UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

HELANO LEOM MAIA DE OLIVEIRA

APLICAÇÕES DE MATEMÁTICA BÁSICA EM PROBLEMAS DE MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO

JUAZEIRO DO NORTE
2017

HELANO LEOM MAIA DE OLIVEIRA

APLICAÇÕES DE MATEMÁTICA BÁSICA EM PROBLEMAS DE MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva.

JUAZEIRO DO NORTE
2017

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Aplicações de Matemática Básica em Problemas de Modelagem e Otimização

Helano Leom Maia de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 16 de março de 2017.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva - UFCA

Orientador

Maria Silvana Alcântara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa -UFCA

Flávio França Cruz

Prof. Dr. Flavio França Cruz -URCA

Ás minhas queridas avós
Hilda Oliveira Maia e Maria Aldenora
de Oliveira
(in memoriam).

AGRADECIMENTOS

A Deus, por absolutamente tudo.

A minha mãe, Maria Izailda Oliveira Maia, por todo o amor incondicional e por ter estudado ao meu lado, em minha infância, até que eu pudesse fazer isso sozinho. Tais momentos, com toda certeza, me fizeram tomar gosto pelos estudos.

Ao meu pai, Luis Edvan de Oliveira, por sempre ter trabalhado mais do que qualquer pessoa conseguiria, para que o meu irmão e eu sempre pudéssemos nos dedicar exclusivamente aos estudos.

Ao meu irmão, Hermano D'leom Maia de Oliveira, pela amizade verdadeira e por sempre me mostrar quão boa uma pessoa pode ser.

A minha noiva, Jéssica Ferreira de Alcântara, por todo o apoio, e carinho, nas horas mais difíceis dessa jornada.

Ao meu orientador, Juscelino Pereira Silva, por tudo o que me ensinou e por todos os valorosos conselhos desde o inicio da minha graduação até o final deste mestrado.

A todos os companheiros que seguiram comigo ao longo destes dois anos de mestrado, nesta turma onde reinou o companheirismo. Em especial a Bruno, Cássio, Romel, Osmar e Paulo Henrique; que fizeram todo este percurso ser bem mais divertido.

A todos os professores da UFCA que participam direta ou indiretamente do PROFMAT.

Ao IFCE - campus Cedro, por conciliar meus horários de trabalho com os do mestrado, de modo que eu pudesse realizar ambas as atividades da maneira menos desgastante possível.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

"Na Matemática, para saborear com prazer o fruto é preciso conhecer bem suas raízes" (Malba Tahan)

RESUMO

A Matemática é uma ciência que vem sendo estudada pelo homem a milhares de anos devido a sua enorme utilidade e as suas inúmeras áreas de aplicação. Pode-se encontrar Matemática em praticamente tudo o que existe a nossa volta e sua abrangência é tão grande que podemos vê-la em um simples relógio digital assim como em uma estação espacial. Sendo a Matemática a base de toda a tecnologia, no mundo moderno ela tornou-se ainda mais importante e, devido a isso, ela vem sendo desenvolvida dia após dia por estudiosos em todos os cantos do mundo. Paradoxalmente a tudo isso, vemos hoje em dia, nas escolas brasileiras, um grande desinteresse por parte dos alunos em estudar e aprender esta ciência tão importante. Grande parte deles acredita que a Matemática básica, que é estudada nos ensinos fundamental e médio, não possui utilidade ou aplicações no cotidiano. Entretanto a Matemática básica é extremamente importante e seus tópicos mais elementares possuem muitas aplicações interessantes no dia a dia. Para provar tal ponto, este trabalho mostrará algumas aplicações interessantes de Matemática básica.

Palavras-chave: Aplicações de Matemática. Matemática básica. Derivada.

ABSTRACT

Mathematics is a science that has been studied by man for thousands of years because of its enormous utility and its numerous areas of application. We can find mathematics in practically everything that exists around us and its range is so great that we can see it in a simple digital clock just like in a space station. Since mathematics is the basis of all technology, in the modern world it has become even more important, and because of this, it has been developed day by day by scholars in every corner of the world. Paradoxically to all this, we see today, in Brazilian schools, a great lack of ibterest on the part of the students in studying and learning this important science. Most of them believe that basic Mathematics, which is studied in elementary and middle schools, has no utility or applications in everyday life. However, basic Mathematics is extremely important and its most basic topics have many interesting applications in everyday life. To prove such a point, this paper will show some interesting applications of Basic Mathematics.

Keywords: Mathematics Applications. Basic math. Derived.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em nenhum outro momento da história da humanidade a tecnologia esteve tão presente no cotidiano das pessoas como atualmente, pois ela se faz presente das mais diversas formas possíveis. Devido a isso, o conhecimento matemático tornou-se ainda mais importante do que era alguns séculos atrás. Apesar disso, um levantamento feito com dados do Ministério da Educação (MEC) mostrou que cerca de 90% dos estudantes que concluíram o ensino médio no Brasil em 2013 não possuíam os conhecimentos mínimos acerca de Matemática básica. Esta situação se deve, em parte, ao fato de que a grande maioria dos alunos acredita que a Matemática que lhes é ensinada nos ensinos fundamental e médio é completamente inútil, pois eles não conseguem ver nenhuma utilidade para ela em suas vidas. Entretanto, esse tipo de pensamento não condiz com a realidade, visto que a Matemática básica é muito útil e possui várias aplicações interessantes.

Com base no que foi dito acima, este trabalho tem como objetivo tentar mudar um pouco este pensamento acerca da Matemática básica. Isto será feito mostrando-se alguns problemas, aparentemente complexos, que podem ser resolvidos totalmente com Matemática básica. Espera-se que isso acabe por despertar o interesse de alguns alunos pela Matemática, pois acredita-se que a partir do momento que eles passem a ver as inúmeras utilidades que a Matemática possui, passarão a vê-la com outros olhos.

Vale ressaltar que todos os problemas propostos neste trabalho serão resolvidos exclusivamente com tópicos de Matemática básica que são estudados no ensino médio, porém também serão utilizadas algumas noções, e resultados, de Cálculo Diferencial na resolução destes problemas. Outro ponto importante é que boa parte dos tópicos de Cálculo Diferencial que serão utilizados neste trabalho já fizeram parte do currículo do ensino médio brasileiro e, inclusive, podem ser encontrados em alguns livros voltados para o ensino médio.

Para deixar este trabalho mais completo, no capítulo 1, serão apresentados todos os resultados necessários a um bom entendimento dos tópicos de Cálculo Diferencial que serão utilizados na resolução dos problemas propostos. Além disso, o texto será focado em dar as noções intuitivas desses tópicos, para que o entendimento de suas aplicações seja facilitado a qualquer pessoa interessada no conteúdo deste trabalho.

No capítulo 2 serão apresentados os problemas propostos, assim como as suas soluções detalhadas e que façam uso exclusivamente de tópicos presentes no currículo do ensino médio ou no capitulo 1 desta dissertação.

2 NOÇÕES BÁSICAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Neste capítulo estudaremos as noções mais elementares de Cálculo Diferencial, assim como todos os seus resultados que serão utilizados no capítulo seguinte para a resolução dos problemas propostos.

Vale ressaltar, neste ponto, que ao longo deste texto denotaremos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$ e o domínio de uma função f por $D(f)$, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$ poderá ser um intervalo, uma união de vários intervalos ou mesmo igual a $\mathbb{R}$.

2.1 Limite

A noção mais fundamental do estudo de Cálculo é a de limite. Este conceito é tão importante que as noções mais importantes do Cálculo, que são as de derivadas e integrais, são apenas aplicações deste importante conceito.

2.1.1 Definição de limite de uma função

Definição 1 (Limite) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, e a um ponto de $D(f)$ ou uma extremidade de um dos intervalos que compõem $D(f)$. Dizemos que o limite de f quando x tende para a é o número real L, e denotamos isso por $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ pudermos obter um $\delta > 0$ que cumpra a seguinte condição: se $x \in D(f)$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Observação 1 *A definição de limite dada acima não é a mais formal possível, contudo, adotaremos esta definição pois ela atende a todas as necessidades deste trabalho e evita que adicionemos definições que fogem ao objetivo deste texto. Para ver uma definição mais completa de limite recomendamos [11].*

A partir da definição de limite, podemos também definir *função contínua.*

Definição 2 (Função continua) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é continua em $D(f)$ se para todo $a \in D(f)$ tivermos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Perceba que a definição de limite significa que para qualquer intervalo aberto de centro L e raio ϵ que escolhermos, no conjunto imagem de f, podemos encontrar um intervalo aberto de centro a e raio δ, no domínio de f, de modo que as imagens de todos os pontos do intervalo de centro a, excetuando-se, talvez, a imagem do próprio a, estarão dentro do intervalo de centro L. Este conceito pode ser melhor compreendido observando-se a figura abaixo:

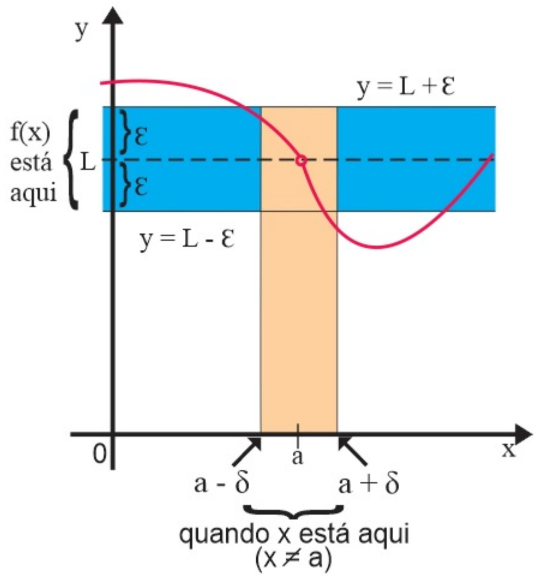

Figura 1: O conceito de limite de uma função

Sendo assim, concluímos que sempre que tivermos o $\lim_{x \to a} f(x) = L$ poderemos tornar os valores de f tão próximos de L quanto desejarmos apenas diminuindo o valor de ϵ, pois ao fazer isso, temos a certeza de que existe um δ de modo que todo $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ possui a sua imagem a uma distância de L menor que ϵ, ou seja, teremos que $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Pelo que foi dito acima, percebemos naturalmente que se $f : D(f) \to \mathbb{R}$, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, é uma função constante tal que $f(x) = k$, $\forall x \in D(f)$, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

seja qual for o valor de $a \in D(f)$. Note que isto é esperado visto que como f é constante, ela não se aproxima de nenhum outro valor além de k.

Neste ponto é importante destacar que ao calcularmos o limite de uma função f quando x tende para a, não é necessário saber qual o valor que esta função f assume em a, e nem mesmo se existe $f(a)$; na verdade, queremos apenas descobrir o que acontece com a função f quando os valores de x estão bem próximos de a. Outro fato importante acerca do limite de uma função é que se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$ então teremos necessariamente que $L = M$, pois é possível mostrar que o limite de uma função num ponto, quando existe, é único.

2.1.2 Propriedades do limite

Veremos agora as principais regras operacionais que podem ser usadas para o cálculo de limites.

Lema 1 *Sejam $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$ funções, onde onde $D(f), D(g) \subset \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$.*

Demonstração: Note inicialmente que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ nos diz que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Como ϵ é qualquer, fazendo $\epsilon = 1$ temos que $|f(x) - L| < 1$. Logo

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq \underbrace{|f(x) - L|}_{<1} + |L| < 1 + |L| \Longrightarrow |f(x)| < 1 + |L|.$$

Temos ainda que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ significa que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x) - 0| = |g(x)| < \frac{\epsilon}{1+|L|}.$$

Com isso, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ e assim teremos que

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)\cdot g(x) - 0| = |f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| = \underbrace{|f(x)|}_{<1+|L|}\cdot\underbrace{|g(x)|}_{<\frac{\epsilon}{1+|L|}} < \epsilon.$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0.$$

■

Teorema 2.1.1 (Propriedades dos limites) *Sejam a, k, L e M números reais e $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$, onde $D(f), D(g) \subset \mathbb{R}$, funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Nestas condições temos que:*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$.
2. $\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)] = k\cdot\lim_{x\to a} f(x) = k\cdot L$.
3. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L\cdot M$.
4. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

Demonstração:

1. Note que como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ temos, pela definição de limite, que

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta_1 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De modo análogo, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ nos diz que

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta_2 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Desse modo, tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que as duas condições acima serão atendidas simultaneamente e portanto teremos que

$$|(f(x)+g(x)) - (L+M)| = |f(x) - L + g(x) - M| \leq \underbrace{|f(x)-L|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|g(x)-M|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon.$$

Com isso, concluímos a demostração do item 1.

2. Perceba que se $k = 0$ a nossa conclusão é imediata. Desse modo, suponha que $k \neq 0$. Assim, como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, temos que

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|} \iff |kf(x) - kL| < \epsilon.$$

Com isso, concluímos a demonstração do item 2.

3. Note inicialmente que $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f(x) - L = 0$ pois

$$|f(x) - L| < \epsilon |(f(x) - L) - 0| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Sendo assim, note que

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x) - L\cdot M] = \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot M + f(x)\cdot M - L\cdot M].$$

Pelo item 1 temos que

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot M + f(x)\cdot M - L\cdot M] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot(g(x)-M) + \lim_{x\to a} M\cdot(f(x) - L).$$

Pelo **Lema 1** e por (2.1), temos que ambos os limites são nulos, portanto

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) - L\cdot M = 0 \iff \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M.$$

Com isso, concluímos o item 3.

4. Para mostrar esta fato, mostraremos inicialmente que

$$\lim_{x\to a} g(x) = M \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}, \text{ se } M \neq 0.$$

Para isto, perceba que como $M \neq 0$ se tomarmos, por exemplo, $\epsilon_1 = \frac{|M|}{2}$ poderemos obter um $\delta_1 > 0$ de modo que todos os valores de x tais que $|x-a| < \delta_1$ terão o mesmo sinal que M. Isto significa que existe $N > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x)| < N \iff \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{N}.$$

Temos ainda, da definição de limite, que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ nos diz que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - M| < \epsilon \cdot |M| \cdot N.$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ teremos que

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{g(x) - M}{g(x)\cdot M}\right| = |g(x) - M| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|M|} < \frac{\epsilon \cdot |M| \cdot N}{|M| \cdot N} = \epsilon.$$

Portanto, vemos que

$$\lim_{x\to a} g(x) = M \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}, \text{ se } M \neq 0.$$

Desse modo, pelo item **3.** do **Teorema 2.1.1** temos que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

Com isso, concluímos a demonstração do **Teorema 2.1.1.**

■

2.2 Derivada

Veremos agora uma das mais importantes aplicações do conceito de limite: a Derivada. Veremos no decorrer do texto que a noção de derivada possui uma forte relação com a taxa de variação de uma função assim como com a inclinação da reta tangente a uma curva.

2.2.1 Definição e interpretações da derivada

Definição 3 (Derivada) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, e $p \in D(f)$. A derivada de f no ponto p, que denotamos por $f'(p)$, é*

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

quando este limite existir. Quando tal limite existir, diremos que f é derivável em p. Se f for derivável em todos os pontos de seu domínio, então diremos, simplesmente, que f é derivável.

Iremos agora ver duas interpretações da noção de derivada. Primeiramente lembre-se, da geometria analítica, que a inclinação de uma reta r é definida como sendo a tangente do ângulo que esta reta forma com o eixo das abscissas. Sendo assim, temos que se a reta r passa pelos pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ então a sua inclinação, m_r, é dada por

$$m_r = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$

Desse modo, perceba que uma das formas de interpretar o quociente que aparece na definição de derivada é como sendo a inclinação de uma reta, secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos $P(p, f(p))$ e $Q(p+h, f(p+h))$. Este fato pode ser melhor observado na figura abaixo:

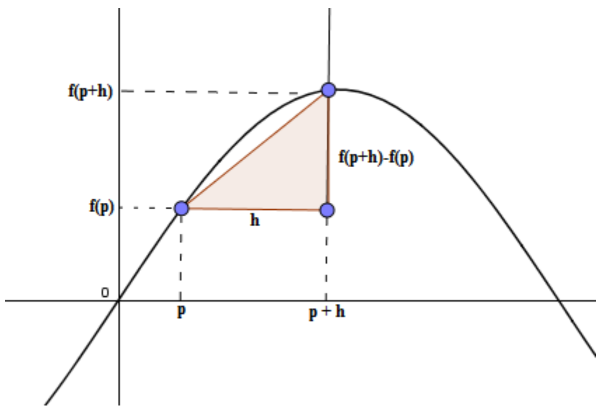

Figura 2: Inclinação da reta secante

Perceba ainda que quando h tende para 0 temos que $p+h$ tende para p e portanto temos que o ponto P se aproxima cada vez mais do ponto Q, conforme pode ser visto na figura abaixo:

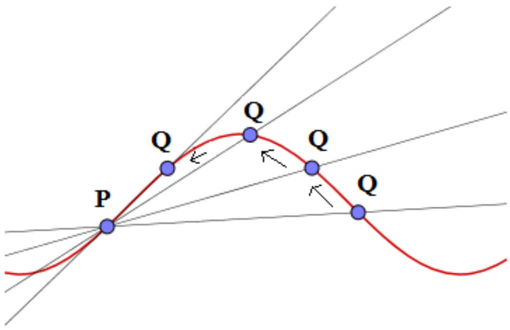

Figura 3: Q aproximando-se de P

Desse modo, vemos que quando $h \to 0$ as retas secantes a f se aproximam cada vez mais da posição da reta tangente a f em P e suas inclinações também vão se aproximando cada vez mais da inclinação da reta tangente. Desse modo, concluímos que $f'(p)$ é a inclinação da reta tangente a f passando por P.

É importante ressaltar que a inclinação de uma reta determina a sua direção; com base nisso, considera-se que a direção de uma curva em um ponto qualquer é a mesma direção da reta tangente à curva neste ponto.

A segunda forma de interpretar a derivada é como taxa de variação de uma função. Lembre-se que a taxa de variação de uma variável, dependente, y em relação a uma outra variável, independente, x é dada pelo quociente das variações que x e y sofrem quando x sofre alguma variação, ou seja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Logo, vemos que o quociente que aparece na derivada pode ser visto também como a taxa de variação da função f, em relação a x, quando x sofre um incremento de h. Perceba ainda que quando $h \to 0$ este incremento vai ser tornando cada vez menor e a taxa de variação calculada é referente a intervalos cada vez menores. Sendo assim, vemos que $f'(p)$ é a taxa de variação da função f em relação à variável x quando $x = p$. Quando é adotada esta interpretação, $f'(p)$ é chamada de *taxa de variação instantânea de f no ponto p.*

Podemos ver esta interpretação da derivada em muitas situações no nosso dia-a-dia. Um exemplo bastante comum é quando calculamos a velocidade média de uma objeto. Ela é comumente dada por

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

onde Δs representa a variação do espaço que ocorre quando se transcorre um tempo Δt. Sendo assim, vemos que a velocidade é a taxa de variação do espaço em relação ao tempo.

Temos ainda que a velocidade instantânea de um objeto é dada por

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

De modo análogo, podemos encarar também a aceleração de um corpo como sendo a taxa de variação da velocidade deste corpo em relação ao tempo.

2.2.2 Regras de derivação

Definição 4 (Função derivada) *Sejam $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. A função derivada de f, ou simplesmente derivada de f, é a função $f' : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset D(f)$, tal que*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe para todo $x \in A$.

Pelo que já vimos, podemos concluir que a derivada da função f é uma função que associa cada $p \in A$ à inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p. Pode-se considerar também que cada ponto $p \in A$ é associado à taxa de variação instantânea da função f naquele ponto. Quando $A = D(f)$ dizemos que f é uma função derivável.

Perceba ainda que como f' é uma função, podemos deriva-la também. Caso f' seja derivável, sua derivada será denotada por f'' e sera chamada de *derivada segunda da função f*. Veremos a importância da função f'' na próxima seção.

Note ainda que temos outra forma de encarar a definição de derivada. Se, fixado p, fizermos $x = p + h$ na definição de derivada teremos que $h = x - p$ e quando $h \to 0$ teremos que $x \to p$. Com essas modificações, a definição de derivada se torna

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Algumas vezes a definição acima facilita bastante as contas, outras vezes a primeira versão é bem mais útil. Veremos um aplicação prática disto no exemplo abaixo:

Exemplo 1 *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Determine $f'(x)$.*

Solução: Pela segunda definição que vimos para a derivada, temos que para qualquer $p \in \mathbb{R}$ temos

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^n - p^n}{x - p}.$$

Usando a identidade:

$$x^n - p^n = (x-p)(x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1})$$

obtemos que

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{(x-p)(x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1})}{x-p}.$$

Como $x - p \neq 0$ quando $x \to p$ temos

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + xp^{n-2} + p^{n-1}}_{\text{n termos}}.$$

Daí vemos que

$$f'(p) = np^{n-1}.$$

Como p é um real arbitrário, concluímos que

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

$\diamond$

Observação 2 *O resultado acima é válido para todo $n \in \mathbb{R}$ e não apenas para n inteiro positivo. Contudo, a demonstração de tal fato foge ao objetivo deste trabalho e por este motivo iremos admitir isto, sem demonstração. Tal demonstração pode ser encontrada em [2], em [13] ou ainda em [14].*

Observação 3 *Outra notação bastante usada para representar a derivada da função f em relação a variável x é*

$$\frac{df}{dx}.$$

Nesta notação, a derivada segunda de uma função f é denotada por

$$\frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Tais notações se devem ao matemático alemão Gottfried Leibniz, sendo elas bastante úteis em alguns casos.

Teorema 2.2.2 (Regras de derivação) *Sejam k e p números reais, $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, onde $D(f), D(g) \subset \mathbb{R}$, $c : D(c) \to \mathbb{R}$ uma função constante, onde $D(c) \subset \mathbb{R}$, tal que $c(x) = p$, $\forall x \in D(c)$, e ainda $A = D(f) \cap D(g)$. Nestas condições, temos que:*

1. $c'(x) = 0, \quad \forall x \in D(c)$.

2. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \quad \forall x \in A$.

3. $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x), \quad \forall x \in D(f)$.

4. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in A.$

5. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))}{[g(x)]^2}, \quad \forall x \in A$ *tal que* $g(x) \neq 0.$

Demonstração:
1. Pela definição de derivada temos que

$$c'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{p-p}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Com isso, concluímos o item 1.

2. Pela definição de derivada temos que:

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}. \end{aligned}$$

Pelo item **1** do **Teorema 2.1.1** temos que

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Como f e g são, simultaneamente, deriváveis em A concluímos que

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \quad \forall x \in A.$$

Com isso concluímos o item 2.

3. Pela definição de derivada temos que

$$[k \cdot f(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} k \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

Pelo item **2** do **Teorema 2.1.1** temos que

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right].$$

Como f é derivável, vemos que

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Com isso concluímos o item 3.

4. Pela definição de derivada temos que:

$$\begin{aligned}
[f(x)\cdot g(x)]' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)+[f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)]-f(x)\cdot g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h))-f(x)\cdot g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x+h)+f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))}{h}.
\end{aligned}$$

Pelo item **1** do **Teorema 2.1.1** temos que

$$[f(x)\cdot g(x)]' = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\cdot g(x+h)+\lim_{h\to 0} f(x)\cdot\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].$$

E pelo item **3** do **Teorema 2.1.1** temos que

$$[f(x)\cdot g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h)+\lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Como f e g são funções simultaneamente deriváveis em A concluímos que

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),\quad \forall x\in A.$$

Com isso, concluímos o item 4.

5. Pela definição de derivada temos que

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}.$$

Tirando $\dfrac{1}{h}$ em evidência e fazendo o mmc dos termos restantes obtemos que:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{h}.
\end{aligned}$$

De modo análogo ao item anterior, somando-se o termo $[f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)]$ e utilizando-se os itens **1**, **2**, **3** e **4** do **Teorema 2.1.1** obteremos que

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)\cdot g(x)}.$$

Como as funções f e g são simultaneamente deriváveis em A, se $x \in A$ é tal que $g(x) \neq 0$ então

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x))}{[g(x)]^2}.$$

Com isso, concluímos a demonstração do teorema. ■

Exemplo 2 *Utilize as regras de derivação para derivar:* $f(x) = x^3(x^2+1)$ *e* $g(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$.

Solução: Note que a função f é o produto de duas funções e portanto devemos usar o item *4.* do **Teorema 2.2.2**. Assim, temos que

$$f'(x) = [x^3(x^2+1)]' = [x^3]'(x^2+1) + x^3[(x^2+1)].$$

Utilizando os resultados vistos no **Exemplo 1** e no **Teorema 2.2.2** temos que

$$f'(x) = 3x^2(x^2+1) + x^3(2x).$$

Para a segunda função, note que a função g é o quociente de duas funções e portanto devemos usar o item *5.* do **Teorema 2.2.2**. Assim, obtemos

$$g'(x) = \frac{[3x^2]'(x+1) - 3x^2[(x+1)]'}{(x+1)^2}.$$

Portanto

$$g'(x) = \frac{6x(x+1) - 3x^2}{(x+1)^2}.$$

◇

Teorema 2.2.3 (Regra da cadeia) *Se* $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : D(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções deriváveis, com* $Im(g) \subset D(f)$ *então a função composta* $(f \circ g)(x)$ *é derivável em todo ponto* $x \in D(g)$ *e sua derivada é dada por*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Observação 4 *O teorema acima é muito importante, contudo, sua demonstração completa usa noções de derivada que não serão abordadas neste trabalho. Por esse motivo, ela será omitida do texto. Tal demonstração pode ser encontrada em [2], em [13] ou em [14].*

Observação 5 *O teorema acima nos diz que a derivada da função composta* $(f \circ g)(x)$ *é o produto da derivada da função* f *aplicada na função* g *pela derivada da função* g.

Observação 6 *Na notação de Leibniz, tal regra é expressa da seguinte forma*

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

onde f *está em função de* x *e, por outro lado,* x *é uma função de* t. *Perceba que neste caso que* $f(x) = f(x(t))$ *e portanto para derivar tal função, precisamos usar a regra da cadeia.*

Exemplo 3 *Use a regra da cadeia para derivar a função* $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

Solução: Sejam g, h funções tais que $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = x^3$. Note que a função f é a composta de h com g, ou seja, $f(x) = (h \circ g)(x)$. Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Sendo assim, precisamos primeiramente calcular $h'(x)$ e $g'(x)$. Pela derivada da função polinomial, vista no **Exemplo 1**, temos que

$$h'(x) = 3x^2.$$

Logo

$$h'(g(x)) = 3(x^2 + 1)^2.$$

Utilizando-se das regras de derivação vistas no **Teorema 2.2.2** e da derivada da função polinomial, temos que:

$$g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x.$$

◇

2.2.3 Valores máximos e mínimos de uma função

Definição 5 (Ponto de máximo) *Seja* $f : D(f) \to \mathbb{R}$ *uma função, onde* $D(f) \subset \mathbb{R}$. *O ponto* $c \in D(f)$ *é dito ponto de máximo local de* f *se existir um intervalo* $[a, b] \subset D(f)$, *com* $c \in [a, b]$, *tal que*

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

O ponto c *será dito ponto de máximo global de* f *se*

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Definição 6 (Valor máximo de uma função) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. Se $c \in D(f)$ é um ponto de máximo local de f então $f(c)$ é dito valor máximo local de f. Se o ponto c é um ponto de máximo global de f então $f(c)$ é dito valor máximo global de f.*

Definição 7 (Ponto de mínimo) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. O ponto $c \in D(f)$ é dito ponto de mínimo local de f se existir um intervalo $[a,b] \subset D(f)$, com $c \in [a,b]$, tal que*

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

O ponto c será dito ponto de mínimo global de f se

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Definição 8 (Valor mínimo de uma função) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função,onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. Se $c \in D(f)$ é um ponto de mínimo local de f então $f(c)$ é dito valor mínimo local de f. Se o ponto c é um ponto de mínimo global de f então $f(c)$ é dito valor mínimo global de f.*

Definição 9 (Ponto crítico) *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. O ponto $c \in D(f)$ é dito ponto crítico de f se: $f'(c)$ não existe ou se $f'(c) = 0$.*

Teorema 2.2.4 *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, e $c \in D(f)$ um ponto que não é extremidade de nenhum intervalo que compõe $D(f)$. Nestas condições, se c é um ponto de máximo, ou mínimo, de f e existir $f'(c)$ então $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Considere, sem perca de generalidade, que c é uma ponto de mínimo de f. Logo

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Daí, temos que

$$f(x) - f(c) \geq 0, \quad \forall x \in D(f).$$

Sendo assim, temos que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \text{ se } x < c \Longrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

e ainda que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \text{ se } x > c \Longrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Note que o primeiro quociente nos diz que ao aproximarmos x de c, por valores menores que c, aquela expressão sempre será negativa ou nula. De modo análogo, o segundo quociente nos diz que ao aproximarmos x de c, por valores maiores que c, aquela expressão sempre será positiva ou nula.

Perceba ainda que, pela definição de limite, aquela expressão deve ser aproximar de $f'(c)$, independente da forma que escolhermos para aproximar x de c, e que este valor deve ser único. Sendo assim, concluímos que devemos ter

$$f'(c) = 0.$$

■

Note ainda que se tivéssemos considerado c como sendo um ponto de máximo de f, a demonstração seria análoga.

Observação 7 *Note que o teorema acima diz que todo ponto de máximo, ou de mínimo, de uma função derivável f é um ponto crítico de f, desde que ele não seja uma das extremidades de algum intervalo que compõe $D(f)$. Contudo, a reciproca não é verdadeira e, portanto, nem todo ponto crítico de f é ponto de máximo, ou de mínimo, de f. Perceba ainda que este teste só identifica os pontos de máximo, ou mínimo, da função f quando a derivada destes pontos existe, sendo assim, os pontos onde a derivada não existe são candidatos a ponto de máximo ou de mínimo.*

Perceba que o **Teorema 2.2.4** nos diz que se um ponto $c \in D(f)$, que não é uma das extremidades de algum intervalo que compõe $D(f)$, é um ponto de máximo, ou de mínimo, de uma função derivável f então ele será um ponto crítico de f. Sendo assim, os candidatos a ponto de máximo, ou de mínimo, de uma função $f : D(f) \to \mathbb{R}$ são os pontos críticos de f e os extremos dos intervalos que compõem $D(f)$. Portanto, para encontrar o valor máximo e valor o mínimo de f, basta comparar os valores das imagens dos pontos críticos de f, e os extremos dos intervalos que compõem $D(f)$, pela função f. O ponto com maior imagem será o ponto de máximo de f em $D(f)$ e o com menor imagem será o ponto de mínimo de f em $D(f)$.

Apesar do método apresentado acima ser bastante eficaz, existem situações em que a expressão que denota a função f é tão complicada que testar vários pontos nela se torna muito trabalhoso. Por este motivo, veremos outras formas de verificar se um ponto crítico de f, ou uma extremidade de algum intervalo de $D(f)$, é ponto de máximo ou de mínimo da função f. Para isso, usaremos os resultados que veremos a seguir.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Weierstrass) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função continua então existem $M, m \in [a, b]$ tais que: $f(M)$ é o valor máximo e $f(m)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$.*

Como a demonstração do **Teorema de Weierstrass** requer o conhecimento de alguns tópicos que não serão abordados neste texto, optou-se por omiti-la. Para quem desejar ver uma demonstração completa desse teorema, indicamos [11].

Teorema 2.2.6 (Teorema de Rolle) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função continua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Nestas condições, se* $f(a) = f(b)$ *então existirá um* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração: Perceba inicialmente que se a função f for constante em $[a, b]$ temos, pelo item **1** do **Teorema 2.2.2**, que $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Logo existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Suponha agora que f não seja uma função constante em $[a, b]$. Desse modo, como f é continua em $[a, b]$, o **Teorema de Weierstrass** nos garante a existência de pontos $M, m \in [a, b]$ tais que: $f(M)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$ e $f(m)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$. Como f não é constante em $[a, b]$ temos necessariamente que $f(m) \neq f(M)$. Note agora que M e m não podem ser, simultaneamente, os extremos do intervalo $[a, b]$, pois se, por exemplo, tivéssemos que $M = a$ então teríamos que $f(M) = f(a) = f(b)$ e, portanto, teriamos que $m \neq b$ visto que $f(m) \neq f(M) = f(b)$. Desse modo, podemos concluir que um dos pontos, M ou m, pertence a (a, b). Suponha, sem perca de generalidade, que $M \in (a, b)$. Sendo assim, M se enquadra nas hipóteses do **Teorema 2.2.4** e portanto $f'(M) = 0$.

Com isso, concluímos a demonstração do teorema. ∎

Teorema 2.2.7 (Teorema do Valor Médio) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função continua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Nestas condições existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Para demonstrar tal teorema, utilizaremos uma função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Perceba agora que:

1. A função h é continua no intervalo $[a, b]$, pois é uma soma de duas funções continuas em $[a, b]$.

2. A função h é derivável em (a, b) pois é uma soma de funções deriváveis em (a, b) e sua derivada é
$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. $h(a) = 0 = h(b)$.

Desse modo, a função h cumpre todas as hipóteses do **Teorema Rolle** e, portanto, existe um $c \in [a, b]$ tal que $h'(c) = 0$. Logo

$$h'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Daí, vemos que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Com isso, concluímos a demonstração do teorema. ■

O **Teorema do Valor Médio** pode ser interpretado geometricamente. Note inicialmente que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a inclinação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ assim como $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(c, f(c))$. Sendo assim, como estas inclinações são iguais, percebe-se que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

O fato descrito acima, pode ser melhor entendido ao observa-se a figura abaixo, que retrata geometricamente este resultado:

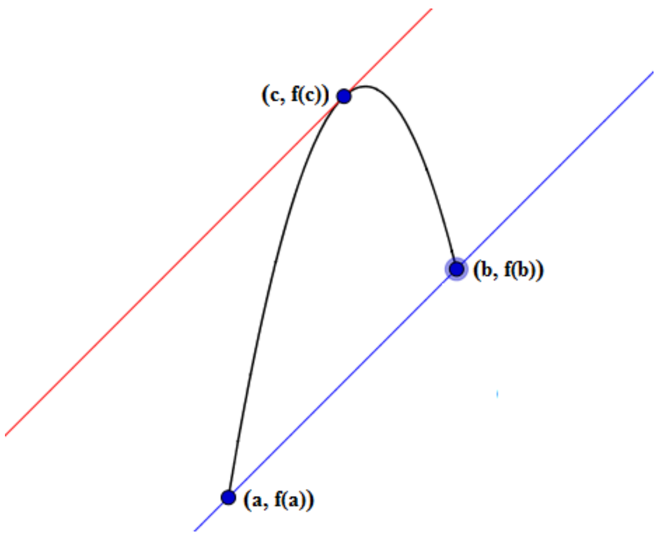

Figura 4: O Teorema do Valor Médio

Com os resultados acima em mente, agora seremos capazes de verificar o que a função f' nos diz sobre o comportamento da função f.

Lema 2 *Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, e derivável, em algum intervalo $I \subset D(f)$, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$. Sendo assim, temos que:*

1. *Se $f'(x) > 0, \forall x \in I$ então f é uma função crescente em I.*

2. *Se $f'(x) < 0, \forall x \in I$ então f é uma função decrescente em I.*

Demonstração:
1. Sejam $x_1, x_2 \in I$, pontos arbitrários de I, com $x_2 > x_1$. Como f é derivável em I então ela é derivável em $[x_1, x_2]$. Sendo assim, pelo **Teorema do Valor Médio** temos que existe $c \in [x_1, x_2]$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Perceba agora que $(x_2 - x_1) > 0$ e como, por hipótese, $f'(x) > 0, \forall x \in I$, temos que $f'(c) > 0$. Logo

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff f(x_2) > f(x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I, concluímos que f é crescente em I.

2. Essa demonstração é completamente análoga à do item 1, só que agora teremos $f'(c) < 0$ e portanto teremos $f(x_2) < f(x_1)$. Daí concluímos que f é decrescente em I. ∎

Teorema 2.2.8 (Teste da primeira derivada) *Sejam $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, $I \subset D(f)$ um intervalo e $c \in I$ um ponto crítico de f. Suponha que f seja continua em I e derivável em I, ou mesmo em $I - \{c\}$. Nestas condições, temos que:*

1. *Se o sinal da função f' passa de positivo para negativo em c, então c é um ponto de máximo local de f.*

2. *Se o sinal da função f' passa de negativo para positivo em c, então c é um ponto de mínimo local de f.*

3. *Se o sinal da função f' não muda em c, então c não é um ponto de máximo, nem de mínimo, de f.*

Demonstração:
1. Como o sinal de f' passa de positivo para negativo ao passarmos por c, temos pelo **Lema 2** que a função f é crescente a esquerda de c e decrescente a direita de c. Sendo assim, existem $x_1, x_2 \in I$ de modo que f é crescente em (x_1, c) e f é decrescente em (c, x_2). Assim, temos que

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in (x_1, c), \text{ pois f é crescente em } (x_1, c].$$

Temos ainda que

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in (c, x_2), \text{ pois f é decrescente em } [c, x_2).$$

Assim, vemos que $f(c) \geq f(x), \forall x \in (x_1, x_2)$ e, portanto, c é um ponto de máximo local de f.

2. Completamente análogo ao item 1.

3. Suponha, sem perca de generalidade, que o sinal de f' se mantenha positivo em algum intervalo (x_1, x_2) que contém c. Sendo assim, a função f é estritamente crescente em (x_1, x_2) e, portanto, $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$. Assim, vemos que c não é ponto de máximo e nem de mínimo de f. A demonstração do caso onde o sinal de f' é negativo é completamente análoga a esta. ∎

Veremos agora como a segunda derivada da função f nos ajuda a identificar se um ponto crítico é ponto de máximo ou ponto de mínimo de f.

Teorema 2.2.9 (Teste da segunda derivada) *Sejam $I \subset D(f)$ um intervalo aberto, $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função, onde $D(f) \subset \mathbb{R}$, e $p \in I$. Nestas condições, se f admite segunda derivada contínua em I então:*

1. *$f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Longrightarrow p$ é um máximo local de f.*

2. *$f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Longrightarrow p$ é um mínimo local de f.*

3. *$f'(p) = 0$ e $f''(p) = 0 \Longrightarrow$ nada podemos concluir a respeito de p.*

Demonstração:

1. Note inicialmente que como f'' é contínua em I e $f''(p) < 0$ existem $x_1, x_2 \in I$ tais que: $p \in (x_1, x_2)$ e $f''(x) < 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. Sendo assim, temos, pelo **Lema 2**, que f' é estritamente decrescente em (x_1, x_2). Como $f'(p) = 0$, concluímos que: $f'(x) > 0$, se $x \in (x_1, p)$ e $f'(x) < 0$, se $x \in (p, x_2)$. Assim temos que p é um ponto crítico de f e o sinal de f' passa de positivo para negativo em p, portanto, pelo **Teste da primeira derivada**, vemos que p é uma máximo local de f.

2. Completamente análogo ao item 1.

3. Neste caso o teste não nos garante nada. Note que:

1. Em $f(x) = x^4$ temos que $f'(0) = f''(0) = 0$ e 0 é um ponto de mínimo em f.

2. Em $f(x) = -x^4$ temos que $f'(0) = f''(0) = 0$ e 0 é um ponto de máximo em f.

3. Em $f(x) = x^3$ temos que $f'(0) = f''(0) = 0$ e neste caso, 0 não é ponto de máximo e nem de mínimo em f.

Com isso concluímos a demonstração. ■

Exemplo 4 *Uma lata cilíndrica possui um volume V. Determine quais deverão ser as dimensões dessa lata para que o custo de produção da lata seja minimizado.*

Solução: Suponha que a lata tenha altura h e que o raio da sua base seja r. Como a lata é cilíndrica, o seu volume é

$$V = \pi r^2 h.$$

Dai vemos que

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Note ainda, que o custo de produção dessa lata será minimizado se gastarmos a menor quantidade de material possível para produzi-la. Perceba que a área da superfície dessa lata é a soma das áreas dos dois círculos de raio r que formam as bases da lata com a área do retângulo de base $2\pi r$ e altura h que forma a lateral da lata. Assim, temos que a função que da a área dessa lata é

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Substituindo o valor de h, obtido acima, para deixar a função A dependendo apenas de r, obtemos que

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Queremos agora minimizar a função A. Note que A está definida para $r > 0$, desse modo, se r é um possível ponto de mínimo da função A temos, pelo **Teorema 2.2.4**, que $A'(r) = 0$. Desse modo, temos que

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

logo

$$A'(r) = 0 \iff \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0$$

portanto

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Resta verificar se este valor de r é um ponto de máximo ou de mínimo da função A. Para isso, usaremos o teste da segunda derivada, visto no **Teorema 2.2.9**. Note que

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

Perceba que a função A'' é continua para $r > 0$ e ela é positiva para qualquer valor positivo de r. Desse modo:

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0.$$

Portanto, pelo testa da segunda derivada, concluímos que r é uma ponto de mínimo da função A. Sendo assim, temos ainda que:

$$\begin{aligned} h &= \frac{V}{\pi}\cdot\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{4V^3\pi^2}{V^2\pi^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} \\ &= 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Portanto, vemos que $h = 2r$. Isso quer dizer que o custo de produção dessa lata será minimizado quando tivermos a medida da sua altura sendo igual ao dobro da medida do raio da sua base.

$\diamond$

3 APLICAÇÕES DE MATEMÁTICA BÁSICA

Neste capítulo, veremos alguns problemas que irão nos mostrar como a Matemática vista no ensino médio é bastante útil. Todos os problemas foram resolvidos utilizando-se apenas Matemática básica e alguns resultados vistos no capítulo 1 deste texto.

Vale ressaltar que todos os problemas deste capítulo foram tirados da seção *Projeto Aplicado* de [13]. Alguns destes problemas foram colocados no texto da forma que se encontram no referido livro; outros, contudo, sofreram pequenas alterações, nos seus itens ou enunciado, que julgaram-se necessárias para um melhor entendimento de tais problemas por leitores que não cursem o nível superior.

Temos ainda que as imagens que servem para ilustrar os problemas propostos foram todas feitas pelo autor, deste trabalho, baseadas nas imagens que ilustram tais problemas em [13]. Os gráficos que aparecem nas soluções dos problemas foram feitos com o software *Geobebra*.

3.1 Onde um piloto deve iniciar a descida?

Um caminho de aproximação para uma aeronave pousando é mostrado na figura abaixo:

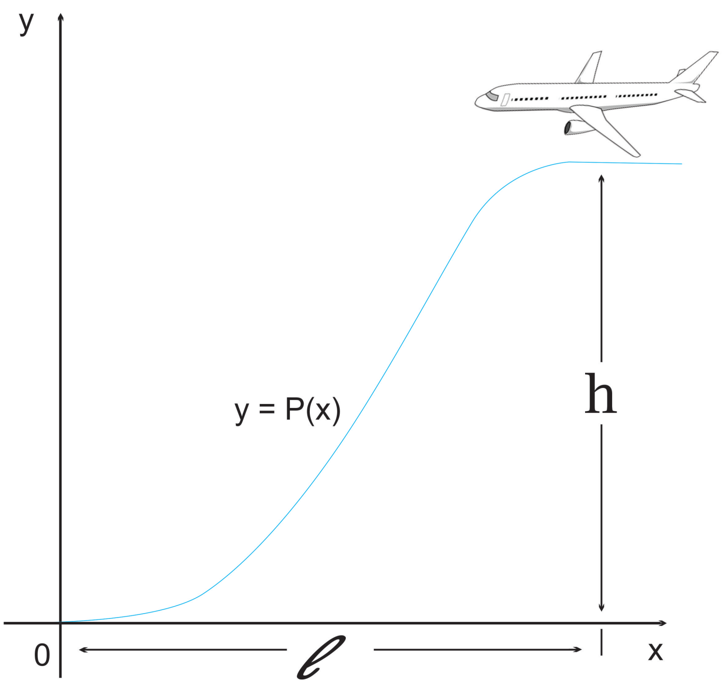

Figura 5: Caminho de aproximação

Sabe-se ainda que este percurso satisfaz às condições abaixo:

- *(i)* A altitude do voo é h, quando a descida começa, a uma distância horizontal l do ponto de contato, na origem.
- *(ii)* O piloto tem que manter uma velocidade horizontal constante v ao longo de toda a descida.
- *(iii)* O valor absoluto da aceleração vertical não deve exceder uma constante k, que é muito menor que à aceleração da gravidade.

Nestas condições:

Item 1. Ache um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaça a condição (i) impondo condições satisfatórias em $P(x)$ e $P'(x)$ para o começo da descida e para a aterrissagem.

Item 2. Use as condições (ii) e (iii) para mostrar que:

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leq k.$$

Item 3. Suponha que uma companhia aérea decida não permitir que a aceleração vertical de um avião exceda $k = 1.385 km/h^2$. Se a altitude de um avião é 10.700 *metros* e a velocidade é $485 km/h$, a que distância do aeroporto o piloto deve iniciar a descida?

Item 4. Faça um caminho de aproximação se as condições declaradas no problema 3 estiverem satisfeitas.

Solução:

Item 1

Neste item queremos obter uma função polinomial $P : IR \rightarrow IR$, do 3º grau, dada por $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que represente a trajetória seguida pelo avião do início da descida até o seu primeiro contato com o solo. Perceba ainda que esta função P associa, a cada instante, a distância x entre o avião e o ponto de contato com o solo (que está na origem do sistema), medida na horizontal, com a altura $P(x)$ em que o avião se encontra nesse dado instante. Note que este nosso primeiro problema se resume a determinar os valores de a, b, c e d que são os coeficientes do polinômio P.

Observando a Figura 5, vemos que o *ponto de contato com o solo* (origem) também faz parte da curva que representa a trajetória do avião e isso significa que quando a distância entre o avião e a origem é nula, a sua altura também será nula, portanto, temos que

$$P(0) = 0. \tag{3.2}$$

Note também que a curva que representa a trajetória do avião é tangenciada pelo eixo x no ponto $(0, P(0))$ e portanto, pelo que vimos em **2.2.1**, temos que

$$P'(0) = 0. \tag{3.3}$$

Ainda pela Figura 5, temos que quando o avião se encontra a uma distância l, na horizontal, da origem a sua altura é h, portanto temos que

$$P(l) = h. \tag{3.4}$$

Além disso, levando em conta que todo avião, após levantar voo, mantém a sua altura constante ate o momento de iniciar a descida, é natural supor que a trajetória seguida pelo avião ate o momento de iniciar a descida possa ser representada por uma função constante. Desse modo, a tangente a esta curva no ponto $(l, P(l))$ é paralela ao eixo x, portanto

$$P'(l) = 0. \tag{3.5}$$

Utilizando que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e que $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, temos que:

- Por *(3.2)* temos que

  $$P(0) = 0 \iff a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$

  logo

  $$d = 0. \tag{3.6}$$

- Por *(3.3)* temos que

  $$P'(0) = 0 \iff 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$$

  portanto

  $$c = 0. \tag{3.7}$$

Substituindo os valores de c e d, obtidos em *(3.6) e (3.7)*, nas expressões de $P(x)$ e $P'(x)$ obtemos

$$P(x) = ax^3 + bx^2 \text{ e } P'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

Note que as equações *(3.4) e (3.5)* nos levam ao sistema linear, de incógnitas a e

b, abaixo:

$$\begin{cases} al^3 + bl^2 = h \\ 3al^2 + 2bl = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\dfrac{-2}{l}$ obtemos um sistema equivalente ao primeiro, dado por:

$$\begin{cases} -2al^2 - 2bl = \dfrac{-2h}{l} \\ 3al^2 + 2bl = 0. \end{cases}$$

Substituindo agora a segunda equação desse sistema pela soma dessas duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} -2al^2 - 2bl = \dfrac{-2h}{l} \\ al^2 = \dfrac{-2h}{l} \end{cases}$$

daí, vemos que

$$a = \frac{-2h}{l^3} \text{ e } b = \frac{3h}{l^2}.$$

Desse modo, o polinômio procurado é

$$P(x) = \frac{-2h}{l^3}x^3 + \frac{3h}{l^2}x^2.$$

Neste ponto vale a pena ressaltar, para o leitor menos familiarizado com Matemática, que apesar dos valores dos coeficientes do polinômio P ainda apresentarem 'letras', ele está perfeitamente determinado, pois h e l são valores que, apesar de serem representados por 'letras', são dados iniciais do problema, e é por este motivo que estamos tratando estes elementos como números reais durante toda a resolução desse problema e também faremos isso nas outras partes deste problema.

Com isso, concluímos o *item 1.*

Item 2

Neste item, temos que usar as afirmações *(ii)* e *(iii)* para provar que

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leq k.$$

Por *(ii)* temos que a *velocidade horizontal* do avião deve ser constante e igual a v durante toda a descida e já vimos, em **2.2.1**, que a velocidade de um corpo pode ser vista como a derivada de sua função deslocamento, em relação ao tempo. Sendo assim, precisamos identificar essa função.

Perceba que estamos falando de *velocidade horizontal* e portanto a função procurada deve medir o deslocamento horizontal do avião. Note ainda que a função P mede a altura do avião (que é medida na vertical) e portanto não é da derivada de P que o problema esta falando.

Pode parecer, para o leitor leigo, que isso não faz sentido, pois temos uma única função neste problema, entretanto *(ii)* não esta se referindo a ela. Como isso é possível? É o seguinte, P é uma função que associa x a $P(x)$, onde x é a distância, na horizontal, entre o avião e o ponto onde o avião tocará o solo, ou seja, x pode ser visto como a função que mede o deslocamento horizontal do avião.

Entretanto, isso pode gerar outra indagação: 'Se x é um número real, como ele pode ser uma função?'. Bom, é verdade que x sempre nos é dado como o número real, pois $P : IR \to IR$. Mas por outro lado, lembre-se que tudo o que ocorre no nosso universo está atrelado ao tempo e, portanto, x não foge a essa regra. Sendo assim, podemos encarar x como sendo uma função que associa cada instante t à distância, na horizontal, do avião ao ponto de contato com o solo $x(t)$.

Considerando $x = x(t)$ e pelo que foi dito em *(ii)* temos que

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{3.8}$$

Agora temos que P também está em função do tempo, pois $P(x) = P(x(t))$, portanto, usando as regras de derivação, a regra da cadeia e *(3.8)* obtemos

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-6hv}{l^3}x^2 + \frac{6hv}{l^2}x.$$

Perceba que $\dfrac{dP}{dt}$ representa a *velocidade vertical* do avião e que *(iii)* nos diz que o valor absoluto (ou em módulo) da *aceleração vertical* do avião não pode exceder uma constante k. Como já foi visto em **2.2.1**, a aceleração de um corpo pode ser vista como a derivada de sua função velocidade. Desse modo, concluímos que a aceleração vertical do avião é dada por

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{-12hv^2}{l^3}x + \frac{6hv^2}{l^2}.$$

Temos ainda, por *(iii)*, que

$$\left|\frac{d^2P}{dt^2}\right| \leq k \iff \left|\frac{-12hv^2}{l^3}x + \frac{6hv^2}{l^2}\right| \leq k.$$

Note que a função que está no módulo é uma função afim e o coeficiente do x é negativo, uma vez que l, h e v^2 são positivos, sendo assim, esta função é decrescente. Perceba que em nosso problema, só estamos interessados em analisar a descida do avião, desse modo, só é interessante analisar x quando os seus valores estão no intervalo $[0, l]$. Sendo assim, o maior valor da expressão no módulo ocorre quando $x = 0$. Para este valor de x, obtemos

$$\left|\frac{6hv^2}{l^2}\right| \leq k, \tag{3.9}$$

com isso, o *item 2* está concluído.

Item 3

Com tudo o que foi feito nos *itens 1 e 2*, agora temos tudo o que é necessário para responder o questionamento principal desse problema: *Onde um piloto desse iniciar a descida?*

Temos, nos dados iniciais do *item 3*, que a aceleração vertical do avião não deve exceder a constante $k = 1.385km/h^2$. Temos ainda que a altitude considerada do voo é de 10.700 *metros*, ou seja, $h = 10.700m$ e que a velocidade do avião é $485km/h$, ou seja, $v = 485km/h$.

Note que a altitude não está na mesma unidade de medida que a velocidade e que a constante k, por esse motivo vamos converter o valor de h para *quilômetros*. Pelo sistema internacional de medidas, temos que: $1km = 1.000m$. Daí temos que a altura h em quilômetros é:

$$h = \frac{10.700}{1000} \iff h = 10,7km.$$

Utilizando estes valores em *(3.9)*, temos que

$$\left|\frac{6 \cdot (10,7) \cdot (485)^2}{l^2}\right| \leq 1385.$$

Como todos os números do lado esquerdo da desigualdade são todos positivos podemos remover o módulo, assim temos

$$l^2 \geq 10.903,5704 \iff l \geq \sqrt{10.903,5704} \text{ ou } l \leq -\sqrt{10.903,5704}.$$

Note que l é a medida de uma distância, e portanto a raiz negativa não nos serve, desse modo concluímos que

$$l \geq 104,42km.$$

Perceba que esse resultado nos diz que a descida vai ocorrer de maneira segura, ou seja respeitando-se o fato de que a aceleração vertical do avião não deve superar $1.385km/h^2$, se o valor de l for superior, ou igual, a $104,42km$.

Portanto, em um voo a 10.700 *metros* de altitude e com uma velocidade de $485km/h$ o piloto deve iniciar a descida a uma distância de, no mínimo, $104,42$ quilômetros do local da aterrissagem, para que o pouso aconteça dentro das normas de seguranças estabelecidas pela empresa.

Com isto, a solução do *item 3* está concluída.

Item 4

Neste item, utilizaremos todas as informações e dados que já obtivemos ate agora, juntamente com o software matemático *Geogebra*, para criar o gráfico da função P que irá nos mostrar a trajetória que o avião deve seguir para que o pouso seja realizado de uma maneira segura.

Lembre-se que a nossa função P é dada por

$$P(x) = \frac{-2h}{l^3}x^3 + \frac{3h}{l^2}x^2.$$

Portanto, poderemos criar este gráfico se estabelecermos os valores para h e l. Pelos dados iniciais do problema temos que $h = 10,7km$. Pelo que vimos no *item 3*, a distância que o avião deve estar do local da aterrissagem, para essa altitude, deve ser maior do que $104,42km$. Para efeito de cálculo, iremos considerar então que $l = 104,42km$.

Substituindo estes valores de h e l nos coeficientes do polinômio P, exibidos logo acima, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{-2h}{l^3} = -0,0000187958818785 \\ \\ \dfrac{3h}{l^2} = 0,002943999. \end{cases}$$

Sendo assim, temos então que

$$P(x) = (-0,0000187958818785)x^3 + (0,002943999)x^2.$$

Para terminar este problema, utilizaremos o software *Geogrebra* para construir o gráfico do polinômio P. Perceba como o gráfico de P, que aparece na figura abaixo, cumpre todas as condições iniciais que foram estabelecidas, no enunciado, para que a aterrissagem seja realizada de uma forma completamente segura.

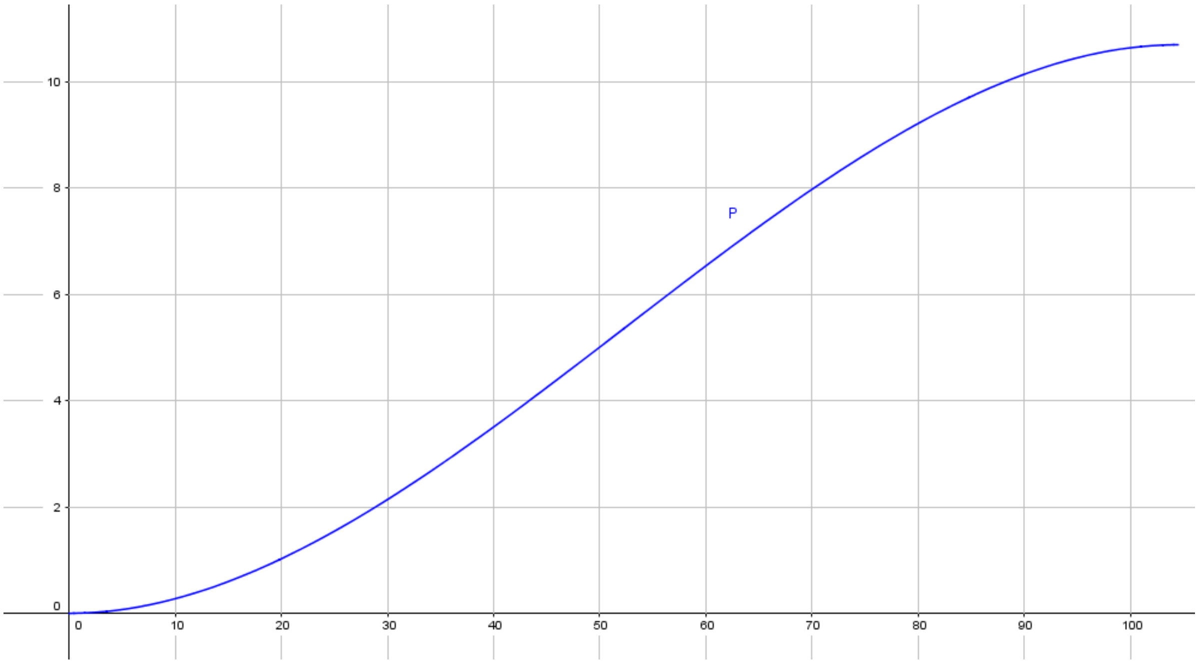

Figura 6: Trajetória do pouso

◇

3.2 Construindo uma montanha-russa melhor

Suponha que você precise projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação de $0,8$ e a descida com inclinação $-1,6$. Você decide ligar esses dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, onde x e $f(x)$ são medidos em metros. Para que o percurso seja *suave*, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição P e Q, conforme a figura abaixo:

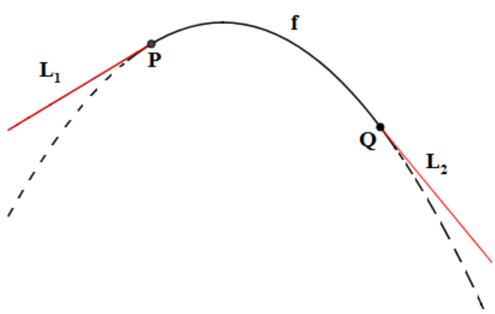

Figura 7: Esboço da montanha-russa

Para simplificar as equações, você decide colocar a origem no ponto P. Nestas condições:

Item 1

(a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja $30m$. Escreva as equações, em a, b e c, que garantam que o percurso seja *suave* nos pontos de transição e resolva o sistema obtido para encontrar uma fórmula para $f(x)$. Obtenha também fórmulas para $L_1(x)$ e $L_2(x)$.
(b) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são *suaves*.
(c) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.

Item 2 A solução do *Item 1* pode parecer *suave*, mas poderia não ocasionar a sensação de ser *suave*, pois a função definida por partes, que consiste em:

$$\begin{cases} L_1(x), \text{ para } x < 0 \\ f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq 30 \\ L_2(x), \text{ para } 30 < x \end{cases}$$

não tem a segunda derivada continua. Sendo assim, você decide melhorar seu projeto, usando, para isto, uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leq x \leq 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \text{ para } 0 \leq x < 3$$

$$g_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, \text{ para } 27 < x \leq 30$$

(a) Escreva um sistema de equações, em 11 incógnitas, que garantam que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.
(b) Resolva as equações da parte (a), ou use um sistema de computação algébrica, para encontrar fórmulas para $q(x)$,$g_1(x)$ e $g_2(x)$.
(c) Trace L_1, g_1, q, g_2 e L_2, e compare com o gráfico obtido no *Item 1 (c).*

Solução:

Item 1 (a)

Neste item, queremos estabelecer quais condições as nossas funções devem atender para que as transições entre a reta L_1 e a parábola f, assim como entre f e a reta L_2, sejam sempre *suaves*. Perceba inicialmente que L_1 e L_2 são semi-retas e, portanto, suas equações são da forma

$$L_1(x) = m_1x + n_1, \text{ para } x < 0;$$

$$L_2(x) = m_2x + n_2, \text{ para } x > 30.$$

Note que os coeficientes m_1 e m_2, representam, respectivamente, as inclinações das retas L_1 e L_2. Temos ainda, do próprio enunciado, que f é uma função quadrática dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

As funções L_1 e f estão conectadas pelo ponto P e, portanto, este ponto pertence tanto ao gráfico de L_1 quanto ao de f. Já que estamos considerando P como sendo a origem, devemos ter necessariamente que

$$L(0) = f(0) = 0.$$

Portanto,

$$n_1 = c = 0. \tag{3.10}$$

De modo análogo, f e L_2 devem estar conectadas no ponto Q. Perceba que a única informação que temos de Q é que ele dista $30m$ de P, na horizontal, e disto concluímos que a abcissa do ponto Q é 30. Desse modo, devemos ter

$$L_2(30) = f(30).$$

Foi dito ainda, no enunciado do problema, que uma transição é considerada *suave* se não houverem mudanças bruscas de direção quando passarmos de um trecho da curva para outro. Desse modo, para que as transições sejam feitas sem mudanças de direção, devemos impor que f e L_1 possuam mesma direção em P, e que f e L_2 possuam mesma direção em Q.

Já vimos, em **2.2.1**, que a direção de uma curva f no ponto $(x, f(x))$ é a mesma direção da reta que tangencia a curva f nesse ponto. Vimos também que a direção de uma reta é dada pela sua inclinação e, portanto, concluímos que a direção de f no ponto $(x, f(x))$ é dada por $f'(x)$, pois este número representa a inclinação da reta tangente a f no ponto $(x, f(x))$.

Desse modo, para que as direções de L_1 e f sejam as mesmas em $P(0, 0)$, devemos ter que

$$f'(0) = L_1'(0).$$

Temos, do enunciado, que a inclinação de L_1 é de $0,8$. Como $L_1'(x) = m_1$ é também a inclinação de L_1, concluímos daí que $m_1 = 0,8$. Temos ainda que $f'(x) = 2ax+b$

e, portanto, $f'(0) = b$. Sendo assim, concluímos que

$$f'(0) = b = 0,8. \tag{3.11}$$

Para que as direções de L_2 e f sejam as mesmas em Q, cuja abscissa é $x = 0$ e que denotaremos por $Q(30, f(30))$, devemos ter:

$$f'(30) = L'(30).$$

Outro dado do problema é que a inclinação de L_2 é de $-1,6$. Como $L_2'(x) = m_2$ é também a inclinação de L_2, concluímos daí que $m_2 = -1,6$. Utilizando o valor de $b = 0,8$ temos que

$$f'(30) = 60a + 0,8.$$

Segue então que

$$a = -0,04. \tag{3.12}$$

De *(3.10), (3.11) e (3.12)* concluímos que a função f é dada por

$$f(x) = -0,04x^2 + 0,8x, \text{ para } 0 \leq x \leq 30.$$

Perceba ainda que como a inclinação de L_1 é $0,8$ e por *(3.10)* temos que $n_1 = 0$, então

$$L_1(x) = 0,8x, \text{ para } x < 0.$$

Sabemos também que a reta L_2 possui inclinação $-1,6$ e que ela passa pelo ponto $Q(30, f(30))$. Desse modo, utilizando o fato que $f(30) = -12$, a equação de L_2 é dada por

$$L_2(x) = -1,6x + 36, \text{ para } 30 < x.$$

Isto concluí o *item 1 (a)*.

Item 1 (b)

Neste item, devemos utilizar um software matemático para gerar o gráfico da função obtida no *item 1 (a)* e verificar se ela é realmente *suave* nos pontos de transição. Perceba que a nossa função, que nos dará a forma da nossa montanha-russa, é dada em três partes, são elas:

$$\begin{cases} L_1(x) = 0,8x, \text{ para } x < 0 \\ f(x) = -0,04x^2 + 0,8x, \text{ para } 0 \leq x \leq 30 \\ L_2(x) = -1,6x + 36, \text{ para } 30 < x \end{cases}$$

Utilizando o software matemático *Geogebra* para traçar o gráfico dessa função, definida em três partes, obtemos:

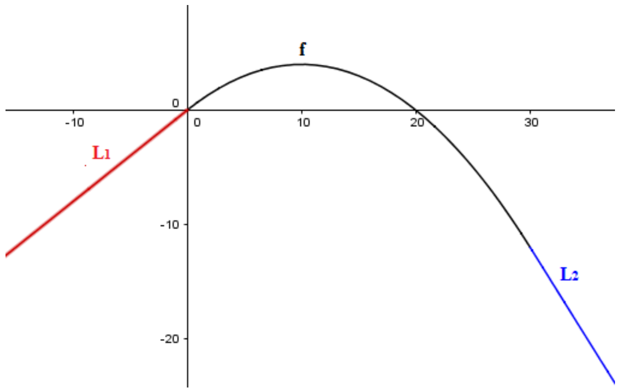

Figura 8: Formato da montanha-russa

Perceba que a parte do gráfico que aparece com a cor vermelha representa $L_1(x)$, a parte do gráfico com a cor preta representa f e a parte em azul representa $L_2(x)$.

Pode-se perceber que o gráfico não possui mudanças bruscas de direção e, portanto, este formato de curva parece ser bem razoável para a primeira subida e descida da nossa montanha-russa.

Assim, concluímos o *item 1 (b)*.

Item 1 (c)

Neste item, devemos calcular a distância vertical entre os pontos $P(0,0)$ e $Q(30,-12)$. Sabemos que a distância vertical entre estes pontos é a diferença entre suas ordenadas e, portanto, o seu valor é $12m$.

Deste modo, o *item 1 (c)* está concluído.

Item 2 (a)

Neste item, refaremos todo o processo do *item 1 (a)* para tornar a nossa montanha-russa bem melhor. Dessa vez, as transições serão ainda mais *suaves* pois usaremos 5 funções, ao invés de 3, para obter a curva que nos mostrará o formato da nossa nova montanha-russa.

Note que agora teremos o seguinte esquema: L_1 deverá coincidir com g_1 na origem; g_1 deverá coincidir com q no ponto de abscissa 3; q deverá coincidir com g_2 no ponto de abscissa 27 e g_2 deverá coincidir com L_2 no ponto de abscissa 30.

Além disso, o problema também exige que estas funções possuam derivadas primeiras e segundas que coincidam nos pontos de transição. Portanto, devemos ter que:

- Para que L_1 coincida com g_1 na origem e suas duas primeiras derivadas coincidam com as derivadas de g_1 na origem, devemos ter

$$L_1(0) = g_1(0);$$

$$L_1'(0) = g_1'(0);$$

$$L_1''(0) = g_1''(0).$$

- Para que g_1 coincida com q no ponto de abscissa $x = 3$ e suas duas primeiras derivadas coincidam com as derivadas de q nesse mesmo ponto, devemos ter

$$g_1(3) = q(3);$$

$$g_1'(3) = q'(3);$$

$$g_1''(3) = q''(3).$$

- Para que q coincida com g_2 no ponto de abscissa $x = 27$ e suas duas primeiras derivadas coincidam com as derivadas de g_2 nesse mesmo ponto, devemos ter

$$q(27) = g_2(27);$$

$$q'(27) = g_2'(27);$$

$$q''(27) = g_2''(27).$$

- Para que g_2 coincida com L_2 no ponto de abscissa $x = 30$ e suas duas primeiras derivadas coincidam com as derivadas de g_2 nesse mesmo ponto, devemos ter

$$g_2(30) = L_2(30);$$

$$g_2'(30) = L_2'(30);$$

$$g_2''(30) = L_2''(30).$$

Perceba que cada uma das igualdades acima nos traz uma condição que deve ser cumprida, pelas funções L_1, g_1, q, g_2 e L_2, para que tenhamos um formato para a montanha-russa melhor do que aquele que encontrado foi no *item 1 (b)*.

Antes de escrever o sistema gerado por estas equações, lembre-se que já sabemos, do *item 1 (a)*, que: $L_1(x) = 0,8x$ e $L_2(x) = -1,6x + 36$.

Escrevendo as equações que obtemos de cada uma das igualdades acima, na mesma ordem em que elas aparecem no texto, encontramos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ c_1 = 0,8 \\ b_1 = 0 \\ 9a + 3b + c = 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 \\ 6a + b = 27a_1 + 6b_1 + c_1 \\ 2a = 18a_1 + b_1 \\ 729a + 27b + c = 19683a_2 + 729b_2 + 27c_2 + d_2 \\ 54a + b = 2187a_2 + 54b_2 + c_2 \\ 2a = 162a_2 + 2b_2 \\ 27000a_2 + 900b_2 + 30c_2 + d_2 = -12 \\ 2700a_2 + 60b_2 + c_2 = -1,6 \\ 180a_2 + 2b_2 = 0 \end{cases}$$

Com isso, concluímos o *item 2 (a)*.

Item 2 (b)

Neste item iremos obter os valores de: a, b, c, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2 e d_2 resolvendo o sistema obtido no *item 2 (a)*. Feito isso, teremos encontrado as funções g_1, q e g_2 e, portanto, seremos capazes de encontrar uma melhor forma para a nossa montanha-russa.

Antes de resolver o sistema, iremos diminuir o seu número de equações substituindo os valores das incógnitas b_1, c_1 e d_1, que são dados explicitamente nas três primeiras equações do sistema, nas demais equações. Fazendo isso, e as devidas simplificações, obtemos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 27a_1 + 2,4 \\ 6a + b = 27a_1 + 0,8 \\ a = 9a_1 \\ 729a + 27b + c = 19683a_2 + 729b_2 + 27c_2 + d_2 \\ 54a + b = 2187a_2 + 54b_2 + c_2 \\ a = 81a_2 + b_2 \\ 27000a_2 + 900b_2 + 30c_2 + d_2 = -12 \\ 2700a_2 + 60b_2 + c_2 = -1,6 \\ 90a_2 + b_2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, usaremos o método da substituição. Perceba que na terceira linha desse sistema já temos a incógnita a escrita em função de a_1, sendo assim, escreveremos as demais incógnitas também em função de a_1. Fazendo isso, encontramos as seguintes equações:

$$\begin{cases} c = 27a_1 \\ b = -27a_1 + 0,8 \\ a = 9a_1 \\ d_2 = 19710a_1 \\ c_2 = -2214a_1 + 0.8 \\ a_2 = -a_1 \\ d_2 = 12420a_1 - 36 \\ c_2 = -2700a_1 - 1,6 \\ b_2 = -90a_1 \end{cases}$$

Note que nas linhas 4 e 7 encontramos expressões diferentes para a incógnita d_2 e como d_2 é um número real, estas duas expressões devem ter o mesmo valor. Igualando estas duas equações obtemos que

$$19710a_1 = 12420a_1 - 36 \iff 7290a_1 = -36$$

Portanto,

$$a_1 = -0,00493827.$$

Salientamos que se tivéssemos utilizado os dois valores de c_2, presentes nas linhas 5 e 8, obteríamos o mesmo valor para a_1.

Substituindo o valor encontrado de a_1 nas demais equações obtemos que:

$$\begin{cases} a = -0,04444444 \\ b = 0,93333333 \\ c = -0,13333333 \\ a_2 = 0,00493827 \\ b_2 = -0,44444444 \\ c_2 = 11,73333333 \\ d_2 = -97,33333333 \end{cases}$$

Substituindo estes valores nas expressões de g_1, q e g_2, juntamente com os valores que já havíamos obtido para as incógnitas b_1, c_1 e d_1, conseguimos determinas estas funções. São elas:

$$g_1(x) = -0,00493827x^3 + 0,8x$$

$$q(x) = -0,04444444x^2 + 0,93333333x - 0,13333333$$

$$g_2(x) = 0,00493827x^3 - 0,44444444x^2 + 11,73333333x - 97,33333333.$$

Sendo assim, a solução do *item 2 (b)* está concluída.

Item 2 (c)

Neste item, devemos utilizar, novamente, um software matemático para gerar o gráfico da função obtida no *item 2 (b)* e verificar se ela é realmente mais *suave* nos pontos de transição que a curva obtida no *item 1 (b)*. Perceba que agora a nossa função é dada em cinco partes, são elas:

$$\begin{cases} L_1(x) = 0,8x \quad \text{para } x < 0 \\ g_1(x) = -0,00493827x^3 + 0,8x \quad \text{para } 0 \leq x < 3 \\ q(x) = -0,04444444x^2 + 0,93333333x - 0,13333333 \quad \text{para } 3 \leq x \leq 27 \\ g_2(x) = 0,00493827x^3 - 0,4444444x^2 + 11,7333333x - 97,3333333 \quad \text{para } 27 < x \leq 30 \\ L_2(x) = -1,6x + 36 \quad \text{para } 30 < x \end{cases}$$

Utilizando o *Geogebra* para traçar o gráfico da função acima, obtemos:

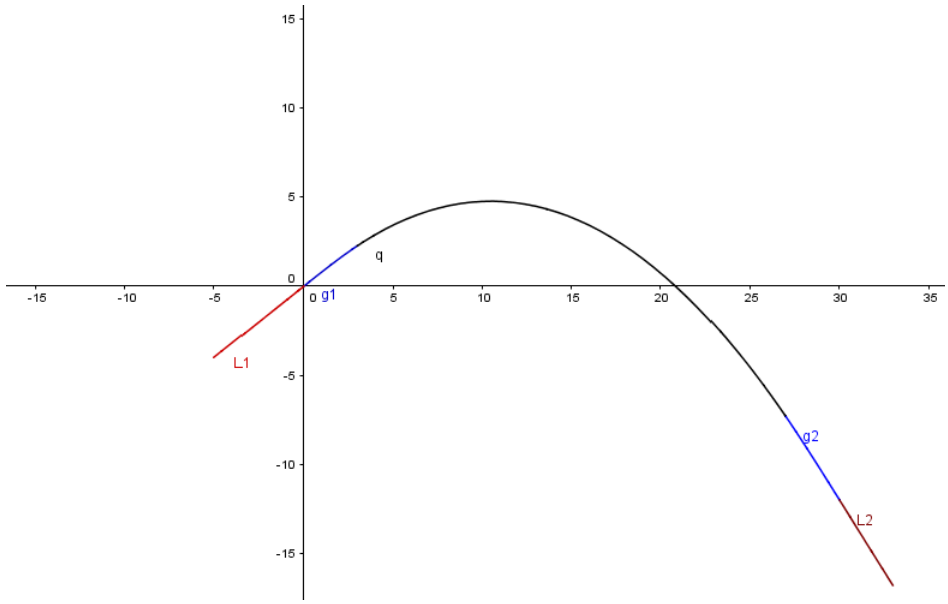

Figura 9: Formato da montanha-russa melhorada

Note que as transições entre as retas e a parábola estão mais *suaves*, visto que as funções do 3º grau, apesar de aparentarem ser completamente retas, são levemente curvadas e isso faz com que as transições aconteçam de maneira mais natural.

Com isso, concluímos este problema! ◇

3.3 Onde sentar-se no cinema?

Uma sala de cinema tem uma tela que está posicionada a $3m$ acima do chão e tem $10m$ de altura. A primeira fila de assentos é colocada a $3m$ da tela e as fileiras são posicionadas com $1m$ de distância umas das outras. O chão da área dos assentos é inclinado de $\alpha = 20°$ acima da horizontal e a distância ao longo da linha inclinada até o seu assento é x. A sala tem 21 fileiras de assentos, então $0 \leq x \leq 20$. Suponha que você decida que o melhor lugar para se sentar é a fileira onde o ângulo θ subtendido pela tela em seus olhos é um ângulo máximo. Suponhamos que os seus olhos estejam a $1,2m$ acima do solo, conforme é mostrado na figura abaixo:

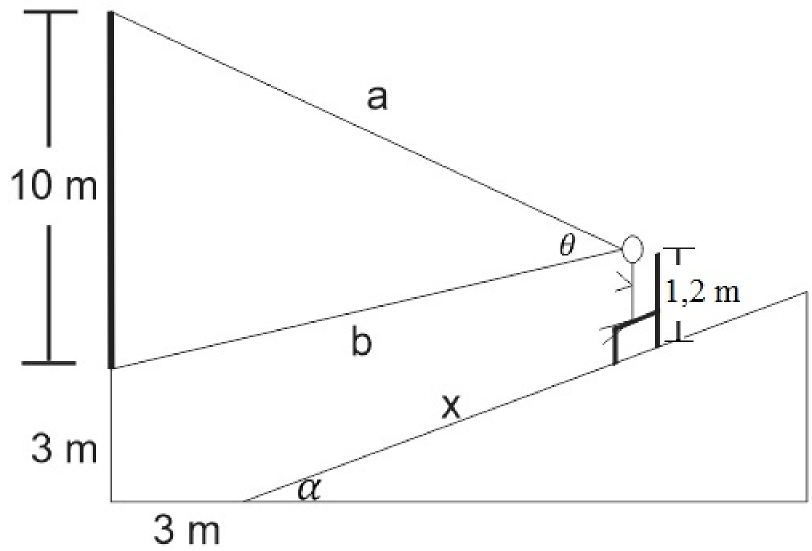

Figura 10: Sala de cinema

Item 1. Mostre que:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}\right),$$

onde:

$$a^2 = (3 + xcos\alpha)^2 + (11,8 - xsen\alpha)^2$$

e

$$b^2 = (3 + xcos\alpha)^2 + (xsen\alpha - 1,8)^2.$$

Item 2. Use o gráfico de θ como uma função de x para estimar o valor de x que maximiza θ. Em qual fileira você deveria sentar? Qual o ângulo de visão θ nessa fileira?

Item 3. Use seu sistema de computação algébrica para derivar θ e encontrar um valor numérico para a raiz da equação $\dfrac{d\theta}{dx} = 0$. Esse resultado confirma a sua resposta do *item 2*?

Solução:

Item 1

Neste item queremos encontrar uma expressão para o valor do ângulo θ em função dos valores de a e b. Feito isto, vamos encontrar expressões para a e b em função dos valores de x e α.

Considere o esquema abaixo, tirado da *Figura 10*:

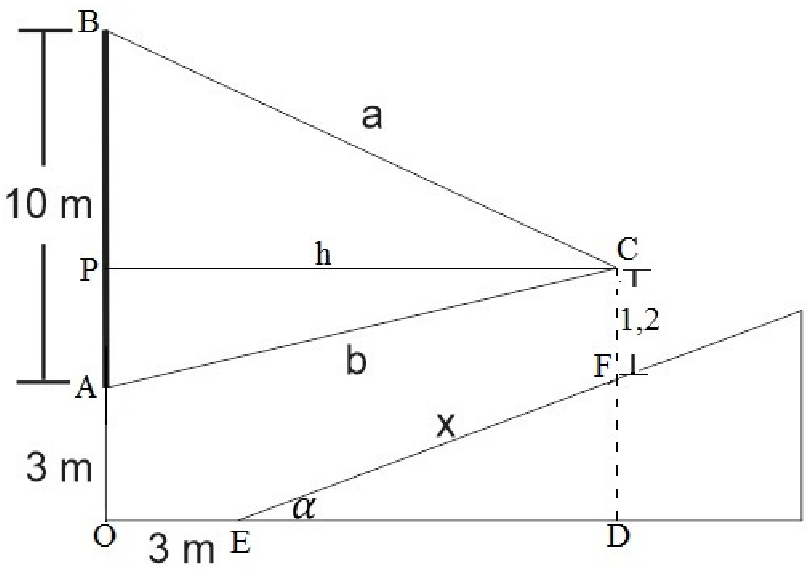

Figura 11: Esquema do problema

Estamos considerando que $\overline{CP} = h$ é uma altura do triângulo ABC e que $\overline{CD}$ é perpendicular à reta que passa pelo segmento $\overline{OD}$. Temos ainda que

$$\theta = A\hat{C}B = A\hat{C}P + P\hat{C}B.$$

Utilizando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC encontramos

$$100 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta \iff cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}.$$

Sendo assim, concluímos que

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}\right).$$

Note que os ângulos $C\hat{P}O$, $P\hat{O}D$ e $O\hat{D}C$ são retos e, portanto, o quadrilátero $CPDO$ é um retângulo. Assim temos:

$$\overline{PC} \equiv \overline{OD} \text{ e } \overline{CD} \equiv \overline{OP}.$$

Utilizando a trigonometria no triângulo retângulo DEF, obtemos

$$\overline{DE} = xcos\alpha$$

e

$$\overline{DF} = xsen\alpha.$$

Desse modo, vemos que

$$\overline{CD} \equiv \overline{OP} = xsen\alpha + 1,2$$

e

$$\overline{OD} \equiv \overline{CP} = h = xcos\alpha + 3.$$

Logo

$$\overline{PB} = 13 - \overline{OP} = 13 - xsen\alpha - 1,2 \iff \overline{PB} = 11,8 - xsen\alpha$$

e

$$\overline{PA} = \overline{CD} - 3 = xsen\alpha + 1,2 - 3 \iff \overline{PA} = xsen\alpha - 1,8$$

Como o triângulo CPB é retângulo em P, temos que a sua hipotenusa é $\overline{BC}$, assim, pelo *Teorema de Pitágoras*, temos que

$$BC^2 = PC^2 + PB^2.$$

Portanto,

$$a^2 = (xcos\alpha + 3)^2 + (11,8 - xsen\alpha)^2.$$

Temos ainda que o triângulo CPA é retângulo de hipotenusa $\overline{AC}$, logo

$$AC^2 = PC^2 + PA^2.$$

Assim, chegamos na seguinte igualdade

$$b^2 = (xcos\alpha + 3)^2 + (xsen\alpha - 1,8)^2,$$

e então concluímos o *item 1*.

Item 2

Neste item, obteremos uma expressão para θ em função de x e usaremos o gráfico desta função para obter o valor de x que maximiza o valor de θ.

Para encontrar tal expressão, que determine o valor de θ em função do valor de x, iremos substituir os valores de a e b, na expressão que obtivemos para θ, por aqueles encontrados no final do *item 1* . Além disso, também iremos usar o fato que $\alpha = 20°$.

Usando uma calculadora científica, ou uma tabela com senos e cossenos, vemos que: $sen20° = 0,3420201433$ e $cos20° = 0,9396926208$. Substituindo estes valores nas expressões de a e de b, e depois substituindo os valores encontrados para a e b, após essa substituição, na expressão de θ, juntamente com as devidas simplificações, obtemos que

$$\theta(x) = arccos\left(\frac{2x^2 + 1,97336355184x + 60,48}{2\sqrt{x^4 + 1,97336x^3 + 149,756x^2 + 623,49x + 1814,46}}\right).$$

Utilizando o *Geogebra* para fazer o gráfico dessa função para $0 \leq x \leq 20$ obtemos:

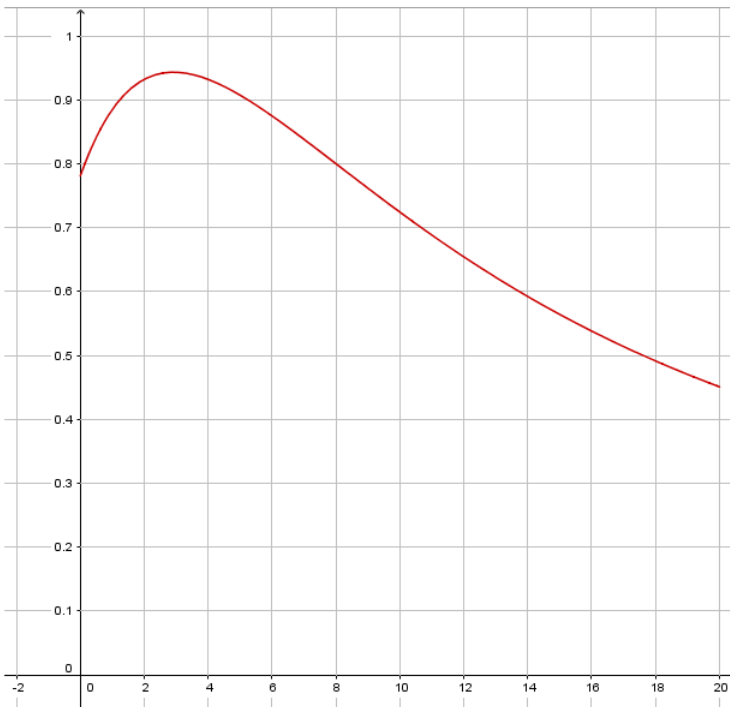

Figura 12: Gráfico da função θ

Perceba que, pelo gráfico acima, podemos ver que o valor máximo de θ ocorre quando $x \cong 3$. Desse modo, a fileira que proporciona a melhor visão é a 4ª fileira, pois como o x começa em 0, o seu valor é sempre uma unidade menor do que a fileira que ele representa. O ângulo de visão nessa fileira é $\theta(3) \cong 54°$.

Sendo assim, a fileira que maximiza o ângulo de visão nesse cinema é a 4ª fileira e o ângulo de visão de quem senta-se nesta fileira é de aproximadamente 54°.

Feito isto, concluímos o *item 2*.

Item 3

Neste item, iremos verificar se a nossa estimativa, feita no *item 2*, está realmente correta. Para isso, usaremos o software *Geogebra* para encontrar as raízes de $\theta'(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 20$.

Utilizando o *Geogebra* foi possível obter-se uma expressão para $\theta'(x)$, porém percebeu-se que ela era muito complexa e acabaria deixando o texto demasiadamente complicado, e isso não é o objetivo deste trabalho. Desse modo, optou-se por não se colocar tal expressão na resolução deste problema.

Resolvendo-se a equação $\theta'(x) = 0$, para se encontrar o ponto de máximo dessa função, obtivemos, através do *Geogreba*, que a única raiz desta expressão para $0 \leq x \leq 20$ é $x = 2,913385903$. Nota-se ainda que a nossa estimativa feita no *item 2* foi bastante precisa, visto que como não existe nenhuma fileira de cadeiras para o valor de x encontrado, teríamos que utilizar como solução o valor de x que mais se aproxima de $2,913385903$, ou seja, $x = 3$.

Com isso, concluímos este problema!

◇

3.4 A forma de uma lata

Neste projeto examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretaremos esta situação como se o volume V de uma lata cilíndrica fosse dado e precisássemos achar a altura h e o raio da base r que minimize o custo do metal para fazer a lata.

Perceba que se desprezássemos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema seria apenas minimizar a área da superfície da lata, que tem forma cilíndrica. Isso foi feito no *exemplo 4* e descobrimos que, neste caso, devemos ter $h = 2r$, ou seja, a altura deve ter a mesma medida do diâmetro da base. Porém, se você analisar algumas latas num supermercado, com uma régua, descobrirá que a altura da lata é, geralmente, maior que o diâmetro da base, e a razão $\dfrac{h}{r}$ varia de 2 até cerca de $3,8$.

Iremos agora tentar explicar este fenômeno.

Item 1. O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. O lado cilíndrico é feito dobrando-se um retângulo, sendo que esse retângulo é cortado da folha de metal com uma pequena, ou mesmo nenhuma, perda de material. Se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (conforme a figura abaixo), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, mas que tem um pequeno, ou mesmo nenhum, valor para quem produz as latas. Se for este o caso, mostre que a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \cong 2,55.$$

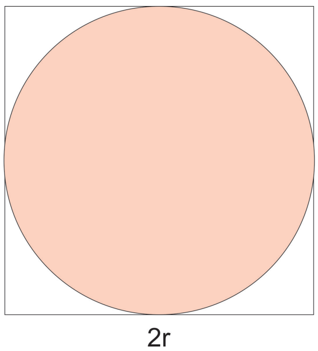

Figura 13: Base cortada de um quadrado de lato $2r$

Item 2. Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (veja a figura abaixo). Mostre que se for adotada essa estratégia, então a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \cong 2,21.$$

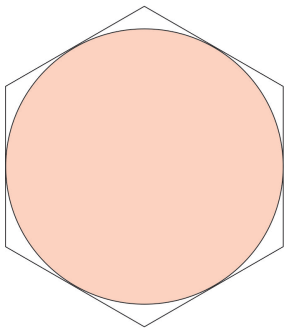

Figura 14: Base cortada de um hexágono regular

Item 3. Os valores de $\dfrac{h}{r}$ que encontramos nos *itens 1 e 2* estão muito próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo. Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em ligar os lados às bordas para formar as latas. Se cortássemos os discos dos hexágonos, como no *item 2*, então o custo total seria proporcional a

$$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h),$$

onde k é o inverso comprimento que pode ser ligado ao custo por uma unidade de área de metal. Mostre que essa expressão é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - \dfrac{h}{r}}{\dfrac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}}.$$

Item 4. Desenhe $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$ como função de $x = \dfrac{h}{r}$ e use seu gráfico para argumentar que quando uma lata é grande ou a junção é barata, deveríamos fazer $\dfrac{h}{r}$ aproximadamente 2,21 (como no *item 2*). Mas quando a lata é pequena ou a junção é cara, $\dfrac{h}{r}$ deve ser substancialmente maior.

Item 5. Nossa análise mostra que as latas grandes devem ser quase quadradas, mas as latas pequenas devem ser altas e estreitas. Examine as formas relativas das latas em um supermercado. Nossa conclusão é, de forma geral, verdadeira na prática? Há exceções? Você pode apontar as razões de latas pequenas não serem sempre altas e estreitas?

Solução:

Item 1

Neste item, iremos encontrar qual a relação entre a altura h e o raio da base r, de uma lata cilíndrica, que minimiza a quantidade de metal usada para fazer a lata quando cortamos os círculos, que formarão o topo e o fundo da lata, de um quadrado de lado $2r$.

Perceba que para cada círculo precisamos de um quadrado de lado $2r$. Sendo assim, para fazer o topo e a base da uma lata, gastaremos dois quadrados de lado $2r$ e, portanto, a área de metal usada será de $8r^2$. Note ainda que como cada um dos círculos tem raio r, a área total deles é de $2\pi r^2$. Podemos ver que este número é menor que $8r^2$, entretanto, como estamos cortando os círculos de quadrados, acabamos tendo uma certa perda de material.

Para fazer a lateral da lata, usamos um retângulo e o dobramos. Perceba que o retângulo deve ter altura h e o comprimento da sua base deve ser o mesmo comprimento das circunferências que formarão o topo e a base, ou seja, $2\pi r$. Desse modo, a área do material que gastaremos será a área desse retângulo, que é $2\pi rh$.

Denotemos por A a função que nos dá a área da superfície dessa lata. Pelo que vimos acima, esta função depende de duas variáveis h e r. Note ainda que $A : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ e } y > 0\}$, é tal que

$$A(h, r) = 2\pi rh + 8r^2.$$

Entretanto podemos fazer esta função depender de apenas uma variável, pois conhecemos uma relação entre r e h. Note que estamos supondo que conhecemos o volume V dessa lata. Desse modo, como a nossa lata é cilíndrica, temos que

$$V = \pi r^2 h.$$

Daí, podemos escrever

$$h = \frac{V}{\pi r^2}, \tag{3.13}$$

onde V é uma constante positiva.

Fazendo a substituição do valor de h na expressão da função A, temos que

$$A(r) = \frac{2V}{r} + 8r^2.$$

Conforme vimos em **2.2.3**, para encontrar os possíveis candidatos a ponto de mínimo dessa função devemos encontrar os seus pontos críticos. Note que

$$A'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 16r. \tag{3.14}$$

Fazendo $A'(r) = 0$ temos

$$\frac{-2V}{r^2} + 16r = 0 \iff \frac{-2V + 16r^3}{r^2} = 0 \iff -2V + 16r^3 = 0$$

portanto

$$r^3 = \frac{V}{8} \iff r = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}.$$

Resta verificar se este é um ponto de mínimo da função A. Note inicialmente que $A'(r)$ é contínua, pois seu domínio é $\mathbb{R}^*_+$, e desse modo podemos usar o teste da segunda derivada, visto no **Teorema 2.2.9**. Derivando (3.14) obtemos

$$A''(r) = \frac{4V}{r^3} + 16.$$

Logo

$$A\left(\frac{\sqrt[3]{V}}{2}\right) = 48 > 0.$$

Segue então que $r = \dfrac{\sqrt[3]{V}}{2}$ é um ponto de mínimo dessa função. Substituindo este valor de r na equação *(3.12)* obtemos que o valor de h é

$$h = \frac{4\sqrt[3]{V}}{\pi}.$$

Portanto

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt[3]{V}}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{V}}.$$

Sendo assim

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \cong 2,55.$$

Com isso, finalizamos o *item 1*.

Item 2

Neste item, utilizaremos a mesma ideia usada para solucionar o *item 1*, ou seja, para encontrar qual a razão entre os valores de h e r que minimizam a quantidade de metal usada na produção da lata. Entretanto, os círculos que usamos para o topo e para a base da lata serão cortados, agora, de um hexágono regular, conforme a Figura 14.

A área da superfície de metal que gastaremos agora para fazer os dois círculos é a área de dois hexágonos regulares cuja apótema mede r, ou seja, $4\sqrt{3}r^2$.

Desse modo, temos que

$$A(r,h) = 2\pi rh + 4\sqrt{3}r^2.$$

Fazendo, novamente $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ obtemos

$$A(r) = \frac{2V}{r} + 4\sqrt{3}r^2.$$

Portanto

$$A'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 8\sqrt{3}r.$$

Assim

$$\frac{-2V}{r^2} + 8\sqrt{3}r = 0 \iff \frac{-2V + 8\sqrt{3}r^3}{r^2} = 0 \iff -2V + 8\sqrt{3}r^3 = 0.$$

Segue que

$$r^3 = \frac{2V}{8\sqrt{3}} \iff r = \frac{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{12}}.$$

De modo análogo ao *item 1*, temos que $A'(r)$ é continua e, portanto, podemos usar o teste da segunda derivada. Note que

$$A''(r) = \frac{4V}{r^3} + 8\sqrt{3}.$$

Logo

$$A''\left(\frac{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{12}}\right) = 24\sqrt{3} > 0.$$

Portanto, pelo teste da segunda derivada, $r = \dfrac{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{12}}$ é um ponto de mínimo da função A. Temos ainda, por (3.13) que

$$h = \frac{2\sqrt[3]{V}\sqrt[3]{6}}{\pi}.$$

Logo

$$\frac{h}{r} = \frac{2\sqrt[3]{V}\sqrt[3]{6}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[6]{3}}.$$

Sendo assim, concluímos que

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \cong 2,21.$$

Com isto, a solução do *item 2* está completa.

Item 3

Neste item, vamos verificar sob quais condições teremos um custo mínimo para a produção da lata. Note que neste caso, além do custo com o metal que será usado na lata, estamos levando em conta também o custo com a manufatura da lata.

O enunciado nos diz que o custo total da produção da lata é proporcional a $4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$. Perceba que isto faz todo o sentido, visto que o termo $4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh$ é a área total de metal que usaremos para produzir a lata e o termo $4\pi r + h$ é o comprimento total que devemos ligar para dar forma a lata.

Considere a função $C(r, h)$ como sendo a função que dá o custo da lata em função do raio da base e da altura dessa lata. Pelo que foi dito acima, esta função é tal que

$$C(r,h) = S(4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)),$$

onde S é uma constante positiva que dá o custo por unidade de área do metal usado na lata e tal que $S \cdot k$ é a constante que relaciona o custo da junção do metal por unidade de comprimento com o custo por unidade de área do metal.

De modo análogo ao que fizemos nos itens anteriores, iremos transformar C numa função de uma única variável fazendo $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Obtemos

$$C(r) = S\left(4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r} + k\left(4\pi r + \frac{V}{\pi r^2}\right)\right).$$

Para encontrar os possíveis valores mínimos dessa função precisamos dos seus pontos críticos. Derivando a função C em relação a r temos

$$C'(r) = S\left(8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2} + k\left(4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}\right)\right).$$

Antes de mais nada, perceba que não queremos obter exatamente os valores mínimos dessa função e sim mostrar que ela é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - \dfrac{h}{r}}{\dfrac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}}.$$

Para fazer isso, mostraremos que qualquer raiz de C' é um ponto de mínimo pelo teste da segunda derivada. Perceba que podemos usar tal teste pois C' é continua em $\mathbb{R}_+^*$. Calculando a derivada de C' encontramos a seguinte função

$$C''(r) = S\left(8\sqrt{3} + \frac{4V}{r^3} + k\frac{6V}{\pi r^4}\right).$$

Perceba que $C''(r) > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, pelo teste da segunda derivada, qualquer raiz de C' será um ponto de mínimo de C. Desse modo, para que o custo da produção da lata seja minimizado, a condição que deve ser satisfeita é $C'(r) = 0$. Sendo assim

$$S\left(8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2} + k\left(4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}\right)\right) = 0 \iff 8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2} + k\left(4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}\right) = 0.$$

Daí, vemos que

$$k\left(4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}\right) = -8\sqrt{3}r + \frac{2V}{r^2} \iff k\left(\frac{4\pi^2 r^3 - 2V}{\pi r^3}\right) = \frac{-8\sqrt{3}r^3 + 2V}{r^2}.$$

De onde podemos concluir que

$$k = \frac{\pi r(-4\sqrt{3}r^3 + V)}{2\pi^2 r^3 - V}.$$

Note que este valor de k cumpre a condição para que o custo da lata seja minimizado, pois ele foi obtido da equação $C'(r) = 0$. Lembrando que $V = \pi r^2 h$, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{V}}{k} &= \sqrt[3]{\pi r^2 h} \cdot \frac{2\pi^2 r^3 - \pi r^2 h}{\pi r(-4\sqrt{3}r^3 + \pi r^2 h)} \\
&= \sqrt[3]{\pi r^2 h} \cdot \frac{\pi r^3 \left(2\pi - \dfrac{h}{r}\right)}{\pi r^4 \left(\dfrac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{\sqrt[3]{\pi r^2 h}}{r} \cdot \frac{\left(2\pi - \dfrac{h}{r}\right)}{\left(\dfrac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função custo é minimizada para:

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{\left(2\pi - \dfrac{h}{r}\right)}{\left(\dfrac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}\right)}. \tag{3.15}$$

Feito isto, o *item 3* está concluído.

Item 4

Neste item, iremos considerar $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$, obtido em *(3.15)* , como sendo uma função de $\dfrac{h}{r}$ e faremos seu gráfico. Feito isso, poderemos analisar, através do gráfico, qual o melhor valor de $\dfrac{h}{r}$ para podermos minimizar o custo de produção de uma lata, sendo ela pequena ou grande e sendo o custo para a junção das partes alto ou baixo.

Para isso, fazemos $x = \dfrac{h}{r}$ em *(3.13)* e chamemos de f a função que a cada valor de x nos dá um valor para $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$. Sendo assim, temos que

$$f(x) = \sqrt[3]{\pi x} \cdot \frac{(2\pi - x)}{(\pi x - 4\sqrt{3})}.$$

Usando o *Geogebra* para fazer o gráfico da função f obtemos:

Figura 15: Gráfico da função f

Perceba que o gráfico acima mostra o comportamento de f apenas para $x \in (0, 10]$ e isto foi feito pois percebeu-se que para todo $x > 2\pi$ temos que $f(x) < 0$ e, como o valor de $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$ é sempre positivo, estudar esta função para valores de x maiores que 2π não nos ajuda em nada. Temos ainda que para $x < 2,21$, $f(x) < 0$. Portanto, esta parte do gráfico também não nos será muito útil. Por último, note que a assíntota vertical que aparece no gráfico é a reta $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi} \cong 2,21$.

Para entender bem o quê o gráfico de f nos mostra, temos que entender qual o significado do valor de $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$ aumentar ou diminuir.

Note que o valor de $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$ aumenta se o valor $\sqrt[3]{V}$ for grande ou se o valor de k for pequeno. Perceba que se o valor de $\sqrt[3]{V}$ é grande, significa que o volume da lata é grande e, portanto, a própria lata é grande. Note também que se o valor de k é pequeno, significa que o custo para a junção das partes da lata é baixo.

Sendo assim, perceba que se desejamos produzir uma lata grande, ou se valor da junção for pequeno, teremos que o valor de $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$ também será grande e pela função f, que mostra a relação entre os valores de $\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}$ e de $\dfrac{h}{r}$ para que o custo da produção da lata seja minimizado, vemos que isto ocorre quando x está próximo de $2,21$, ou seja, quando tivermos que $\frac{h}{r} \cong 2,21$.

Por outro lado, valor de $\frac{\sqrt[3]{V}}{k}$ diminui se o valor $\sqrt[3]{V}$ for pequeno ou se o valor de k for grande. Perceba que se o valor de $\sqrt[3]{V}$ é pequeno, significa que o volume da lata é pequeno e, portanto, a própria lata é pequena. Se o valor de k é grande, significa que o custo para juntar as partes da lata é alto.

Sendo assim, note que se desejamos produzir uma a lata pequena, ou se valor da junção for alto, teremos que o valor de $\frac{\sqrt[3]{V}}{k}$ também será pequeno e pela função f, que mostra a relação entre os valores de $\frac{\sqrt[3]{V}}{k}$ e de $\frac{h}{r}$ para que o custo da produção da lata seja minimizado, vemos que isso ocorre quando o valor de x vai se afastando de $2,21$, ou seja, quando tivermos que $\frac{h}{r} > 2,21$.

Com isso, concluímos o *item 4*.

Item 5

Neste item, devemos apenas verificar se os resultados obtidos nos itens anteriores são condizentes com o que ocorre na prática.

Pelas observações feitas, constatou-se que latas grandes tendem realmente a apresentar uma forma um pouco mais quadrada, ou seja, elas tendem a apresentar $2,21 < \frac{h}{r} < 3$.

Por outro lado, percebeu que nem todas as latas pequenas são estreitas e altas, sendo que algumas são até mesmo mais 'quadradas'. A explicação encontrada para isso está no fato de que latas altas e estreitas são ótimas para armazenar líquidos, visto que este formato se adequa perfeitamente a mão do consumidor. Entretanto, para armazenar alimentos sólidos, latas estreitas e altas acabam tornando o consumo mais dificultoso, visto que se uma lata é muito estreita é complicado consumir o produto usando uma colher, sendo assim, estas latas precisam ser uma pouco mais largas.

Com isso, concluímos o problema!

$\diamond$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é uma ciência única, pois diferentemente de algumas outras ciências, onde cada geração desconstrói e reconstrói tudo o que foi feito pela geração que lhe antecedeu, na Matemática cada nova geração de matemáticos utiliza, como base de seus estudos, tudo o que foi construído por seus antecessores e, a partir daí, passa a preencher as lacunas ainda existentes nesta ciência.

Somente o fato acima exposto já seria suficiente para justificar a grande importância que a Matemática básica possui, contudo para provar tal fato também aos mais leigos no assunto, neste trabalho foram apresentadas as mais diversas aplicações de Matemática básica. Mostrou-se que com ela, e com algumas noções de Cálculo Diferencial, que no passado também já fizeram parte do currículo do ensino médio brasileiro, pode-se encontrar qual trajetória um avião deve seguir para que o pouso aconteça dentro dos padrões de segurança estabelecidos; pode-se encontrar qual o formato que deverá ter a primeira subida e descida de uma montanha-russa de modo que ela atenda a condições especificadas inicialmente; pode-se ainda descobrir qual o melhor lugar para senta-se num cinema de modo a se ter o melhor ângulo de visão possível e além disso, foi possível entender melhor o porquê de as latas presentes nos supermercados terem as formas que têm.

Desse modo, espera-se verdadeiramente que todos os alunos que vierem a ler este trabalho o terminem convencidos da grande importância que tem a Matemática que é estudada no ensino médio. Espera-se ainda que este trabalho possa dar alguma contribuição à Educação Básica, de modo que mais professores passem a apresentar os conteúdos de Matemática no ensino médio acompanhados de algumas aplicações interessantes dos mesmos, de modo que isto auxilie o aluno a tomar gosto por esta ciência tão bela e de importância inigualável.

REFERÊNCIAS

[1] DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. vol.9. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. vol. 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

[3] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos e Funções. vol.1. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[4] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Trigonometria. vol.3. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[5] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. vol.4. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios e Equações. vol.6. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[7] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Analítica vol.7. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[8] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Limite, Derivadas e Noções de Integral. vol.8. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[9] LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol.1. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

[12] SOUZA, Bruno Serafim. **Aplicações da Derivada à luz da matemática do ensino médio**. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2017.

[13] STEWART, James. **Cálculo**. Tradução: EZ2Translate. vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

[14] THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. Tradução: Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo. vol. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.