UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Aplicação da Desigualdade das Médias como Método Alternativo na Resolução de Problemas no Conteúdo do Ensino Médio Lecionado em uma Instituição Pública

Wellington Simião de Souza

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

APLICAÇÃO DA DESIGUALDADE DAS MÉDIAS COMO MÉTODO ALTERNATIVO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEÚDO DO ENSINO MÉDIO LECIONADO EM UMA INSTITUIÇÃO PÚBLICA

WELLINGTON SIMIÃO DE SOUZA

Sob a Orientação do Professor
André Luiz Martins Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Março de 2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S588a

Souza, Wellington Simião de, 1978-
Aplicação da Desigualdade das Médias como Método Alternativo na Resolução de Problemas no Conteúdo do Ensino Médio Lecionado em uma Instituição Pública / Wellington Simião de Souza. - 2017.
119 f.

Orientador: André Luiz Martins Pereira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Área de Concentração em Matemática, 2017.

1. MATEMÁTICA. 2. ENSINO DA MATEMÁTICA. 3. DESIGUALDADE DAS MÉDIAS. 4. DESIGUALDADE DE BERNOULLI. 5. DESIGUALDADE DE CAUCHY SCHWARZ. I. Pereira, André Luiz Martins, 1980-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Área de Concentração em Matemática III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

WELLINGTON SIMIÃO DE SOUZA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 17/03/2017

____

André Luiz Martins Pereira - Doutor em Matemática - UFRRJ
(Orientador)

____

Eulina Coutinho Silva do Nascimento- Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação – UFRRJ

____

Roberto Alfonso Olivares Jara - Doutor em Matemática - UERJ

Dedico este trabalho aos meus pais que souberam de forma simples e honesta me criar, a minha esposa e minha filha que são minha razão de viver e aos meus companheiros de profissão que se empenham na honrosa tarefa de transformar vidas.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus por ter me mantido com a saúde e disposição para que pudesse vencer mais esse desafio;

Agradeço ao meu orientador André Luiz pela paciência, disposição e atenção que me deu durante toda a elaboração do trabalho;

Agradeço a todos os professores do curso PROFMAT/UFRRJ-2015 pelo empenho na formação dos novos mestres;

Agradeço ao Colégio Curso Intelecto de Campo Grande pelo espaço cedido por muitas vezes para pesquisas e estudos;

Agradeço aos colegas de turma do curso PROFMAT/UFRRJ-2015 pelo companheirismo e espírito de unidade mostrado durante todo o curso;

Agradeço aos meus colegas de turma Fábio Costa e Alex pelos dias de estudos e preparação para as provas;

Agradeço à professora Eulina e à colega Edhana pela ajuda nos estudos das normas da ABNT;

Agradeço à SBM e à CAPES que idealizaram este curso de pós-graduação stricto sensu para a formação dos novos mestres em matemática.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar um material para auxiliar os docentes do ensino médio que desejam uma fonte de pesquisa e um plano de aula para trabalhar com seus alunos o conteúdo de Desigualdade das Médias. No Plano da Didática para elaboração do nosso trabalho tomaremos como inspiração os trabalhos das professoras Margibel e Meneguetti. No desenvolvimento dos conceitos matemáticos procuramos explorar conceitos elencados no livro "Meu professor de Matemática e outras Histórias" do professor Elon Lages Lima e aulas vinculadas nas mídias sociais do professor Fábio Henrique Teixeira de Souza. Buscamos trabalhar com esses professores pois em suas apresentações sobre o conteúdo que aqui dissertaremos muito nos agradou suas abordagens geométricas sobre o assunto. Nosso trabalho também dedicou um capítulo para a produção de atividades, algumas com uma contextualização histórica e outras com uma abordagem interdisciplinar, com objetivo de que o aluno através de conceitos básicos já trazidos de sua bagagem matemática construa definições e conclua as Desigualdades das Médias.

Palavras-chave: Desigualdade das Médias, Contextualização Histórica, Abordagem Interdisciplinar.

ABSTRACT

This paper aims to present a material to help high school teachers who want a research source and a lesson plan to work with their students the content of Inequality of Averages. In the Didactics Plan for the preparation of our work we will take as inspiration the works of Margibel and Meneguetti. In the development of the mathematical concepts we try to explore concepts listed in the book "My teacher of Mathematics and other Stories" by Professor Elon Lages Lima and classes linked in the social media of Professor Fábio Henrique Teixeira de Souza. We sought to work with these professors because in their presentations on the content we will be discussing, we were very pleased with their geometric approaches on the subject. Our work has also devoted a chapter to the production of activities, some with historical contextualization and others with an interdisciplinary approach, with the objective that the student through basic concepts already brought from his mathematical baggage constructs definitions and concludes the Inequalities of Averages.

Keywords: Inequality of Averages, Historical contextualization, Interdisciplinary Approach.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um professor sempre quando pensa em lecionar um conteúdo deve ter em mente que sua forma de didática é mais importante do que a simples transmissão de conhecimento.

Para isso é essencial que o aluno perceba que a aula foi planejada e estruturada e isso percebe-se através da exposição dos objetivos, dos conteúdos e bibliografia. O professor deve sempre deixar claro para o aluno qual o objetivo na transmissão de um certo conhecimento, os conteúdos que serão abordados e as referências que serão seguidas para dar embasamento àquele conhecimento.

Também consideramos necessário que o professor tenha uma relação de proximidade com o aluno respeitando seus limites e conhecendo sempre que possível a capacidade individual, mas sem discriminar ou favorecer um em detrimento do outro.

"Um elemento importante é identificar os estudantes, mas com reservas, uma vez que não faz sentido rotular os alunos" (GIL, 2010, p. 43).

"O modo como se efetiva a relação com os estudantes influencia não apenas o aprendizado dos conteúdos que são ministrados, mas a satisfação pessoal e profissional do professor" (GIL, 2010, p. 58).

Quando um aluno do ensino médio se depara por exemplo com um problema matemático de otimização este sempre tenta como método para sua resolução enquadrar esse problema como uma função polinomial do segundo grau. Mas nesse trabalho mostraremos que existe uma gama de problemas elementares que podem ser resolvidos por outros métodos. E um desses eficientes métodos é a desigualdade entre as médias. Tal conteúdo dificilmente é visto no ensino médio. Muitas vezes sendo abordado somente em estudos pós-médio. Não aprofundaremos nos distintos métodos das desigualdades abordadas no ensino superior na disciplina de Matemática Discreta, pois este não é o objetivo, visto que sua linguagem só desestimularia o gosto dos alunos à aprendizagem, mas sim mostraremos as desigualdades básicas das médias em diferentes contextos na construção da aprendizagem matemática.

A intenção é apresentar aos professores que podemos propor aos alunos atividades que apresentem o conteúdo das Desigualdades das Médias de uma forma não simplesmente conteudista. Não será oferecida nesse trabalho a tão criticada pelo Professor Paulo Freire *educação Bancária*[1], mas sim conscientizar o aluno de métodos alternativos para resolução de problemas sob uma ótica construtivista.

Utilizaremos como base de pesquisa o livro "Meu professor de Matemática e outras Histórias" do professor Elon Lages Lima e aulas vinculadas nas mídias sociais do professor Fábio Henrique Teixeira de Souza.

Mostraremos que o ensino das médias, tanto no ensino médio como no fundamental, transcende o simples cálculo de operações básicas. A essência das operações das médias está na sua interpretação e entendimento e não a simples memorização.

Mostraremos um embasamento teórico com o desenvolvimento algébrico dos conceitos básicos das médias(aritméticas, geométricas e harmônicas), provando suas relações por métodos de indução ou outros que achamos conveniente, com ilustrações geométricas que fundamentam as desigualdades, objetivo do nosso estudo.

Também consideramos que a metodologia de ensino é o "START" de qualquer aprendizagem, ou seja, não adianta o docente ter um conhecimento indiscutível sobre o assunto que lecionará se o mesmo não planejar sua aula de forma adequada com vista ao público-alvo.

Traremos uma proposta para os docentes de um plano de aula que abordará o conteúdo das desigualdades das médias de uma forma diferente. Não da forma

1 Educação que visava a mera transmissão passiva de conteúdos do professor, assumido como aquele que supostamente tudo sabe, para o aluno, que era assumido como aquele que nada sabe.

abstrata mostrada em livros didáticos que falam sobre o assunto, mas tentaremos deixar o assunto agradável e interessante não deixando o aspecto lúdico de lado, pois estaremos em um ambiente adolescente. Trabalharemos atividades que abordarão situações intuitivas e históricas com contextos matemáticos onde o próprio aluno chegará as suas conclusões desencadeando nas desigualdades das médias.

Uma das situações interessantes que será apresentada no nosso trabalho é a abordagem interdisciplinar através da aplicação da média harmônica com a Física nas atividades propostas, bem como a aplicação da desigualdade de Bernoulli na comparação entre os regimes de juros simples e juros compostos.

2 A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DAS MÉDIAS E SUAS RELAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Uma Situação Interessante

Pedro dava aula de português em um curso preparatório há 5 anos. Era feliz e tudo ia as mil maravilhas. Só que de repente o país entrou em uma crise financeira. Lojas fecharam, desemprego em alta, taxas de juros subindo e o pior, Pedro não recebia do curso a dois meses. Para compensar esse desespero de falta de pagamento de Pedro o dono do curso fez uma proposta com o mesmo. O dono propôs no terceiro mês que ele pagaria o salário dos dois meses atrasados com mais um acréscimo da média desses dois meses. Pedro ficou feliz pois dessa vez poderia já começar a fazer seus planos com o dinheiro que iria receber. Ele fez o seguinte cálculo: o salário do primeiro mês atrasado(R$450) com o segundo(R$200) dividido por dois lhe daria o acréscimo que o dono do curso lhe prometera. Então concluiu que receberia R$650,00 com um acréscimo de R$325,00 o que totalizaria R$975,00. Chegado o dia do pagamento o dono do curso entregou a Pedro R$950,00 pelos meses atrasados e referente ao acréscimo. Mas Pedro indignado com o valor argumentou que o dono não havia cumprido com o prometido já que o valor da média deveria ser R$325,00. Só que em uma sacada genial o dono do curso disse a Pedro que em nenhum momento tinha mencionado que a média que seria utilizada era a aritmética. Ele resolveu utilizar a média geométrica que diferente da primeira era a raiz quadrada do produto dos salários. Que dava o valor de R$300,00, menor que os R$325,00 calculado por Pedro.

Quando falamos em média, seja aritmética ou geométrica, entre dois valores sabemos que é certo que o resultado estará entre o menor e o maior dos dois valores dados. Mas fica claro entender porque o dono do curso optou pela média geométrica pois esta nunca resultará em um valor maior que a média aritmética.

Vejamos por exemplo a tabela abaixo comparativa entre as médias aritmética e geométrica de dois valores quaisquer:

Tabela 1: Comparação entre Média Aritmética e Geométrica

Valores	Média Aritmética(M_A)	Média Geométrica(M_G)
2 e 8	$M_A=\frac{2+8}{2}=5$	$M_G=\sqrt{2.8}=4$
1 e 4	$M_A=\frac{1+4}{2}=2{,}5$	$M_G=\sqrt{1.4}=2$
3 e 12	$M_A=\frac{3+12}{2}=7{,}5$	$M_G=\sqrt{3.12}=6$
5 e 5	$M_A=\frac{5+5}{2}=5$	$M_G=\sqrt{5.5}=5$
6 e 6	$M_A=\frac{6+6}{2}=6$	$M_G=\sqrt{6.6}=6$

Fonte: Autor

Observe que, sabendo que a média aritmética é a soma dos termos dividido pela quantidade de termos e a média geométrica é a raiz de índice "n"(onde n é a quantidade de termos) do produto dos termos, em nenhum caso a média geométrica é maior que a média aritmética acontecendo a igualdade M_A = M_G apenas quando os dois valores dados são iguais.

2.1 IMPORTÂNCIA DAS MÉDIAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no ensino fundamental estão pautados por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidas nos últimos anos(BRASIL,1997, p.19). São alguns desses princípios: cidadania, democracia e a matemática como instrumento de transformação da realidade.

O PCN coloca a importância das operações mais simples do dia a dia, como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos cálculos, por exemplo, de tempo médio de um determinado percurso e frequentemente em interpretações de revistas e jornais, a média aritmética se apresenta como um conhecimento de grande aplicabilidade. Também é de grande importância em várias áreas do conhecimento, como na geografia e ciência.

No mundo em que vivemos uma das coisas mais importantes é o tratamento e interpretações de dados matemáticos. Por isso consideramos de suma importância responder algumas questões, tais como: Para que serve o valor da média aritmética? Esse valor coincide com algum valor da *amostra*[2]? Em que situações esses valores são iguais? Onde e como usar seu valor? Em que situações seu valor é necessário para analisar os dados de uma amostra?

Apesar da simplicidade de seu conteúdo, e facilidade para cálculo de seu algorítimo, até mesmo por aqueles que não são amantes da matemática, a média é um conceito estatístico complexo e muitas vezes sua interpretação não tem a compreensão adequada.

Como no exemplo do trabalho de Paulo Jorge Magalhães Teixeira(PARA ALÉM DO CÁLCULO DA MÉDIA ARITMÉTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL) no VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática na ULBRA, o mesmo menciona que segundo Watson(1996), crianças pequenas interpretam a frase: "os casais jovens têm em média 2,3 filhos" como: " eles têm dois filhos e a esposa está grávida do terceiro".

2.1.1 Para que serve o valor da média aritmética?

A média aritmética é calculada pela soma de todos os termos de um conjunto dividido pelo número de elementos desse conjunto. O resultado obtido é chamado de média aritmética ou simplesmente média que é um valor que pode representar todo o conjunto. Vejamos algumas situações de sua utilidade no nosso dia a dia.

João no ano letivo de 2016 teve as seguintes notas em matemática: 7, 8, 5 e 4. Qual é a média aritmética das notas de matemática no ano de 2016? João foi

2 consiste em um subconjunto representativo, ou seja, em um conjunto de indivíduos retirados de uma população

aprovado ou reprovado no ano de 2016 se a média para aprovação tem que ser maior ou igual a 6,0?

Resolução: $M_A = \frac{7+8+5+4}{4} = \frac{24}{4} = 6$, o aluno foi aprovado.

Observe que na situação acima a média aritmética serve como parâmetro de aprovação ou reprovação do aluno.

Nos meses de Janeiro 2016, Fevereiro 2016 e Março de 2016 a quantidade de chuva medida foi de respectivamente: 22mm, 27mm, 32mm. Se a média de chuva se mantiver constante estime um valor para quantidade de chuva acumulado no mês de Abril 2016.

Resolução: A média para os três meses é $M_A = \frac{22+27+32}{3} = \frac{81}{3} = 27\,mm$. Podemos então estimar uma quantidade de 27mm de chuva acumulada para o mês de Abril 2016.

Observe que a média aritmética serve como valor para se estimar uma situação futura.

2.1.2 Esse valor coincide com algum valor da amostra?

O valor da média sempre estará entre o maior e o menor dos valores do conjunto podendo se igualar a um dos termos da amostra.

João no ano letivo de 2016 teve as seguintes notas em matemática: 7, 8, 6 e 3. Qual é a média aritmética das notas de matemática no ano de 2016? João foi aprovado ou reprovado no ano de 2016 se a média para aprovação tem que ser maior ou igual a 6,0?

$$M_A = \frac{7+8+6+3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Como podemos ver a média aritmética neste caso possui o valor numérico de um dos termos da amostra.

2.1.3 Onde e como usar seu valor?

Uso das médias aritméticas tem várias serventias como já foi falado. Estimar valores futuros e também é de grande serventia para análise de dados estatísticos. Observe a situação abaixo:

(ENEM 2013)

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas comprará, analisa o lucro (em milhões reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Figura 1: Quadro Lucro x Tempo

Empresa	Lucro (em milhões de reais	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

Fonte: ENEM

Resolução:

Sabendo que a definição de média aritmética é

$$M_A = \frac{soma\, dos\, lucros\; por\; ano}{quantidade\, de\, anos}$$

Empresa F: $M_A = \frac{24}{3} = 8\left(isto\; significa\, um\, lucro\, de\, 8\, milhões\; por\; ano\right)$

Empresa G: $M_A = \frac{24}{2} = 12\left(isto\; significa\, um\, lucro\, de\; 12\, milhões\; por\; ano\right)$

Empresa H: $M_A = \frac{25}{2{,}5} = 10\left(isto\; significa\, um\, lucro\, de\, 10\, milhões\; por\; ano\right)$

Empresa M: $M_A = \frac{15}{1{,}5} = 10\left(isto\; significa\, um\, lucro\, de\, 10\, milhões\; por\; ano\right)$

Empresa P: $M_A = \frac{9}{1{,}5} = 6\left(isto\, significa\, um\, lucro\, de\; 6\, milhões\, por\; ano\right)$

Observe que a média nesse contexto serve para analisar que a empresa G é a que dá mais lucro em média por ano.

2.1.4 Em que situações seu valor é necessário para analisar os dados de uma amostra?

Como vimos na seção anterior o uso muitas vezes da ferramenta das médias é essencial na tomada de decisões, mas em algumas situações de análise de dados a média aritmética pode nos induzir a conclusões equivocadas.

Já foi colocado que a média aritmética é um valor que pode representar todo um conjunto. Imagine que em uma determinada cidade uma pesquisa levante a informação de que a média salarial da população é de R$2.000,00. Será que esse valor pode representar individualmente o salário dos cidadãos? A resposta é óbvio que não. Sabemos que há no nosso país grande desigualdade social fazendo que alguns ganhem muito e outros ganhem pouco. Logo a média aritmética não é a melhor ferramenta de pesquisa nessa situação para igualar elementos tão desiguais.

2.2 IMPORTÂNCIA DAS MÉDIAS NO ENSINO MÉDIO

O PCN traz no Ensino Médio vários saberes para a composição da base curricular. A matemática está entre eles na área das CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA.

> A presença da matemática nessa área se justifica pelo que de ciência tem a matemática, por sua afinidade com as ciências da natureza, na medida em que é um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos destas últimas, e finalmente pela importância de integrar a matemática com os conhecimentos que lhe são mais afins(BRASIL,2000,p. 93).

Quando trabalhamos o conhecimento de médias pra uma turma de ensino médio esperamos desenvolver habilidades de forma com que o aluno possa entender e aplicar o conhecimento adquirido não só em situações acadêmicas, mas também no seu dia a dia.

Aqui nesse capítulo falaremos da importância da média aritmética, geométrica e harmônica no ensino médio e a relação de desigualdade entre elas, bem como a importância das desigualdades de Bernoulli e Cauchy-Schwarz na resolução de problemas.

2.2.1 Importância das médias aritméticas no Ensino Médio

O conteúdo de médias aritméticas é importante no estudo de Estatística no 3º ano do Ensino médio, onde também são estudados os conhecimentos de moda, mediana, desvio padrão e variância.

A média aritmética tem sua utilidade no auxílio de vários ramos da matemática como nos conteúdos de geometria e progressões aritméticas.

Por exemplo podemos mostrar que o ângulo interno de qualquer *polígono* *regular*[3] é igual à média aritmética da soma desses ângulos, ou seja, como a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é $S_i = 180^o(n-2)$, seu ângulo interno será $A_i = \frac{S_i}{n}$. Observe a tabela abaixo:

Tabela 2: polígonos regulares

POLÍGONO REGULAR	n(NÚMERO DE LADOS)	S_i	A_i
TRIÂNGULO	3	180°	
QUADRILÁTERO	4	360°	
PENTÁGONO	5	540°	
...	...	...	...

Fonte: Autor

A média aritmética também é utilizada para encontrar um termo central numa Progressão Aritmética.

Por exemplo se tivermos uma sequência aritmética composta pelos elementos (3,5,7,9,11,13,15), podemos observar que qualquer termo da sequência é igual à média aritmética de dois termos equidistantes a ele, ou seja, se pegarmos o número 9 temos que:

$$9 = \frac{7+11}{2} \quad \text{ou} \quad 9 = \frac{5+13}{2} \quad \text{ou} \quad 9 = \frac{3+15}{2}$$

2.2.2 Importância das médias geométricas no Ensino Médio

Uma das importâncias do estudo das médias geométricas é sua aplicação no campo da matemática financeira principalmente quando falamos em taxas sucessivas.

3 *Polígono de lados e ângulos iguais*

Observe a seguinte situação:

Uma geladeira da marca "X" sofre, em três meses seguidos, três aumentos sucessivos de 30%, 8% e 16%. Qual aumento médio mensal da geladeira?

Note que se o aluno calcular pela média aritmética ele acharia $M_A = \frac{30+8+16}{3} = 18$, mas observe que um acréscimo de 18% ao mês nos daria um acumulado de aproximadamente 64,30% em três meses($1{,}18^3 = 1{,}6430$), enquanto um acumulado de 30%, 8% e 16% nos dará um acumulado de 62,86% aproximadamente em três meses(1,30x1,08x1,16 = 1,6286).

Por outro lado se calcularmos pela média geométrica, e lembrando como estamos trabalhando com aumentos sucessivos, um aumento de 30% significa que o produto "X" será multiplicado pelo fator de correção 1,30, aumento de 8% corresponde ao fator de correção 1,08 e um aumento de 16% corresponde ao fator de correção de 1,16.

O aumento médio mensal pode ser calculado da seguinte forma:

$M_G = \sqrt[3]{1{,}30 . 1{,}08 . 1{,}16}$ = 1,176544. Teremos um aumento médio de 17,65% ao mês aproximadamente.

Um aumento de 17,65% ao mês dá um acumulado de 62,85% aproximadamente(1,1765x1,1765x1,1765 = 1,6285). Observe que a média geométrica é a ferramenta adequada para trabalhar com o cálculo de taxas sucessivas onde temos o chamado juros sobre juros, ou seja, onde o regime de capitalização trabalhado é o de Juros compostos.

2.2.3 Importantes aplicações das médias Harmônicas no Ensino Médio

A média Harmônica é uma média relacionada ao cálculo matemático das situações envolvendo as grandezas inversamente proporcionais. Como exemplo, temos a relação entre velocidade e tempo.

O cálculo da média harmônica é dado pelo inverso da média aritmética dos inversos dos números dados. Observe a tabela abaixo:

Tabela 3: Cálculo da Média Harmônica para dois valores

Valores	Inversos	Média aritmética dos inversos	Média Harmônica
2 e 3	$\frac{1}{2} e \frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}=2{,}4$
4 e 5	$\frac{1}{4} e \frac{1}{5}$	$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{2}=\frac{\frac{9}{20}}{2}=\frac{9}{40}$	$\frac{40}{9}=4{,}444..$
1 e 4	$\frac{1}{1} e \frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{\frac{5}{4}}{2}=\frac{5}{8}$	$\frac{8}{5}=1{,}6$

Fonte: Autor

Uma das importâncias da média harmônica se dá no campo da Física no cálculo de velocidade média para percursos iguais. Observe a situação abaixo:

Um veículo percorre 30km com a velocidade de 30km/h e, em seguida, a mesma distância com a velocidade de 20km/h. Qual sua velocidade média?

Observe que se calcularmos pela média aritmética acharemos $M_A=\frac{30+20}{2}=25\,km/h$.

Mas essa resposta está equivocada pois como velocidade é expressa pela relação $\frac{espaço\ percorrido}{tempo}$, e o espaço percorrido é a mesmo para as duas velocidades, teremos duas variáveis que são inversamente proporcionais: velocidade e tempo. A média harmônica está relacionada ao cálculo matemático das situações envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Em capítulo posterior mostraremos detalhadamente que a média na questão terá como valor $M_H=24\,km/h$.

Podemos utilizar uma adaptação da média harmônica para o cálculo dos problemas das torneiras quando duas ou mais enchem um reservatório. O tempo que "n" torneiras levarão pra encher um determinado reservatório juntas será igual à média harmônica dos tempos dividido pela quantidade de torneiras "n".

Exemplo: Uma torneira A enche sozinha um tanque em 10h, uma torneira B, enche o mesmo tanque sozinha em 15h. Em quantas horas as duas torneiras juntas encherão o tanque?

Observe que também aqui estamos com uma grandeza inversamente proporcional visto que $vazão=\frac{volume}{tempo}$, ou seja , mantendo o volume constante ,quanto maior vazão menor o tempo .

De forma análoga podemos ter outras situações como nos exemplos abaixo:

<u>Capacidade pessoal</u>: Uma pessoa é capaz de construir um muro em 6 horas e outra pessoa tem a capacidade de trabalho para construir este mesmo muro em 9 horas. Pondo-se as duas pessoas trabalhando em conjunto, em quanto tempo t, o muro estará pronto?

<u>Resistores em paralelo</u>: Qual é a resistência equivalente, em um circuito elétrico contendo as resistências de 4 Ohm e 6 Ohm, ligadas em paralelo?

<u>Capacitores em série</u>: Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores 6 Farad e 4 Farad no circuito abaixo se os dois capacitores estão ligados em série?

Veremos as resoluções desses problemas nos próximos capítulos.

2.2.4 A importância das desigualdades entre a Média aritmética, Geométrica e Harmônica

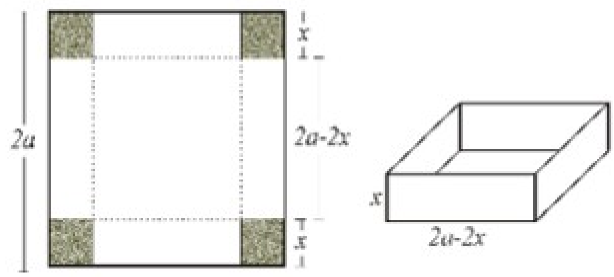
Já vimos que para mesmos valores de um determinado conjunto a média aritmética, geométrica e harmônica podem ter resultados diferentes. Isso se dá porque existe uma relação entre elas de desigualdade que pode ser expressa da seguinte forma:

$$M_A \geq M_G \geq M_H$$

Essas relações podem ser de grande utilidades para provar relações do tipo: "A soma de um número real positivo com seu inverso sempre será maior ou igual a 2." Ou em questões de otimização sem uso da ferramenta do cálculo, como no exemplo abaixo:

Numa folha de cartolina de lados 2a retiramos quadrados de lado x < a de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado 2a – 2x e altura x. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?

Figura 2: Caixa de Cartolina



Fonte: PROFMAT

Essas duas situações serão demonstradas nos próximos capítulos.

2.2.5 As desigualdades de Bernoulli e Cauchy-Schwarz na resolução de problemas

A desigualdade de Bernoulli é de grande utilidade na comparação entre Juros Simples e Juros compostos. Então ela serve como mais uma ferramenta para mostrar a evolução nesses dois sistemas.

Nesse trabalho mostraremos como a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser de grande utilidade para mostrar as relações de Otimização no paralelepípedo relacionando Volume(V) , área(S) e a diagonal(D) do mesmo.

Nos próximos capítulos mostraremos que em um paralelepípedo de dimensões a, b e c podemos encontrar as relações:

$$D \geq \frac{(a+b+c)}{\sqrt{3}} \quad , \quad S \leq 2D^2 \quad , \quad V \leq D . \frac{\sqrt{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}}{3}$$

pelo método das desigualdades de Cauchy-Schwarz.

3 MÉDIAS ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E HARMÔNICAS, SUAS RELAÇÕES E DESIGUALDADES DE BERNOULLI E CAUCHY-SCHWARZ

Primeiro é importante que o aluno saiba a definição de desigualdade, ou seja, quando desejamos limitar medidas de uma determinada grandeza. Como por exemplo podemos pensar na temperatura durante um certo dia. A temperatura é uma grandeza que pode ter valores diferentes dependendo do horário do dia ou local onde se é feito o levantamento. A título de exemplo podemos citar um estudo de temperatura máxima e mínima para um certo dia em um determinado estado. Se nesse estado tivéssemos sua temperatura mínima em torno de 12º e máxima de 29º, representando temperatura pela variável T, poderíamos expressar essa informação através de uma desigualdade. No exemplo temos que T tem uma cota inferior de 12º e uma cota superior de 29º, ou seja, $12^o \leq T \leq 29^o$.

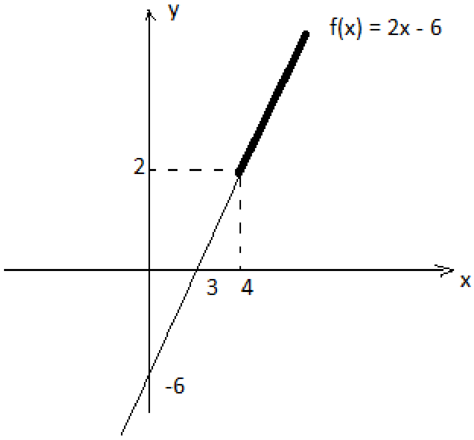
Da mesma forma se resolvêssemos limitar uma população de determinado estado entre 15.000 e 22.000 habitantes. Sua representação seria da forma $15.000 \leq P \leq 22.000$, ou seja, P admite um valor nesse intervalo de mínimo 15.000 e máximo 22.000.

Existem algumas desigualdades que são intuitivas e não necessitam de demonstração, tais como: um número positivo é sempre maior ou igual a zero.($4 \geq 0$) e o quadrado de um número real será sempre um número positivo ou nulo($x^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$). Esse conceito será de grande utilidade na demonstração de desigualdade das médias.

Quando um aluno do ensino médio estuda inequações ele deve entender os conceitos básicos de desigualdade e não apenas mecanize uma forma para obtenção dos resultados.

Quando por exemplo trabalhamos na resolução da inequação $2x-6 \geq 2$ o aluno deve saber interpretar que ele estará a procura de todos os valores de x que tornam a expressão 2x – 6 maiores ou iguais a 2, ou seja, o valor mínimo de 2x – 6 é 2.

Figura 3: gráfico da função f(x)



Fonte: Autor

Observe no gráfico que a função f(x) = 2x-6 para x igual a 4 terá um valor numérico 2. então a funçao f(x) será maior ou igual a 2 para valores de x maiores ou iguais a 4.

Nas próximas seções mostraremos os conceitos algébricos e geométricos de média aritmética e geométrica e depois faremos as comparações entre essas duas médias mostrando aplicações em problemas do ensino médio.

3.1 MÉDIA ARITMÉTICA

Um conceito Algébrico

Uma média sempre será a substituição de uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, de "n" termos por um número representativo dentro do intervalo $[x_1, x_n]$. Ou seja, se chamarmos M de média da sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde $x_1 \le x_2 \le x_3 \ldots . \le x_n$ saberemos que $x_1 \le M \le x_n$. Observe que se todos os termos da sequência forem iguais mesmo assim é válida a desigualdade, $x_1 \le M \le x_n$. Consideremos todos os termos da sequência iguais a M e calculemos seu somatório.

$x_1+x_2+x_3+...+x_n=M+M+M+...+M$, como temos "n" termos iguais a M:

$$x_1+x_2+x_3+...+x_n=n.M$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}=M$$

M acima representa a média nomeada média aritmética(M_A) que é a soma dos "n" termos da sequência dividida pela quantidade "n" de termos da sequência.

$$M_A=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$$

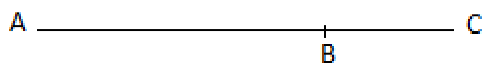
Exemplo: Ache a média aritmética dos números 2 , 4 e 6.

$$M_A=\frac{2+4+6}{3}=4$$

Um conceito Geométrico

Imagine dois segmentos AB e BC de forma que AC = AB + BC.

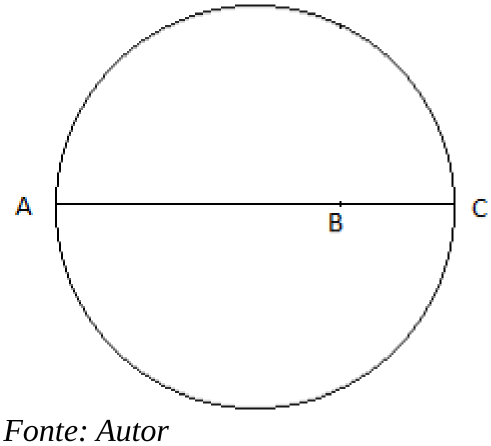
Figura 4: segmento AC = AB + BC



Fonte: Autor

Criaremos uma circunferência cujo diâmetro é o segmento AC.

Figura 5: círculo de diâmetro AC



Fonte: Autor

Logo se chamarmos de D o *diâmetro da circunferência*[4], D = AB + BC e como raio é metade do diâmetro $R=\frac{AB+BC}{2}$, ou seja, o raio é a média aritmética dos dois segmentos.

3.2 MÉDIA GEOMÉTRICA

Um conceito algébrico

Neste ponto vamos considerar da mesma forma M a média da sequência $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ onde $x_1 \leq x_2 \leq x_3 .... \leq x_n$ sabemos que $x_1 \leq M \leq x_n$ .Se todos os termos da sequência forem iguais mesmo assim é válida a desigualdade, $x_1 \leq M \leq x_n$ então como a operação básica da média geométrica é a multiplicação, temos:

$$x_1 . x_2 . x_3 ... x_n = M . M . M ... M$$

$$x_1 . x_2 . x_3 ... x_n = M^n$$

$$\sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 ... x_n} = M$$

Daí concluímos que a média geométrica é a raiz n-ésima do produto dos n termos da sequência.

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 ... x_n}$$

Exemplo: Ache a média geométrica entre os números 2,4 e 6.

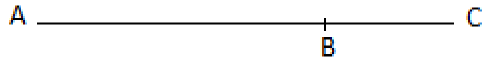
$$M_G = \sqrt[3]{2.4.6} = \sqrt[3]{48} \simeq 3,4$$

4 qualquer segmento de reta que toque uma circunferência em dois pontos e passe pelo seu centro.

Um conceito geométrico

Imagine dois segmentos AB e BC de forma que AC = AB + BC.

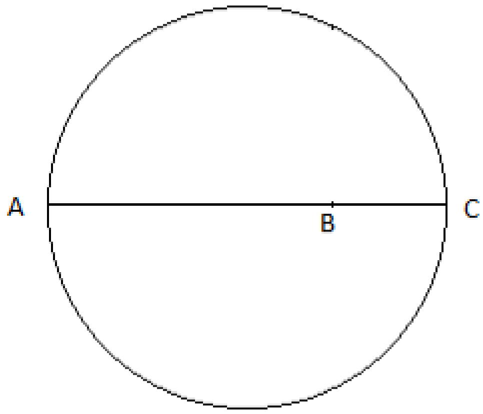
Figura 6: segmento AC=AB+BC



Fonte: Autor

Criaremos uma circunferência cujo diâmetro é o segmento AC.

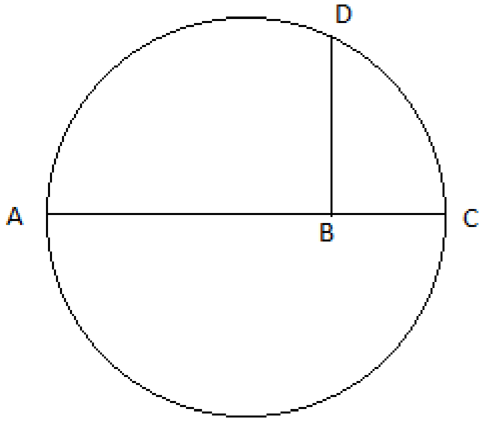
Figura 7: círculo de diâmetro AC



Fonte: Autor

Agora subiremos uma reta perpendicular justamente na junção entre os segmentos AB e BC encontrando a circunferência em um ponto D como ilustra a figura abaixo:

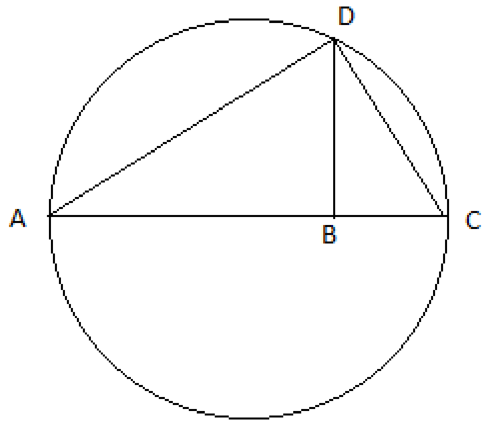
Figura 8: Circunferência com segmento BD perpendicular a AC



Fonte: Autor

Observe que se fecharmos o triângulo ACD este será retângulo em D, logo o segmento DB é a altura relativa a hipotenusa AC deste triângulo retângulo.

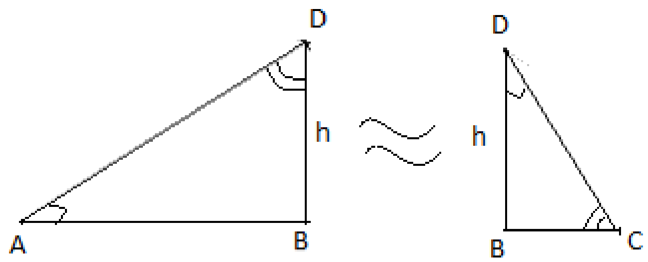
Figura 9: Circunferência com triângulo ACD inscrito



Fonte: Autor

Observe que os dois triângulos retângulos ABD e BDC são semelhantes:

Figura 10: Triângulos ABD e BDC semelhantes



Fonte: Autor

Logo:

$$\frac{h}{BC} = \frac{AB}{h}$$

$$h^2 = AB \,.\, BC$$

$$h = \sqrt[2]{AB \,.\, BC} \quad , \left(\quad h = \text{média geométrica dos segmentos } AB \text{ e } BC \quad \right)$$

Ou seja, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica de AB e BC, que são respectivamente as projeções dos catetos AD e DC.

3.3 MÉDIA HARMÔNICA

Um conceito algébrico

Agora vamos considerar da mesma forma $\frac{1}{M}$ a média da sequência $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \dots \frac{1}{x_n}$ onde sabemos que $\frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_3} \dots \leq \frac{1}{x_n}$, $\frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{M} \leq \frac{1}{x_n}$ Se todos os termos da sequência forem iguais mesmo assim é válida a desigualdade, $\frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{M} \leq \frac{1}{x_n}$ então pela definição de média aritmética, temos:

$$\frac{1}{M} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

ou seja:

$$M = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$. Daí temos o conceito de média harmônica.

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Apresentamos abaixo uma tabela comparativa entre as médias aritmética, geométrica e harmônica de dois valores:

Tabela 4: Tabela comparativa entre as médias aritmética, geométrica e harmônica

Valores	M_A	M_G	M_H
2 e 3	2,5	2,45	2,4
4 e 5	4,5	4,47	4,444...
1 e 4	2,5	2	1,6

Fonte: Autor

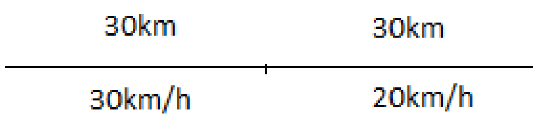
Com os valores dados acima já podemos observar que existe uma relação de desigualdade entre as médias.

Aplicações Da Média Harmônica

Observe o problema abaixo que aparentemente se trata de um problema de Física:

Um veículo percorre 30km com a velocidade de 30km/h e, em seguida, a mesma distância com a velocidade de 20km/h. Qual sua velocidade média?

Figura 11: trechos com mesma distância, mas com Vm (velocidade média) diferentes



Fonte: Autor

Pela definição de velocidade média(Vm), temos que :

$$V_m = \frac{Espaço\ percorrido}{tempo}$$

logo, para o primeiro trecho do percurso

$$30=\frac{30}{t_1}, isto\ é, t_1=1\,h$$

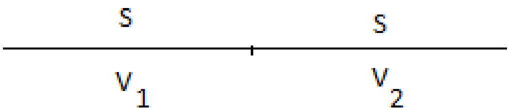
Para o segundo trecho do percurso, temos:

$$20=\frac{30}{t_2}, isto\ é, t_2=1{,}5\,h$$

Então temos que o tempo total do percurso $t_{total}=t_1+t_2=1\,h+1{,}5\,h=2{,}5\,h$

Observe que se fizermos a questão de forma genérica teremos

Figura 12: trechos com a mesma distância, mas com Vm diferentes



Fonte: Autor

Para o primeiro trecho:

$$V_1=\frac{S}{t_1}, isto\ é, t_1=\frac{S}{V_1} \quad \text{(I)}$$

No segundo trecho temos:

$$V_2=\frac{S}{t_2}, isto\ é, t_2=\frac{S}{V_2} \quad \text{(II)}$$

Só que a velocidade média de todo o percurso pode ser encontrada por:

$$V_m = \frac{Espaço\ percorrido}{tempo} = \frac{2S}{t_{total}} = \frac{2S}{t_1 + t_2} \quad (\text{III})$$

Agora, substituindo (I) e (II) em (III):

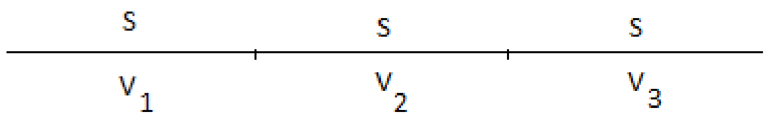
$$V_m = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}$$

Conclusão:

A velocidade média do percurso total é a media harmônica das velocidades médias dos trechos de mesma distância.

Observe para três intervalos de espaços iguais:

Figura 13: trechos com a mesma distância, mas com Vm diferentes



Fonte: Autor

Com o mesmo raciocínio teríamos:

$$V_m = \frac{3S}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2} + \frac{S}{V_3}} = \frac{3}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}}$$

No Exercício então poderíamos utilizar a ferramenta da Média Harmônica:

$$V_m = \frac{2}{\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}} = \frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{5}{60}} = \frac{120}{5} = 24\,km/h$$

Então:

$$t_{total} = \frac{60}{24} = 2{,}5\,h$$

Outros exemplos da aplicação da Média Harmônica:

Uma torneira A enche sozinha um tanque em um tempo t_1 horas, uma torneira B, enche o mesmo tanque sozinha em um tempo t_2 horas. Em quanto tempo as duas torneiras juntas encherão o tanque?

Resolução:

A 1º torneira enche o tanque em t_1 horas, logo utilizando regra de três simples:

Tempo		volume
t_1	———	1 tanque
1 h	———	x

$$x = \frac{1}{t_1}\,do\,tanque$$

A 2º torneira enche o tanque em t_2 horas, logo utilizando regra de três simples:

Tempo		volume
t_2	———	1 tanque
1 h	———	y

$$y = \frac{1}{t_2} \, do \, tanque$$

Logo em 1h as duas torneiras juntas terão enchido a fração $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 . t_2}$ do tanque.

Com isso, temos as duas torneiras juntas:

Tempo		volume
1 h	————	$\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}$ do tanque
T	————	1 tanque

$$T = \frac{1}{\left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 . t_2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)} . \frac{1}{2}$$,ou seja, $T = \frac{M_H}{2} \left(metade \, da \, média \, harmônica\right)$

Agora observe o exemplo:

Uma torneira A enche sozinha um tanque em 10h, uma torneira B, enche o mesmo tanque sozinha em 15h. Em quantas horas as duas torneiras juntas encherão o tanque?

Resolução:

$$M_H = \frac{2.10.15}{10+15} = \frac{300}{25} = 12 \quad , \quad T = \frac{M_H}{2} = \frac{12}{2} = 6h$$

De forma análogo temos os problemas

Uma pessoa é capaz de construir um muro em 6 horas e outra pessoa tem a capacidade de trabalho para construir este mesmo muro em 9 horas. Pondo-se as duas pessoas trabalhando em conjunto, em quanto tempo t, o muro estará pronto?

$$M_H = \frac{2.6.9}{6+9} = \frac{108}{15} = 7{,}2 \quad , \quad T = \frac{M_H}{2} = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6\,h$$

Qual é a resistência equivalente, em um circuito elétrico contendo as resistências de 4 Ohm e 6 Ohm, ligadas em paralelo?

$$M_H = \frac{2.4.6}{4+6} = \frac{48}{10} = 4{,}8 \quad , \quad T = \frac{M_H}{2} = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4\,Ohm$$

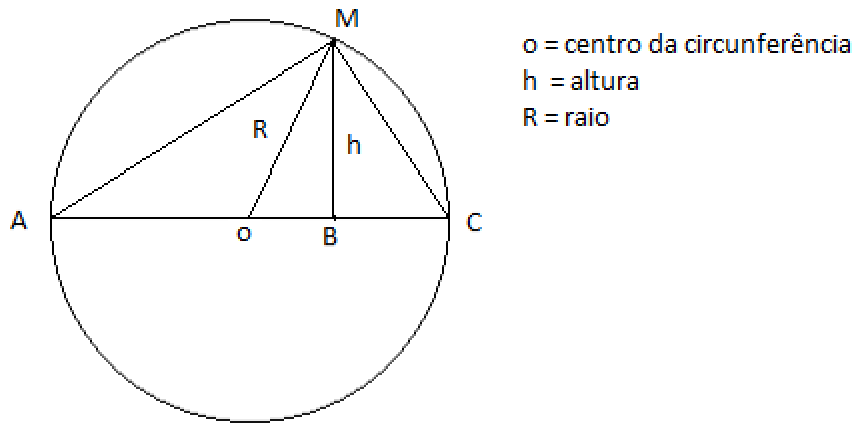
Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores 6 Farad e 4 Farad no circuito se os dois capacitores estão ligados em série?

$$M_H = \frac{2.4.6}{4+6} = \frac{48}{10} = 4{,}8 \quad , \quad T = \frac{M_H}{2} = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4\,F$$

Um conceito Geométrico

Tomando o triângulo retângulo AMC inscrito em uma circunferência onde h é a altura relativa a hipotenusa(já visto que é a média geométrica dos segmentos AB e BC) e R é o raio da circunferência(média aritmética dos segmentos AB e BC) como ilustra a figura:

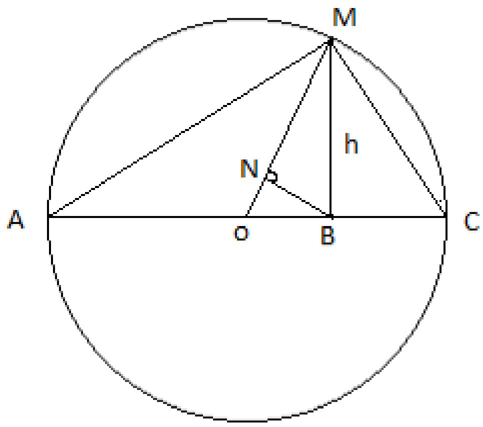
Figura 14: circunferência com triângulo retângulo inscrito e traçados o raio R = OM e altura relativa a hipotenusa MB



Fonte: Autor

Observe que o triângulo OMB também é retângulo em B. Tracemos agora a altura do triângulo OMB relativa a hipotenusa(BN):

Figura 15: circunferência com triângulo retângulo inscrito e traçados o raio R = OM, altura relativa a hipotenusa do triângulo AMC e altura relativa a hipotenusa do triângulo OBM



Fonte: Autor

Observa-se na figura ilustrada acima uma semelhança entre os triângulos OBM e BNM :

1 . $\frac{MN}{h}=\frac{h}{R}$

2 . $MN=\frac{h^2}{R}$, mas $h^2=AB.BC\,;R=\frac{AB+BC}{2}$

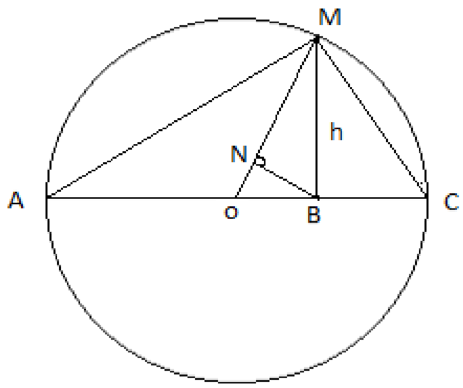
3 . $MN=\frac{AB.BC}{\frac{AB+BC}{2}}=2.\frac{AB.BC}{AB+BC}=\frac{2}{\frac{AB+BC}{AB.BC}}$

4 . $MN=\frac{2}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}$

Ou seja, MN é a média harmônica dos segmentos AB e BC

Na figura abaixo podemos observar que OM > BM > MN:

Figura 16: Comparação geométrica entre as médias aritmética, geométrica e harmônica



Fonte: Autor

Mas como os segmentos OM, BM e MN são respectivamente a média aritmética, geometria e harmônica dos segmentos AB e BC, podemos concluir que:

$$M_A > M_G > M_H$$

No capítulo seguinte falaremos com mais detalhes sobre a desigualdade das médias e o caso em que essas terão o mesmo valor.

3.4 RELAÇÕES ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E HARMÔNICA

Quando x e y são dois números reais positivos, a desigualdade $\sqrt{x\,.\,y} \leq \frac{x+y}{2}$ pode ser provada de vários modos. Em cada caso ficará claro que $\sqrt{x\,.\,y} = \frac{x+y}{2}$, se, e somente se, x = y.

Já sabemos que o quadrado de um número real é sempre maior ou igual a zero. Como $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ é um número real, $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Desenvolvendo a desigualdade $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$,passo a passo, temos:

1 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

2 $x-2\sqrt{x.y}+y \geq 0$

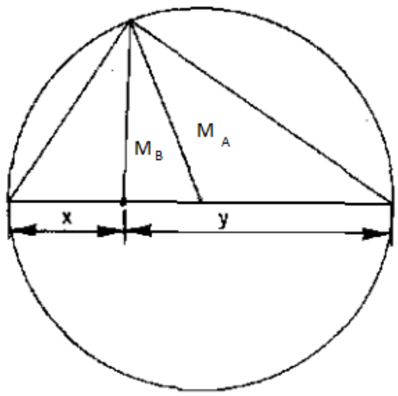
3 $x+y \geq 2\sqrt{x.y}$

4 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y}$

5 $M_A \geq M_G$

Geometricamente:

Figura 17: Circunferência de diâmetro x + y e representação geométrica da M_A e M_G



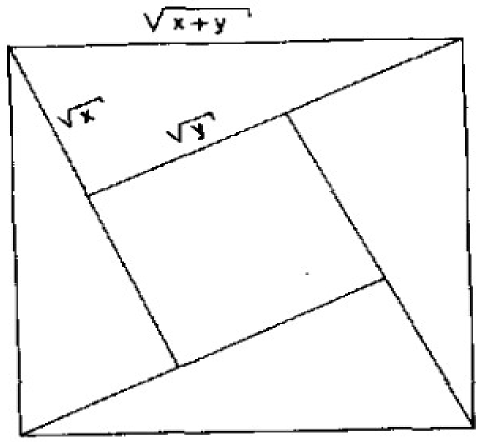
Fonte: Autor

Como o triângulo inscrito numa semicircunferência é sempre um triângulo retângulo, M_A (média aritmética) é a mediana desse triângulo retângulo, ou seja, M_A = $\frac{x+y}{2}$ = R (raio da circunferência) e M_B (média geométrica) é a altura relativa a hipotenusa, ou seja, M_B = $\sqrt{x.y}$.

Outra Demonstração

Esta demonstração está ilustrada no livro Meu Professor de Matemática e outras histórias do professor Elon Lages (pág. 118),onde é mostrado um quadrado de lado $\sqrt{x+y}$ justapondo quatro triângulos retângulos congruentes, cada um deles tendo catetos $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ e hipotenusa $\sqrt{x+y}$. O teorema de pitágoras nos garante que a área do quadrado x + y é maior ou igual a quatro vezes a área de cada triângulo, ou seja, $x+y \geq 4\frac{\sqrt{x.y}}{2}$. O que nos garante a desigualdade $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y}$ ($M_A \geq M_G$).

Figura 18: quadrado formado por quatro triângulos retângulos



Fonte: Meu Professor de Matemática e outras histórias – Elon Lages

Ora, verificamos que a desigualdade é válida para duas variáveis, agora vamos verificar para uma quantidade n de vaiáveis. Para isso utilizaremos o lema visto na apresentação da aula do professor Fábio Henrique Teixeira de Souza no canal youtube.

Lema : Dados $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$,pertencentes aos reais positivos, se $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + \ldots. x_n \geq n$

Vamos provar pelo método de Indução:

Verifique que para n = 1 a verificação é trivial então faremos para n = 2, então teremos dois números para verificar, ou seja, x_1 e x_2 , pertencentes aos reais positivos e $x_1 . x_2 = 1$.

Já vimos que :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} = 1$$

logo $x_1 + x_2 \geq 2$

Agora se considerarmos por hipótese de indução n = k:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ pertencentes aos reais positivos, e $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_k = 1$, então $x_1 + x_2 + \ldots . x_k \geq k$

vamos provar a tese para n = k+1:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}$ pertencentes aos reais positivos, e $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_k . x_{k+1} = 1$

Ora, se todas as variáveis forem iguais a 1 a tese já estaria demonstrada já que $x_1 + x_2 + \ldots . x_k + x_{k+1} = k + 1 \geq k + 1$

Agora se, pelo menos, um dentre esses números do produto $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_k . x_{k+1} = 1$ é diferente de 1, por exemplo, maior que 1, necessariamente teremos pelo menos um número menor que 1.

Sem perda de generalidade pegaremos dois números quaisquer e colocaremos estas condições:

$x_k > 1$ e $x_{k+1} < 1$, então:

$(x_k - 1).(1 - x_{k+1}) > 0$

$x_k - x_k . x_{k+1} - 1 + x_{k+1} > 0$

$x_k - x_k . x_{k+1} + x_{k+1} > 1$

Tomando $x_1 . x_2 . x_3 ... x_k . x_{k+1} = 1$, e considerando $(x_k . x_{k+1})$ como um único elemento, então o produto passa ter k elementos que por Hipótese de Indução quando temos um produto de k elementos cujo produto é 1 então a soma desses k elementos é maior ou igual a k.

$x_1 . x_2 . x_3 ... (x_k . x_{k+1}) = 1$

$x_1 + x_2 + ... (x_k . x_{k+1}) \geq k$

$x_1 + x_2 + ... x_{k-1} \geq k - (x_k . x_{k+1})$,somando $x_k + x_{k+1}$ em ambos os membros temos:

$x_1 + x_2 + ... x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k . x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$

Mas perceba que já foi provado que $x_k - x_k . x_{k+1} + x_{k+1} > 1$, e que se somarmos k em ambos os membros teremos $k + x_k - x_k . x_{k+1} + x_{k+1} > k + 1$, daí concluímos:

$x_1 + x_2 + ... x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k . x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} > k + 1$

logo

$x_1 + x_2 + ... x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$, provado o lema.

Retomando a média geométrica de n termos, temos:

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n}$$

$$x_1 . x_2 \ldots x_n = M_G^n$$

$\frac{x_1}{M_G} . \frac{x_2}{M_G} \ldots \frac{x_n}{M_G} = 1$, ora, o Lema nos garante que:

$$\frac{x_1}{M_G} + \frac{x_2}{M_G} \ldots + \frac{x_n}{M_G} \geq n$$

$\frac{(x_1 + x_2 \ldots + x_n)}{n} \geq M_G$, ou seja, $M_A \geq M_G$

Aplicações Das Desigualdade Das Médias Aritméticas E Geométricas

Com esses conhecimentos que vimos até o momento, podemos resolver algumas situações interessantes:

1º) A soma de um número real positivo com seu inverso sempre será maior ou igual a 2. ($\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$)

Demonstração:

Sejam dois números positivos a² e b²:

1. $M_A \geq M_G$

2. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 . b^2}$

3. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq a . b$

4. $\frac{a^2+b^2}{a.b}\geq 2$

5. $\frac{a^2}{a.b}+\frac{b^2}{a.b}\geq 2$

6. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

2º)Dados n reais positivos ($a_1, a_2, ..., a_n$), mostre que $(\sum_{i=1}^{n} a_i).(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))\geq n^2$

Demonstração:

1. $M_A \geq M_G$

2. $M_A=\frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)}{n}\geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

3. $M_A=\frac{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))}{n}\geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}}$

4. $\frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)}{n}.\frac{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))}{n}\geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n.\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}}$

5. $\frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)}{n}.\frac{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))}{n}\geq 1$

6. $(\sum_{i=1}^{n} a_i).(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))\geq n^2$

Pegando a parte 3 do exemplo anterior, temos:

1. $M_A = \frac{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 . a_2 \dots a_n}}$

2. $\sqrt[n]{a_1 . a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))}$

3. $M_G \geq M_H$

Daí concluímos a seguinte desigualdade:

$$M_A \geq M_G \geq M_H$$

3.5 DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Nesta seção falaremos sobre uma desigualdade independente das médias que falamos até o momento mas com grande utilidade na resolução de problemas diversos. A desigualdade de Bernoulli é dada pela expressão:

$(1+x)^n \geq 1+nx$, com $x \geq 0$ e n é um número inteiro não negativo.

Primeiro demonstraremos a desigualdade pelo método de Indução e depois por Binômio de Newton.

Método de Indução Finita

a) com n = 0, temos :

$(1+x)^0 \geq 1+0.x$

$1 \geq 1$

b)Admitindo pela Hipótese de Indução que a desigualdade é válida para n = k

$(1+x)^k \geq 1+kx$

c)Vamos provar que a desigualdade é válida para n = k + 1, ou seja, provaremos que vale a desigualdade

$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Demonstração:

$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2 \geq 1+(k+1)x$

Método por Binômio de Newton

Como já foi visto a desigualdade $(1+x)^n \geq 1+nx$ é trivial para n = 0. Para valores $n>0$ temos:

$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}.x+\binom{n}{2}.x^2+....+\binom{n}{n}.x^n$

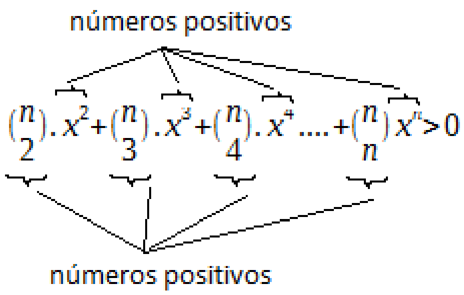
$(1+x)^n = 1+n.x+\binom{n}{2}.x^2+....+\binom{n}{n}.x^n$. Como $x \geq 0$, a expressão $\binom{n}{2}.x^2+....+\binom{n}{n}.x^n$ será zero se x = 0 :

$\binom{n}{2}.0^2+....+\binom{n}{n}.0^n = 0$

A expressão $\binom{n}{2}.x^2+....+\binom{n}{n}.x^n$ será maior que zero se $x>0$, pois quaisquer dos números binomiais, positivos, multiplicados pelas potências de x, também positivas, tem como resultado números positivos.

Para $x>0$.

Figura 19: desenvolvimento polinomial maior que zero



Fonte: Autor

Concluímos que:

Se x = 0, $(1+x)^n=1+nx$

Se x > 0, $(1+x)^n>1+nx$

Desigualdade de Bernoulli: $(1+x)^n\geq1+nx$ com $x\geq0$ e n é um número inteiro não negativo.

Onde podemos observar a desigualdade de Bernoulli?

No estudo de Matemática Financeira é fácil observar a desigualdade de Bernoulli na comparação entre Juros Simples e Juros Compostos. Observe a tabela abaixo.

Imagine um valor de R$100,00 depositado em dois bancos, banco A e banco B, com regimes de capitalização de Juros Simples e Juros compostos respectivamente com uma taxa mensal de 10%. Abaixo temos a progressão desses valores:

Tabela 5: Juros Simples x Juros Compostos

MÊS	BANCO A (Juros Simples)	BANCO B (Juros Compostos)
0	100	100
1	110	110
2	120	121
3	130	133,1

Fonte: Autor

Observe se modelarmos a progressão do valor depositado no BANCO A em função do valor inicial(V), taxa(i) e o tempo(t), teremos:

$$M=100(1+t.i)$$

E no BANCO B teremos:

$$M=100(1+i)^t$$

Observe que os valores evoluem de forma que os do BANCO B sempre são maiores ou iguais ao do BANCO A.

$$100(1+i)^t \geq 100(1+t.i)$$

$$(1+i)^t \geq (1+t.i)$$ (Desigualdade de Bernoulli)

Agora vamos pensar numa quantidade de ***b*** números. Dentre eles (1+x) e 1. Ambos positivos, ou seja, $x>-1$. O número (1+x) aparece ***a*** vezes, logo o número 1 aparecerá ***(b -a)*** vezes. Agora vamos achar a média aritmética ponderada desses ***b*** números:

$$M_A = \frac{(1+x).a+1.(b-a)}{b} = \frac{a+ax+b-a}{b} = 1+\frac{a}{b}.x$$

E agora a média Geométrica:

$$M_G = \sqrt[b]{(1+x)^a . 1^{b-a}} = (1+x)^{\frac{a}{b}}$$

Pela desigualdade das médias temos:

$$M_A \geq M_G$$

$1+\frac{a}{b}.x \geq (1+x)^{\frac{a}{b}}$, como a<b, temos $0<\frac{a}{b}<1$.

Agora se pegarmos a desigualdade acima e mudarmos a variável x por $\frac{b}{a}.z$, com a condição a<b, teremos:

$$1+\frac{a}{b}.\frac{b}{a}.z \geq (1+\frac{b}{a}.z)^{\frac{a}{b}}$$

$$1+z \geq (1+\frac{b}{a}.z)^{\frac{a}{b}}$$

$(1+z)^{\frac{b}{a}} \geq (1+\frac{b}{a}.z)$, como b>a, temos $\frac{b}{a}>1$

Daí podemos concluir:

1. $(1+x)^n \geq 1+nx$, com $x \geq -1$ e n é um número inteiro positivo.

2. $(1+x)^n \geq 1+nx$, com $x \geq -1$ e n é um número racional maior que 1.

3. $(1+x)^n \leq 1+nx$, com $x \geq -1$ e n é um número racional entre zero e 1.

3.6 DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ são números reais, então:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)^2$$

Com a igualdade ocorrendo, se e somente se, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Vamos demonstrar a desigualdade acima:
Considere a função $f(x)=(a_1-b_1 x)^2+(a_2-b_2 x)^2+\ldots+(a_n-b_n x)^2$.

Observe que a função f(x) é uma função do 2º grau pois cada termo da soma é do 2º grau. E se todos os parênteses são quadrados de números reais , podemos afirmar que a função f(x) é estritamente positiva ou nula, ou seja, $f(x) \geq 0$. Se a função é estritamente positiva ou nula, isto significa que sua discriminante é menor ou igual a zero $(\Delta \leq 0)$.

$$f(x)=(a_1-b_1 x)^2+(a_2-b_2 x)^2+\ldots+(a_n-b_n x)^2$$

$$f(x)=a_1^2-2 a_1 b_1 x+b_1^2 x^2+a_2^2-2 a_2 b_2 x+b_2^2 x^2+\ldots+a_n^2-2 a_n b_n x+b_n^2 x^2$$

$$f(x)=(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)$$

$$(\Delta\leq 0)$$

$$b^2-4ac\leq 0$$

$$4(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2-4(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\leq 0$$

$$4(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\geq 4(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2).(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

Agora se $\Delta=0$, teremos valor, único x_0, tal que $f(x_0)=0$:

$$f(x_0)=(a_1-b_1x_0)^2+(a_2-b_2x_0)^2+...+(a_n-b_nx_0)^2=0$$

Observe como os termos são quadrados de números reais seus valores serão positivos ou nulos. Como o resultado tem que dar zero, necessariamente os termos dentro dos parênteses devem ser iguais a zero.

$$a_1-b_1x_0=0\rightarrow x_0=\frac{a_1}{b_1}$$

$$a_2-b_2x_0=0\rightarrow x_0=\frac{a_2}{b_2}$$

$$a_n-b_nx_0=0\rightarrow x_0=\frac{a_n}{b_n}$$

Logo:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$$

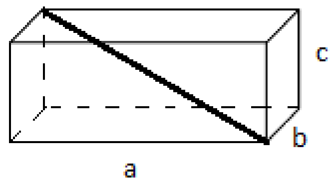
Problemas De Otimização

Agora discutiremos alguns problemas envolvendo otimização utilizando as ferramentas das desigualdades. Otimização é quando queremos encontrar valor máximo ou mínimo de algo sobre certas condições.

Abaixo mostraremos como analisar as especificidades do paralelepípedo utilizando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ.

Tome um paralelepípedo reto com base retangular e dimensões a,b e c pertencente ao conjunto dos números reais positivos:

Figura 20: paralelogramo



Fonte: Autor

Sabemos que seu volume(V), superfície total(S) e diagonal(D) são determinados por:

$$V=a.b.c$$

$$S=2(ab+ac+bc)$$

$$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Agora vamos trabalhar com duas sequências (a,b,c) e (1,1,1). Utilizando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ temos:

$$(a^2+b^2+c^2).(1^2+1^2+1^2)\geq(a.1+b.1+c.1)^2$$

$(a^2+b^2+c^2).(3)\geq(a+b+c)^2$, mas $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, então

$$3D^2\geq(a+b+c)^2$$

$$D^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$D\geq\frac{(a+b+c)}{\sqrt{3}}$$

Então acabamos de garantir que a diagonal do paralelepípedo será sempre maior ou igual a $\frac{(a+b+c)}{\sqrt{3}}$, acontecendo a igualdade $D=\frac{(a+b+c)}{\sqrt{3}}$ quando $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$. Daí temos $a=b=c=L$, onde L é uma constante qualquer pertencente ao conjunto dos números reais positivos.

Substituindo $a=b=c=L$ em $D=\frac{(a+b+c)}{\sqrt{3}}$ temos:

$$D=\frac{(L+L+L)}{\sqrt{3}}$$

$$D=\frac{(3L)}{\sqrt{3}}$$

$D=L\sqrt{3}$

Observe que acabamos de encontrar a fórmula da diagonal do cubo, ou seja, concluímos que o valor mínimo para a diagonal do paralelepípedo é $D=L\sqrt{3}$, e isso só acontece se suas dimensões forem iguais.

Agora pegando a sequência (a,b,c) e (b,c,a) e aplicando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ temos:

$(a^2+b^2+c^2).(b^2+c^2+a^2)\geq(ab+bc+ac)^2$,mas $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e $S=2(ab+ac+bc)$, então

$$D^4\geq(\frac{S}{2})^2$$

$D^2\geq(\frac{S}{2})$, ou seja, $S\leq 2D^2$.

Concluímos que a superfície total do paralelepípedo será sempre menor ou igual a $2D^2$ acontecendo a igualdade $S=2D^2$ quando $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Se igualarmos a expressão a uma constante k pertencentes aos reais positivos teremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k \quad ; \quad \frac{a.b.c}{b.c.a}=k^3 \quad ; \quad 1=k^3 \quad ; \quad k^3-1=0$$

Mas temos que $k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$, logo $k=1$ ou $k=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

Como k pertencentes aos reais positivos temos $k=1$ logo $\frac{a.b.c}{b.c.a}=1$.

Daí concluímos que a = b = c. Então podemos chamar a,b e c de uma constante L, pertencente ao conjunto dos reais positivos para trabalhar com a igualdade $S=2D^2$.

$S=2D^2$, mas como $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e $a=b=c=L$, teremos $D=\sqrt{L^2+L^2+L^2}$. Então, $S=2.(L^2+L^2+L^2)$; $S=6L^2$.

Concluímos que a superfície será máxima quando suas arestas forem iguais, ou seja, corresponder a superfície de um cubo.

Tomemos uma última sequência (a,b,c) e (bc,ac,ab). Aplicando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ temos:

$(a^2+b^2+c^2).(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)\geq(abc+abc+abc)^2$, mas $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e $V=a.b.c$, então

$$D^2.(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)\geq(3V)^2$$

$$D.\sqrt{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}\geq 3V$$

$$V\leq D.\frac{\sqrt{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}}{3}$$

Concluímos que o volume do paralelepípedo será sempre menor ou igual a $D.\frac{\sqrt{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}}{3}$, acontecendo a igualdade $V=D.\frac{\sqrt{(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}}{3}$

quando $\frac{a}{bc}=\frac{b}{ac}=\frac{c}{ab}$, Daí

$a^2c=b^2c$, $a^2=b^2$, $a=b$

$ac^2=ab^2$, $c^2=b^2$, $c=b$

Concluímos que a = b = c. Então podemos chamar a, b e c de uma constante L, pertencente ao conjunto dos reais positivos para trabalhar com a igualdade

$$V = D.\frac{\sqrt{(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}}{3} \quad .$$

$$V = D.\frac{\sqrt{(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}}{3}$$, mas como $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{L^2 + L^2 + L^2} = L.\sqrt{3}$

$$V = L\sqrt{3}.\frac{\sqrt{(L^2L^2 + L^2L^2 + L^2L^2)}}{3}$$

$$V = \frac{L\sqrt{3}.\sqrt{3L^4}}{3}$$

$$V = 3\frac{L^3}{3}$$

$$V = L^3$$

Concluímos que o volume será máximo quando suas arestas forem iguais, ou seja, corresponder ao volume de um cubo.

4 METODOLOGIA DE ENSINO

No ensino fundamental um dos principais objetivos do professor é fazer com que as crianças dominem os conhecimentos necessários para o convívio social e conscientizá-los como cidadãos. E isso só é possível com a transmissão do conhecimento tradicional presente nos livros dando uma contextualização atraente, integrando com temas do nosso dia a dia, para que o ensino realmente tenha um significado para o aluno. Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais vem para orientar o professor na sua prática pedagógica.

Além da reflexão sobre a prática pedagógica o PCN é importante na orientação dos objetivos, planejamento e conteúdos a serem trabalhados dentro da sala de aula.

Resolução de problemas que requerem uma maior interpretação ainda é um aspecto deficiente, como mostra resultados obtidos em pesquisa realizada pelo SAEB(1995), baseada em uma amostra nacional que abrangeu 90.499 alunos de 2.793 escolas públicas e privadas na tabela abaixo(BRASIL,1997, p. 23).

Percentuais de acerto em matemática por habilidade, segundo série e área de conteúdo. Brasil 1995

Área de Conteúdo	Série	Compreensão de Conceitos	Conhecimento de Procedimentos	Aplicação ou Resolução de Problemas
Números e Operações	4ª 8ª	41,0 41,4	31,0 46,8	31,0 38,6
Medidas	4ª 8ª	51,0 58,7	43,0 34,5	30,0 29,1
Geometria	4ª 8ª	48,0 40,2	41,0 31,3	23,0 22,7
Análise de Dados, Estatística e Probabilidade	4ª 8ª	- 59,7	- 41,9	- 42,5
Álgebra e Funções	4ª 8ª	- 48,5	- 35,0	- 28,1

Fonte: MEC/SEDIAE/DAEB - Consolidação dos Relatórios Preliminares da Avaliação do SAEB/1995.

Como mostra a tabela no campo de aplicação ou resolução de problemas o rendimento situa-se abaixo de 50%. Isso pode ser explicado pela falta de qualidade no processo ensino/aprendizagem que na maioria das vezes não tem significado para o aluno.

4.1 UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVISTA

Acreditamos que não existe ensino sem aprendizagem. Desta forma houve a necessidade de dar uma ressignificação a unidade entre aprendizagem e ensino dentro de uma perspectiva construtivista.

A teoria construtivista reconhece a importância da atividade mental construtiva nos processos de aquisição de conhecimento. Não é uma prática sistemática e já definida, mas vai se modificando as necessidades de cada aluno. A intervenção pedagógica deve ajustar aos alunos em cada momento de sua aprendizagem para a verdadeira construção do saber.

Segundo Argento(2009) a abordagem construtivista propõe que o conhecimento é construído em ambientes naturais de interação sociais estruturadas culturalmente, ou seja, são adquiridos no contexto social e depois se internalizam.

> Para que um ambiente de ensino seja construtivista é fundamental que o professor conceba o conhecimento sob a ótica levantada por PIAGET, ou seja, que todo e qualquer desenvolvimento cognitivo só será efetivo se for baseado em uma interação muito forte entre o sujeito e o objeto(ARGENTO,2009, p.12).

Para que essa interação aconteça existem alguns princípios básicos. O primeiro é a interação obrigatória entre o sujeito e o objeto estimulando o aprendiz a busca do conhecimento, utilizando, adaptando e desenvolvendo suas estruturas cognitivas.

O segundo aspecto é retirar o professor como todo poderoso detentor do saber para um "educador-educando", ou seja, o professor funciona nesse aspecto como um "facilitador". Além disso, o professor deve se libertar de sua autoridade fazendo com que o aprendiz siga em novas direções ditadas pelos seus próprios interesses.

As salas de aula construtivistas devem proporcionar um ambiente onde os estudantes confrontam-se com problemas cheios de significados vinculados ao contexto de sua vida real. O diálogo, os jogos e as pesquisas são valorizados.

A avaliação da aprendizagem sob a ótica construtivista deve preocupar-se mais em entender o pensamento do aluno do que meramente reprovar por não ser uma resposta esperada sobre um determinado questionamento.

Acreditamos que nosso trabalho no capítulo que será apresentado mais a frente buscou preparar uma bateria de atividades para o docente onde o aluno, com o auxílio do professor que estará com um papel de facilitador construirá suas definições e conceitos sobre o conteúdo das Desigualdades das Médias a partir de conceitos empíricos até alcançar níveis mais elaborados.

4.2 O SABER MATEMÁTICO

Nessa seção mostraremos como será nossa abordagem nas aplicações das atividades bem como qual linha de pensamento seguiremos.

No seu trabalho sobre Ensino-Aprendizagem Matemática a Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti [5]– ICMC/USP, que pode ser encontrado na página http://www.sepq.org.br/Iisipeq/anais/pdf/gt2/11.pdf, reconhece a importância

5 Doutora em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro. Docente do ICMC- USP: Instituto de Ciências Matemáticas de Computação da Universidade de São Paulo. Coordenadora do Setor deMatemática do CDCC – Centro de Divulgação Científica e Cultural-USP- São Carlos

dos aspectos empíricos e intuitivos na construção do saber matemático.

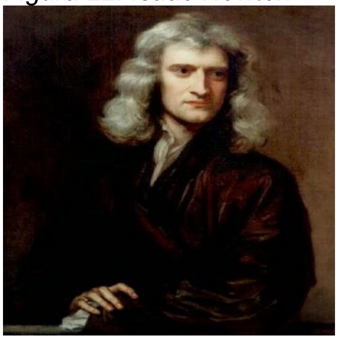
No trabalho fica claro que em um contexto histórico havia correntes filosóficas que defendiam o saber matemático inteiramente a razão. Eram os racionalistas que defendiam que nosso conhecimento se baseavam na razão, ou seja, o saber dava prevalência aos aspectos lógicos. Um dos seus principais nomes Foi René Descartes.

Figura 21: René Descartes

(Retirado da página http://educacao.uol.com.br/biografias/rene-descartes.htm em 13 de outubro de 2016)

Por outro lado existiam aqueles que defendiam que o saber matemático era fruto de experiências com a natureza. O conhecimento era intuitivo. Alguns pensadores se destacaram nesse aspecto como Isaac Newton.

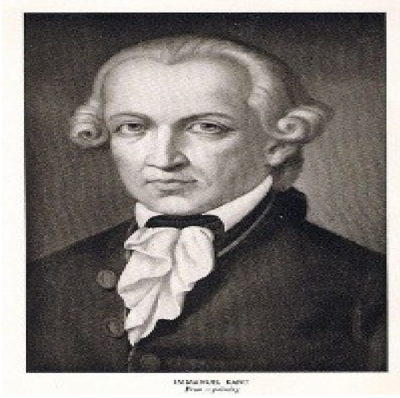
Figura 22: Isaac Newton



(Retirado da página http://www.biografiaisaacnewton.com.br/2013/10/Biografia-de-Isaac-Newton.html em 13 de outubro de 2016)

Mas existiam aqueles que viam o saber matemático numa posição intermediária entre o intuitivo e o lógico. Kant considerava que esses dois aspectos eram importantes e se complementavam.

Figura 23: Immanuel Kant

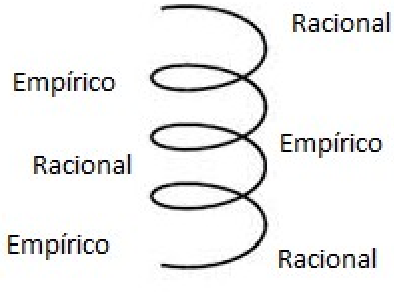


(Retirado da página http://educacao.uol.com.br/biografias/immanuel-kant.htm *em 13 de outubro de 2016)*

Meneghetti(2009) defende a constituição do saber matemático, não se pode dizer que o intuitivo precede ao lógico ou o lógico precede o intuitivo mas que ambos se equilibram em níveis cada vez mais elaborados, e o processo pelo qual essa constituição se dá não é estático e sim dinâmico , tomando a forma de uma espiral. Os níveis do saber são interdependentes e evolutivos.

Dessa forma nosso trabalho tentará buscar um conhecimento prévio do aluno e fazer com que ele tenha experiências novas com o conteúdo a ser abordado de forma contextualizada. Não será simplesmente cobrado conceitos diretos, pois isso tornaria o ensino do conteúdo infrutífero. Tentaremos efetuar um trabalho como a professora Meneghetti nos ensina na sua abordagem em espiral. Vamos evoluindo aos poucos nas atividades não deixando de lado os conhecimentos intuitivos que devem caminhar em paralelo com o conhecimento lógico.

Figura 24: representação de uma espiral



Fonte: Autor - adaptada

4.3 A CONSTRUÇÃO DO PLANO DE AULAS

Nesse capítulo daremos orientações gerais sobre a construção de um Plano de Aula levando em conta o conteúdo a ser ministrado.

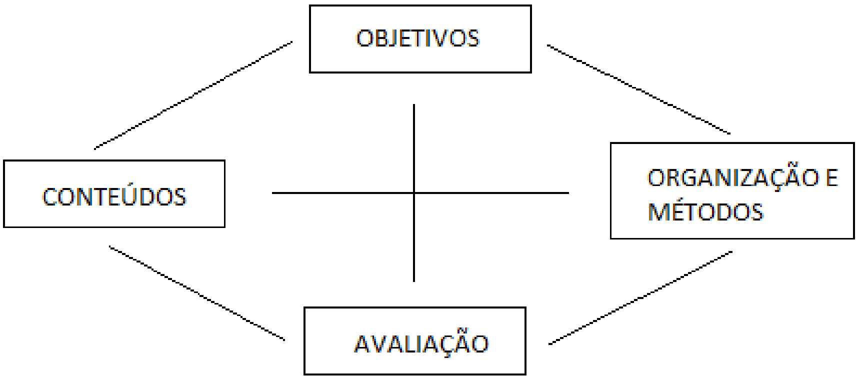
Antes mesmo de planejar nossa aula, alguns aspectos devem ser observados para sua elaboração. Um desses aspectos é o perfil dos alunos e da turma. É de conhecimento da maioria dos professores que não se pode trabalhar da mesma forma com turmas de escolas da rede pública como se trabalha nas escolas privadas. Um dos motivos é a falta de estrutura e material disponíveis para auxílio na preparação das aulas. Outro diz respeito ao nível social do público-alvo que na maioria das vezes são pessoas humildes com pouca perspectiva e grandes responsabilidades no seio familiar. É importante deixar claro que não estamos de maneira nenhuma dizendo que a qualidade de ensino dada a uma escola pública deve ser inferior a uma particular, mas sim que o professor tem que ter em mente essas dificuldades para que ele possa se planejar e organizar a melhor forma para trabalhar o conteúdo curricular levando em conta as características psicossociais dos alunos e restrições do local.

Definidos o local e a turma a primeira a coisa a se pensar para confecção do Plano de Aula é a definição dos objetivos, ou seja, onde queremos chegar . Para alcançarmos nossos objetivos é importante que o professor na confecção do Plano se organize e verifique os métodos que podem ser utilizados como auxílio no ensino-aprendizagem. Se o conteúdo a ser trabalhado precisa de algum conhecimento prévio e de que forma poderá despertar interesse dos alunos para determinado assunto, ou seja, mostrar o assunto sob uma abordagem construtivista. Sabemos da dificuldade que muitos professores possuem para associar conteúdos matemáticos a situações concretas pois muitas vezes o conceito matemático trabalhado é tão abstrato que torna essa contextualização um trabalho quase que impossível. Por isso que nesse trabalho nossa proposta é elaborar um plano de aula em um contexto histórico da matemática e interdisciplinar fazendo com que o aluno tome o gosto pela pesquisa a medida que vai evoluindo cadencialmente nos seus conceitos matemáticos.

A avaliação do conhecimento dos alunos deve realizar-se ao longo do processo e o professor sempre que possível deve fornecer os dados necessários para o aperfeiçoamento dos mesmos.

Segundo Margibel A. de Oliveira[6] a Didática deveria estruturar-se de acordo com o seguinte:

Figura 25: Estrutura da Didática



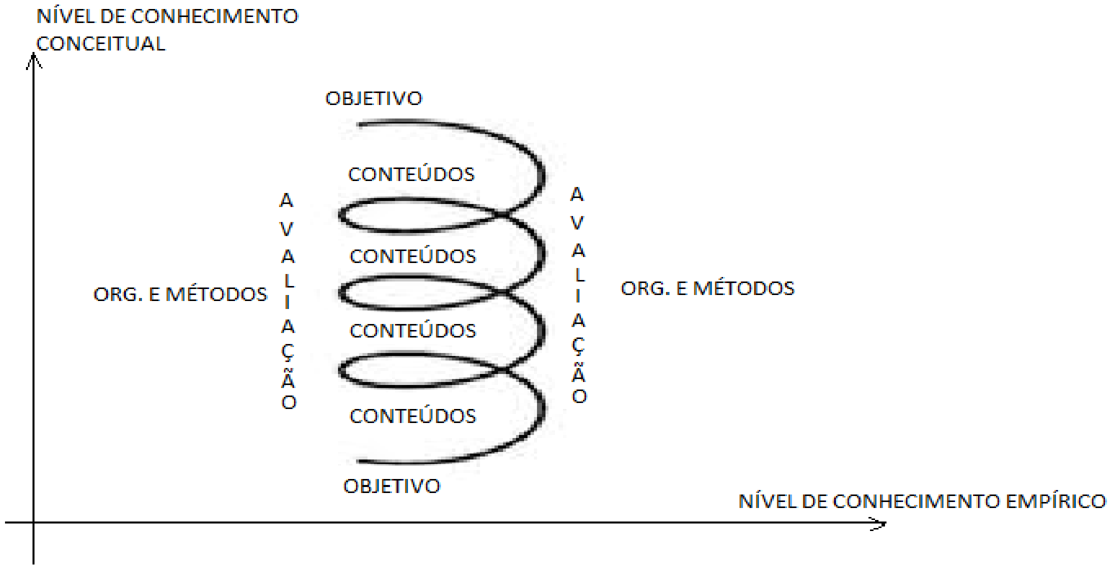
Fonte: Didática no Ensino Superior - Margibel, 2011

Segundo Margibel(2011), objetivos e conteúdos são elementos essenciais do plano de aula. E a partir deles o professor tem que planejar como irá organizar-se e quais métodos serão utilizados na transmissão dos mesmos, para finalmente, constatar na avaliação, como o aluno apreendeu os conteúdos.

Dessa forma poderíamos fazer uma associação com a abordagem em espiral de Meneguetti com a Didática de Margibel da seguinte forma:

6 Doutoranda no Curso de Pós-Graduação em Filosofia e Língua Portuguesa da USP-SP, Mestre em Literatura pela UFSC-SC.

Figura 26: associação conceitual teoria de Meneguetti e Margibel



Fonte: Autor

A avaliação da aprendizagem será feita por meio de atividades propostas que poderá ser feita individualmente ou em grupo a critério do professor. Lembramos que o aluno ou o grupo já será avaliado desde o primeiro momento, ou seja, será verificado como o aluno utiliza seus conhecimentos empíricos e nesse contexto o professor só interferirá para adicionar o novo conteúdo ou facilitar uma aprendizagem.

Será montado um programa de 5 aulas onde seguiremos o seguinte roteiro:

1ª Aula) Desigualdade entre as médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Para abordar esse conteúdo precisaremos de 2 tempos de 50min totalizando 1h e 40min de aula. Nesta primeira aula serão feitas 2 atividades.

2ª Aula) Desigualdade entre as médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Para abordar esse conteúdo precisaremos de 2 tempos de 50min totalizando 1h e 40min de aula. Nesta aula serão feitas 2 atividades.

3ª Aula) Aplicações da Média Harmônica

Para abordar esse conteúdo precisaremos de 1 tempo de 50min de aula. Nesta aula será feita 2 atividades.

4ª Aula) Desigualdade de Bernoulli

Para abordar esse conteúdo precisaremos de 1 tempo de 50min de aula. Nesta aula será feita 1 atividade.

5ª Aula) Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para abordar esse conteúdo precisaremos de 2 tempos de 50min totalizando 1h e 40min de aula. Nesta aula serão feitas 2 atividades.

No próximo capítulo discutiremos com mais detalhes o Plano de Aulas para uma turma do 3º ano do ensino médio de uma instituição pública.

5 PLANO DE AULA

Neste capítulo detalharemos os Planos de Aula. As aulas foram feitas com o recurso de um software de apresentação de slides. Caso a escola ou o professor não possua esse equipamento para auxiliá-lo em sua aula poderá se utilizar de material impresso.

5.1 1ª AULA

Data: xx/xx/xxxx

Professor(a):xxxx

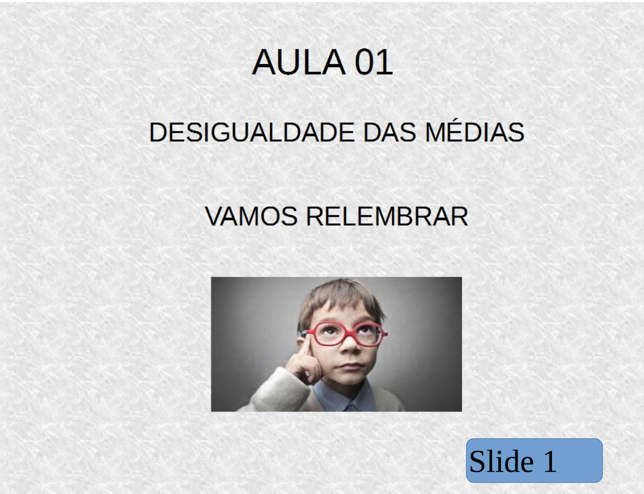
Matemática

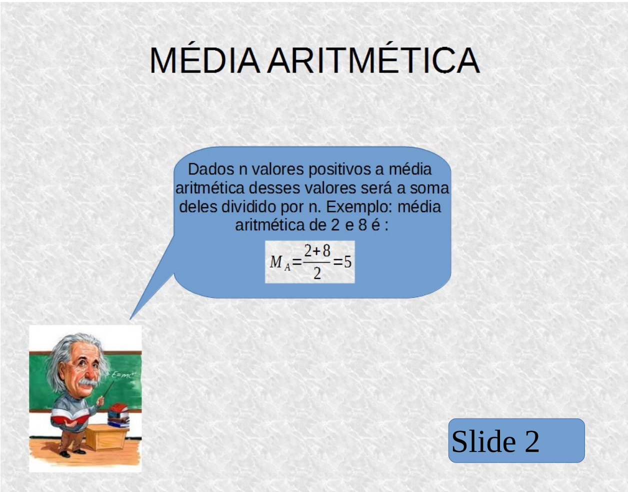
Tema: Desigualdade entre as médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

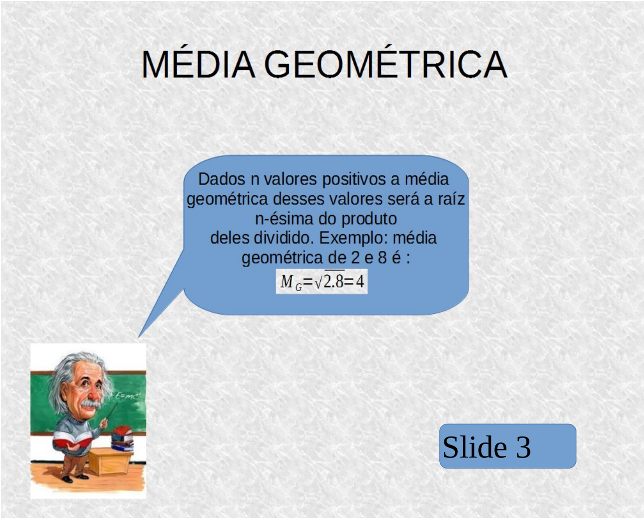
Objetivo: Revisar as médias aritmética, geométrica e harmônica e introduzir a desigualdade das médias fazendo com que o aluno consiga relacionar uma com a outra.

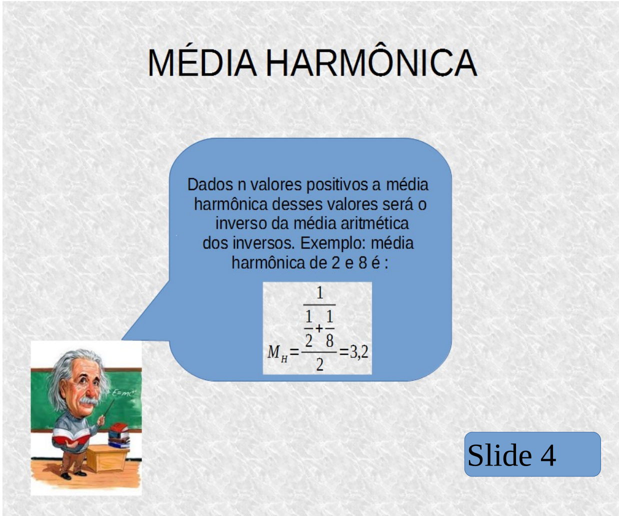
Conteúdo: Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

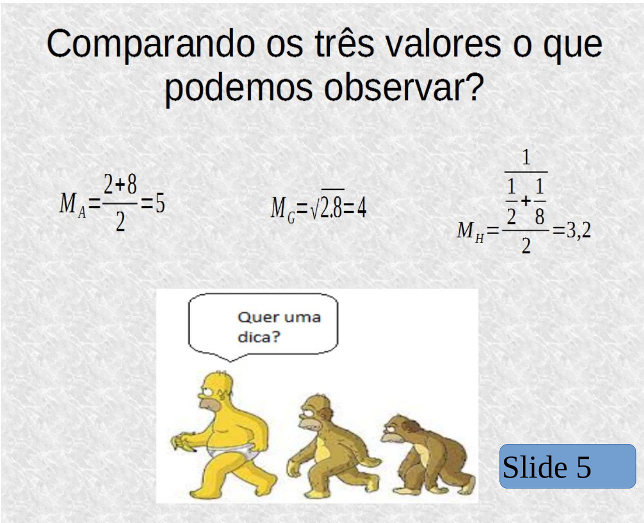
Organização e Métodos: Aula expositiva através de slides criadas pelo autor

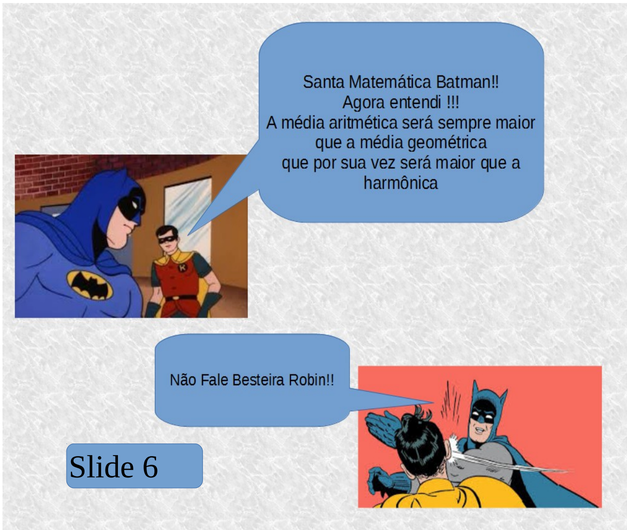


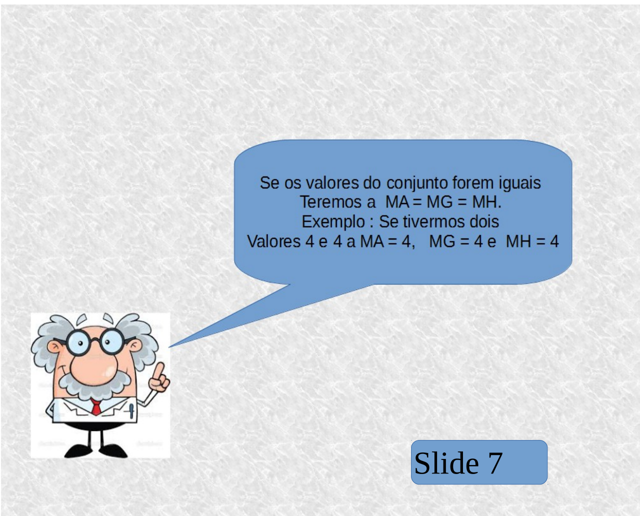


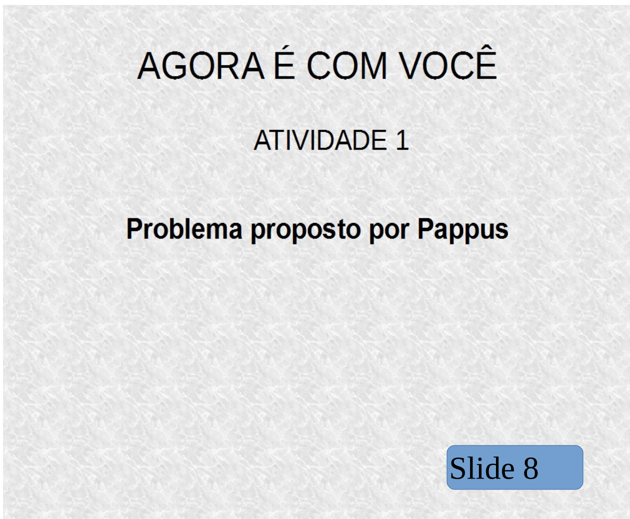












Todas as Imagens dos slides foram retiradas na opção Imagens de um site de busca no dia 18/10/2016)

ATIVIDADE 1

Em estatística, média é definida como o valor que mostra para onde se concentram os dados de uma distribuição como o ponto de equilíbrio das frequências em um histograma. Média também é interpretada como um valor significativo de uma lista de números. Os valores de uma lista de números podem ser representados por meio da escolha aleatória de um número. Se todos os números forem iguais, o número escolhido aleatoriamente será a média. Então, a média pode ser calculada por meio da combinação dos números de maneira específica e da geração de um valor significativo.

(Disponível em ***https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia*** *)*

Sabendo-se que M_A representa a média aritmética, M_G a média geométrica e M_H a média harmônica resolva as questões abaixo:

Questão 1

Complete a tabela abaixo:

Valores	M_A	M_G	M_H
2 e 8			
1 e 9			
4 e 9			
7 e 7			

Resolução

Valores	M_A	M_G	M_H
2 e 8	5	4	3,2
1 e 9	5	3	1,8
4 e 9	6,5	6	5,53
7 e 7	7	7	7

<u>Questão 2</u>

Tomando como referência a questão anterior compare os valores das médias para cada par de números em cada linha da tabela.

<u>Resolução</u>

Com base na tabela e os resultados obtidos podemos concluir que para dois valores distintos a média aritmética será maior que a média geométrica e esta por sua vez maior que a média harmônica. A igualdade entre as médias só acontece quando o par de valores na tabela são iguais.

<u>Questão 3</u>

Tendo agora como base de conhecimento as questões anteriores imagine a seguinte situação hipotética.

Ao final de três bimestres um aluno recebe seu boletim de notas conforme figura abaixo:

Disciplina	1º Bimestre		2º Bimestre		3º Bimestre	
	Nota	Faltas	Nota	Faltas	Nota	Faltas
GEOGRAFIA	4.5	6	4.5	16	6.0	1
HISTORIA	8.2	1	4.7 *	3	9.1	1
LINGUA PORTUGUESA	6.0	2	6.3	1	5.0 *	0
MATEMATICA	6.2	3	6.6	2	10.0	0
QUIMICA	4.0	4	5.0	4	6.0	2
L.E.M.-INGLES	4.5 *	2	7.5	3	9.5	2

Sabendo que para que ele não fique em dependência em nenhuma matéria é necessário que ele atinja uma média maior ou igual a 5,0. Observa-se que sua situação mais crítica estão nas disciplinas de geografia e química. Para que o aluno não fique em dependência nessas duas matérias qual média deverá ser utilizada para este cálculo? Aritmética, geométrica ou harmônica?

<u>Resolução</u>

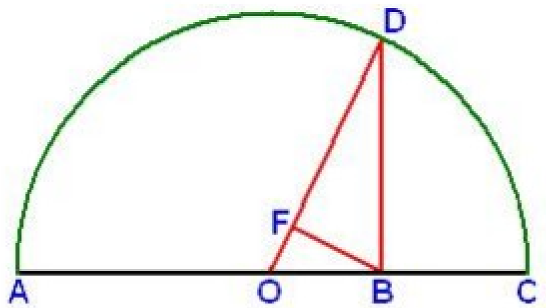
Média aritmética, pois em cada uma das matérias mencionadas M_A = 5 e já sabemos que $M_A > M_G > M_H$ para valores distintos

Caso haja tempo, sugerimos que o professor trabalhe a atividade extra abaixo pois esta irá ajudar de forma significativa a visualização das desigualdades das médias através de elementos geométricos

ATIVIDADE EXTRA

Problema proposto por Pappus

No livro III da coleção Matemática de Pappus, encontramos o enunciado (ilustrado na figura abaixo): “Tome B no segmento AC, B diferente do ponto médio O de AC. Erga a perpendicular a AC por B, cortando a semicircunferência sobre AC em D e seja F o pé da perpendicular tirada de B sobre OD.



Os sucessores imediatos de Euclides, Arquimedes e Apolônio prolongaram por algum tempo o uso da tradição geométrica grega, mas esta foi aos poucos esquecida, e os novos desenvolvimentos limitaram-se à astronomia, à trigonometria e à álgebra. Então, perto do final do século III d.C, cerca de 500 anos depois de Apolônio, surgiria um outro grande geômetra, Pappus. Seu trabalho compunha de uma coleção de 8 livros sobre geometria da época.

Dos oito livros que compunham a obra, perderam-se o primeiro e parte do segundo. A julgar pelo que remanesceu, o livro II ocupa-se de um método desenvolvido por Apolônio, o qual trata da escrita de números grandes e operações com estes. O livro III contém quatro partes: as duas primeiras lidam com a teoria das médias, com atenção especial ao problema da inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. (ELIAS 2012, p. 12)

Considerando AB = x e BC = y, Responda as questões abaixo.

Questão 1

Qual será o valor do Diâmetro e do Raio desse semicírculo? Qual é o valor de OD?

Resolução:

Diâmetro = D = AB+BC = x + y

Raio = $R=\frac{D}{2}=\frac{x+y}{2}$

OD = Raio = $\frac{x+y}{2}$

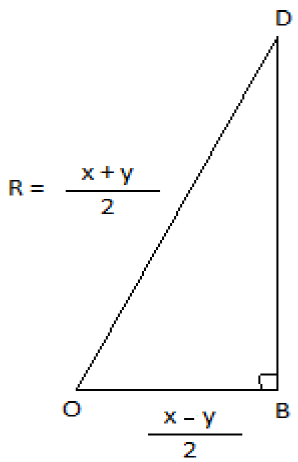
Questão 2

Qual é o valor do segmento BD? Olhando para a figura, qual segmento é maior ? OD ou BD?

Resolução:

Observe que o triângulo OBD é retângulo com hipotenusa igual ao Raio da circunferência. E o valor de OB é igual ao raio subtraído de BC = y, logo

$OB=\frac{x-y}{2}$.



Aplicando o teorema de pitágoras no triângulo OBD temos:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+BD^2$$

$$\frac{x^2+2.x.y+y^2}{4}=\frac{x^2-2.x.y+y^2}{4}+BD^2$$

$$\frac{x^2+2.x.y+y^2}{4}-\frac{x^2-2.x.y+y^2}{4}=BD^2$$

$$\frac{4.x.y}{4}=BD^2$$

$$BD=\sqrt{x.y}$$

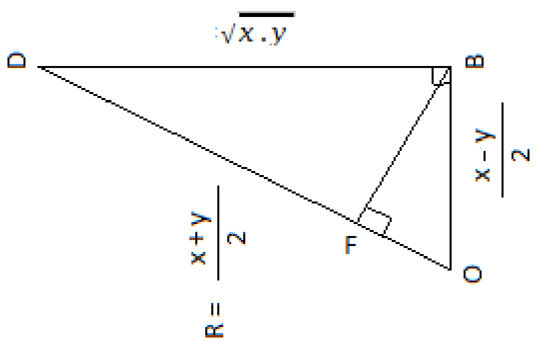
Visualmente observamos um segmento OD > BD

Questão 3

Qual é o valor do segmento FD? Olhando para a figura, qual segmento é maior? BD ou FD?

Resolução:

Observe que o segmento BF é a altura relativa a hipotenusa no triângulo retângulo OBD.



Podemos verificar uma semelhança entre os triângulos OBD e OBF

1 . $\frac{FD}{BD}=\frac{BD}{OD}$

2 . $FD=\frac{BD^2}{OD}$, mas $BD^2=x.y;OD=\frac{x+y}{2}$

3 . $FD=\frac{x.y}{\frac{x+y}{2}}$

4 . $FD=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Visualmente observamos o segmento BD > FD

<u>Questão 4</u>

O que acontece com os valores de x e y se deslocarmos o ponto B até o ponto O?

<u>Resolução:</u>

x e y vão se tornar iguais tornando os seguimentos OD, BD e FD iguais.

<u>Questão 5</u>

Conclua que dados dos valores x e y, a média aritmética é maior que a média geométrica que é maior que a média harmônica e que a igualdade só acontece se esses valores são iguais

<u>Resolução:</u>

Como foi visto nas questões anteriores na interpretação geométrica:

OD = $\frac{x+y}{2}$ = M_A

$$BD = \sqrt{x \cdot y} \quad = \quad M_G$$

$$FD = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \quad = \quad M_H$$

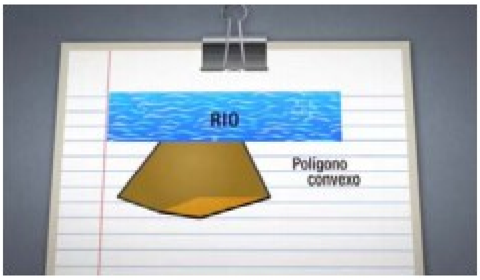
Como OD > BD > FD, temos $M_A > M_G > M_H$, dos valores dados x e y. Ocorrendo $M_A = M_G = M_H$ quando x=y como visto na questão anterior.

ATIVIDADE 2

A Lenda De Dido

A fazendeira Elisa tem oitenta metros de tela e pretende fazer um cercado para suas ovelhas. A princesa Dido surge para ajudá-la a escolher o melhor formato para esta cerca. A apresentação da Lenda de Dido, presente no épico Eneida do poeta Virgílio, escrito no séc. I A. C. ilustra que a solução do problema isoperimétrico já era conhecida há muito tempo, aparecendo em escritos dos gregos Zenódoro e Pappus[1]. O primeiro resultado apresentado no programa é que dado um polígono não convexo, sempre é possível encontrar um polígono convexo de mesmo perímetro e com área maior .

Figura 27: figuras isoperimétricas(figuras de mesmo perímetro)



Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126

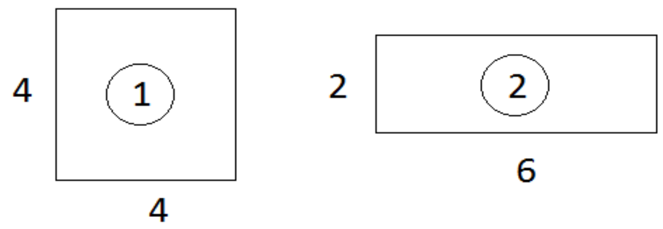
Neste caso, utiliza-se uma reflexão do vértice V que caracteriza o polígono como não convexo através da reta definida pelos dois vértices adjacentes a este. Como pode ser também observado, se considerarmos o polígono onde as duas arestas que partem de V são substituídas por uma única aresta que liga os dois vértices adjacentes a V, obtemos um polígono convexo com número de lados menor, perímetro menor e área maior. Entre todos os polígonos convexos com o mesmo número de lados e mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui maior área. (Este problema foi retirado da página http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126).

Questão 1

Você acha que o texto da "*Lenda de Dido*" está correto na sua afirmação no seu último período? Caso afirmativo, dê dois exemplos de dois polígonos com mesmo número de lados e mesmo perímetro sendo que dentre eles o regular é o de maior área.

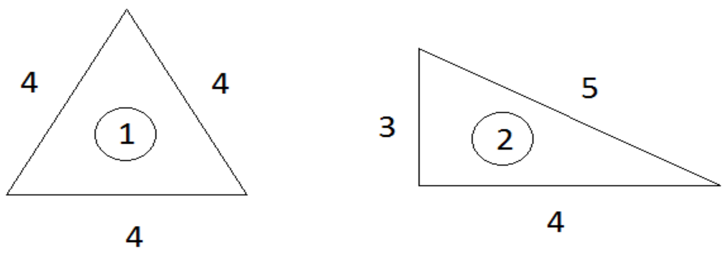
Resolução:

sim.



Perímetro de "1" = 16cm e Perímetro de "2" = 16cm

Área de "1" = 16cm² e Área de "2" = 12cm²



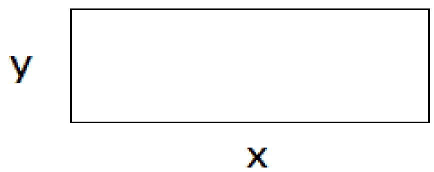
Perímetro de "1" = 12cm e Perímetro "2" = 12cm

Área "1" = $4\sqrt{3}$ cm² e Área de "2" = 6cm²

Questão 2

Dado um retângulo de dimensões x e y. Ache o valor da área A e o perímetro desse retângulo. Se o perímetro desse retângulo for de 20cm, sua área máxima será igual a 25cm² segundo o texto de Dido. Você concorda com essa afirmação? Caso afirmativo, mostre utilizando a desigualdade das médias estudadas na atividade 1.

Resolução:



Área = x.y

Perímetro = 2x + 2y

Se o perímetro desse retângulo for de 20cm, sua área máxima será igual a 25cm² segundo o texto de Dido. Você concorda com essa afirmação?

Sim, pois já vimos na questão 1 que um retângulo tem área máxima se ele for um quadrado, ou seja, se o perímetro vale 20cm seu lado valerá 5cm. Logo a área será igual a 25cm².

Provando por desigualdade das médias:

Dados os valores x e y, $M_A \geq M_G$, temos : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y}$

como 2x + 2y = 20, temos x + y = 10 e A = x.y

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y}$

$\frac{10}{2} \geq \sqrt{A}$

$5 \geq \sqrt{A}$, elevando ao quadrado ambos os lados:

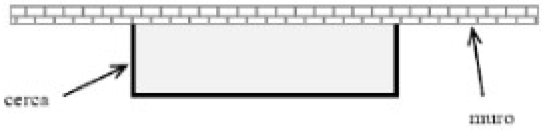
$A \leq 25$, ou seja , a cota máxima da área A é 25 e isso acontece quando x = y.

<u>Questão 3</u>

Agora observe e resolva um problema adaptado da "Lenda de Dido" por desigualdade das médias.

(ProfMat)Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro(de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

Figura 28: cerca



Fonte: ProfMat

Resolução

Resolução:

(I) Sem utilizar desigualdade:

1 – Comprimento do arame : 2x + y = 40

2 – y = 40 – 2x

3 – Área = x.y = x(40 – 2x)

4 – A = $-2x^2 + 40x$

5 - $X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2.(-2)} = 10m$, então y = 20m , logo A = 200m²

(II)Utilizando desigualdade das médias:

Sabendo que a área do retângulo é A = x.y e utilizando os valores adequados na desigualdade $M_A \geq M_G$, temos:

1 - $\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2x.y}$

2 - $20 \geq \sqrt{2A}$

3 - $A \leq 200$

Pela desigualdade acima o valor máximo que a área pode admitir é A = 200, e isso só ocorre quando 2x = y, ou seja:

A = 200
x.y = 200
x.2x = 200

x=10 e y=20.

5.2 2ª AULA

Data: xx/xx/xxxx

Professor(a):xxxx

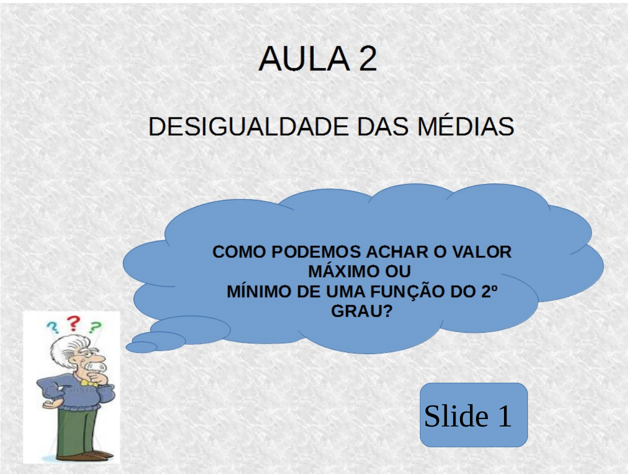
Matemática

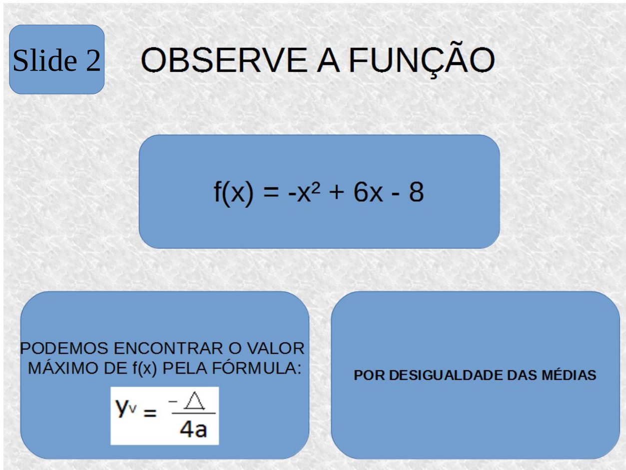
Tema: Desigualdade entre as médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

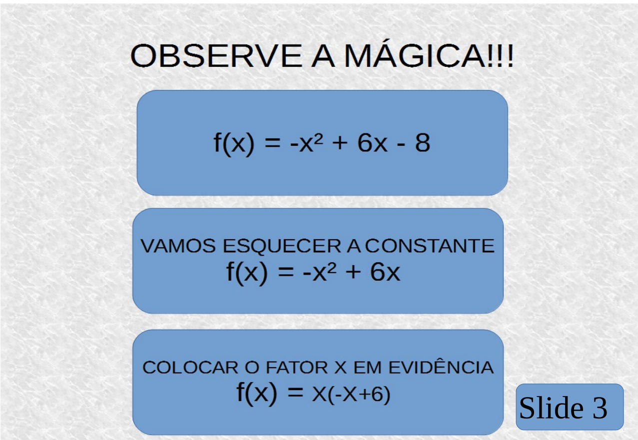
Objetivo: Calcular máximo e mínimo de uma função do 2º grau pelo método das desigualdades das médias

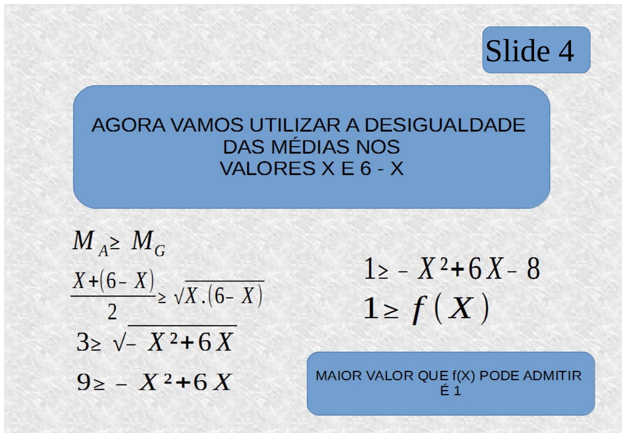
Conteúdo: Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Organização e Métodos: Aula expositiva através de slides criadas pelo autor









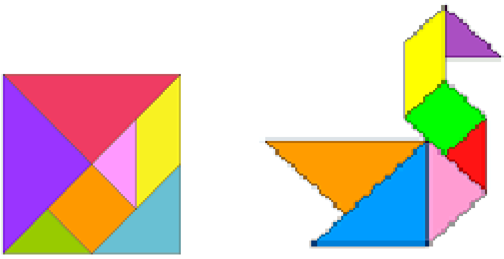
(Todas as Imagens dos slides foram retiradas na opção Imagens de um site de busca no dia 24/10/2016)

ATIVIDADE 1

O Tangram é um quebra-cabeça chinês que contém 7 peças (2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) que são chamadas de "tans". Acredita-se que o jogo surgiu na China durante a dinastia Song (960 - 1279 d.C.) e que chegou na Europa no começo do século XIX. Na China antiga, o Tangram era um dos mais famosos "testes" utilizados para estudar a inteligência humana.

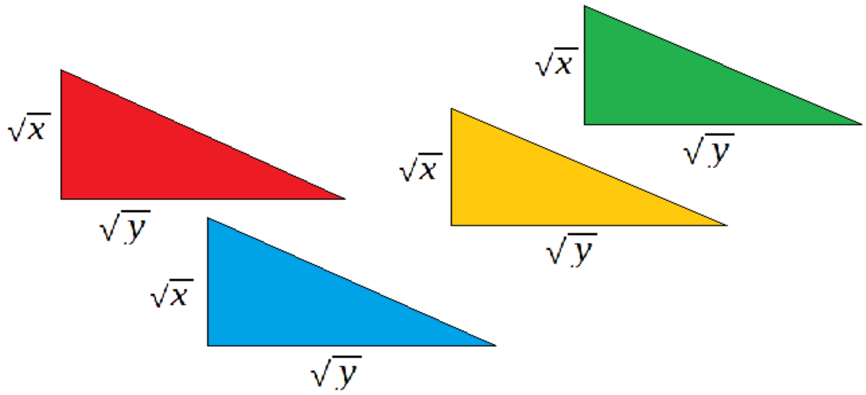
Atualmente, o quebra-cabeça está difundido pelo mundo e é jogado por pessoas de todas as idades. Crianças podem se divertir montando as figuras enquanto treinam a visão espacial, exploram a criatividade, aprendem sobre a classificação de formas geométricas e aprimoram suas habilidades em resolver problemas. Pessoas idosas podem jogar para passar o tempo e aproveitar para manter o cérebro ativo.(*Retirado da página https://www.geniol.com.br/raciocinio/tangram/*)

Exemplos:



Questão 1

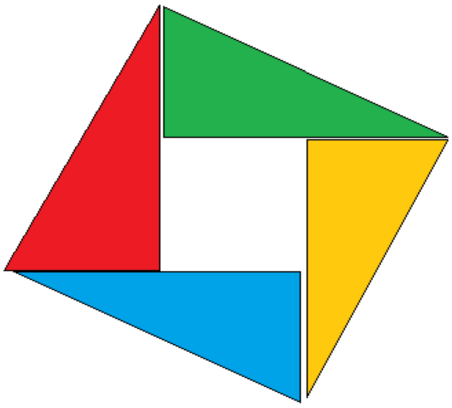
Com as 4 peças (4 triângulos retângulos de catetos iguais a $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$, com y > x)abaixo conseguimos montar um quadrado? Qual é a Área desse quadrado?



Resolução:

Os 4 triângulos retângulos formam um quadrado de lado $\sqrt{x+y}$, que é a hipotenusa dos triângulos retângulos.

Logo a área do quadrado formado pela união dos 4 triângulos é A = x + y



Questão 2

Ache a soma da área dos quatro triângulos retângulos e compare com a área do quadrado da questão 1 formado por eles. Conclua a desigualdade das médias $M_A \geq M_G$

Resolução:

Área dos 4 triângulos retângulos =4. $\frac{\sqrt{x}.\sqrt{y}}{2}$ = $2.\sqrt{x}.\sqrt{y}$ = $2.\sqrt{x.y}$

Área do quadrado é maior que a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos

$$x+y>2\sqrt{x.y}$$

$$\frac{x+y}{2}>\sqrt{x.y}$$

$$M_A \geq M_G$$

Questão 3

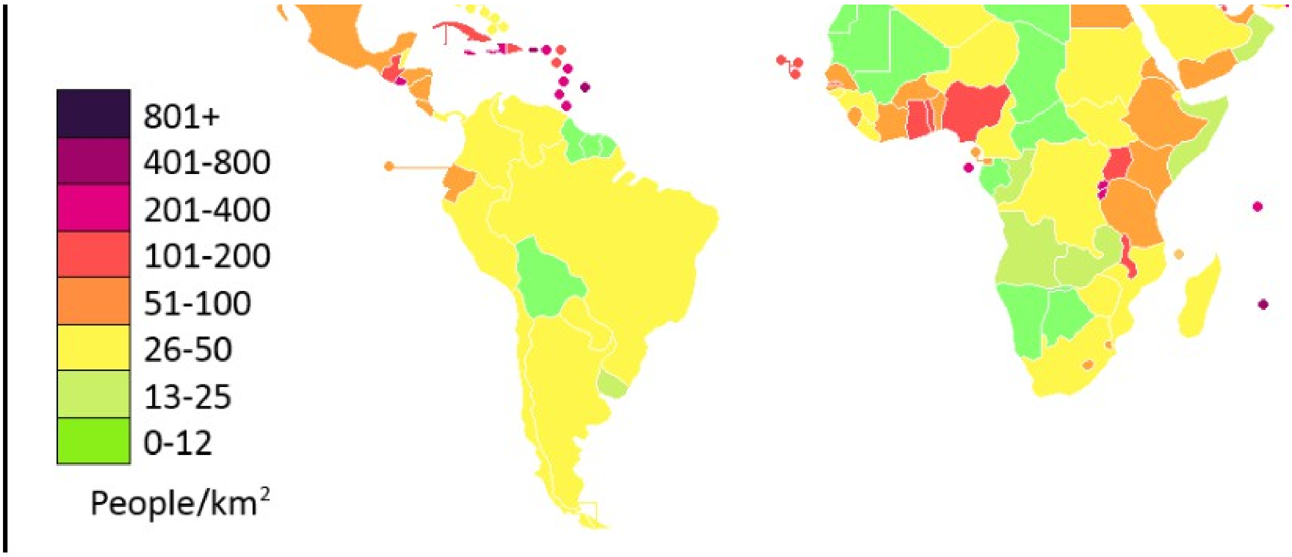
O que acontece com o quadrado interno a medida que aproximamos o valor de $\sqrt{x}$ ao valor de $\sqrt{y}$?

Resolução:

A medida que aproximamos o valor de $\sqrt{x}$ ao valor de $\sqrt{y}$ o quadrado interno tende a sumir tornando a área do quadrado x + y igual a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos $2.\sqrt{x\,.\,y}$

ATIVIDADE 2

Geografia humana é uma ciência humana que se consagra ao estudo e à descrição da interação entre a sociedade e o espaço. Ela ajuda o homem a entender o espaço geográfico em que vive. Pode-se compreender o objeto da geografia humana como sendo a leitura crítica das percepções e transformações humanas sobre o espaço, no transcorrer do tempo, assim como a incidência do espaço sobre a sociedade, isto é, a relação do homem com o espaço, o homem espacializado

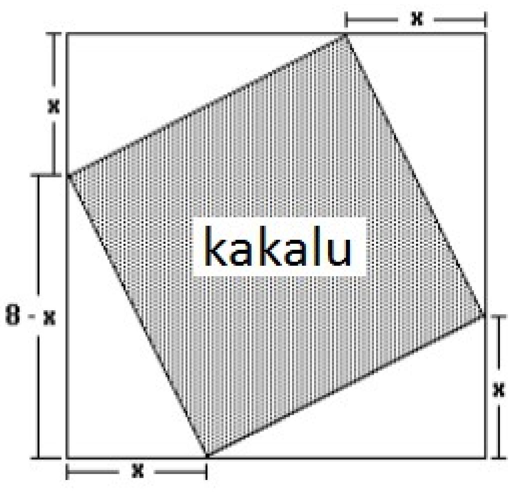


Densidade da população mundial, 2006

(Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Geografia_humana)

Questão 1

Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. O quadrado inscrito representa um território de uma tribo denominada "kakalu" cercado por outros quatro territórios. Ache a área da do território "kakalu" em função de x.



Resolução:

Sendo "A" a área do quadrado hachurado, temos:

$$A = área\, do\, quadrado\, externo - 4.\, área\, do\, triângulo\, retângulo$$

$$A = 64 - \frac{4.(8-x).x}{2}$$

$$A = 2x^2 - 16x + 64$$

Questão 2

Utilizando a desigualdade das médias ache o valor mínimo de "A".

Resolução

Se considerarmos dois números : x e (8 - x), tal que $M_A \geq M_G$, teremos:

$$\frac{x+(8-x)}{2} \geq \sqrt{x(8-x)}$$

$4 \geq \sqrt{x(8-x)}$, elevando ao quadrado os dois lados da desigualdade

$$16 \geq x(8-x)$$

$16 \geq 8x - x^2$, vamos multiplicar a desigualdade por (-2)

$2x^2 - 16x \geq -32$, somando 64 em ambos os lados

$2x^2 - 16x + 64 \geq 32$, ou seja, $A = 2x^2 - 16x + 64 \geq 32$. O menor valor que A pode admitir é 32 u . a

5.3 3ª AULA

Data: xx/xx/xxxx

Professor(a):xxxx

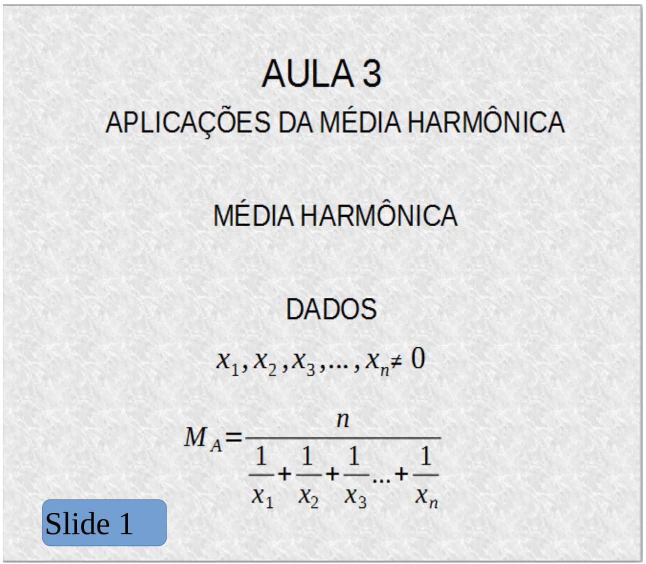
Matemática

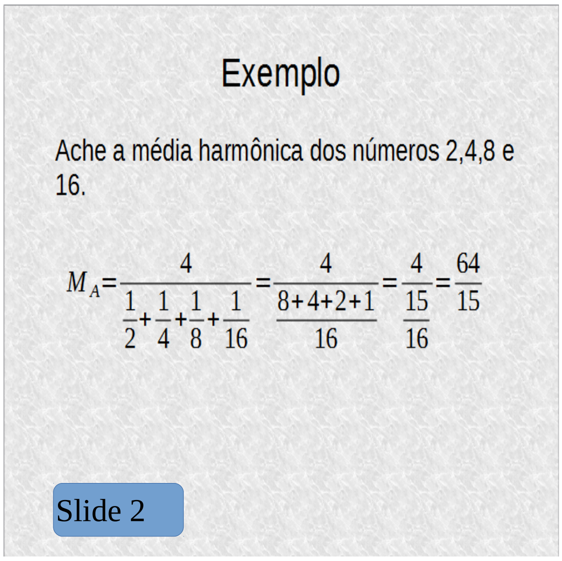
Tema: Aplicações da média harmônica

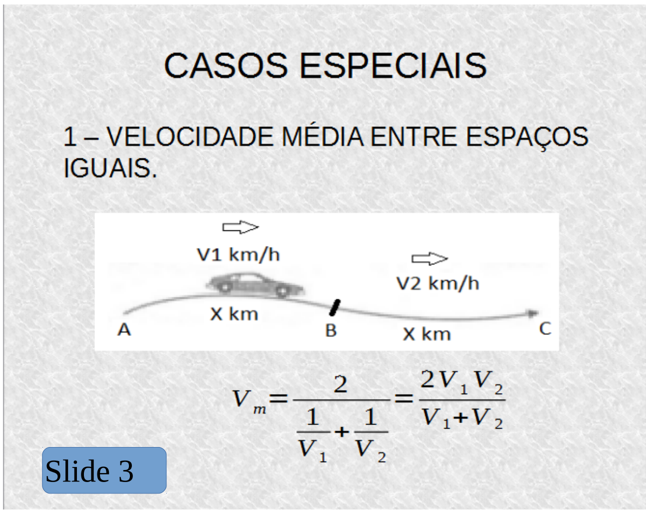
Objetivo: Aplicar a média harmônica em questões envolvendo conhecimentos de Física

Conteúdo: Média Harmônica

Organização e Métodos: Aula expositiva através de slides criadas pelo autor







ATIVIDADE 01

Questão 01

Um veículo realizou o trajeto de ida e volta entre as cidades A e B. Na ida ele desenvolveu uma velocidade média de 80 km/h, na volta a velocidade média desenvolvida foi de 120 km/h. Qual a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta?

Resolução

Para achar a velocidade média resultante, dadas as velocidades médias em espaços percorridos iguais, basta achar a média harmônica dessas velocidades:

Tendo as velocidades de 80km/h e 120km/h:

$$V_m = M_H = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{5}{240}} = 96 \text{ km/h}$$

Questão 02

Deseja-se fazer um percurso de carro de uma cidade A para um cidade B. A primeira metade do percurso o carro fez com velocidade média de 40km/h e a outra metade 60km/h. Qual a velocidade média de todo o percurso?

Resolução

Para achar a velocidade média resultante, dadas as velocidades médias em espaços percorridos iguais, basta achar a média harmônica dessas velocidades:

Tendo as velocidades de 40km/h e 60km/h:

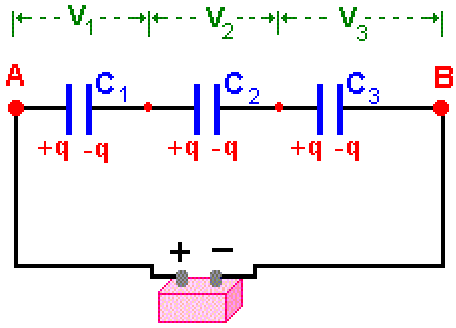
$$V_m = M_H = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = 48 \text{ km/h}$$

ATIVIDADE 2

Os capacitores são elementos de um circuito elétrico que podem ser conectados uns aos outros, assim como a outros elementos tais como resistores e indutores.

Capacitores são ditos estarem conectados em série quando a diferença de potencial(ddp) que lhes é aplicada é igual a soma da ddp entre os terminais de cada capacitor.

Figura 29: capacitores em série



Fonte:http://ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/CapacitoresEmSerie/CapacitoresEmSerie.html

Fora observado que para cálculo da capacidade equivalente de um circuito em série bastava calcular a média harmônica dos capacitores e dividir o resultado pela quantidade de capacitores.

Questão 01

Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores 6 Farad e 4 Farad no circuito se os dois capacitores estão ligados em série?

Resolução:

$$M_H=\frac{2.4.6}{4+6}=\frac{48}{10}=4{,}8 \quad , \quad C=\frac{M_H}{2}=\frac{4{,}8}{2}=2{,}4\,Farad$$

Questão 02

Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores 2 Farad e 3 Farad no circuito se os dois capacitores estão ligados em série?

Resolução:

$$M_H = \frac{2.2.3}{2+3} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \quad , \quad C = \frac{M_H}{2} = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2\, Farad$$

5.4 4ª AULA

Data: xx/xx/xxxx

Professor(a):xxxx

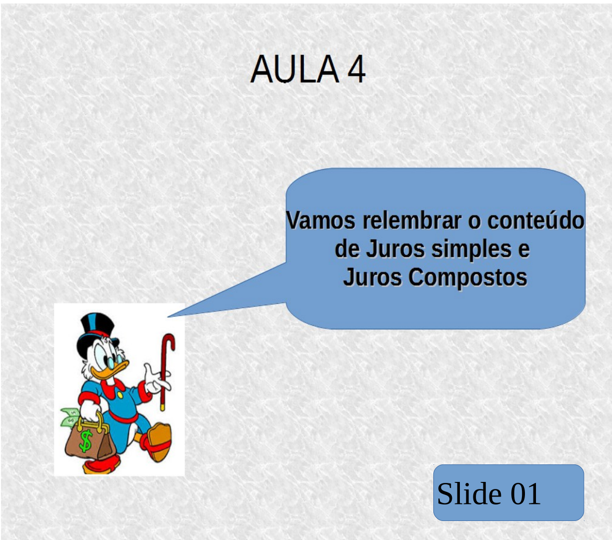
Matemática

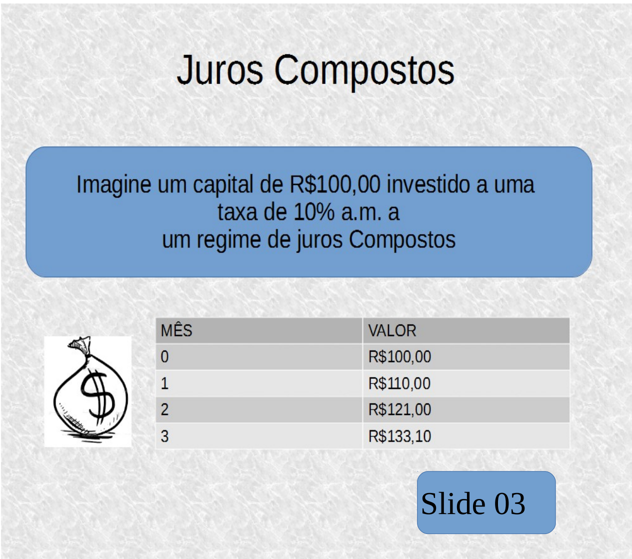
Tema: Desigualdade de Bernoulli

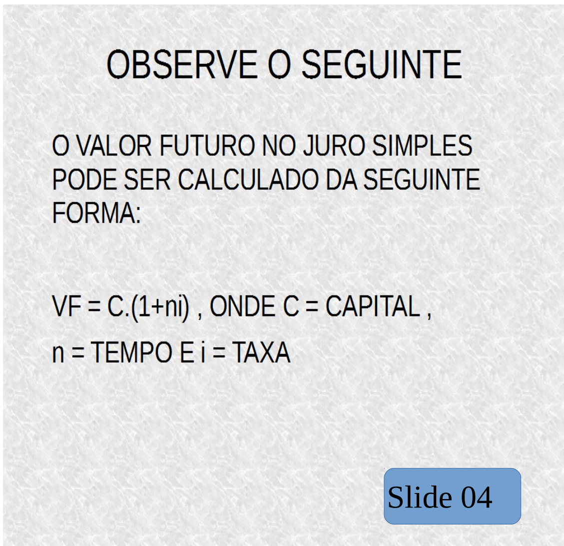
Objetivo: Apresentar a Desigualdade de Bernoulli presente na comparação entre os regimes de Juros Simples e Juros Compostos

Conteúdo: Juros Simples, Juros Compostos e Desigualdade de Bernoulli

Organização e Métodos: Aula expositiva através de slides criadas pelo autor







O VALOR FUTURO NO JUROS COMPOSTOS PODE SER CALCULADO DA SEGUINTE FORMA:

$$VF = C.(1+i)^n$$

Slide 05

A DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Slide 06

$$(1+i)^n \geq (1+i.n)$$

COMO PODEMOS OBSERVAR ESSA DESIGUALDADE NA COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTO?

COMPARANDO OS DOIS SISTEMAS

MÊS	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
0	R$100,00	R$100,00
1	R$110,00	R$110,00
2	R$120,00	R$121,00
3	R$130,00	R$133,10

OBSERVE QUE $JC \geq JS$

Slide 07

OU SEJA

$$C.(1+i)^n \geq C.(1+i.n)$$

$$(1+i)^n \geq (1+i.n)$$

DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Slide 08

(Todas as Imagens dos slides foram retiradas na opção Imagens de um site de busca no dia 06/11/2016)

ATIVIDADE

Juro é a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro. É expresso como um percentual sobre o valor emprestado (taxa de juro) e pode ser calculado de duas formas: juros simples ou juros compostos.

O juro pode ser compreendido como uma espécie de "aluguel sobre o dinheiro". A taxa seria uma compensação paga pelo tomador do empréstimo para ter o direito de usar o dinheiro até o dia do pagamento. O credor, por outro lado, recebe uma compensação por não poder usar esse dinheiro até o dia do pagamento e por correr o risco de não receber o dinheiro de volta (risco de inadimplência).

(Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Juro)

Questão 01

Um capital de R$200,00 foi emprestado com uma taxa de 10%a.m sob um regime de juros simples. Mostre a evolução desse montante ao passar dos meses e modele uma fórmula para essa situação em "n" meses.

Resolução:

Mês	Valor
0	R$200,00
1	R$220,00
2	R$240,00
3	R$260,00

O montante "M" pode ser calculado por $M = C + C.i.n$ ou $M = C(1 + i.n)$, onde C é o capital inicial , i a taxa e n o número de períodos.

Questão 02

Um capital de R$200,00 foi emprestado com uma taxa de 10%a.m sob um regime de juros compostos. Mostre a evolução desse montante ao passar dos meses e modele uma fórmula para essa situação em "n" meses.

Resolução:

Mês	Valor
0	R$200,00
1	R$220,00
2	R$242,00
3	R$266,20

O montante "M" pode ser calculado por M = C. $(1+i)^n$, onde C é o capital inicial , i a taxa e n o número de períodos.

Questão 03

Comparando a evolução mensal do capital nas duas questões anteriores chegue a conclusão da desigualdade de Bernoulli $(1+i)^n \geq (1+i.n)$.

Resolução:

Observe que M = C. $(1+i)^n$ Nos juros compostos é maior ou igual a M = C(1 + i.n) nos Juros Simpes, ou seja, $C.(1+i)^n \geq C.(1+i.n)$, isto é, $(1+i)^n \geq (1+i.n)$ (desigualdade de Bernoulli)

5.5 5ª AULA

Data: xx/xx/xxxx

Professor(a):xxxx

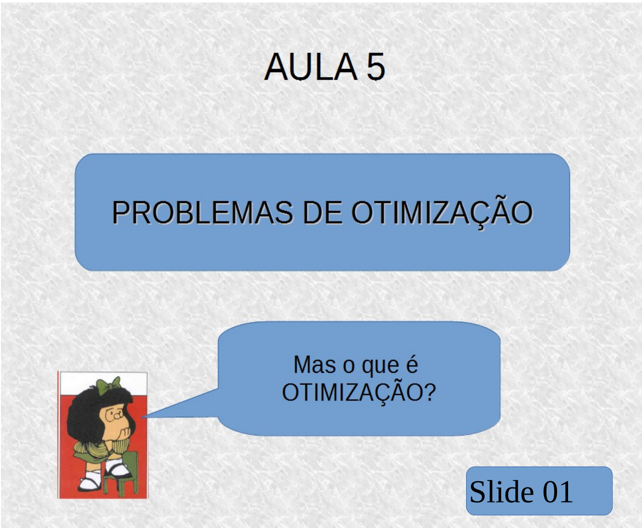
Matemática

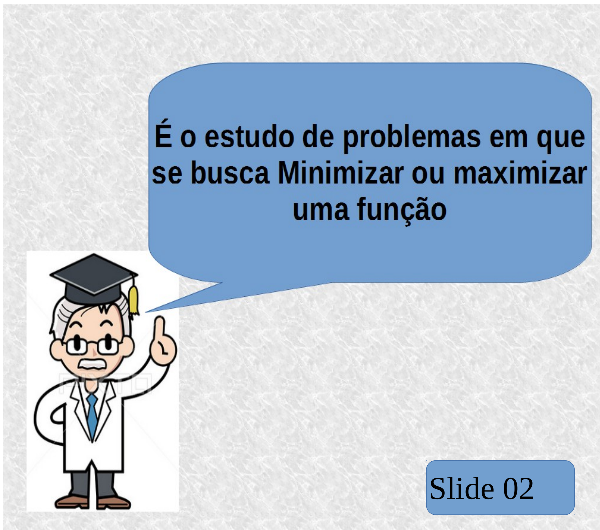
Tema: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

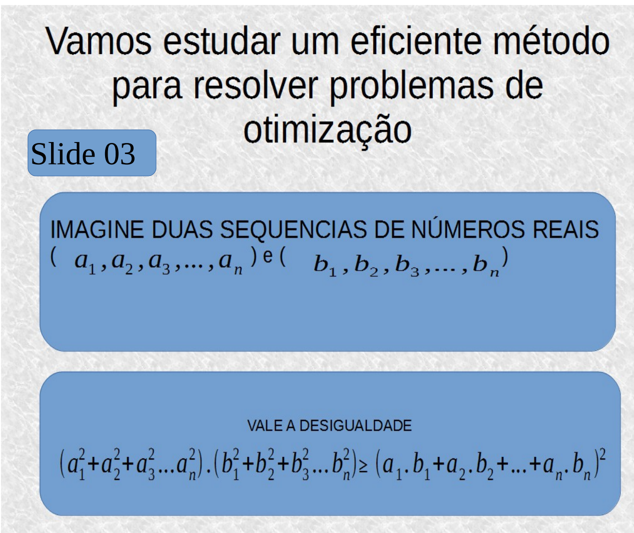
Objetivo: Mostrar as relações de Otimização no paralelepípedo relacionando Volume(V) , área(S) e a diagonal(D) do mesmo.

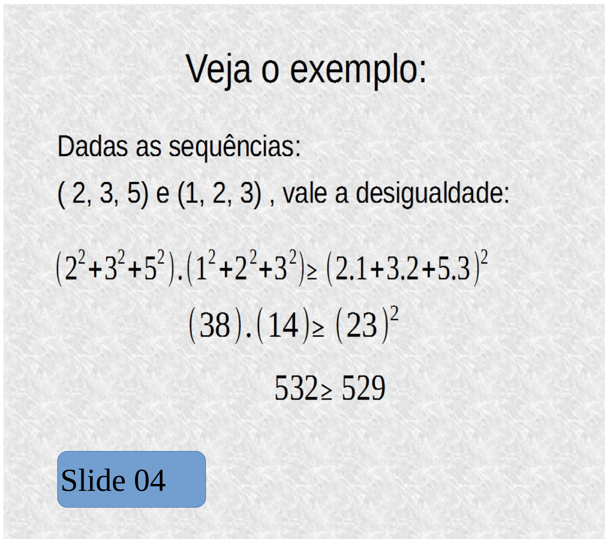
Conteúdo: Desigualdade de Cauchy-Schwarz,volume(V), área(S) e a diagonal(D) do paralelepípedo.

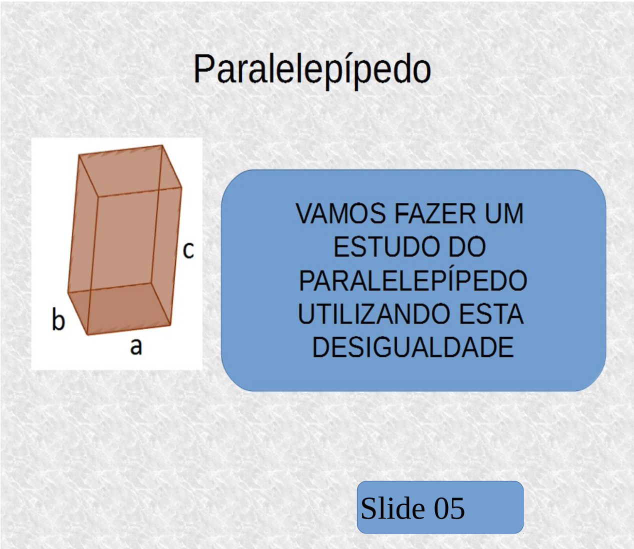
Organização e Métodos: Aula expositiva através de slides criadas pelo autor







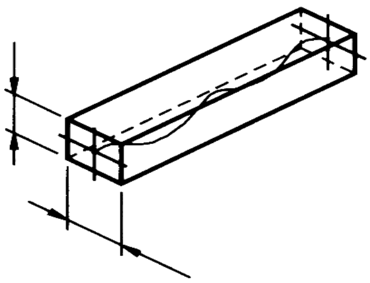




(Todas as Imagens dos slides foram retiradas na opção Imagens de um site de busca no dia 12/11/2016)

ATIVIDADE 01

Encurtar um caminho para ganhar tempo, economizar para comprar algo, tomar decisão com base em investimentos, sempre estamos interessados nas formas ótimas de aplicarmos nossos recursos. Resolver um problema de otimização, significa sobretudo procurar a solução de um problema de forma a se maximizar algo ou a minimizar algo. Esse algo tem uma representação matemática que recebe o nome de função objetivo ou índice de performance. Ao fabricamos uma peça no formato de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões (a,b,c) podemos calcular valores máximos e mínimos relacionados a essas grandezas.



Questão 01

Calcule o volume desse paralelepípedo, área e sua diagonal.

Resolução:

V = a.b.c

S = 2(a.b + a.c + b.c)

D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Questão 02

Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz nas sequências (a,b,c) e (1,1,1) .

Dica: Dado a sequência de números reais $(a_1, a_2, \ldots, a_n)e(b_1, b_2, \ldots b_n)$, então:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)^2$$

Resolução:

$$(a^2+b^2+c^2).(1^2+1^2+1^2) \geq (a.1+b.1+c.1)^2$$

$$3.(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Questão 03

Conclua da questão 02 que a diagonal do paralelepípedo é maior ou igual a soma das dimensões desse paralelepípedo dividido pela raíz quadrada de 3.

Resolução:

Da questão 02 temos $3.(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$, e da questão 01 que D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, logo:

$$3 D^2 \geq (a+b+c)^2$$

$$D^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$D \geq \frac{(a+b+c)}{\sqrt{3}}$$

Questão 04

Com auxílio das questões 02 e 03 e sabendo que da desigualdade de cauchy-schwarz a igualdade só é válida caso $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, ache o valor mínimo da diagonal desse paralelepípedo.

Resolução:

Utilizando a dica $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, temos das sequencias (a,b,c) e (1,1,1) , que $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$ para que seja válida a igualdade. Logo a = b = c = L

$$D=\frac{(L+L+L)}{\sqrt{3}}$$

$$D=\frac{(3L)}{\sqrt{3}}$$

$$D=\frac{(3L.\sqrt{3})}{3}$$

$D=(L.\sqrt{3})$, ou seja , a diagonal será mínima quando esse paralelepípedo for um cubo de lado L.

ATIVIDADE 02

Otimizar significa tornar ótimo ou ideal. É extrair o melhor rendimento possível, no que concerne a qualquer área de atividade. Otimizar é proceder a otimização, ou seja, empregar técnicas para selecionar as melhores alternativas para se atingir os objetivos determinados. Na área da informática, otimizar um sistema é torná-lo mais rápido e eficiente, reduzindo o tempo de execução de tarefas. Quando o computador processa as atividades muito lentamente, é normal proceder-se à otimização para melhorar o desempenho.

(Disponível em https://www.significados.com.br/otimizar/)

Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões (a, b ,c), calcule o que se pede:

Questão 01

Calcule o volume desse paralelepípedo, área e sua diagonal.

Resolução:

V = a.b.c

S = 2(a.b + a.c + b.c)

D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Questão 02

Utilizando as sequencias (a,b,c) e (b,c,a) verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Dica: $(a_1, a_2, \dots, a_n)e(b_1, b_2, \dots b_n)$ são números reais , então:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2).(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geq(a_1 b_1+a_2 b_2+\dots+a_n b_n)^2$$

Resolução:

$$(a^2+b^2+c^2).(b^2+c^2+a^2)\geq(a.b+b.c+c.a)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq(a.b+b.c+c.a)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)\geq(a.b+b.c+c.a)$$

Questão 03

Conclua da questão 02 que a área do paralelepípedo é menor ou igual a duas vezes o quadrado da diagonal desse mesmo paralelepípedo.

Resolução:

Da questão 02 temos $(a^2+b^2+c^2)\geq(a.b+b.c+c.a)$, e da questão 01 que D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e S = 2(a.b + a.c + b.c), logo:

$$(a^2+b^2+c^2)\geq(a.b+b.c+c.a)$$

$$D^2\geq\frac{S}{2}$$

$$S\leq 2.D^2$$

Questão 04

Com auxílio das questões 02 e 03 e sabendo que da desigualdade de Cauchy-Schwarz a igualdade só é válida caso $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, ache o valor máximo da área desse paralelepípedo.

Resolução:

Utilizando a dica $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, temos das sequencias (a,b,c) e (b,c,a) , que $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ para que seja válida a igualdade.

Ora, fazendo $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$, temos $\frac{a.b.c}{b.c.a}=k^3$, daí k = 1, então a = b = c = L e sabemos que da atividade 1 que quando isso acontece $D=(L.\sqrt{3})$.

$S=2.(L.\sqrt{3})^2$

$S=2.(L^2).3$

$S=6.(L^2)$, ou seja, a área será máxima quando este paralelepípedo for um cubo

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante meus estudos no curso de mestrado uma das disciplinas estudadas foi matemática discreta. Foi quando me deparei com o assunto de Desigualdade das Médias. Pensava comigo como um assunto que tinha como base média aritmética, geométrica e harmônica, que são conteúdos relativamente tranquilos, poderia ter uma abstração tão grande no seu estudo. Mas ao mesmo tempo via que o conteúdo era mais uma ferramenta poderosa na resolução de outros exercícios do que um assunto específico.

Quando resolvi pesquisar trabalhos anteriores que falavam sobre o assunto verifiquei que existiam vários trabalhos de embasamento teórico sobre Desigualdade das Médias, mas nada que fosse direcionado para uma implementação focada no ensino médio, visto que o assunto está previsto na grade curricular, mas dificilmente trabalhado dentro de sala de aula.

Por esse motivo o trabalho teve o objetivo de mostrar aos professores dos últimos anos do ensino médio que é possível trabalhar o conteúdo de Desigualdade das Médias, que muitos consideram um conteúdo de grande dificuldade de compreensão e transmissão de uma forma lúdica e simples mediante um bom trabalho de reflexão sobre o assunto e um bom planejamento de aula. Cada uma das atividades propostas nos planos de aula tiveram um objetivo específico e esperado.

Através dos resultados obtidos pela tabela da atividade 1 da aula 1 o aluno consegue intuitivamente chegar a conclusão da desigualdade entre as médias. Na atividade 2 da mesma aula tivemos como objetivo utilizar um conhecimento de figuras isoperimétricas(mesmo perímetro) mas com áreas diferentes. Nesta atividade já começamos a dar a noção ao aluno sobre o conceito de otimização.

Na atividade 1 da aula 2 trabalhamos inicialmente a visão espacial do aluno para agrupar objetos e formar um quadrado onde a partir daí e dos conhecimentos de área concluímos a desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas. Na atividade 2 mostramos uma alternativa para o cálculo de máximo ou mínimo de uma função polinomial do 2º grau.

Nas atividades 1 e 2 da aula 3 mostramos duas utilidades da média harmônica. Ferramenta de grande utilidade não só na área da matemática mas também em outras áreas do conhecimento quando trabalhamos com grandezas inversamente proporcionais.

Na atividade da aula 4 o principal objetivo foi comparar os dois regimes de capitalização: juros simples e juros compostos e a partir daí fazer o aluno concluir a Desigualdade de Bernoulli.

O aluno já com um conhecimento mais maduro sobre o assunto de Desigualdade das Médias, inserimos nas atividades da aula 5 a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Nesta desigualdade o aluno terá uma ferramenta alternativa para cálculos de máximo ou mínimo trabalhando com elementos do paralelepípedo.

Este material teve o propósito de auxiliar professores que desejarem algum dia trabalhar com Desigualdade das Médias com seus alunos ou explorar mais sobre o assunto. Para o futuro desejamos continuar nosso trabalho fazendo um levantamento da aceitação e eficácia do trabalho realizado bem como aprimorar nos possíveis erros que possamos ter cometido.

6 REFERÊNCIAS

ARGENTO, H. **Teoria Construtivista**. Disponível em : <http://penta3.ufrgs.br/midiasedu/modulo11/etapa2/construtivismo.pdf>. Acesso em: 13 de out. de 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs) – Ensino médio**. Brasília: MEC/SEF 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 08 de out. de 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs) - Ensino Fundamental.** Brasília :MEC/SEF 1997, Disponível em : <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 08 de out. de 2016.

FREIRE, E. N. **Aplicação da Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica na Resolução de Problemas em Nível de Ensino Médio**. Mossoró: Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, 2014.

GIL, A. C. **Didática no Ensino Superior.** 1ª ed. São Paulo: Atlas,2010.

LIMBERGER, R.; COSTA, S. **A Lenda de Dido**. Guia do professor. UNICAMP. São Paulo. Campinas. Preface Design, [2013], p. 01-09. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126>. Acesso em 12 de out. de 2016.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras Histórias**. Rio de Janeiro: Graftex Comunicação Visual, 1991.

MENEGHETTI, R. C. G.**Ensino-Aprendizagem De Matemática: Uma Proposta De Intervenção Em Sala De Aula.** Disponível em: <http://www.sepq.org.br/Iisipeq/anais/pdf/gt2/11.pdf>. Acesso em: 15 de out. de 2016.

OLIVEIRA, M. A. **Didática no Ensino Superior**. 1ª ed. São Paulo: Know how, 2011.

SOUZA, F. H. T.**Desigualdades das Médias**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=da1prIpZniQ>. Acesso em: 22 de jul. de 2016

TEIXEIRA, P. J. M. **Para Além Do Cálculo Da Média Aritmética No Ensino Fundamental**. IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA. Canoas. RS – 16 a 18 de outubro de 2013.

APÊNDICE A

ATIVIDADE 01

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 01

ATIVIDADE 1

Em estatística, média é definida como o valor que mostra para onde se concentram os dados de uma distribuição como o ponto de equilíbrio das frequências em um histograma. Média também é interpretada como um valor significativo de uma lista de números. Os valores de uma lista de números podem ser representados por meio da escolha aleatória de um número. Se todos os números forem iguais, o número escolhido aleatoriamente será a média. Então, a média pode ser calculada por meio da combinação dos números de maneira específica e da geração de um valor significativo.

*(Disponível em **https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia**)*

Sabendo-se que M_A representa a média aritmética, M_G a média geométrica e M_H a média harmônica resolva as questões abaixo:

Questão 1

Complete a tabela abaixo:

Valores	M_A	M_G	M_H
2 e 8			
1 e 9			
4 e 9			
7 e 7			

Questão 2

Tomando como referência a questão anterior compare os valores das médias para cada par de números em cada linha da tabela.

<u>Questão 3</u>

Tendo agora como base de conhecimento as questões anteriores imagine a seguinte situação hipotética.

Ao final de três bimestres um aluno recebe seu boletim de notas conforme figura abaixo:

Disciplina	1º Bimestre		2º Bimestre		3º Bimestre	
	Nota	Faltas	Nota	Faltas	Nota	Faltas
GEOGRAFIA	4.5	6	4.5	16	6.0	1
HISTORIA	8.2	1	4.7 *	3	9.1	1
LINGUA PORTUGUESA	6.0	2	6.3	1	5.0 *	0
MATEMATICA	6.2	3	6.6	2	10.0	0
QUIMICA	4..0	4	5.0	4	6.0	2
L.E.M.-INGLES	4.5 *	2	7.5	3	9.5	2

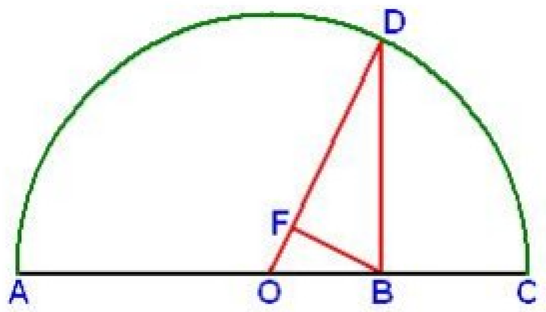
Sabendo que para que ele não fique em dependência em nenhuma matéria é necessário que ele atinja uma média maior ou igual a 5,0. Observa-se que sua situação mais crítica estão nas disciplinas de geografia e química. Para que o aluno não fique em dependência nessas duas matérias qual média deverá ser utilizada para este cálculo? Aritmética, geométrica ou harmônica?

APÊNCICE B

ATIVIDADE EXTRA

Problema proposto por Pappus

No livro III da coleção Matemática de Pappus, encontramos o enunciado (ilustrado na figura abaixo): “Tome B no segmento AC, B diferente do ponto médio O de AC. Erga a perpendicular a AC por B, cortando a semicircunferência sobre AC em D e seja F o pé da perpendicular tirada de B sobre OD.



Os sucessores imediatos de Euclides, Arquimedes e Apolônio prolongaram por algum tempo o uso da tradição geométrica grega, mas esta foi aos poucos esquecida, e os novos desenvolvimentos limitaram-se à astronomia, à trigonometria e à álgebra. Então, perto do final do século III d.C, cerca de 500 anos depois de Apolônio, surgiria um outro grande geômetra, Pappus. Seu trabalho compunha de uma coleção de 8 livros sobre geometria da época.

Dos oito livros que compunham a obra, perderam-se o primeiro e parte do segundo. A julgar pelo que remanesceu, o livro II ocupa-se de um método desenvolvido por Apolônio, o qual trata da escrita de números grandes e operações com estes. O livro III contém quatro partes: as duas primeiras lidam com a teoria das médias, com atenção especial ao problema da inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. (FREIRE, 2012, p. 12)

Considerando AB = x e BC = y, Responda as questões abaixo.

<u>Questão 1</u>

Qual será o valor do Diâmetro e do Raio desse semicírculo? Qual é o valor de OD?

Questão 2

Qual é o valor do segmento BD? Olhando para a figura, qual segmento é maior ? OD ou BD?

Questão 3

Qual é o valor do segmento FD? Olhando para a figura, qual segmento é maior? BD ou FD?

Questão 4

O que acontece com os valores de x e y se deslocarmos o ponto B até o ponto O?

Questão 5

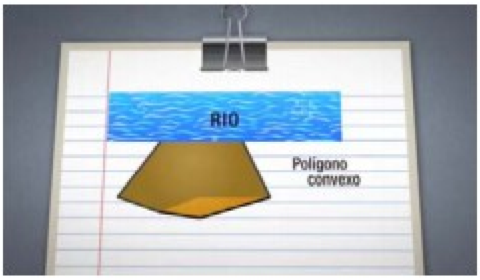
Conclua que dados dos valores x e y, a média aritmética é maior que a média geométrica que é maior que a média harmônica e que a igualdade só acontece se esses valores são iguais.

ATIVIDADE 02

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 01

A Lenda De Dido

A fazendeira Elisa tem oitenta metros de tela e pretende fazer um cercado para suas ovelhas. A princesa Dido surge para ajudá-la a escolher o melhor formato para esta cerca. A apresentação da Lenda de Dido, presente no épico Eneida do poeta Virgílio, escrito no séc. I A. C. ilustra que a solução do problema isoperimétrico já era conhecida há muito tempo atrás, aparecendo em escritos dos gregos Zenódoro e Pappus[1]. O primeiro resultado apresentado no programa é que dado um polígono não convexo, sempre é possível encontrar um polígono convexo de mesmo perímetro e com área maior .



(Figura retirada da página file:///C:/Users/Wellington/Downloads/lendadedido.pdf)

Neste caso, utiliza-se uma reflexão do vértice V que caracteriza o polígono como não convexo através da reta definida pelos dois vértices adjacentes a este. Como pode ser também observado, se considerarmos o polígono onde as duas arestas que partem de V são substituídas por uma única aresta que liga os dois vértices adjacentes a V, obtemos um polígono convexo com número de lados menor, perímetro menor e área maior. Entre todos os polígonos convexos com o mesmo número de lados e mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui maior área.

Questão 1

Você acha que o texto da "*Lenda de Dido*" está correto na sua afirmação no seu último período? Caso afirmativo, dê dois exemplos de dois polígonos com mesmo número de lados e mesmo perímetro sendo que dentre eles o regular é o de maior área.

Questão 2

Dado um retângulo de dimensões x e y. Ache o valor da área A e o perímetro desse retângulo. Se o perímetro desse retângulo for de 20cm, sua área máxima será igual a 25cm² segundo o texto de Dido. Você concorda com essa afirmação? Caso afirmativo, mostre utilizando a desigualdade das médias estudadas na atividade 1.

Questão 3

Agora observe e resolva um problema adaptado da "Lenda de Dido" por desigualdade das médias.

(ProfMat)Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro(de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

Figura 30: cerca

Fonte: ProfMat

APÊNDICE C

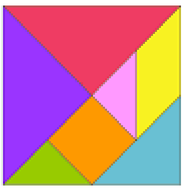
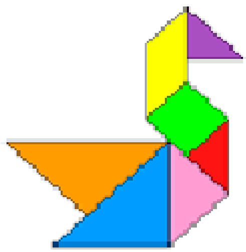
ATIVIDADE 01

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 02

O Tangram é um quebra-cabeça chinês que contém 7 peças (2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) que são chamadas de "tans". Acredita-se que o jogo surgiu na China durante a dinastia Song (960 - 1279 d.C.) e que chegou na Europa no começo do século XIX. Na China antiga, o Tangram era um dos mais famosos "testes" utilizados para estudar a inteligência humana.

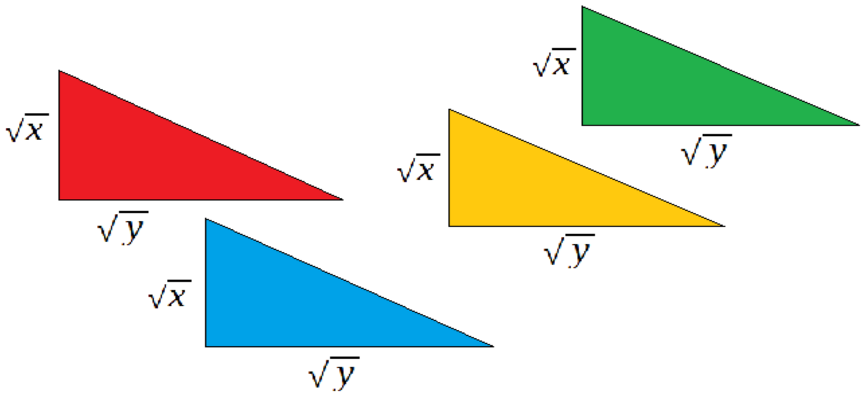
Atualmente, o quebra-cabeça está difundido pelo mundo e é jogado por pessoas de todas as idades. Crianças podem se divertir montando as figuras enquanto treinam a visão espacial, exploram a criatividade, aprendem sobre a classificação de formas geométricas e aprimoram suas habilidades em resolver problemas. Pessoas idosas podem jogar para passar o tempo e aproveitar para manter o cérebro ativo.(*Retirado da página* https://www.geniol.com.br/raciocinio/tangram/)

Exemplos:

Questão 1

Com as 4 peças (4 triângulos retângulos de catetos iguais a $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$, com y > x)abaixo conseguimos montar um quadrado? Qual é a Área desse quadrado?



Questão 2

Ache a soma da área dos quatro triângulos retângulos e compare com a área do quadrado da questão 1 formado por eles. Conclua a desigualdade das médias $M_A \geq M_G$

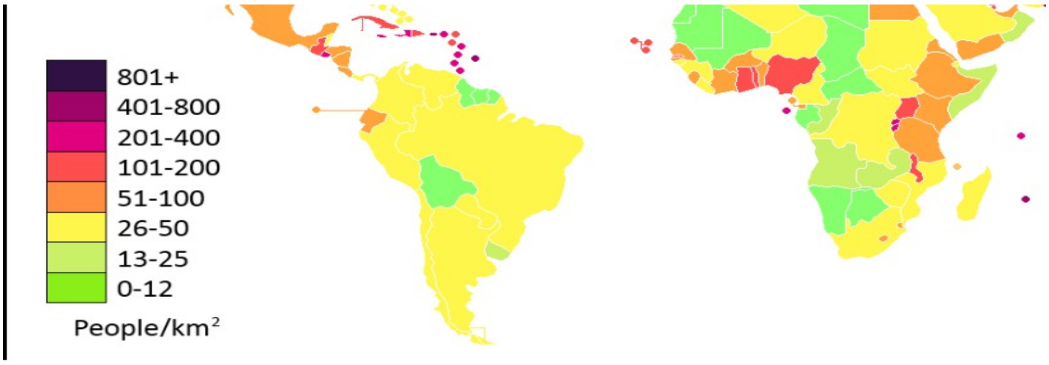
Questão 3

O que acontece com o quadrado interno a medida que aproximamos o valor de $\sqrt{x}$ ao valor de $\sqrt{y}$?

ATIVIDADE 02

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 02

Geografia humana é uma ciência humana que se consagra ao estudo e à descrição da interação entre a sociedade e o espaço. Ela ajuda o homem a entender o espaço geográfico em que vive. Pode-se compreender o objeto da geografia humana como sendo a leitura crítica das percepções e transformações humanas sobre o espaço, no transcorrer do tempo, assim como a incidência do espaço sobre a sociedade, isto é, a relação do homem com o espaço, o homem espacializado

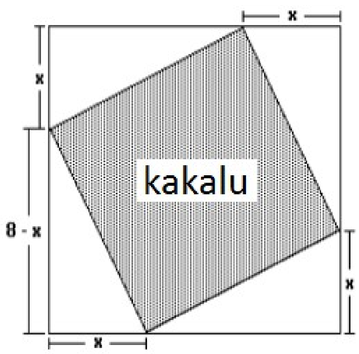


Densidade da população mundial, 2006

(Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Geografia_humana)

Questão 1

Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. O quadrado inscrito representa um território de uma tribo denominada "kakalu" cercado por outros quatro territórios. Ache a área da do território "kakalu" em função de x.



Questão 2

Utilizando a desigualdade das médias ache o valor mínimo de "A".

APÊNDICE D

ATIVIDADE 01

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 03

Questão 01

Um veículo realizou o trajeto de ida e volta entre as cidades A e B. Na ida ele desenvolveu uma velocidade média de 80 km/h, na volta a velocidade média desenvolvida foi de 120 km/h. Qual a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta?

Questão 02

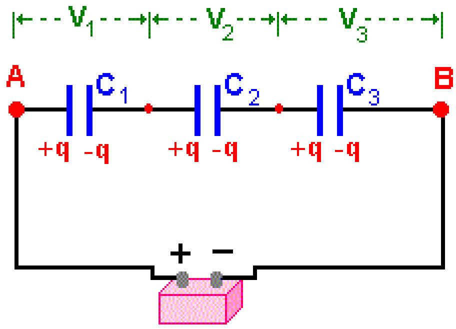
Deseja-se fazer um percurso de carro de uma cidade A para um cidade B. A primeira metade do percurso o carro fez com velocidade média de 40km/h e a outra metade 60km/h. Qual a velocidade média de todo o percurso?

ATIVIDADE 02

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 03

Os capacitores são elementos de um circuito elétrico que podem ser conectados uns aos outros, assim como a outros elementos tais como resistores e indutores.

Capacitores são ditos estarem conectados em série quando a diferença de potencial(ddp) que lhes é aplicada é igual a soma da ddp entre os terminais de cada capacitor.



Fora observado que para cálculo da capacidade equivalente de um circuito em série bastava calcular a média harmônica dos capacitores e dividir o resultado pela quantidade de capacitores.

Questão 01

Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores 6 Farad e 4 Farad no circuito se os dois capacitores estão ligados em série?

Questão 02

Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores 2 Farad e 3 Farad no circuito se os dois capacitores estão ligados em série?

APÊNDICE E

ATIVIDADE

ALUNO:____ TURMA:_____ AULA 04

Juro é a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro. É expresso como um percentual sobre o valor emprestado (taxa de juro) e pode ser calculado de duas formas: juros simples ou juros compostos.

O juro pode ser compreendido como uma espécie de "aluguel sobre o dinheiro". A taxa seria uma compensação paga pelo tomador do empréstimo para ter o direito de usar o dinheiro até o dia do pagamento. O credor, por outro lado, recebe uma compensação por não poder usar esse dinheiro até o dia do pagamento e por correr o risco de não receber o dinheiro de volta (risco de inadimplência).

(Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Juro)

Questão 01

Um capital de R$200,00 foi emprestado com uma taxa de 10%a.m sob um regime de juros simples. Mostre a evolução desse montante ao passar dos meses e modele uma fórmula para essa situação em "n" meses.

Questão 02

Um capital de R$200,00 foi emprestado com uma taxa de 10%a.m sob um regime de juros compostos. Mostre a evolução desse montante ao passar dos meses e modele uma fórmula para essa situação em "n" meses.

Questão 03

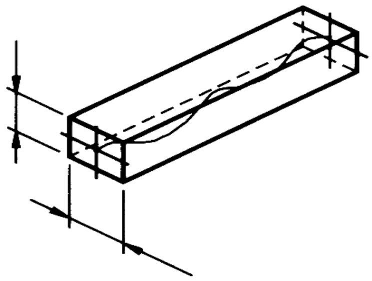
Comparando a evolução mensal do capital nas duas questões anteriores chegue a conclusão da desigualdade de Bernoulli $(1+i)^n \geq (1+i.n)$.

APÊNDICE F

ATIVIDADE 01

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 05

Encurtar um caminho para ganhar tempo, economizar para comprar algo, tomar decisão com base em investimentos, sempre estamos interessados nas formas ótimas de aplicarmos nossos recursos. Resolver um problema de otimização, significa sobretudo procurar a solução de um problema de forma a se maximizar algo ou a minimizar algo. Esse algo tem uma representação matemática que recebe o nome de função objetivo ou índice de performance. Ao fabricamos uma peça no formato de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões (a,b,c) podemos calcular valores máximos e mínimos relacionados a essas grandezas.



Questão 01

Calcule o volume desse paralelepípedo, área e sua diagonal.

Questão 02

Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz nas sequências (a,b,c) e (1,1,1) .

Dica: Dados a sequência de números reais $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, e\, (b_1, b_2, \ldots b_n)$, então:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)^2$$

Questão 03

Conclua da questão 02 que a diagonal do paralelepípedo é maior ou igual a soma das dimensões desse paralelepípedo dividido pela raiz quadrada de 3.

Questão 04

Com auxílio das questões 02 e 03 e sabendo que da desigualdade de Cauchy-Schwarz a igualdade só é válida caso $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, ache o valor mínimo da diagonal desse paralelepípedo.

ATIVIDADE 02

ALUNO:____ TURMA:______ AULA 05

Otimizar significa tornar ótimo ou ideal. É extrair o melhor rendimento possível, no que concerne a qualquer área de atividade. Otimizar é proceder a otimização, ou seja, empregar técnicas para selecionar as melhores alternativas para se atingir os objetivos determinados. Na área da informática, otimizar um sistema é torná-lo mais rápido e eficiente, reduzindo o tempo de execução de tarefas. Quando o computador processa as atividades muito lentamente, é normal proceder-se à otimização para melhorar o desempenho.

(Disponível em https://www.significados.com.br/otimizar/)

Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões (a, b ,c), calcule o que se pede:

Questão 01

Calcule o volume desse paralelepípedo, área e sua diagonal.

Questão 02

Utilizando as sequencias (a,b,c) e (b,c,a) verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Dica: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, e\, (b_1, b_2, \ldots b_n)$ são números reais , então:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)^2$$

Questão 03

Conclua da questão 02 que a área do paralelepípedo é menor ou igual a duas vezes o quadrado da diagonal desse mesmo paralelepípedo.

Questão 04

Com auxílio das questões 02 e 03 e sabendo que da desigualdade de Cauchy-Schwarz a igualdade só é válida caso $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, ache o valor máximo da área desse paralelepípedo.