11. Apesar de ser solicitado que os alunos usassem apenas lápis e borracha numa folha de papel. O objetivo dessa questão era mostrar que as construções de pontos, retas e planos são difíceis de representar utilizando os materiais habituais em sala de aula. Todos os grupos utilizaram construções com régua, algo que não afeta o objetivo da atividade. Era esperado os alunos tivessem grande dificuldade em desenhar as figuras, mas, pelos resultados finais, o desenho não foi um desafio tão grande. Já em contato com o software e conhecendo os diferentes ângulos de visualização, foram criadas figuras que exemplificam bem cada situação, salvo alguns trabalhos. Alguns alunos utilizaram lápis de cor para colorir e tornar as figuras mais claras, como já haviam feito ao solicitar o método para colorir figuras no GeoGebra durante a realização da atividade. Destaca-se também o uso de linhas tracejadas para indicar profundidade e perspectivas, a rotulação dos elementos em alguns esboços e a escolha de alguns ângulos para construção das figuras, claramente uma contribuição do software, especialmente para a Questão 9. Alguns dos desenhos criados pelos alunos são exibidos nas Figuras 70, 71 e 72, incluindo construções não tão eficientes.

A última pergunta do questionário requeria que os discentes discorressem sobre as vantagens do uso do software em relação ao uso dos materiais habituais da sala de aula. Era esperado que os alunos destacassem a facilidade para a plotagem dos gráficos e a riqueza da ferramenta que gira a janela de visualização. No entanto, todas as respostas foram bastante curtas e simples. A Figura 73 exibe a resposta que foi considerada a mais completa e objetiva. Quando perguntados se as figuras construídas seriam visualizadas

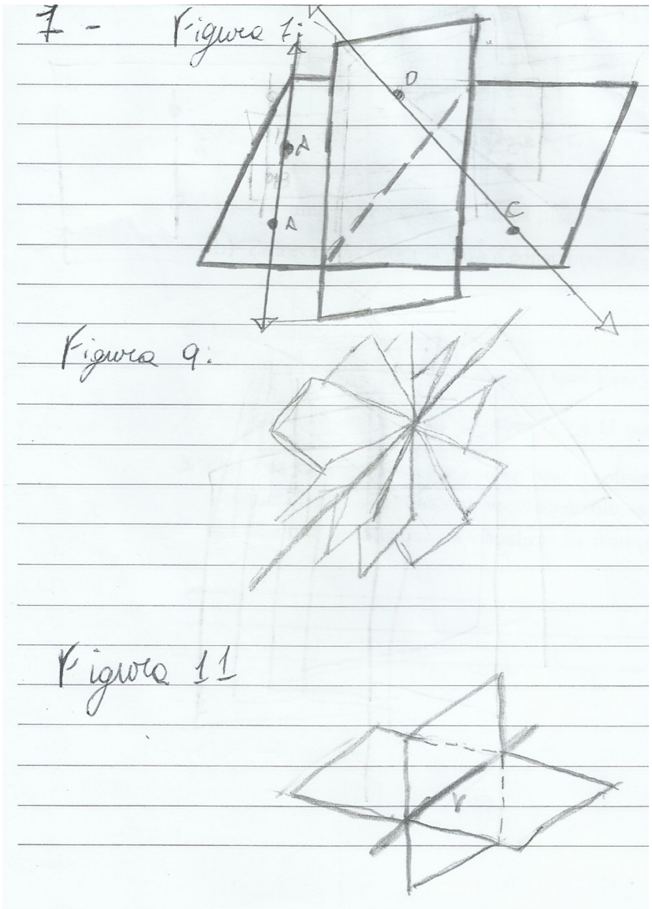


Figura 70 – Esboços dos alunos para as questões 7, 9, 11

com a mesma facilidade em um livro didático, das cinco duplas cujas respostas foram sim, três acrescentaram que não teriam tanta facilidade em visualizar as situações. Uma das duplas não respondeu essa pergunta e três mencionaram não, sendo um exemplo desse caso a Figura 73. Sobre as vantagens do uso do software, seis duplas citaram o uso do programa para construir figuras mais facilmente, como por exemplo a dupla que respondeu que “ As vantagens de usar o software são diversas, tanto na visualização, possibilitando assim um entendimento maior, como na praticidade na realização de figuras geométricas”. Como nessa resposta, outras cinco destacaram a facilidade de visualização das figuras, possivelmente se referindo a habilidade de girá-las, ampliá-las e reduzi-las que é proporcionada pelo GeoGebra.

A análise do questionário entregue aos alunos revelou que a atividade foi efetiva para o estudo de Geometria Espacial de modo geral. Além disso, salientou as dificuldades de representação, interpretação e lacunas de aprendizagem na Geometria, que quase sempre é delegada para o ano seguinte por falta de tempo para chegar a tal conteúdo. Os conteúdos trabalhados na atividade poderiam ser facilmente generalizados se a base dos alunos na área fosse mais forte. A dificuldade para generalização de definições básicas foi

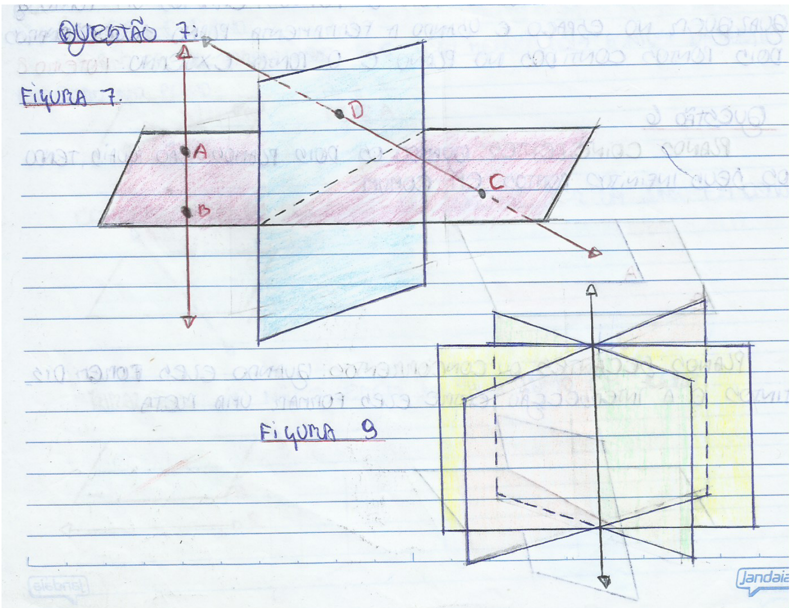


Figura 71 – Esboços dos alunos para as questões 7 e 9

notada durante todo o questionário, mesmo quando grupos pareceram ter retirado respostas de outra fonte de consulta. Os alunos também tentaram incluir o máximo possível de propriedades como definição, mas seria interessante que eles soubessem que a definição pode ser dada por uma única propriedade e o restante delas ser apenas consequência. A linguagem usada por alguns alunos acusa a falta de contato com a área, com o uso de palavras intuitivas e práticas para indicar fatos geométricos, como "cruzar" para indicar a intersecção e a notação incorreta para alguns elementos. O GeoGebra parece ter sido bem recebido pelos alunos, uma vez que a maioria das construções por eles propostas foram corretas, mesmo com a omissão de detalhes importantes. Algumas vezes notou-se uma tentativa de adaptar uma construção da atividade para uma construção do questionário, e nem sempre essa adaptação foi bem sucedida, vide a Figura 64. Os resultados aqui obtidos foram satisfatórios, mas é possível que acrescentando mais um período de aula para que os alunos respondam o questionário, tais resultados sejam mais espontâneos e revelem mais sobre as dificuldades dos alunos e como a atividade foi efetiva para o saneamento dessas dificuldades.

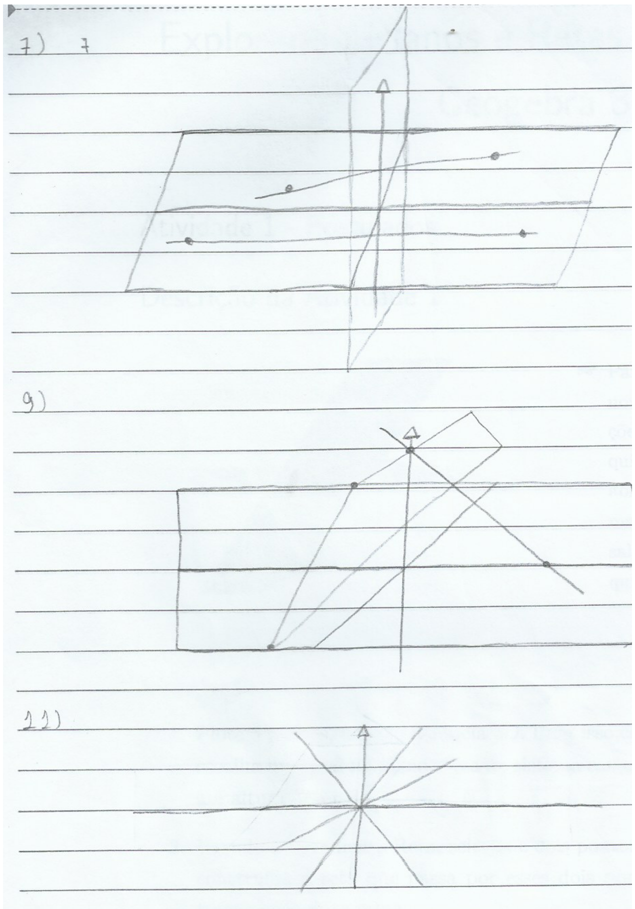
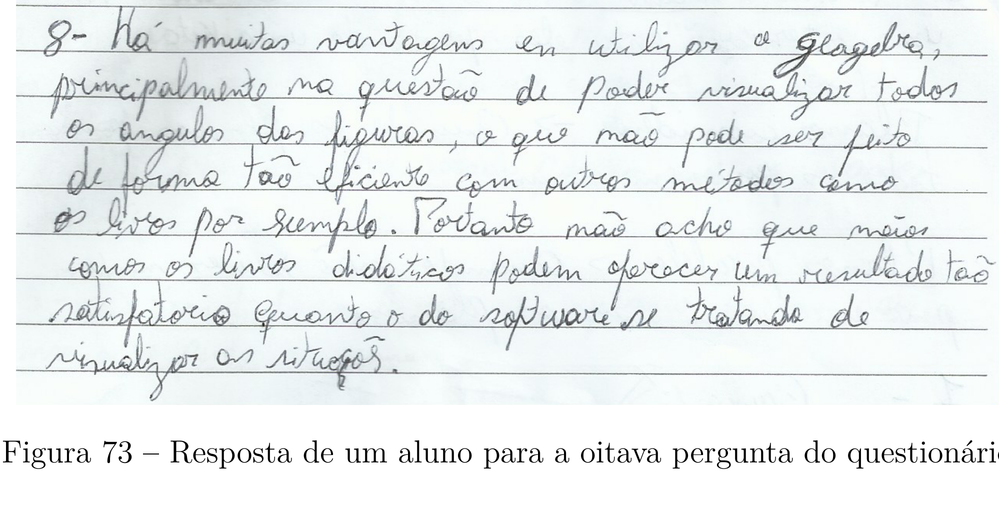


Figura 72 – Construções desenhadas pelos alunos



8- Há muitas vantagens em utilizar o geogebra, principalmente na questão de poder visualizar todos os angulos das figuras, o que não pode ser feito de forma tão eficiente com outros métodos como os livros por exemplo. Portanto não acho que meios como os livros didáticos podem oferecer um resultado tão satisfatorio quanto o do software se tratando de visualizar as situações.

Figura 73 – Resposta de um aluno para a oitava pergunta do questionário

6 Proposta de Atividade sobre Geometria Esférica

Nesse capítulo é sugerido uma atividade com o uso da Janela de visualização 3D do GeoGebra usando o modelo esférico para a Geometria Elíptica. Similar a atividade anterior, os alunos serão convidados a fazer hipóteses e verificá-las usando os recursos do software. Para tornar a atividade mais dinâmica e as construções serem feitas em menos passos, é usado o recurso de criar novas ferramentas (e botões) do GeoGebra. O professor pode optar por introduzir o software com os botões já prontos ou pode incluir a atividade de construção das ferramentas para os alunos (recomenda-se que ela seja inclusa em casos em que os alunos já tiveram contato com o GeoGebra). Antes da aplicação da atividade é importante revisar e/ou introduzir o estudo dos elementos de uma esfera, como proposto no capítulo 3.

6.1 Conteúdos

A atividade proposta nessa seção pode servir de complemento àquela proposta na seção 5.6, abordando a esfera e algumas propriedades de seus elementos, como descritas em 3.2. Como essa seção mostra, as propriedades relativas a retas esféricas são justificadas por meio de afirmações presentes na seção 5.6.

6.2 Pré-requisitos

A atividade aqui proposta deve servir para um encerramento aos estudos de Geometria Espacial de Posição, então são pré-requisitos posições relativas de pontos, retas e planos no espaço, a definição de esfera e alguns de seus elementos. Também é importante introduzir, ainda que brevemente, a história do surgimento das Geometrias Não Euclidianas, para fins de motivação para a atividade.

6.3 Público Alvo

Alunos do Ensino Médio que já estudaram Geometria Espacial de Posição. A atividade pode também ser realizada no Ensino Superior, como complemento a um curso de Geometria Euclidiana, mas nesse caso, recomenda-se solicitar aos alunos, além das conclusões a respeito das questões propostas, suas demonstrações.

6.4 Duração

A atividade apresenta duas questões opcionais, cujas construções podem usar um período de cinquenta minutos. As questões obrigatórias necessitam de quatro períodos de cinquenta minutos.

6.5 Objetivos

Essa atividade apresenta como objetivos:

- Apresentação de um modelo de Geometria não Euclidiana, bem como introdução da mesma;
- Estimular a Investigação Matemática, incentivando os alunos a conjecturar propriedades relativas a retas e pontos sobre a superfície de uma esfera;
- Usar dispositivos eletrônicos para melhor visualizar elementos da Geometria Elíptica no espaço;
- Explorar as propriedades de uma esfera e alguns de seus elementos;
- Apresentar aos alunos o software GeoGebra, que pode ser uma ferramenta importante para estudos posteriores;
- Trabalhar com as limitações do software disponibilizado e da representação em duas dimensões de objetos que estão definidos no espaço;
- Comparar os resultados com os materiais habitualmente utilizados, por exemplo régua, compasso, papel e lápis;
- Explorar o emprego da linguagem matemática.
- Comparação de propriedades e elementos da Geometria Euclidiana Plana com seus correspondentes na Geometria Elíptica, utilizando o modelo da esfera, como pontos, ângulos, retas e posições relativas entre elas.

6.6 Atividade Opcional - Construção da Ferramenta Reta Esférica

6.6.1 Reta Esférica dado um dos polos

(a) Com o GeoGebra aberto, exiba a Janela de Visualização 3D clicando em Janela de Visualização 3D no menu Visualização. Com a ferramenta ponto selecionada, clique na origem do sistema, o ponto de encontro dos três eixos cartesianos, criando o ponto A, ou escreva $A = (0, 0, 0)$ no campo entrada.

(b) Clique na seta lateral direita do botão esfera e selecione a ferramenta Esfera dados Centro e Raio. Selecione então o ponto A e, na janela em que aparece em seguida, digite algum valor entre 6 e 8 (de sua preferência) para o raio da esfera. Será construída a esfera a.

(c) Selecione a ferramenta Ponto sobre objeto no botão Ponto e trace um ponto qualquer sobre a esfera, B (sugere-se ocultar os eixos coordenados, o plano cinza e a grade após esse passo. Para isso, clique no botão Girar Janela de Visualização 3D, e no submenu da barra Janela de Visualização 3D e desmarque as três primeiras opções).

(d) Com a ferramenta Reta, trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$, clicando sobre os pontos A e B.

(e) No botão Plano, selecione Plano Perpendicular. Clique no ponto A e na reta $\overleftrightarrow{AB}$, aparecerá o plano b.

(f) Selecione a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies e clique no plano e na esfera construídos anteriormente (ou diretamente na intersecção entre os dois). Será traçado o círculo máximo c, correspondente ao ponto B. Aperte a tecla Esc no teclado ou clique no botão da ferramenta Mover (o primeiro botão, em forma de cursor).

(g) Selecione o círculo máximo c e no menu Ferramentas, clique em Criar uma Nova Ferramenta.

(h) Na nova janela que aparece, verifique que Círculo c: curva de intersecção de b, a é o único objeto na caixa de diálogo e clique em próximo.

(i) Normalmente, ao escolher o objeto final, o GeoGebra automaticamente determina os objetos iniciais necessários para construí-lo, mas o recurso não funciona bem nesse caso. Remova todos os objetos que aparecerem na caixa de diálogo, selecionando-os e clicando no botão X na parte inferior da janela. No menu deslizante dessa janela selecione os objetos: ponto A, esfera a e ponto B em a. Clique em próximo.

(j) A próxima janela serve para finalizar o botão que será criado. Para o nome, sugere-se Reta Esférica Polo, o programa vai automaticamente definir o comando como RetaEsféricaPolo. Para a ajuda da ferramenta, escreva:“ Selecione o centro de uma esfera, a esfera e um ponto sobre a Superfície Esférica (polo da reta esférica)". É também possível escolher um ícone para o botão, selecionando uma imagem salva no computador.

(k) Finalmente, clique em Concluído. O novo botão aparacerá ao lado das outras ferramentas.

(l) Oculte o plano e a reta criados, clicando no círculo à direta de cada objeto na Janela de Álgebra. Salve o arquivo em formato .ggb, padrão do GeoGebra. Ele pode ser útil em seguida.

(m) Para salvar a nova ferramenta, no menu Ferramentas, clique em Gerenciar Ferramentas. Uma nova janela será aberta, selecione a nova ferramenta criada e clique em Gravar Como... Salve o arquivo com o nome que desejar, com extensão .ggt.

(n) Para importar ferramentas salvas para outros arquivos, abra uma nova janela do GeoGebra, clicando no menu Arquivo > Nova Janela. Na nova janela, ative a Janela de Visualização 3D (feche a Janela de Visualização 2D, se ela não for fechada ao abrir a 3D) e clique em Abrir... no menu Arquivo. Na janela que aparece, selecione a ferramenta .ggt criada. Ela estará disponível na barra de ferramentas da nova janela. Caso isso não aconteça, vá em Ferramentas > Configurar barra de ferramentas, selecione o botão desejado na lista à direita, clique em inserir, seguido de aplicar. Para que o GeoGebra abra sempre com essa ferramenta, selecione Gravar Configurações em Opções.

(o) Caso o processo descrito no item anterior não funcionar, recomenda-se que após a construção ferramenta, sejam excluídos objetos auxiliares para a construção da ferramenta, permanecendo exibidos apenas a esfera e seu centro e seja salvo o arquivo. Toda vez que for necessária uma construção com essa ferramenta, partir desse arquivo salvo.

6.6.2 Reta Esférica dados dois pontos não antípodas

(a) Abra o arquivo de extensão .ggb criado no último passo da subseção anterior.

(b) Trace dois pontos, B e C, não antípodas sobre a esfera, usando a ferramenta Ponto em Objeto.

(c) Com a ferramenta Plano por três pontos, selecione o centro da esfera, A, e os pontos B e C para traçar o plano determinado por esses três pontos.

(d) Usando a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies, clique no plano e na esfera construídos anteriormente (ou diretamente na intersecção deles). Será traçado um círculo máximo.

(e) Selecione o círculo máximo construído e no menu Ferramentas, clique em Criar uma Nova Ferramenta.

(f) Na nova janela que aparece, verifique que Círculo c: curva de intersecção de b, a é o único objeto na caixa de diálogo e clique em próximo.

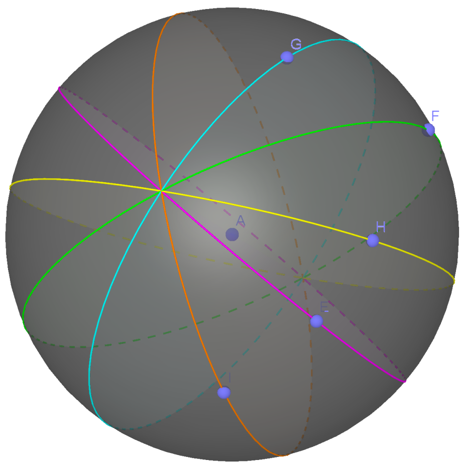
(g) Normalmente, ao escolher o objeto final, o GeoGebra automaticamente determina os objetos iniciais necessários para construí-lo, mas o recurso não funciona bem nesse caso. Retire todos os objetos que aparecerem na caixa de diálogo, selecionando-os e clicando no botão X na parte inferior da janela. No menu deslizante dessa janela selecione os objetos: ponto A, esfera a e os pontos B e C em a. Clique em próximo.

(h) A próxima janela serve para finalizar o botão que será criado. Para o nome, sugere-se Reta Esférica 2 Pontos, o programa vai automaticamente definir o comando como RetaEsférica2pontos. Para a ajuda da ferramenta, escreva: "Selecione o centro de uma esfera, a esfera e dois pontos sobre a Superfície Esférica". É também possível escolher um ícone para o botão, selecionando uma imagem salva no computador.

(i) Finalmente, clique em Concluído. O novo botão aparacerá junto ao botão Reta Esférica 2 Pontos.

(j) Apague os objetos auxiliares para a construção, deixando apenas a esfera e seu centro na Janela de Visualização. Salve os arquivo com um nome adequado, já que ele servirá como ponto inicial para todas as construções a seguir. Sugere-se o nome AtividadeEsferica.ggb.

6.7 Atividade Proposta



☞ Para cada Questão Proposta, abra o arquivo AtividadeEsferica.ggb, disponível na área de Trabalho.

☞ Para salvar a construção de cada questão, use SOMENTE o recurso Gravar Como no menu arquivo, e salve com um nome diferente de AtividadeEsferica.ggb. Se não deseja salvar o arquivo, ao fechar o GeoGebra, escolha a opção Não Gravar na janela que aparece ao clicar em fechar.

Questão 1. *Pontos e Retas em uma esfera*

Neste modelo de Geometria, chamada de Geometria Elíptica ou Esférica, os pontos são os elementos usuais da Geometria Euclidiana, mas o elemento reta é representado por um círculo máximo de uma esfera. Nos próximos ítens serão traçados pontos e retas na esfera.

(a) Abra o arquivo AtividadeEsferica.ggb disponível na Área de Trabalho.

(b) Para construir um ponto sobre a esfera, selecione a ferramenta Ponto em Objeto no botão Ponto e clique onde deseja traçar um ponto sobre a esfera.

(c) Para construir uma reta sobre a esfera, use a ferramenta Reta Esférica Polo e selecione o centro da esfera, a própria esfera, e finalmente um ponto da esfera que servirá como polo relativo ao círculo máximo, que é uma reta nesse modelo de Geometria (Atenção: o ponto a ser usado como polo deve ser construído antes do uso da Ferramenta Reta Esférica Polo). Doravante, Reta Esférica se refere a um círculo máximo da esfera, enquanto que a reta no sentido euclidiano será chamado apenas de Reta.

(d) Selecione a ferramenta Girar Janela de Visualização 3D e arraste o cursor do mouse para visualizar as retas esféricas construída sobre a esfera.

(e) Usando a ferramenta Ponto em Objeto, construa vários pontos sobre a reta esférica do item anterior. Quantos pontos é possível traçar sobre uma reta esférica?

(f) Usando o ferramenta Ponto em Objeto, trace vários pontos sobre a esfera, mas fora da reta esférica traçada. Quantos pontos é possível traçar fora da reta esférica e sobre a esfera?

Solução 1. O objetivo dessa questão é introduzir o modelo de Geometria Esférica, além de servir para mostrar que os postulados de existência continuam valendo quando o "plano" considerado é uma esfera. A conclusão esperada para as duas perguntas propostas é a mesma da Geometria Euclidiana: que existem infinitos pontos numa reta e fora dela. Durante o traçado dos pontos sobre a reta esférica, pode parecer impossível construir um ponto entre outros dois muito próximos. Nesse caso, use o recurso ampliar que se encontra junto ao botão Girar Janela de Visualização 3D (evite que a visualização vá para o interior da esfera). As Figuras 74 e 75 mostram soluções para a atividade proposta.

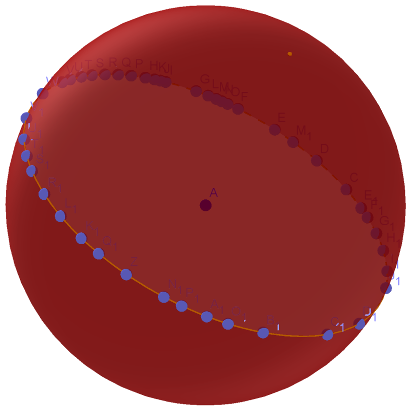


Figura 74 – Pontos traçados sobre a reta esférica

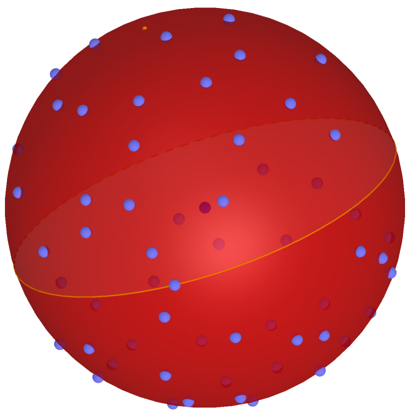


Figura 75 – Pontos traçados fora da reta esférica

Questão 2. *Retas Esféricas passando por dois pontos*

(a) Trace dois pontos não antípodas sobre a esfera, usando a ferramenta Ponto em Objeto.

(b) Com a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos selecionada, clique no centro da esfera, na esfera, e nos dois pontos traçados no item anterior.

(c) Seria possível traçar outra reta esférica que passa por esses dois pontos?

(d) Trace dois pontos antípodas. Para isso, trace um ponto sobre a esfera usando a ferramenta Ponto em Objeto. Em seguida, use a ferramenta Reta para construir a reta (no sentido euclidiano) que passa pelo ponto na esfera e pelo seu centro. No botão Ponto, selecione a ferramenta Intersecção de Dois Objetos e selecione a reta construída e a esfera. Irá aparecer o ponto antípoda correspondente ao ponto traçado, além de um ponto coincidente com o primeiro (pois este também é intersecção da reta e da circunferência).

(e) Selecione a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos e clique sobre o centro da esfera, na esfera e nos dois pontos antípodas. O programa acusa "indefinido" na Janela de Álgebra. Por que isso acontece?

(f) Trace um ponto qualquer sobre a esfera, usando a ferramenta Ponto em Objeto. Clique na ferramenta Reta Esférica 2 Pontos e selecione o centro da esfera, a esfera, o ponto traçado e um dos pontos antípodas. É traçada uma reta que contém ambos os polos (use a ferramenta Girar Janela de Visualização para verificar).

(g) Repita o procedimento do item anterior, para outro ponto da esfera, diferente do primeiro e dos polos. É traçado mais uma reta que contém os pontos antípodas. Quantas vezes esse processo pode ser repetido?

(h) Quantas retas passam por pontos antípodas?

Solução 2. Essa questão é equivalente ao postulado de determinação da Geometria Euclidiana. Na Geometria Elíptica, é necessário modificar esse postulado para manter a coerência da teoria: por dois pontos passa sempre uma reta, mas não há mais exigência de unicidade. Se os pontos escolhidos não forem antípodas, somente uma reta passa por eles. A Figura 76 mostra o andamento da questão no item c). Quando os pontos são antípodas, existem infinitas retas que passam por eles. Usando somente esses dois pontos, o software não exibirá nenhuma reta que passa por eles, exibindo um objeto indefinido na Janela de Álgebra, como mostra a Figura 77. Para traçar essas retas, podemos traçar vários pontos sobre a superfície da esfera e em seguida traçar a reta esférica que passa por cada um deles e um dos polos. Essas retas necessariamente passarão pelo outro polo. Esse procedimento pode ser realizado infinitas vezes, portanto o número de retas que passam por esses dois pontos é infinito. Uma construção com algumas retas é exibida na Figura 78.

Questão 3. *Intersecção de Duas Retas Esféricas*

(a) Construa uma reta esférica passando por dois pontos usando a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos.

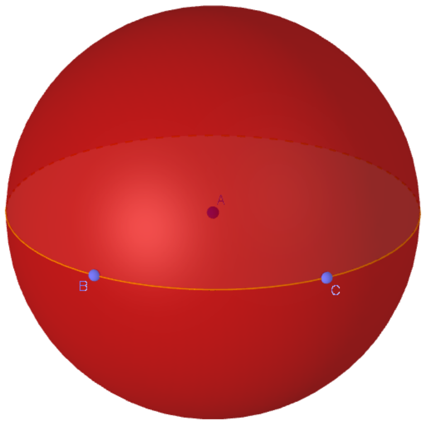


Figura 76 – Dados dois pontos não antípodas existe uma única reta esférica que os contém

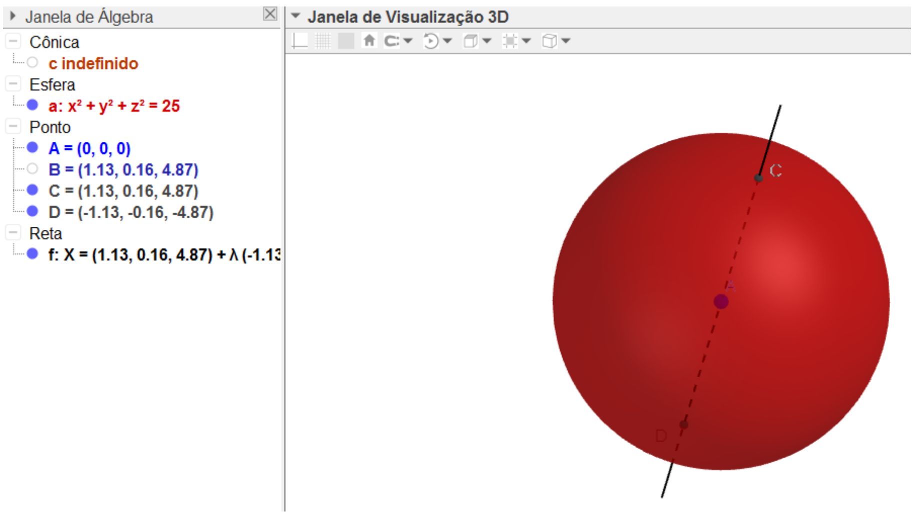


Figura 77 – GeoGebra não constrói Retas Esféricas partindo de pontos antípodas

(b) Trace dois pontos sobre a esfera, mas fora da reta esférica do item a). Construa a reta esférica que passa por eles.

(c) Para traçar a intersecção dessas duas retas, clique na ferramenta Intersecção de Dois Objetos sob o menu Ponto e selecione as duas retas esféricas construídas. Qual o conjunto intersecção das duas retas?

(d) Construa mais dois pontos sobre a esfera e fora das retas já traçadas. Usando a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos construa o círculo máximo que passa por eles.

(e) Determine a intersecção da reta esférica construída no item anterior e as outras duas construídas nos ítens a) e b).

(f) Quantos pontos cada par de retas têm em comum? Que propriedade tem esses pontos, um em relação ao outro?

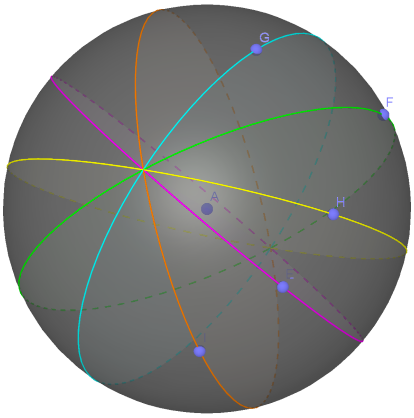


Figura 78 – Retas Esféricas passando por pontos antípodas.

(g) É possível construir um par de retas cuja intersecção é um único ponto? Com a ferramenta Mover selecionada, é possível clicar em cada ponto e arrastá-lo, de forma a visualizar outras situações. Se for possível, faça a construção e a descreva.

Solução 3. Nessa Questão, é explorado o fato da intersecção de duas retas esféricas ser sempre um par de pontos antípodas, diferente da Geometria Euclidiana, onde a intersecção de duas retas é no máximo um ponto. O aluno é convidado a modificar as posições dos pontos para verificar que não importa a posição das retas, sua intersecção sempre será um par de pontos opostos diametralmente. A Figura 79 mostra uma possibilidade para a posição das três retas.

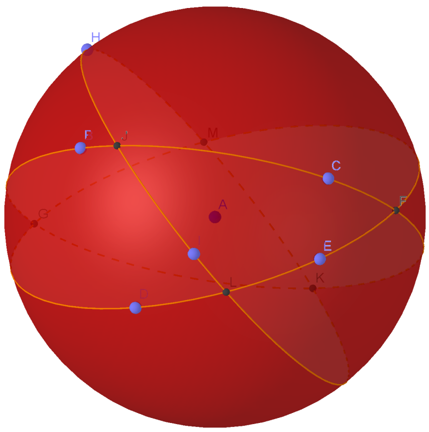


Figura 79 – Intersecção de Retas Esféricas.

Para resolver a questão 4 lembre-se que duas retas são paralelas se não possuem pontos em comum.

Questão 4. *Retas Paralelas na Geometria Esférica*

(a) Com dois pontos não antípodas sobre a esfera, construa a reta esférica que passa por eles.

(b) Trace um ponto fora da reta construída no item anterior.

(c) Tente construir uma reta paralela a reta construída no item a) passando pelo ponto construído no item b).

(d) O que pode-se dizer sobre retas paralelas nesse modelo de Geometria?

Solução 4. Ao tentar resolver o item b), o aluno deverá chegar a conclusão de que essa construção não é possível, pois não existem retas paralelas nesse modelo de Geometria. Essa questão apenas reforça essa conclusão, já que a partir da conclusão da questão 3 (duas retas esféricas sempre se interceptam) é possível deduzir que não podem existir retas paralelas. Pode ser que algum aluno tente construir um outro círculo sobre a esfera, que não intercepta a reta esférica, mas ele também não é um círculo máximo.

Questão 5. *Distância entre dois pontos*

Na Geometria Esférica, a distância entre dois pontos é definida como o comprimento do menor arco do círculo máximo que contém ambos os pontos.

(a) Trace dois pontos sobre a esfera.

(b) Construa a reta esférica que passa por eles, usando a ferramenta Reta Esferica 2 Pontos.

(c) Encontre os polos correspondentes ao círculo máximo. Para fazer isso, selecione a ferramenta Reta Perpendicular e selecione o círculo máximo traçado no item anterior e o centro da esfera. Será traçada a reta que passa pelo centro e é perpendicular ao plano que determina o círculo máximo.

(d) Usando a ferramenta Intersecção de Dois objetos sob o botão Ponto, selecione a esfera e a reta perpendicular. Serão traçados dois pontos que são os polos correspondentes ao círculo máximo presente na figura.

(e) Trace 5 pontos sobre a reta esférica construída, usando a ferramenta Ponto em Objeto.

(f) Calcule a distância (noção esférica) entre cada um dos pontos sob a reta esférica e o polo. Para isso, no botão Círculo, selecione a ferramenta Arco Circular e clique sobre o centro da esfera, um ponto da reta esférica e um dos polos. O GeoGebra exibe o comprimento do arco na Janela de Álgebra, sob a categoria Cônica.

(g) Repita o procedimento do item anterior para os demais pontos. Que propriedade pode ser verificada a respeito da distância entre um polo e os pontos da reta esférica correspondente a esse polo?

Solução 5. Essa questão tem por objetivo familiarizar e apresentar a noção de distância numa superfície esférica, além de deduzir uma propriedade em relação a polos e seus círculos máximos. A Figura 80 exibe uma solução para a atividade, mostrando a Janela de Visualização 3D e os comprimentos de arco na Janela de Álgebra. Aparecem os arcos conectando cada ponto ao polo norte e polo sul, mas é possível verificar a propriedade conectando cada ponto a apenas um dos polos, ou mesmo cada ponto a um polo, e assim por diante.

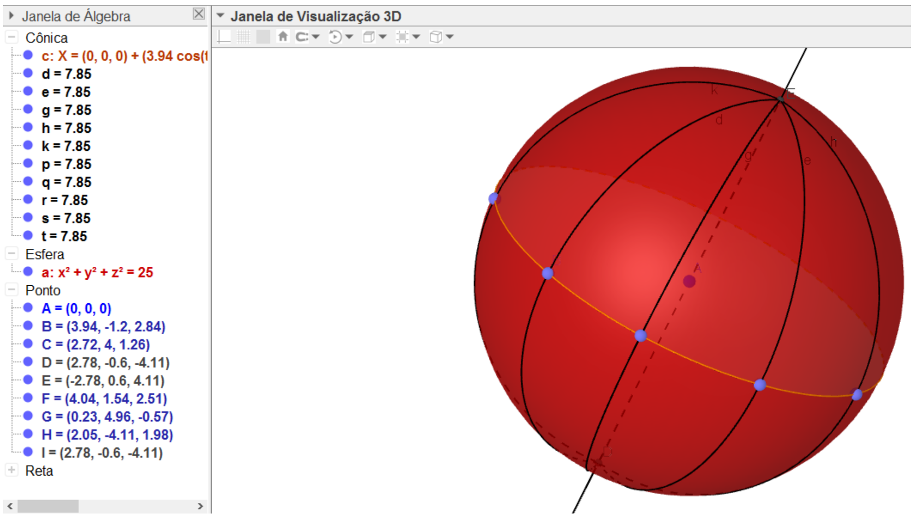


Figura 80 – Distância de um polo a seu círculo máximo correspondente

Questão 6. *Ângulos*

Na Geometria Esférica um ângulo de vértice A é definido como a união de duas retas que passam por A. Sua medida é dada pela medida do ângulo formado entre as retas tangentes aos círculos máximos no ponto A. Antes de começar essa questão, modifique o rótulo do centro da esfera para O. Para isso, clique duas vezes sobre o ponto A na Janela de Álgebra e substitua a letra A por O.

(a) Com a ferramenta Ponto em Objeto, construa três pontos não antípodas : por exemplo os pontos A, B e C na esfera.

(b) Trace as retas esféricas que passam por A e B e por A e C. Essas retas se interceptam no ponto A, formando um ângulo na esfera.

(c) Para determinar a medida desse ângulo, trace as retas tangentes aos círculos máximos no ponto A: No botão Reta Perpendicular, selecione a ferramenta Reta Tangente. Clique no ponto A e em um círculo para construir a reta tangente a esse círculo que passa por A. Repita o procedimento para o outro círculo.

(d) Com as duas retas tangentes passando por A criadas, construa o ângulo entre elas: selecione a ferramenta Ângulo e clique sobre as duas retas tangentes.

(e) Oculte as retas tangentes e selecione a ferramenta Mover. Clique e arraste o ponto B ou o ponto C e observe o ângulo entre as retas esféricas variar.

(f) Qual o intervalo de variação do ângulo entre as duas retas? O que acontece em cada extremo desse intervalo?

Solução 6. Ao mesmo tempo em que constrói o conceito de ângulo numa esfera, a questão solicita que o estudante use recursos de Geometria dinâmica para avaliar a variação do ângulo entre duas retas esféricas. É solicitado a ocultação das retas para que fique visível que a aproximação do ângulo entre os dois círculos máximos dada pelas retas tangentes é ótima. A Figura 81 mostra uma das aberturas entre as retas. A variação é de 0º a

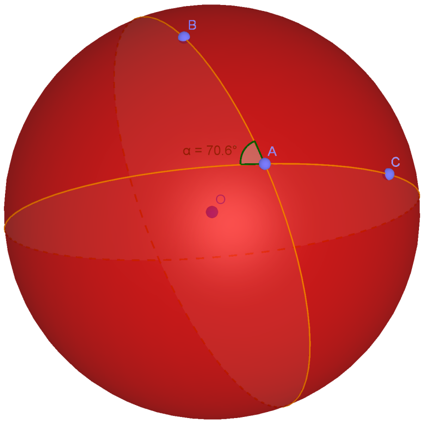


Figura 81 – Variação do ângulo entre duas retas esféricas

180º, e no caso dos extremos as retas coincidem. A coincidência requer bastante precisão ao manipular os pontos, por isso pode ser necessário que o aluno abstraia para chegar a essa conclusão. Pode ser notado que é possível que o ângulo entre duas retas é 90º e, nesse caso, as retas são perpendiculares, mas novamente a precisão ao arrastar o ponto praticamente impede a parada exatamente no ângulo reto. As próximas questões tratarão de retas esféricas perpendiculares.

Questão 7. *Retas Esféricas Perpendiculares*

Duas retas que se cruzam formando ângulos de 90º são chamadas de perpendiculares, assim como na Geometria Euclidiana. Nessa questão são construídas retas perpendiculares.

(a) Construa dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Trace um ponto sobre a reta esférica traçada no item a) usando a ferramenta Ponto sobre Objeto do botão Ponto.

(c) Usando a ferramenta Reta Esférica Polo, construa a reta esférica cujo polo é o ponto construído no item anterior, selecionando o centro da esfera, a esfera, e o ponto que servirá de polo.

(d) Usando Intersecção de Dois Objetos sob o botão Ponto, trace os pontos de intersecção entre os dois círculos máximos construídos.

(e) Construa as retas tangentes aos círculos máximos usando o procedimento da questão anterior. Trace também o ângulo entre elas, que é de 90º. Assim, as retas esféricas construídas são perpendiculares.

(f) Desloque o ponto que serviu como polo da segunda reta esférica. O que acontece com o ângulo?

(g) Qual a condição sobre o polo de uma reta esférica que permite concluir se ela é perpendicular uma reta esférica dada?

Solução 7. Para que essa questão não seja apenas sobre a construção de retas perpendiculares, observa-se que uma reta é perpendicular a uma reta dada se o seu polo está sobre a reta dada. Mais uma vez é usado o recurso de arrastar do GeoGebra, que dessa vez revela que não importa a posição do ponto sobre a primeira reta esférica, o ângulo entre as duas retas é sempre reto. Alerta-se que em algumas posições extremas o recurso de arrastar nesses casos apresenta transições abruptas entre posições. A Figura 82 mostra uma solução da atividade.

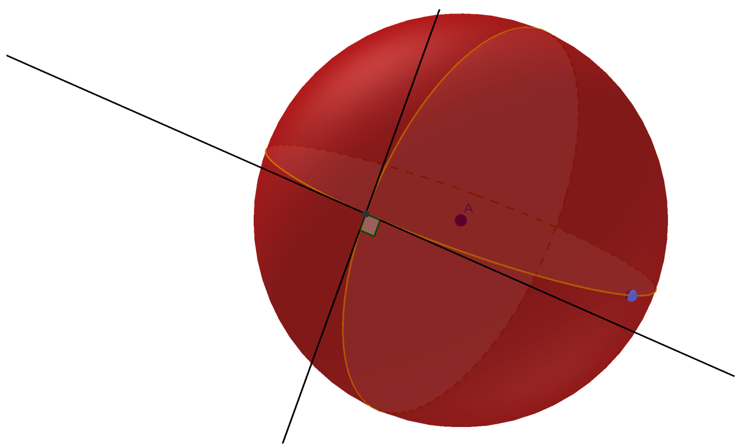


Figura 82 – Retas esféricas perpendiculares - primeira construção

Questão 8. *Retas Esféricas Perpendiculares a uma reta esférica dada passando por um ponto dessa reta*

Dado um ponto numa reta esférica, quantas retas esféricas perpendiculares a reta esférica dada passam por esse ponto? Para responder essa pergunta, considere a construção:

(a) Construa dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Trace um ponto sobre a reta esférica traçada no item a) usando a ferramenta Ponto sobre Objeto do botão Ponto.

(c) Construa os polos relativos a reta esférica traçada, selecionando a ferramenta Reta Perpendicular e clicando sobre o centro da esfera e a reta esférica , em seguida usando a ferramenta Intersecção de Dois Objetos para traçar os polos (os dois objetos a selecionar são a esfera e a reta perpendicular).

(d) Com a ferramenta Reta Esférica 2 pontos trace a reta que passa pelo polo e o ponto da reta esférica. Verifique que as retas assim construídas também são perpendiculares construindo o ângulo entre elas.

Solução 8. A pergunta proposta por essa questão pode ser respondida imediatamente após a conclusão da questão anterior, mas a alternativa para a construção de retas perpendiculares pode ajudar a levar o aluno a conclusão correta. Além disso a construção proposta usa a conclusão da questão anterior, a diferença é que nessa vez o polo está na perpendicular construída, e não no círculo máximo inicial. A Figura 83 é um exemplo de construção para a essa questão.

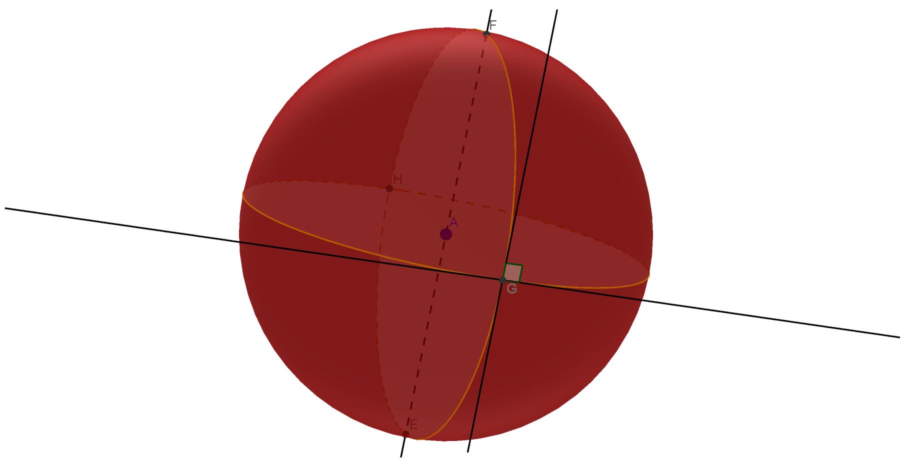


Figura 83 – Retas esféricas perpendiculares - segunda construção

Questão 9. *Retas esféricas perpendiculares a uma reta esférica dada passando por um ponto fora dela*

(a) Construa dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Trace um ponto fora da reta esférica do passo anterior.

(c) Quantas retas esféricas perpendiculares a reta dada passam pelo ponto construído no item b)? Descreva como construir essa(s) reta(s) no GeoGebra usando a estrutura proposta nos dois primeiros ítens dessa questão.

Solução 9. Aqui, além de levar o aluno a uma propriedade da Geometria Esférica, o aluno deve descrever como usar as ferramentas do software para chegar a sua conclusão. A construção da única reta esférica perpendicular a reta dada que passa por um ponto fora dele é semelhante a construção da questão anterior: Determina-se um dos polos correspondentes a reta esférica dada, usando a ferramenta Reta perpendicular e clicando sobre o centro da esfera e o círculo máximo, em seguida usando a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (a reta perpendicular e a esfera). Na sequência basta construir a reta esférica que passa por um dos polos e o ponto dado usando Reta Esférica 2 pontos. A Figura 84 exibe essa construção. Novamente a pergunta poderia ser respondida apenas

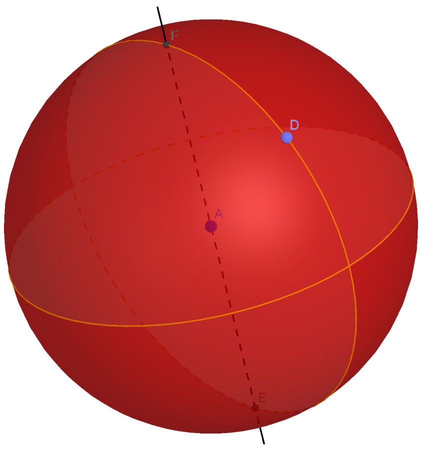


Figura 84 – Retas esférica perpendicular a uma reta dada passando por um ponto fora dela

com um pouco de abstração baseada nas construções das outras duas figuras, mas a questão ainda é válida para avaliar o quanto o aluno domina o software e os novos botões construídos.

Questão 10. *Retas Esféricas perpendiculares a uma reta esférica dada passando por um de seus polos relativos*

(a) Trace dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Construa os polos referentes a reta esférica traçada no primeiro item, usando a ferramenta Reta perpendicular e clicando sobre o centro da esfera e o círculo máximo, em seguida selecionando a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (reta e esfera).

(c) Quantas retas esféricas perpendiculares a reta construída em a) passam por um de seus polos? Descreva como construí-la(s) no GeoGebra, partindo da construção proposta nos ítens a) e b). (Dica: Revise uma construção da Questão 2)

Solução 10. Nesse caso, existem infinitos círculos máximos que passam por um dos polos e são perpendiculares a uma reta esférica dada. A construção, como a dica da questão sugere, é semelhante à proposta na Questão 2. Após realizar os passos iniciais da questão, traça-se um ponto sobre a esfera, diferente do polo e fora da reta esférica. Com a Ferramenta Reta Esférica dois pontos, contrói-se a reta que passa por esse ponto e um dos polos. Essa reta necessariamente passará no outro polo, e é perpendicular à reta dada (para verificar a perpendicularidade, basta traçar o ângulo entre elas como é feito em questões anteriores). Em seguida, é traçado um novo ponto sobre a esfera, diferente dos anteriores e fora das retas esféricas construídas. Constrói-se o novo círculo máximo passando por esse ponto e um dos polos. A Figura 85 mostra o estado da construção com 5 pontos, mas os alunos podem construir quantos forem necessários para deduzir que o número de retas esféricas perpendiculares é infinito.

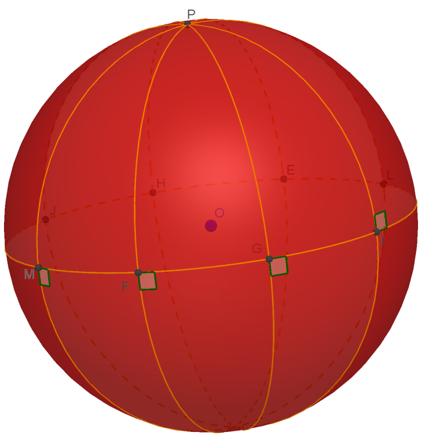


Figura 85 – Retas esféricas perpendiculares a uma reta dada passando por um polo

Questões de avaliação da atividade

Complete a Tabela 6 escrevendo, a cada linha, as conclusões da questão, de acordo com o que foi discutido durante a realização da atividade. Se necessário, revise ou refaça as questões.

Tabela 6 – Conclusões, propriedades e definições esperadas - Geometria Esférica

Questão	Propriedade
Questão 1)	*Em uma reta esférica, bem como fora dela, existem infinitos pontos.*
Questão 2)	*Dados dois pontos numa esfera, existe uma reta esférica passando por eles. Se não forem antípodas, a reta esférica é única. Se forem antípodas, existem infinitas retas.*
Questão 3)	*A intersecção de duas retas esféricas distintas consiste exatamente de dois pontos.*
Questão 4)	*Não existem retas paralelas na Geometria Esférica.*
Questão 5)	*Um polo é um ponto cuja distância a todos os pontos do círculo máximo a ele relativo é constante.*
Questão 6)	*A variação dos ângulos entre retas esféricas é de 0º a 180º.*
Questão 7)	*Uma reta esférica é perpendidular a uma reta esférica dada se o seu polo pertence a reta esférica dada.*
Questão 8)	*Dado um ponto sobre uma reta esférica, existe uma única reta esférica perpendicular a reta esférica dada passando por aquele ponto.*
Questão 9)	*Por um ponto fora de uma reta esférica dada passa apenas uma reta esférica perpendicular a reta dada*
Questão 10)	*Por um polo relativo a uma reta esférica passam infinitas retas perpendiculares a reta esférica*

1. Nessa atividade, foram estudadas várias propriedades a respeito de uma Geometria diferente da de Euclides, que consiste na tradicional Geometria no plano. Escreva algumas propriedades da Geometria Euclidiana que continuam sendo verdade na Geometria Elíptica/Esférica, baseado na atividade que acabou de ser feita.

2. Faça uma tabela comparando as diferenças encontradas nas propriedades das duas Geometrias: posição relativas entre duas retas, distância entre dois pontos, ângulos e retas perpendiculares.

3. Na Geometria Euclidiana, duas retas distintas que são perpendiculares a uma mesma reta, são paralelas entre si. Na Geometria Esférica isso é verdade? Justifique.

4. Descreva três métodos para traçar retas esféricas perpendiculares no GeoGebra.

   Solução. A construção de retas perpendiculares foi sugerida de quatro maneiras no texto da atividade.

   - Dada uma reta esférica e um ponto sobre ela, que serve como polo correspondente a ela (Questão 7);
   - Dada uma reta esférica e um ponto sobre ela, por onde passa uma única reta esférica perpendicular à reta dada (Questão 8)

- Dada uma reta esférica e um ponto fora dela, desde que esse não seja um polo para esse círculo máximo (Questão 9);
- Dada uma reta esférica e um dos polos referentes a ela (Questão 10).

7 Conclusão

A partir das dificuldades encontradas em aprender e ensinar Geometria Espacial de Posição, foi realizada uma pesquisa de recursos que pudessem auxiliar o desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. Para isso, uma pesquisa bibliográfica procurou encontrar os maiores obstáculos no ensino e aprendizagem de Geometria. Essa pesquisa acabou relatando problemas intrínsecos à natureza da Geometria e da Matemática e problemas relacionados ao ensino de Matemática no Brasil, sejam por questões estruturais ou históricas. É preciso que os alunos saibam diferenciar componentes do problema em questão e propriedades que são apenas características da figura. Além disso, é preciso conhecer o verdadeiro sentido de validar uma proposição em Matemática, em particular na Geometria: a demonstração. Para ensinar esse conceito, em conjunto com a questão do aspecto figural e conceitual das imagens, a pesquisa revelou que existem processos cognitivos que propiciam a evolução da maneira que os alunos justificam propriedades em Geometria.

Entre as metodologias encontradas para sanar essas dificuldades, a investigação matemática estimula o trabalho científico em sala de aula, de maneira similar ao trabalho dos matemáticos. O indivíduo é estimulado a fazer conjecturas, descobrir regularidades e, após refiná-las, justificá-las, usando argumentação lógica. Ao realizar uma atividade de investigação o aluno é envolvido na construção do seu próprio conhecimento, mobilizando seus recursos afetivos e cognitivos para aprender.

Entre as ferramentas que podem colaborar com o processo de superação das dificuldades do ensino de Geometria encontram-se as ferramentas de Geometria Dinâmica. Elas proporcionam a construção de figuras por meio de propriedades estabelecidas, e, usando o recurso de arrastar, verificar diferentes representações de uma mesma situação. Ao fazer isso, podem ser notados padrões e regularidades, estimulando a investigação e o desenvolvimento da cognição para demonstração.

Para contextualizar o trabalho de um matemático e como a Geometria se torna ciência, fez-se um levantamento da história dessa área. A pesquisa revelou que desde a Grécia Antiga já existia a preocupação com o formalismo e a dedução lógica de propriedades. Ao compilar o conhecimento produzido por essa civilização no primeiro compêndio científico, Euclides incluiu um postulado polêmico, cuja busca pela demonstração levou não só a sofisticação da Geometria e da Matemática como um todo, mas a descoberta de Geometrias inesperadas. Com isso, buscou-se a construção de uma atividade que exibisse aos alunos que a Geometria tradicionalmente estudada não é a única possível. Além disso, o estudo de uma Geometria não euclidiana acaba por propor uma discussão a respeito da importância dos postulados, mas faz compreender a natureza da Geometria Euclidiana.

A atividade de Geometria Euclidiana Espacial foi aplicada para uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, que recentemente havia estudado Geometria analítica plana, mas relatava ter conhecido pouca ou nenhuma Geometria nos anos anteriores. A atividade foi realizada em duplas, e isso colaborou com o processo de discussão que acontecia ao final de cada questão. Após essas discussões os alunos registravam o que haviam descoberto a partir da investigação daquela construção em uma tabela. Ao analisar essa tabela, percebeu-se que a maioria dos estudantes chegou a conclusão esperada quanto a conclusão de cada questão, mas sua escrita não atingiu o nível de formalidade habitual da matemática, invocando muitas vezes verbos de ação para descrever propriedades e acrescentando condições desnecessárias em definições. O mesmo pode ser dito a respeito do questionário entregue após a realização da atividade, que verificou ao mesmo tempo os conhecimentos de Geometria Espacial presentes na atividade e a apreensão dos comandos do GeoGebra. Também notou-se dificuldades de generalização nos questionários e que as figuras construídas pelas duplas foram baseadas naquelas desenhadas pelo software. Quando solicitados esquemas para construção de elementos no GeoGebra, notou-se que a maioria dos alunos dominava os comandos que foram trabalhados na atividade, apenas pecavam na escrita e omissão de passos menores da construção.

Verifica-se, assim, que a maior parte dos objetivos propostos no capítulo 5 foi atingido.Verificou-se que os alunos ainda se enquadram em níveis elementares no processo de cognição de justificativa matemática. Especula-se que essa defasagem seja consequência de toda uma formação básica que sempre privilegiou métodos e cálculos em detrimento de investigação e geometria. Para enriquecer e complementar essa atividade, foi proposta uma atividade sobre a Geometria Elíptica, no seu modelo esférico, com objetivos semelhantes aos da primeira atividade, mas ampliando ainda mais as ferramentas utilizadas no GeoGebra e destacando a importância dos axiomas para o desenvolvimento de uma teoria. Com isso pretende-se elevar ainda mais o nível da demonstração em Geometria.

Em trabalhos futuros, pretende-se produzir novas atividades complementares no GeoGebra, envolvendo os diferentes modelos de Geometria Hiperbólica. Para uma atividade de Geometria Hiperbólica envolvendo o GeoGebra, nos moldes daquelas propostas neste trabalho, recomenda-se a idealizada por (RIBEIRO, 2013). Também é necessário aplicar a atividade sobre Geometria Esférica, e aprimorá-la, assim como aplicar a públicos diversos a atividade de geometria espacial. Ao detectar que os sujeitos de determinada aplicação já apresentam conhecimento matemático adequado, pode ser solicitado que os mesmos provem matematicamente as propriedades encontradas, como foi realizado no capítulo 3.

Com a realização deste trabalho notou-se que o ensino de Matemática pode tomar vários caminhos e que mesmo quando os recursos são limitados é possível registrar resultados interessantes, que nos ajudam a compreender a tecnologia e melhor aplicar os conhecimentos teóricos das aulas tradicionais de Matemática. Foram colocados lado a lado recursos que muitas vezes parecem distantes (as geometrias não euclidianas, a investigação matemática e o uso de mídias digitais) para gerar uma atividade que contribuirá não só com a aprendizagem de Geometria Plana e Espacial, mas com o conhecimento de ferramentas que podem ser usadas em futuros estudos.

Referências

ALVES, S.; FILHO, C. L. Encontro com o mundo não euclidiano. In: ______. *Geometria em Sala de Aula*. [S.l.]: SBM, 2013. p. 536. Citado na página 26.

ARZARELLO, F. et al. A cognitive analysis of dragging practises in cabri environments. 2002. Disponível em: <http://www.matematica.it/paola/ArticoloZDM.pdf>. Acesso em: 16.02.2017. Citado na página 64.

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. In: HELLMEISTER, A. C. P. (Ed.). *Geometria em Sala de Aula*. [S.l.]: SBM, 2013. p. 437. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 28.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, Springer, v. 18, n. 2, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. [S.l.]: SBM, 1995. Citado na página 26.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. Rio de Janeiro: IMPA - 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 17, 19, 21, 23, 24 e 25.

BIANCONI, R. *Como ler Saccheri*. USP, 2011. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~mat/0230/saccheri.pdf>. Acesso em: 29.01.2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III*. Brasília, 2000. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 63.

BRASIL. *PCNEM+:Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. [S.l.], 2004. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 05.02.2017. Citado na página 55.

BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio ; volume 2*. [S.l.], 2006. 137 p. Citado na página 55.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Citado na página 30.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 10 - Geometria Espacial*. São Paulo: Atual Editora, 1993. Citado 8 vezes nas páginas 30, 39, 40, 41, 43, 44, 45 e 46.

FEITOSA, H. de A.; LOCCI, V. O fazer matemático. *MIMESIS*, v. 1982, n. 2001, p. 63, 1981. Disponível em: <http://www.usc.br/biblioteca/mimesis/mimesis_v22_n3_2001.pdf#page=63>. Acesso em: 28.01.2017. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 27.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos*. [S.l.]: Autores Associados, 2006. Citado na página 63.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, Springer, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993. Citado na página 56.

GIMENES, A. B. *Geometrias hiperbólica e esférica: Uma proposta didática baseada na resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, dezembro 2015. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=04556366992&d=20170206182706&h=7d752157c1535a1766d82c3da3954eee428030c2>. Acesso em: 05.02.2017. Citado na página 46.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 56, 57, 63 e 64.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. 1996. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/EDUCACAO_E_TECNOLOGIA/GEODINAMICA.PDF>. Acesso em: 09.02.2017. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, p. 234–283, 1998. Citado na página 59.

HAREL, G.; SOWDER, L. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, v. 2, p. 805–842, 2007. Citado na página 60.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio , Volume 2*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 30.

NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.

ORDEM, J. *Prova e demonstração em Geometria Plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique*. Tese (Doutorado), 2015. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11035>. Acesso em: 09.02.2017. Citado 4 vezes nas páginas 57, 58, 59 e 60.

PONTE, J. P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. de. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

RIBEIRO, R. S. *Geometrias não-euclidianas na escola : uma proposta de ensino através da geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, abril 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/79482>. Acesso em: 05.02.2017. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 119.

RODRIGUEZ, B. D. do A.; MENEGHETTI, C. M. S.; POFFAL, C. A. Estudo do perfil dos alunos do curso de matemática aplicada – bacharelado: entendendo as razões para o baixo rendimento dos acadêmicos. *Ciência e Natura*, v. 37, p. 151–162, 2015. Citado na página 55.

SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. *Aprendizagem em Geometria na educação básica: A fotografia e a escrita na sala de aula*. [S.l.]: Autêntica, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 64.

Apêndices

APÊNDICE A – Atividade Geometria Euclidiana Revisada

Investigação Matemática: Retas e Planos no Espaço com o GeoGebra 3D

Nome do aluno: ____

Escola: ____

Professor: ____

☞ Para cada questão proposta, use uma nova janela do GeoGebra, sem as construções anteriores. Para isso, no menu Arquivo, clique em Novo (alternativamente, abra uma Nova Janela a partir desse mesmo menu). Antes, porém, você pode salvá-las para revê-las usando o menu Arquivo>Gravar.

Introdução

1. Plote 5 pontos, usando a Janela 3D. Para isso, com a ferramenta Ponto selecionada, escolha um local no plano cinza do sistema cartesiano e, em seguida, arraste o ponto até altura desejada.

2. Usando a ferramenta Reta, selecione dois pontos construídos no item anterior. Será construída a reta que passa por esses dois pontos. Faça esse procedimento para traçar mais duas retas.

3. Plote 3 planos. Para traçar planos, clique em Plano ou Plano por três pontos e em seguida, selecione três pontos. Note que os elementos aparecem separados por categoria na janela de álgebra, que pode ser usada para seleção de objetos (como pontos) também.

4. Utilize a ferramenta Girar Janela de Visualização 3D, segure e arraste o cursor para visualizar a construção sob diferentes ângulos.

Questões Propostas

Postulados

Questão 1. *Postulado de Existência - Reta*

a) Marque dois pontos no espaço e use a ferramenta Reta para construir a reta que passa por esses dois pontos.

b) Em seguida, selecione a ferramenta Ponto em objeto e marque pontos sobre a reta traçada anteriormente.

c) Quantos pontos é possível traçar nessa reta?

d) Usando a ferramenta Ponto, trace pontos que não estejam sobre a reta dos ítens anteriores. Quantos pontos é possível traçar fora dessa reta?

Questão 2. *Postulado de Existência - Plano*

a) Use a ferramenta Plano para construir um plano no espaço.

b) Em seguida, selecione a ferramenta Ponto em objeto e marque pontos sobre o plano traçado anteriormente.

c) Quantos pontos é possível traçar nesse plano?

d) Usando a ferramenta Ponto, trace pontos que não estejam sobre o plano construído. Quantos pontos é possível traçar fora desse plano?

Questão 3. *Postulado de Determinação - Reta*

a) Plote 3 pontos na Janela de Visualização 3D e trace algumas retas que contenham ao menos dois desses pontos.

b) Escolhendo 2 desses pontos, é possível que duas retas distintas contenham esses pontos?

c) É sempre possível construir uma única reta com três pontos quaisquer?

Questão 4. *Postulado de Determinação - Plano*

a) Use a ferramenta Plano por três pontos para traçar um plano na janela de visualização 3D do GeoGebra.

b) É possível obter um plano distinto (ou seja, diferente) que contenha os mesmos três pontos?

Dica: Oculte o Plano criado no item a) clicando no pequeno círculo azul à esquerda desse plano na Janela de Álgebra. Use a ferramenta Plano ou Plano por três pontos para traçar outro plano que passa pelos pontos usados para construir o primeiro plano. Observe que os planos coincidem.

Questão 5. *Postulado de Inclusão*

a) Construa um plano usando a ferramenta Plano por três pontos.

b) Construa as três retas que passam por pares desses pontos.

c) As retas que você construiu estão contidas plano determinado pelos três pontos? Gire a janela de visualização, se necessário.

d) Trace um ponto fora do plano do item a), selecionando um ponto no plano cinza e o deslocando até a altura desejada. Construa reta que passa por esse ponto e um dos pontos do marcados em a).

e) Qual a intersecção entre a reta construída em d) e o plano construído no item a)?

Dica: Use a ferramenta Intersecção entre dois objetos para auxiliá-lo.

Posições Relativas de Retas no espaço

Questão 6. Lembre que, no plano, dadas duas retas, há duas possíveis posições relativas entre elas: paralelas (quando elas não possuem um ponto em comum) e concorrentes (quando elas possuem um ponto de intersecção).

a) Em uma nova janela do GeoGebra, clique em Exibir e, em seguida, em Janela de visualização 3D (2D se a 3D for a que já estiver aberta). Se você estiver usando o GeoGebra 3D no Tablet, veja a versão alternativa para essa questão.

b) Marque 2 pontos na Janela de Visualização 2D e a reta que passa por eles. Veja que a mesma reta aparece na Janela de Visualização 3D.

c) Na Janela 2D, trace um ponto que não pertença a reta construída e trace uma reta paralela a essa usando a ferramenta Reta Paralela.Veja que o conceito de retas paralelas pode ser generalizado para o espaço. Qual é, então, a definição de retas paralelas no espaço?

Questão 6 Alternativa

a) Marque 2 pontos no na Janela de Visualização 3D e a reta que passa por eles.

b) Trace um ponto fora da reta construída.

c) Usando a ferramenta Reta Paralela, selecione o ponto traçado no item b) e a reta construída no item a).

d) É possível construir um plano que contenha as retas paralelas construídas no item c)?

Dica: use a ferramenta Plano e selecione as retas paralelas.

e) Qual condição deve ser adicionada a definição de retas paralelas no plano para que essa definição seja válida no espaço?

Questão 7. *Construindo Retas Reversas*

Digite, no campo Entrada, $x = 0$. Essa equação vai gerar um novo plano no espaço. Trace, agora, três pontos, A, B e C no plano OXY (o plano cinza) e o ponto D no plano construído (sem que D esteja em ambos os planos). Trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$.

a) Qual a posição relativa dessas duas retas?

Dica: Para verificar se elas são concorrentes, utilize a ferramenta Intersecção entre dois objetos e veja se há pontos em comum.

b) Tente traçar o plano que contém ambas as retas usando a ferramenta Plano e selecionando as duas retas. Na versão para tablet e celular, o aplicativo não permite a seleção de duas retas reversas para intersecção.

c) As retas construídas são chamadas de *retas reversas*. Escreva uma possível definição para esse conceito.

Questão 8. Construa retas perpendiculares no espaço (retas concorrentes que formam um ângulo reto):

a) Na Janela 3D do GeoGebra, trace dois pontos e a reta que passa por eles.

b) Em seguida, trace um ponto fora dessa reta.

c) Finalmente, use a ferramenta reta perpendicular (observação: a ferramenta a ser usada no tablet ou celular é Reta Perpendicular, cujo item mostra um plano e a reta perpendicular a ele) e selecione o ponto e a reta.

d) Para verificar a perpendicularidade, use a ferramenta Ângulo e selecione as duas retas.

e) Usando a ferramenta plano construa também o plano determinado pelas duas retas.

f) Um par de retas concorrentes estará sempre contido no plano determinado por elas?

Posições Relativas de uma Reta e um Plano no espaço

Questão 9.

a) Trace dois pontos, A e B, na Janela 3D do GeoGebra.

b) Construa a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

c) Trace cinco pontos fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em diferentes posições do espaço (Atenção! Não escolha pontos muito próximos.

d) Usando a ferramenta Plano, selecione um dos pontos marcados e a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Faça isso para os demais pontos plotados. Quantos planos passam por uma reta?

Questão 10. *Retas e Planos Paralelos*

Já vimos que se uma reta tem dois pontos em um plano, então ela pertence a esse plano pelo item a da Questão 5. Também vimos que uma reta pode ter um ponto em comum com um plano, também da Questão 5. Uma reta e um plano podem não ter pontos em comum?

a) Construa um plano definido por um ponto e uma reta e trace um ponto fora do plano construído.

b) Trace a reta paralela a reta usada para construir o plano passando pelo ponto fora dele.

c) Qual a intersecção entre a reta e o plano?

Dica: Utilize a ferramenta "Intersecção entre dois objetos". Nesse caso dizemos que o plano e a reta são *paralelos*.

d) Escreva a definição de reta paralela a um plano.

Posições Relativas de dois Planos

Questão 11. *Intersecção de Planos*

a) A Intersecção de dois planos pode ser um único ponto? Tente construir dois planos cuja intersecção seja um único ponto no GeoGebra 3D.

b) Use a ferramenta Intersecção de duas Superfícies para verificar as intersecções dos planos.

c) escreva uma propriedade sobre a intersecção de dois planos.

Questão 12. *Planos Paralelos*

a) Construa um plano definido por três pontos e marque um ponto fora dele.

b) Usando a ferramenta Plano Paralelo construa um plano paralelo ao primeiro, passando pelo ponto fora dele.

Questões de avaliação da atividade

Complete a tabela escrevendo, a cada linha, as conclusões da questão, de acordo com o que foi discutido durante a realização da atividade. Se necessário, revise ou refaça as questões.

Tabela 7 – Questões e as propriedades associadas

Questão	Conclusão
Questão 1)	______________________
Questão 2)	______________________
Questão 3)	______________________
Questão 4)	______________________
Questão 5)	______________________
Questão 6)	______________________
Questão 7)	______________________
Questão 8)	______________________
Questão 9)	______________________
Questão 10)	______________________
Questão 11)	______________________
Questão 12)	______________________

1. Dados 2 pontos no espaço, quais e quantos elementos (retas, planos) podem ser construídos?

2. **a)** Dados os pontos A, B e C não colineares (ou seja, que não estão estão sob uma mesma reta) no espaço. Enumere as retas que podem ser construídos, fazendo também um breve roteiro de como construir esses elementos no GeoGebra.

   b) Faça o mesmo do item a), para planos.

3. Dadas duas retas, r e s no espaço, quais são as possíveis posições relativas entre elas? Defina cada posição com suas palavras.

4. **a)** Se as retas da Questão 3 forem paralelas, é possível construir um plano a partir delas? Caso responda sim escreva como você construiria o plano no GeoGebra.

   b) E se elas forem reversas, é possível construir um plano que as contenha? Se a resposta for positiva, escreva como esse plano seria construído no GeoGebra.

   c) Dentre as possíveis posições relativas entre duas retas, classifique cada uma delas em uma das categorias:

      i Contidas em um único plano;

      ii Determinam um único plano;

      iii Existe um plano que as contém;

      iv Não existe plano que as contenha;

5. **a)** Dados um plano α e uma reta r do espaço, quais as possíveis posições relativas entre eles?

   b) Por uma reta passam quantos planos?

   c) Escreva dois roteiros para a construção de planos concorrentes no espaço usando o GeoGebra.

6. Dados dois planos no espaço, quais são as possíveis posições relativas entre eles? Escreva a definição de cada posição com suas palavras.

7. Esboce as figuras para as questões 7, 9 e 11 usando apenas lápis, borracha e papel.

8. Quais as vantagens você notou ao usar o software, comparando-o com as figuras da questão 7? Se as figuras que você construiu estivessem em um livro didático, você acredita que seria capaz de visualizar as situações de maneira satisfatória?

APÊNDICE B – Atividade sobre Geometria Não Euclidiana - Versão para impressão

Explorando a Geometria Esférica com o GeoGebra 3D

Nome do aluno: ______________________________

Escola: ______________________________

Professor: ______________________________

B.1 Atividade Opcional - Construção da Ferramenta Reta Esférica

B.1.1 Reta Esférica dado um dos polos

(a) Com o GeoGebra aberto, exiba a Janela de Visualização 3D clicando em Janela de Visualização 3D no menu Visualização. Com a ferramenta ponto selecionada, clique na origem do sistema, o ponto de encontro dos três eixos cartesianos, criando o ponto A, ou escreva $A = (0, 0, 0)$ no campo entrada.

(b) Clique na seta lateral direita do botão esfera e selecione a ferramenta Esfera dados Centro e Raio. Selecione então o ponto A e, na janela em que aparece em seguida, digite algum valor entre 6 e 8 (de sua preferência) para o raio da esfera. Será construída a esfera a.

(c) Selecione a ferramenta Ponto sobre objeto no botão Ponto e trace um ponto qualquer sobre a esfera, B (sugere-se ocultar os eixos coordenados, o plano cinza e a grade após esse passo. Para isso, clique no botão Girar Janela de Visualização 3D, e no submenu da barra Janela de Visualização 3D e desmarque as três primeiras opções).

(d) Com a ferramenta Reta, trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$, clicando sobre os pontos A e B.

(e) No botão Plano, selecione Plano Perpendicular. Clique no ponto A e na reta $\overleftrightarrow{AB}$, aparecerá o plano b.

(f) Selecione a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies e clique no plano e na esfera construídos anteriormente (ou diretamente na intersecção entre os dois). Será traçado o círculo máximo c, correspondente ao ponto B. Aperte a tecla Esc no teclado ou clique no botão da ferramenta Mover (o primeiro botão, em forma de cursor).

(g) Selecione o círculo máximo c e no menu Ferramentas, clique em Criar uma Nova Ferramenta.

(h) Na nova janela que aparece, verifique que Círculo c: curva de intersecção de b, a é o único objeto na caixa de diálogo e clique em próximo.

(i) Normalmente, ao escolher o objeto final, o GeoGebra automaticamente determina os objetos iniciais necessários para construí-lo, mas o recurso não funciona bem nesse caso. Remova todos os objetos que aparecerem na caixa de diálogo, selecionando-os e clicando no botão X na parte inferior da janela. No menu deslizante dessa janela selecione os objetos: ponto A, esfera a e ponto B em a. Clique em próximo.

(j) A próxima janela serve para finalizar o botão que será criado. Para o nome, sugere-se Reta Esférica Polo, o programa vai automaticamente definir o comando como RetaEsféricaPolo. Para a ajuda da ferramenta, escreva:" Selecione o centro de uma esfera, a esfera e um ponto sobre a Superfície Esférica (polo da reta esférica)". É também possível escolher um ícone para o botão, selecionando uma imagem salva no computador.

(k) Finalmente, clique em Concluído. O novo botão aparacerá ao lado das outras ferramentas.

(l) Oculte o plano e a reta criados, clicando no círculo à direta de cada objeto na Janela de Álgebra. Salve o arquivo em formato .ggb, padrão do GeoGebra. Ele pode ser útil em seguida.

(m) Para salvar a nova ferramenta, no menu Ferramentas, clique em Gerenciar Ferramentas. Uma nova janela será aberta, selecione a nova ferramenta criada e clique em Gravar Como... Salve o arquivo com o nome que desejar, com extensão .ggt.

(n) Para importar ferramentas salvas para outros arquivos, abra uma nova janela do GeoGebra, clicando no menu Arquivo > Nova Janela. Na nova janela, ative a Janela de Visualização 3D (feche a Janela de Visualização 2D, se ela não for fechada ao abrir a 3D) e clique em Abrir... no menu Arquivo. Na janela que aparece, selecione a ferramenta .ggt criada. Ela estará disponível na barra de ferramentas da nova janela. Caso isso não aconteça, vá em Ferramentas > Configurar barra de ferramentas, selecione o botão desejado na lista à direita, clique em inserir, seguido de aplicar. Para que o GeoGebra abra sempre com essa ferramenta, selecione Gravar Configurações em Opções.

(o) Caso o processo descrito no item anterior não funcionar, recomenda-se que após a construção ferramenta, sejam excluídos objetos auxiliares para a construção da ferramenta, permanecendo exibidos apenas a esfera e seu centro e seja salvo o arquivo. Toda vez que for necessária uma construção com essa ferramenta, partir desse arquivo salvo.

B.1.2 Reta Esférica dados dois pontos não antípodas

(a) Abra o arquivo de extensão .ggb criado no último passo da subseção anterior.

(b) Trace dois pontos, B e C, não antípodas sobre a esfera, usando a ferramenta Ponto em Objeto.

(c) Com a ferramenta Plano por três pontos, selecione o centro da esfera, A, e os pontos B e C para traçar o plano determinado por esses três pontos.

(d) Usando a ferramenta Intersecção de Duas Superfícies, clique no plano e na esfera construídos anteriormente (ou diretamente na intersecção deles). Será traçado um círculo máximo.

(e) Selecione o círculo máximo construído e no menu Ferramentas, clique em Criar uma Nova Ferramenta.

(f) Na nova janela que aparece, verifique que Círculo c: curva de intersecção de b, a é o único objeto na caixa de diálogo e clique em próximo.

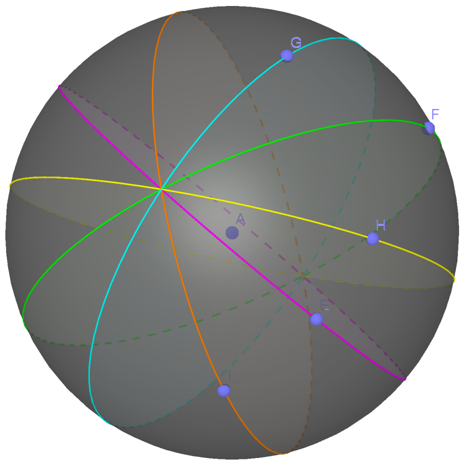
(g) Normalmente, ao escolher o objeto final, o GeoGebra automaticamente determina os objetos iniciais necessários para construí-lo, mas o recurso não funciona bem nesse caso. Retire todos os objetos que aparecerem na caixa de diálogo, selecionando-os e clicando no botão X na parte inferior da janela. No menu deslizante dessa janela selecione os objetos: ponto A, esfera a e os pontos B e C em a. Clique em próximo.

(h) A próxima janela serve para finalizar o botão que será criado. Para o nome, sugere-se Reta Esférica 2 Pontos, o programa vai automaticamente definir o comando como RetaEsférica2pontos. Para a ajuda da ferramenta, escreva: "Selecione o centro de uma esfera, a esfera e dois pontos sobre a Superfície Esférica". É também possível escolher um ícone para o botão, selecionando uma imagem salva no computador.

(i) Finalmente, clique em Concluído. O novo botão aparacerá junto ao botão Reta Esférica 2 Pontos.

(j) Apague os objetos auxiliares para a construção, deixando apenas a esfera e seu centro na Janela de Visualização. Salve os arquivo com um nome adequado, já que ele servirá como ponto inicial para todas as construções a seguir. Sugere-se o nome AtividadeEsferica.ggb.

B.2 Atividade Proposta



☞ Para cada Questão Proposta, abra o arquivo AtividadeEsferica.ggb, disponível na área de Trabalho.

☞ Para salvar a construção de cada questão, use SOMENTE o recurso Gravar Como no menu arquivo, e salve com um nome diferente de AtividadeEsferica.ggb. Se não deseja salvar o arquivo, ao fechar o GeoGebra, escolha a opção Não Gravar na janela que aparece ao clicar em fechar.

Questão 1. *Pontos e Retas em uma esfera*

Neste modelo de Geometria, chamada de Geometria Elíptica ou Esférica, os pontos são os elementos usuais da Geometria Euclidiana, mas o elemento reta é representado por um círculo máximo de uma esfera. Nos próximos ítens serão traçados pontos e retas na esfera.

(a) Abra o arquivo AtividadeEsferica.ggb disponível na Área de Trabalho.

(b) Para construir um ponto sobre a esfera, selecione a ferramenta Ponto em Objeto no botão Ponto e clique onde deseja traçar um ponto sobre a esfera.

(c) Para construir uma reta sobre a esfera, use a ferramenta Reta Esférica Polo e selecione o centro da esfera, a própria esfera, e finalmente um ponto da esfera que servirá como polo relativo ao círculo máximo, que é uma reta nesse modelo de Geometria (Atenção: o ponto a ser usado como polo deve ser construído antes do uso da Ferramenta Reta Esférica Polo). Doravante, Reta Esférica se refere a um círculo máximo da esfera, enquanto que a reta no sentido euclidiano será chamado apenas de Reta.

(d) Selecione a ferramenta Girar Janela de Visualização 3D e arraste o cursor do mouse para visualizar as retas esféricas construída sobre a esfera.

(e) Usando a ferramenta Ponto em Objeto, construa vários pontos sobre a reta esférica do item anterior. Quantos pontos é possível traçar sobre uma reta esférica?

(f) Usando o ferramenta Ponto em Objeto, trace vários pontos sobre a esfera, mas fora da reta esférica traçada. Quantos pontos é possível traçar fora da reta esférica e sobre a esfera?

Questão 2. *Retas Esféricas passando por dois pontos*

(a) Trace dois pontos não antípodas sobre a esfera, usando a ferramenta Ponto em Objeto.

(b) Com a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos selecionada, clique no centro da esfera, na esfera, e nos dois pontos traçados no item anterior.

(c) Seria possível traçar outra reta esférica que passa por esses dois pontos?

(d) Trace dois pontos antípodas. Para isso, trace um ponto sobre a esfera usando a ferramenta Ponto em Objeto. Em seguida, use a ferramenta Reta para construir a reta (no sentido euclidiano) que passa pelo ponto na esfera e pelo seu centro. No botão Ponto, selecione a ferramenta Intersecção de Dois Objetos e selecione a reta construída e a esfera. Irá aparecer o ponto antípoda correspondente ao ponto traçado, além de um ponto coincidente com o primeiro (pois este também é intersecção da reta e da circunferência).

(e) Selecione a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos e clique sobre o centro da esfera, na esfera e nos dois pontos antípodas. O programa acusa "indefinido" na Janela de Álgebra. Por que isso acontece?

(f) Trace um ponto qualquer sobre a esfera, usando a ferramenta Ponto em Objeto. Clique na ferramenta Reta Esférica 2 Pontos e selecione o centro da esfera, a esfera, o ponto traçado e um dos pontos antípodas. É traçada uma reta que contém ambos os polos (use a ferramenta Girar Janela de Visualização para verificar).

(g) Repita o procedimento do item anterior, para outro ponto da esfera, diferente do primeiro e dos polos. É traçado mais uma reta que contém os pontos antípodas. Quantas vezes esse processo pode ser repetido?

(h) Quantas retas passam por pontos antípodas?

Questão 3. *Intersecção de Duas Retas Esféricas*

(a) Construa uma reta esférica passando por dois pontos usando a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos.

(b) Trace dois pontos sobre a esfera, mas fora da reta esférica do item a). Construa a reta esférica que passa por eles.

(c) Para traçar a intersecção dessas duas retas, clique na ferramenta Intersecção de Dois Objetos sob o menu Ponto e selecione as duas retas esféricas construídas. Qual o conjunto intersecção das duas retas?

(d) Construa mais dois pontos sobre a esfera e fora das retas já traçadas. Usando a ferramenta Reta Esférica 2 Pontos construa o círculo máximo que passa por eles.

(e) Determine a intersecção da reta esférica construída no item anterior e as outras duas construídas nos ítens a) e b).

(f) Quantos pontos cada par de retas têm em comum? Que propriedade tem esses pontos, um em relação ao outro?

(g) É possível construir um par de retas cuja intersecção é um único ponto? Com a ferramenta Mover selecionada, é possível clicar em cada ponto e arrastá-lo, de forma a visualizar outras situações. Se for possível, faça a construção e a descreva.

Para resolver a questão 4 lembre-se que duas retas são paralelas não possuem pontos em comum.

Questão 4. *Retas Paralelas na Geometria Esférica*

(a) Com dois pontos não antípodas sobre a esfera, construa a reta esférica que passa por eles.

(b) Trace um ponto fora da reta construída no item anterior.

(c) Tente construir uma reta paralela a reta construída no item a) passando pelo ponto construído no item b).

(d) O que pode-se dizer sobre retas paralelas nesse modelo de Geometria?

Questão 5. *Distância entre dois pontos* Na Geometria Esférica, a distância entre dois pontos é definida como o comprimento do menor arco do círculo máximo que contém ambos os pontos.

(a) Trace dois pontos sobre a esfera.

(b) Construa a reta esférica que passa por eles, usando a ferramenta Reta Esferica 2 Pontos.

(c) Encontre os polos correspondentes ao círculo máximo. Para fazer isso, selecione a ferramenta Reta Perpendicular e selecione o círculo máximo traçado no item anterior e o centro da esfera. Será traçada a reta que passa pelo centro e é perpendicular ao plano que determina o círculo máximo.

(d) Usando a ferramenta Intersecção de Dois objetos sob o botão Ponto, selecione a esfera e a reta perpendicular. Serão traçados dois pontos que são os polos correspondentes ao círculo máximo presente na figura.

(e) Trace 5 pontos sobre a reta esférica construída, usando a ferramenta Ponto em Objeto.

(f) Calcule a distância (noção esférica) entre cada um dos pontos sob a reta esférica e o polo. Para isso, no botão Círculo, selecione a ferramenta Arco Circular e clique sobre o centro da esfera, um ponto da reta esférica e um dos polos. O GeoGebra exibe o comprimento do arco na Janela de Álgebra, sob a categoria Cônica.

(g) Repita o procedimento do item anterior para os demais pontos. Que propriedade pode ser verificada a respeito da distância entre um polo e os pontos da reta esférica correspondente a esse polo?

Questão 6. *Ângulos*

Na Geometria Esférica um ângulo de vértice A é definido como a união de duas retas que passam por A. Sua medida é dada pela medida do ângulo formado entre as retas tangentes aos círculos máximos no ponto A. Antes de começar essa questão, modifique o rótulo do centro da esfera para O. Para isso, clique duas vezes sobre o ponto A na Janela de Álgebra e substitua a letra A por O.

(a) Com a ferramenta Ponto em Objeto, construa três pontos não antípodas : por exemplo os pontos A, B e C na esfera.

(b) Trace as retas esféricas que passam por A e B e por A e C. Essas retas se interceptam no ponto A, formando um ângulo na esfera.

(c) Para determinar a medida desse ângulo, trace as retas tangentes aos círculos máximos no ponto A: No botão Reta Perpendicular, selecione a ferramenta Reta Tangente. Clique no ponto A e em um círculo para construir a reta tangente a esse círculo que passa por A. Repita o procedimento para o outro círculo.

(d) Com as duas retas tangentes passando por A criadas, construa o ângulo entre elas: selecione a ferramenta Ângulo e clique sobre as duas retas tangentes.

(e) Oculte as retas tangentes e selecione a ferramenta Mover. Clique e arraste o ponto B ou o ponto C e observe o ângulo entre as retas esféricas variar.

(f) Qual o intervalo de variação do ângulo entre as duas retas? O que acontece em cada extremo desse intervalo?

Questão 7. *Retas Esféricas Perpendiculares*

Duas retas que se cruzam formando ângulos de 90º são chamadas de perpendiculares, assim como na Geometria Euclidiana. Nessa questão são construídas retas perpendiculares.

(a) Construa dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Trace um ponto sobre a reta esférica traçada no item a) usando a ferramenta Ponto sobre Objeto do botão Ponto.

(c) Usando a ferramenta Reta Esférica Polo, construa a reta esférica cujo polo é o ponto construído no item anterior, selecionando o centro da esfera, a esfera, e o ponto que servirá de polo.

(d) Usando Intersecção de Dois Objetos sob o botão Ponto, trace os pontos de intersecção entre os dois círculos máximos construídos.

(e) Construa as retas tangentes aos círculos máximos usando o procedimento da questão anterior. Trace também o ângulo entre elas, que é de 90º. Assim, as retas esféricas construídas são perpendiculares.

(f) Desloque o ponto que serviu como polo da segunda reta esférica. O que acontece com o ângulo?

(g) Qual a condição sobre o polo de uma reta esférica que permite concluir se ela é perpendicular uma reta esférica dada?

Questão 8. *Retas Esféricas Perpendiculares a uma reta esférica dada passando por um ponto dessa reta*

Dado um ponto numa reta esférica, quantas retas esféricas perpendiculares a reta esférica dada passam por esse ponto? Para responder essa pergunta, considere a construção:

(a) Construa dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Trace um ponto sobre a reta esférica traçada no item a) usando a ferramenta Ponto sobre Objeto do botão Ponto.

(c) Construa os polos relativos a reta esférica traçada, selecionando a ferramenta Reta Perpendicular e clicando sobre o centro da esfera e a reta esférica , em seguida usando a ferramenta Intersecção de Dois Objetos para traçar os polos (os dois objetos a selecionar são a esfera e a reta perpendicular).

(d) Com a ferramenta Reta Esférica 2 pontos trace a reta que passa pelo polo e o ponto da reta esférica. Verifique que as retas assim construídas também são perpendiculares construindo o ângulo entre elas.

Questão 9. *Retas esféricas perpendiculares a uma reta esférica dada passando por um ponto fora dela*

(a) Construa dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Trace um ponto fora da reta esférica do passo anterior.

(c) Quantas retas esféricas perpendiculares a reta dada passam pelo ponto construído no item b)? Descreva como construir essa(s) reta(s) no GeoGebra usando a estrutura proposta nos dois primeiros ítens dessa questão.

Questão 10. *Retas Esféricas perpendiculares a uma reta esférica dada passando por um de seus polos relativos*

(a) Trace dois pontos e a reta esférica que passa por eles. Oculte os pontos.

(b) Construa os polos referentes a reta esférica traçada no primeiro item, usando a ferramenta Reta perpendicular e clicando sobre o centro da esfera e o círculo máximo, em seguida selecionando a ferramenta Intersecção de Dois Objetos (reta e esfera).

(c) Quantas retas esféricas perpendiculares a reta construída em a) passam por um de seus polos? Descreva como construí-la(s) no GeoGebra, partindo da construção proposta nos ítens a) e b). (Dica: Revise uma construção da Questão 2)

Questões de avaliação da atividade

Complete a Tabela 8 escrevendo, a cada linha, as conclusões da questão, de acordo com o que foi discutido durante a realização da atividade. Se necessário, revise ou refaça as questões.

Tabela 8 – Questões e as propriedades associadas - Geometria Esférica

Questão	Conclusão
Questão 1)	____
Questão 2)	____
Questão 3)	____
Questão 4)	____
Questão 5)	____
Questão 6)	____
Questão 7)	____
Questão 8)	____
Questão 9)	____
Questão 10)	____

1. Nessa atividade, foram estudadas várias propriedades a respeito de uma Geometria diferente da de Euclides, que consiste na tradicional Geometria no plano. Escreva algumas propriedades da Geometria Euclidiana que continuam sendo verdade na Geometria Elíptica/Esférica, baseado na atividade que acabou de ser feita.

2. Faça uma tabela comparando as diferenças encontradas nas propriedades das duas Geometrias: posição relativas entre duas retas, distância entre dois pontos, ângulos e retas perpendiculares.

3. Na Geometria Euclidiana, duas retas distintas que são perpendiculares a uma mesma reta, são paralelas entre si. Na Geometria Esférica isso é verdade? Justifique.

4. Descreva três métodos para traçar retas esféricas perpendiculares no GeoGebra.