Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

A TRIGONOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Diego Alves

Roberto Imbuzeiro
Orientação

Trabalho de Conclusão de Curso

Agradecimentos

A Deus pela força necessária para prosseguir.

Ao professor Roberto Imbuzeiro, pela forma que me orientou neste trabalho e por todo o tempo que disponibilizou.

Ao corpo docente, direção, secretaria de ensino e todos que tornaram minha estadia nessa instituição muitíssimo agradável e proveitosa.

A minha família, pelo apoio incondicional em tudo na minha vida.

Aos amigos que fiz pela inspiradora maneira de discutir a matemática e por toda e qualquer ajuda que me tenha sido dada.

Muito Obrigado.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo criticar construtivamente o estudo da trigonometria, na disciplina de Matemática, com especial atenção a transição desse estudo do Ensino Fundamental para o Ensino Médio. Estaremos focados tanto na apresentação da trigonometria no Ensino Fundamental e de que formas podemos fazê-la para obter uma melhor aceitação do assunto no Ensino Médio, quanto na própria apresentação já no Ensino Médio, visando utilizar o que foi feito anteriormente da melhor forma que pudermos.

Conteúdo

1 Introdução

A trigonometria é um assunto com diversas definições e consequências destas, além de detalhes que quando não são devidamente entendidos, costumam gerar dificuldades para alunos e professores. A motivação para escrever esse trabalho está diretamente ligada a essa possível dificuldade, com foco principal na transição da trigonometria estudada do Ensino Fundamental para a que é apresentada no Ensino Médio, quando tais razões passam a valer para ângulos quaisquer e posteriormente, definidas como funções.

A intenção é criticar construtivamente o modo que tradicionalmente essa transição é feita e por meio de um encadeamento lógico, obtermos inicialmente as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. A proposta é que ao invés de definirmos todas as razões trigonométricas citadas de uma só vez, apresentemos tais definições aos alunos de modo paulatino, partindo da definição do seno de um ângulo agudo no triângulo retângulo. A partir dai procuramos apresentar cada nova definição de maneira matematicamente precisa, mas condizente com a formação dos alunos. Os conceitos são motivados a partir de construções geométricas e as relações entre eles são evidenciadas por demonstrações simplificadas.

Serão utilizados para definir as razões trigonométricas e também as razões inversas já no Ensino Fundamental a circunferência de raio unitário, semelhanças de triângulos, entre outros conhecimentos matemáticos. Isso visa dar melhor fluidez ao assunto no Ensino Médio e possivelmente fará com que os alunos se sintam mais envolvidos com o tema, atenuando problemas comuns nessa transição. Como nosso foco é a passagem do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, tópicos mais avançados como por exemplo a lei dos senos, fogem do escopo do trabalho.

Teremos também a presença de atividades dando chance a uma apresentação lúdica quando conveniente, bem como indicações de exemplos que possam tornar os passos mais interessantes, ou pelo menos proveitosos em cada etapa do aprendizado.

Cada indicação foi dada com base em pesquisas feitas em alguns livros didáticos, na experiência de alguns anos de magistério e nas discussões tanto com o orientador desse trabalho, quanto com amigos de profissão.

2 A trigonometria no Ensino Fundamental

Neste capítulo apresentaremos nossa proposta sobre como apresentar a trigonometria para o Ensino Fundamental, já com vistas a seu desenvolvimento posterior no Ensino Médio. Pensando no encadeamento lógico citado para a apresentação das razões trigonométricas, iniciamos a nossa proposta definindo o seno de um ângulo agudo. Mostraremos a invariância do seno de qualquer ângulo, ou seja, que independente de uma ampliação ou redução que se faça em um triângulo retângulo, o valor do seno dos seus ângulos internos permanecem inalterados. Essa invariância será apresentada por meio de um exemplo, para facilitar o entendimento dos alunos, mas deixaremos indicada uma demonstração formal para o professor. Vamos também sugerir um problema envolvendo a área de um triângulo, onde o seno é utilizado.

Daremos continuidade a apresentação definindo o cosseno de um ângulo agudo α, visto que podemos dizer que o cosseno de α é o seno do complementar de α. Conhecendo o seno e o cosseno, apresentaremos a Relação Fundamental da Trigonometria, já que ela relaciona de justamente as razões já definidas até o momento e nos dá condição de conhecendo uma delas, obter a outra. Serão dadas sugestões de exemplos para cada uma dessas apresentações, visando a familiarização com o assunto em cada ocasião. É claro que mais exercícios serão necessários para o domínio pleno do assunto.

O próximo passo será dedicado a tangente de um ângulo agudo, e em seguida, as razões inversas. Daremos uma abordagem diferenciada para esse momento, no intuito que haja um melhor aproveitamento do aluno quanto ao entendimento futuro de tais razões, além de auxiliar na passagem do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

Por fim, apresentaremos outras relações que podem ser obtidas por meio da relação fundamental da trigonometria e mostraremos aos alunos o caminho para a obtenção do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis, seguidos de problemas que poderão ser resolvidos utilizando esses resultados.

2.1 O seno de um ângulo agudo

Começamos nossa exposição lembrando aos alunos os elementos de um triângulo retângulo - catetos e hipotenusa - que são fundamentais para que possamos dar continuidade ao estudo proposto. Veja a Figura 01 e note que nesta figura já demos destaque ao ângulo agudo α, que será utilizado a seguir.

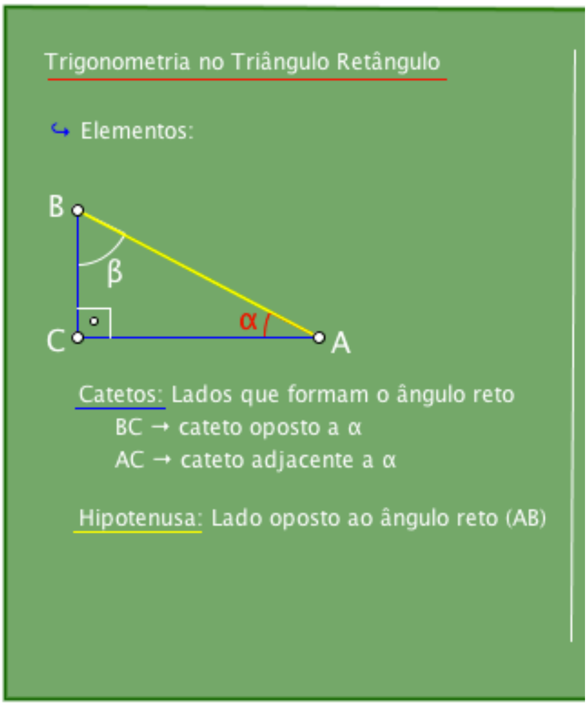
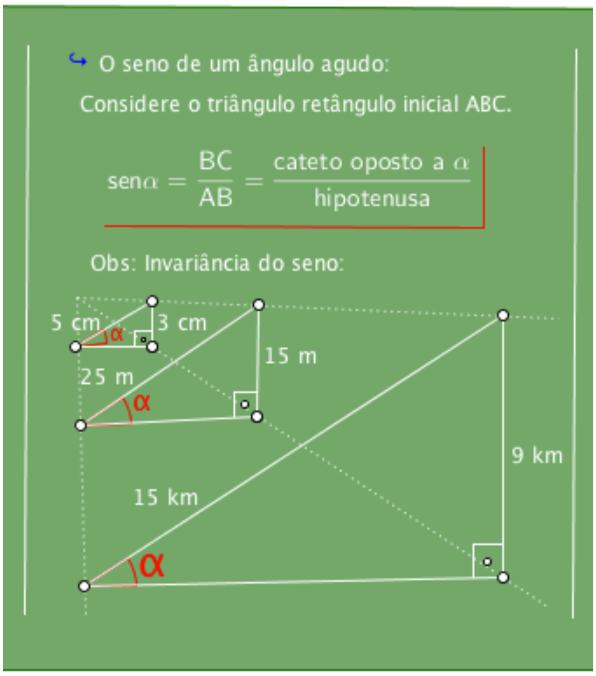


Figura 01: Elementos do triângulo retângulo

Após isso, definiremos o seno do ângulo agudo α, como a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo. Apresentaremos também um exemplo que possa evidenciar a invariância do seno. Veja a Figura 02.



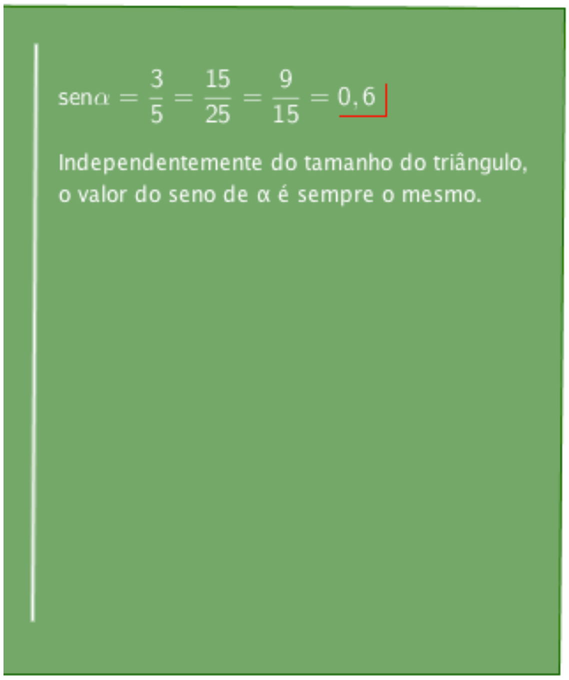


Figura 02: Apresentação do seno de um ângulo agudo e sua invariância.

Como essa é uma apresentação inicial, vamos propor a obtenção de uma das fórmulas que podem ser utilizadas para determinar a área de um triângulo, justamente em função da razão trigonométrica que acabamos de definir. Neste momento é importante testarmos o conceito com os alunos, buscando operacionalizá-lo em um exemplo simples.

Exemplo:

Determine a área do triângulo abaixo em função de a, b e θ.

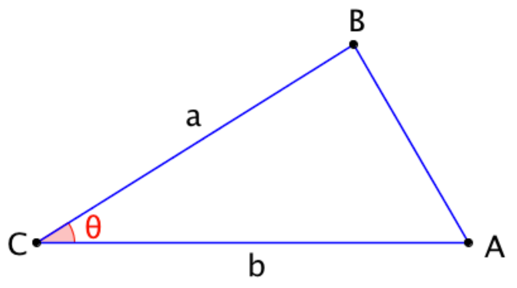


Figura 03

Solução:

Traçando a altura relativa a base AC, temos:

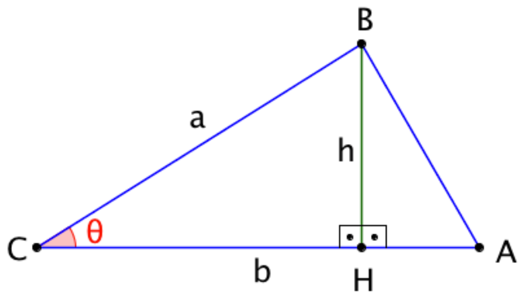


Figura 04

Por meio da definição apresentada, podemos dizer que:

$$\text{sen }\theta = \frac{h}{a} \;\Rightarrow\; h = a\ .\ \text{sen }\theta$$

Calculando a área do triângulo ABC:

$$A_{TRI} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{b\,.(a\,.\,\text{sen}\theta)}{2}$$

$$\boxed{\therefore A_{TRI} = \frac{a\,.\,b\,.\,\text{sen}\theta}{2}}$$

Aprofundando os conceitos: Apresentação formal da invariância do seno.

A única dificuldade significativa no conceito de seno é demonstrar que ele de fato não depende das dimensões do triângulo retângulo em questão. Damos abaixo um argumento geométrico formal que resolve este problema.

Considere os triângulos retângulos AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3, abaixo:

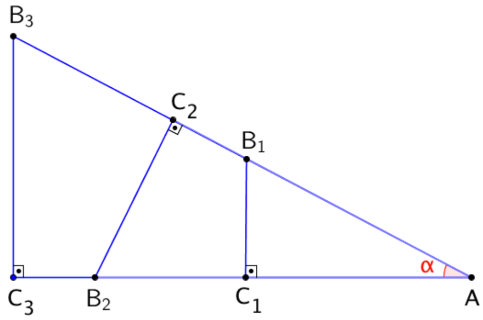


Figura 05

Por meio da semelhança existente entre tais triângulos, temos que:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \operatorname{sen}\alpha$$

2.2 Outras razões trigonométricas

2.2.1 O cosseno de um ângulo agudo

Para definirmos o cosseno de um ângulo agudo, vamos destacar o fato de que no triângulo inicial, α e β são complementares e que em consequência disso, o cosseno de α é o seno de seu complementar β, por definição. De forma equivalente, o cosseno de α é a razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa. Vale ressaltar que, como estamos no Ensino Fundamental, a definição é dada para ângulos agudos, mas vale para ângulos quaisquer. Veja a Figura 06.

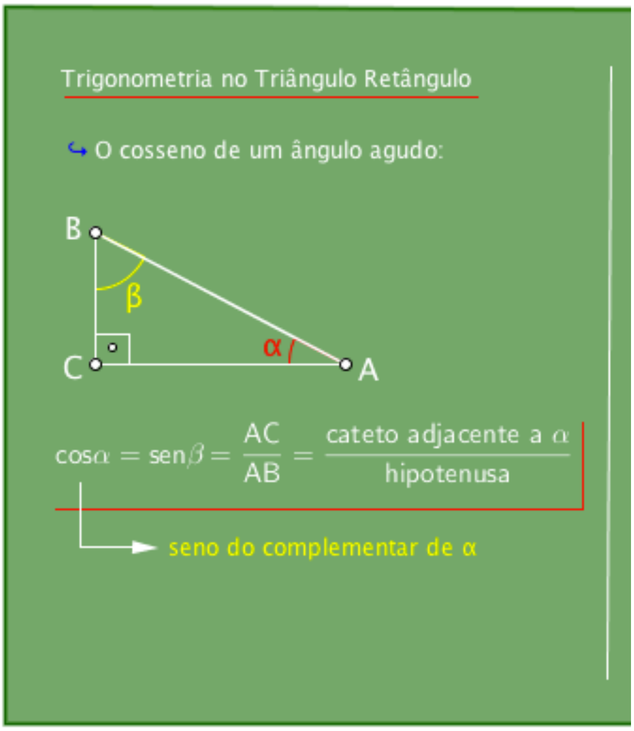


Figura 06: Apresentação do cosseno de um ângulo agudo.

O professor não deve deixar de observar que como o cosseno de um ângulo agudo está intrinsecamente ligado ao seu seno, ele também não depende do tamanho do triângulo.

Para mostrar uma utilização prática para o cosseno de um ângulo agudo, sugerimos um exemplo ainda simples, mas que mostre a aplicabilidade ao conteúdo em uma situação que tenta aproximar o aluno da realidade.

Exemplo:

Você sabia que a foz do Rio Amazonas tem cerca de 330 km de largura?

Supondo margens paralelas, um barco que atravessar um rio com essa largura, seguindo uma direção que forma um ângulo θ com uma reta perpendicular a margem de partida, percorrerá que distância? (considere $\cos\theta = 0{,}75$)

Solução:

Podemos iniciar a solução por meio do seguinte esquema inicial:

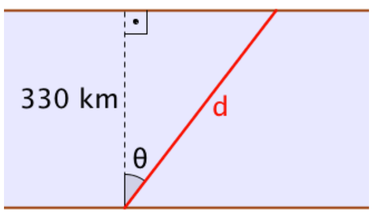


Figura 07

Para facilitar a resolução do problema, podemos destacar que:

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Como $\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$, temos:

$$\cos\theta = \frac{330}{d} = \frac{3}{4}$$

Resolvendo a equação acima, temos:

$$d = \frac{330}{\frac{3}{4}} = 330 \cdot \frac{4}{3} = 110 \,.\, 4 = 440$$

$$\boxed{\therefore d = 440 \text{ km}}$$

2.2.2 Relação Fundamental da Trigonometria

A chamada relação fundamental relaciona justamente as razões trigonométricas estudadas até o momento, motivo pelo qual é apresentada desde já. Para obter tal relação, podemos construir o triângulo retângulo ABC abaixo:

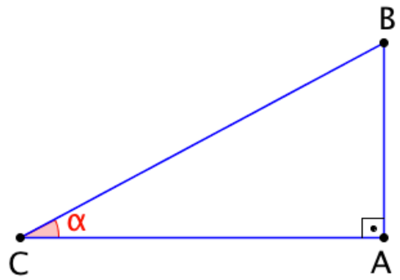


Figura 08

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por BC^2, conseguimos uma relação envolvendo nossas já conhecidas razões trigonométricas, como segue:

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} \Rightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Vale chamar a atenção dos alunos para o fato dessa relação ser simples e relacionar duas das principais razões trigonométricas. Isso dá sentido a equação obtida acima ser chamada de relação fundamental da trigonometria. Veja a Figura 09 para uma possibilidade de apresentação aos alunos.

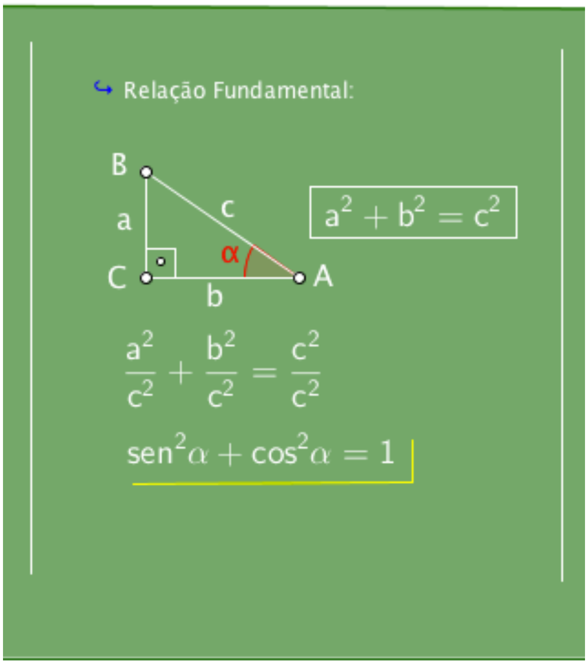


Figura 09: Apresentação da relação fundamental da trigonometria.

A relação fundamental serve como ferramenta direta, caso tenhamos uma das razões já disponível e haja necessidade da outra. Um exemplo que visa deixar isso claro é certamente bem vindo nesse momento.

Exemplo:

Determine o seno de um ângulo agudo α, sabendo que o cosseno do mesmo é igual a 0,6.

Solução:

Por meio da relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\boxed{\therefore \text{sen}\, x = \frac{4}{5} = 0{,}8}$$

Além de mostrar a fácil obtenção de uma das razões trigonométricas dada a outra, esse exemplo permite já comentar com os alunos que o seno poderia sim ser “- 0,8”, mas como os ângulos estudados são agudos, os valores do seno e do cosseno são sempre positivos, visto que são obtidos por meio de uma divisão entre dois comprimentos, isto é, dois números positivos.

2.2.3 A tangente e a secante de um ângulo agudo

Exploradas as consequências iniciais da definição do seno de um ângulo agudo, podemos nos dedicar em definir a sua tangente e, além disso, conduzir a obtenção das razões trigonométricas inversas, ou seja, da secante, da cossecante e da cotangente do mesmo.

Vamos fazer uma proposta diferente da que tradicionalmente é apresentada em materiais didáticos. A tentativa é que a transição da trigonometria do Ensino Fundamental para o Ensino Médio seja feita de modo que parte dos conceitos que seriam evitados, não sejam, em prol de uma melhor base para a transição a ser realizada.

A ideia é apresentar a construção feita na Figura 10 e evidenciar que estaremos analisando um triângulo retângulo (OBB’). Agregar uma circunferência a nossa análise serve para dar sentido aos nomes tangente (a reta t é tangente a circunferência) e secante (a reta s é secante a circunferência).

Escolhemos o raio da circunferência unitário e, consequentemente, a hipotenusa de OBB’ terá 1 unidade de comprimento. Uma justificativa razoável é a invariância do seno e do cosseno de um ângulo, ou seja, já que não há relação entre o tamanho do triângulo e os valores de seno e cosseno, podemos escolher tal hipotenusa com comprimento igual a 1 unidade de medida. Veja a Figura 10.

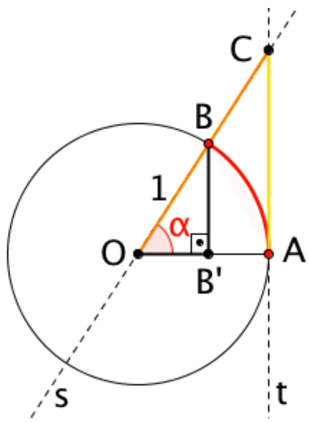


Figura 10: A tangente e a secante – visão geométrica.

Na construção apresentada, mostre para os alunos que $OA = OB = 1$. Evidencie também a semelhança entre os triângulos OBB' e OCA, que utilizaremos para obter os segmentos tangente e secante. Além disso, podemos usar esse momento para destacar os segmentos que representam o seno e o cosseno do ângulo α, como segue:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BB'}{OB} \Rightarrow BB' = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow OB' = \cos\alpha$$

Essas informações serão utilizadas para a obtenção de outras razões trigonométricas, como veremos a seguir.

Figura 11: A tangente e a secante – sugestão de apresentação.

- **Tangente do ângulo agudo:**

Podemos utilizar a semelhança dos triângulos OBB' e OCA para obter AC na Figura 10.

$$\frac{AC}{BB'} = \frac{OA}{OB'} \Rightarrow \frac{AC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

A reta t é a reta suporte do segmento AC. Além disso, ela é tangente a circunferência.

Chamaremos AC de tangente do ângulo α (denotamos tg α). Podemos definir a tangente de um ângulo agudo como a razão de cateto oposto e cateto adjacente num triângulo retângulo qualquer. Ver Figura 12.

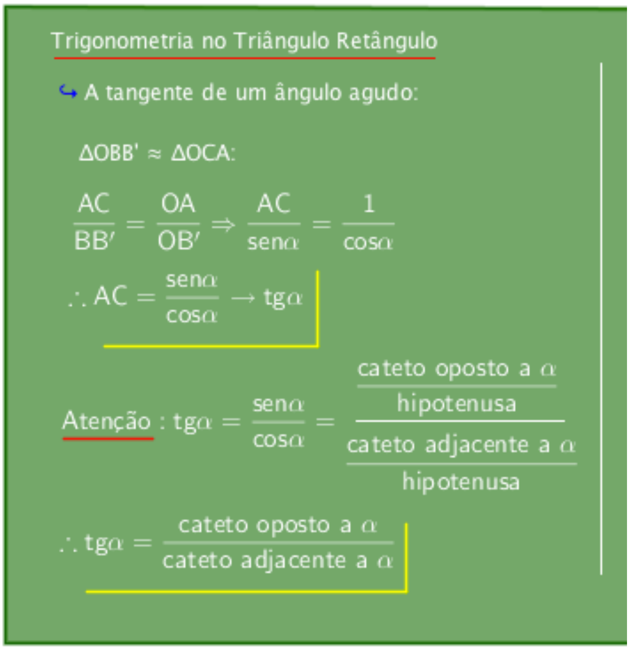


Figura 12: Apresentação da tangente de um ângulo agudo.

Para solucionar o exemplo abaixo sugerido, devemos conhecer a razão trigonométrica agora definida. Interpretar corretamente a figura e a tabela apresentadas é fundamental para esse problema, e serve como treino para outros problemas matemáticos, já que informações assim apresentadas são frequentes.

Exemplo:

Qual é a distância entre a Terra e a Lua?

A distância Terra-Lua varia enquanto a Lua dá uma volta em torno da Terra. Quando a Lua está no seu **perigeu** (distância de máxima aproximação à Terra), o centro da Lua dista aproximadamente **56 raios terrestres do centro da terra**; cerca de duas semanas depois, quando ela se encontra no seu **apogeu** (distância de máximo afastamento à Terra), a distância aumentou para cerca de **65 raios terrestres**.
Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=233

Supondo que a Lua está no seu perigeu, determine a melhor aproximação que a tabela apresentada permitir, para o valor do ângulo $P\hat{Q}T$ no esquema abaixo. (Utilize uma calculadora científica

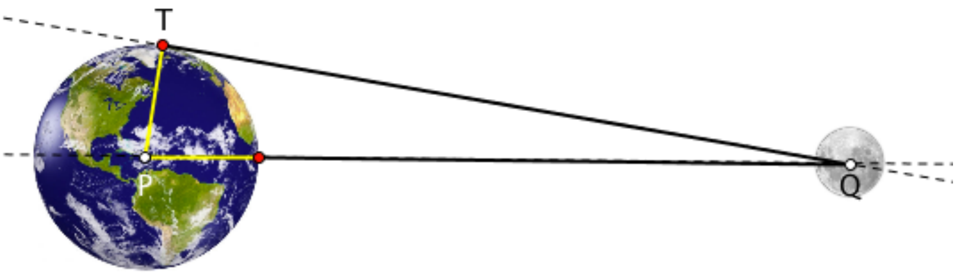


Figura 13

Tabela das Tangentes para ângulos de 0° a 5°

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022

$$\left(\text{Considere } \frac{\sqrt{3135}}{3135} \cong 0{,}0178\right)$$

<u>Solução</u>:

Completando a Figura 13, por meio das informações do texto, temos:

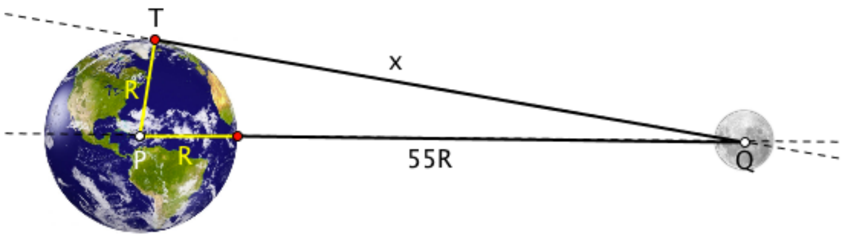


Figura 14

Pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 + R^2 = (56R)^2$$

$$\Rightarrow\ x^2 = 3136\,.R^2 - R^2 = 3135\,.R^2$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{x^2} = \frac{1}{3135}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{x} = \frac{\sqrt{3135}}{3135}$$

Chamando o ângulo $P\hat{Q}T$ de α, teremos que $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0178$.

Pela tabela apresentada, o ângulo cuja tangente melhor se aproxima do valor obtido é 1 grau.

$$\boxed{\therefore P\hat{Q}T \cong 1^{\circ}}$$

Uma sugestão interessante é a não apresentação da tabela e da aproximação sugerida. Isso nos permite trabalhar com uma calculadora, ferramenta que temos disponível em qualquer smartphone atualmente.

- **Secante do ângulo agudo:**

Podemos, na Figura 10, utilizar novamente a semelhança dos triângulos OBB' e OCA, mas agora na intenção de obter OC.

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OB'} \Rightarrow \frac{AC}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

A reta s é a reta suporte do segmento OC. Além disso ela é secante a circunferência. Tal segmento será chamado de secante do ângulo α (denotamos sec α). Podemos definir a secante de um ângulo agudo como a razão inversa do cosseno, isto é, como a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente num triângulo retângulo qualquer. Tome a Figura 15 como sugestão para essa apresentação.

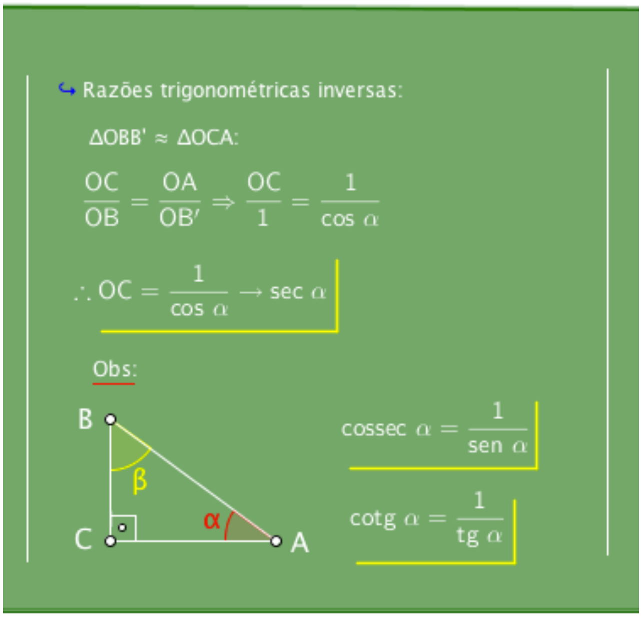


Figura 15: Apresentação da secante de um ângulo agudo.

Nesse momento final, explique aos alunos que tais razões são inversas porque elas são obtidas por meio de uma inversão do numerador, com o denominador, nas razões anteriores. As interpretações geométricas da cossecante e da cotangente serão apresentadas em uma atividade que será proposta ainda nesse capítulo.

2.2.4 Outras relações entre as razões trigonométricas

Podemos mostrar aos alunos outras possíveis relações. Elas são mais específicas e como podem ser obtidas por meio da relação fundamental da trigonometria, vale nos dedicarmos a que eles lembrem de como obtê-las caso venham a precisar. Veja a Figura 16.

- Se dividirmos a relação fundamental por $\cos^2\alpha$, teremos:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\text{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha}$$

- Se dividirmos a relação fundamental por $\text{sen}^2\alpha$, teremos:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}\quad\Rightarrow\quad\boxed{1+\text{cotg}^2\alpha=\text{cossec}^2\alpha}$$

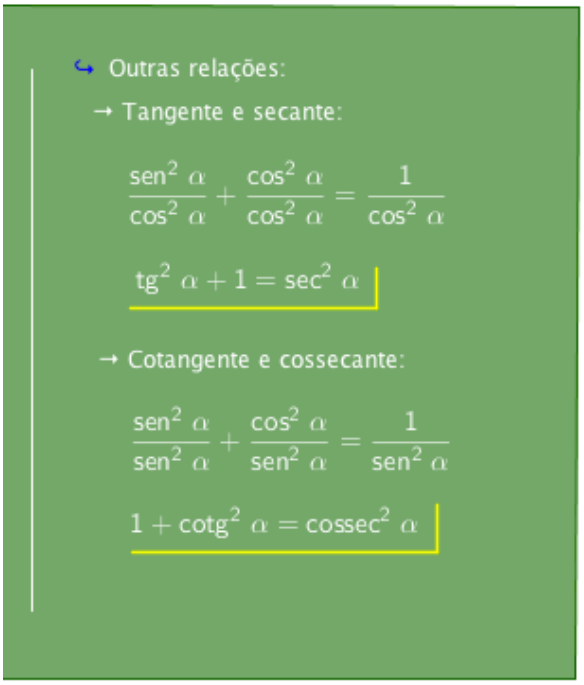


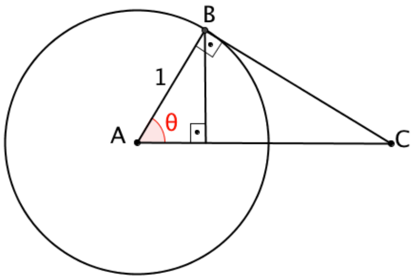
Figura 16: Relações envolvendo a tangente, secante, cossecante e cotangente.

É interessante, desde o início, mostrar a associação entre os nomes das razões trigonométrica e os segmentos referentes a elas. Esse apelo geométrico facilitará a compreensão do aluno quando trabalharmos com o círculo trigonométrico, servindo como investimento, para quando apresentarmos a trigonometria no Ensino Médio. Além disso, dar sentido aos nomes que estão sendo apresentados, possivelmente tornará a apresentação mais atraente.

Para fazer essa associação de maneira lúdica, vamos propor uma atividade para esse momento: **Atividade 01.** A explicação da mesma está no final do material.

Um exemplo que mostra a utilização dessa noção é uma questão apresentada em 2016, na competição internacional de matemática chamada QUANTA. Tive acesso a essa questão por meio do site do Colégio Pedro II, no link: http://www.cp2.g12.br/blog/matematica/2016/11/18/quiz-quanta-2016/

Exemplo:



Original:

Which identity is directly implied by applying the Pythagorean Theorem to the triangle ABC? Remember the Pythagorean Theorem says that: $AB^2 + BC^2 = AC^2$

(a) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
(b) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$
(c) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
(d) none of these

Tradução:

Qual identidade pode ser obtida diretamente pela aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo ABC? Lembre-se que o Teorema de Pitágoras diz que: $AB^2 + BC^2 = AC^2$

(a) $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$
(b) $1 + cotg^2\theta = cossec^2\theta$
(c) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$
(d) nenhum desses

Solução:

Observe que se apresentarmos as razões trigonométricas tangente e secante do modo que sugerimos, esperamos que os alunos associem BC a tangente de θ. Além disso, AC deverá ser associado a secante de θ. Assim:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \boxed{1 + tg^2\theta = \sec^2\theta}$$ Letra A

No capítulo 4 essa interpretação geométrica será útil para construir os gráficos das funções trigonométricas.

2.4 Razões trigonométricas de ângulos notáveis

2.4.1 Os ângulos de 30° e 60°

A próxima fase do nosso encadeamento lógico é obter os valores de seno, cosseno e tangente para alguns ângulos especiais. Podemos dizer aos alunos que esses cálculos podem ser feitos empiricamente, por meio de alguns programas computacionais, ou até calculadoras.

Para obter os ângulos de 30° e 60°, podemos considerar o triângulo equilátero ABC de lado 2 e lembrar aos alunos que, devido a invariância do seno, isso pode ser feito e serve como facilitador. Vamos traçar a altura AM, relativa ao lado BC e obter uma composição que nos permite determinar o seno, o cosseno e a tangente (além das razões inversas) sem a necessidade de qualquer ferramenta que não seja a matemática.

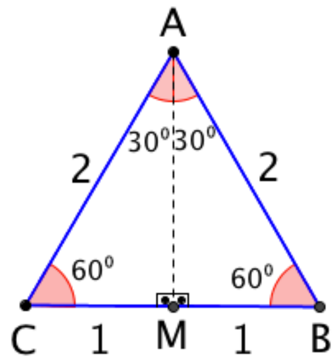


Figura 17

Pelo Teorema de Pitágoras, é possível concluir que a altura desse triângulo equilátero é $\sqrt{3}$. Assim:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Mostrar que a tangente poderia ser obtida pela razão entre o seno e o cosseno, é algo produtivo nesse momento, visto que essa lembrança ajudará em diversos exercícios sobre o tema. Uma sugestão para apresentar essa ideia é:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podemos agora repetir para o ângulo de 60° o mesmo processo feito para a obtenção das razões trigonométricas para um ângulo de 30°. Todavia, se torna mais construtivo utilizarmos o fato de 60° ser o complementar de 30°, em prol da obtenção de tais resultados, como segue:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}$$

Ao optarmos pela apresentação da tangente como a razão entre o seno e o cosseno, vale aproveitar a oportunidade para dizer que a tangente de 60° nada mais seria do que a tangente do complementar de 30°, isto é, a cotangente de 30°. Assim:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ$$

$$\therefore \ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow \ \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3} \ \Rightarrow \ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Ver essa construção de diferentes modos ajudará estudantes a solidificar os conhecimentos obtidos e em consequência disso, a probabilidade de aumentarmos significativamente a capacidade de manipular as razões trigonométricas. Uma sugestão mais direta para essa apresentação é dada na Figura 18.

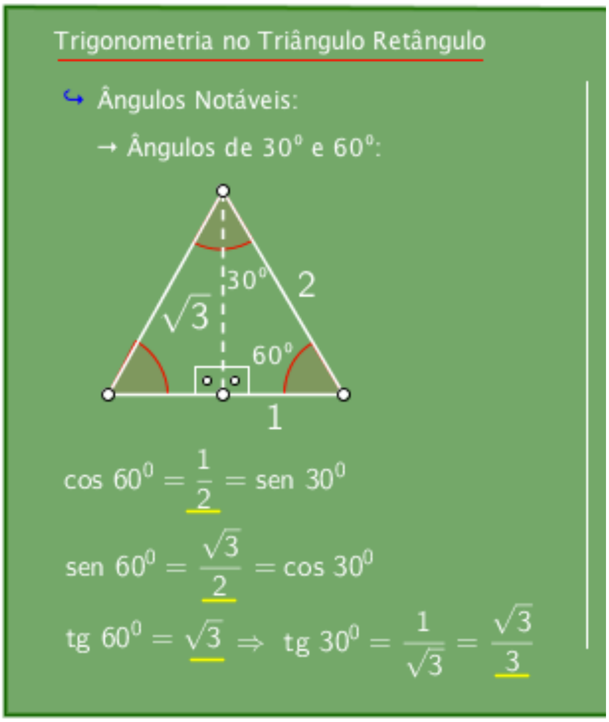


Figura 18: O seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60°

Uma observação útil é que no triângulo com ângulos iguais a 30º, 60º e 90º o cateto oposto a 30º é sempre metade da hipotenusa. Além disso, o cateto oposto ao 60º é sempre a metade da hipotenusa multiplicado por raiz de 3. Como esse é um triângulo muitíssimo frequente em problemas, ter em mente essa característica pode ser de grande ajuda para nossos alunos.

2.4.2 Ângulo de 45º

Vamos nesse caso usar como ferramenta para nossa demonstração das razões trigonométricas para o ângulo de 45º o quadrado ABCD, de lado 1, mais uma vez pelo argumento de invariância do seno.

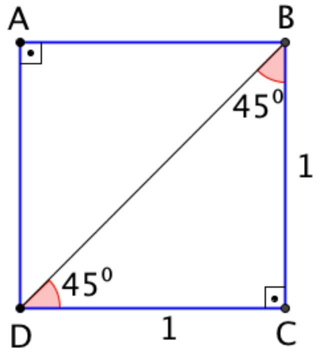


Figura 19

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos dizer que a diagonal desse quadrado é $\sqrt{2}$.

Assim, pela definição dada ao seno de um ângulo agudo no triângulo retângulo, podemos mostrar aos alunos que:

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Poderíamos repetir o razão apresentada para a obtenção do cosseno de 45º. Contudo, pode ser mais construtivo utilizarmos o fato de 45º ser o complementar do próprio 45º. Portanto:

$$\cos 45^{\circ} = \operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dizer que o cateto oposto e o cateto adjacente são iguais, ou dizer que o $\operatorname{sen} 45^{\circ} = \cos 45^{\circ}$ é equivalente para concluirmos que:

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{\operatorname{sen} 45^{\circ}}{\cos 45^{\circ}} = 1$$

Veja na Figura 20 uma sugestão para essa apresentação.

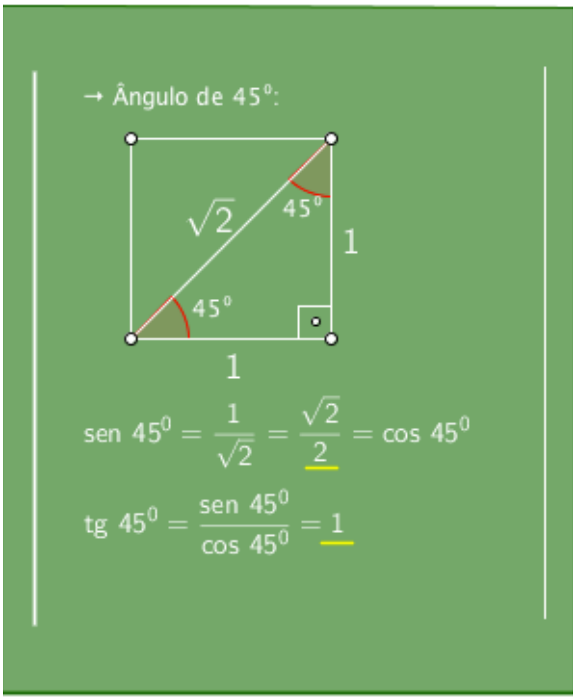


Figura 20: O seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45°.

Apesar de haver a possibilidade de se obter razões trigonométricas de outros ângulos, o que gera uma discussão mais complexa, esse não é o objetivo dessa apresentação. As razões obtidas nesse tópico são frequentemente utilizadas em problemas de trigonometria e podem ser organizadas em tabela, para que os alunos possam utilizar os resultados obtidos, quando necessário.

	30^o	45^o	60^o
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

A utilização de calculadoras é fundamental para a trigonometria no mundo real, visto que os ângulos notáveis que apresentamos não são úteis na prática. Mesmo assim, servem como base para o desenvolvimento dos alunos no assunto e uma sugestão para motivar esse estudo é desafiá-los a resolver o problema abaixo, que é um pouco mais complexo que os anteriores, já que o assunto já está sendo trabalhado a algum tempo e já tivemos exemplos mais simples inicialmente.

Exemplo:

Calculando a altura da Estátua da Liberdade do Brasil

Em plena BR 101, a Havan, uma das maiores redes de lojas de departamentos do Sul do Brasil, surpreende quem passa pela rodovia na altura da cidade de Barra Velha/SC. De longe se vê uma gigantesca réplica da Estátua da Liberdade, símbolo da empresa, inaugurada em comemoração aos seus 25 anos.
Disponível em: http://www.essemundoenosso.com.br/replica-da-estatua-da-liberdade-quase-duas-vezes-maior-que-o-cristo-redentor-e-atracao-em-santa-catarina/

Uma pessoa, com o objetivo de calcular a altura dessa réplica, procedeu da seguinte maneira:

Determinou, utilizando um teodolito, o ângulo de 60° abaixo explicitado no ponto B. Em seguida caminhou cerca de 25 metros de B até C. Finalmente determinou também, novamente fazendo uso de um teodolito, o ângulo de 45° em C.

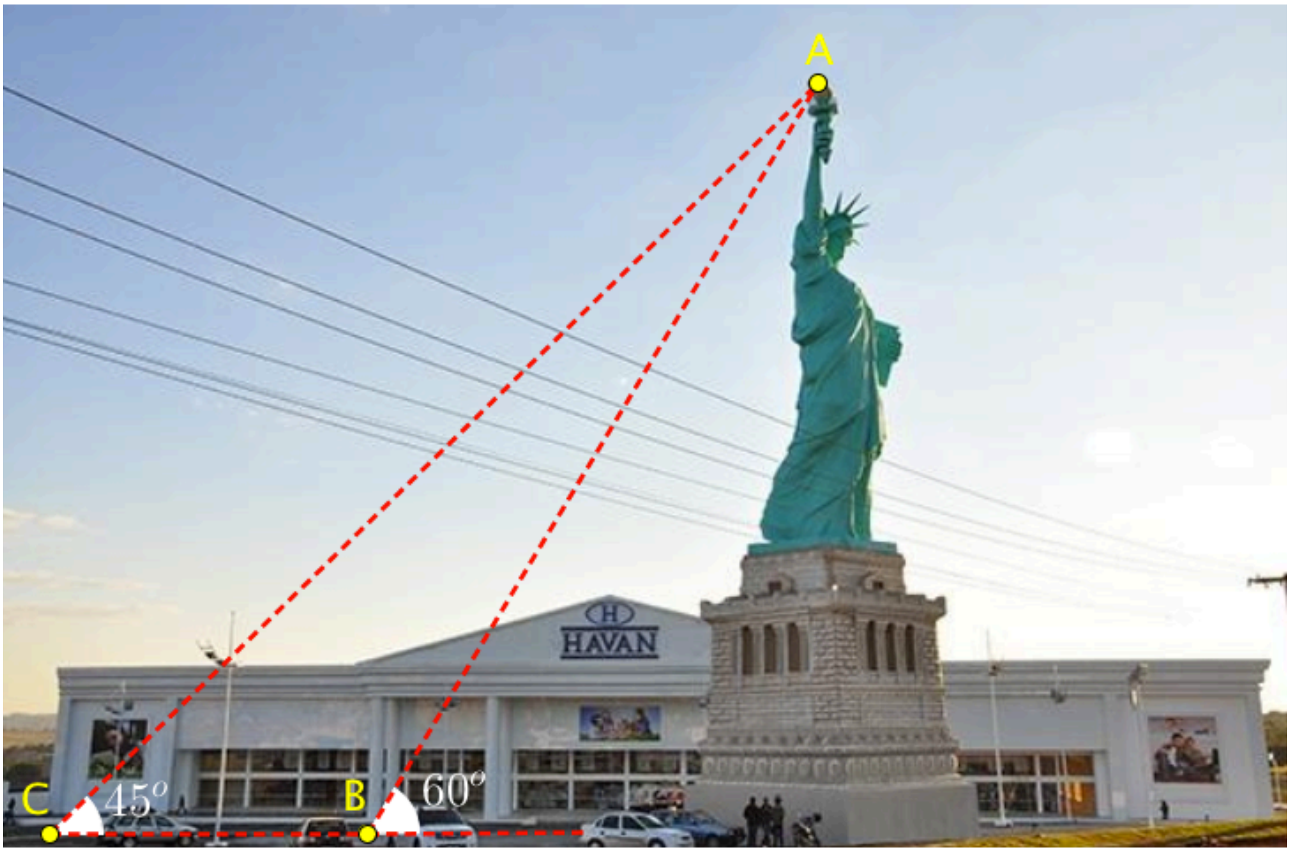


Figura 21

Sabendo que o teodolito tem 1 metro de altura e utilizando seus conhecimentos de trigonometria, a pessoa conseguiu determinar uma aproximação para a altura da réplica.

Você seria capaz de explicar como tal altura foi obtida?

Solução:

Antes de mais nada, vale esclarecer para os alunos que o teodolito é um instrumento utilizado para realizar medidas de ângulos horizontais e verticais.

Vamos sugerir inicialmente a figura abaixo, que esboça a visão que uma pessoa na porta da loja teria do problema:

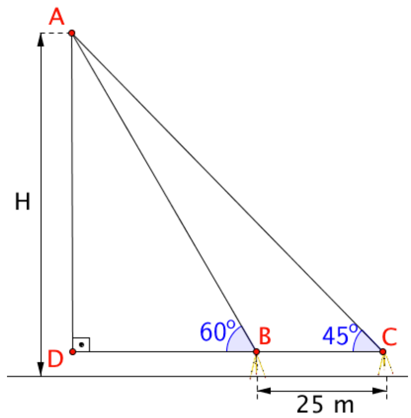


Figura 22

Como o ângulo $A\hat{C}B$ é 45°, podemos adiantar aos alunos que o triângulo ACD é isósceles. Assim:

$$AD = H - 1 \;\Rightarrow\; CD = H - 1$$

Como $BD = CD - BC$, podemos dizer a eles também que:

$$BD = (H-1) - 25 = H - 26$$

Podemos finalmente, por meio da tangente de 60°, determinar a seguinte equação:

$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{H-1}{H-26}$$

Relembrando a eles que $\text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$, podemos escrever a seguinte equação, para resolver o problema:

$$\sqrt{3} = \frac{H-1}{H-26}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}.(H-26) = H-1$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}H - 26\sqrt{3} = H-1$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}H - H = 26\sqrt{3} - 1$$
$$\Rightarrow H.(\sqrt{3}-1) = 26\sqrt{3} - 1$$
$$\Rightarrow H = \frac{26\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\boxed{\therefore H \cong 60 \text{ metros}}$$

No final de tudo, vamos ressaltar que estamos trabalhando com ângulos agudos, ou seja, limitados no intervalo]0°, 90°[, para que no exato momento em que a extensão para mais ângulos for feita, os alunos acompanhem a transição com maior naturalidade.

Além disso, para cada ângulo no intervalo]0º,90º[existe um e somente um número real associado a essas razões. A existência dessa bijeção que associa um dado ângulo nesse intervalo a um número real é o que nos permitirá discutir o conceito das funções seno, cosseno e tangente com propriedade. Isso permitirá que após essa transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, tenhamos uma continuidade melhor compreendida.

3 A transição para o Ensino Médio

Este capítulo é dedicado à transição propriamente dita da trigonometria do Ensino Fundamental para o Ensino Médio. A proposta feita no capítulo anterior fará com que uma circunferência não seja mais novidade para nossos alunos. Agora que iremos estudar a trigonometria na circunferência, a aceitação por parte deles, será possivelmente melhor. Daremos início a nossa transição estudando o comprimento de um arco. Medir um ângulo tanto em graus, quanto em radianos é também passo fundamental nesse início, visto que isso será utilizado em breve quando o círculo trigonométrico for introduzido.

Em seguida, apresentaremos o círculo trigonométrico, discutindo a orientação, origem, quadrantes e apresentaremos as razões trigonométricas no círculo trigonométrico. Além disso, são apresentadas sugestões em cada contexto para a apresentação do conteúdo aos alunos.

Conhecido o círculo trigonométrico e sabendo no primeiro quadrante associar as coordenadas de um ponto aos valores do seno e do cosseno de um arco, veremos tais comprimentos de arcos como números reais e apresentamos exemplos em outros quadrantes, que levam os alunos a entender as chamadas reduções ao primeiro quadrante de maneira menos técnica e mais leve. Faremos uma associação simples entre valores de arcos do primeiro quadrante com arcos nos quadrantes 2, 3 e 4. Deixar a apresentação inicial muito técnica pode impedir que parte dos alunos vejam a simplicidade do processo.

3.1 Relação entre Grau e Radiano

Para iniciarmos a transição, é interessante que a noção de radiano seja tão instintiva quanto a de grau. Vamos começar definindo a medida de um ângulo central α, em radianos. Essa medida é a razão entre o comprimento do arco relacionado a esse ângulo (l) e o raio (R) de circunferência em questão.

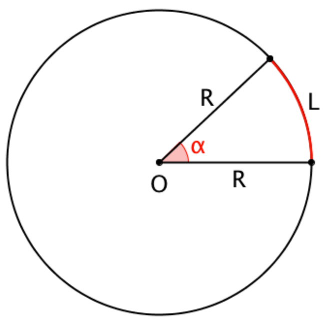


Figura 23

$$\boxed{\alpha = \frac{\text{comprimento do arco } \alpha}{\text{raio da circunferência}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{L}{R}}$$

Ao nos referirmos a medida de um arco, estaremos trabalhando com a medida angular, enquanto o comprimento de um arco nos remete a uma medida linear. No caso particular em que o comprimento de arco α for igual ao raio da circunferência, é possível obter 1 radiano, como segue:

$$\boxed{L = R \Rightarrow \alpha = \frac{R}{R} = 1 \text{ radiano}}$$

Vale ressaltar a sutileza entre o artigo definido e o artigo indefinido. O radiano é a razão entre o comprimento de um arco e o raio da circunferência, enquanto um radiano é a unidade de medida obtida quando o comprimento do arco é igual ao raio da circunferência.

Vamos então relacionar grau e radiano. Como o comprimento de uma circunferência é igual a $2\pi R$, podemos associar o ângulo de 360° a razão entre o comprimento da circunferência e o raio da mesma, obtendo 2π radianos. Obtemos com isso a equivalência abaixo:

$$\boxed{2\pi \text{ radianos} \equiv 360^\circ \quad \text{ou} \quad \pi \text{ radianos} \equiv 180^\circ}$$

O radiano está bem definido, tendo em vista que não depende da unidade de medida adotada, ou seja, do comprimento do raio da circunferência. Devemos deixar claro que o radiano não depende de π. Uma ideia para reforçar isso é dizer que o número real π aparece com frequência quando falamos de radiano, pelo fato de usarmos frações do comprimento da circunferência na maioria dos nossos cálculos. Apesar da regra de três simples ser uma possibilidade para associar grau e radiano, isso pode fazer com que a noção de radiano deixe de ser instintiva, como propomos inicialmente.

Caso o conceito não seja bem compreendido, a confusão por parte dos alunos será frequente, o que poderá comprometer toda a nossa tentativa de tornar a transição da trigonometria o mais natural e proveitosa possível. Uma sugestão que resume o que foi proposta segue na Figura 24.

Figura 24: Arco de circunferência e a conversão grau/radiano

Uma noção que pode ser importante para os alunos é a aproximação de 1 radiano em graus. Deixamos a sugestão abaixo visando esse fim e também para exercitar a conversão grau/radiano.

Exemplo:

Determine uma aproximação, em graus, para um arco cuja medida é de 1 radiano.

Solução:

Por meio de uma regra de três simples, temos:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{1} \Rightarrow x = \frac{180}{\pi} \cong \frac{180}{3{,}14}$$

$$\boxed{\therefore x \cong 57^o}$$

3.2 Construção do Círculo Trigonométrico

Apresentar aos alunos desde já um círculo de raio unitário, torna o conteúdo mais leve, o que em geral tem melhor aceitação por parte deles. Por esse motivo, as sugestões de apresentação da Figura 36 e nossa sequência serão feitas dessa forma.

3.2.1 Considerações iniciais:

Vamos inicialmente chamar nossa circunferência principal de C_0, onde ela terá raio 1 e estará centrada na origem O(0,0) do plano cartesiano.

Propor aos alunos que o ponto A(1,0) será a origem de C_0, e que a circunferência está sendo percorrida no sentido positivo quando ela é percorrida partindo do ponto A e no sentido anti-horário pode ser feito de modo natural. Para isso, é importante que após essas considerações iniciais, fique claro que o ponto A e o sentido escolhido poderiam ser outros, mas podemos também convencê-los de que há uma conveniência no fato do primeiro quadrante com o qual trabalharemos com as considerações apresentadas, possuir todos os pontos com coordenadas positivas.

Acaba sendo uma consequência dizer que ela é percorrida no sentido negativo quando o ponto de partida é o ponto A e o seu sentido é o horário. Sendo assim, o ponto A forma um arco com medida 0 radiano e os pontos B, C, D e E formam arcos, em radianos, que possuem medidas $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, respectivamente.

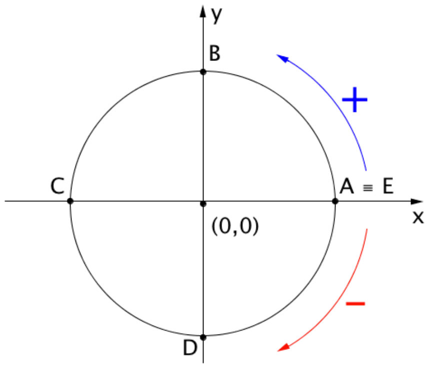


Figura 25

Podemos também justificar essa configuração usando o círculo e a reta real. Se o círculo for colocado de modo a tangenciar a origem da reta real, ao iniciar uma rotação no sentido anti-horário, os valores positivos da reta estarão sobrepondo o perímetro do círculo. Caso rolarmos no sentido horário, estaríamos sobrepondo o perímetro com valores negativos. Nesse momento o professor pode mostrar usando um círculo e um barbante graduado valores de radiano que não dependessem de π, como mostra a Figura 26.

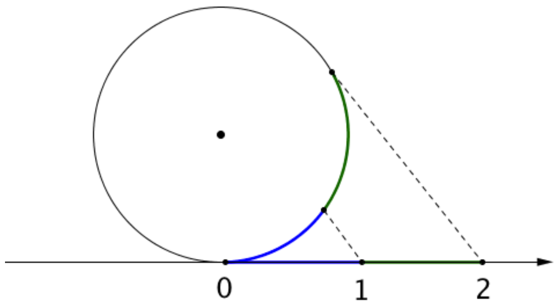


Figura 26

Apesar de A e E serem coincidentes, para o primeiro não foi percorrida nenhuma volta, enquanto para o segundo foi percorrida uma volta completa. Chamaremos esses arcos de congruentes. Podemos ainda observar que dado um arco qualquer, ele possui um arco congruente no intervalo de $[0,2\pi[$ e trataremos qualquer desses arcos associando-os sempre aos arcos no intervalo de $[0,2\pi[$.

Na construção inicial da circunferência C_0, dividimos involuntariamente nossa circunferência em quatro partes. Tais partes, podem ser convenientemente chamadas de quadrantes, onde:

Primeiro quadrante: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

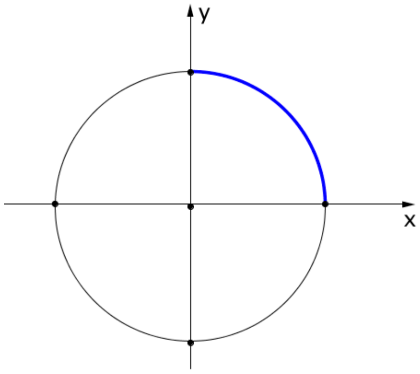


Figura 27

Segundo quadrante: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

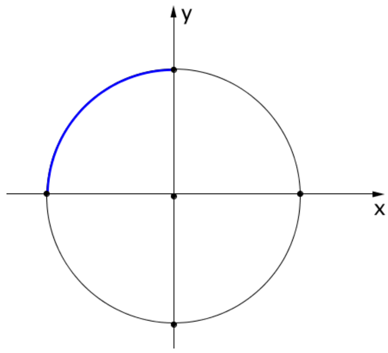


Figura 28

Terceiro quadrante: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

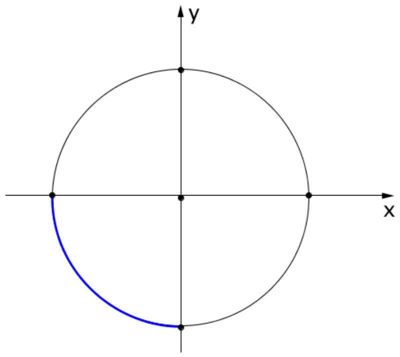


Figura 29

Quarto quadrante: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

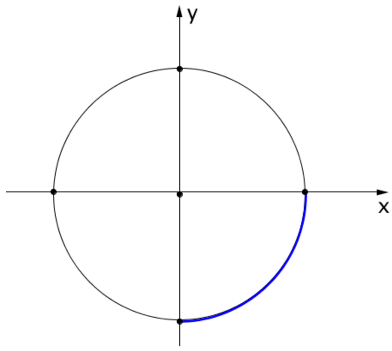


Figura 30

Para discutir com os alunos o que ocorre se um ponto não estiver em algum dos quadrantes, podemos apresentar e esclarecer a definição abaixo:

Se $\alpha = \frac{k\pi}{2}; k \in Z$, então dizemos que o ponto pertence a algum dos eixos.

3.2.2 Mudança de coordenadas:

Vamos associar cada ponto (x, y) do plano cartesiano que pertence a C_0, à medida de um arco α de C_0. Além disso, faremos uma correspondência entre o comprimento de um arco e um número real, visando calcular o seno, o cosseno e a tangente de um número real. Determinaremos as coordenadas de pontos genéricos em cada quadrante, justamente para mostrar a viabilidade da associação proposta em qualquer deles.

Análise de um ponto no primeiro quadrante:

Ao escolhermos um ponto P(x,y) pertencente ao primeiro quadrante, é possível obter sua projeção no eixo das abscissas (chamaremos P'), como segue:

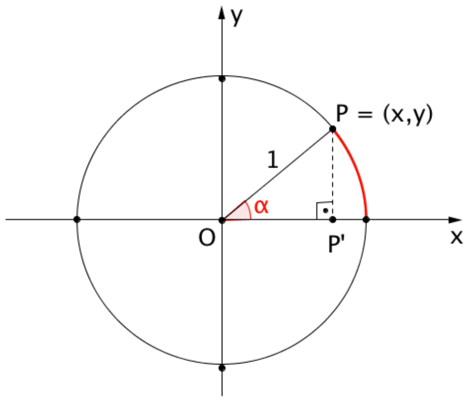


Figura 31

Por meio das razões trigonométricas definidas para o triângulo retângulo, podemos apresentar aos alunos as medidas de PP' e OP':

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PP'}{1} \Rightarrow PP' = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{OP'}{1} \Rightarrow OP' = \cos\alpha$$

Com isso, basta evidenciar o fato de que as coordenadas de P podem ser escritas no formato abaixo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PP'}{1} \Rightarrow P = (x,y) = (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$$

Para os outros quadrantes vamos fazer uma analise análoga, como segue:

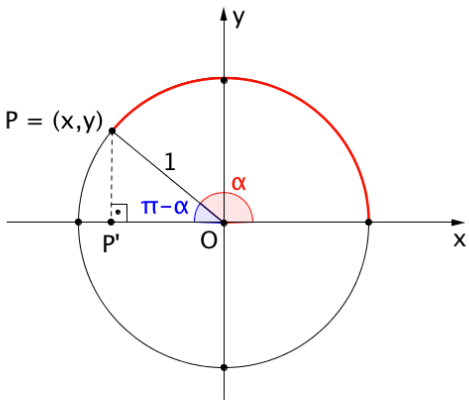


Figura 32

$$\boxed{\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \frac{PP'}{1} \Rightarrow PP' = \operatorname{sen}(\pi-\alpha) \quad \text{e} \quad \cos(\pi-\alpha) = \frac{OP'}{1} \Rightarrow OP' = \cos(\pi-\alpha)}$$

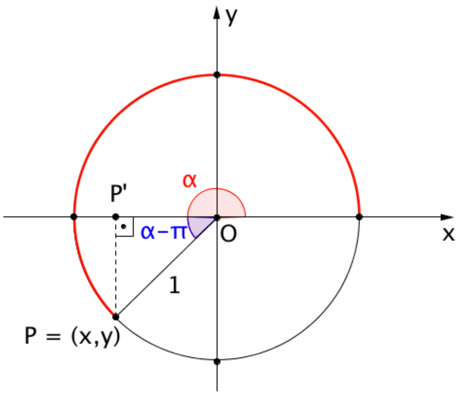


Figura 33

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\pi)=\frac{PP'}{1} \Rightarrow PP'=\operatorname{sen}(\alpha-\pi) \quad \text{e} \quad \cos(\alpha-\pi)=\frac{OP'}{1} \Rightarrow OP'=\cos(\alpha-\pi)}$$

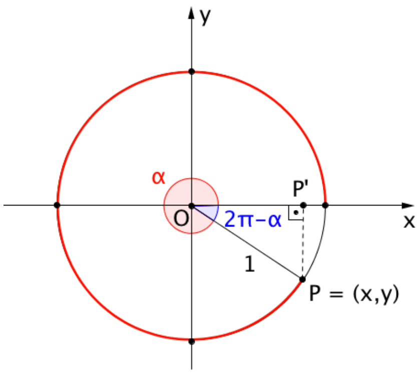


Figura 34

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=\frac{PP'}{1} \Rightarrow PP'=\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) \quad \text{e} \quad \cos(2\pi-\alpha)=\frac{OP'}{1} \Rightarrow OP'=\cos(2\pi-\alpha)}$$

Vale ressaltar o fato de que os arcos $\pi-\alpha$, $\alpha-\pi$ e $2\pi-\alpha$ são todos correspondentes a ângulos agudos nos casos anteriormente analisados e, portanto, faz sentido obtermos as razões trigonométricas no triângulo retângulo nas figuras anteriores.

Vimos que quase todos os pontos podem ser expressos usando diretamente a definição de seno e cosseno em um triangulo retângulo, pois independente do quadrante que o arco se encontre, é sempre possível associar a este um arco do primeiro quadrante. Chamaremos esse método de redução ao primeiro quadrante.

Os únicos pontos que não podemos associar diretamente são os pontos sobre os eixos. Porém, nesse caso, podemos mostrar a nossos alunos a associação entre α e as coordenadas do ponto sobre a circunferência, deixando a ideia de associar as coordenadas dos pontos na circunferência aos valores do seno e do cosseno de qualquer número real, como segue:

α	(x, y)
0	(1, 0)
$\pi/2$	(0. 1)
π	(-1, 0)
$3\pi/2$	(0, -1)

Certamente a Função de Euler torna essa definição precisa, mas o trabalho visa tornar a apresentação menos formal e mais acessível ao aluno.

Chamaremos de **Círculo Trigonométrico** um círculo C com todas as características e definições anteriormente apresentadas e contido em um plano cujo eixo das abscissas seja chamado eixo cosseno e o eixo das ordenadas seja chamado eixo seno. Veja a Figura 35.

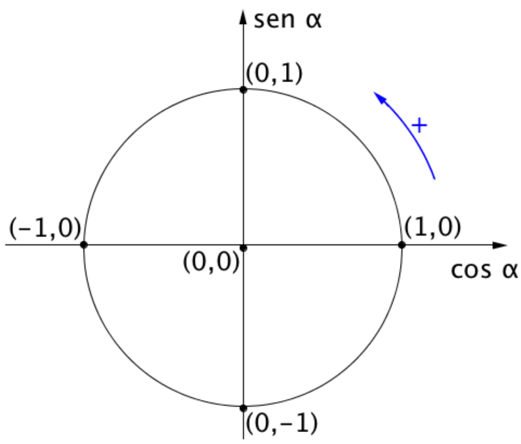


Figura 35

A associação entre o comprimento de um dado arco e um número real será importante quando analisarmos as funções trigonométricas, justamente para que tenhamos um domínio real.

Considere, por exemplo, o $\text{sen}\,30^\circ$. Calcular esse seno, equivale a calcular o $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$, onde $\frac{\pi}{6}$ é o arco da circunferência cujo ângulo central mede 30º. O valor do seno do número real $\frac{\pi}{6}$ será justamente $\frac{1}{2}$, ou seja, construímos o seguinte encadeamento lógico:

Grau $\rightarrow$ Radiano $\rightarrow$ Número real $\rightarrow$ Valor do seno desse número real

Para o cosseno e a tangente a sequência lógica é análoga. Veja na Figura 36 uma sugestão para essa apresentação.

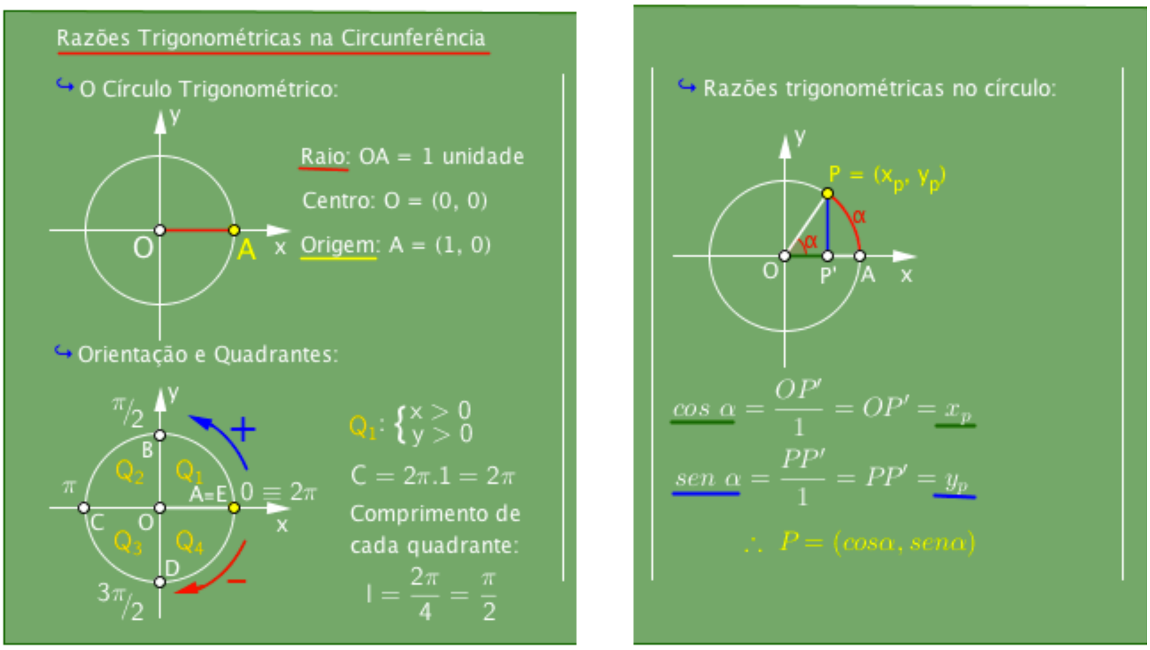


Figura 36: O círculo trigonométrico e as razões trigonométricas.

3.2.3 Redução ao 1° Quadrante

Reduzir um ângulo ao primeiro quadrante, consiste em associarmos tal ângulo a um do primeiro quadrante, cujas razões trigonométricas sejam as mesmas em valor absoluto. Faremos uso de um processo simples de construção de triângulos retângulos em que o módulo das coordenadas coincida com as razões trigonométricas, como esboçamos anteriormente.

Primeiramente, é sugerido que se localize o quadrante ao qual o ângulo em questão pertence. Feito isso, o processo pode se tornar sempre o mesmo. Podemos projetar o ponto P sobre o eixo das abscissas e essa projeção nos dará o ponto P'. Com os pontos P, O e P' formaremos um triângulo retângulo em P' e com os seus catetos é possível obter os valores de seno e cosseno, os quais serão o módulo das coordenadas.

Para essa apresentação, vamos sugerir alguns exemplos que podem servir para a explicação de como colocar em prática o que acabamos de descrever. Variando os quadrantes, as razões trigonométricas e o pedido em cada exemplo, deixaremos os alunos cada vez mais confortáveis em trabalhar com o círculo trigonométrico. Trataremos cada um dos arcos apresentados como números reais, no intuito de familiarizar os alunos com o cálculo do seno, cosseno e tangente de um número real.

Exemplo 1:

Calcule o seno e o cosseno de $\frac{2\pi}{3}$.

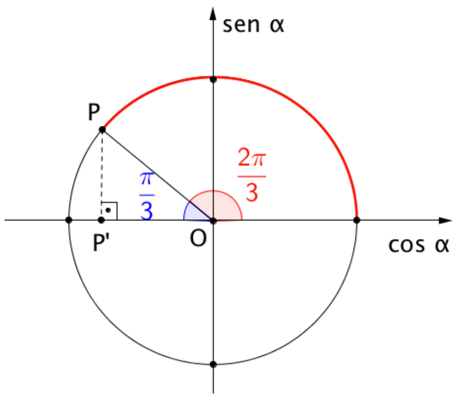


Figura 37

Primeiramente, vamos evidenciar que $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$, isto é, $\frac{2\pi}{3}$ é um número real associado a um arco do segundo quadrante.

Em seguida, podemos analisar o sinal do seno e do cosseno de $\frac{2\pi}{3}$: O seno é positivo e o cosseno é negativo.

Finalmente, como $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, podemos dizer que:

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Exemplo 2:

Calcule a tangente e a cotangente de $\frac{5\pi}{4}$.

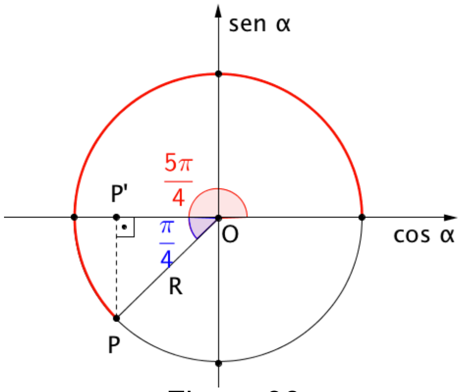


Figura 38

Primeiramente, vamos evidenciar que $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$, isto é, $\frac{5\pi}{4}$ é um número real associado a um arco do terceiro quadrante.

Em seguida, podemos analisar o sinal da tangente e da cotangente de $\frac{5\pi}{4}$: A tangente é positiva (já que o seno e o cosseno são negativos) e a cotangente, que é seu inverso, também é positiva.

Finalmente, como $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$, podemos dizer que:

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

e

$$\operatorname{cotg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = 1$$

Exemplo 3:

Calcule a secante e a cossecante de $\frac{5\pi}{3}$.

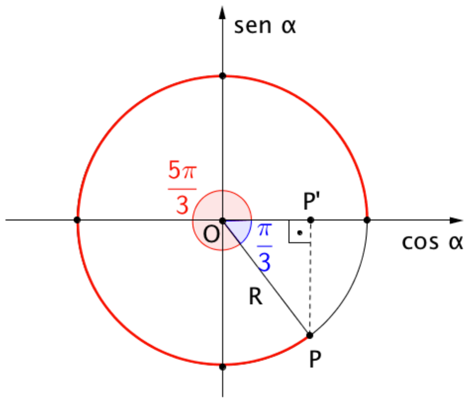


Figura 39

Primeiramente, vamos evidenciar que $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$, isto é, $\frac{5\pi}{3}$ é um número real associado a um arco do quarto quadrante.

Em seguida, podemos analisar o sinal da secante e da cossecante de $\frac{5\pi}{3}$: A secante é positiva (já que o cosseno é positivo) e a cossecante é negativa (já que o seno é negativo).

Finalmente, como $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, podemos dizer que:

$$\sec\frac{5\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e

$$\operatorname{cossec}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{cossec}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 4:

Calcule o seno de 5π.

Como $5\pi > 2\pi$, temos que a circunferência foi percorrida mais de uma vez. Devemos mostrar como descobrir o arco côngruo a 5π.

Em cada volta completa percorremos 2π radianos. Como $5\pi = 2.(2\pi) + \pi$, foram percorridas duas voltas e mais um arco de π radianos.

Vamos dizer que 5π é um número real que está associado a um arco de π radianos.

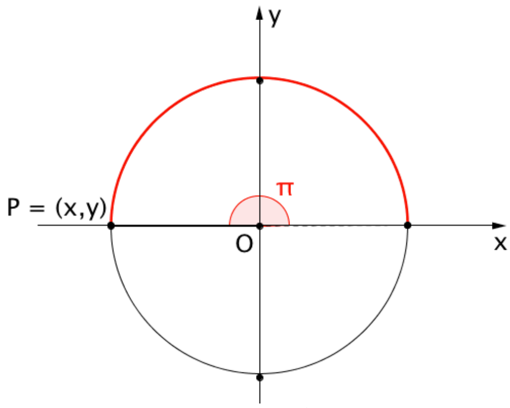


Figura 40

Nos casos que o valor de 5π excede 2π, o processo de obtenção do arco côngruo será sempre o mesmo. Assim:

$$\text{sen}\,5\pi = \text{sen}\,\pi = 0$$

<u>Exemplo 5</u>:

Calcule o cosseno de $-\frac{5\pi}{4}$.

Até o momento, ainda não calculamos nenhuma razão trigonométrica onde o ângulo é negativo. Nesses casos, devemos lembrar que o sinal indica apenas o sentido em que a circunferência deve ser percorrida. De modo geral, o processo continua sendo o mesmo.

Quando percorremos um arco de $\frac{5\pi}{4}$ radianos no sentido positivo, temos um arco correspondente ao terceiro quadrante, mas no sentido negativo, obtemos uma arco do segundo quadrante. Isso se deve ao sentido do giro ser horário. Como $2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, temos:

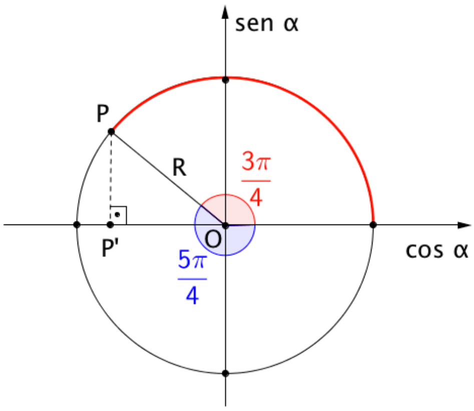


Figura 41

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

É fácil perceber por meio dos exemplos acima, que o processo de obtenção das razões trigonométricas nos quadrantes, nada mais é que buscar um triângulo congruente a algum do 1° quadrante e aplicar suas respectivas definições. Além disso, é importante deixar claro que estamos determinando o seno e o cosseno de valores reais quaisquer.

Após introduzir a lógica para a obtenção dos valores de seno e cosseno, indicamos apresentar os correspondentes horizontal, vertical e diagonal de cada um dos ângulos notáveis do primeiro quadrante e explicar aos alunos que é fácil obter o seno, o cosseno e consequentemente a tangente de cada um dos ângulos apresentados. Veja a Figura 42.

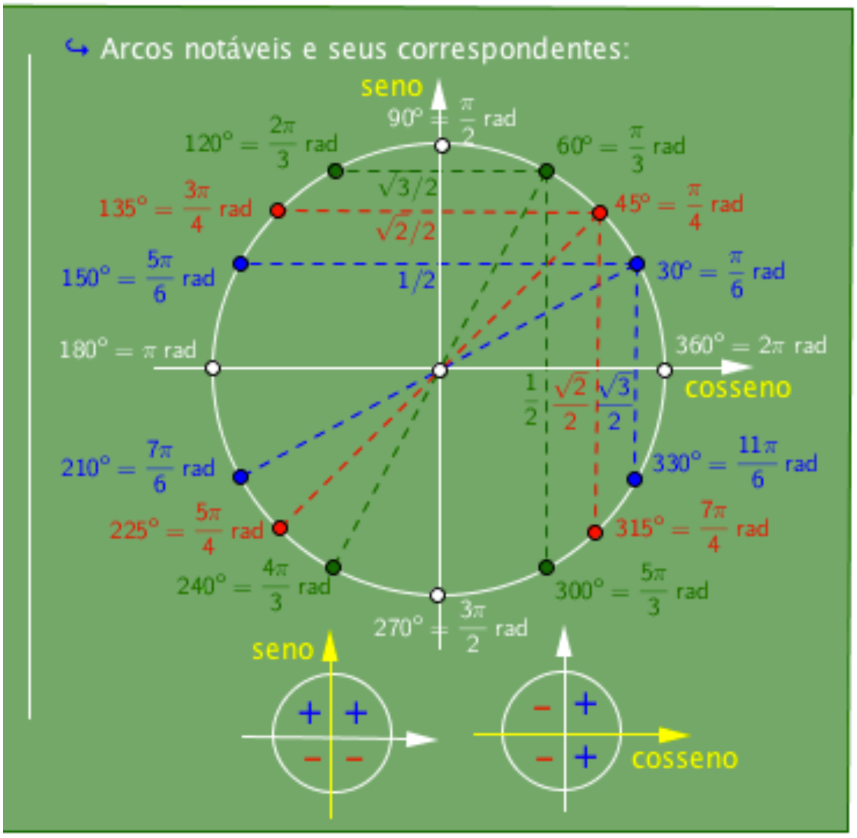


Figura 42: Apresentação dos arcos notáveis e seus correspondentes horizontais, verticais e diagonais.

Muitos dos problemas sobre o assunto envolverão tais correspondentes e essa apresentação pode ser bastante útil para os alunos começarem a se familiarizar com eles.

4 A continuação da trigonometria no Ensino Médio

Nesse momento, a transição imediata da trigonometria do Ensino Fundamental para o Ensino Médio já foi feita. Nossa intenção nesse capítulo passa a ser apresentar alguns dos conteúdos que dão sequência a trigonometria no Ensino Médio, discutindo possibilidades para a abordagem dos mesmos.

Além das funções seno, cosseno e tangente e seus respectivos gráficos, discutiremos também a apresentação das operações com arcos e as possibilidades para conduzir esse estudo.

4.1 Funções Trigonométricas

Esse é um estudo que está diretamente ligado a transição proposta no trabalho, motivo pelo qual iremos discuti-lo. Apresentaremos os detalhes sobre as funções seno e cosseno, além de propostas para a apresentação das mesmas.

Iniciaremos definindo as funções trigonométricas. Em seguida, apresentaremos o gráfico de cada uma delas. Durante a analise gráfica, discutiremos o período, a imagem e detalhes relevantes para melhor aproveitamento dos alunos nesse estudo.

4.1.1 Função seno:

Vimos que para qualquer número real x, podemos calcular o valor do seno de x. Sendo assim, o nosso domínio será o conjunto dos números reais e usaremos essa razão trigonométrica como lei de formação da função que definiremos a seguir:

$$\boxed{\begin{array}{l} f : IR \rightarrow IR \\ \quad x \rightarrow f(x) = \operatorname{sen} x \end{array}}$$

<u>O gráfico da Função Seno</u>:

Primeiramente, pode ser discutido com os alunos, informalmente, o que acontece em cada um dos intervalos citados abaixo:

- No intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a função é crescente e varia de 0 a 1.
- No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, a função é decrescente e varia de 1 a -1.
- No intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ a função é crescente e varia de -1 a 0.
-

Vale ressaltar após essa análise que para valores de x maiores que 2π estaremos trabalhando com arcos congruentes, que nos darão consequentemente os mesmos valores já obtidos no primeiro ciclo, isto é, a análise se repete periodicamente. Com isso poderemos dizer que a Função Seno é periódica e que o período da mesma é 2π.

Período da Função Seno: 2π

Aprofundando os conhecimentos: Definição de uma função periódica

Uma função f: IR → IR é dita periódica, se existe um número real T > 0, menor possível, tal que f(x + T) = f(x) para todo x real.

Chamaremos T de período da função.

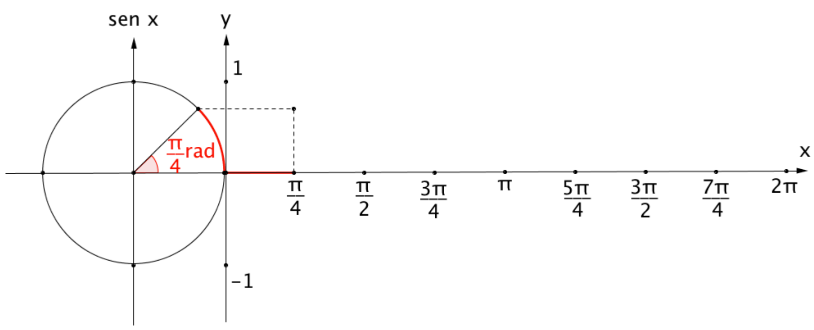
Podemos fazer com que os alunos percebam, usando o circulo trigonométrico, que os valores de máximo e mínimo assumidos pela função seno são 1, -1, respectivamente. Consequentemente, a imagem dessa função é o intervalo [-1,1].

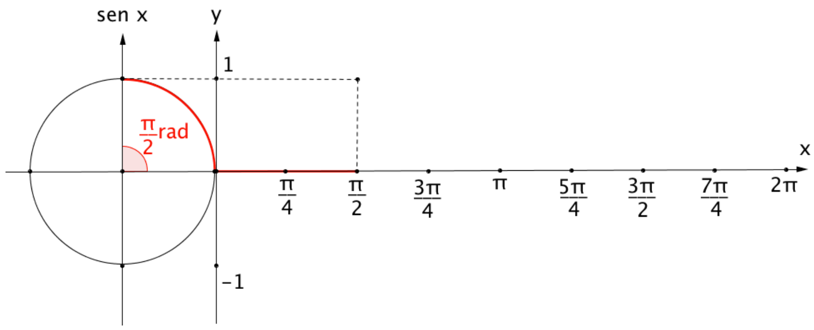
Imagem da Função Seno: [-1,1]

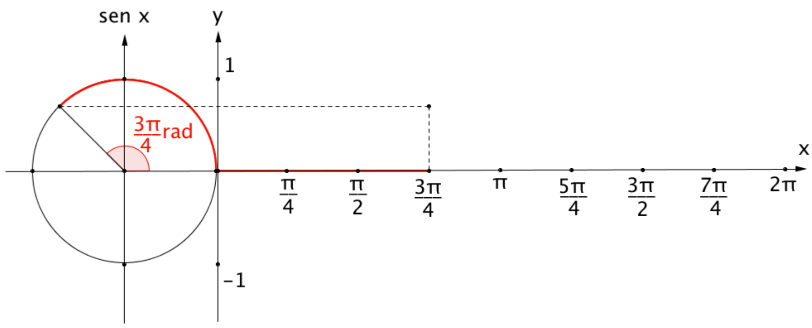
Os alunos no Ensino Médio não possuem as ferramentas matemáticas necessárias para o esboço do gráfico de uma função como essa. Daremos agora uma sugestão para construção desse gráfico. A maneira como faremos essa construção pode vir a facilitar o entendimento do aluno e mostrar o encadeamento lógico entre o ângulo associado ao comprimento de um arco, um número real e o valor da função aferido no círculo trigonométrico.

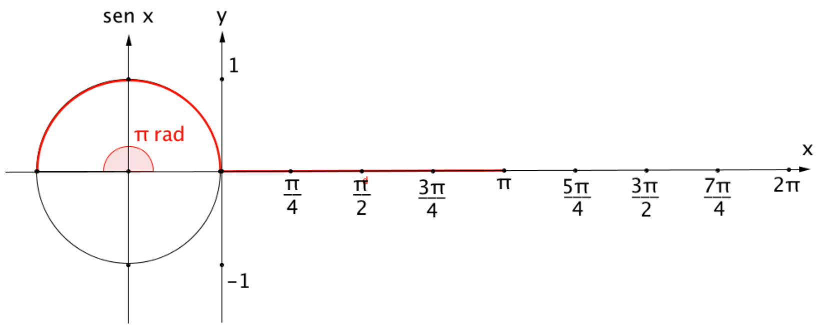
Em geral, para a construção do gráfico com os alunos, a associação entre o número real e o valor da função poderia ser colocada em uma tabela, para posteriormente marcarmos pontos no plano cartesiano. O fato é que pode ser mais produtivo para essa função em especial, ao invés disso, detalharmos a marcação dos pontos usando como referência o círculo trigonométrico a esquerda do gráfico.

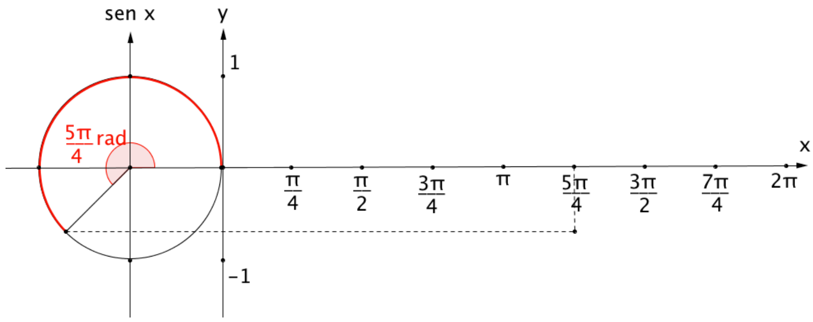
Podemos sugerir aos alunos alguns dos ângulos já conhecidos, lembrar que poderiam ser analisados em radianos e que, se colocados no eixo das abscissas, há uma correspondência entre o ângulo analisado e o comprimento de um arco, ou seja, associamos o ângulo a um número real. A Figura 43 apresenta uma sequência passo a passo da construção do gráfico da função seno (chamado senóide).

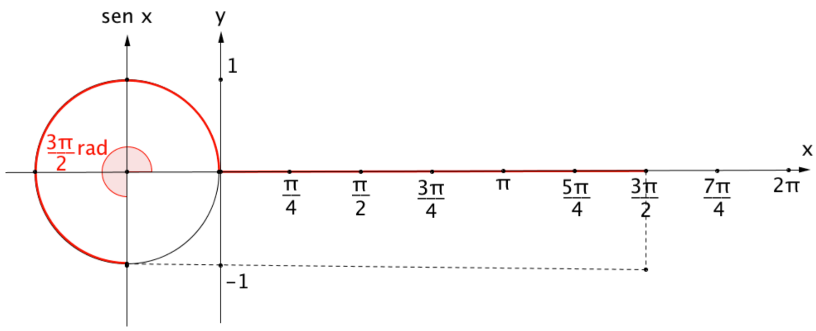


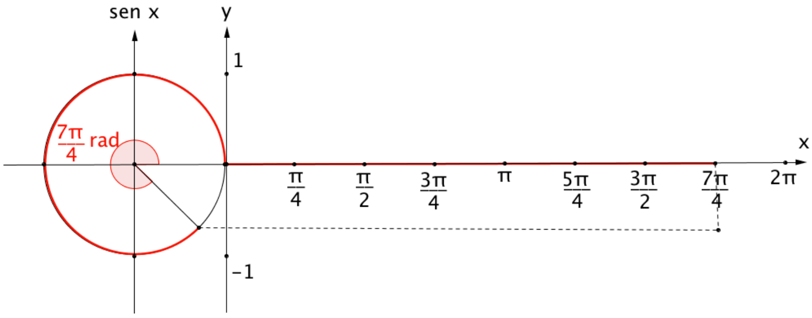

sen x
y
1
−1
x
π/2 rad
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π


sen x
y
1
−1
x
3π/4 rad
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π


sen x
y
1
−1
x
π rad
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π


sen x
y
1
−1
x
5π/4 rad
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π


sen x
y
1
−1
x
3π/2 rad
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π



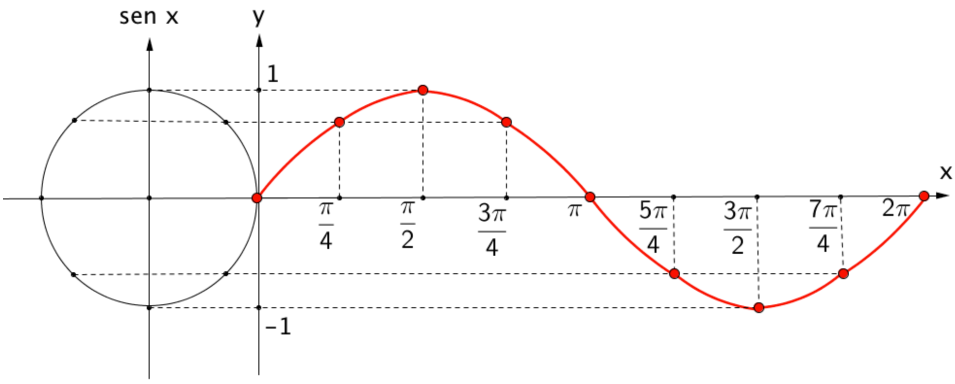


Figura 43

Caso haja a possibilidade de mostrar o resultado obtido, por meio de ferramentas computacionais, é certamente um ótimo caminho. A utilização de uma calculadora para a obtenção dos resultados também é indicada.

Aprofundando os conhecimentos: A não linearidade do gráfico da Função Seno.

Podemos, por meio de semelhança entre os triângulos AB'B e AC'C, mostrar que o gráfico da função seno não pode ser composto por segmentos de reta.

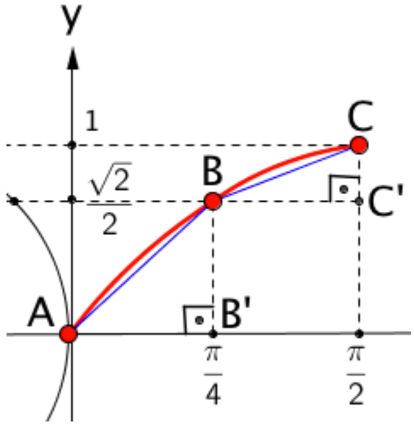


Figura 44

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{BC'}{CC'} \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2-\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = 1 \text{ (Absurdo)}$$

Podemos ser mais diretos e apenas dizer que $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$ é diferente de $1-\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}3$, acarretando na taxa de variação ser diferente para intervalos de deslocamentos iguais no eixo x.

Uma opção para concluir a não linearidade, sem nem mesmo utilizar o gráfico é, por exemplo, mostrar que a sequência $(sen30^o,\ sen45^o,\ sen60^o)$ não é uma Progressão Aritmética, ou seja, mostrar que $\frac{sen30^o + sen60^0}{2} \neq sen45^o$.

Aprofundando os conhecimentos: A concavidade da Função Seno.

Por sugestão do professor Alan Prata, resolvi apresentar a demonstração referente a concavidade da função seno.

Proposição:

Para A e B no intervalo $[0,\pi]$, $\dfrac{\text{sen A} + \text{sen B}}{2} \leq \text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

Prova:

$$\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

Fazendo $A = \dfrac{x+y}{2}$ e $B = \dfrac{x-y}{2}$, temos:

$$\text{sen A} + \text{sen B} = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \leq 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Proposição: A função f(x) = sen x é côncava em $[0,\pi]$.

Prova:

Note que $\text{sen}\left(\dfrac{A+3B}{4}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\frac{A+B}{2}+B}{2}\right) \geq \dfrac{\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) + \text{sen}B}{2} = \dfrac{\text{sen A}}{4} + \dfrac{3\,\text{sen B}}{4}$.

Trocando A por B segue que, para $t \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$:

$$\text{sen}\left[(1-t).A + t.B\right] \geq (1-t).\text{sen A} + t.\text{sen B} \quad (*)$$

Por indução em k, continua válida para todo t da forma $\dfrac{m}{2^k}$, com $0 \leq m \leq 2^k$, m inteiro.

Como todo real em $[0,1]$ é limite de números dessa forma, temos que $(*)$ continua válida para $t \in [0,1]$.

4.1.2 Função cosseno:

Para a Função Cosseno, lembraremos novamente do domínio, do contradomínio e da lei de formação. Além disso, dado um número real x, podemos sempre calcular o valor de cosseno de x, já que ele pode ser obtido por meio do seno de x.

Podemos dizer de modo análogo que o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais e usaremos essa razão trigonométrica como lei de formação da função que definiremos:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: IR \rightarrow IR \\ \quad x \ \rightarrow f(x) = \cos x \end{array}}$$

<u>Gráfico da Função Cosseno</u>:

A discussão pode ser iniciada novamente pela análise de cada um dos intervalos abaixo:

- No intervalo [0, π], a função é decrescente e varia de 1 a -1.
- No intervalo [π, 2π], a função é crescente e varia de -1 a 1.

Novamente, para valores de x superiores a 2π, estaremos trabalhando com arcos congruentes, que nos darão consequentemente os mesmos valores já obtidos no primeiro ciclo. Percebemos assim que assim como a Função Seno, a Função Cosseno é periódica de período 2π.

Os valores de máximo e mínimo que a função cosseno assume também são 1, -1, respectivamente. Logo, a imagem de ambas as funções vistas até o momento é o intervalo [-1,1]. Em suma, podemos dizer que:

$\boxed{\text{Período da Função Cosseno: } 2\pi}$

$\boxed{\text{Imagem da Função Cosseno: } [-1,1]}$

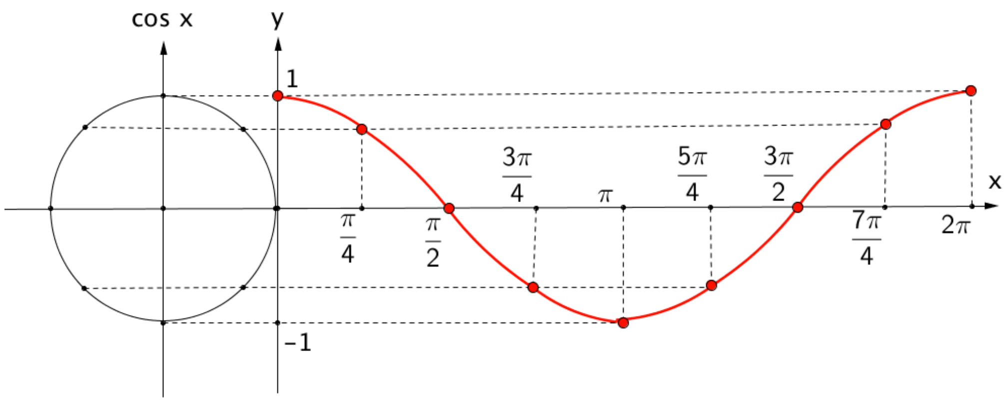


Figura 45

Aprofundando os conhecimentos: O gráfico da função cosseno é uma translação horizontal do gráfico da Função Seno.

Há uma possibilidade interessante nesse momento, que é criar uma forma de introduzir o próximo assunto (Operações com arcos) e utilizar isso para beneficiar o atual estudo gráfico. A sugestão é apresentada abaixo:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.\ \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\alpha.\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos\alpha.\ 0 + \operatorname{sen}\alpha.\ 1 = \operatorname{sen}\alpha$$

4.1.3 Função Tangente

Considere um número real x associado ao comprimento do arco AP no círculo trigonométrico abaixo. O comprimento do segmento AT será, por construção, numericamente igual a tangente de x, ou seja, AT = tg x.

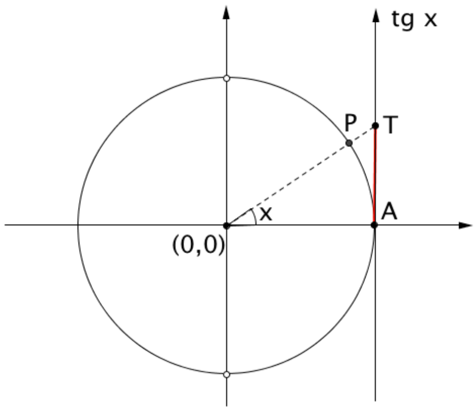


Figura 46

Definiremos a função tangente da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: D \rightarrow IR \\ \quad x \ \rightarrow f(x) = \operatorname{tg} x \end{array}}$$

onde: $D = \left\{ x \in IR \ / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}$

Relembrar o modo como devemos ler o conjunto acima é o passo seguinte dessa apresentação. Mostre aos alunos que o segmento AT simplesmente não existiria caso as restrições apresentadas estivessem fora do domínio da função.

<u>Gráfico da Função Tangente</u>:

Para esse gráfico, iniciamos a discussão mostrando que independente do quadrante analisado, a função é sempre crescente. Após isso, podemos evidenciar aos alunos que:

- Nos quadrantes ímpares a função assume valores positivos.
- Nos quadrantes pares a função assume valores negativos.
- Para x = kπ, onde k $\in$ Z, a função se anula.

Período da Função Tangente: π

Imagem da Função Tangente: IR

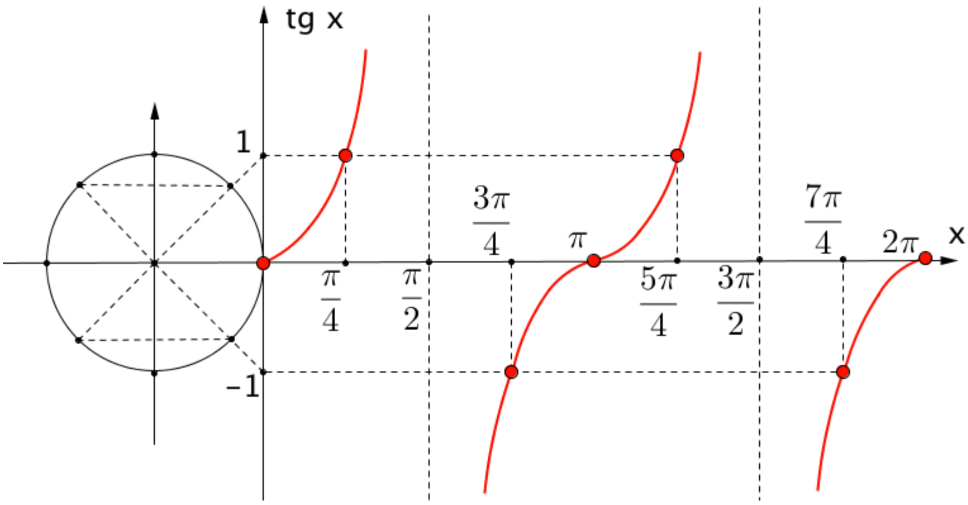


Figura 47

No intuito de que os alunos sejam apresentados as possíveis alterações que um gráfico da forma f(x) = A + B.sen(Cx + D) pode sofrer, propomos outra atividade para esse momento: **Atividade 02.** A explicação da mesma está no final do material.

As possibilidades são muitas para esse momento. Além de ampliar a análise proposta na Atividade 2 para as funções cosseno ou até tangente, podemos ainda analisar os gráficos das funções secante, cossecante e cotangente. São passos mais avançados e que podem gerar bons resultados, mas demandam mais tempo.

4.2 Adição e Subtração de arcos

Pela suposta dificuldade de demonstrar os resultados sobre adição e subtração de arcos, alguns professores possivelmente optam em apenas apresentá-los e exercitá-los por meio de exemplos de aplicação. Isso é justamente o que nos motivou a escrever uma sugestão que visa tornar viável demonstrar pelo menos uma das relações, para que o assunto não seja apresentado de maneira tão direta. Há outras formas de demonstrar tais resultados, mas a opção por essa sequência foi feita pela riqueza de argumentos matemáticos que serão feitos e consequentemente exercitado pelos alunos.

Vale lembrar que no Ensino Médio a finalidade desse estudo é encontrar senos e cossenos que antes não tínhamos a possibilidade de obter, utilizando os casos já obtidos em estudos anteriores.

4.2.1 O cosseno da soma de dois ângulos

Faremos uma construção que permite obter cos ($\alpha + \beta$) e podemos destacar para os alunos que isso poderia ser feito para qualquer das razões trigonométricas e, inclusive, para a diferença entre α e β. Vamos dividir essa construção em passos, afim de facilitar o entendimento para a explicação sugerida.

Antes de começar a apresentar os passos, indicamos deixar claro para os alunos que **a intenção é obter o cos ($\alpha + \beta$)** e a construção que será apresentada tem esse objetivo.

Passo 1: Apresentar os ângulos α e β.

A sugestão é apresentar os ângulos que iremos somar e os arcos correspondentes a eles no primeiro quadrante do círculo trigonométrico. É uma apresentação que não é difícil de justificar para esse início, pois queremos justamente o cos ($\alpha + \beta$). Faremos tal analise no primeiro quadrante, pois é o quadrante mais simples e indicado nesse caso.

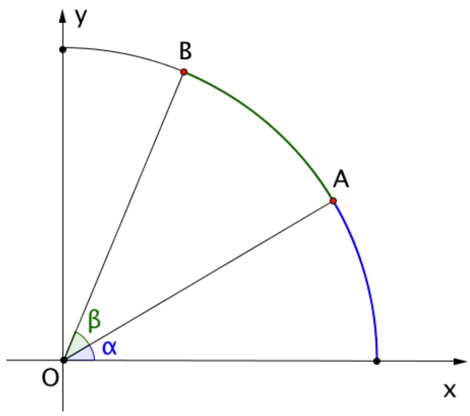


Figura 48

Passo 2: Apresentando as projeções dos pontos A e B.

Nesse momento, podemos projetar cada um dos pontos obtidos na construção anterior, utilizando como justificativa a tentativa de que apareçam triângulos retângulos e consequentemente as razões trigonométricas estudadas nos mesmos.

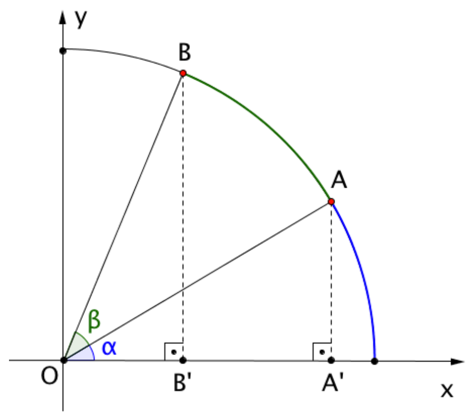


Figura 49

Passo 3: Apresentando outras projeções.

Para as projeções que apresentaremos agora, a justificativa é gerar novamente triângulos retângulos que serão importantes para alcançar nosso objetivo. Apresentaremos nesse caso a projeção de B sobre OA (chamaremos C) e as projeção de C sobre o eixo x e sobre BB’. Chamaremos tais projeções de C’ e C’’ respectivamente.

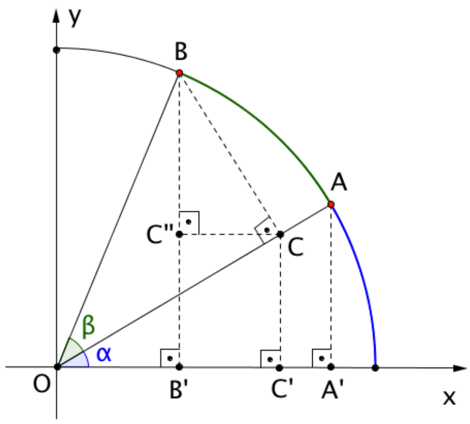


Figura 50

Passo 4: Determinando o ângulo $B'\hat{B}C$.

Após apresentar as projeções sugeridas, podemos mostrar que $B'\hat{B}C = \alpha$. Para isso, é suficiente olhar para os triângulos OB’D e BCD abaixo e como temos ângulos opostos pelo vértice entre eles, chegamos ao resultado desejado. Pode ser apenas falado e não há necessidade do ponto D e da demonstração apresentada continuar explicita na nossa análise nos passos seguintes.

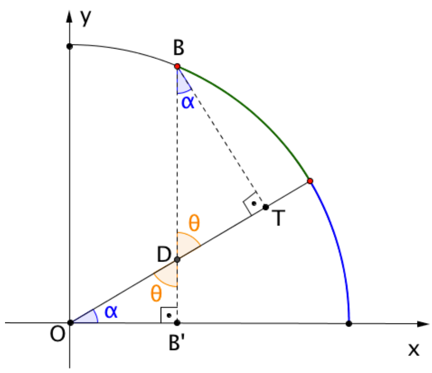


Figura 51

Passo 5: Interpretando o cos (α + β).

Após essa construção inicial, podemos iniciar a analise trigonométrica que precisamos. Para isso, sugerimos evidenciar o segmento OB’ e mostrar aos alunos que esse é o cos (α + β). Além disso, podemos reescrever OB’ como OC’ – B’C’, o que nos permitirá obter o resultado desejado.

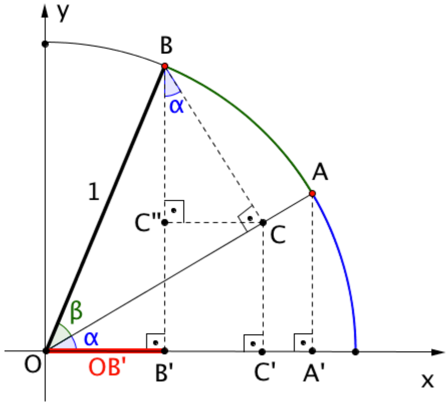


Figura 52

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OB'}{1} \Rightarrow \boxed{OB' = \cos(\alpha+\beta)}$$

$$OB' = OC' - B'C' \Rightarrow \boxed{OB' = OC' - CC''}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = OC' - CC''}$$

Passo 6: Obtendo OC’ e CC’’ em função das razões trigonométricas.

A construção final é apresentada abaixo e por meio dela, obteremos o objetivo do passo 6.

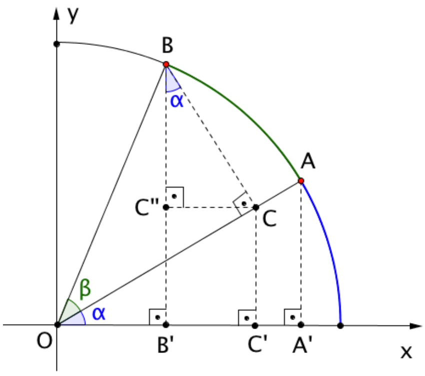


Figura 53

Vamos finalmente, obter o resultado desejado sobre o cos (α + β). Para isso, a sugestão inicial é utilizar semelhança de triângulos, como segue:

Da semelhança entre OCC’ e OAA’:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OA'}{OC'} \Rightarrow \frac{1}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{OC'} \Rightarrow \boxed{OC' = \cos\alpha.\cos\beta}$$

No triângulo BCC’’:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CC''}{BC} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{CC''}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \boxed{CC'' = \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$$

Após essa análise detalhada, nos resta apenas a conclusão:

$$\cos(\alpha+\beta) = OB' = OC' - CC''$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$$

Aprofundando o conhecimento: Obtendo o seno da soma utilizando áreas.

Uma alternativa mais avançada para iniciar a discussão das operações com arcos está descrita abaixo. Tive acesso a ideia desta demonstração com o professor Eduardo Wagner.

Observe a figura a seguir, onde cada uma das dimensões apresentadas é necessariamente verdadeira se, por construção fazemos AD = 1.

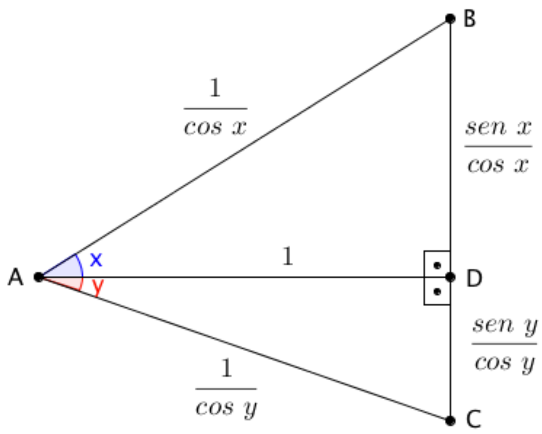


Figura 54

Podemos calcular a área de ABC de duas maneiras diferentes:

$$A_{ABC} = \frac{\frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\cos y}.\operatorname{sen}(x+y)}{2} \quad \text{ou} \quad A_{ABC} = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\right).1}{2}$$

Igualando essas áreas, temos:

$$\frac{\frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\cos y}.\operatorname{sen}(x+y)}{2} = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\right).1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x.\cos y} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x.\cos y} = \frac{\operatorname{sen}x.\cos y+\operatorname{sen}y.\cos x}{\cos x.\cos y}$$

$$\boxed{\therefore \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x.\cos y+\operatorname{sen}y.\cos x}$$

4.2.2 Consequências do resultado inicial

Após apresentar o $\text{sen}(\alpha+\beta)$ ou o $\cos(\alpha+\beta)$, poderíamos simplesmente apresentar os outros resultados para adição e subtração de arcos, que possivelmente teríamos uma boa aceitação por parte dos alunos. O fato é, que caso haja a possibilidade de ser mais exigente quanto a essa apresentação, sugerimos que por meio do resultado já obtido, sejam obtidos todos os outros, seguindo o encadeamento lógico indicado a seguir.

Cosseno da diferença entre dois ângulos:

A sugestão nesse caso é simplesmente reescrever $\cos(\alpha-\beta)$ como segue:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha.\cos(-\beta)-\text{sen}\,\alpha.\text{sen}(-\beta)$$

Por meio do círculo trigonométrico, podemos verificar que:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta \quad \text{e} \quad \text{sen}(-\beta)=-\text{sen}\,\beta$$

Assim:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\text{sen}\,\alpha.(-\text{sen}\,\beta)$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta}$$

Seno da soma de dois ângulos:

Nesse caso, a sugestão é recordar que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do complementar desse ângulo e vice-versa. Com isso, podemos apresentar que:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\cos\beta+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\text{sen}\,\beta$$

Como já dissemos inicialmente, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{sen}\,\alpha$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$. Assim:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha.\cos\beta+\text{sen}\,\beta.\cos\alpha}$$

Seno da diferença entre dois ângulos:

Analogamente ao que foi feito para o $\cos(\alpha-\beta)$, temos:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha.\cos\beta-\text{sen}\,\beta.\cos\alpha}$$

Tangente da soma de dois ângulos:

Agora, podemos começar lembrando aos alunos que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. Por meio dessa igualdade, é possível escrever:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha.\cos\beta \neq 0$, conseguiremos a expressão para a tangente da soma de dois ângulos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

A conclusão a que chegamos é que:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}}$$

Tangente da diferença entre dois ângulos:

Analogamente ao que foi feito para o $\cos(\alpha-\beta)$, temos:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}}$$

Todas essas operações são consequência da demonstração feita para um ângulos agudos, mas é importante ressaltar que são válidas para α e β sendo números reais quaisquer.

5 Atividades

Neste capítulo estão detalhadas as atividades propostas ao longo desse material. A intenção é deixar o mais claro possível a intenção com cada uma das propostas apresentadas.

5.1 Quebra-cabeça Trigonométrico

O objetivo principal dessa atividade é mostrar aos alunos a possível associação entre as razões trigonométricas (inclusive inversas) e segmentos que podem ser obtidos caso um círculo seja inserido na composição que antes era apenas triangular.

Material necessário:

- Lápis
- Régua
- Cola
- As três folhas que estão no final desse material: I Quebra-cabeça Trigonométrico (folha inicial), Quebra-cabeça 01 e Quebra-cabeça 02.
- 3 conjuntos idênticos de palitos coloridos como os indicados no final desse material.

Material auxiliar:

- Calculadora.

Como proceder:

Passo 01)

Entregue a folha inicial e o primeiro conjunto de palitos coloridos.

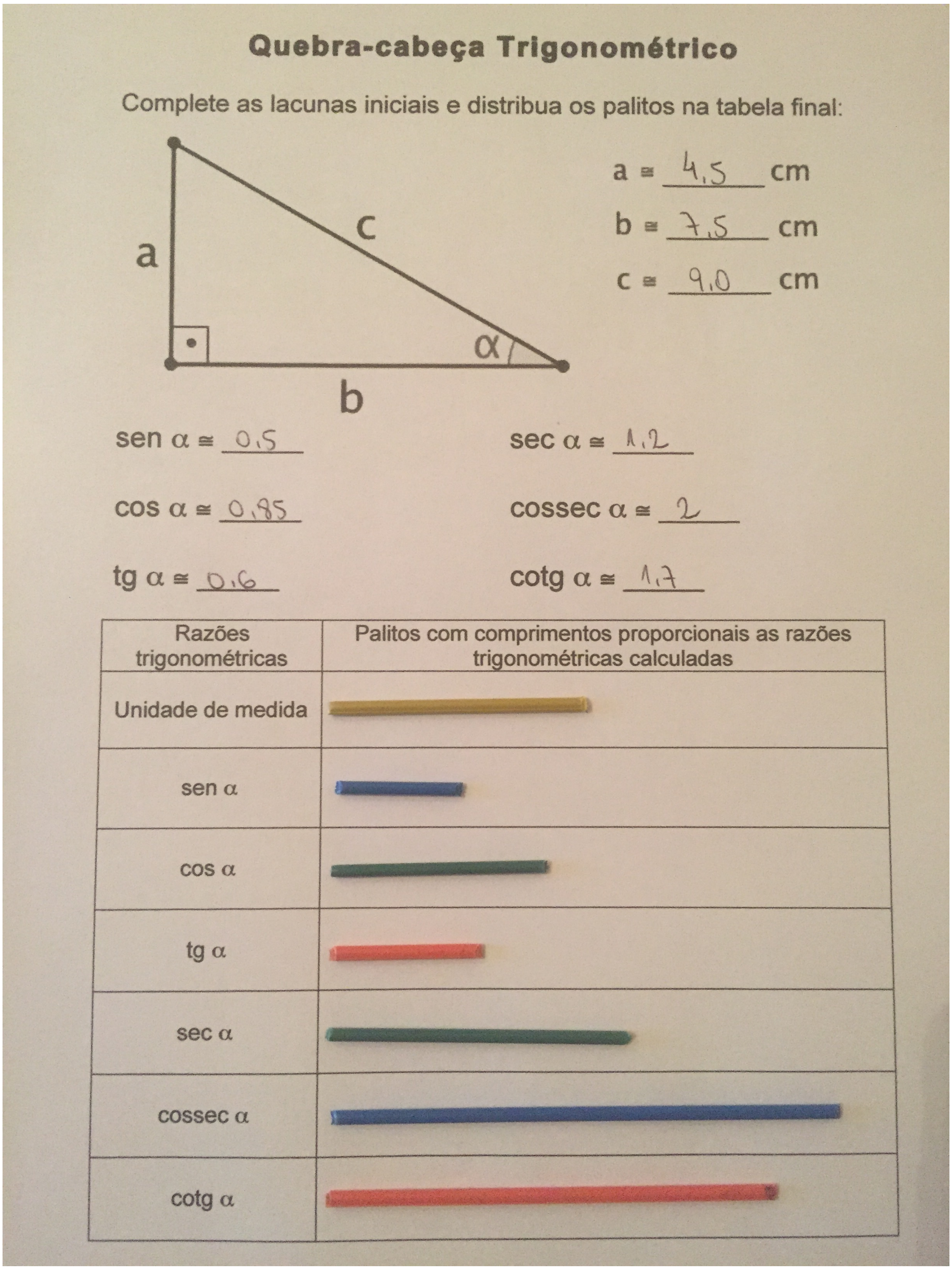
Peça aos alunos que sigam as instruções apresentadas nessa primeira parte, isto é, por meio da régua eles deveram encontrar aproximações para as medidas de a, b e c e com o auxilio de uma calculadora (ou não) devem aproximar também as razões trigonométricas e suas inversas. Após isso, eles deverão colar os palitos coloridos na tabela indicada.

Comentários sobre o passo 01:

1. O ideal é que eles percebam sozinhos que o palito amarelo é a unidade de medida e que todos os outros estão em função dele.
2. Para montar a tabela, os alunos deverão ser capazes de ordenar os valores aproximados, e por meio disso, completar a tabela com os palitos corretos.
3. Deixe claro para os alunos que as razões trigonométricas não tem unidade de medida, motivo pelo qual a medida dos palitos não são iguais aos valores obtidos para cada razão, mas sim proporcionais.

4. É valido questionar os alunos se para outro ângulo haveria a possibilidade de haver palitos de mesmo comprimento. Direcione a discussão para o 45 graus, onde haveria inclusive mais de um par de palitos de mesmo comprimento.

É esperado ao final desse primeiro passo, que os alunos completem a folha inicial da seguinte maneira:



Quebra-cabeça Trigonométrico

Complete as lacunas iniciais e distribua os palitos na tabela final:

a
c
b
α

a ≅ 4,5 cm

b ≅ 7,5 cm

c ≅ 9,0 cm

sen α ≅ 0,5

cos α ≅ 0,85

tg α ≅ 0,6

sec α ≅ 1,2

cossec α ≅ 2

cotg α ≅ 1,7

Razões trigonométricas	Palitos com comprimentos proporcionais as razões trigonométricas calculadas
Unidade de medida	
sen α	
cos α	
tg α	
sec α	
cossec α	
cotg α	

Passo 02)

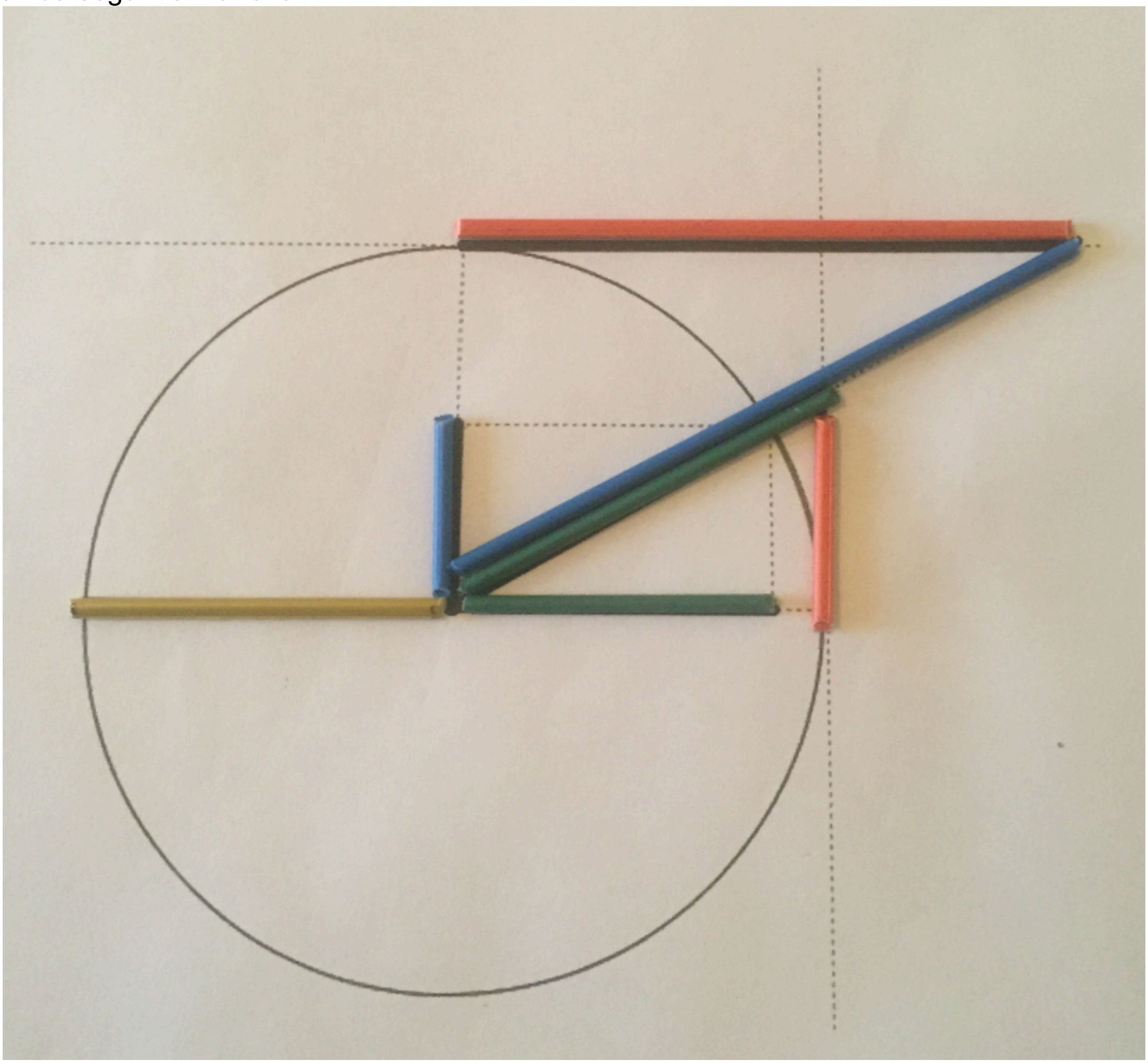
Entregue o Quebra-cabeça 01 e o segundo conjunto de palitos coloridos.

Peça aos alunos que sigam as instruções apresentadas nessa segunda parte, isto é, que colem os palitos adequadamente.

Comentários sobre o passo 02:

1. Eles montarão o quebra-cabeça por meio de uma analise de comprimentos. Cabe ao professor, induzi-los a relacionar os segmentos a nomenclatura por meio de uma comparação entre a folha inicial e o Quebra-cabeça 01.
2. As cores foram escolhidas de modo a gerar uma associação automática entre cada razão trigonométrica e sua respectiva razão inversa.

É esperado ao final desse segundo passo, que os alunos completem o Quebra-cabeça 01 da seguinte maneira:



Passo 03)

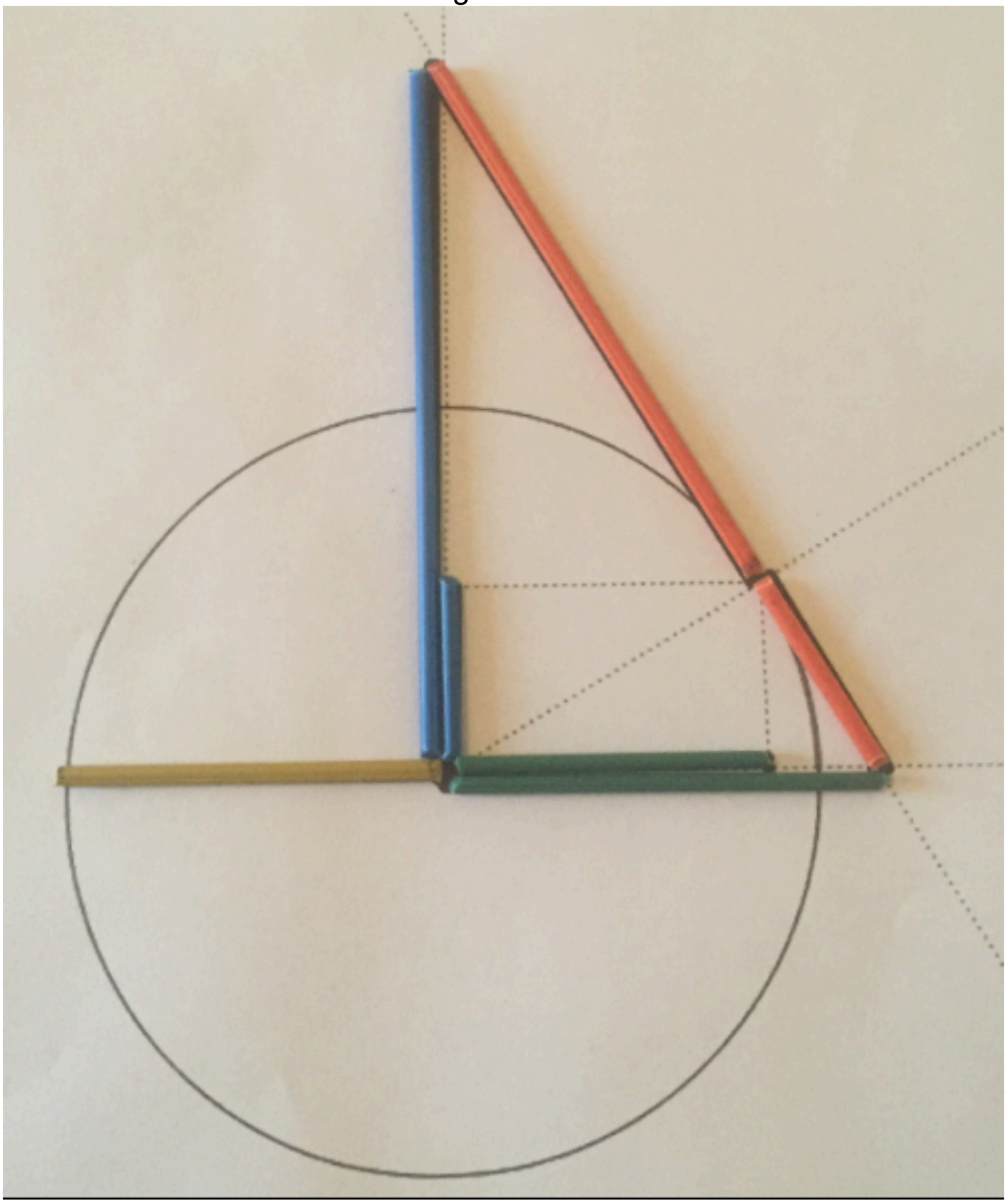
Entregue o Quebra-cabeça 02 e o terceiro conjunto de palitos coloridos.

Peça aos alunos que sigam as instruções apresentadas nessa terceira parte, isto é, que colem os palitos adequadamente, como foi feito no passo 02.

Comentários sobre o passo 03:

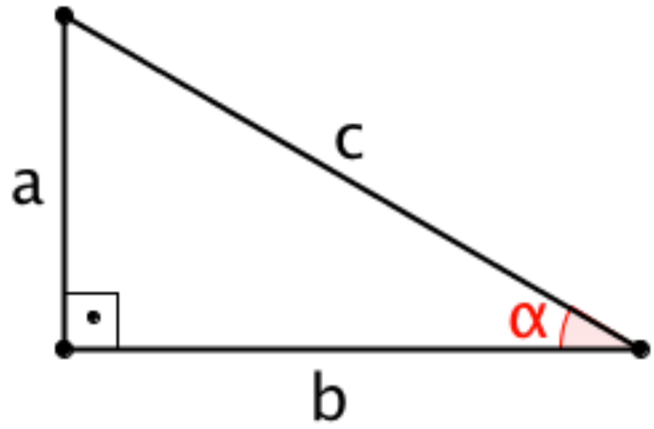
1. O quebra-cabeça será montado mais uma vez em função dos comprimentos dos palitos. O professor deverá, mais uma vez, induzi-los a relacionar os segmentos a nomenclatura por meio de uma comparação entre a folha inicial e o Quebra-cabeça 02.
2. Fazer uma comparação entre o quebra-cabeça 01 e o 02, além de observar mais uma vez o que ocorre com cada razão trigonométrica e sua inversa, por meio das cores.

É esperado ao final desse terceiro passo, que os alunos completem o Quebra-cabeça 02 da seguinte maneira:



Quebra-cabeça Trigonométrico

Complete as lacunas iniciais e distribua os palitos na tabela final:



$a \cong$ _______ cm

$b \cong$ _______ cm

$c \cong$ _______ cm

sen $\alpha \cong$ ______

cos $\alpha \cong$ ______

tg $\alpha \cong$ ______

sec $\alpha \cong$ ______

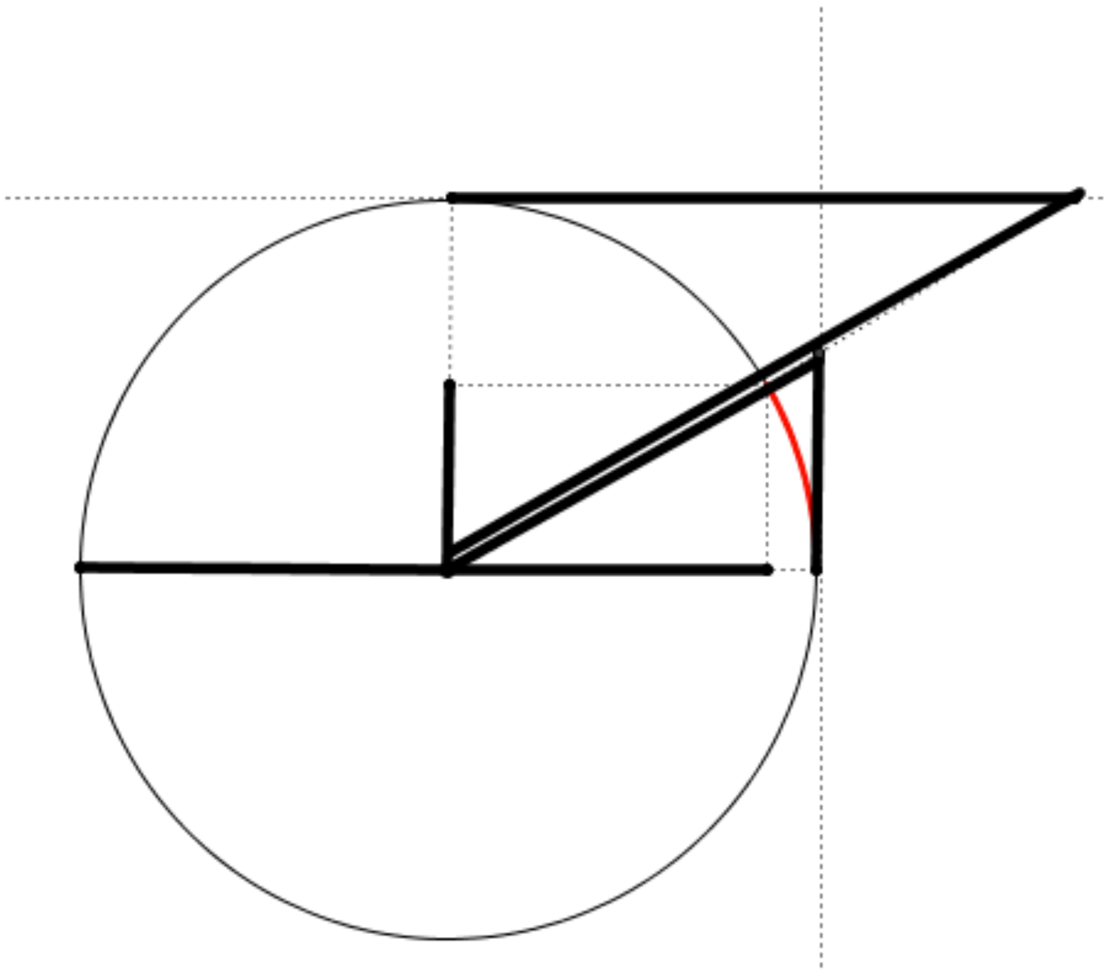
cossec $\alpha \cong$ ______

cotg $\alpha \cong$ ______

Razões trigonométricas	Palitos com comprimentos proporcionais as razões trigonométricas calculadas
Unidade de medida	
sen α	
cos α	
tg α	
sec α	
cossec α	
cotg α	

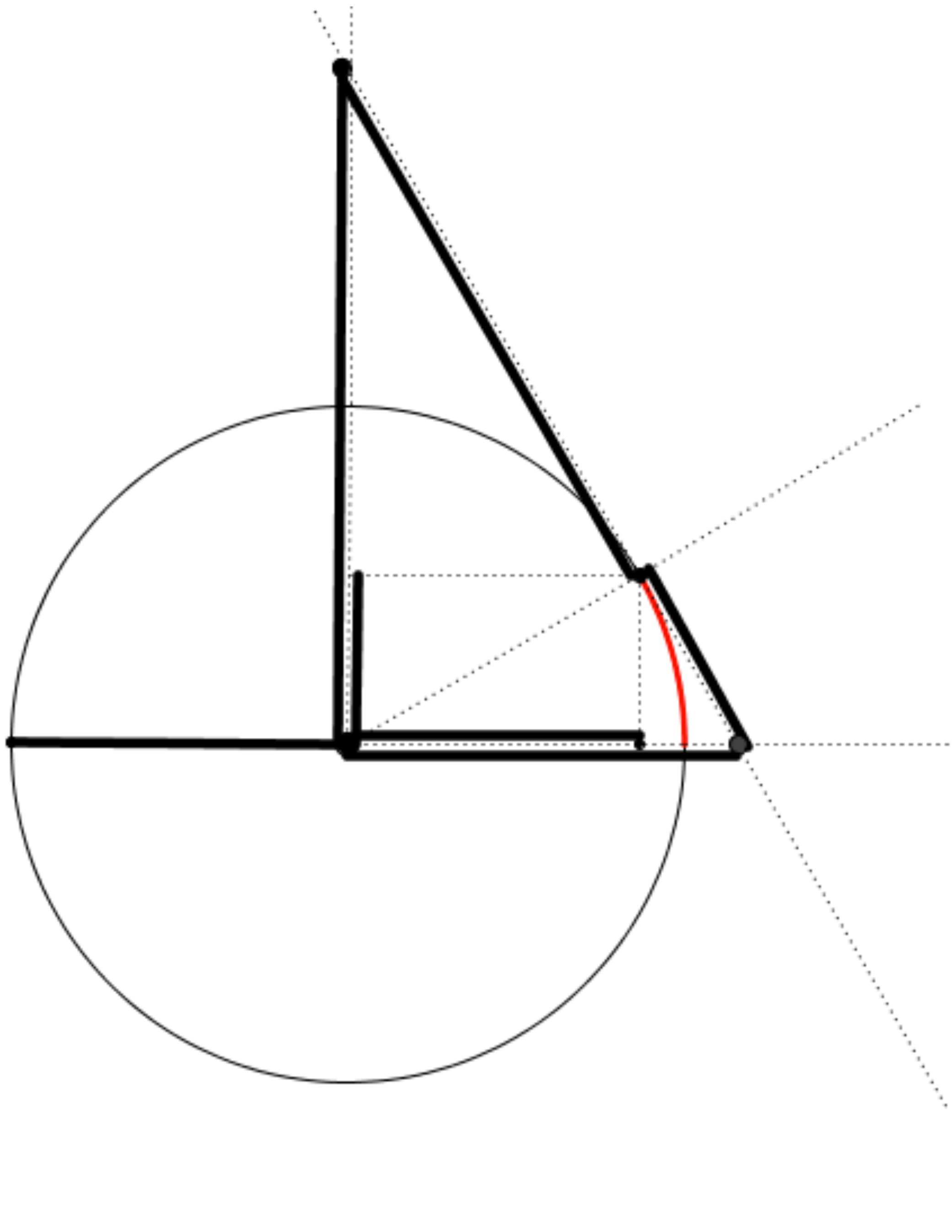
Quebra-cabeça 01

Complete as regiões em destaque com os palitos adequados:



Quebra-cabeça 02

Complete as regiões em destaque com os palitos adequados:



5.2 Transformações nos gráficos trigonométricos utilizando o Desmos

O objetivo principal dessa atividade é mostrar aos alunos as possíveis translações, dilatações ou até reflexões que podem acontecer no gráfico da função seno caso alteremos os parâmetros de seu formato geral: f(x) = A + B.sen(C.x + D). A analise para a função cosseno é análoga e citar o fato aos alunos já basta para os objetivos gerais.

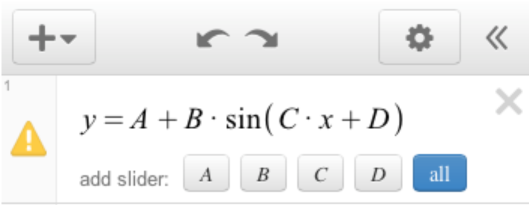
Material necessário:

Para essa atividade, podemos utilizar um computador com projetor, um laboratório de informática, tablets ou até smartphones (nesses últimos podem ser adquiridos gratuitamente um aplicativo). O site a ser utilizado é https://www.desmos.com .

Como proceder:

Passo 01)

Entre no site apresentado e escreva a função seno em seu formato geral e criando um controle deslizante ou "slider" para cada um dos parâmetros A, B, C e D clicando em "all", como mostra a figura abaixo:



Criados cada "slider", automaticamente teremos: A = 1; B = 1; C = 1 e D = 1.

Explique aos alunos que isso significa que o gráfico esboçado é: y = 1 + sen (x + 1)

Comentários sobre o passo 01:

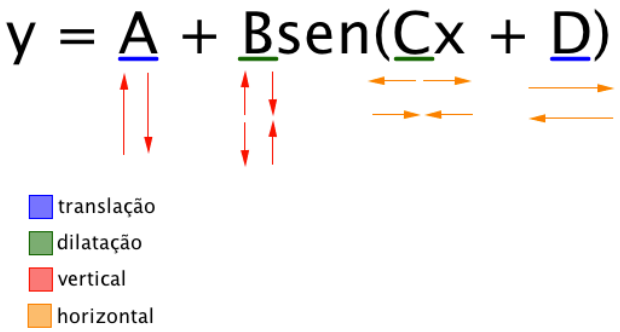
1. Tentar conduzir os alunos a concluir que o gráfico que aparece nesse primeiro momento é o da função y = 1 + sen (x + 1) pode facilitar os próximos passos.
2. Pedir para que os alunos comparem esse gráfico com o da função y = sen x pode desde já iniciar a discussão quanto a translação vertical. Vale induzir a ocorrência da translação horizontal, porém é mais complexa, dado que o eixo x varia em função de π. Para obter sucesso nessa analise, faça o "slider A" e o "slider D" variar entre 0 e 1.

É esperado ao final desse primeiro passo, que os alunos tenham entendido que y = 1 + sen (x + 1) é a lei de formação da função exposta e que podemos, por meio dos "sliders" fazer com que A, B, C e D variem no intervalo [-10, 10].

Passo 02)

Utilize os “sliders” no intervalo]0, 10] para mostrar tanto as translações verticais e horizontais causadas por A e D respectivamente, quanto as dilatações verticais e horizontais causadas por B e C respectivamente.

Faça o esquema abaixo, pode ajudar os alunos a entenderem tais transformações para parâmetros positivos.



Comentários sobre o passo 02:

1. Evidencie o fato de que para valores de B entre 0 e 1 o gráfico contrai, enquanto para valores maiores que 1 ocorre o contrário. Faça a mesma análise para C, lembrando que ocorre nesse caso a ocorrência é inversa.
2. Após toda a apresentação proposta, questione os alunos sobre o que aconteceria com A negativo e D negativo. Conduza-os a resposta correta e mostre no Desmos. Deixe claro que o valor de D positivo faz com que o gráfico translade para a esquerda, pois em geral, o pensamento natural é que ocorra o contrário.
3. Questione também sobre B e C negativos. Possivelmente ficaram confusos, o que os deixará prontos para o passo seguinte.

É esperado ao final desse segundo passo, que os alunos tenham entendido o que são translações e dilatações e que cada parâmetro, quando positivo, transforma o gráfico de uma forma previsível.

Passo 03)

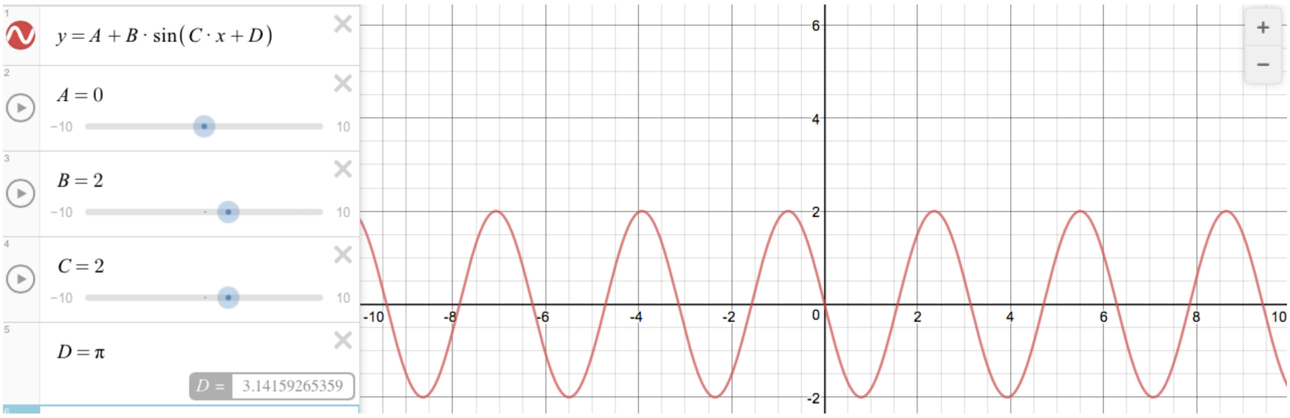
Utilize cada “slider” agora no intervalo]-10, 10] mostrando novamente as translações e dilatações, mas com a novidade das reflexões em relação aos eixos x e y geradas pelos parâmetros B e C respectivamente, quando negativos.

Comentários sobre o passo 03:

1. Anule os parâmetros A e D afim de facilitar o entendimento quanto ao que acontece com B e C.
2. A reflexão em relação ao eixo y é mais delicada. Vá com mais cuidado para evidenciar tal reflexão. Pode ser um bom momento para utilizar o “slider D” e obter uma melhor visualização.

É esperado ao final desse terceiro passo, que os alunos tenham uma boa noção das possibilidades quanto a transformação de gráficos trigonométricos .

Propor que os alunos construam, ao final da atividade, o gráfico da função y = 2sen(2x+π) é uma maneira de exercitar o raciocínio dos mesmos. Vale lembrar que a correção da atividade será interativa e pode ser feita parâmetro por parâmetro, justamente da maneira que esperamos que eles raciocinem. No final do desafio, teremos o seguinte gráfico:



As possibilidades são muitas para essa apresentação e aprimorar cada um dos passos ou até gerar mais questionamentos é certamente indicado nessa atividade.

6 Conclusão

Para cada um dos capítulos apresentados, diversos aspectos foram considerados até chegar a versão final de sugestões em trigonometria. Dar ao aluno uma melhor condição de fazer a transição desse estudo do Ensino Fundamental para o Ensino Médio foi o principal, mas evitar erros comuns em cada caso, a preocupação que os exercícios mais recorrentes possam ser feitos, entre outros, também foram considerados.

A tentativa de contextualizar exemplos, bem como a apresentação das Atividades, foi pensada com a principal função de chamar a atenção do aluno para a aplicabilidade do conhecimento, visto que essa tentativa é cada vez mais frequente nos dias atuais, o que podemos confirmar, por exemplo, observando questões do Enem ao longo dos anos.

Vale ressaltar que cada uma das sugestões apresentadas, justamente por não seguir o caminho convencional desse estudo, acaba por nos tirar de uma zona de conforto e nos leva a discutir e consequentemente aprimorar a maneira de apresentar a trigonometria aos nossos alunos.

Questionar mais professores em relação a esses e outros tópicos mais avançados em trigonometria, quanto ao caminho que acreditam ser o melhor a seguir e por meio dessas opiniões, gerar mais observações e mais detalhes, certamente enriqueceria esse trabalho. Espero que possam enxergar este trabalho como um primeiro passo e que ele possa estar ajudando professores com dificuldades na apresentação desse conteúdo.

7 Referências Bibliográficas

[1] CARMO, M. P. do. Trigonometria Números Complexos. – 3. ed. – Rio de Janeiro, 2005.

[2] DANTE, L. R. Tudo é Matemática. 9° ano. – 3. ed. – São Paulo: Ática, 2010.

[3] FACCHIN, Walter. Matemática para a escola de hoje, volume único. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2006.

[4] IEZZI, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, volumes 1 e 2. – 5. ed. – São Paulo: Atual, 2010.

[5] LIMA, E. L. A matemática do Ensino Médio, volume 1. – 6. ed. – Rio de Janeiro, 2006.

[6] PAIVA, Manoel. Matemática, volume único. – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2005.

[7] SILVEIRA, Ênio. Matemática: compreensão e prática. 9° ano. – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2008.