



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WILKSON LINHARES TEODORO

SOLUÇÕES POR SÉRIES E FUNÇÕES ESPECIAIS

FORTALEZA

2017

WILKSON LINHARES TEODORO

SOLUÇÕES POR SÉRIES E FUNÇÕES ESPECIAIS

Dissertação submetida à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção em grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

Fortaleza

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T289s Teodoro, Wilkson Linhares.

Soluções por séries e funções especiais / Wilkson Linhares Teodoro. – 2017.
106 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017. Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Soluções por séries de potência. . 2. Funções especiais. . 3. Equação diferencial ordinária.. I. Título.

CDD 510

WILKSON LINHARES TEODORO

SOLUÇÕES POR SÉRIES E FUNÇÕES ESPECIAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 30 / 01 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fábio Eduardo Franco Rodrigues Ferreira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

*"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."
Pitágoras*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado e, por sua misericórdia e graça, oferecer-me o dom da vida. Desde o meu nascimento até os dias de hoje, Ele permanece comigo em todos os momentos. Que o Seu nome seja honrado, glorificado e louvado em todos os lugares deste mundo.

Ao meu pai Antônio Pereira Teodoro (*in memoriam*) que me ensinou, enquanto em vida, que as coisas simples são as mais valiosas.

A minha mãe que sempre esteve e está comigo. Mulher de fibra e valiosa que é o meu exemplo de não desistir e de nunca perder a fé mesmo diante de tamanhas dificuldades. A senhora é a razão do meu viver.

Aos meus irmãos William Linhares, Welton Linhares e, em especial ao Wilton Linhares, que vem assumindo, cada vez mais, o papel de pai para todos. Um filho, esposo, pai e irmão exemplar. Obrigado por tudo.

As minhas sobrinhas que me ensinam e me incentivam a ser uma pessoa melhor.

À Larissa Siqueira, minha namorada, por estar comigo em todos os momentos e por ter tido compreensão durante esse período do mestrado. Certamente, sem ela, seria muito mais difícil alcançar os objetivos. Obrigado pelo amor e apoio demonstrado.

Aos meus amigos, em especial: Djalma Henrique, João Victor, Harrison Jean, Edson Rodrigues e Leila Mara, que me acompanham há muitos anos e nunca deixaram que eu desistisse de sonhar. Gratidão é o sentimento que tenho por vocês.

À Universidade Federal do Ceará por permitir que o sonho de me tornar mestre fosse realizado.

Ao meu orientador, o professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo, que além de ser um excelente professor é uma pessoa de grande coração, tendo bastante sabedoria e paciência na produção deste trabalho.

Às pessoas que me ajudaram de forma direta ou indireta, durante esses anos, para esta conquista na minha vida.

RESUMO

O presente trabalho visa mostrar a aplicabilidade da matemática na solução de problemas físicos. Primeiramente, será observado o comportamento de uma solução através da análise local. Em seguida, demonstrar as soluções por séries de potência e as funções especiais (Bessel, Hermite, Legendre e Laguerre) e, por fim, a aplicação por equação diferencial ordinária (EDO).

Palavras-chave: Soluções por séries de potência. Funções especiais. Equação diferencial ordinária.

ABSTRACT

The present work aims to show the applicability of mathematics in the solution of physical problems. First, the behavior of a solution will be observed through local analysis. Next, demonstrate the solutions by power series and the special functions (Bessel, Hermite, Legendre and Laguerre) and, finally, the application by ordinary differential equation (ODE).

Keywords: Power series solutions. Special functions. Ordinary differential equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Gráfico da função gama	45
Figura. 2: Gráfico das funções de Bessel $J_n(x)$, para $n = 0, 1$ e 2	58
Figura. 3: Gráficos das funções de Bessel $Y_n(x)$, para $n = 0, 1$ e 2	59
Figura 4: Gráfico das funções de Bessel modificadas $I_p(x)$ e $K_p(x)$, para $p = 0, 1$ e 2	63
Figura 5: Gráficos das funções de $ber_p(x)$ e $bei_p(x)$, para $p = 0, 1$	67
Figura 6: Gráficos das funções de $ker_p(x)$ e $kei_p(x)$, para $p = 0, 1$	68
Figura 7: Gráficos dos polinômios de $P_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5	72
Figura 8: Gráficos das funções de Legendre de segunda espécie $Q_n(x)$, para $n = 0, 1, 2$ e 3	74
Figura 9: Funções de Legendre associadas $P_m(x)$, para $m = 0, 1$ e 2	76
Figura 10: Funções de Legendre associadas $Q_2^m(x)$, para $m = 0, 1$ e 2	77
Figura 11: Campo elétrico gerado por um anel circular - 1 nome.....	92
Figura 12: Campo elétrico gerado por um anel circular - 2	93
Figura 13: Potencial gravitacional gerado por um disco homogêneo - 1	94
Figura 14: Potencial gravitacional gerado por um disco homogêneo - 2	95

Figura 15: Fatoração das funções – Átomo de Hidrogênio.....	97
Figura 16: O potencial $V(x)$ (linha cheia), aproximado na região do entorno de seu mínimo, em $x = a$, por um potencial parabólico, típico de um oscilador harmônico.....	100
Figura 17: Funções de onda do oscilador.....	103

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	SOLUÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS	15
2.1	Convergência.....	15
2.1.1	Convergência absoluta.....	15
2.1.2	Convergência e divergência em um ponto.....	15
2.1.3	Raio de convergência.....	15
2.1.4	Teste de razão.....	16
2.2	Soma e subtração de séries.....	16
2.3	Multiplicação e divisão de séries.....	16
2.4	Função representada por série convergente.....	17
2.5	Função analítica.....	18
2.6	Classificação de pontos singulares de equações lineares homogêneas.....	19
2.6.1	Pontos ordinários e singular.....	19
2.6.2	Teorema 1.....	20
2.6.3	Ponto singular regular.....	20
2.6.4	Teorema 2.....	21
2.6.5	Ponto singular irregular.....	22
2.6.6	Ponto no infinito.....	22
2.7	Soluções na vizinhança de um ponto ordinário.....	23
2.7.1	Método das séries de potência.....	23
2.7.2	Teorema 3.....	25
2.8	Soluções na vizinhança de um ponto singular I – Primeira solução.....	25
2.8.1	Método de Frobenius – Construção da primeira equação.....	26
2.8.2	Teorema 4.....	29
2.9	Soluções na vizinhança de um ponto singular II – segunda solução.....	32
2.9.1	Raízes distintas diferindo de um não inteiro.....	34
2.9.2	Teorema 5.....	36
2.9.3	Raízes iguais.....	37
2.9.4	Teorema 6.....	39
2.10	Raízes diferindo por um inteiro positivo.....	40

2.10.1	Teorema 7.....	42
3	FUNÇÕES ESPECIAIS.....	45
3.1	Função Gama.....	45
3.2	Função Bessel.....	48
3.2.1	Função de Bessel de primeira ordem.....	48
3.2.2	Solução geral da equação de Bessel. Funções de Bessel de segunda espécie.....	53
3.2.3	Comportamento das funções de Bessel.....	56
3.2.4	A ortogonalidade das Funções $J_p(\lambda x)$	59
3.2.5	Funções de Bessel com argumento imaginário.....	62
3.2.6	Equações redutíveis à equação de Bessel.....	69
3.3	Função de Legendre.....	69
3.3.1	Ortogonalidade dos polinômios de Legendre.....	74
3.3.2	Funções de Legendre associadas.....	75
3.4	Função Geratriz para $P_n(x)$	78
3.5	Função de Hermite.....	80
3.6	Função de Laguerre.....	81
3.6.1	Função geradora dos polinômios de Laguerre.....	82
3.7	Exemplos.....	83
4	APLICAÇÕES DE FUNÇÕES ESPECIAIS NA FÍSICA.....	89
4.1.	Função de Bessel.....	89
4.1.1	Vibrações de uma membrana elástica circular.....	89
4.2.	Função de Legendre.....	92
4.2.1	Campo elétrico gerado por um anel circular.....	92
4.2.1.1	Potencial gravitacional gerado por um disco homogêneo.....	94
4.3	Função de Laguerre.....	96
4.3.1	Átomos de hidrogênio.....	96
4.4	Função de Hermite.....	99
4.4.1	Oscilador harmônico simples.....	99
4.4.1.1	Funções de onda.....	101
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	105
	REFERÊNCIAS.....	106

1 INTRODUÇÃO

A matemática contribui para diversas áreas na solução de problemas importantes e significativos da física, ciências sociais e da engenharia. Assim, tomando os padrões matemáticos as questões solucionáveis nas áreas já citadas exigem a determinação de uma função chamada equações diferenciais (EDO).

Existem alguns métodos de resolução de Equações diferenciais ordinárias (EDOs) que nos levam a soluções fechadas, ou seja, que são representadas de forma explícita ou implícita por fórmulas analíticas. Esses métodos são bastante eficazes, porém são restritas a um conjunto diminuto de casos. Sendo assim, esses métodos podem falhar ou produzirem solução bastante complexa. Com isso, uma outra possibilidade utilizada é a de determinar aproximadamente o comportamento da solução.

Logo, este trabalho tem como prioridade inicial observar o comportamento de uma solução através da análise local. O objetivo dessa análise local é a forma de representar as soluções, que não podem ser obtidas como expressões simples, em termos de funções elementares. Os resultados que são obtidos de uma análise local são, de forma geral, válidos em uma vizinhança de um ponto.

Será observado no primeiro capítulo, a representação local em uma vizinhança de um ponto x_0 , de soluções de EDOs lineares homogêneas em séries de potências. Irá ser realizada a classificação do ponto x_0 como um ponto ordinário, singular regular ou singular irregular e, com isso, a escolha da forma mais própria para a série, utilizando - se dessa classificação.

De forma geral, é de bastante utilidade o conhecimento de como se obter soluções para problemas com certo grau de dificuldade em termos de séries infinitas. Esse enfoque pode nos levar a uma análise extremamente complicada a uma sequência de operações simples para a geração de termos da série. Tem – se ainda que os primeiros termos da série geram uma aproximação para o comportamento local da solução de uma equação diferencial.

Ainda serão estudadas as funções especiais aplicadas na física. Em especial: a função de Bessel aplicada nas vibrações da membrana elástica circular; a função de Legendre aplicada no campo elétrico e potencial gravitacional; a função de Laguerre aplicada no modelo atômico de hidrogênio e a função de Hermite aplicada na mecânica quântica.

2 SOLUÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

As propriedades e definições mais importantes serão abordadas, nesta seção, para que sejam utilizadas nas soluções em séries de EDO de segunda ordem.

2.1 Convergência

A série de potências

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$ é convergente em um ponto x quando o

limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_k (x - x_0)^k$ existe. Para $x = x_0$, chamado de centro da série, a série de potências converge e seu limite é a_0 .

A propriedade de Convergência possui algumas particularidades, dentre elas:

2.1.1 Convergência absoluta

A série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ converge de maneira absoluta em um ponto x se a série

formada pelos valores absolutos dos seus termos, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k (x - x_0)^k|$, converge. Se uma

série converge de forma absoluta, então ela converge. Entretanto, a reciprocidade nem sempre é necessariamente verdadeira.

2.1.2 Convergência e divergência em um ponto:

Considere a série, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, convergindo em um ponto x_1 , com isso ela

converge de maneira absoluta para todo x tal que $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Se a série diverge

no ponto $x = x_1$, logo ela diverge para quaisquer ponto x que satisfaz $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

2.1.3 Raio de convergência:

É um número R que pertence a série de tal forma que a série converge absolutamente se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$. Uma série converge apenas para $x = x_0$ quando $R = 0$. Caso a série convergir para quaisquer valor de x , então R é infinito.

2.1.4. Teste da Razão:

Para analisar a convergência de uma série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pode – se aplicar o teste da razão. Este teste é baseado no resultado de que se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}|}{|a_k (x - x_0)^k|} = r < 1$

então $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ converge absolutamente.

Agora, considere que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}|}{|a_k (x - x_0)^k|} = r > 1$, então $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ diverge.

Logo, o raio R de convergência satisfaz $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.

Se o limite $r = 1$, então, o critério não é conclusivo, portanto, deve – se utilizar outro método para análise.

2.2 Soma e subtração de séries:

De termo–a–termo as operações de adição e de diferença podem ser realizadas. Ou seja, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$, tal que $c_k = a_k \pm b_k$.

A série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ irá convergir nos pontos onde as duas séries, após a adição ou diferença, convergem. Logo, o raio de convergência é igual a pelo menos o menor valor entre os raios das séries iniciais.

2.3 Multiplicação e Divisão de Séries:

Essas operações podem ser realizadas entre as séries de potências.

Na multiplicação vale $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$, tal que

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}.$$

De maneira análoga às situações anteriores, o produto das séries irá convergir em todos os pontos onde ambas as séries fatores convergem.

Na divisão, tem – se que o coeficiente da divisão na série é calculado por:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k$$

Pode – se utilizar a multiplicação para representar os coeficientes da divisão da seguinte forma:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Através da fórmula do produto das séries e utilizando a igualdade dos coeficientes dos termos de mesmo grau em ambos os membros, resulta nos coeficientes d_k .

2. 4 Função representada por série convergente:

Considere uma série de potências convergentes em um intervalo $|x - x_0| < R$, onde R é positivo. Essas séries representam, nesse intervalo, uma função contínua e contém derivadas de todas as ordens contínuas.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, |x - x_0| < R$$

Todas as derivadas de $f(x)$ conseguem se expandir em séries de potências, obtidas pela diferenciação termo a termo da série matriz, com raios de convergência R . Para a primeira e segunda derivadas de $f(x)$ tem - se:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, |x - x_0| < R \text{ e } f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, |x - x_0| < R$$

2. 5 Função analítica:

Caso uma função $f(x)$ admita a representação em série de potência considerando o centro $x = x_0$ e raio de convergência positivo, R , logo os coeficientes das séries são únicos.

Podemos chamar essa série, que representa $f(x)$, de série de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \text{ para } |x - x_0| < R.$$

Pode – se observar que a série é determinada pelos valores da função e de todas as suas derivadas num único ponto, o centro da série, x_0 .

A função $f(x)$ que pode ser representada por uma série de potências de centro x_0 e raio de convergência R positivo é chamada de analítica no ponto x_0 .

Para ilustrar, observa – se que o polinômio $P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_N(x - x_0)^N = \sum_{k=0}^N (x - x_0)^k$ são exemplos de séries de potências.

No polinômio de grau N , os coeficientes dos termos de grau acima de N são nulos. Os polinômios são funções analíticas cujas séries de Taylor possuem raio de convergência infinito. Ocorre isso para soma, subtração e multiplicação de polinômios.

A divisão de polinômios não é um polinômio em geral, porém uma série de potências com um número infinito de termos. Ela fornece uma função que é analítica em qualquer ponto x_0 onde o polinômio do denominador é não – nulo. Nessa situação, a convergência da série é garantida somente em uma vizinhança finita, $|x - x_0| < \delta$, do seu centro x_0 .

Exemplo: Determine a representação em forma de série de potências centradas na origem a função $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, bem como o raio de convergência da série.

Essa função é a divisão de polinômios, $P_1(x) = 1$ e $P_2(x) = 1 + x^2$. Observando o denominador $P_2(x)$, nota – se que ele não se anula para nenhum valor real x , vê – se que $f(x)$ é bem definida em \mathbb{R} . Logo, a expansão de $f(x)$ em série de Taylor em torno do ponto $x = 0$ não converge em todos os pontos de \mathbb{R} . Essa expansão é

representada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, a qual possui o raio de convergência $R =$

1, após a verificação utilizando o teste da razão.

2.6 Classificação de pontos singulares de equações lineares homogêneas:

Inicialmente, classifica – se o ponto x_0 como um ponto ordinário, singular regular ou singular irregular da equação diferencial ordinária de segunda ordem para começar o procedimento da análise local.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

A classificação citada gera a primeira indicação da natureza das soluções na vizinhança de x_0 , e sugere o caminho para uma análise sistemática.

É preciso observar que o ambiente natural para o estudo da singularidade de EDOs é a teoria das funções de uma variável complexa. Isto ocorre devido as questões como a determinação das singularidades de uma função, ou a determinação do raio de convergência de uma série de potências são respondidas nesta teoria.

2.6.1 Pontos ordinários e singular:

O ponto x_0 é chamado de ponto ordinário de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se as funções $P(x)$ e $Q(x)$ forem analíticas em x_0 , ou seja, se valem as representações:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R_1,$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R_2, \quad \text{onde } R_1 \text{ e } R_2 \text{ são números positivos; do contrário, } x_0$$

é dito um ponto singular de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Exemplo: Classifique o ponto x_0 relativo à EDO $y'' + e^{2x}y' + e^x y = 0$ isso acontece porque os coeficientes da EDO $P(x) = \exp(2x)$ e $Q(x) = \exp(x)$, são funções analíticas em todos os pontos de x_0 .

2.6.2 Teorema 1

Todas as soluções $y(x)$ da EDO $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ são analíticas no ponto ordinário $x_0 = 0$, ou seja, podem ser representadas da maneira:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R, \quad \text{tal que } R \text{ é um número positivo. Pode – se afirmar}$$

que R é no mínimo igual ao menor dos raios de convergência, R_1 e R_2 , das expansões em séries de potência centradas no ponto x_0 , dos coeficientes da EDO, $P(x)$ e $Q(x)$.

2.6.3 Ponto singular regular

De maneira geral, pode – se afirmar que as soluções de uma EDO linear não são analíticas em um ponto singular x_0 e mostram singularidade nesse ponto. A origem dessas singularidades é variada e depende do tipo da singularidade que a equação apresenta em x_0 . Convenientemente, classificam – se os pontos singulares de uma EDO de acordo com algumas características das funções $P(x)$ e $Q(x)$ nestes pontos, que influenciarão o comportamento demonstrado pelas soluções nesses pontos.

O ponto x_0 é um ponto singular regular de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ quando, ao menos uma das funções $P(x)$ e $Q(x)$ não é analítica em x_0 , porém são analíticas as funções

$$\bar{P}(x) = (x-x_0)P(x) \quad \text{e} \quad \bar{Q}(x) = (x-x_0)^2 Q(x).$$

Nota – se que, em termos dos novos coeficientes $\bar{P}(x)$ e $\bar{Q}(x)$, a EDO inicial pode ser escrita na forma $(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)\bar{P}(x)y' + \bar{Q}(x)y = 0$, onde $\bar{P}(x)$ e $\bar{Q}(x)$ são funções analíticas em x_0 .

Exemplo: Classifique a origem $x_0 = 0$, relativamente às EDOs

$$x^2 y'' + xy' = y \quad \text{e} \quad x^3 y'' + xy' = (x+1)y.$$

Considere para a primeira EDO $\bar{P}(x) = 1$, $\bar{Q}(x) = -1$, enquanto para a segunda, $\bar{P}(x) = 0$, $\bar{Q}(x) = -\frac{x+1}{x}$.

O ponto $x_0 = 0$ é um ponto singular regular da primeira equação e um ponto singular não regular da segunda.

Considerando as expansões em série de potências das funções analíticas

$$\bar{P}_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n (x-x_0)^n, \text{ e } \bar{Q}_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{q}_n (x-x_0)^n, \text{ tem-se que o comportamento local das}$$

soluções da equação $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ em um ponto singular regular x_0 depende das raízes s_1 e s_2 do polinômio indicial

$$f(s) = s(s-1) + \bar{p}_0 s + \bar{q}_0.$$

Especificamente, se estas raízes são ordenadas de modo que $\text{Re}(s_1) \geq \text{Re}(s_2)$, onde $\text{Re}(z)$ corresponde à parte real do número complexo z , portanto é aceitável o teorema 1. Sem perda de generalidade, consideramos soluções à direita do ponto x_0 . A aplicação do método para a equação obtida através da alteração de variável x para $-x$ nos leva a soluções da equação original à esquerda do ponto x_0 .

2.6.4 Teorema 2

Caso x_0 seja um ponto singular regular de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, então, esta equação possui sempre uma solução $y = y_1(x)$ representada por:

$$y_1(x) = (x-x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad a_0 \neq 0.$$

A segunda solução linearmente independente $y = y_2(x)$ existe de acordo com as possibilidades:

I – Caso $s_1 - s_2$ não é um inteiro positivo, logo

$$y_2(x) = (x-x_0)^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \quad b_0 \neq 0.$$

II – Caso $s_1 - s_2 = 0$, logo

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x-x_0| + (x-x_0)^{s_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \quad b_1 \neq 0$$

III – Se $s_1 - s_2 = N$, tal que $N = 1, 2, \dots$, portanto

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln|x-x_0| + (x-x_0)^{s_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \quad b_0 \neq 0,$$

No caso (III), a constante C pode eventualmente se anular.

As soluções acima terão validade em um intervalo à direita de x_0 , $0 < x-x_0 < R$, com R no mínimo igual ao menor dos raios de convergência das expansões em série de potências de funções $\bar{P}(x)$ e $\bar{Q}(x)$ ao redor de x_0 .

2.6.5 Ponto singular irregular:

Qualquer ponto singular da equação $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ que não seja um ponto regular, é chamado de ponto singular irregular.

Não há uma teoria capaz de dar resultados específicos sobre o comportamento local de soluções em torno de um ponto singular irregular qualquer. Entretanto, caso x_0 seja um ponto singular irregular isolado da equação $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, ou seja, se as funções $P(x)$ e $Q(x)$ forem analíticas em uma vizinhança $0 < |x-x_0| < p$, esta postura pode ser determinada qualitativamente em termos de séries assíntotas.

2.6.6 Ponto no infinito:

Em várias ocasiões, é importante observar o comportamento das soluções de uma EDO para números grandes da variável independente x . Por exemplo, se em um determinado problema x representa o tempo, esse comportamento determina a existência de soluções de equilíbrios (as soluções não mudam com o tempo), de soluções periódicas e a estabilidade dessas soluções.

Para que seja feito um estudo do comportamento das soluções da equação $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ no infinito, será considerada a mudança de variável $\xi = \frac{1}{x}$ e, com isso, o estudo do comportamento das soluções da equação alterada $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ em $\xi = 0$. Este último estudo é feito de acordo com a discussão precedente.

2.7 Soluções na vizinhança de um ponto ordinário:

Nesta parte, será mostrado como podemos obter soluções de uma EDO linear de segunda ordem ao redor de um ponto ordinário. A forma de obtenção das soluções chamado de *método das séries de potências*, é representada a seguir.

2.7.1 Método das séries de potência

Para que se visualize de uma melhor maneira, utiliza – se o exemplo a seguir para mostra o método das séries de potência:

Seja $y = y(x)$. Resolva a EDO

$$y'' + y = 0$$

Observe que pelo teorema 1, temos que os coeficientes da EDO iguais a $P(x) = 0$ e $Q(x) = 1$, onde são funções analíticas em todos os pontos, tem – se a certeza de que as soluções a determinar também possuirão essa propriedade, ou seja, suas expansões em série de potência ao redor de $x_0 = 0$ convergirão em todos os pontos. Logo, terão raios de convergência infinitos.

Como representado acima, considera – se $y(x)$ uma solução aleatória de $y'' + y = 0$ na maneira de uma série de potências (convergentes para todo x)

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que os coeficientes a_n devem ser determinados. Derivando termo a

termo duas vezes a série e substituindo na EDO $y'' + y = 0$ temos que:

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ perceba que no primeiro somatório inicia em $n = 2$, pois os

dois primeiros termos, correspondentes a $n = 0$ e $n = 1$, em $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ são

eliminados pelas duas diferenciações. Realizando, nesse somatório a mudança de

índices $n \mapsto n+2$ obtém – se $\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$, que acarreta a seguinte

fórmula de recorrência para os coeficientes de a_n , $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, para $n = 1, 2,$

...

Essa fórmula permite a determinação de todos os coeficientes pares em funções de a_0 , e de todos os ímpares em função de a_1 . Perceba que isso significa especificar a primeira solução por $\{a_0 \neq 0, a_1 = 0\}$ e para a segunda, $\{a_0 = 0, a_1 \neq 0\}$.

Portanto, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$ e $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1$ para $n = 1, 2, \dots$, fornecendo, assim,

para a solução geral da EDO $y'' + y = 0$ $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, tal que

a_0 e a_1 são constantes aleatórias. Perceba que as duas séries em

$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ iniciam com potências de x diferentes, o que

garante que as duas soluções que elas representam são linearmente independentes.

Nota – se que ainda mesmo sendo começado com uma única série, obteve duas soluções linearmente independentes e, conseqüentemente, a solução geral da equação $y'' + y = 0$. Portanto, percebe – se que a primeira série é a expansão de Taylor de $\cos x$ e a segunda a expansão de Taylor de $\sin x$. Logo, podemos

representar a solução geral de $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ como sendo

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

Os caminhos acima, aplicados no exemplo, podem ser generalizados para uma EDO na forma $y = y(x)$,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

2.7.2 Teorema 3

Os coeficientes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ de duas soluções linearmente independentes

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ e } y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \text{ ao redor de um ponto ordinário } x_0 \text{ da EDO}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \text{ onde } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n \text{ e } Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n \text{ podem ser}$$

$$\text{gerados pela relação de recorrência } a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^n [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k],$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, através, respectivamente, das escolhas $\{a_0 = 1, a_1 = 0\}$ e $\{a_0 = 0, a_1 = 1\}$.

Exemplo:

Seja $y = y(x)$. Resolva a EDO $y'' + e^{2x}y' + e^x y = 0$, em torno da origem.

Nessa situação, utiliza – se a fórmula de recorrência descrita pelo teorema 3.

As expansões serão:

$$P(x) = e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \text{ e } Q(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ tem – se para os coeficientes } \{p_n\} \text{ e } \{q_n\},$$

$$p_n = \frac{2^n}{n!} \text{ e } q_n = \frac{1}{n!}.$$

$$\text{Logo, } a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{(n-k)!} [2^{n-k}(k+1)a_{k+1} + a_k] \right).$$

2. 8 Soluções na vizinhança de um ponto singular I - Primeira solução:

Será apresentado nesta parte, um procedimento sistemático, o *método de Frobenius*, para a determinação de soluções ao redor de um ponto singular regular. Esse método irá nos fornecer as duas soluções linearmente independentes indicado no teorema 2.

A EDO de Bessel visando uma descrição mais operacional do método de Frobenius, trabalha – se com a sua aplicação a um exemplo protótipo, a *EDO de Bessel de ordem p*, a saber, $y = y(x)$, $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$.

Nessa equação, considera – se que o parâmetro p é uma constante em geral complexa com parte real não negativa ($\text{Re}(p) \geq 0$). Para convenientes escolhas de p , a EDO acima é capaz de ilustrar os procedimentos empregados pelo método em todos os diferentes casos.

2.8.1 Método de Frobenius – Construção da primeira solução

Através do teorema 2, a primeira solução, $y_1(x)$, da EDO $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ numa vizinhança à direita de um ponto singular regular x_0 tem o formato

$$y_1(x) = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 \neq 0.$$

A série no formato acima é chamada de série de Frobenius, e a variável s seu expoente *inidicial*.

Escolhendo $x_0 = 0$, uma vez que a troca $\xi = x - x_0$ transforma o ponto $x = x_0$ no ponto $\xi = 0$ e mantém a forma da equação $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Com isso, a

fórmula $y_1(x) = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $a_0 \neq 0$ é reduzida para :

$$y_1(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}, \quad a_0 \neq 0, \quad x > 0.$$

Exemplo: Primeira solução da equação de Bessel

Construa a primeira solução da equação de Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ de ordem p na região $x > 0$.

Para a solução existe a tentativa $y_1(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$, $a_0 \neq 0$, $x > 0$, valendo as

expressões para as derivadas $y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)a_n x^{s+n-1}$, $a_0 \neq 0$,

$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)(s+n-1)a_n x^{s+n-2}$, $a_0 \neq 0$, podendo ser reduzida um único somatório,

através de convenientes mudanças de índices

$$[s^2 - p^2]a_0 x^s + [(s+1)^2 - p^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{[(s+n+2)^2 - p^2]a_{n+2} + a_n\} x^{s+n+2} = 0.$$

Esta equação deve ser válida para quaisquer $x > 0$, na vizinhança onde é satisfeita. Com isso, os seus coeficientes devem se anular. Seguem – se, então as equações

$$[s^2 - p^2]a_0 = 0,$$

$$[(s+1)^2 - p^2]a_1 = 0,$$

$$[(s+n+2)^2 - p^2]a_{n+2} + a_n = 0.$$

Considerando a condição $a_0 \neq 0$, tem – se da equação $[s^2 - p^2]a_0 = 0$, a relação $f(s) = s^2 - p^2 = 0$, chamada de *equação indicial*. Já a função $f(s)$ é denominada de *polinômio indicial* e as suas raízes, que são as soluções da equação indicial, são $s = p$ e $s = -p$. Escolhe – se como expoente indicial da primeira solução a raiz de maior parte real. Considerando a possibilidade de que $\text{Re}(p) \geq 0$, utiliza $s_1 = p$. Substituindo essa raiz na equação $[(s+1)^2 - p^2]a_1 = 0$, logo o coeficiente a_1 deve ser nulo.

Entretanto, inserindo $s_1 = p$ na equação $[(s+n+2)^2 - p^2]a_{n+2} + a_n = 0$ obtém – se a seguinte relação de recorrência $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(2p+n+2)}$.

Como $a_1 = 0$, portanto os a_n , tal que n é ímpar, são nulos.

Agora, para os coeficientes pares, tem – se

$$a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{(2n+2)(2p+2n+2)}, \quad a_0 \neq 0 \text{ qualquer.}$$

Fazendo alguns coeficientes, para $n = 0, 1, 2$, obtém – se

$$a_2 = -\frac{a_0}{4 \cdot 1 \cdot (p+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 2 \cdot (p+2)} = \frac{a_0}{4^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (p+2)(p+1)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{4 \cdot 3 \cdot (p+3)} = \frac{a_0}{4^3 \cdot 3! \cdot (p+3)(p+2)(p+1)}$$

então, a expressão geral para a_{2n} é

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (p+n) \dots (p+1)}.$$

Ao obter a raiz indicial e a relação de recorrência dos coeficientes, está sendo formada a primeira solução da EDO de Bessel de ordem p , ou seja

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (p+n) \dots (p+1)} x^{2n},$$

na dependência do coeficiente de ordem zero, aleatório e possível em uma vizinhança à direita de $x_0 = 0$. Considerando que os coeficientes da EDO de Bessel $\bar{P}(x) = 1$, $\bar{Q}(x) = x^2 - p^2$, são funções analíticas em toda a reta (raio de convergência infinito), segue-se que a primeira solução da EDO de Bessel acima obtida é válida para todo $x > 0$.

Se p é um número inteiro, a solução acima pode ser normalizada com

$$a_0 = \frac{1}{2^p p!}.$$

Essa solução normalizada é conhecida como *função de Bessel de ordem p de primeira espécie*, admitindo a seguinte expressão

$$y_1(x) = J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!(p+n)!}, \quad x > 0, \quad p \text{ inteiro}.$$

É conveniente observar que, a partir desse exemplo, se o parâmetro p , que aparece na equação de Bessel, não é um inteiro, não se pode considerar a normalização $a_0 2^p p! = 1$.

Com isso, é importante inserir uma função especial (será apresentada e estudada no próximo capítulo) que é denominada de função gama, representada por $\Gamma(z)$, como sendo a generalização da função fatorial.

Logo, a função pode ser representada pela seguinte integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

tal que $\text{Re}(z) > 0$. Utilizando a integração por partes, obtém – se a propriedade fundamental

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Através desse resultado, pode – se afirmar que $\Gamma(p+1) = p!$, onde p é um inteiro positivo. É dessa expressão que se conclui que a função gama é a generalização da função fatorial. Logo, pode – se trocar $p!$ por $\Gamma(p+1)$ na escolha

de a_0 em $a_0 = \frac{1}{2^p p!}$, ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}.$$

Diante dessa escolha, a *função de Bessel de ordem* $p \in \mathbb{R}$, $\text{Re}(p) > 0$, e *primeira espécie*, representada por $J_p(x)$, pode ser exposta na forma

$$y_1(x) = J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)}, \quad x > 0.$$

Os caminhos utilizados para que se obtivesse a primeira solução realizados no exemplo acima podem ser generalizados para equações mais gerais. O teorema a seguir é o resumo dos resultados obtidos para esses casos.

2.8. 2 Teorema 4:

A primeira solução, $y_1(x)$ da EDO

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)\bar{P}(x)y' + \bar{Q}(x)y = 0, \text{ na vizinhança à direita do ponto singular}$$

regular, x_0 , com

$$\overline{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_n (x-x_0)^n \text{ e } \overline{Q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{q}_n (x-x_0)^n$$

é dada por uma série de Frobenius

$$y_1(x) = (x-x_0)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \text{ tal que } s_1 \text{ é a raiz de maior parte real do polinômio}$$

indicial $f(s) = s(s-1) + \overline{p}_0 s + \overline{q}_0$, e também os coeficientes $\{a_n\}$ satisfazem a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{1}{f(s_1+n)} \sum_{k=0}^{n-1} [(s_1+k)\overline{p}_{n-k} + \overline{q}_{n-k}] a_k,$$

considerando para quaisquer $n = 1, 2, 3, \dots$.

Para que se fixe os resultados do teorema, irá ser apresentado dois exemplos. O primeiro exemplo será um caso particular da EDO de Bessel de ordem p , já o segundo caso, é a EDO de Euler.

Exemplo: Equação de Bessel de ordem $1/4$

Considere $y = y(x)$. Compute a primeira solução da equação de Bessel de ordem $1/4$.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{16}\right)y = 0, \text{ para } x > 0.$$

O polinômio indicial dessa equação é:

$$f(s) = s^2 - p^2 = s^2 - \frac{1}{16},$$

já a relação de recorrência $a_n = -\frac{1}{f(s_1+n)} \sum_{k=0}^{n-1} [(s_1+k)\overline{p}_{n-k} + \overline{q}_{n-k}] a_k$ se reduz às equações

$$a_1 f(s+1) = 0, a_n f(s+n) = -a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

Logo, as raízes do polinômio indicial são $s_1 = 1/4$ e $s_2 = -1/4$, respeitando o critério de que s_1 é a raiz com a maior parte real. Colocando a raiz $s_1 = 1/4$ nas equações acima, obtém-se

$$a_1 \left[\left(\frac{1}{4} + 1 \right)^2 - \frac{1}{16} \right] = 0,$$

$$a_n \left[\left(\frac{1}{4} + n \right)^2 - \frac{1}{16} \right] = -a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

Na primeira equação, conclui-se que $a_1 = 0$, o que implica, em vista da segunda equação, que todos os coeficientes a_n , para n ímpar, são nulos. Portanto, a fórmula de recorrência para $s = 1/4$ é

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n(n+1/4)}, \text{ para } n \geq 1.$$

Utilizando essa fórmula de recorrência e mostrando, de forma explícita, os coeficientes (para n par) em função de $a_0 = 1$ temos, para os três coeficientes iniciais,

$$a_2 = -\frac{1}{4(5/4)} = -\frac{1}{5},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{8(9/4)} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 9},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{12(13/4)} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}.$$

Inserindo a normalização $a_0 = \frac{1}{2^4 \Gamma(5/4)}$ e utilizando as propriedades da

função gama, obtém-se como solução a função de Bessel de primeira espécie e de ordem $1/4$

$$J_{1/4}(x) = x^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(x/2)^{2n}}{\Gamma(n+5/4)}, \quad x > 0.$$

Esta série converge para qualquer $x > 0$, uma vez que, os coeficientes da EDO de Bessel são funções analíticas cuja expansão em série tem raio de convergência infinito.

Exemplo: Equação de Euler

Seja $y = y(x)$, ache a primeira solução da EDO de Euler para uma vizinhança à direita de $x_0 = 0$.

$$x^2 y'' + x \overline{p_0} y' + \overline{q_0} y = 0, \text{ onde } \overline{p_0} \text{ e } \overline{q_0} \text{ são constantes.}$$

Utilizando o teorema 4, a equação indicial dada pela equação $f(s) = s(s-1) + \overline{p_0}s + \overline{q_0}$ reduz – se a

$$a_n f(s+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} [(s+k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] a_k = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para a primeira raiz, s_1 , sabe – se que $f(s_1 + n) \neq 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, o que nos leva ao resultado $a_n = 0$, para $n = 1, 2, 3, \dots$.

Considerando $a_0 = 1$, obtém – se a solução $y_1(x) = x^{s_1}$, $x > 0$.

2.9 Soluções na vizinhança de um ponto singular regular II – Segunda solução:

A segunda solução de uma EDO será construída agora em torno de um ponto singular regular.

O ponto singular regular estará na origem, $x_0 = 0$ e as soluções em intervalos à direita desse ponto, ou seja, $x > 0$.

Considerando que o polinômio indicial assume, em princípio, duas raízes, então, busca – se a segunda solução $y_2(x)$ da EDO usando a mesma estrutura utilizada para encontrar a primeira solução, entretanto, utilizando a segunda raiz $s = s_2$, portanto

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{s_2+n}, \quad x > 0.$$

A seguir, veremos que, mesmo no caso de raízes distintas, $s_1 \neq s_2$ o uso da série de Frobenius pode, em alguns casos isolados, não conduzir a uma segunda solução.

Exemplo: segunda solução da equação de Bessel

Construa a segunda solução da EDO de Bessel de ordem p utilizando a série de Frobenius ($y_1(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$, $a_0 \neq 0$, $x > 0$) e indique quais falhas podem ocorrer.

O polinômio indicial para EDO de Bessel de ordem p é $f(s) = s^2 - p^2$, com raízes $s_1 = p$ e $s_2 = -p$. Considerando $p = 0$, as raízes do polinômio indicial são iguais, $s_1 = s_2 = 0$. Sendo assim, o procedimento falha.

Considere as raízes distintas, as equações de relação de recorrência particulares para $s_2 = -p$ são $b_{n+2} = -\frac{b_n}{f(n-p)} = -\frac{b_n}{(n-p)^2 - p^2}$.

Analisando as equações acima, para que as resolva é preciso supor que o fator $(n-p)^2 - p^2$ seja não nulo para todo n inteiro positivo. Caso não, se para algum inteiro positivo $N = 1, 2, \dots$ tivermos $S_1 = s_2 + N$, obtém-se uma divisão por zero e o procedimento falha.

Das considerações desse exemplo, temos que as raízes são distintas e diferem por um número não inteiro, ou seja, valem as restrições

1ª: $s_1 \neq s_2$;

2ª: $s_1 - s_2 \neq N$, para $N = 1, 2, 3, \dots$, logo, o método de Frobenius pode ser utilizado para a segunda raiz, obtendo-se uma segunda solução linearmente independente da primeira.

A seguir, será feita uma análise de cada um dos três casos: raízes distintas diferindo de um não inteiro, raízes iguais e raízes distintas diferindo de um inteiro.

2.9.1 Raízes distintas diferindo de um não inteiro:

Sendo a segunda raiz da equação indicial distinta da primeira raiz e a diferença entre ambas é um valor não inteiro, a segunda solução é descrita por uma série de Frobenius, ($y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{s_2+n}$, $x > 0$) correspondente à segunda raiz. O exemplo a seguir será utilizado para mostrar como encontrar a segunda solução, a partir da segunda raiz do polinômio indicial.

Exemplo: equação de Bessel de ordem $1/4$

Seja $y = y(x)$. Ache a segunda solução da EDO de Bessel de ordem $p = 1/4$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/16)y = 0.$$

Sabe – se que a primeira solução que corresponde à raiz $s_1 = 1/4$ é

$$J_{1/4}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+1/4}}{n! \Gamma(n+5/4)}.$$

Sabe – se que a diferença entre as duas raízes, $s_1 - s_2 = 1/2$, não é um inteiro positivo. Logo, pode – se aplicar novamente o método de Frobenius para encontrar a segunda solução.

Ao particularizar as equações de recorrências

$$(a_n = -\frac{1}{f(s_1+n)} \sum_{k=0}^{n-1} [(s_1+k)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k) \text{ para } s_2 = -1/4, \text{ obtém – se}$$

$$b_1 \left[\left(-\frac{1}{4} + 1 \right)^2 - \frac{1}{16} \right] = 0,$$

$$b_n \left[\left(-\frac{1}{4} + n \right)^2 - \frac{1}{16} \right] = -b_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

Da primeira equação acima ($b_1 \left[\left(-\frac{1}{4} + 1 \right)^2 - \frac{1}{16} \right] = 0$), segue que $b_1 = 0$,

concluindo assim, que todos os coeficientes ímpares se anulam. A fórmula de recorrência para os coeficientes (pares) é dada por

$b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}}{4n(n-1/4)}$, para $n \geq 1$, que relaciona o valor de b_{2n} com o de b_{2n-2} . Os

primeiros coeficientes pares, em função de b_0 ,

$$\text{são } b_2 = -\frac{b_0}{4(3/4)} = -\frac{b_0}{3},$$

$$b_4 = -\frac{b_2}{4 \cdot 2 \cdot (7/4)} = \frac{b_0}{2 \cdot 3 \cdot 7},$$

$$b_6 = -\frac{b_4}{12(11/4)} = -\frac{b_0}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}.$$

Através das propriedades da função gama, $\Gamma(x)$, segue – se que a fórmula geral para os coeficientes b_{2n} pode ser escrita como

$$b_{2n} = b_0 \frac{(-1)^n \Gamma(3/4)}{2^{2n} n!(n+3/4)}, \text{ para } n \geq 1.$$

Sendo assim, a segunda solução de Frobenius corresponde a $s_2 = -1/4$ é dada por

$$y_2(x) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{-1/4} \Gamma(3/4)}{n! \Gamma(n+3/4)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/4}.$$

Inserindo a normalização $b_0 2^{-1/4} \Gamma(3/4) = 1$, o resultado é a expansão em série De Frobenius da função de Bessel de primeira espécie de ordem $-1/4$

$$J_{-1/4}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+3/4)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/4}.$$

Conclui – se, no caso da equação de Bessel de ordem $1/4$, que o método de Frobenius fornece diretamente duas soluções linearmente independentes, correspondentes às duas raízes distintas $s = \pm 1/4$ do polinômio indicial. A solução geral da EDO de Bessel de ordem $p = 1/4$ pode ser representada como $y(x) = C_1 J_{1/4}(x) + C_2 J_{-1/4}(x)$ tal que C_1 e C_2 são duas constantes aleatórias. Esses resultados, podem ser generalizados e sumarizados sob forma de um teorema.

2.9.2 Teorema 5:

Sob as condições do teorema 4, se para a segunda raiz do polinômio indicial vale que $s_2 \neq s_1$ e $f(s_2 + n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, uma segunda solução linearmente independente da primeira pode ser obtida da mesma forma, ou seja,

$$y_2(x) = (x - x_0)^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{s_2+n}, \text{ com os coeficientes } \{b_n\} \text{ satisfazendo}$$

às mesmas relações de recorrências $(a_n = -\frac{1}{f(s_1 + n)} \sum_{k=0}^{n-1} [(s_1 + k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] a_k)$ com s_2

no lugar de s_1 . Essa solução é para uma vizinhança à direita de x_0 , $0 < x - x_0 < R$, onde R é no mínimo igual ao menor dos raios de convergência das séries de potências de $\overline{P}(x)$ e $\overline{Q}(x)$.

Exemplo: Equação de Euler – Segunda opção

Ache, ao redor da origem, $x_0 = 0$, a segunda solução da EDO tipo Euler

$$x^2 y'' + 7xy' + 4y = 0.$$

De acordo com a equação $f(s) = s(s-1) + \overline{p_0}s + \overline{q_0}$ do teorema 4, o polinômio indicial é dado por

$$f(s) = s(s-1) + 7s + 4,$$

tal que as raízes são $s_1 = -3 + \sqrt{5}$ e $s_2 = -3 - \sqrt{5}$. Nesta situação, pode – se verificar que as raízes diferem por um número não inteiro, ou seja, $f(s_2 + n) \neq 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Portanto, obtém – se uma segunda solução por $y_2(x) = x^{s_2}$, $x > 0$, que está de acordo com o teorema 5, escolhendo $b_0 = 1$ e, para $n = 1, 2, 3, \dots$.

Logo, a solução geral da EDO do tipo Euler é $y(x) = C_1 x^{s_1} + C_2 x^{s_2}$, $x > 0$, onde C_1 e C_2 são constantes aleatórias.

2.9.3 Raízes Iguais

Na situação de que se tenha duas raízes do polinômio indicial sendo iguais, a segunda solução obtida através da chamada série de Frobenius generalizada. Essa série se utiliza da primeira solução, que deve ser obtida inicialmente.

No exemplo a seguir, utiliza – se a EDO de Bessel, de ordem $p = 0$, para que seja inserido a definição da série da de Frobenius e mostrar sua aplicação na obtenção da segunda solução linearmente independente dessa EDO.

Exemplo: equação de Bessel de ordem zero

Seja $y = y(x)$. Obtenha a segunda solução da EDO de Bessel de ordem $p = 0$. $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$, à direita de $x_0 = 0$. A primeira solução é a função de Bessel de ordem zero,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

A segunda solução, linearmente independente da primeira, é gerada na forma de série de Frobenius generalizada

$$y_2(x) = cJ_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad x > 0,$$

tal que os coeficientes c e b_n serão ainda determinados. Derivando duas vezes esta equação, substituindo o resultado na equação $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ e rearranjando os termos, obtém – se

$$b_1 + 4b_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2 b_n + b_{n-2}] x^{n-1} = -2cJ_0'(x).$$

Derivando a expressão $J_0(x)$ na equação $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ tem – se

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n-1}.$$

Portanto,

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2b_n + b_{n-2}]x^{n-1} = c \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1}.$$

Otimizando o cálculo dos coeficientes b_n , multiplica – se a expressão acima por x e desmembra – se o somatório do primeiro membro em dois somatórios, respectivamente, nas potências ímpares e pares, ou seja,

$$\left\{ b_1x + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)^2 b_{2n+1} + b_{2n-1}] x^{2n+1} \right\} + \left\{ 4b_2x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2}] x^{2n} \right\}$$

$$= cx^2 + c \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Desta expressão, pode – se afirmar que $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = 0$, ou seja, os coeficientes ímpares se anulam. Já para os coeficientes pares temos $4b_2 = c$,

$$4n^2b_{2n} + b_{2n-2} = c(-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad \text{para } n \geq 2, \text{ O que nos gera a relação de}$$

recorrência para os coeficientes b_{2n}

$$b_2 = \frac{c}{2^2}, \quad b_4 = -\frac{c}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^4(2!)} \left(1 + \frac{1}{2}\right), \quad b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{c}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Substituindo estes resultados na série geral ($y_2(x) = cJ_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, $x > 0$), obtém – se a segunda solução

$$y_2(x) = cJ_0(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Utilizando a normalização $c = 1$, a segunda solução obtida é chamada de função de Bessel de ordem zero e segunda espécie, sendo representada por $Y_0(x)$.

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Portanto, a solução geral de Bessel de ordem zero pode ser representada por $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$, tal que C_1 e C_2 são constantes aleatórias.

2.9.4 Teorema 6

Em caso de raízes iguais $s_1 = s_2 = \alpha$ do polinômio indicial, $f(s)$, uma segunda solução, $y_2(x)$, à direita do ponto singular regular, x_0 , linearmente independente com a primeira, $y_1(x)$, pode ser obtida pela série de Frobenius $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{\alpha+n}$, suposta conhecida, pode ser dada por $y_2(x) = cy_1(x) \ln|x-x_0| + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^{\alpha+n}$, com as

determinações,
$$b_1 = -\frac{2a_1 + \overline{p_1}a_0}{f(\alpha+1)}, \quad e$$

$$b_n = -\frac{1}{f(\alpha+n)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} [(\alpha+k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] b_k + \sum_{k=0}^{n-1} [\overline{p_{n-k}} a_k + 2na_n] \right\}, \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Exemplo: equação de Euler – Raízes Iguais

Seja $y = y(x)$, encontre, em torno da origem, $x_0 = 0$, a solução geral da EDO tipo Euler

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0,$$

Nesta situação, segundo a equação $f(s) = s(s-1) + \overline{p_0}s + \overline{q_0}$ do teorema 4, o polinômio indicial é dado por $f(s) = s(s-1) - 5s + 9 = (s-3)^2$, cuja raiz $s = 3$ tem multiplicidade igual a dois. A primeira solução é dada por $y_1(x) = x^3$.

Utilizando o teorema 6, tem-se que a segunda solução é representada por

$$y_2(x) = cy_1(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{3+n}.$$

Considerando $p_n = q_n = a_n = 0$, para $n = 1, 2, \dots$, utilizando as equações

$$b_1 = -\frac{2a_1 + \overline{p_1}a_0}{f(\alpha+1)} e$$

$$b_n = -\frac{1}{f(\alpha+n)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} [(\alpha+k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] b_k + \sum_{k=0}^{n-1} [\overline{p_{n-k}} a_k + 2na_n] \right\}, \text{ conclui-se que } b_n = 0,$$

para $n = 1, 2, \dots$. Logo, a segunda solução é $y_2(x) = y_1(x) \ln(x)$, tal que foi escolhido $c = 1$, e a solução geral dessa equação de Euler é:

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \ln(x)$, $x > 0$, onde C_1 e C_2 são constantes aleatórias.

2.10 Raízes diferindo por um inteiro positivo

Considere a segunda raiz indicial do polinômio indicial diferindo da primeira por um inteiro positivo, $s_1 - s_2 = N$, $N = 1, 2, \dots$, uma segunda solução, linearmente independente com a primeira, pode ser adquirida por uma série de Frobenius generalizada. A construção da segunda solução $y_2(x)$ através da série de Frobenius generalizada, precisa de uma primeira solução $y_1(x)$, já determinada.

Exemplo: equação de Bessel de ordem um

Seja $y = y(x)$, ache a segunda solução da equação de Bessel de ordem $p = 1$
 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$, ao redor de $x_0 = 0$.

Considerando a segunda raiz da equação indicial, no caso $s_2 = -1$, resulta em falha (ocorre uma divisão por zero). Utilizando, então, uma série de Frobenius generalizada

$$y_2(x) = c J_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-1+n}, \quad x > 0.$$

Utilizando a normalização $c = 1$, a solução

$y_2(x) = J_1(x) \ln x - x - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+1}]}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$, onde, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. A solução é válida para $x > 0$.

Exemplo: equação de Bessel de ordem $1/2$

Seja $y = y(x)$, ache a segunda da equação de Bessel de ordem $p = 1/2$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0.$$

As raízes do polinômio indicial são $s_1 = 1/2$ e $s_2 = -1/2$, sua diferença sendo, então, $s_1 - s_2 = 1$, inteiro positivo.

As equações que determinam os coeficientes a_n da série Frobenius correspondentes a $s_1 = 1/2$, solução da equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$, são

$$a_1 \left[(s_1 + 2)^2 - \frac{1}{4} \right] = 0,$$

$$a_n \left[(s_1 + n)^2 - \frac{1}{4} \right] = -a_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Essas equações determinam a primeira solução, a qual, devidamente normalizada, constitui – se a função de Bessel de primeira espécie de ordem $p = 1 / 2$, $y_1(x) = J_{1/2}(x)$. Observe – se o que ocorre ao inserir na relação de recorrência acima a segunda raiz $s_2 = - 1 / 2$ no lugar da primeira raiz $s_1 = 1 / 2$. Utiliza – se a notação $\{b_n\}$ para os coeficientes a determinar no lugar de $\{a_n\}$, notação já utilizada na obtenção da primeira solução. Com $s_2 = - 1 / 2$, a primeira destas equações se reduz a uma identidade, independentemente do valor do coeficiente b_1 . Por outro lado, as outras equações determinam os coeficientes pares em função de b_0 , uma constante arbitrária, e os coeficientes ímpares em função de b_1 , também uma constante arbitrária. Especificamente,

$$b_2 = -\frac{b_0}{2.1} = -\frac{b_0}{2!}, \quad b_3 = -\frac{b_1}{3.2} = -\frac{b_1}{3!}$$

$$b_4 = -\frac{b_2}{4.3} = \frac{b_0}{4!}, \quad b_5 = -\frac{b_3}{5.4} = \frac{b_1}{5!}$$

em geral,

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n b_0}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n b_1}{(2n+1)!}, \quad \text{para } n \geq 1$$

Obtém – se assim uma solução de Frobenius $y(x)$ na forma

$$y(x) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-1/2} + b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1/2}, \quad \text{para } x > 0, \text{ tal que } b_0 \text{ e } b_1 \text{ são constantes}$$

aleatórias.

Considerando a normalização

$b_0 2^{1/2} \Gamma(3/2) = 1$ $b_1 = 0$ tendo em vista as propriedades da função $\Gamma(x)$, a solução

$y(x) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-1/2} + b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1/2}$, para $x > 0$, reduz – se à primeira solução a

função de Bessel de ordem $p = 1/2$ e primeira espécie, obtida pela série de Frobenius com $s_1 = 1/2$, a saber

$$y_2(x) = y_1(x) = J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}.$$

Utilizando a normalização

$b_1 2^{-1/2} \Gamma(1/2) = 1$, $b_0 = 0$, a solução $y(x) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-1/2} + b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1/2}$ fornece

a segunda solução $y_2(x) = J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/2}$.

Nota – se que as funções de Bessel $J_{\pm 1/2}(x)$ acima obtidas pode ser reescritas de forma analítica, utilizando as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$. Considerando – se as representações em séries de potências dessas funções trigonométricas, obtemos as expressões alternativas

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right) \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \quad x > 0.$$

A solução geral da equação de Bessel de ordem $1/2$ é, portanto,

$$y(x) = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} [C_1 \sin x + C_2 \cos x], \quad x > 0, \text{ tal que } C_1 \text{ e } C_2$$

são constantes aleatórias.

2.10.1 Teorema 7

No caso em que as raízes s_1 e s_2 do polinômio indicial, $f(s)$ satisfazem condição $s_1 - s_2 = N$, onde N é um número inteiro positivo, uma segunda solução, $y_2(x)$ à direita de um ponto singular regular, x_0 , pode ser obtida na forma

$y_2(x) = cy_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{s_2+n}$, tal que $y_1(x)$ é uma primeira solução em

série de Frobenius

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{s_1+n}, \quad \text{com } a_0 \neq 0,$$

Suposta conhecida e os coeficientes $\{b_n\}$ e c são dados por:

1º Para $n = 0$ e $n = N$,

$$b_0 \neq 0 \text{ qualquer, } b_N = 0$$

2º Para $n = 1, \dots, N - 1$ ($N \neq 1$)

$$b_n = -\frac{1}{f(s_2 + n)} \sum_{k=0}^{n-1} [(s_2 + k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] b_k.$$

3º para $n = N + 1, N + 2, \dots$,

$$b_n = -\frac{1}{f(s_2 + n)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [(s_2 + k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] b_k + c \left[f'(s_2 + N + n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{p_{n-k}} a_k \right] \right\}.$$

4º O coeficiente c é dado por

$$c = -\frac{(\text{sgn}(x))^N}{f'(s_2 + N) a_0} \sum_{k=0}^{N-1} [(s_2 + k) \overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] b_k.$$

Perceba que a fórmula acima permite que c tenha o valor nulo. Sendo assim, a segunda solução, $y_2(x)$ também tem a forma de uma série de Frobenius, similar à primeira solução, $y_1(x)$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^{s_2+n}.$$

Exemplo: Raízes diferindo por um inteiro

Seja $y = y(x)$, obtenha, em torno da origem $x_0 = 0$, solução geral da EDO tipo

Euler

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0.$$

Nesta situação, segundo a equação $f(s) = s(s-1) + \overline{p_0}s + \overline{q_0}$ do teorema 4, o polinômio indicial é dado por

$$f(s) = s(s-1) - 3s + 3 = (s-3)(s-1),$$

Cujas raízes $s_1 = 3$ e $s_2 = 1$ diferem por um número positivo. A primeira solução é dada por

$$y_1(x) = x^3.$$

Pelo teorema 7, a segunda solução é dada por

$$y_2(x) = cy_1(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-1+n}.$$

Como $p_n = q_n = a_n = 0$, para $n = 1, 2, \dots$, usando as equações $b_0 \neq 0$ qualquer,

$$b_N = 0 \text{ e } c = -\frac{(\text{sgn}(x))^N}{f'(s_2 + N)a_0} \sum_{k=0}^{N-1} [(s_2 + k)\overline{p_{n-k}} + \overline{q_{n-k}}] b_k, \text{ conclui-se que } b_n = 0, \text{ para } n = 1,$$

2, ... e $c = 0$. Logo, a segunda solução é $y_2(x) = x^1$, onde $b_0 = 1$. Com C_1 e C_2 constantes aleatórias, a solução geral dessa equação de Euler, para $x > 0$, é

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x$$

3 FUNÇÕES ESPECIAIS

3.1 Função gama

A função gama é uma das mais importantes funções especiais de tal forma que sua teoria é um pré-requisito para o estudo de muitas funções, entre elas a função Bessel. Para $x > 0$, a função gama é definida pela fórmula

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Essa integral é imprópria e converge para todo $x > 0$, e converge uniformemente no intervalo $\delta \leq x \leq 1$, para quaisquer $\delta > 0$ e $L < \infty$; logo, $\Gamma(x)$ é contínua para qualquer $x > 0$.

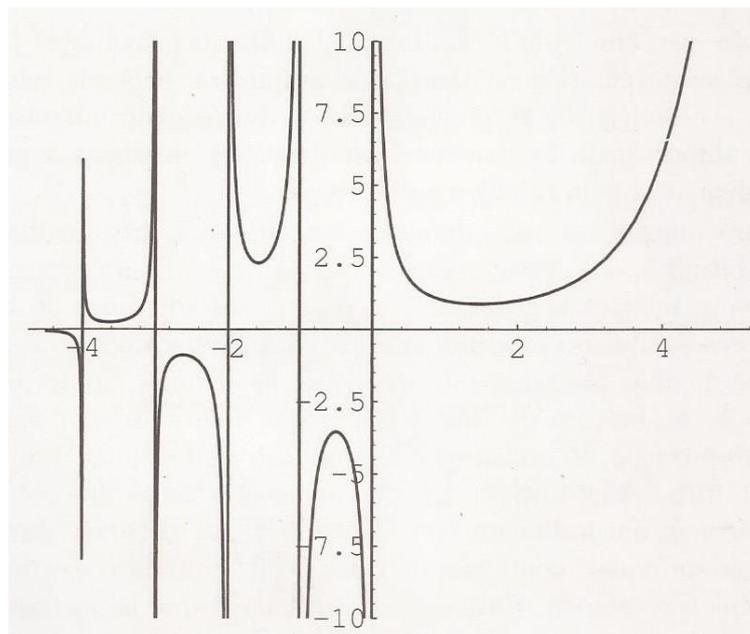


Figura 1: Gráfico da função gama

A função gama satisfaz a equação funcional, a seguir, para todo $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) .$$

Este resultado segue diretamente da definição via integração por partes:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) .$$

O valor numérico de $\Gamma(x)$ pode ser facilmente determinado para alguns valores de x . Por exemplo,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

e

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Os resultados acima, juntamente com a equação funcional ($\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), permitem as seguintes deduções

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.2.3\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi},$$

válidas para n inteiro positivo. Essas fórmulas são verificadas por um argumento de indução. A primeira delas explica o porquê da função $\Gamma(x)$ ser considerada uma extensão do fatorial.

Uma consequência também possível da equação funcional é que os valores numéricos da função gama podem ser computados a partir do conhecimento destes valores em um intervalo $k \leq x \leq k+1$, para $k > 0$ qualquer.

Escrevendo a equação funcional de uma outra forma, temos que:

$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, logo, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, quando $x \rightarrow 0$, uma vez que $\Gamma(x)$ é contínua para todo $x > 0$ e $\Gamma(1) = 1$.

Além disso, a fórmula $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ permite a extensão da definição da função gama para valores negativos não inteiros de seu argumento. Por exemplo,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

e

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

Geralmente, para x diferente de um inteiro negativo temos

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m+1)}{x(x+1)\dots(x+m)}$$

tal que m é um valor inteiro positivo. Percebe - se que esta fórmula mostra que $\Gamma(x)$ se torna ilimitada quando x tende para qualquer inteiro negativo. Caso o inteiro m é escolhido de forma que $m-1 < -x < m+1$, obtém - se da fórmula

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m+1)}{x(x+1)\dots(x+m)} \text{ que:}$$

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x+m}, \text{ quando } x \rightarrow -m.$$

Uma identidade importan que relaciona a função gama a funções mais familiares é

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}\pi x}$$

verdadeira para $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Essa identidade mostra que a função gama não possui zeros, já que o lado direito da equação $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}\pi x}$ é diferente de zero para todos os valores não-inteiros de x (para os quais a identidade é válida) e que para valores inteiros de x a função também não se anula.

Uma identidade importante, bem utilizada em várias transformações e cálculos envolvendo $\Gamma(x)$, é conhecida como a *fórmula de duplicação*

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

Para finalizar, apresenta – se, sem demonstração, um resultado que fornece o comportamento assintótico de $\Gamma(x)$, para valores altos de x . Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}.$$

Este resultado, é representado na forma

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \text{ chamada de fórmula de Stirling}$$

quando x é um inteiro positivo.

3.2 Função de Bessel

As *funções de Bessel* são certas soluções da equação diferencial linear de segunda ordem

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad y = y(x),$$

tal que p é um parâmetro. Esta equação é chamada de *equação de Bessel de ordem p* , e surge no estudo dos fenômenos de propagação de ondas, de condução de calor e de equilíbrio eletrostático em domínios cilíndricos. Devido à sua grande importância prática, com aplicações nos mais variados campos da física, engenharia e matemática, as funções de Bessel merecem um estudo mais detalhado.

3.2.1 Função de Bessel de primeira ordem

O método de Frobenius quando aplicado à equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ para a formação de soluções da forma

$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nos leva à equação indicial $s^2 - p^2 = 0$ (com raízes $\pm p$) e à relação de recorrência será $[(n+s)^2 - p^2]a_n = -a_{n-2}$, onde $a_1 = 0$ e $a_0 \neq 0$.

Considerando, sem perda de generalidade, $p > 0$ (já que p aparece como p^2 na equação $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$), as equações $s^2 - p^2 = 0$ e $[(n+s)^2 - p^2]a_n = -a_{n-2}$ determinam a solução

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)}$$

correspondente à raiz $s = p$ e escolhendo $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$.

Esta função $J_p(x)$ é denominada como *função de Bessel de primeira espécie de ordem p* . Para $p = 0$,

$$J_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \dots,$$

para $p = 1$,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1!2!} + \frac{(x/2)^4}{2!3!} - \frac{(x/2)^6}{3!4!} + \dots \right].$$

A fórmula $J_p(x)$ e os exemplos acima permitem afirmar que se $p = 0$ ou se p é um inteiro par, $J_p(x)$ é uma função par, e que se p é um inteiro ímpar, $J_p(x)$ é uma função ímpar. Entretanto, se p não é um inteiro, em geral a função $J_p(x)$ admite valores complexos quando $x < 0$. Caso queira evitar estes valores, e a consequente necessidade de utilização da teoria das funções de variáveis complexas, deve - se considerar $J_p(x)$ definida apenas para $x > 0$ quando p não é um inteiro.

O teste da razão aplicado à série de potências na equação de $J_p(x)$ mostra que seu raio de convergência é infinito. Este resultado é devido ao fato de que $x = 0$ é ponto singular da equação $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$. Logo, a função

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-p} J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)},$$

é uma função analítica para todo x e para qualquer valor do parâmetro $p \geq 0$. A série acima pode ser considerada para valores negativos de p , é necessário que se tenha atenção quando p é um inteiro negativo. Percebe-se que se p é um inteiro negativo, $p + n + 1$ admite valores negativos para $n = 0, 1, 2, \dots, -p - 2$, e o valor zero para $n = -p - 1$. Logo, $\Gamma(p + n + 1)$ se torna ilimitada para estes valores de n . Nesta situação, define-se os termos correspondentes da série acima como zero. Com esta definição, a série converge não apenas para todos os valores de x mas também para todos os valores do parâmetro p , tal que esta convergência é uniforme em cada variável na região $|x| \leq R$ e $|p| \leq N$, onde R e N são aleatoriamente grandes. Ou seja, é importante observar que se n é grande, então a razão entre os valores absolutos do $(n+1)^{\text{ésimo}}$ e do $n^{\text{ésimo}}$ termos daquela série satisfaz a desigualdade

$$\frac{|x|^2}{4(n+1)(n+1+p)} \leq \frac{R^2}{4(n+1)(n+1-N)}$$

tal que o termo da direita é positivo, independente de x e de p e tende a zero quando n Do. Logo, a fórmula $J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)}$, obtida sob a hipótese $p > 0$, forma uma função analítica para qualquer valor de p . Além disso, como os termos dessa série são funções contínuas das variáveis x e p , a convergência uniforme desta série em ambas variáveis permitem afirmar que $J_p(x)$ é uma função contínua da variável p . (isto é, é uma função contínua da variável p).

Visto que p ocorre somente como p^2 na equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, espera-se que a função

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)}$$

seja uma solução desta equação. A função $J_{-p}(x)$ é denominada *função de Bessel de primeira espécie de ordem - p*. Verifica-se pela substituição na equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ que $J_{-p}(x)$ é solução desta equação.

Se p é um inteiro positivo, $p = m$, os m primeiros termos da série

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)}$$
 se anulam, sendo, assim, escrita na forma

$$J_{-m}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-m+n+1)}$$

considerando $n = k + m$, tem – se

$$J_{-m}(x) = (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(m+k+1)}$$

Logo,

$$J_p(x) = (-1)^m J_m(x), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots,$$

ou seja, as funções de Bessel de ordem inteira negativa são diferentes por um sinal das funções correspondentes de ordem inteira positiva.

Salienta-se que as fórmulas $J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)}$ e

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)},$$
 que definem as funções de Bessel de primeira

espécie de ordens p e $-p$, respectivamente, combinam – se na fórmula

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)}$$
 tal que o parâmetro p pode ser positivo ou

negativo.

Esta fórmula não nos dá muita informação qualitativa sobre as funções de Bessel de primeira espécie, o que nos permite a procurar outras representações. Com esta finalidade, começa – se por apresentar as seguintes relações, obtidas

$$\text{da fórmula } J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)},$$

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x),$$

possíveis para qualquer p . Destas relações obtém - se as fórmulas

$$xJ'_p(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x),$$

$$xJ'_p(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x).$$

A fórmula $xJ'_p(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x)$ segue de $\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$ após divisão por x^{p-1} . Da mesma forma, a fórmula $xJ'_p(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x)$ segue de $\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$. A adição e a subtração de $xJ'_p(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x)$ e $xJ'_p(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x)$ seguidas da divisão por x fornecem

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x)$$

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

Esta última equação permite o cálculo dos valores numéricos de $J_p(x)$ para qualquer valor inteiro de p a partir do conhecimento destes valores para as funções $J_0(x)$ e $J_1(x)$. Isto denomina - se relação de recorrência pura, uma vez que não envolve as derivadas.

A função geratriz para a função de Bessel $J_n(x)$ é

$$g(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) t^n = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) g$$

a solução desta equação diferencial é

$$g(x, t) = g_0(t) \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) x \right\}.$$

Onde $x=0, g(0,t) = g_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0)t^n = 1$, já que $J_0(0) = 1$ e $J_n(0) = 0$

para $n \neq 0$. Logo, a função geratriz é

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)x\right\}$$

Observa-se que, para cada x fixo, esta função é a representação em série de Laurent da função $\exp\left\{\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)x\right\}$, tal que os coeficientes são dados por

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp\left\{\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)x\right\} t^{-(n+1)} dt,$$

tal que C é uma curva fechada qualquer no plano complexo envolvendo a origem. Ao escolher a circunferência unitária $t = e^{i\theta}$ para esta curva, obtém-se

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{2\pi} \exp\{i(x\sin\theta - n\theta)\} d\theta,$$

ou, por simetria,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta.$$

3.2.2 Solução geral da equação de Bessel. Funções de Bessel de segunda espécie

Considerando que $p > 0$ não é um inteiro, então as funções $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente independentes. Para $x = 0$ a função $J_p(x)$ se anula de modo que $J_{-p}(x)$ se torna ilimitada. O comportamento assintótico destas funções quando $x \rightarrow 0$ é dado por

$$J_p(x) \sim \frac{(x/2)^p}{\Gamma(p+1)} \quad \text{e} \quad J_{-p}(x) \sim \frac{(x/2)^{-p}}{\Gamma(-p+1)}$$

Logo, para $p > 0$ não inteiro, a solução geral para a equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ é dada por $y(x) = C_1J_p(x) + C_2J_{-p}(x)$ tal C_1 e C_2 são constantes aleatórias.

Quando p é um inteiro, as soluções $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente dependentes. Assim sendo, a solução representada acima não é mais uma expressão para a solução geral da equação $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$. Para que se obtenha uma expressão para a solução geral desta equação que seja válida para qualquer valor de p , introduz a seguir as funções de Bessel de segunda espécie.

$$x^2 \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)'' + x \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)' + (x^2 - p^2) \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) - 2py = 0.$$

Como $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, então

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial p} - (-1)^m \frac{\partial J_{-p}}{\partial p} \right) \Big|_{p=m}$$

É uma solução da equação de Bessel ($x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$) para $p = m$.

Motivados por isto e pela regra de L'Hospital define –se as *funções de Bessel de segunda espécie de ordem p*

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}.$$

Para $p = m$ inteiro, o lado direito de $Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}$ se torna indeterminado, e sendo assim, define – se $Y_m(x)$, como o limite

$$Y_m(x) = \lim_{p \rightarrow m} Y_p(x) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_p}{\partial p} - (-1)^m \frac{\partial J_{-p}}{\partial p} \right) \Big|_{p=m} \right].$$

Ao substituir as séries $J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)}$ e

$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)}$ nesta expressão, diferenciando-as com respeito a p e fazendo $p = m$, obtém-se

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{m+2n}}{n!(m+n)!} \left(\sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

tal que $\gamma = -\Gamma'(1) = 0,57721566\dots$ é a constante de Euler. Quando $m = 0$,

$$Y_0 = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

A independência linear das funções $J_p(x)$ e $Y_p(x)$ é originada da independência linear de $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$, para valores não inteiros de p , e do seu comportamento próximo de $x = 0$, para valores inteiros de p .

O comportamento assintótico de $Y_m(x)$ quando $x \rightarrow 0$ segue de

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{m+2n}}{n!(m+n)!} \left(\sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}$, quando $x \rightarrow 0$, $Y_m(x) \sim -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}$, quando $x \rightarrow 0$, para $m = 1, 2, \dots$

Isso mostra que $Y_m(x)$ se torna ilimitada quando $x \rightarrow 0$. Logo, para qualquer valor de p a solução geral da equação de Bessel (4.15) pode ser escrita como

$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$, onde C_1 e C_2 são constantes aleatórias.

As funções de Bessel de segunda espécie satisfazem as mesmas relações de recorrência que as funções de primeira espécie. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx} \left[x^p Y_p(x) \right] = x^p Y_{p-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-p} Y_p(x) \right] = -x^{-p} Y_{p+1}(x),$$

$$Y_{p-1}(x) + Y_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} Y_p(x),$$

$$Y_{p-1}(x) - Y_{p+1}(x) = 2Y_p'(x).$$

Com p não-inteiro, a validade destas fórmulas segue de $Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}$ e das relações correspondentes satisfeitas por $J_p(x)$.

Para valores inteiros de $p = m$, estas fórmulas são obtidas tomando-se o limite $p \rightarrow m$ e observando-se que todas as funções envolvidas dependem continuamente de p .

A fórmula $Y_m(x) = \lim_{p \rightarrow m} Y_p(x) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_p}{\partial p} - (-1)^m \frac{\partial J_{-p}}{\partial p} \right) \Big|_{p=m} \right]$ traz como

consequência que, se $p = m$ é um inteiro, então

$Y_{-m}(x) = (-1)^m Y_m(x)$ e isso a dependência linear de $Y_m(x)$ e $Y_{-m}(x)$ reduz o cálculo dos valores numéricos de $Y_{-m}(x)$ àqueles de $Y_m(x)$.

3.2.3 Comportamento das funções de Bessel

Em vários aspectos as funções $J_p(x)$ e $Y_p(x)$ têm comportamento bastante similar ao das funções $(\operatorname{sen} x)/\sqrt{x}$ e $(\cos x)/\sqrt{x}$ ou melhor, ao de uma combinação linear destas funções. Podemos ver isto introduzindo na equação $(x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0)$ a mudança de variáveis $u(x) = \sqrt{x}y(x)$, que a altera na seguinte equação para a função $u(x)$

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} \right) u = 0,$$

denominada *forma normal da EDO de Bessel de ordem p*. Quando $x \rightarrow \infty$, esta equação se aproxima da equação

$$u'' + u = 0$$

Tal que as soluções linearmente independentes são

$$u_1(x) = \cos x \quad \text{e} \quad u_2(x) = \operatorname{sen} x.$$

Logo, para valores grandes, o comportamento de $J_p(x)$ e $Y_p(x)$ seja o de uma combinação linear das funções $(\cos x)/\sqrt{x}$ e $(\operatorname{sen} x)/\sqrt{x}$. Isto gera os seguintes resultados

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

A notação $O(1/x^\alpha)$ (que se lê "ordem de $O(1/x^\alpha)$ ") indica que o erro cometido na aproximação é majorado, para x positivo e grande, por uma constante positiva multiplicada pelo fator $1/x^\alpha$. Quando x tende ao infinito, o erro vai para zero, assim como $1/x^\alpha$.

Uma consequência destas fórmulas é que as funções $J_p(x)$ e $Y_p(x)$ possuem um número infinito de zeros, localizados nas proximidades dos zeros das funções $\cos(x - \pi/4 - p\pi/2)$ e $\operatorname{sen}(x - \pi/4 - p\pi/2)$, respectivamente.

Apresenta-se no quadro abaixo os primeiros zeros das funções de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$ e $J_2(x)$.

$J_0(x)$	2.404	5.520	8.654	11.792
$J_1(x)$	3.832	7.016	10.173	13.323
$J_2(x)$	5.135	8.417	11.619	14.795

Os gráficos das funções $J_0(x)$, $J_1(x)$ e $J_2(x)$, e os das funções $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ são apresentados nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

Quando $p = \pm 1/2$, a forma normal da EDO de Bessel se reduz à equação $u'' + u = 0$. Neste caso, valem os resultados

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

$$Y_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

O comportamento assintótico das funções de Bessel $J_p(x)$ e $Y_p(x)$ quando $x \rightarrow 0$ segue das fórmulas $J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)}$, $J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(-p+n+1)}$ e $Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}$. Obtém-se

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p [1 + O(x^2)], \quad (x \rightarrow 0)$$

$$Y_p(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \Gamma(p) \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} [1 + O(x^2)] & (x \rightarrow 0, p > 0) \\ \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772\dots \right] [1 + O(x^2)] & (x \rightarrow 0, p = 0) \end{cases}$$

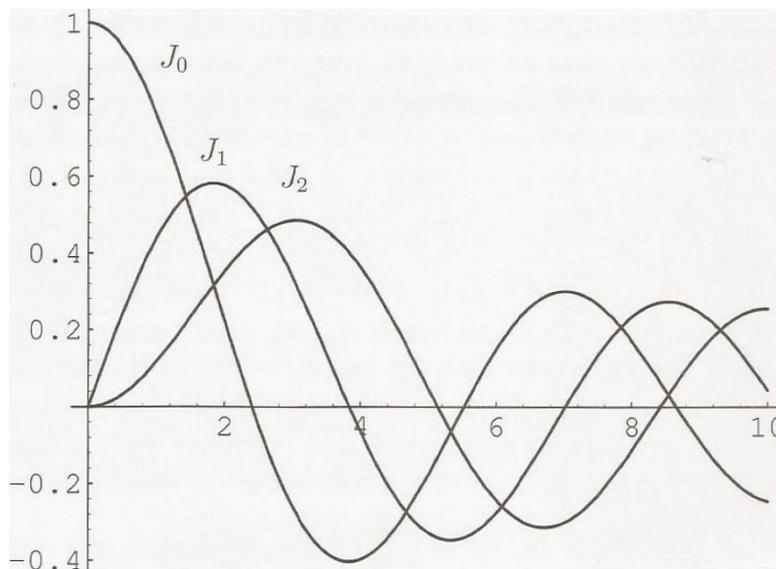


Figura. 2: Gráfico das funções de Bessel $J_n(x)$, para $n = 0, 1$ e 2 .

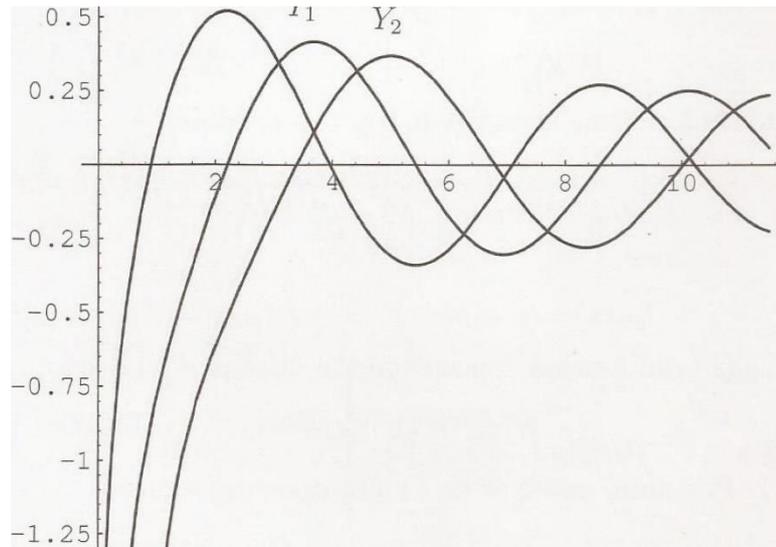


Figura 3: Gráfico das funções de Bessel $Y_n(x)$, para $n = 0, 1$ e 2 .

3. 2. 4 Ortogonalidade das funções $J_p(\lambda x)$

A equação $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0$, $y = y(x)$, tal que λ é um parâmetro, que surge com frequência quando o método da separação de variáveis é utilizado para a resolução das equações diferenciais parciais fundamentais da física. As soluções desta equação são obtidas a partir das soluções da equação $(x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0)$. Se a função $y = y(x)$ é uma solução desta última, a função $y = y(\lambda x)$ é uma solução de $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0$.

Será apresentado relações de ortogonalidade satisfeitas pelas funções $J_p(\lambda x)$. Estas relações são de extrema importância para o problema da representação de funções nas chamadas séries de Fourier-Bessel. Esta representação é um caso a parte da teoria de representação de funções em termos das autofunções dos chamados operadores de Sturm-Liouville.

Considere λ e μ dois valores não-negativos e considere as funções $y = J_p(\lambda x)$ e $z = J_p(\mu x)$, com $p > -1$. De acordo com as observações, estas funções satisfazem, respectivamente, as equações:

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0,$$

$$x^2 z'' + xz' + (\mu^2 x^2 - p^2)z = 0.$$

Realizando a subtração da primeira equação multiplicada por z da segunda multiplicada por y e dividindo o resultado por x , obtém – se

$$[x(yz' - zy')] = (\lambda^2 - \mu^2)xyz.$$

Integrando esta última equação de 0 a 1, o resultado é

$$[x(yz' - zy')] \Big|_{x=0}^{x=1} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 xyz \, dx$$

como

$$y = J_p(\lambda x) = x^p \phi(x) \quad \text{e} \quad z = J_p(\mu x) = x^p \psi(x),$$

tal que $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são funções continuamente diferenciáveis, portanto

$$[x(yz' - zy')] \Big|_{x=0} = 0$$

para $p > -1$. Logo, no lugar de $[x(yz' - zy')] \Big|_{x=0}^{x=1} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 xyz \, dx$

escreve – se

$$\mu J_p(\lambda) J_p'(\mu) - \lambda J_p(\mu) J_p'(\lambda) = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx.$$

Quando $\lambda \neq \mu$, a fórmula acima pode ser escrita também como

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = \frac{\mu J_p(\lambda) J_p'(\mu) - \lambda J_p(\mu) J_p'(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

Para obter o valor da integral quando $\lambda = \mu$ considera-se o limite $\mu \rightarrow \lambda$ na equação acima e usa-se a regra de L'Hospital para conseguir a indeterminação do membro do lado direito desta equação, obtendo o resultado

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x)^2 dx = \frac{1}{2} \left[(J_p'(\lambda))^2 + \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) (J_p(\lambda))^2 \right]$$

Estas duas últimas equações nos fornecem as seguintes conclusões:

1ª: Quando λ e μ são raízes da função de Bessel $J_p(x)$, ou seja,

$$J_p(\lambda) = J_p(\mu) = 0,$$

tem – se

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{2} (J_p'(\lambda))^2, & \text{se } \lambda = \mu. \end{cases}$$

2ª: Quando λ e μ são raízes da derivada de $J_p(x)$, ou seja,

$$J_p'(\lambda) = J_p'(\mu) = 0$$

tem – se

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) (J_p(\lambda))^2, & \text{se } \lambda = \mu. \end{cases}$$

3ª Quando λ e μ são raízes da equação $x J_p'(x) + h J_p(x) = 0$, tal que h é constante, ou seja,

$$\lambda J_p'(\lambda) + h J_p(\lambda) = \mu J_p'(\mu) + h J_p(\mu) = 0,$$

tem – se também

$$\int_0^1 x J_{pk}(\lambda x) J_p(\mu x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2 - p^2}{\lambda^2}\right) (J_p(\lambda))^2, & \text{se } \lambda = \mu. \end{cases}$$

3.2.5 Funções de Bessel com argumento imaginário

É com frequência que se observa os problemas da física matemática que levam a equações muito parecidas com as equações de Bessel. Entre elas, merece um destaque especial a equação

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0 \quad y = y(x)$$

conhecida como equação de Bessel modificada de ordem p . As soluções desta equação podem ser obtidas através das soluções das equações de Bessel correspondentes pela substituição $x \mapsto ix$ nestas últimas. Qualquer solução desta equação pode ser escrita como $y(x) = C_1 J_p(ix) + C_2 Y_p(ix)$, tal que C_1 e C_2 são constantes aleatórias. Contudo, estas soluções admitem valores complexos. Por isso, escolhe – se

$$y(x) = C_1 I_p(x) + C_2 K_p(x)$$

tal que as funções $I_p(x)$ e $K_p(x)$ são denominadas *funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécies*, respectivamente. Estas funções estão ligadas às funções $J_p(x)$:

$$I_p(x) = (i)^{-p} J_p(ix)$$

$$K_p(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\operatorname{sen} p\pi}, & \text{para } p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \lim_{p \rightarrow m} K_p(x), & \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Verifica – se, a partir da representação em série de potências da função $J_p(x)$ que $I_p(x)$ e, portanto, $K_p(x)$, admitem valores reais para valores reais e positivos da variável x . Além disso, estas funções não possuem zeros no eixo real positivo $x > 0$, isso pode ser observado na figura 4.

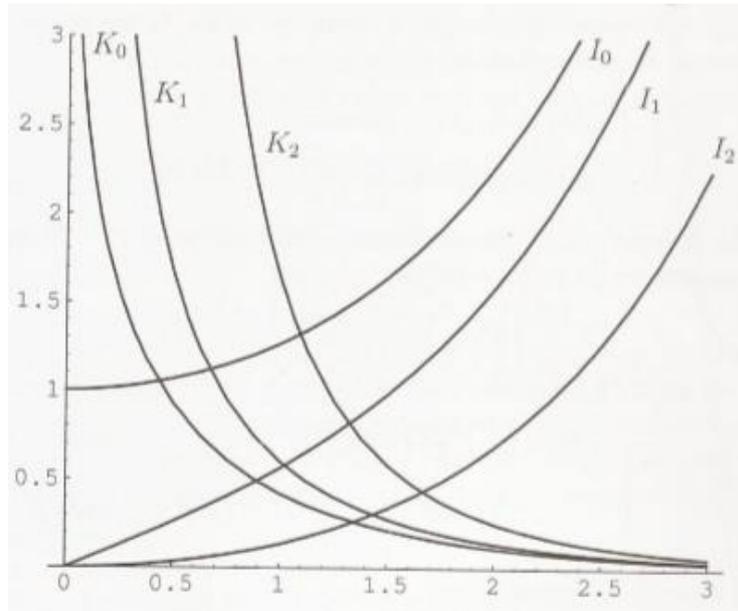


Figura 4: Gráfico das funções de Bessel modificadas $I_p(x)$ e $K_p(x)$, para $p=0, 1$ e 2 .

As funções $I_p(x) = (i)^{-p} J_p(ix)$ e $K_p(x) = \begin{cases} \frac{\pi I_{-p} - I_p(x)}{2 \operatorname{sen} p\pi}, \\ \lim_{p \rightarrow m} K_p(x), \end{cases}$ tornam evidente que

as funções $I_p(x)$ e $K_p(x)$ satisfazem propriedades análogas àquelas satisfeitas pelas funções $J_p(x)$. Como exemplo,

$$\begin{cases} I_{p-1}(x) + I_{p+1}(x) = 2 \frac{d}{dx} [I_p(x)], \\ I_{p-1}(x) - I_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} I_p(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{p-1}(x) + K_{p+1}(x) = 2 \frac{d}{dx} [K_p(x)], \\ K_{p-1}(x) - K_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} K_p(x). \end{cases}$$

As relações envolvendo a função $I_p(x)$ são deduzidas pelas propriedades

da função $J_p(x)$. Estas relações ligadas à definição $K_p(x) = \begin{cases} \frac{\pi I_{-p} - I_p(x)}{2 \operatorname{sen} p\pi}, \\ \lim_{p \rightarrow m} K_p(x), \end{cases}$ permitem

a dedução das correspondentes envolvendo $K_p(x)$ para valores não inteiros de

p . Os resultados podem ser estendidos para valores inteiros de p usando-se a dependência contínua de $K_p(x)$ em p .

Duas outras fórmulas são

$$\begin{cases} I_{-m}(x) = I_m(x), \\ K_{-p}(x) = K_p(x), \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \text{para } p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array}$$

O comportamento assintótico das funções $I_p(x)$ e $K_p(x)$, quando $x \rightarrow 0$, é caracterizado pelas relações

$$I_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p \{1 + O(x^2)\},$$

$$K_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \Gamma(p) \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \{1 + O(x^2)\}, & \text{para } p > 0, \\ -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5722\dots\right] \{1 + O(x^2)\}, & \text{para } p = 0. \end{cases}$$

e, quando $x \rightarrow \infty$, pelas relações

$$I_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

$$K_p(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

De maneira análoga ao caso da equação de Bessel, a equação de Bessel modificada ocorre muitas vezes na forma que possui um parâmetro

$$x^2 y'' + xy' - (\lambda^2 x^2 + p^2)y = 0 \quad y = y(x),$$

tal que as soluções, para qualquer valor de p , podem ser obtidas diretamente das soluções da equação de Bessel modificada pela substituição $x \mapsto \lambda x$:

$$y(x) = C_1 I_p(\lambda x) + C_2 K_p(\lambda x).$$

Outra equação relacionada com a equação de Bessel que possui uma grande importância é

$$x^2 y'' + xy' + (-ix^2 - p^2)y = 0.$$

Esta equação pode ser considerada ou como a equação de Bessel de ordem p com parâmetro $\lambda = \sqrt{-i}$ ou como a equação de Bessel modificada de ordem p com parâmetro $\lambda = \sqrt{i}$. Observando o primeiro ponto de vista, sua solução geral pode ser escrita como

$$y(x) = C_1 J_p(\sqrt{-ix}) + C_2 Y_p(\sqrt{-ix}).$$

Já de acordo com o segundo tipo, pode ser escrita como

$$y(x) = C_1 I_p(\sqrt{ix}) + C_2 K_p(\sqrt{ix}).$$

Uma solução geral pode ser formada a partir de quaisquer duas soluções particulares linearmente independentes. É comum, quando se trata do estudo de $x^2 y'' + xy' + (-ix^2 - p^2)y = 0$, a escolha do par $J_p(\sqrt{-ix})$, $K_p(\sqrt{ix})$, para este objetivo. Com esta escolha, e lembrando que $-i = i^3$, temos a seguinte expressão para a solução geral de $x^2 y'' + xy' + (-ix^2 - p^2)y = 0$

$$y(x) = C_1 J_p(i^{3/2}x) + C_2 K_p(i^{1/2}x) \text{ tem-se}$$

$$J_p(i^{3/2}x) = \left(\frac{i^{3/2}x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i^{3/2}x/2)^{2n}}{n! \Gamma(p+n+1)}$$

Lembrando que i^{3n} assume apenas os valores ± 1 e $\pm i$, dependendo de n ser par ou ímpar, a série acima pode ser separada em sua parte real e sua parte imaginária:

$$J_p(i^{3/2}x) = \left(\frac{i^{3/2}x}{2}\right)^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{4j}}{(2j)! \Gamma(p+2j+1)} + i \left(\frac{i^{3/2}x}{2}\right)^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{4j+2}}{(2j+1)! \Gamma(p+2j+2)}.$$

Ainda, como $i^{3p/2} = \cos(3\pi p/4)$, pode – se escrever

$$J_p(i^{3/2}x) = \left(\cos\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \sum_r -\text{sen}\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \sum_i \right) + i \left(\cos\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \sum_i + \text{sen}\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \sum_r \right)$$

tal que \sum_r e \sum_i correspondem a primeira e a segunda série em

$$J_p(i^{3/2}x) = \left(\frac{i^{3/2}x}{2}\right)^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{4j}}{(2j)! \Gamma(p+2j+1)} + i \left(\frac{i^{3/2}x}{2}\right)^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{4j+2}}{(2j+1)! \Gamma(p+2j+2)},$$

respectivamente.

Esta última expressão separa as partes real e imaginária da função $J_p(i^{3/2}x)$. A série que constitui a parte real define a função $\text{ber}_p(x)$ e aquela que constitui a parte imaginária define a função $\text{bei}_p(x)$. Esta nomenclatura é sugerida pela relação destas funções com as funções de Bessel.

De maneira similar, a função $K_p(i^{1/2}x)$ pode ser decomposta em suas partes real e imaginária, que definem as funções $\text{ker}_p(x)$ e $\text{kei}_p(x)$, respectivamente. Logo, a solução geral de $x^2 y'' + xy' + (-ix^2 - p^2)y = 0$ pode ser representada na maneira

$$y(x) = C_1(\text{ber}_p(x) + i\text{bei}_p(x)) + C_2(\text{ker}_p(x) + i\text{kei}_p(x))$$

Nota - se que a função $\text{ber}_p(x) + \text{bei}_p(x)$ é finita em $x = 0$ e é ilimitada quando $x \rightarrow \infty$, ao mesmo tempo que a função $\text{ker}_p(x) + i\text{kei}_p(x)$ se torna ilimitada quando $x \rightarrow 0$ e tende para zero quando $x \rightarrow \infty$. Observe as figuras 5 e 6 a seguir.

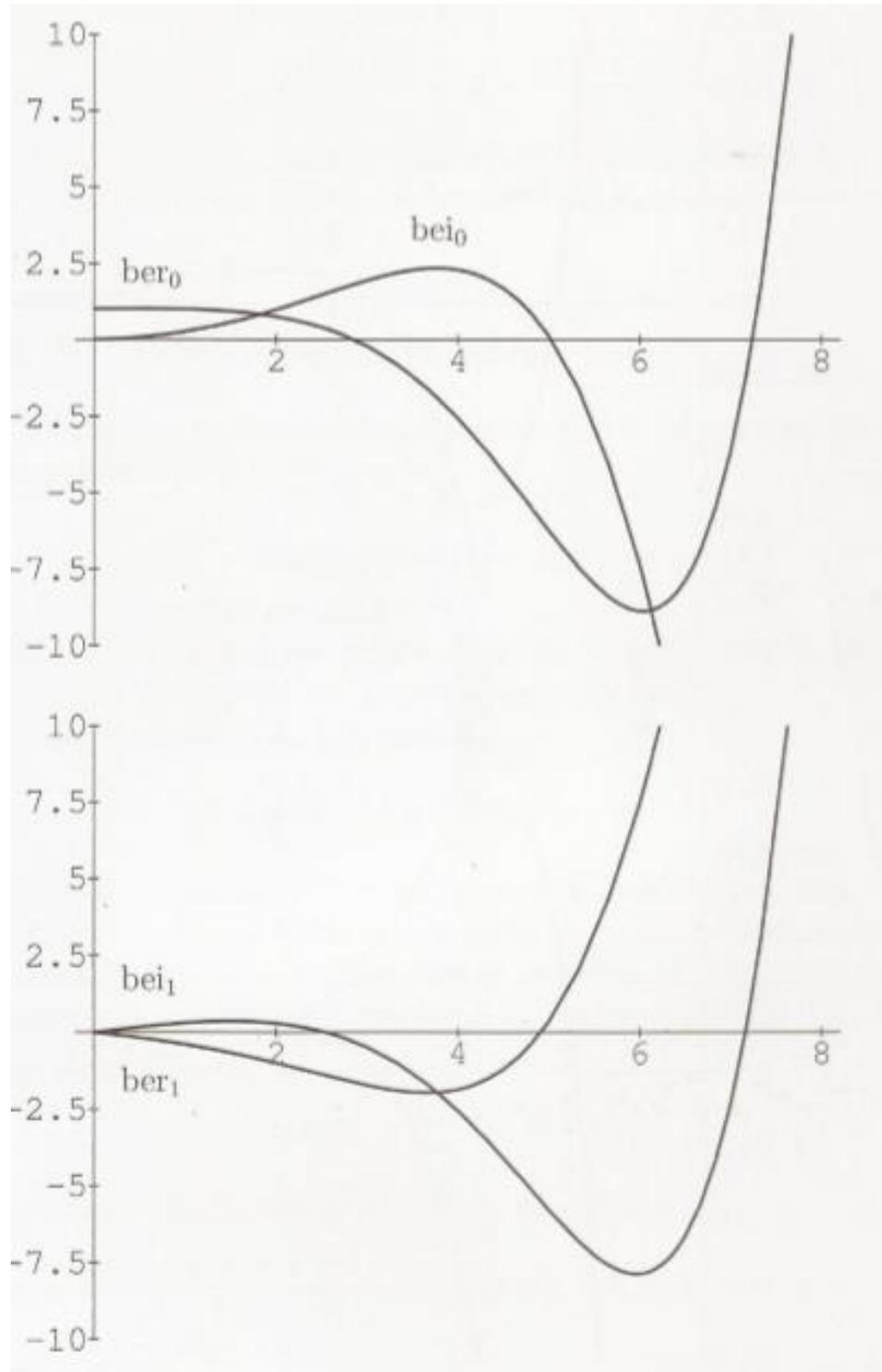


Figura 5: Gráficos das funções de $ber_p(x)$ e $bei_p(x)$, para $p = 0, 1$.

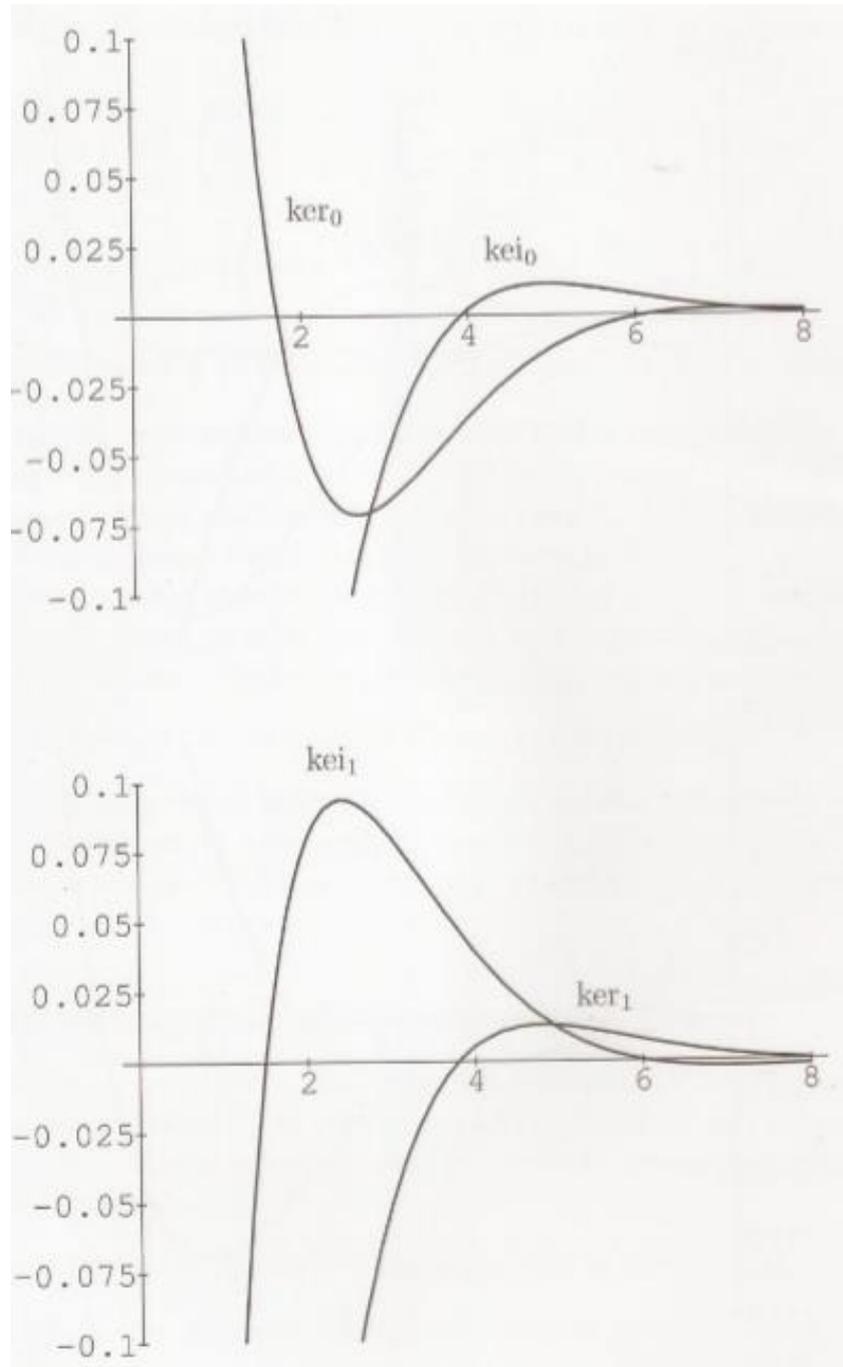


Figura 6: Gráficos das funções de $ker_p(x)$ e $kei_p(x)$, para $p = 0, 1$.

3.2.6 Equações redutíveis à Equação de Bessel

Há várias equações diferenciais tal que as soluções podem ser expressas em termos das funções de Bessel. As equações a seguir são exemplos deste fato.

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0; \quad x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0; \quad x^2 y'' + xy' - (\lambda^2 x^2 + p^2)y = 0;$$

$$x^2 y'' + xy' + (-ix^2 - p^2)y = 0.$$

Estas equações, são casos particulares da classe de equações a seguir

$$x^2 y'' + x(a + 2bx^r)y' + [c + dx^{2s} + b(a+r-1)x^r + b^2 x^{2r}]y = 0.$$

que, se $(1-a)^2 \geq 4c$ e $d, r, s \neq 0$, possui como solução geral

$$y(x) = x^\alpha e^{-\beta x^r} [C_1 J_p(\lambda x^s) + C_2 Y_p(\lambda x^s)],$$

$$\text{tal que } \alpha = \frac{1-a}{2}, \quad \beta = \frac{b}{r}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{|d|}}{s} \text{ e } p = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{2s}.$$

Caso $d < 0$, as funções J_p e Y_p devem ser substituídas pelas funções I_p e K_p , respectivamente. Caso p não seja um valor inteiro, as funções Y_p e K_p podem ser trocadas pelas funções J_{-p} e I_{-p} .

3.3. Função de Legendre

As soluções da equação de Legendre de ordem p

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \quad y = y(x),$$

tal que p é um parâmetro real ou complexo.

A equação de Legendre (com p inteiro) aparece, por exemplo, quando se estuda a equação de Laplace em coordenadas esféricas.

Representando a equação de Legendre na forma

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2} y = 0$$

Percebe – se que a origem $x = 0$ é um ponto ordinário para esta equação. Por consequência, o método de Frobenius pode ser aplicado para a construção de duas soluções linearmente independentes na forma de séries de potências centradas na origem, convergentes, no mínimo, no intervalo $|x| < 1$.

A substituição da série

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

na equação de Legendre fornece a relação de recorrência

$$c_{n+2} = -\frac{(p-k)(p+k+1)}{(k+1)(k+2)} c_k, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots,$$

$P(z) = \frac{2z}{1-z^2}$ e $Q(z) = \frac{p(p+1)}{1-z^2}$ tal que c_0 e c_1 arbitrários, de onde obtém – se

$$y(x) = c_0 \left(1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} x^4 + \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{4!} x^5 + \dots \right)$$

De maneira mais complexa, a solução acima pode ser escrita como

$$y(x) = c_0 p_p(x) + c_1 q_p(x)$$

tal que

$$p_p = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k p(p-2)\dots(p-2k+2)(p+1)\dots(p+2k-1)}{(2k)!} x^{2k},$$

$$q_p(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (p-1)(p-3)\dots(p-2k+1)(p+2)\dots(p+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Pode – se verificar que, as duas séries de potência acima são convergentes para $|x| < 1$ e representam, neste intervalo, funções linearmente independentes. Consequentemente, como c_0 e c_1 são constantes arbitrárias, a equação $y(x) = c_0 p_p(x) + c_1 q_p(x)$ define a solução geral da EDO de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1) = 0$.

Agora, observa – se o caso de p ser um inteiro não-negativo $p = n$. Referindo-se à relação de recorrência $c_{n+2} = -\frac{(p-k)(p+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k$, vemos que

$$c_{n+2} = c_{n+4} = \dots = 0.$$

Como consequência, quando n é par, a série para $p_n(x)$ termina em x^n , enquanto a série de $q_n(x)$ tem infinitos termos. Quando n é ímpar, a série para $q_n(x)$ termina em x^n , enquanto a série para $p_n(x)$ é infinita. Ou seja, para n par, $p_n(x)$ é um polinômio de grau n . Para n ímpar, $q_n(x)$ é um polinômio de grau n .

Os polinômios $p_n(x)$, para n par, e $q_n(x)$, para n ímpar, após as apropriadas normalizações indicadas a seguir, constituem os *polinômios de Legendre*, denotados simplesmente por $P_n(x)$. É usual referir-se aos polinômios de Legendre $P_n(x)$ como *funções de Legendre de primeira espécie e ordem n* . Estes polinômios são utilizados na resolução de problemas da física matemática. Da mesma maneira, as séries infinitas correspondentes às outras soluções que não os polinômios $P_n(x)$ são denotadas por $Q_n(x)$, e também chamadas de *funções de Legendre de segunda espécie de ordem n* .

As normalizações que definem as funções de Legendre $P_n(x)$ são simplesmente aquelas que fazem estas funções admitirem o valor 1 para $x = 1$. Temos

$$P_n(x) = \begin{cases} p_n(x) / p_n(1), & \text{se } n \text{ é par,} \\ q_n(x) / q_n(1), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Nas funções $Q_n(x)$, as normalizações são dadas por

$$Q_n(x) = \begin{cases} p_n(1)q_n(x), & \text{se } n \text{ é par,} \\ -q_n(1)p_n(x), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Os polinômios de Legendre $P_n(x)$ podem ser escritos na forma

$$N = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ é par,} \\ (n-1)/2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

São as seguintes expressões para os polinômios de Legendre de ordem $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; o gráfico correspondente corresponde a figura 7 a seguir.

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

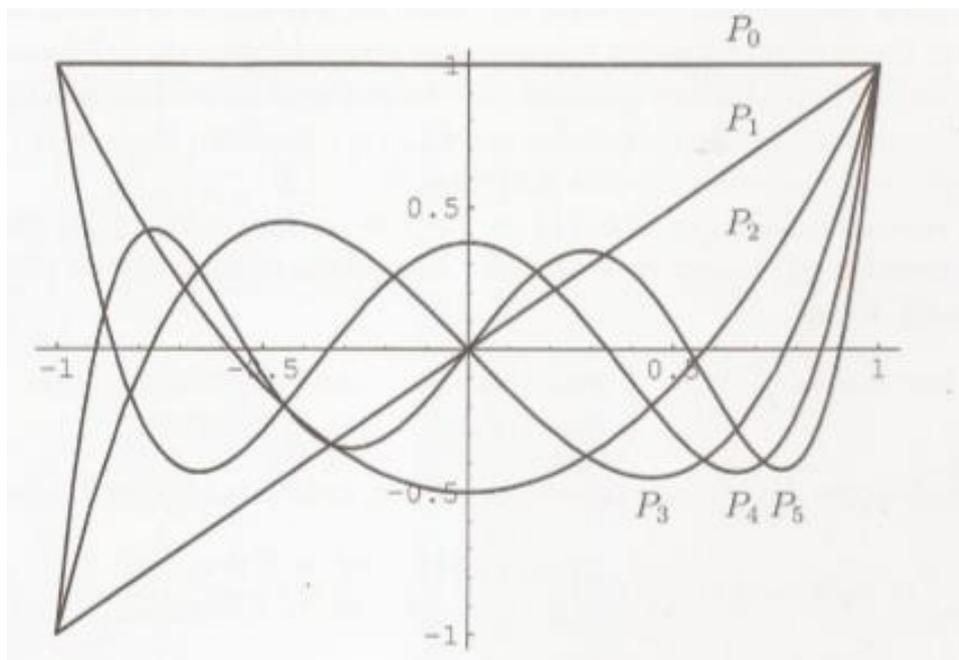


Figura 7: Gráficos dos polinômios de $P_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 .

Os polinômios de Legendre $P_n(x)$ assumem, ainda, uma outra descrição, chamada de *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Pela fórmula de Rodrigues, o polinômio de Legendre $P_n(x)$ é dado em termos de n diferenciações do binômio $(x^2 - 1)^n$. Para verificá-la, desenvolve-se o referido binômio pela fórmula de Newton

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

e diferencia - se o resultado n vezes.

As funções $Q_n(x)$ podem ser obtidas diretamente pelo método de redução da ordem, aplicado à equação de Legendre, utilizando-se a primeira solução $P_n(x)$, e as normalizações dadas pela condição dita anteriormente (

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_n(1)q_n(x), \\ -q_n(1)P_n(x), \end{cases}.$$

Tem-se as seguintes fórmulas para as funções $Q_n(x)$ de ordem $n = 0, 1, 2, 3$; cujo gráfico é representado na Figura 7:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

$$Q_1(x) = P_1(x)Q_0(x) - 1,$$

$$Q_2(x) = P_2(x)Q_0(x) - \frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x) = P_3(x)Q_0(x) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

As expressões acima para $Q_n(x)$ afirmam que estas funções não são definidas nos extremos do intervalo $-1 < x < 1$.

A solução geral da EDO de Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)=0$ de ordem inteira não negativa $p = n$, pode ser representada na maneira

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

tal que C_1 e C_2 são constantes aleatórias, onde $P_n(x)$ é a função de Legendre de primeira espécie (ou polinômio de Legendre) de ordem n e $Q_n(x)$ é a função de Legendre de segunda espécie de ordem n (dada por uma série infinita convergente no intervalo $|x| < 1$).

Os polinômios de Legendre possuem várias propriedades que tornam mais simples a sua utilização. Sendo assim, especial destaque ocupam as fórmulas de recorrência que relacionam polinômios de ordens consecutivas.

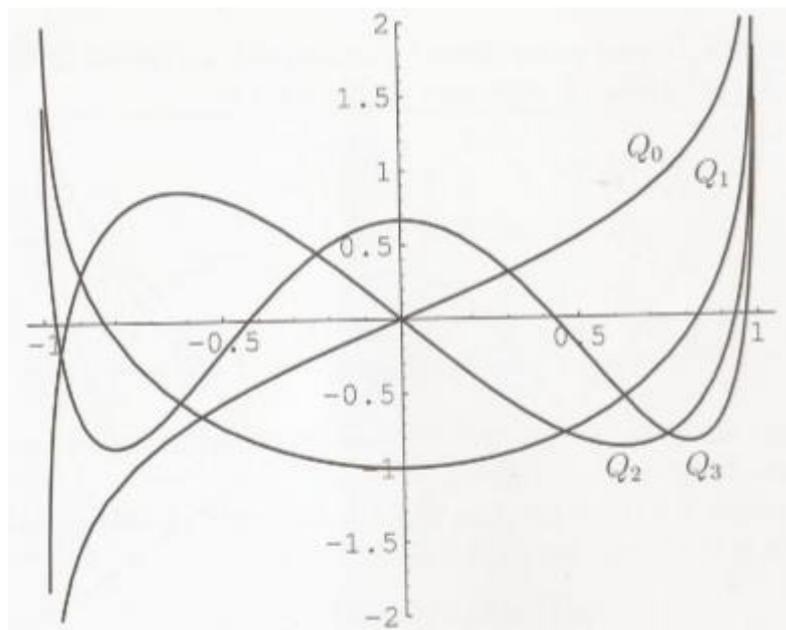


Figura 8: Gráficos das funções de Legendre de segunda espécie $Q_n(x)$, para $n = 0, 1, 2$ e 3 .

3.3.1 Ortogonalidade dos polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade no intervalo $-1 < x < 1$:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{para } m = n. \end{cases}$$

3.3.2 Funções de Legendre associadas

São funções bem usuais nas aplicações da física matemática as chamadas *funções de Legendre associadas*. Estas funções são certas soluções da *equação de Legendre associada*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad y = y(x),$$

tal que n e m são inteiros, $n \geq m$, e $n \geq 0$.

Observa – se primeiro a situação em que m é um inteiro não-negativo. Inserindo na equação acima a alteração de variáveis

$y(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x)$, no intervalo $|x| < 1$, tem – se que $u(x)$ a nova equação

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + (n+m)(n+m+1)u = 0.$$

Esta equação é a mesma obtida após m derivações da EDO de Legendre de ordem n . Como consequência, pode - se representar a solução geral da EDO de Legendre associada de ordem n e grau m (

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0) \text{ na forma}$$

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Y(x),$$

tal que

$$Y(x) = c_0 P_n(x) + c_1 Q_n(x)$$

é a solução geral da EDO de Legendre de ordem n e C_1 e C_2 são constantes aleatórias.

Define - se as funções de Legendre associadas de *ordem n* e *grau m* de primeira e segunda espécie, denotadas, respectivamente, por $P_n^m(x)$ e $Q_n^m(x)$, pelas expressões

$$\begin{cases} P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \\ Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x) \end{cases}$$

Como caso particular, tem - se

$$P_n^0(x) = P_n(x) \quad \text{e} \quad Q_n^0(x) = Q_n(x).$$

As funções de Legendre associadas de primeira espécie $P_{nm}(x)$ de ordem $n = 1, 2$, são dadas por

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2};$$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2};$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2).$$

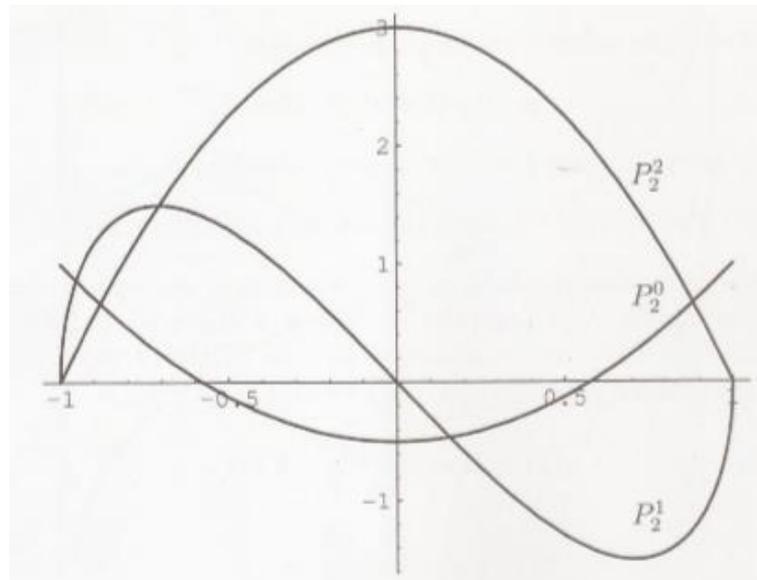


Figura 9: Funções de Legendre associadas $P_m(x)$, para $m = 0, 1$ e 2 .

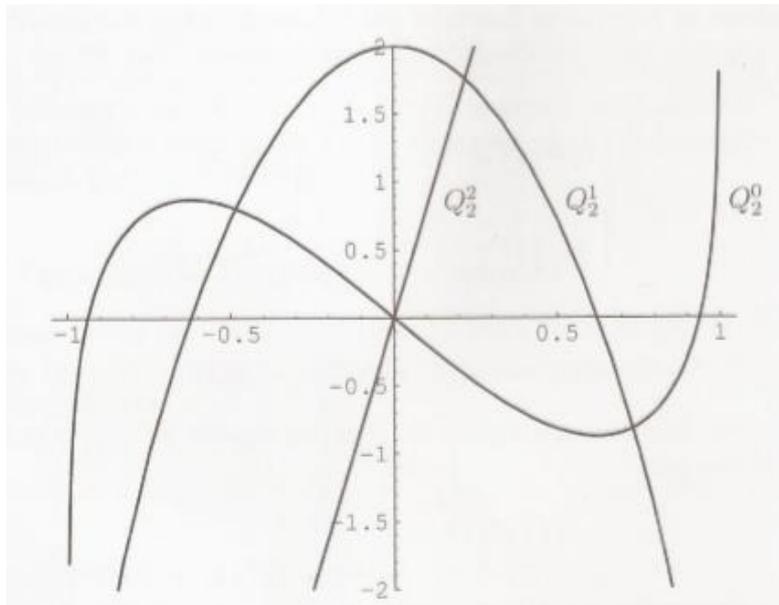


Figura 10: Funções de Legendre associadas $Q_2^m(x)$, para $m = 0, 1$ e 2 .

Nas figuras 9 e 10 apresenta - se os gráficos das funções $P_2^m(x)$ e $Q_2^m(x)$, respectivamente, para $m = 0, 1$ e 2 .

Define - se as funções de Legendre associadas de *ordem* n para graus inteiros negativos $-m$, ou seja $P_n^{-m}(x)$ e $Q_n^{-m}(x)$, com $m = 1, 2, \dots$ tem - se

$$\begin{cases} P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \\ Q_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^m(x) \end{cases}$$

Observe-se que, para qualquer grau m , as funções de Legendre associadas de *ordem* n de primeira espécie $P_n^m(x)$ são limitadas nos extremos do intervalo $-1 \leq x \leq 1$. As funções de segunda espécie, $Q_n^m(x)$, são ilimitadas nos extremos $x = \pm 1$.

3.4 Função geratriz para $P_n(x)$

A função geratriz para os polinômios de Legendre é definida por

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

Expandindo-se a expressão acima em série de potências em relação à variável

t (utilizando, por exemplo, a expansão do binômio de Newton), encontra – se

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = [1-t(2x-t)]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2x-t) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}(2x-t)^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} t^n (2x-t)^n + \dots$$

A série acima é válida, por exemplo, para $|t| < 1$ e $|x| < 1$. Verifica – se que seus coeficientes são os polinômios de Legendre $P_n(x)$, dados pela equação

$$(P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k})$$

Na região de convergência da série, tem – se

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

permitindo que a função $G(x, t)$ seja denominada de função geratriz para os polinômios de Legendre.

Da série de potências acima, pode - se obter várias propriedades dos polinômios de Legendre $P_n(x)$. Como exemplo, observando que a função $G(x,t)$ satisfaz a equação a derivadas parciais de primeira ordem

$$(1-2xt+t^2) \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} + (t-x)G(x,t) = 0,$$

e inserindo nesta equação a expansão $(G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n)$ para

$G(x,t)$, obtém - se, após separação em iguais potências de t , a importante fórmula de recorrência (denominada pura),

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$

a qual estabelece que, dados $P_0(x)$ e $P_1(x)$, pode - se obter, um a um, todos os demais $P_n(x)$.

A segunda relação de recorrência para os polinômios $P_n(x)$ pode ser obtida, utilizando-se, desta vez, a expansão em série de potências de t da derivada parcial da função geratriz em relação a x , ou seja

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = t(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \frac{t}{1-2xt+t^2} G(x,t),$$

e utilizando-se as expansões, em séries de potências em t , das funções $G(x,t)$ e $t/(1-2xt+t^2)$, pode - se determinar a correspondente expansão em série para o membro da esquerda da equação acima, envolvendo apenas os polinômios $P_n(x)$.

Substituindo-se na equação acima e igualando-se os coeficientes de igual potência de t , obtém - se a nova relação de recorrência

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

Através destas duas relações de recorrências pode - se adquirir a denominada fórmula de diferenciação

$$(x^3 - 1)P'_n(x) = nxP'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Pela equação acima e também de $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$, são obtidas as importantes operações

$$\begin{cases} P_{n-1}(x) = xP_n(x) + \frac{1-x^2}{n} P'_n(x), & \text{para } n \geq 1, \\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{1-x^2}{n+1} P'_n(x), & \text{para } n \geq 0, \end{cases}$$

as quais nos dão, respectivamente, $P_{n-1}(x)$ e $P_{n+1}(x)$, quando se conhece $P_n(x)$.

Vale verificar que as duas operações acima podem ser manipuladas para a EDO de Legendre de ordem n .

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

3.5 Função de Hermite

Define – se os polinômios de Hermite ($H_n(u)$) é como os coeficientes da série de potências da seguinte função geratriz

$$g(z, u) = e^{-z^2 + 2zu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(u)$$

Tal definição é útil, pois possibilita a derivação de relações de recorrência entre os polinômios de forma muito simples. Aplicando $\frac{\partial}{\partial z}$ na equação acima:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = (-2z + 2u)g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} H_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_{n+1}(u) \Rightarrow (2uH_0 - H_1)z^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (2uH_n - 2nH_{n-1}) \frac{z^n}{n!} = 0$$

proporciona a relação de recorrência:

$$2uH_n - 2nH_{n-1} = H_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que permite a obtenção de qualquer $H_n(u)$ conhecendo apenas H_0 . Como $g(0, u) = 1$, tem - se que $H_0(u) = 1$. Logo, os primeiros polinômios podem ser facilmente encontrados através da equação acima:

$$H_0(u) = 1; H_1(u) = 2u; H_2(u) = 2(2u^2 - 1); H_3(u) = 12u \left(\frac{2}{3}u^2 - 1 \right).$$

Agora, deriva - se a função geratriz em relação à variável u para encontrar outra recorrência:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2zg = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n'(u) \Rightarrow 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} H_n(u) = 2n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n'(u) \Rightarrow H_n' = 2nH_n(u)$$

Derivando a equação acima e usando a equação $2uH_n - 2nH_{n-1} = H_{n+1}$ chega - se à EDO de Hermite:

$$H_n''(u) - 2uH_n'(u) + 2nH_n(u) = 0$$

3.6 Função de Laguerre

Os polinômios de Laguerre surgem na análise de soluções para a seguinte equação diferencial

$$xy'' + (1-z)y' + ny = 0$$

Ao desenvolver y em séries de potências, obtém - se a relação de recorrência entre coeficientes consecutivos,

$$a_{k+1} = \frac{k-n}{(k+1)^2} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ e } y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Pode - se ver que quando n é natural o coeficiente da potência de grau maior e diferente de n de anula. Então, uma solução linearmente independente é um polinômio de Laguerre de ordem n , denotados por $L_n(x)$. Para que se determine a segunda solução linearmente, deve - se estudar as soluções da seguinte equação:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

O polinômio de Laguerre de ordem n é definido da seguinte forma:

$$L_n(x) = \left(\left(\frac{1}{n!} \right) \right) e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

desenvolvendo essa representação, tem – se:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!n!}{(n-k)!k!k!} x^k.$$

Os polinômios de Laguerre também podem ser definidos através da seguinte integral:

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)t^{n+1}} dt.$$

onde a integração é realizada no sentido anti-horário sobre qualquer caminho fechado em torno da origem do plano complexo contido no disco $|t| < 1$.

3.6.1 Função geradora dos polinômios de Laguerre

A função geradora dos polinômios de Laguerre é dada por:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k t^n, \quad |t| < 1$$

Trocando – se a ordem dos somatórios, fazendo a mudança $m = n - k$ e reordenando os termos, encontra – se:

$$\psi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k t^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} t^m$$

Sabe – se que $\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{k} t^m = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{k+1} \quad \forall |t| < 1$ e reorganizando os termos, tem –

se:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-xt}{1-t} \right)^k = \frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t} \right).$$

Com isso, a partir da função geradora, desprezando – se a potência e derivando em relação a t, chega – se a uma relação de recorrência da seguinte forma:

$$L_{n+1}(x) = (2n+1)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x)$$

3.7 Exemplos

01. Mostre que a equação de Legendre pode ser escrita na forma

$$\left[(1-x^2)y' \right]' = -\alpha(\alpha+1)y,$$

o que fornece para qualquer polinômio de Legendre $P_k(x)$ a relação

$$\left[(1-x^2)P_k'(x) \right]' = -k(k+1)P_k(x).$$

Tome $k = n$ na equação acima e multiplique ambos os membros por $P_m(x)$. Da mesma forma, tome $k = m$ e multiplique ambos os membros da referida equação por $P_n(x)$. Diminua as duas equações resultantes e integre membro a membro no intervalo $[-1,1]$. Utilizando a integração por partes, mostre a chamada propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre no intervalo $[-1,1]$, a saber

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

$$I - \left[(1-x^2)y' \right]' = -\alpha(\alpha+1)y$$

Usando a regra da cadeia, tem – se

$$(1-x^2)'y' + (1-x^2)y'' = -\alpha(\alpha+1)y$$

$$-2xy' + (1-x^2)y'' = -\alpha(\alpha+1)y$$

$$y''(1-x^2) + y'(-2x) + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

Em particular, para $y = P_n(x)$ (Legendre), tem – se

$$P_n''(x)(1-x^2) + P_n'(x)(-2x) + P_n(\alpha^2 + \alpha) = 0.$$

II – Para provar a ortogonalidade, seja $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ (produto interno)

$$\text{Mostrar que } \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Usando o fato I, tem – se $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$

e decorre $\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0$ (*).

Multiplicando (*) por $P_m(x)$ e tomando a integral do produto no intervalo $[-1,1]$

tem – se $n(n+1)\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = -\int_{-1}^1 P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]dx$.

Integrando por partes a equação supracitada obtém – se

$$(n+1)n\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = (1-x^2)P_n'(x)P_m(x)\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx, \text{ donde}$$

$$(n^2+n)\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx. \quad (\text{i})$$

Analogamente, invertendo os papéis de “n” e “m”, que é o equivalente a iniciar a equação por $P_m(x)$ e tomar o produto por $P_n(x)$, é trivial constatar que

$$(m^2+m)\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx. \quad (\text{ii})$$

Fazendo (i) = (ii), tem – se

$$n(n+1)\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = m(m+1)\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx.$$

Claro que, se $n \neq m$, então $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$ (**).

Para $m = n$, tome $\Gamma(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$. Assim

$$\Gamma^2(x,t) = \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x)P_m(x)t^{n+m} \text{ e integrando em x sobre}$$

$$[-1,1], \text{ tem-se } \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+m} \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx.$$

Usando o resultado (**) acima e fazendo $m = n$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx.$$

Desenvolvendo $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} &= \frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2t} [\ln(1+2xt+t^2) - \ln(1-2xt+t^2)] = \\ &= \frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)] = \frac{1}{t} \left[\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \right) + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

$$2 \left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}.$$

Comparando os coeficientes de t^{2n} nas séries anteriores, tem-se

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}, \text{ se } n = m.$$

02. Mostre que o polinômio de Legendre $P_n(x)$ pode ser escrito

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

onde $\lfloor n/2 \rfloor$ significa o maior inteiro contido em $n/2$ (i.e. $\leq n/2$).

I – Para provar que $P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$, tem-se

$$(i) \quad \int_0^1 P_{2n-1}(x)dx = (-1)^n \cdot \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{n!2^n} \text{ para } n \geq 2 \text{ e } \int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0, \text{ para } n \geq 1.$$

Para (i) considere a geradora $\Gamma(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$. Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 P_n(x) dx = \int_0^1 (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{-\sqrt{(1-2xt+t^2)}}{t} \Big|_0^1 = t + \sqrt{1+t^2} - 1 = \frac{1}{t} \left[t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} t^4 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{2^3} t^6 - \dots \right] =$$

$$= 1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} t^3 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{2^3} t^5 - \dots$$

Comparando os coeficientes com respeito a t^n na série, decorre o resultado.

03. Mostre que a função

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

é uma solução polinomial da EDO de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = y(x).$$

I – Sabe – se que $H_n(x) = n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$.

Sendo assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \right) t^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n \right] = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!} \right] =$$

$$= e^{-t^2} \cdot e^{2xt} = e^{2xt-t^2}.$$

Obs.: Usou – se acima a expansão de e^{-t^2} e e^{2xt} por polinômio de Taylor com resto de Lagrange.

Assim, usando o fato de $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$, tem – se

$$H_n(x) = \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{2xt-t^2} \right)_{t=0} = e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} \right)_{t=0}.$$

Tomando $z = x - t$ é fácil ver que $\frac{d}{dt} = -\frac{d}{dz}$ e, então,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right)_{x=z} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

04. Com relação aos polinômios de Hermite $H_n(x)$ definidos no problema anterior, verifique a relação

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

I – Para a equação $w_m'' + (2m+1-x^2)w_m = 0$, $w_m = e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$ é solução. Analogamente, $w_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ é solução para $w_n'' + (2n+1-x^2)w_n = 0$.

Fazendo $w_n[w_m'' + (2m+1-x^2)w_m] - w_m[w_n'' + (2n+1-x^2)w_n] = 0$, obtém-se

$$(w_m'' w_n - w_m' w_n') + 2(m-n)w_m w_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}(w_m' w_n - w_m w_n') + 2(m-n)w_m w_n = 0.$$

Porém, como a integral do 1º termo tem formas $\frac{T(x)}{e^{x^2}}$, onde $T(x)$ é um polinômio, o que nos faz ver que se anula nos extremos. Logo, $\int_{-\infty}^{+\infty} w_m w_n dx = 0$.

Pela fórmula de Rodrigues, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx$$

Integrando por partes

$$u = H_n(x) \rightarrow du = H_n'(x) dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}.$$

Como $u.v = e^{-x^2} T(x)$ nas mesmas condições anteriores, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx.$$

Integrando recursivamente $(n-1)$ vezes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n''(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} dx = \dots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx$$

tal que $H_n^{(n)}(x)$ é a n -ésima derivada de $H_n(x)$ com relação a x .

Como $H_n(x)$ tem grau n , tem-se

$$H_n^{(n)}(x) = n! a_n = n! 2^n$$

Para a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ observa – se

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

Usando as coordenadas polares, tem – se $k^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$.

$$\text{Logo, } k^2 = \pi \Rightarrow k = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

$$\text{Finalmente, } \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} .$$

05. Mostre que

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

é uma solução polinomial da EDO de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad y = y(x) .$$

$$\text{I – Sabe – se que } L_n = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n \cdot e^{-x}) = (-1)^n \cdot x^n + \dots + n! = e^x \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \right) \frac{d^i e^{-x}}{dx_i} .$$

II – Prova – se

$$\begin{aligned} L_n &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n \cdot e^{-x}) = e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} x^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x} = e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n = e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} n(n-1)(n-2)\dots(k+1)x^k = \\ &= e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} e^{-x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(n!)^2}{k![(n-k)!]^2} x^{n-k} . \end{aligned}$$

4 APLICAÇÕES DE FUNÇÕES ESPECIAIS NA FÍSICA

4.1 Função de Bessel

4.1.1 Vibrações de uma Membrana Elástica Circular

Observa – se que as vibrações transversais de uma membrana elástica fina são governadas pela equação de ondas a duas dimensões

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}$$

Para estudar o movimento de uma membrana circular, é preciso escrever esta equação em coordenadas polares:

$$a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right) = u_{tt}$$

Supondo que a membrana tem raio unitário, que está presa em toda a circunferência e que, inicialmente, ocupa uma posição deslocada da posição de repouso, independente da variável angular θ , de onde é solta no instante $t = 0$. Por causa da simetria circular da condição inicial e da condição de contorno, é natural supor que u também é independente de θ , ou seja, que u é uma função, apenas, de r e t . Nesse caso, esta equação fica representada por

$$a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) = u_{tt}, \text{ tal que } 0 < r < 1 \text{ e } t > 0.$$

A condição de contorno em $r = 1$ é $u(1, t) = 0$, onde $t \geq 0$, e as condições iniciais são

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

onde $f(r)$ representa a configuração inicial da membrana. Por consistência, precisa – se também que $f(1) = 0$. Finalmente, enuncia – se a condição que u é limitada em $0 \leq r \leq 1$.

Considerando que $u(r, t) = R(r)T(t)$ e substituindo na equação $a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) = u_{tt}$, obtém-se $\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda^2$, sabe-se que a constante de separação tem que ser negativa, escrevendo-a como $-\lambda^2$ com $\lambda > 0$.

Esta equação nos leva, então, às seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0,$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

Logo, da equação $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$, tem-se

$$T(t) = k_1 \text{sen} \lambda a t + k_2 \cos \lambda a t.$$

Definindo uma nova variável independente $\xi = \lambda r$ na equação

$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0$, obtém-se $\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + \xi^2 R = 0$ que é a equação de Bessel de ordem zero. Portanto,

$$R = c_1 J_0(\xi) + c_2 Y_0(\xi),$$

tal que J_0 e Y_0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, de ordem zero. Em função de r , tem-se

$$R = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r).$$

A condição de limitação que $u(r, t)$ tem que satisfazer implica que R tem que permanecer limitada quando $r \rightarrow 0$. Como $Y_0(\lambda r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$, precisa-se escolher $c_2 = 0$. A condição de contorno ($u(1, t) = 0$) implica, então, que

$$J_0(\lambda) = 0.$$

Consequentemente, os valores permitidos para a constante de separação são obtidos das raízes da equação acima. É importante ressaltar que $J_0(\lambda)$ tem um conjunto discreto infinito de zeros positivos, que se denota por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$, em ordem crescente. As funções $J_0(\lambda_n r)$ podem ser usadas como base para uma

expansão em série da função dada f . As soluções fundamentais deste problema, satisfazendo a equação diferencial parcial $a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) = u_{tt}$, a condição de contorno ($u(1, t) = 0$) e a condição de limitação, são

$$u_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n a t, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$v_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Supondo que agora $u(r, t)$, pode ser expressa como uma combinação linear infinita das soluções fundamentais $u_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n a t$, $v_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t$:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n u_n(r, t) + c_n v_n(r, t)] = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n a t + c_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t].$$

As condições implicam que

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r)$$

e que

$$u_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r a k_n J_0(\lambda_n r) = 0.$$

A solução da equação diferencial parcial $a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) = u_{tt}$ satisfazendo a condição de contorno já citada é dada por

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t,$$

onde os coeficientes c_n são definidos pela equação $c_n = \frac{\int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_0^1 r [J_0(\lambda_n r)]^2 dr}$.

4.2 Função de Legendre

4.2.1 Campo Elétrico gerado por um Anel Circular

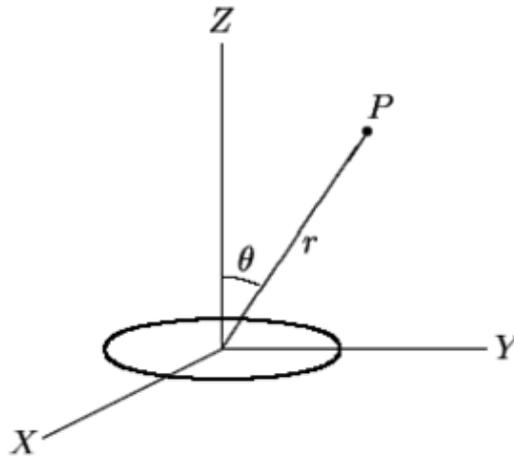


Figura 11

Considere uma carga elétrica com densidade linear λ , uniformemente distribuída sobre um anel circular de raio a . Considere o problema de calcular o potencial elétrico em um ponto qualquer do espaço. Suponhamos que tenha sido colocado um sistema de coordenadas tendo a origem no centro do anel e o plano XY no plano do anel e vamos usar coordenadas esféricas. Antes de mais nada, observe – se que, como a distribuição de cargas é simétrica em relação ao eixo, o potencial elétrico resultante vai ter esta mesma simetria.

Assim, vai ser uma função u , dependendo apenas das coordenadas esféricas r e θ . Será inserido um método que pode ser aplicado em muitos problemas com este mesmo tipo de simetria. A idéia é, numa primeira etapa, resolver o problema muito mais simples de calcular o potencial em um ponto $P(0,0,z)$ sobre o eixo Z . A seguir, utiliza-se este resultado para obter o potencial em um ponto qualquer do espaço.

A carga elétrica sobre um pequeno arco compreendido por um ângulo $d\theta$, contribui com uma parcela $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\theta}{\sqrt{z^2 + a^2}}$ para o potencial no ponto P . É preciso só notar que que $a d\theta$ é o comprimento deste arco e, em consequência, $\lambda a d\theta$ a sua carga e, $\sqrt{z^2 + a^2}$ é sua distância ao ponto P .

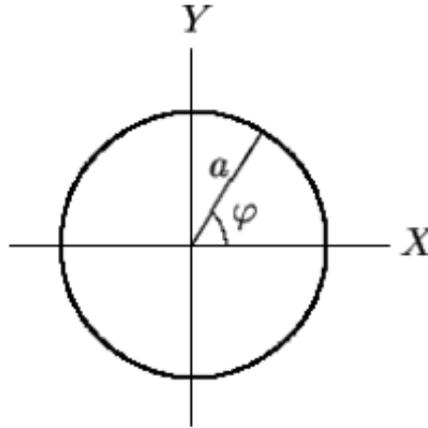


Figura 12

Segue, então, que a carga total sobre o anel gera no ponto P o potencial

$$u(0,0,z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\theta}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

Por exemplo, para $|z| > a$, tem – se

$$u(0,0,z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{a}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \left[\frac{a}{z} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{z^3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{a^5}{z^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{a^7}{z^7} + \dots \right]$$

Agora que já se possui a expressão do potencial sobre os pontos do eixo do Z , obtém – se sua expressão em um ponto qualquer do espaço. Lembre – se que o potencial é uma função harmônica e que as funções $P_n(\cos\theta)r^n$ e $P_n(\cos\theta)r^{-n-1}$ são harmônicas, valendo, respectivamente z^n e z^{-n-1} n ponto $P(0,0,z)$.

Tem – se, então que

$$u(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} P_2(\cos\theta) + \frac{1.3}{2.4} \frac{r^4}{a^4} P_4(\cos\theta) - \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{r^6}{a^6} P_6(\cos\theta) + \dots \right], \text{ e}$$

$$u(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \left[\frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} P_3(\cos\theta) + \frac{1.3}{2.4} \frac{a^5}{r^5} P_5(\cos\theta) - \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{a^7}{r^7} P_6(\cos\theta) + \dots \right], \text{ se } r > a .$$

4.2.1.1 Potencial gravitacional gerado por um disco homogêneo

Considere o problema de calcular o potencial gravitacional gerado por um disco homogêneo de raio a e possuindo uma densidade superficial δ (unidade de massa por unidade de área). Coloca – se o sistema de coordenadas tendo a origem no centro do disco e tendo no plano XY como o plano do disco, conforme a figura 3. Para um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço considera – se as coordenadas esféricas $r = |\overline{OP}|$ e os ângulos θ de \overline{OP} com o eixo Z e φ de \overline{OQ} com o eixo X . Considere também a coordenada cilíndrica $\rho = |\overline{OQ}|$.

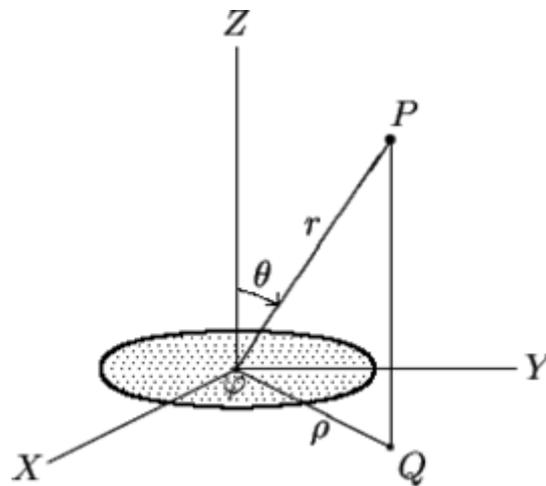


Figura 13

Agora, calcula – se o potencial nos pontos $P(0,0,z)$ sobre o eixo Z . Para isso, analisa – se a contribuição do anel formado pelos pontos cuja distância à origem fica entre ρ e $\rho+d\rho$.

A distância de qualquer um destes pontos ao ponto P é igual a $\sqrt{\rho^2 + z^2}$.

A área do anel é igual a

$$2\pi G\delta \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

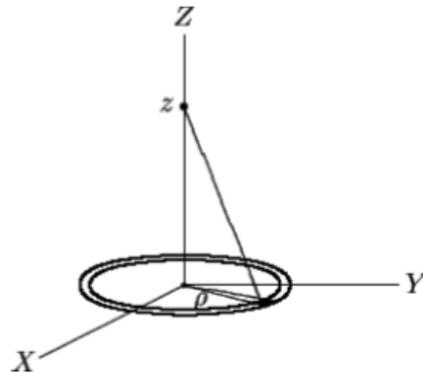


Figura 14

Somando todas estas contribuições, obtém – se a expressão do potencial gravitacional gerado no ponto P pelo disco todo

$$u = 2\pi G\delta \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Calculando a integral, tem – se

$$u(0,0,z) = 2\pi G\delta \sqrt{\rho^2 + z^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=a} = 2\pi G\delta \left[\left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

Utilizando a série binomial, obtém – se

$$u(0,0,z) = 2\pi G\delta z \left[\frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} - \frac{1}{2.4} \frac{a^4}{z^4} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{a^6}{z^6} - \dots \right] = 2\pi G\delta z \left[\frac{1}{2} \frac{a^2}{z} - \frac{1}{2.4} \frac{a^4}{z^3} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{a^6}{z^5} - \dots \right]$$

O potencial que está sendo buscado é uma função harmônica e seus valores nos pontos $P(0,0,z)$, com $|z| > a$, estão dados acima. Lembre – se que a função

$\frac{\rho_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$ é harmônica e coincide com $\frac{1}{z^{n+1}}$ nos pontos $P(0,0,z)$ sobre o eixo Z , conclui

– se que, para $r > a$,

$$u(r,\theta,\varphi) = 2\pi G\delta a \left[1 - \frac{r P_1(\cos \theta)}{a} + \frac{1}{2} \frac{r^2 P_2(\cos \theta)}{a^2} - \frac{1}{2.4} \frac{r^4 P_4(\cos \theta)}{a^4} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{r^6 P_6(\cos \theta)}{a^6} - \dots \right].$$

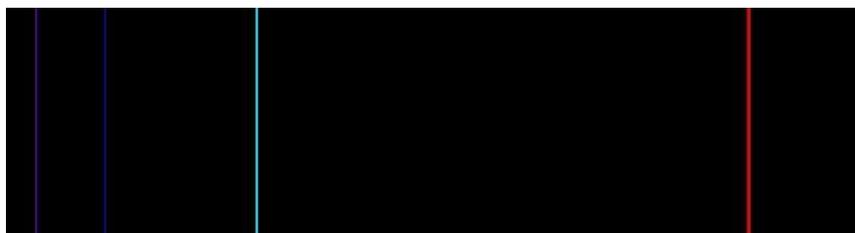
4.3 Função de Laguerre

4.3.1 Átomos de Hidrogênio

O conceito de átomo como sendo a mais pequena porção indivisível de matéria foi introduzido no ano 450 antes de Cristo mas, só em 1808, Dalton propôs um modelo atômico em que os átomos são utilizados como os tijolos de que toda a matéria é constituída. Neste modelo os átomos não podem ser criados, destruídos ou divididos pelo que teve de ser abandonado quando Thomson em 1897 descobriu os elétrons. O modelo foi então progressivamente refinado surgindo em 1904 os modelos do pudim de ameixas e o modelo saturniano. No primeiro os átomos eram considerados como sendo constituídos por uma matriz (massa) positiva onde se dispersavam elétrons (ameixas) para garantir a eletroneutralidade, enquanto no segundo existia um cerne positivo (saturno) orbitado por anéis de elétrons.

Em 1911 Rutherford lançou o seu modelo orbital (núcleo positivo e elétrons em orbitas circulares à volta deste) que, no entanto, possuía algumas limitações óbvias que lhe limitaram o tempo de vida a uns meros dois anos:

- Os elétrons são cargas elétricas e uma orbita circular é equivalente a um movimento uniformemente acelerado pelo que os elétrons deveriam radiar energia acabando virtualmente por precipitar no núcleo.
- Os espectros de emissão deveriam ser espectros contínuos pois todas as energias (raios de orbitas) são admissíveis. Ora todos os dados conhecidos apontavam para espectros de emissão de riscas bem definidas como por exemplo a série de Balmer (visível) do átomo de hidrogênio (1885):



Este fenómeno era reproduzido nas séries de Lyman (UV) (1906-1914), Paschen (IV) (1908) e posteriormente nas séries de Brackett (1922) e Pfund (1924).

Em 1913 Moseley descobria o próton (o neutrão só viria a ser descoberto por Chadwick em 1932 recebendo o Nobel em 1935) e nesse mesmo ano Bohr publicava o seu modelo atômico “quântico”:

- O modelo planetário de Rutherford está essencialmente correto. No entanto, apenas as orbitas cujo momento angular mvr seja múltiplo da constante universal $h/2\pi$ são permitidas.
- Um elétron apenas pode ganhar ou perder energia saltando de uma órbita permitida para outra. Nesse processo absorverá ou emitirá energia de acordo com a relação de Planck $\Delta E = h\nu$.

O modelo atômico de Bohr foi prontamente aceite embora falhasse na previsão dos espectros de átomos pesados e não explicasse o desdobramento das riscas em presença de campos eléctricos ou magnéticos. A descoberta deste último efeito já tinha conduzido à atribuição de um Nobel a Zeeman em 1902.

Thomson recebeu o Nobel em 1906 e Bohr em 1922. Rutherford recebeu o Nobel da Química em 1908.

Schrödinger em 1926 apresentou a resolução da sua equação para o átomo de hidrogénio. A solução da equação de Dirac (em que o spin aparece explicitamente) só foi conseguida em 1928 (Dirac, Gordon e Darwin).

Assim como Schrödinger vamos começar por transformar a equação de ondas expressa em coordenadas cartesianas numa equação equivalente em coordenadas polares. Neste novo sistema de coordenadas é possível efetuar uma separação de variáveis, o que significa que a complicada função $\psi(r, \theta, \phi)$ pode ser fatorada num produto de 3 funções $R(r)P(\theta)Q(\phi)$.

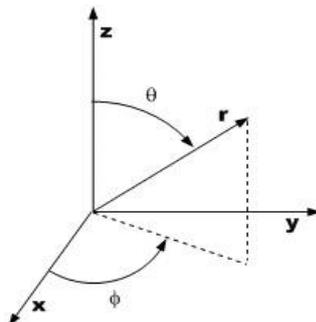


Figura 15

A resolução da componente azimutal da função de onda conduz à expressão $Q(\phi) = \exp(\pm im\phi)$

O parâmetro m fica limitado, por imposição das condições fronteira, ao conjunto dos números inteiros. Este número que impõe uma condição de quantificação à função de onda é conhecido por nº quântico *magnético* por a energia só depender dele quando se aplicam campos magnéticos.

A resolução da parte radial da função de onda tem soluções que se identificam com os polinómios de Laguerre cuja normalização contém o termo $(n-l-1)!$ o que implica que $n > l$.

Inicia – se a reescrever a função de onda radial $R(\rho) = e^{-\rho/2} f(\rho)$ na forma $R(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^l w(\rho)$. Pode – se estabelecer facilmente uma equação para

$$f'(\rho) = l\rho^{l-1}w + \rho^l w' = \rho^l (l/\rho w + w')$$

$$f''(\rho) = l(l-1)\rho^{l-2}w + l\rho^{l-1}w' + l\rho^{l-1}w' + \rho^l w'' = \rho^l [l(l-1)/\rho^2 \cdot w + 2l/\rho w' + w'']$$

Obtém - se, assim, a seguinte equação para $w(\rho)$

$$\rho w'' + [2(l+1) - \rho] w' + (n - l - 1)w = 0$$

Esta equação tem a forma geral

$$(\rho d^2 / d\rho^2 + (a - \rho) d / d\rho + b) v(\rho) = 0$$

A solução desta equação para $a = 1$ e $b = t$ são os polinómios de Laguerre de grau k $L_t(\rho)$:

$$(\rho d^2 / d\rho^2 + (1 - \rho) d / d\rho + t) L_t(\rho) = 0$$

Os polinómios $L_t(\rho)$ são definidos por

$$L_t(\rho) = e^\rho d^t / d\rho^t [\rho^t e^{-\rho}]$$

A s -ésima derivada de $L_t(\rho)$ é chamado de polinômio associado de Laguerre de grau $t - s$

$$L_t^s(\rho) = d^s / d\rho^s [L_t(\rho)]$$

Os polinômios associados satisfazem a equação

$$(\rho d^2 / d\rho^2 + (s+1-\rho) d / d\rho + (t-s)) L_t^s(\rho) = 0$$

Escrevendo $s := 2l + 1$ e $t := n + l$, percebe -se que esta equação é corresponde a equação a $\rho w'' + [2(l+1) - \rho] w' + (n - l - 1)w = 0$ então, tem - se

$$w(\rho) = L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

Encontra-se também a notação L_{n-l-1}^{2l+1} em vez de L_{n+l}^{2l+1} , pois o grau dos polinômios é $n+l - (2l+1) = n-l-1$. A ordem é $2l+1$.

As funções $e^{-\rho/2} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$ são chamados de *funções associadas de Laguerre*

4.4 Função de Hermite

4.4.1 Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico simples é um dos primeiros sistemas que estudamos na Mecânica Clássica e também um dos mais importantes. Uma de suas realizações experimentais mais simples é por meio de uma massa m ligada a uma mola ideal de constante elástica k . A mola exerce sobre a massa uma força restauradora (Lei de Hooke) sempre $F = -kx$ que a partícula sofre um deslocamento x , medido a partir da posição em que a mola está relaxada. O sistema é descrito por uma energia potencial

$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$, e as soluções da equação de movimento de Newton são funções $x(t)$

que oscilam no tempo com a frequência natural do oscilador, $\omega = \sqrt{k/m}$.

Sabe – se que a importância do oscilador harmônico na Física Clássica vai muito além do sistema massa-mola. Oscilações harmônicas surgem em uma imensa variedade de sistemas: pêndulo, fluidos, circuitos eletromagnéticos etc.

Um sistema “massa-mola” quântico é definido por uma partícula quântica de massa m sob ação de um sistema “massa-mola” quântico é definido por uma partícula quântica de massa m sob ação de um potencial representado na forma

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 .$$

Assim como na Física Clássica, o oscilador harmônico também tem uma importância fundamental na Mecânica Quântica. O motivo para isso é que se pode aproximar o ponto de equilíbrio de um potencial qualquer, $V(x)$, pelo potencial parabólico do oscilador harmônico. Graficamente, isso significa encontrar a parábola que melhor se ajusta ao potencial em torno do mínimo. Se a energia total da partícula for suficientemente pequena, de modo que a partícula passa a maior parte do tempo em torno do mínimo, onde a parábola é uma boa aproximação à curva de energia potencial, o sistema será aproximadamente harmônico.

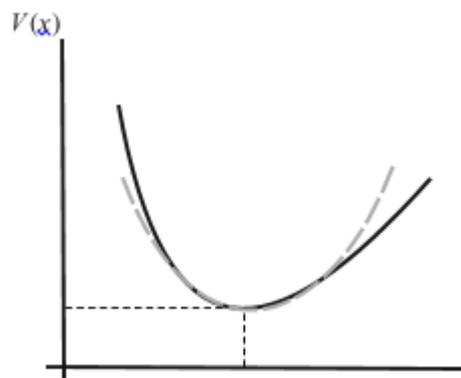


Figura 16: O potencial $V(x)$ (linha cheia), aproximado na região do entorno de seu mínimo, em $x = a$, por um potencial parabólico, típico de um oscilador harmônico (linha tracejada)

Analiticamente, encontra – se o potencial harmônico que aproxima $V(x)$ na vizinhança do ponto $x = a$, em que $V(x)$ tem um mínimo, considerando a expansão em série de Taylor em torno do mínimo,

$$V(x) = V(a) + (x-a) \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=a} + \frac{1}{2} (x-a)^2 \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=a} + \dots = V(a) + \frac{1}{2} (x-a)^2 \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=a}$$

uma vez que a primeira derivada do potencial, em $x = a$, é nula, por ser um mínimo.

Então, o potencial de oscilador harmônico com $k = \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=a}$ é uma aproximação de $V(x)$ em torno do mínimo.

Logo, o potencial harmônico pode ser abordado nas situações que existem pequenas oscilações em torno de pontos do equilíbrio estável. Um exemplo disso, são as vibrações de moléculas ou de átomos em um sólido.

4.4.1.1 Funções de onda

As funções de onda $\psi(\xi)$ podem ser representadas na forma

$$\psi_n(\xi) = H_n(\xi) e^{-\xi^2/2},$$

onde as funções $H_n(\xi)$ são os polinômios de Hermite. As funções $H_n(\xi)$ satisfazem

à equação de Hermite $\left(\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH(\xi)}{d\xi} + (\lambda - 1)H(\xi) = 0 \right)$ para $\lambda = 2n + 1$, então

$$\frac{d^2H_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} + 2nH_n(\xi) = 0,$$

As soluções desta equação são:

- Par: $H_{2N}(\xi) = \sum_{i=0}^N C_i \xi^{2i}$ ($n = 2N$),
- Ímpar: $H_{2N+1}(\xi) = \sum_{i=0}^N C_i \xi^{2i+1}$ ($n = 2N + 1$).

Sabendo que a equação $\psi_n(\xi) = H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$ é homogênea, os polinômios de Hermite estão definidos a menos de uma constante multiplicativa. É comum escolher essa constante de modo que o coeficiente ξ^n em $H_n(\xi)$ seja 2^n . A partir disto, os

demais coeficientes das relações de recorrência $c_{n+1} = \frac{4n+1-\lambda}{2(n+1)(2n+1)}c_n$ e

$d_{n+1} = \frac{4n+3-\lambda}{2(n+1)(2n+3)}d_n$, tal que, usando os valores permitidos para λ , tornam – se

- Par: $c_{i+1} = \frac{4(i-N)}{2(i+1)(2i+1)}c_i$ (polinômios de grau $2N$);
- Ímpar: $d_{i+1} = \frac{4(i-N)}{2(i+1)(2i+3)}d_i$ (polinômios de grau $2N+1$).

Os cinco primeiros polinômios de Hermite são

$$H_0(\xi) = 1,$$

$$H_1(\xi) = 2\xi,$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2,$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi,$$

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12.$$

Conclui – se que para cada autovalor da energia, $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, corresponde uma única autofunção $\psi_n(x)$, de tal maneira que pode ser representada como

$$\psi_n(x) = C_n H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2},$$

tal que $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ vem da definição da variável ξ , e C_n é uma constante que é oriunda da exigência da função onda estar normalizada, ou seja, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{C_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 1.$$

A partir de uma propriedade geral dos polinômios de Hermite, de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}, \text{ tal que } \delta_{nm} = 0 \text{ para } n \neq m, \delta_{nn} = 1, \text{ obtém – se}$$

$C_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2}$, de onde tem – se a expressão geral para $\psi_n(x)$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}.$$

A figura 17 seguinte, representa algumas funções de onda do oscilador harmônico. Nota – se que, à medida que aumente a energia, a paridade das funções de onda alternam – se entre par e ímpar. A energia da partícula cresce com o número de nodos de sua função de onda, da mesma forma que se observa nos poços de potencial finito e infinito.

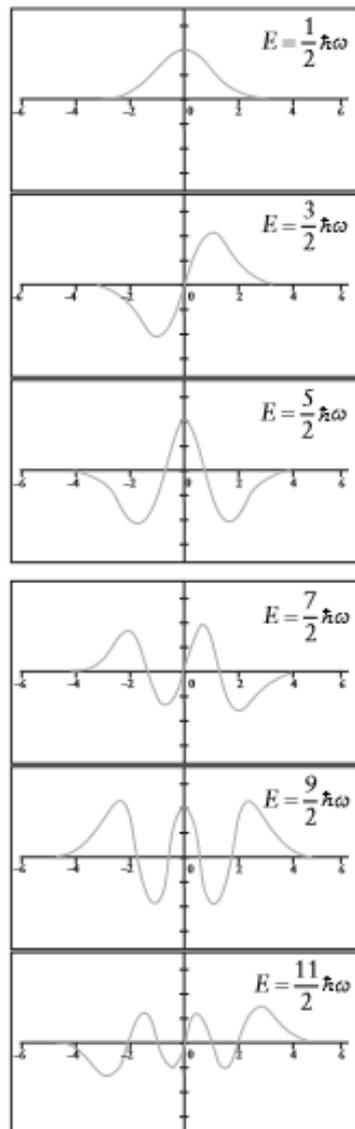


Figura 17

A expressão $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$ leva – nos à ortonormalidade

das funções de onda, logo, cada $\psi_n(x)$ e $\psi_m(x)$ para $n \neq m$ são ortogonais. Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm} .$$

Através do que se conhece sobre as funções de onda $\psi_n(x)$, pode – se determinar todas as propriedades do oscilador harmônico quântico. Um exemplo disso, é que se pode mostrar que o valor esperado da posição x , para qualquer $\psi_n(x)$ é nulo.

Pela expressão

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) x \psi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 x dx ,$$

tem – se que, como $\psi_n(x)$ tem paridade definida, par ou ímpar, $|\psi_n(x)|^2$ vai ser função par, e ao ser multiplicada por x , resulta em um integrando ímpar nesta equação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho é uma contribuição para física e áreas a fins. É muito útil a solução por séries de potências para problemas difíceis. Além disso, foi realizado o estudo detalhado das funções especiais (Bessel, Legendre, Laguerre e Hermite).

Por consequência, pode – se concluir que as funções especiais possuem uma grande relevância em diversas áreas da física. Portanto, várias situações podem ser solucionadas de uma forma mais simples através dessas funções. Com isso, acredita – se que esta dissertação sirva como fonte de pesquisa para estudantes da matemática e física.

REFERÊNCIAS

Boyce, W.E.; DiPrima, R.C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. LTC, Rio de Janeiro, 2013

Brietzke, E.H.M; Polinômios de Legendre, UFRGS

Machado, K.D, Teoria do eletromagnetismo, Vol. I. UEPG, Ponta Grossa, 2000

Oliveira, E, C de; Tygel, M. Métodos matemáticos para Engenharia. SBM, Rio de Janeiro, 2 ed., 2010.