UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

LUCIENE LIGER DO NASCIMENTO ARAUJO

OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

# UMA HISTÓRIA DE TV. MINIMIZANDO CUSTOS.

*Ilhéus-Bahia*
2017

LUCIENE LIGER DO NASCIMENTO ARAUJO

OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

# UMA HISTÓRIA DE TV. MINIMIZANDO CUSTOS.

*Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz.*

*Orientador: Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer*

*Co–Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión*

*Ilhéus-Bahia*
2017

A663 Araújo, Luciene Liger do Nascimento.
Oficinas de matemática experimental: uma história de TV. minimizando custos / Luciene Liger do Nascimento Araújo. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.
51f. : Il.

Orientador: Germán Ignácio Gomero Ferrer.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matematica em rede Nacional.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação – Métodos experimentais. 3. Inovações tecnológicas. 4. Aritmética. I. Título.

CDD 510.7

LUCIENE LIGER DO NASCIMENTO ARAUJO

# OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

# UMA HISTÓRIA DE TV. MINIMIZANDO CUSTOS.

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 10 de março de 2017:

*Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer*
*Orientador*

*Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa*

*Profª. Ma. Mariluce de Oliveira Silva*
*Membro Externo - IFBA Ilhéus*

*À minha mãe, ao meu esposo e aos meus filhos.*

# Agradecimentos

Muitas foram as batalhas para se chegar até aqui, momentos que pensei que não conseguiria, mas em todos eles, a fé em Deus foi primordial. Agradeço primeiramente a Ele que sempre conduziu a minha vida levando-me a experiências inesquecíveis. Não tenho palavras para agradecer a duas pessoas especiais, sem as quais não teria sido possível realizar este curso. A minha mãe Maria das Graças Liger, minha amiga, que com o seu amor incondicional por mim, sempre me apoiou e ajudou, abdicando muitas vezes de fazer coisas para si para ficar com os meus filhos. Ao meu esposo, Gilberto Fernandes, meu companheiro nas lutas diárias, quanto amor, ajuda e compreensão. Aos meus amados filhos João e Sofia, quantos "Mãe você brinca comigo?" , "Mãe fica comigo?" ouvi e não pude ir, era de cortar o meu coração. Mas tenho certeza que um dia eles entenderão a minha ausência. A todos da minha família, meu pai Eddiel Nascimento, meus irmãos, cunhadas e cunhados, sobrinhos, minha sogra que me apoiaram sempre. Agradeço a Deus por cada um em particular, obrigada por toda ajuda, paciência e amor. Vocês são um pedacinho de mim.

Foram muitas as experiências vivênciadas durante esses anos, muitas pessoas envolvidas cada uma com a sua contribuição. Como não agradecer aos meus colegas de grupo de estudo: Mari, Lorena, Carla, Big, Kau, Alê, Regi, Jorge, Cláudio e a minha parceira incansável Naldeci. Muito conhecimento junto, vocês foram dez. As tardes cansativas de estudo se tornaram mais leves com a presença de vocês. A minha amiga e companheira de TCC, Katiane Pereira, como foi bom neste momento turbulento mas de aprendizado, ter você ao meu lado. As minhas colegas do CPMRG, tão solidárias e amigas, o apoio de vocês foi fundamental. Nunca mediram esforços para me ajudar. A direção do CPMRG, Major PM Reginaldo Moraes da Silva e Dinorá Madaly de Oliveira Leão, por acolherem e apoiarem o nosso Projeto.

Agradeço a excelente orientação em conjunto dos professores Germán e Nestor que com muita paciência, dedicação e ensinamentos possibilitaram que eu realizasse este trabalho. Bonito de ver quanta sintonia existe entre vocês e quanto conhecimento. Aos professores do PROFMAT por todos os ensinamentos e em agradecimento especial ao meu coordenador Vinícius Arakawa, um ser humano iluminado, sempre disponível, nunca mede esforços para ajudar alguém. E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte desta conquista, o meu muito obrigada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

Os desafios relacionados a aprendizagem da Matemática têm impulsionado cada vez mais professores a buscarem novas estratégias didático/metodológicas voltadas para facilitar o processo de ensino/aprendizagem da matemática. Para tanto aplicamos o Projeto Oficinas de Matemática Experimental buscando realizar um trabalho pedagógico que desconstrua a ideia de que a Matemática é uma área de conhecimento de difícil compreensão. As oficinas do projeto trabalham a matemática por meio de recursos lúdicos e atrativos, visando estimular o aluno a resolver situações-problema de forma autônoma através do desenvolvimento de suas habilidades de raciocínio lógico. Este trabalho dedica-se a relatar a experiência vivenciada por meio da aplicação da oficina "Uma história de TV. Minimizando custos" o qual faz parte do referido projeto. Esta oficina apresenta uma situação envolvente que leva o aluno a descobrir uma variedade de estratégias interessantes para encontrar a melhor solução e o menor custo para a distribuição das frequências de tv nas mesorregiões do Estado de Minas Gerais. Incentiva o participante a utilizar seus próprios meios e idéias para encontrar a solução do problema. Em síntese, esta oficina apresenta uma situação-problema que busca oferecer condições de trabalhar a matemática de forma lúdica, estimulando habilidades de raciocínio nos alunos e despertando o interesse de conhecer melhor a matemática.

**Palavras-chave:** Oficinas pedagógicas, Oficinas de matemática, Matemática experimental, Problema das quatro cores, Operações aritméticas combinadas.

# Abstract

The challenges related with mathematics learning have pushed more and more teachers to seek for new didactic/methodological strategies aimed to facilitate the teaching/learning mathematics process. For this purpose, we apply the Experimental Mathematics Workshops Project, seeking to make a pedagogical work, which deconstruct the idea that mathematics is a knowledge area difficult to understand. The project workshops work on mathematics through playful and attractive resources, aiming to stimulate the student to solve problem-situations autonomously by developing their logical reasoning skills. This work is dedicated to reporting the experience lived through the application of the workshop " A TV story. Minimizing costs ", which is part of the mentioned project. This workshop presents an immersive situation that leads the student to discover a variety of interesting strategies to find the best solution and the lowest cost for the distribution of TV frequencies in the mesoregions of Minas Gerais State. It encourages the participant to use their own means and ideas to find the problem's solution. In summary, this workshop presents a problem-situation that seeks to offer the conditions to work math in a playful way, stimulating reasoning skills in students and arousing the interest of knowing mathematics in a better way.

**Keywords:** Pedagogical workshops, Mathematical workshops, Experimental mathematics, Four-color problem, Combined arithmetic operations.

# Sumário

# Introdução

A matemática, apesar de ser uma disciplina de fundamental importância, tem uma conotação negativa entre os alunos do ensino fundamental. Tal relação com a matéria costuma despertar fortes sentimentos de rejeição diante da mesma, sendo este um dos fatores que tem ocasionado altas taxas de reprovação.

Para um número significativo de educandos, a matemática é encarada como uma disciplina com alto grau de complexidade e pouca utilidade prática, gerando com isso sentimentos de apatia, ou até mesmo aversão, dificultando o despertar do interesse desses alunos e evitando uma aproximação com esta área de conhecimento. Esse processo acaba por desencadear, nos educandos, sensações de incapacidade diante de situações-problema, o que piora ainda mais a relação desses alunos com o conhecimento matemático, uma vez que ao sentirem dificuldade na resolução de questões, os mesmos acreditam que a matemática é difícil.

De acordo com Silveira (2002), essa "fama" atribuída à matemática, de disciplina difícil, deve-se a um preconceito que vem sendo incorporado ao discurso de muitos alunos, e até mesmo de alguns professores, ao longo dos tempos. Contudo, esse contexto deve ser encarado como desafiador, e nesse sentido o docente possui o papel fundamental de motivador, utilizando estratégias que visem estimular seus alunos a superarem as dificuldades diante da disciplina. Pesquisas relacionadas a esta problemática vêm mostrando um panorama carente de atenção. Neste sentido a pesquisadora Sadovsky afirma que,

> [...] o baixo desempenho dos alunos em Matemática é uma realidade em muitos países, não só no Brasil. Hoje o ensino de Matemática se resume em regras mecânicas oferecidas pela escola, que ninguém sabe onde utilizar. Falta formação aos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes, aqueles que possibilitam considerar os conhecimentos prévios dos alunos, as situações e os novos saberes a construir.
> (SADOVSKY, 2007, p. 15).

Com estas palavras, Sadovsky está afirmando que atualmente há um descompasso entre a prática de ensino e o processo de aprendizagem, o que para nós, evidencia a necessidade da busca de mecanismos de avaliação, que permitam examinar se a mediação na aprendizagem está adequada às necessidades dos educandos frente aos desafios e às dificuldades escolares. Para além desses mecanismos relacionados à mediação, outro instrumento de avaliação diz respeito ao mapeamento dos resultados relativos à proficiência na aprendizagem em relação às diversas áreas do conhecimento.

Dados apontam que nas séries iniciais do ensino fundamental, grande parte dos alunos apresenta baixo nível de proficiência em relação à matemática. Alguns alunos não conseguem exprimir suas ideias usando adequadamente a linguagem matemática. Os resultados nas avaliações externas à escola, tais como, Prova Brasil, Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) vêm confirmando essa realidade em escala nacional. Como exemplo, os resultados dos estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental no Saeb/Prova Brasil de 2015 não foram nada animadores. A média de pontuação foi de 219,3 o que afere para esses estudantes o nível 4 (dentre 12 níveis) de proficiência em matemática.

No que se refere à avaliação de resultados em escala mundial, o PISA (sigla em inglês para Programa de Avaliação Internacional de Estudantes) consiste em uma avaliação trienal feita pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) realizada desde o ano 2000. Os resultados da avaliação do PISA em 2015 demonstraram que o Brasil regrediu em matemática. O país teve uma trajetória positiva desde 2003, início da série histórica, quando obteve 356 pontos. Nas avaliações seguintes, obteve 370 em 2006 e 386, em 2009. Em 2012, o país atingiu 389 pontos. Houve uma elevação real de 33 pontos na média dos alunos no período de 2003 a 2012. Em 2015, no entanto, o país caiu para 377, o que significa um declínio de 12 pontos. Como o desempenho dos estudantes brasileiros foi de 377 pontos contra 490 pontos da média da OCDE e, de acordo com os critérios da organização, 30 pontos no Pisa equivalem a um ano de estudos, isso significa que, em média, os estudantes brasileiros estão com um déficit, de mais de três anos, em matemática em relação aos 72 países que participaram desta avaliação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs),

> A aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.
> (BRASIL, 1998, p.19)

Ao analisarmos os PCNs e refletirmos a respeito dos resultados apontados pelas avaliações citadas anteriormente, é possível perceber que a matemática ensinada nas escolas não tem capturado o interesse, nem a atenção, assim como não tem desenvolvido o raciocínio lógico na maioria dos alunos.

Despertar o interesse do educando para as competências relacionadas à matemática e suas possibilidades de aplicação na vida de um modo geral, mostra-se essencial para motivá-lo a superar os desafios da aprendizagem. Nesse sentido,"é importante destacar que a matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação" , segundo os PCNs. (BRASIL, 1997, p.26).

Considerando a complexidade que circunda o ensino da matemática em nossos dias, entendemos que é nosso papel, como agentes educadores que possuem a missão de contribuir para a construção do conhecimento, abrir caminhos para novas práticas de aprendizagem, de maneira a permitir com que os alunos conheçam a matemática de uma forma prazerosa e interessante. Entendemos que é preciso despertar o interesse dos alunos para novas formas de aprender matemática. Nesse sentido, a revisão das práticas docentes voltadas para o ensino da matemática deve ser realizada visando um desempenho melhor dos alunos, e nessa conjuntura a aplicação de oficinas pedagógicas voltadas para o ensino da matemática se apresenta como uma excelente ferramenta de ensino/aprendizagem.

Dentro dessa perspectiva, tendo como intenção despertar nos alunos o interesse pela matemática e trabalhar o raciocínio lógico através da resolução de problemas, é que surge o Projeto Oficinas de Matemática Experimental (POME), uma parceria entre a Área de Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e o Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão (CPMRG), ambos localizados na cidade Ilhéus - Bahia. Inicialmente o projeto pretendia trabalhar exclusivamente com alunos do sexto ano do CPMRG, porém também aplicamos algumas oficinas no Instituto Nossa Senhora da Piedade, na XI Semana da Matemática da UESC e no Ciclo de Palestras do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UESC.

Uma Oficina de Matemática Experimental (OME) propõe trabalhar o ensino da matemática de maneira tal que os alunos aceitem o desafio de encontrar soluções para as situações-problema propostas, estimulando-os a investigar, desenvolver habilidades para resolver os problemas e validar as soluções obtidas. O uso de recursos lúdicos na execução das OMEs é essencial, uma vez que a aplicação desses recursos contribui para tornar o processo de ensino/aprendizagem um momento prazeroso para o aluno, abrindo assim a perspectiva de um novo olhar do educando para a matemática.

Partindo dessa ideia, para o processo de concepção e planejamento das OMEs, utilizamos como inspiração o livro texto This is MegaMath (CASEY; FELLOWS, 1993) do projeto MegaMath, desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa e Aplicação de Computadores do Laboratório Nacional de Los Alamos, Novo-Mexico - USA, com o objetivo de oportunizar novas formas de trabalhar a matemática em âmbito coletivo.

A oportunidade de realizar esse trabalho com as Oficinas de Matemática Experimental surgiu em resposta à solicitação do CPMRG à UESC, tendo como pleito o suporte dessa universidade na realização de um trabalho voltado para tentar diminuir o déficit de aprendizagem de conteúdos matemáticos dos alunos.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo o aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica para o ensino de matemática. Neste intuito, e visando atender uma das solicitações do programa em ser uma atividade que tenha um impacto na prática didática em sala de aula, apresento como Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) uma OME intitulada "Uma História da TV. Minimizando Custos" aplicada, como mencionado anteriormente, aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental do CPMRG, e visando atender uma das solicitações do programa em ser uma atividade que tenha um impacto na prática didática em sala de aula.[1] Esta oficina

[1]Este TCC é produto de um trabalho em grupo dentro do POME desenvolvido no CPMRG. Por esse motivo, grande parte da Introdução, o Capítulo 1, introdução do Capítulo 3, partes do Capítulo 4 e o Apêndice B são idênticos aos do TCC "Oficinas de Matemática Experimental: Entrando numa Fria", de

foi aplicada no CPMRG nos anos de 2015 e 2016.

A oficina “Uma História de TV. Minimizando Custos” apresenta uma situação envolvente que leva o aluno a descobrir uma variedade de estratégias para encontrar o menor custo para a distribuição das frequências de tv nas mesorregiões do Estado de Minas Gerais. Em síntese, esta oficina apresenta uma situação-problema que busca oferecer condições de trabalhar a matemática de forma lúdica, estimulando habilidades de raciocínio nos alunos e despertando o interesse de conhecer melhor a matemática.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. O Capítulo 1 fala sobre o POME mostrando a importância das oficinas como instrumento pedagógico, seus objetivos, a influência do MegaMath em nosso projeto e algumas recomendações para a aplicação das OMEs. O Capítulo 2 descreve a Oficina “Uma História de TV. Minimizando custos”, mostrando como a oficina se desenvolve, apresentando o problema das interferências de frequências de canais de TV no estado de Minas Gerais e os aspectos matemáticos dela. O Capítulo 3 descreve o processo de construção da oficina, mostrando as modificações pelas quais ela passou, assim como relata as experiências vivenciadas no momento das aplicações. O Capítulo 4 é reservado à discussão e às considerações finais, dando sugestões para o aprimoramento das oficinas. No final do TCC temos o Apêndice A com o roteiro da oficina “Uma História de TV. Minimizando Custos” e o Apêndice B com o resumo dos capítulos do MegaMath.

Katiane Pereira, quem também faz parte do POME e trabalhou sob a mesma orientação deste trabalho.

# Capítulo 1

# OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

> "O projeto UESC/CPM eu acho que foi uma revolução geral não só para as turmas que fizeram, como para qualquer um que viu ou participou até mesmo. Um projeto genial que com certeza faria de novo, foi um projeto que me incentivou bastante a pensar em problemas e ter um raciocínio rápido de resolver problemas dos meus colegas. Acho bem interessante, saiu daquele contexto chato de aula de todo dia sentar na cadeira e fazer atividade e ver a professora conversando, acho que foi muito mais interessante principalmente pelo trabalho em grupo com os colegas".(Depoimento de um aluno do 6º ano B do CPM-Ilhéus em 2016)

O Projeto Oficinas de Matemática Experimental (POME) foi gerado em resposta a uma solicitação do Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão - CPM Ilhéus (CPMRG) dirigida à Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Havendo detectado os problemas que os alunos ingressantes (6° ano do Ensino Fundamental) tinham com a matemática, em março de 2015 a direção do CPMRG solicitou à Área de Matemática da UESC que os alunos da licenciatura em Matemática realizassem monitorias na escola.

Em reunião realizada entre as partes, o professor Germán Gomero Ferrer, em representação da Área de Matemática da UESC, colocou que não recomendava a realização de monitorias pois isso representaria apenas "mais do mesmo": maior carga horária em aulas tradicionais de matemática. Em contrapartida ele expôs que conhecia um projeto bem sucedido levado a cabo nos Estados Unidos na década de 90 que estimulava em crianças pequenas o gosto pela matemática. O diretor do CPMRG, na época, o Major PM Lucas Miguez Palma, em concordância com os professores da escola participantes dessa reunião, aceitou a proposta e ficou acertada a elaboração e posterior aplicação de diversas OMEs, com uma equipe formada por professores das duas instituições. Assim, desde 2015 até hoje o POME está em execução na escola, contando com o apoio do atual diretor geral Major

PM Reginaldo Moraes da Silva Filho e da diretora pedagógica Dinorá Madaly de Oliveira Leão, e tendo boa aceitação entre os alunos, como atesta o depoimento supracitado.

Nesta capítulo descrevemos o que são oficinas pedagógicas e sua importância como instrumento pedagógico, o caráter lúdico das OMEs, o projeto MegaMath e sua influência em nosso projeto, assim como os objetivos gerais das OMEs e recomendações gerais para a aplicação das mesmas.

## 1.1 As OMEs e sua importância como instrumento pedagógico.

Antes de abordarmos, especificamente, as OMEs, faz-se necessário conceituarmos o que é uma oficina no contexto educativo, e sua importância como instrumento pedagógico.

### 1.1.1 O que são oficinas pedagógicas.

Oficinas de ensino são instrumentos pedagógicos voltados para a formação do conhecimento construído por meio do trabalho coletivo. Essa visão de um espaço de construção coletiva do conhecimento é defendida pela educadora Vera Maria Candau (1995). Segundo a autora, o espaço dedicado a uma oficina de ensino abre-se para possibilidades como, a análise da realidade, de confronto e troca de experiências; o que ratifica a visão voltada para o coletivo e portanto pressupõe a existência de um processo de interação.

A todo processo de interação precede um outro processo, o de socialização. Nessa perspectiva, considerando que uma oficina pedagógica se constitui em um espaço destinado à realização de uma atividade que requer participação, leitura, discussão de textos, vivências diversas relacionadas ao desenvolvimento de tarefas propostas ao coletivo, fica evidente que se trata de um espaço onde se aprende em conjunto uns com os outros.

Segundo Omiste e colaboradores (2000), os elementos que constituem a dinâmica de uma oficina pedagógica envolvem contextos, pessoas, experiências e conhecimento. Nessa perspectiva, a proposta do POME tem a intenção de ajudar no desenvolvimento do raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de manejar situações reais podendo ainda, servir de facilitador no despertar do aluno para a importância da matemática.

Considerando que uma oficina pedagógica constitui um espaço com um tempo demarcado, voltado para a aprendizagem, a realização da mesma requer planejamento. Oficinas de ensino geralmente são planejadas visando garantir unidade entre a teoria e a prática e consistem de atividades coordenadas que procuram induzir a construção de saberes decorrentes, principalmente, do conhecimento prévio, das habilidades, dos interesses, das necessidades, dos valores e julgamentos dos participantes.

Nas oficinas, o professor não ensina o que sabe, mas oportuniza o acesso aos conteúdos que os participantes necessitam saber, sendo, portanto, uma abordagem centrada no aprendiz e na aprendizagem e não no professor. Como defendia Paulo Freire:

> Se, na verdade, o sonho que nos anima é democrático e solidário, não é falando aos outros, de cima para baixo, sobretudo, como se fôssemos os portadores da verdade a ser transmitida aos demais, que aprendemos a escutar, mas é escutando que aprendemos a falar com eles.
> (FREIRE, 1998, p.127)

### 1.1.2 O que são Oficinas de Matemática Experimental

Uma OME se baseia na crença de que para ser bem sucedido em matemática é preciso estar altamente motivado e possuir certas habilidades de caráter cognitivo e de postura como curiosidade, hábito de trabalho individual e em equipe, ousadia para perguntar e errar, capacidade de gerar e testar hipóteses, capacidade de fazer inferências indutivas e dedutivas, habilidades de visualização espacial, temporal e de possibilidades, capacidade de estabelecer analogias, etc. Estas habilidades e posturas são necessárias em qualquer trabalho criativo, especialmente as de cunho científico. Compreendemos também que estas habilidades e posturas servem de esteio para a aquisição e uso de raciocínios específicos ao lidar com problemas envolvendo conhecimentos matemáticos específicos. Assim, ao lado de habilidades cognitivas defendemos que é preciso despertar os afetos (gosto, interesse) do estudante pela matemática.

Através da nossa experiência em sala de aula, temos observado que a relação entre os alunos e a matemática não é das mais amistosas. A maioria vem com uma ideia pré-concebida e aceita de que a matemática é difícil, traz experiências negativas que tiveram nos anos anteriores e manifesta a falta da relação entre a matemática ensinada na escola e o seu cotidiano. Muitos afirmam não gostarem desta disciplina; até mesmo aqueles que têm bom rendimento dizem não sentir prazer em resolver problemas de matemática, declaram sua rejeição e ainda dizem não gostar das aulas, pois as consideram muito chatas.

Acreditamos que para despertar nos estudantes o gosto pela matemática é preciso apresentar aos mesmos a "verdadeira matemática", mostrando o quão interessante ela é, de modo a torná-la atraente. Para tanto, é necessário que o professor trabalhe a disciplina de maneira diferente daquela praticada nas aulas tradicionais, pois a "verdadeira matemática" pouco tem a ver com decorar fórmulas, executar operações aritméticas ou realizar outras tarefas rotineiras.

O que queremos dizer com "verdadeira matemática" é a atividade que um matemático profissional realiza. Entendemos que quando um matemático encara um problema de matemática, ele experimenta instâncias particulares do problema, o que possibilita com que ele o modifique de maneira a torná-lo mais acessível, podendo ainda construir hipóteses e testá-las com o intuito de validá-las ou descartá-las. É evidente que durante esse processo ele faz contas e resolve equações, mas estes são apenas detalhes técnicos, na maior parte do tempo o matemático está gerando ideias e discutindo as mesmas com outros matemáticos.

Assim, ao apresentar aos alunos a "verdadeira matemática" o objetivo é estimulá-los para que "façam matemática de verdade", ou seja, que resolvam problemas matemáticos difíceis porém interessantes. Pode parecer um contrasenso exigir de jovens que não gostam de matemática, que resolvam problemas difíceis dessa esfera do conhecimento; há, porém, dois princípios sobre os quais descansa a nossa crença de que essa proposta faz sentido.

Em primeiro lugar, é justamente durante este processo de resolução de problemas que a matemática é criada diariamente por matemáticos profissionais. Em certo sentido, muitas vezes, nem o próprio matemático conhece a matemática necessária para resolver um problema; e por isso ele se vê obrigado a criá-la. Em segundo lugar, um problema realmente cativante é capaz de capturar uma mente curiosa e inquisitiva, tornando-a um desafio intelectual altamente estimulante; e crianças têm mente curiosa e inquisitiva.

Estes dois princípios levaram um dos autores deste projeto, o professor Germán Gomero, à ideia de implementar oficinas de matemática experimental como metodologia de ensino e aprendizagem. Como se esclarece em Gomero e Silva:

> Uma oficina de matemática experimental propicia um ambiente inovador de ensino e aprendizagem de matemática cujos mecanismos se sustentam em dois princípios fundamentais; o de que as maneiras mais eficientes de aprender envolvem a participação ativa do aluno (aprender fazendo), e o de que o papel do professor é o de orientar o aluno no processo de aprendizagem (professor mediador). Nestas oficinas os alunos são confrontados com situações ou problemas matemáticos fáceis de compreender e de interesse suficiente para capturar sua atenção, mas muitas vezes difíceis de resolver. O aluno, sem ser ciente desta dificuldade, se sente impelido a procurar por uma solução; e é nessa busca que acontecem os processos de aprendizagem e de desenvolvimento das habilidades cognitivas.
> (GOMERO; SILVA, 2016)

Assim, a nossa proposta consiste em estimular e desenvolver nos alunos o interesse e a curiosidade por problemas de matemática, assim como, despertar neles o espírito de investigação e desenvolver habilidades para resolver problemas e validar as soluções obtidas.

### 1.1.3 Caráter lúdico das OMEs.

A aplicação das OMEs tem por finalidade realizar atividades de matemática com ênfase na resolução de problemas de modo que os alunos construam coletivamente uma solução e ao mesmo tempo obtenham prazer no trabalho. Por esse motivo, as OMEs são essencialmente atividades lúdicas. Este tipo de atividades consiste em ações de caráter finalístico; dito de outro modo, toda atividade lúdica tem uma meta final, essa por sua vez visa proporcionar prazer e entretenimento aos indivíduos envolvidos na prática da atividade, através de atividades-meio. O uso da ludicidade como prática educativa favorece o desenvolvimento de competências como criatividade, agilidade, capacidade de concentração e o estímulo ao exercício do raciocínio lógico, entre outros.

Aprendemos com Teixeira que atividades lúdicas visam a realização de uma tarefa de forma prazerosa. Nelas, existe sempre a presença de motivação para atingir os objetivos.

> O lúdico apresenta dois elementos que o caracterizam: o prazer e o esforço espontâneo. Ele é considerado prazeroso, devido a sua capacidade de absorver o indivíduo de forma intensa e total, criando um clima de entusiasmo. É este aspecto de envolvimento emocional que o torna uma atividade com forte teor motivacional, capaz de gerar um estado de vibração e euforia. Em virtude desta atmosfera de prazer dentro da qual se desenrola, a ludicidade é portadora de um interesse intrínseco, canalizando as energias no sentido de um esforço total para consecução de seu objetivo. Portanto, as atividades lúdicas são excitantes, mas também requerem um esforço voluntário.
> (TEIXEIRA, 1995, p. 23).

O lúdico nas OMEs pode ser visto como uma construção coletiva, e nelas tentamos desenvolver a criatividade e a capacidade de tomar decisões, tornando algumas aulas de matemática mais atrativas. Temos vivenciado, nessa prática, que as atividades realizadas pelos alunos são prazerosas, não são cansativas, contribuem como estratégia alternativa para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos e ajudam a despertar o interesse pela disciplina.

Por outro lado, além dos aspectos motivacionais as OMEs influenciam também processos intelectuais e cognitivos, assim como as relações sociais e a maneira de o aluno agir diante das situações-problema.

> [...] As situações lúdicas mobilizam esquemas mentais. Sendo uma atividade física e mental, a ludicidade aciona e ativa as funções psico-neurológicas e as operações mentais, estimulando o pensamento. [...] As atividades lúdicas integram as várias dimensões da personalidade: afetiva, motora e cognitiva. Como atividade física e mental que mobiliza as funções e operações, a ludicidade aciona as esferas motora e cognitiva, e à medida que gera envolvimento emocional, apela para a esfera afetiva. Assim sendo, vê-se que a atividade lúdica se assemelha à atividade artística, como um elemento integrador dos vários aspectos da personalidade. O ser que brinca e joga é, também, o ser que age, sente, pensa, aprende e se desenvolve.
> (TEIXEIRA, 1995, p. 23)

A realização do POME no CPMRG, possibilitou que vivenciássemos uma nova forma de ensinar matemática. A partir da aplicação das oficinas tivemos a oportunidade de testemunhar um novo olhar para a matemática nos alunos, com uma postura de menor rejeição desta área do conhecimento.

## 1.2 O projeto MegaMath e sua influência em nosso projeto.

Para a confecção das OMEs, inicialmente, nos inspiramos no projeto MegaMath do Grupo de Pesquisa e Aplicação de Computadores do Laboratório Nacional de Los Alamos, Novo

México - USA. O texto de referência deste projeto é o livro *This Is MEGA-Mathematics!, STORIES AND ACTIVITIES FOR MATHEMATICAL THINKING PROBLEM-SOLVING AND COMMUNICATION* cujos os autores são Nancy Casey e Mike Fellows. Este projeto estava destinado a trazer ideias matemáticas incomuns e importantes para as aulas das escolas primárias, para que os jovens e seus professores pudessem pensar juntos. Na introdução deste livro, cita-se que:

> O objetivo deste projeto é fornecer algumas oportunidades para as crianças e seus professores experimentarem a matemática da mesma forma que ela é experimentada por matemáticos e cientistas. A matemática é animada e excitante. É um campo mais afim de arte e poesia do que muitas pessoas pensam. Quando os pesquisadores matemáticos se reúnem, eles trocam histórias e problemas favoritos. Ficam maravilhados com o modo como alguns problemas foram resolvidos. Problemas que soam simples não têm soluções. Eles falam sobre o que têm feito, o que estão trabalhando, o que desejam e como eles poderiam aprender se só tivessem isso para fazer. Em suma, eles inspiram uns aos outros. Esperamos que os jovens matemáticos nas salas de aula da escola tenham a mesma experiência (Tradução livre).

Este texto está dividido em 8 capítulos: Sobre o MEGA-Mathematics; A matemática mais colorida de todas; Desembaraçar a matemática dos nós; Jogos em Grafos; Máquinas que comem suas palavras; Um olhar lógico em Brights e Braves; Algoritmos e sorvetes para todos; Bem-vindo ao Hotel Infinito. No Apêndice B oferecemos uma pequena descrição de cada um destes capítulos.

No início do projeto, para a criação das OMEs, a equipe se reunia com o propósito de estudar os capítulos do projeto MegaMath. Em grupos, alguns professores da equipe montavam uma oficina baseada em um dos capítulos do MegaMath para ser aplicado com as outras pessoas da equipe. Depois da aplicação de cada oficina ocorriam discussões e ajustes chegando a uma "oficina ideal", na opinião do grupo. Percebemos que essas discussões e intervenções eram muito ricas, fazendo com que a proposta inicial de oficinas passasse por várias mudanças, tornando às vezes difícil identificar que a mesma baseou-se no projeto MegaMath. Antes da aplicação das oficinas com os alunos do 6° ano do CPMRG, algumas oficinas foram aplicadas novamente com os professores da equipe e em alguns eventos em outras instituições de ensino, tais como o Instituto Nossa Senhora da Piedade (INSP) e a Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Destas experiências coletamos opiniões e através de observações fizemos outros ajustes para então aplicarmos as oficinas com os alunos da escola.

Dentro do POME, no ano de 2015 selecionamos o capítulo "A matemática mais colorida de todas" como inspiração para criação de oficinas. Em 2016, aperfeiçoamos as oficinas já existentes e criamos novas oficinas inspiradas no capítulo "Algoritmos e sorvetes para todos". Em 2017, a nossa proposta, é consolidar todas as oficinas já produzidas.

Atualmente o projeto possui 7 oficinas. As oficinas *Colorindo mapas, Uma História de TV. Minimizando Custos* e *Uma História de TV II* foram inspiradas no capítulo "A matemática mais colorida de todas". As oficinas *Entrando numa fria I* e *Entrando numa* *fria II* foram inspiradas no capítulo "Algoritmos e sorvetes para todos". Já a oficina *Vagner Valente* foi inspirada no Problema 8 do Capítulo 1 do texto (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2008). Por último a oficina *Batalha das Core*s está inspirada no jogo Cilada das Cores da seção 3, do capítulo 1, do mesmo livro.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) descrevemos relatos e experiências que foram obtidas no decorrer da aplicação da oficina "Uma História de TV". Esta oficina traz um problema sobre distribuição de trasmissores de TV com diferentes frequências de transmissão que pode ser resolvido por analogia ao problema das quatro cores, trabalhado na oficina "Colorindo mapas".

## 1.3 Objetivos Gerais das OMEs.

Esperamos com as aplicações das OMEs, através dos objetivos matemáticos, que os alunos consigam perceber que há problemas que não tem solução e que há problemas com muitas soluções; que eles possam reconhecer que um problema não tem solução quando as regras não podem ser satisfeitas, que pequenas mudanças nas condições de um problema podem transformar um problema sem solução num problema com muitas soluções e vice-versa e que há necessidade de demonstrações na matemática.

Com os objetivos não-matemáticos, dando destaque aos objetivos heurístcos, queremos que os alunos se familiarizem com o método experimental em matemática , estimulando-os a formular e testar hipóteses, e que consigam formular e seguir instruções de ação. Desejamos apresentar ao aluno os processos de abstração e argumentação e induzí-lo a estabelecer analogias entre situações novas e situações familiares. Que o aluno seja capaz de introduzir a ideia de simplificação como estratégia de resolução de problemas; elaborar perguntas e discutir possíveis respostas; reforçar no aluno o hábito de levantar hipóteses; perceber que para invalidar uma hipótese basta um contra-exemplo; perceber que a falta de um contra-exemplo não valida uma hipótese e desenvolver habilidades de identificação de padrões.

Temos também os objetivos não-matemáticos que não são heurísticos, neles queremos estimular nos alunos o trabalho em equipe e o entendimento de que regras são convenções.

## 1.4 Recomendações Gerais para aplicar as Oficinas.

A finalidade principal desta seção é socializar o conhecimento metodológico construído por nossa equipe durante as aplicações das OMEs. A intenção é que estas recomendações facilitem a aquisição de práticas destinadas a melhorar o desempenho do professor na aplicação das oficinas.

Como nas oficinas se procura a construção coletiva do conhecimento, as explicações devem ser curtas, para que assim o aluno possa chegar as conclusões por ele mesmo, em discussões com o grupo. Para manter uma "desordem produtiva", deve-se manter todos os alunos ocupados e respeitar o tempo dos grupos nas mesas, por último, deve-se ter uma boa logística. Nas próximas seções descrevemos em detalhe estas recomendações.

### 1.4.1 Evite dar explicações longas

No decorrer da oficina deve-se evitar dar explicações longas e definitivas à turma, a pequenos grupos ou a alunos individualmente. Os objetivos da oficina não devem ser explicitados nem no início nem durante a execução das atividades. Estes objetivos devem ser atingidos como resultado das discussões grupais, mas os alunos não precisam estar cientes deles.

Durante a execução das oficinas se recomenda não estabelecer regras para a realização das atividades nem para os procedimentos técnicos que devem ser seguidos. Em geral, os alunos começam a fazer perguntas sobre o que pode ou não pode ser feito. Se as perguntas surgirem durante as fases de resolução de problemas, se recomenda socializá-las com o grupo ao qual pertence o aluno; ou, se os membros do grupo estiverem muito concentrados com o problema, o melhor é conversar individualmente com quem fez a pergunta.

Em uma OME não existe CERTO ou ERRADO, nem PODE ou NÃO PODE. Todas as questões, técnicas ou normativas, devem ser discutidas na turma, em pequenos grupos, ou individualmente dependendo da situação e as normas devem ser decididas com a turma. Se surgir uma questão normativa que já foi discutida com a turma, se recomenda procurar a ajuda de algum aluno do grupo para que lembre qual foi a decisão da turma. Se surgir uma questão técnica que já foi discutida com outro aluno ou grupo, uma boa ideia é orientar quem fez a pergunta consultar aquele aluno ou grupo que já tirou essa dúvida. Sempre que possível, o professor deve participar também dessa troca de informação.

Figura 1.1: Acompanhamento de um grupo no momento da aplicação.

Como as oficinas são espaços dedicados a promover a descoberta, nem as estratégias de resolução de problemas, nem o tipo de respostas ou soluções que os alunos devem obter, devem ser explicadas antes do início das atividades. Ao perceber que um aluno cometeu ou está cometendo um erro, ou ao identificar um aluno com dificuldades na resolução de um problema, uma sugestão é sentar na mesa do aluno e discutir o problema com ele. Os outros alunos da mesa podem participar da discussão, ou podem continuar trabalhando no problema. As respostas e soluções devem ser discutidas com os alunos, individualmente, em grupos pequenos, ou com a turma toda; dependendo da atividade.

Ao perceber que um aluno está com dificuldades para resolver um problema, deve-se discutir estratégias e não fornecer a solução do mesmo. Se um aluno está cometendo um erro no procedimento da solução, devemos ajudá-lo a perceber o erro e a descobrir como consertá-lo. Se necessário, recomendamos que o material seja fornecido novamente para que o aluno comece de novo. Durante uma discussão com um aluno, ou com um grupo deles, podemos comentar sobre os objetivos da atividade ou sobre estratégias de resolução de problemas, e até sobre o tipo de respostas que eles devem obter; mas sempre de modo casual. O que não é recomendável é dar explicações longas e definitivas.

No final da atividade é importante conversar com a turma sobre o que foi realizado; induzindo os alunos a expor o que aprenderam com a atividade. Como parte desta discussão final, deve-se comentar informalmente sobre os objetivos matemáticos e não-matemáticos da atividade.

### 1.4.2 Matenha uma "bagunça produtiva".

Em OMEs percebe-se uma grande participação por parte dos alunos. Estes demonstram tanto interesse e interagem de modo tão intenso que às vezes a sala de aula parece uma confusão. Como recomendação, sugerimos que o professor matenha um nível de desordem bom, produtivo, onde a desorganização não atrapalhe a criatividade e o desenvolvimento da oficina. O professor deve estar atento para que o aluno não confunda a oficina com o intervalo do recreio. Uma vez que ao não levar a sério a atividade, o aluno não conseguirá atingir o objetivo proposto pela oficina.

Garanta que todos os alunos estejam sempre realizando alguma atividade. No nosso projeto, atividades adicionais desenhadas para este fim são chamadas de "Cartas na manga". Para aqueles alunos que costumam concluir rapidamente as tarefas pedidas recomenda-se ter sempre atividades mais desafiadoras que as obrigatórias.

Recomenda-se também ter sempre atividades mais simples que as obrigatórias para o aluno que apresentar dificuldades na realização das tarefas pedidas; estas atividades devem ser elaboradas para ajudar o aluno a superar as dificuldades encontradas durante a realização da tarefa.

### 1.4.3 Mantenha uma boa logística

A disposição do ambiente na sala deve ser providenciada com antecedência. Para o bom desempenho dos alunos na oficina, é importante que a turma tenha no máximo 25 alunos, podendo ser dividida em grupos de 2 a 4 alunos a depender da atividade que será realizada, ver Figura 1.2. Recomenda-se ter sempre material excedente para todas as tarefas a serem realizadas. Uma boa estratégia é recolher e armazenar organizadamente o material trabalhado pelos alunos, classificando o material por atividade.

Percebemos com nossa experiência na aplicação das oficinas que durante a atividade é importante ter um número mínimo de 3 professores, possibilitando uma maior participação

Figura 1.2: Aplicação da OME no CPMRG.

dos alunos nas mesas e incentivando as discussões entre eles, antes de socializar os resultados obtidos com a turma, evitando assim que os mesmos se dispersem.

### 1.4.4 Respeite o tempo de cada grupo.

Uma recomendação importante é passar para a próxima atividade sempre que (e apenas quando) todos os membros do grupo tiverem terminado com uma atividade. Quando alguns alunos de um grupo tiverem terminado com alguma atividade, podemos estimulá-los a ajudar aqueles que ainda não a fizeram, mas recomende que não é para dizer como se faz, nem para fazer a atividade por eles.

# Capítulo 2

# Oficina: "Uma História de TV. Minimizando Custos"

A oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" basea-se em uma história fictícia, segundo a qual , quando a televisão chegou ao Brasil, o governo de Minas Gerais decidiu instalar uma emissora de televisão em cada uma das 12 mesorregiões do estado (Veja a Figura 2.2). Cada emissora teria sua própria programação, assim o governo comprou doze aparelhos transmissores de televisão idênticos. Como todos transmitiam na mesma frequência, os moradores que viviam perto da fronteira entre duas regiões, quando ligavam seus aparelhos de tv assistiam às programações de duas regiões, a deles e a da região vizinha. O resultado foi uma confusão de imagens e sons que não permitia assistir nenhuma das duas programações. Foi chamado um cientista que havia inventado uma maneira de mudar a frequência de emissão dos aparelhos transmissores. A frequência de cada aparelho podia ser mudada para outra de uma lista de 6 novas frequências e o custo de cada mudança dependia da frequência escolhida. A missão dos participantes da oficina é escolher uma mudança de frequências com o menor custo possível.

Como mencionamos no capítulo anterior, a oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" foi inspirada no capítulo "A matemática mais colorida de todas" do projeto MegaMath, que gira em torno do Problema das Quatro Cores. Este problema trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir qualquer mapa, de países reais ou imaginários, de forma a que países com fronteira comum tenham cores diferentes. Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que a resposta era 4 e só mais de cem anos depois, em 1976, se conseguiu provar que a conjectura é verdadeira. A demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta performace para a época. Como a prova é muita longa para ser verificada a mão e há sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção, hoje em dia a validade da demonstração é aceita pela maioria da comunidade matemática, mas continua a ser polêmica.

Quando os alunos participam desta OME eles já conhecem o Problema das Quatro Cores, pois já trabalharam na oficina "Colorindo Mapas"; na qual a tarefa é encontrar o menor número de cores possíveis para colorir um mapa. De forma análoga, associando uma cor a cada frequência na oficina "Uma História de TV", o problema consiste em colorir o mapa de Minas Gerais. A diferença do problema de coloração de mapas é que agora cada frequência tem um preço associado (veja a Tabela 2.1), e uma exigência adicional nesta oficina é deter-

| Troca de frequência | Preço em Cr$ |
|---|---|
| F1 → F2 | 600 |
| F1 → F3 | 1.200 |
| F1 → F4 | 2.400 |
| F1 → F5 | 4.800 |
| F1 → F6 | 9.600 |
| F1 → F7 | 19.200 |

Tabela 2.1: Preços das mudanças de frequências.

minar a distribuição de frequências mais barata possível.

## 2.1 Aspectos Matemáticos da Oficina

Na oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" o participante é convidado a distribuir transmissores de TV com diferentes frequências de transmissão e com o menor custo possível, de modo que as regiões com fronteira comum tenham frequências diferentes. Para resolver o desafio, cada frequência é associada a uma cor (veja a Tabela 2.2), assim devemos colorir o mapa de modo que duas regiões vizinhas não tenham a mesma cor. Observamos assim que se trata do Problema das Quatro Cores como se mostra na subseção 2.1.2. A solução optimal do problema de interferências é qualquer configuração que se use 4 vezes a frequência F1, 4 vezes a frequência F2, 3 vezes a frequência F3 e 1 vez a frequência F4. O custo destas configurações é de CR$ 8.400,00.

### 2.1.1 Colorindo Minas Gerais

A Figura 2.1 mostra duas soluções distintas do problema apresentadas por alunos do 6° ano do CPMRG. Vamos descrever como obter a solução da Figura 2.1(a) de maneira sistemática. Não estamos afirmando que este é o método que os alunos usaram para obter suas soluções. Nosso objetivo nesta subseção é mostrar que para colorir Minas Gerais são necessárias 4 cores.

| FREQUÊNCIA | COR |
|---|---|
| F1 | amarela |
| F2 | verde |
| F3 | azul |
| F4 | Vermelha |
| F5 | rosa |
| F6 | laranja |
| F7 | lilás |

Tabela 2.2: Frequências disponíveis com suas cores associadas.

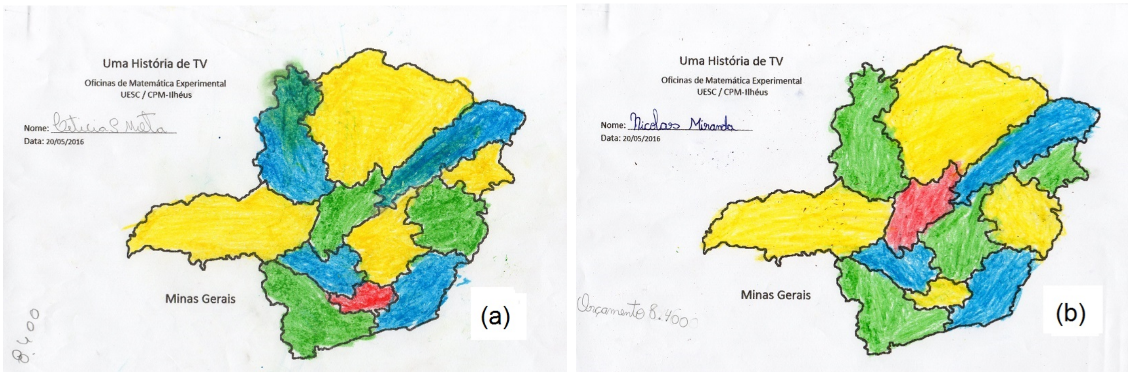


Figura 2.1: Duas distribuições de frequências que resolvem o problema de interferências com um custo mínimo. A cor amarela corresponde à frequência original, F1, e não gera nenhum custo. A cor verde corresponde à frequência mais barata, F2. As cores azul e vermelha correspondem as frequências F3 (mais cara que a F2) e a F4 (mais cara que a F3).

Para uma melhor compreensão, denotamos cada mesorregião de Minas Gerais com as letras indicadas na Figura 2.2.

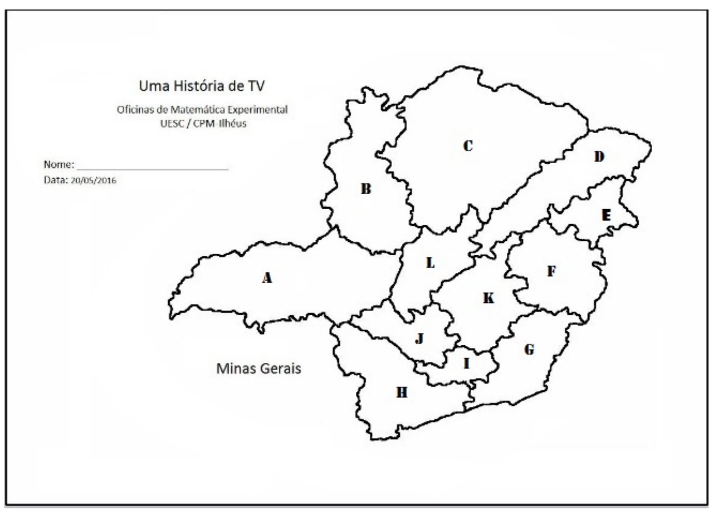


Figura 2.2: Mapa das mesorregiões do estado de Minas Gerais.

Analisando as mesorregiões J, K e L do mapa de Minas Gerais verificamos que elas fazem fronteiras entre si, causando as interferências, logo não é possível usar a mesma frequência nas três mesorregiões. Usamos a cor amarela na mesorregião K, a cor verde na mesorregião L e a cor azul na mesorregião J.

Para a mesorregião A colocamos a cor amarela pois sua localização faz fronteira com a mesorregião L, que já é verde e com a J que é azul. A mesorregião H faz fronteira com as mesorregiões A e J, logo temos que usar a cor verde. Verificamos que na mesorregião I não é possível utilizar as cores amarela, verde e azul pois sua localização tem fronteira com as mesorregiões H, J e K. Daí é necessário uma nova cor, utilizamos então a cor vermelha.

A mesorregião G faz fronteira com as mesorregiões H, verde; com a I, vermelha e com K, amarela, logo nenhuma destas cores podem ser utilizadas. Então na mesorregião G colocamos a cor azul. A mesorregião F faz fronteira com as mesorregiões K, amarela, e G, azul, como a intenção é usar o menor número de cores possível, utilizamos a cor verde que já aparece em maior quantidade que a vermelha.

Na mesorregião B colocamos a cor azul, pois ela faz fronteira com as regiões A e E, que são amarela e verde respectivamente. Na mesorregião C utilizamos a cor amarela pois a região B acabou de ser pintada com a cor azul e a região L é verde.

Observamos que a mesorregião D, faz fronteira com C, L, K e F que são todas amarelas ou verdes logo a pintamos de azul. E pelo mesmo motivo na mesorregião E é pintada de amarelo.

Percebemos assim, que é necessário utilizar quatro cores. No final utilizamos 4 vezes a o amarelo, 4 vezes o azul, 3 vezes o verde e 1 vez o vermelho.

Associamos as frequências mais utilizadas aos valores mais baratos. Assim, na mesorregião que está com a cor amarela colocamos F1 pois é sem custo e aparece 4 vezes. Na mesorregião azul atribuimos F2 pois custa CR$ 600,00 e aparece 4 vezes, na mesorregião verde colocamos F3 que custa CR$ 1200,00 e por fim na mesorregião vermelha colocamos F4 que custa CR$ 2400,00. O custo total é mostrada na Tabela 2.3.

| Troca de frequência | Preço em Cr$ | n° de vezes que aparece | Total |
|---|---|---|---|
| F1 | 0 | 4 | 0 |
| F1 $\rightarrow$ F2 | 600 | 4 | 2.400 |
| F1 $\rightarrow$ F3 | 1.200 | 3 | 3.600 |
| F1 $\rightarrow$ F4 | 2.400 | 1 | 2.400 |
| TOTAL | | | 8.400 |

Tabela 2.3: Cálculo do custo da troca de frequências para os mapas da Figura 2.1

### 2.1.2 Minimizando Custos

Vamos chamar de solução do problema de interferências de Minas Gerais, qualquer distribuição de frequências nas mesorregiões de modo tal que duas regiões com fronteira comum não tenham a mesma frequência. Claramente, o problema de interferências formulado desta maneira é idêntico ao problema de coloração do mapa de Minas Gerais. O desafio na oficina é obter uma solução com custo mínimo. Como o mapa de Minas Gerais precisa de 4 cores para ser pintado, basta procurar soluções que usem apenas 4 frequências.

Sejam $C_1 < C_2 < C_3 < C_4$ os custos das 4 frequências mais baratas, na oficina estes custos estão dados na Tabela 2.1. Se uma solução do problema de interferências utiliza $n_k$ vezes a frequência com custo $C_k$, dizemos que esta solução é do tipo $(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Como Minas Gerais tem 12 mesorregiões, temos a restrição

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 12 \; , \tag{2.1}$$

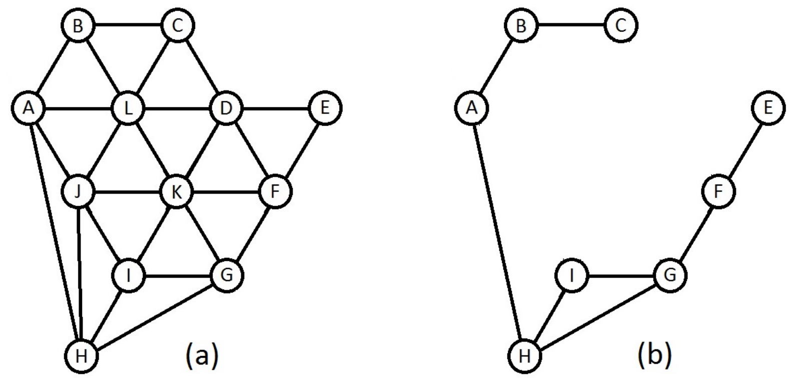


Figura 2.3: (a) Grafo dual do mapa de Minas Gerais. (b) Grafo reduzido depois de retirar todos os vértices com valência maior a 4.

e o custo desta solução é

$$C = n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3 + n_4 C_4 \ . \tag{2.2}$$

Como "soluções baratas" são obtidas usando mais frequências baratas do que frequências caras, uma condição necessária para que uma solução do tipo $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ tenha custo mínimo é que

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \ . \tag{2.3}$$

As duas soluções dadas na Fig.2.1 são do tipo $(4, 4, 3, 1)$. Vamos provar que não é possível obter soluções mais baratas. Observe em primeiro lugar que, como o mapa de Minas Gerais precisa de 4 cores, não é possível reduzir o valor de $n_4$, e portanto para obter uma solução com custo menor devemos reduzir $n_3$ ou $n_2$. Assim, devido à condição (2.3) segue–se que ao alterar apenas uma cor em qualquer solução do tipo $(4, 4, 3, 1)$ devemos obter uma solução do tipo $(5, 4, 2, 1)$ ou uma do tipo $(5, 3, 3, 1)$. Deste modo, provando que não existem soluções com $n_1 = 5$ estaremos provando que qualquer solução do tipo $(4, 4, 3, 1)$ tem o menor custo possível.

A Fig.2.3(a) mostra o grafo dual[1] do mapa de Minas Gerais, denotemos este grafo por $M$.[2] Os nomes dos vértices[3] correspondem aos nomes das mesorregiões atribuídos na Fig.2.2 A valência de um vértice é o número de vértices vizinhos a ele. Observe que o vértice $E$ é o único em $M$ com valência 2, os vértices $B$ e $C$ têm valência 3, os vértices $A$, $F$, $G$, $H$ e $I$ têm valência 4, os vértices $D$ e $J$ têm valência 5, e os vértices $K$ e $L$ têm valência 6. O grafo que resulta de retirar de $M$ um vértice $X$ e todos seus vértices vizinhos é chamado de grafo reduzido $M_X$; assim, se $X$ tem valência $k$, $M_X$ é um grafo com $11 - k$ vértices.

[1]Grafo dual G' de um grafo planar G é um grafo que tem um vértice por cada região (face) de G, e uma aresta por cada aresta em G que une duas regiões adjacentes.

[2]No grafo $M$ cada vértice é a capital de uma mesorregião e cada aresta é uma estrada que une duas capitais de regiões vizinhas.

[3]Vértice ou nó é a unidade fundamental da qual os grafos são formados.

Dada uma solução de tipo $(n_1, n_2, n_3, n_4)$, seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos $n_1$ vértices com a frequência $F_1$. Vamos provar primeiro que se algum vértice com valência maior a 4 está em $\mathcal{C}$, então $n_1 < 5$. Como regiões vizinhas não podem ter a mesma frequência, se um vértice $X$ está em $\mathcal{C}$, nenhum dos vértices vizinhos a ele está em $\mathcal{C}$, e portanto os outros elementos de $\mathcal{C}$ se encontram no grafo reduzido $M_X$. Examinemos os casos em que $X$ tem valência maior a 4.

1. $\underline{X = K, L}$. Nestes dois casos $M_X$ tem 5 vértices. O grafo reduzido $M_K$ é desconexo, sendo uma das componentes a cadeia $H - A - B - C$. Claramente, dois destes vértices não podem estar em $\mathcal{C}$, e portanto neste caso $n_1 < 5$. O grafo reduzido $M_L$ é conexo mas contém o triângulo formado pelos vértices $G$, $H$ e $I$. Novamente dois destes vértices não podem estar em $\mathcal{C}$; e como apenas um dos vértices da cadeia $E - F$ pode estar em $\mathcal{C}$, neste caso também temos $n_1 < 5$.

2. $\underline{X = D, J}$. Nestes dois casos $M_X$ tem 6 vértices. No grafo reduzido $M_D$ o vértice $H$ tem valência 4; assim, se $H \in \mathcal{C}$, apenas $B$ pode estar em $\mathcal{C}$, e portanto temos $n_1 < 5$. Se $H \notin \mathcal{C}$, então os elementos restantes de $\mathcal{C}$ estão na cadeia $G - I - J - A - B$; como no máximo 3 deles podem estar em $\mathcal{C}$, temos $n_1 < 5$. O grafo reduzido $M_J$ contém o vértice $D$, que já sabemos não pode estar em $\mathcal{C}$ se quisermos ter $n_1 = 5$. Assim, os elementos restantes de $\mathcal{C}$ têm que ser escolhidos nas cadeias $B - C$ e $E - F - G$; segue–se que neste caso $n_1 < 5$.

Temos então que se uma solução com $n_1 = 5$ existe, os vértices com frequência $F_1$ (os elementos de $\mathcal{C}$) devem ser escolhidos dentre os vértices do grafo que resulta de retirar todos os vértices com valência maior a 4 em $M$. A Fig.2.3(b) mostra este grafo. Existem duas maneiras de escolher os elementos de $\mathcal{C}$.

1. $\underline{I \in \mathcal{C}}$. Neste caso $H, G \notin \mathcal{C}$, e os elementos restantes de $\mathcal{C}$ tem que estar nas cadeias $A - B - C$ e $E - F$. Deste modo temos $n_1 < 5$.

2. $\underline{I \notin \mathcal{C}}$. Neste caso todos os elementos de $\mathcal{C}$ tem que estar na cadeia $E - F - G - H - A - B - C$ e portanto $n_1 < 5$.

Segue–se que não há como escolher $\mathcal{C}$ de modo que $n_1 = 5$; em outras palavras, a prova de que não há soluções do problema de frequências em Minas Gerais mais baratas que as do tipo $(4, 4, 3, 1)$ está completa.

## 2.2 Descrição da Oficina

A oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" inicia com a narração da história do problema das interferências nas frequências de transmissão nas mesorregiões de Minas Gerais. Para uma melhor compreensão dessas interferências por parte dos alunos, utilizamos a estratégia de dividir a turma em dois grupos formando círculos para simular a situação das fronteiras vizinhas. Em seguida, um aplicador fica no meio de cada círculo e conta a história (Ver seção 3.1.1), em voz alta (Figura 2.4). Para tanto, os círculos não devem ficar muito distantes, pois a intenção é que os alunos de um círculo possam ouvir o que o aplicador

Figura 2.4: Aplicadores lendo a História nos círculos.

do outro círculo está dizendo, produzindo assim dificuldades no entendimento da leitura, principalmente dos alunos que estão mais próximos do círculo vizinho. Se algum aluno se distrair com o relato contado no outro círculo, se recomenda pedir a ele apenas para não se distrair. Aconselhamos não dar muita importância a este fato, nem tentar impedir que aconteça de novo. É bom que alguns alunos se distraiam para criar uma situação análoga à da interferência.

Após a leitura da história, os alunos são organizados nas mesas em grupos de 4 componentes. Cada aluno recebe um mapa das mesorregiões de Minas Gerais e fichas de EVA para representar a frequência dos transmissores (ver figura A.3 do apêndice A). As Tabelas 2.1 e 2.2 informando o custo das trocas das frequências com seus respectivos valores e cores associadas é mostrada no quadro ou usando um data-show .

Logo em seguida verificamos, grupo por grupo, se todos entenderam razoavelmente o problema da interferência das transmissões. O ponto difícil da história é entender o motivo das pessoas que moram em alguma fronteira terem problemas para assistir a programação. Quando surgirem estas dificuldades, uma boa estratégia é fazer uma analogia com o motivo que levou alguns colegas a se distraírem com a história sendo contada no outro círculo.

Depois de resolvido o problema pelos alunos, abre-se um momento de discussão fazendo comparações das diversas soluções obtidas ao longo da atividade. Em seguida, induzimos o grupo de alunos a formular perguntas e discutir possíveis respostas, estimulando o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao processo de abstração.

Feitas essas considerações, se recomenda fazer os seguintes questionamentos:

1) Qual foi o preço mais barato que alguém conseguiu para mudar as frequências dos aparelhos transmissores?

2) Entre os que conseguiram o preço mais barato, todos conseguiram a mesma distribuição de frequências para cada mesorregião?

Durante a atividade alguns alunos encontram a solução do problema com mais rapidez que outros. Para esses alunos recomenda-se preparar atividades extras, chamadas "cartas na manga", para resolverem enquanto os outros colegas terminam. Procura-se que no momento do início das discussões todos tenham terminado a atividade.

## 2.3 Objetivos

Além dos objetivos gerais das Oficinas de Matemática Experimental, mencionados na Seção 1.3, temos também objetivos específicos que nesta oficina são apenas objetivos matemáticos. Por outro lado, quando a aplicação de uma OME revela que ela pode ser usada para atingir objetivos para os quais não foi planejada originalmente, estes objetivos são chamados de objetivos emergentes.

Os objetivos matemáticos da oficina são: 1) induzir o aluno a perceber que há problemas que podem ser resolvidos por analogia com o problema das 4 cores, 2) incentivá-los a concluir que o problema das frequências tem um custo mínimo, porém existem várias configurações para se chegar a ela e 3) objetivo emergente. Esta OME em particular possui um objetivo emergente, fazer com que o aluno consiga realizar operações combinadas de adição e multiplicação. Este objetivo emergente surgiu como produto da experiência obtida nas aplicações das primeiras versões.

# Capítulo 3

# Relatos de experiências

As oficinas de matemática experimental, foram realizadas no CPMRG como projeto piloto no ano de 2015. Neste ano as oficinas foram aplicadas no segundo semestre, em turno oposto escolar, quinzenalmente com 150 alunos do 6º ano divididos em seis grupos de 25 alunos. As atividades tinham duração de 90 (noventa) minutos e eram aplicadas em três grupos diferentes no mesmo horário, ao encerrar a oficina com estes três grupos, aplicávamos a mesma oficina aos outros três. Os grupos de alunos foram orientados por três ou mais aplicadores da equipe do POME. A equipe aplicadora se encarregava de dar as instruções de como realizar a atividade e incentivar a participação dos alunos, e era formada por professores da UESC, professores do CPMRG e alunos da licenciatura em Matemática da UESC participantes do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência).

No ano de 2016, foram feitos alguns ajustes. As oficinas passaram a ser realizadas no mesmo turno escolar do aluno, nas aulas de matemática, e para uma melhor logística, os grupos de alunos foram montados respeitando a mesma formação das seis turmas já existentes. As oficinas foram aplicadas a partir do primeiro semestre e a atividade era feita em duas salas ao mesmo tempo.

Uma coisa muito interessante que aconteceu durante a aplicação da oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" foi o surgimento do objetivo das operações combinadas. Observamos através das folhas de rascunho utilizadas pelos alunos que eles usavam apenas as estruturas aditivas. Por exemplo: em uma conta que eles poderiam usar a multiplicação 3 x 600 faziam uma soma 600+600+600. Observamos também que eles apresentavam dificuldades com as operações de adição.

Este capítulo traz alguns relatos das modificações realizadas com a experiência adquirida durante as aplicações desta oficina, relatos das experiências vivenciadas com os alunos, alguns depoimentos e uma entrevista sobre a mesma.

## 3.1 Modificações realizadas na Oficina

Durante o processo de criação da oficina, assim como durante as suas diversas aplicações, observamos alguns pontos que poderiam ser modificados proporcionando uma melhor execução da atividade por parte dos alunos participantes. Nesta seção relatamos as diversas modificações que ocorreram durante este processo.

### 3.1.1 Modificações realizadas no texto da Oficina

Para a confecção da oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" foi feita uma adaptação no texto do projeto MegaMath. A história abaixo é uma tradução livre do texto original do projeto MegaMath usado na elaboração da OME oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos"

A História da Televisão

> Depois de um tempo, a televisão veio para o reino e a cada bairro foi dado um transmissor de televisão para transmitir todas as notícias importantes do bairro, e para transmitir o entretenimento que as pessoas do bairro mais gostavam. (Isso foi, como você pode perceber, nos dias que antecederam a cabo). A princípio, os transmissores tinham apenas uma frequência ou canal, mas ocorreu um problema. As pessoas que vivem perto de uma fronteira, por vezes pegavam transmissões de seu próprio bairro, bem como da linha de fronteira. Os dois sinais se confundiam e distorciam. Eles não podiam dizer o que eles estavam assistindo!
>
> Decidiu-se resolver o problema fazendo novos canais suficientes de modo que poderia ser providenciado que o canal atribuído a cada vizinhança podia ser diferente do canal atribuído a qualquer bairro limítrofe. Para fazer um novo canal, era necessário naqueles dias, um cristal de ajuste caro. (Eles também usaram tubos de vácuo eletrônicos especiais ... mas isso é outra história). De qualquer maneira você observa que para ele fazer novos canais ia ser caro. Quantos canais que eles precisam?

As OMEs apresentam a característica de trabalhar o mais próximo da realidade dos alunos. Desde a oficina "Colorindo Mapas", os mapas fictícios foram substituídos por mapas reais, a fim de mostrar ao aluno a aplicabilidade do que se tem trabalhado nas oficinas. Para isso adaptamos o texto "A História da Televisão" relacionando-a com o mapa de Minas Gerais e introduzindo elementos que despertassem no aluno o interesse em ouvir a história. O texto a seguir apresenta esta adaptação.

Uma história de TV

> Eu não sei se esta história é verdadeira, mas um amigo meu me contou que um amigo dele lhe contou que um amigo deste amigo contou para este amigo, que quando a televisão chegou ao Brasil, o governo de Minas Gerais decidiu instalar uma emissora de televisão em cada mesorregião do estado. Cada emissora teria sua própria programação, de interesse a quem morasse na região da emissora; deste modo, pensou o governador, todo mundo iria ficar satisfeito assistindo os programas de que mais gostasse.
>
> A ideia pareceu muito boa, mas houve um problema. Como Minas Gerais tem doze mesorregiões, para economizar despesas o governo comprou doze aparelhos transmissores de televisão idênticos, que emitiam todos na mesma frequência. Assim, os moradores que viviam perto da fronteira entre duas regiões, quando ligavam seus aparelhos de tv assistiam as programações de duas regiões, a deles e a da região vizinha. O resultado, como você deve imaginar, era uma confusão de imagens e sons que não permitia assistir nenhuma das duas programações.
>
> Houve muitas queixas e reclamações, e o governo se viu obrigado a desembolsar um bom dinheiro para consertar a situação. A solução, pensou-se, seria comprar aparelhos de transmissão

novos que emitissem em frequências diferentes; assim, os moradores de cada região poderiam sintonizar seus aparelhos de TV no canal da emissora da sua região. Mas quando pesquisaram os preços dos novos aparelhos de transmissão... Resolveram que o melhor seria pensar mais um pouco ate encontrarem uma solução menos cara.

Acontece que um jovem cientista baiano, cujo nome acho que era Jenivaldo, havia inventado uma maneira de mudar a frequência de emissão dos aparelhos transmissores. Quando essa notícia chegou aos assessores do governador de Minas Gerais, eles chamaram Jenivaldo e lhe pediram que usasse sua invenção para resolver o problema dos transmissores que eles tinham. Jenivaldo aceitou prontamente e lhes apresentou esta tabela de preços, para que eles escolhessem quantos aparelhos deveriam ser alterados, e para quais frequências deveriam ser modificados.

| Troca de frequência | Preço em Cr$ |
|---|---|
| F1 → F2 | 600 |
| F1 → F3 | 1.200 |
| F1 → F4 | 2.400 |
| F1 → F5 | 4.800 |
| F1 → F6 | 9.600 |
| F1 → F7 | 19.200 |

Nesta tabela, a frequência F1 é a frequência original dos aparelhos de transmissão, as frequências F2, F3, até F7 são as novas frequências em que os transmissores modificados por Jenivaldo vão emitir, e os preços estão em cruzeiros, a moeda daquela época. A sua missão, se você decide aceitá-la, é encontrarmos o menor preço possível para consertar o problema da TV de Minas Gerias.

### 3.1.2 Modificações realizadas no Material de aplicação das Oficinas

Com a primeira aplicação da oficina, em 2015, observamos que os alunos escreviam as frequências diretamente no mapa, e como faziam os cálculos várias vezes tentando acertar, apagavam o papel e acabava rasurando-o com a borracha. Em 2016, criamos fichas de EVA coloridas representando as frequências para que os alunos fizessem as tentativas manipulando este material ao invés de escrever as frequências no mapa. Posteriormente implementada esta modificação, resolvemos colocar nas fichas a informação da frequência, ou seja, em cada ficha já vinha colada uma frequência. Por exemplo, as fichas na cor amarela já etiquetadas com a frequência F1, as fichas verdes com a frequência F2, as vermelhas com F3 e assim por diante como mostrada na figura A.3.

Durante a aplicação da OME devemos ficar atentos para não infringir as nossas próprias regras. Isto aconteceu durante uma das aplicações de “Uma História de TV. Minimizando Custos”. Logo no início da atividade pedimos que os alunos colocassem as fichas F1 em cada mesorregião do mapa de Minas Gerais, quando no entanto a recomendação 1.4.1 (seção 1.4 do capítulo 1) diz que as estratégias de resolução do problema não devem ser explicadas antes do início da atividade.

Em 2016 passamos também a distribuir uma folha de rascunho para que eles pudessem realizar os cálculos. Percebemos que os alunos faziam estes cálculos desordenadamente por toda a folha de rascunho e depois não conseguiam encontrar as suas respostas. Então, procurando uma melhor organização das informações na folha do mapa, acrescentamos uma tabela para ser preenchida com os resultados encontrados nos cálculos, feitos na folha de rascunho.

## 3.2 Resultados da experiência com os alunos

Foram muitas experiências vivenciadas nas aplicações da oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos", relatamos aqui algumas das observações percebidas neste processo.

Após o término da história, alguns alunos dizem entender a mesma, outros porém falam que ouviam as vozes das duas professoras e isso fazia com que eles se confundissem. Os alunos acabam percebendo que esta situação se parece com o problema da história em relação à interferência perto das fronteiras entre regiões.

Em uma das aplicações da oficina, colocamos os valores das frequências no quadro, distribuímos fichinhas amarelas dizendo que correspondia a frequência 1, e que estas não teriam custo nenhum, propomos que eles nos ajudassem a distribuir as frequências com o menor custo possível. Cada frequência nova tinha uma fichinha de cor diferente e também valor diferente. Distribuímos as fichinhas novas, para que eles pudessem substituir e manipular no mapa de Minas Gerais a melhor distribuição respeitando as regras de menor custo e regiões vizinhas com frequências diferentes.

A medida que eles encontravam o menor orçamento, colocávamos os valores no quadro e pedíamos que eles tentassem achar um orçamento menor. Mesmo depois de o valor CR$ 8.400,00 ter sido encontrado, pedimos aos alunos que continuassem tentando um valor menor. Depois que muitos encontraram o valor de CR$ 8.400,00, pedíamos que pintassem com as mesmas cores das fichas no mapa, para que essa distribuição ficasse arquivada e tentassem um outro mapa com orçamento menor ainda.

Depois de resolvido o problema da TV de Minas Gerais, distribuímos o mapa da Bielorússia (Figura 3.1) e pedimos que resolvessem o mesmo problema neste novo mapa. E para os alunos que conseguiram o menor orçamento para os dois mapas também foi entregue o mapa de Camarões (Figura 3.1) com o mesmo desafio.

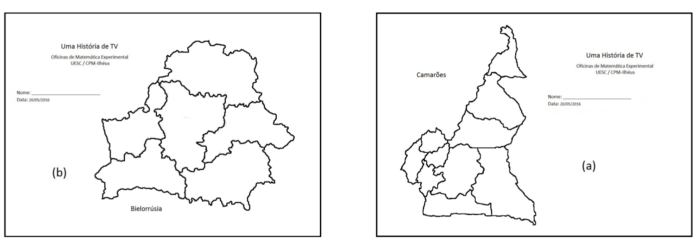


Figura 3.1: Mapas de Bielorrussia e Camaroes.

Esta oficina, em 2015, quebrou um pouco a resistência que os alunos tinham para colorir mapas, pois antes eles haviam participado das oficinas "Colorindo Mapas" e ficaram entediados de tanto colorir mapas. Nelas não era necessário efetuar cálculos, então os alunos não conseguiam identificar a matemática; diziam que mais parecia atividade de geografia ou de artes, menos matemática, pois para a grande maioria, matemática é só números. Em 2016, com o uso do material manipulável de EVA, os cálculos e o preenchimento das tabelas eles começaram a associar as atividades realizadas com a matemática. E o mais legal desta oficina, foi que no final, eles mesmos pediram os giz de cera para pintarem a solução encontrada e poder ficar arquivada em nossos materiais do projeto.

Foi muito gratificante vivenciar o quanto os alunos gostaram, participaram e se envolveram nessa oficina. Eles se sentiram desafiados a resolver o problema. A participação dos alunos foi surpreendente, observar cada rostinho entusiasmado ao perguntar, ao perceber que encontrou o mesmo valor do colega porém com pinturas diferentes me fez perceber a importância do projeto para despertar nesses alunos o interesse pela matemática. Foi muito diferente das aulas convencionais.

Figura 3.2: Fotos dos alunos participando da Oficina

## 3.3 Depoimentos e uma entevista sobre a Oficina

A oficina “Uma História de TV. Minimizando Custos” foi aplicada duas vezes no CPMRG e na XI Semana de Matemática da UESC. Nesta seção apresentamos alguns depoimentos transcritos de gravações de áudio e uma entrevista sobre a Oficina.

Depoimento do aluno Vinícius Carmo Almeida do Colégio Intebrado Manoel Lobo - Nova Canaã/ BA

*“Quando eu ouvi Uma História de TV, eu imaginei que a gente veria dentro da TV, o que acontece dentro da TV. Porque dentro da TV tem essas coisas de geometria, também essa questão de frequência, eu pensei que seria isso. Nunca pensei que seria o que esta-*

*mos fazendo. Quando recebi o mapa, pensei que seria interdisciplinar, geografia, geometria, matemática, tudo junto.*

*Vocês fizeram uma coisa bem diferente, muito, muito interessante e criativa porque te faz pensar realmente. Ao mesmo tempo que ela é difícil, ela chama a pessoa para fazer."*

Depoimento da aluna Fernanda Chéquer do Colégio Intebrado Manoel Lobo - Nova Canaã/ BA

*" Eu achei super, super interessante, muito criativo, eu recomendo que passe isso em todas as escolas do mundo porque é muito interessante faz você pensar."*

Entrevista com o Professor de matemática do CPMRG Eudson Cardoso Silva membro da equipe do POME. Vale ressaltar que no ano de 2016 ele não estava na sala aplicando o projeto, pois não estava lecionando no 6° ano, porém nas suas horas disponíveis participava das reuniões e muito contribuiu para o progresso do mesmo.

Luciene: O que você acha do POME?

Eudson: *"Um projeto ousado, inovador e desafiante. Por ser um projeto de matemática é ousado por não trabalhar conteúdos específicos de matemática e ao mesmo tempo inovador por ser algo diferente e os próprios alunos questionam porque estão acostumados com uma matemática de quadro, giz e o grande desafio é fazer com que eles percebam que este projeto melhora a concentração, o raciocínio lógico matemático e o poder de argumentação."*

Luciene: E sobre a oficina "Uma História de TV"?

Eudson: *Uma História de TV relata de modo fictício um estado brasileiro que possuía problemas de transmissão entre as mesorregiões do Estado e o desafio apresentado aos alunos é resolver esse problema tentando minimizar custos. O interessante desta oficina é que os alunos podem encontrar várias soluções e depois comparar os resultados com o dos seus colegas e percebem que a solução apresentada por eles pode não ser a melhor pois podem existir situações onde os custos são menores e ao final da oficina fica uma interrogação: Será possível obter um resultado com menor custo?*

Luciene: O que você observa no comportamento e na participação dos alunos durante a oficina "Uma História de TV"?

Eudson: *A princípio muita expectativa e curiosidade no que está por vir, durante a execução da atividade é percebido muito empenho e elaboração de estratégias na resolução dos cálculos e competitividade entre eles na apresentação do melhor resultado. E o melhor de tudo é que eles não têm medo de perguntar, não existe receio em dar opinião e fazer interferência na fala do outro.*

Depoimento da Professora de matemática do CPMRG Katiane Pereira membro da equipe do POME sobre a aplicação da Oficina.

*"Essa oficina para mim, por enquanto é a melhor oficina do Projeto, tanto para os alunos que ficam muito motivados, quanto para nós professores, pois vemos um brilho nos olhos dos nossos alunos ao tentarem resolver o problema das frequências da televisão, os alunos não reclamam, não ficam desmotivados, mesmo você dando até três mapas diferentes para ser feito".*

Depoimento do Professor de matemática da UESC Carlos Luide Bião dos Reis, mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia, membro da equipe do POME, sobre a aplicação da Oficina.

*"Uma maneira simples, lúdica e contemporânea de introduzir a modelagem matemática nas séries iniciais do ensino básico. Surpreendente, como um único problema pode possuir muitas soluções e, ademais, com a possibilidade de solucionar como se fosse um problema de 4 cores. A simplicidade ocorre no início da apresentação, quando a confusão de vozes elucida a problemática fazendo os mais atenciosos vivenciar a aflição dos moradores limítrofes. A motivação se dá no momento em que a atividade transforma os alunos em cientistas capazes de resolver o problema e nada mais contemporâneo do que estruturar e solucionar quantitativamente um problema de minimização de despesas. O encantamento se dá justamente quando surgem as diversas soluções para um mesmo problema e o ápice quando associa ao problema das 4 cores. Participar de uma oficina como essa é (foi, será) simplesmente fantástico".*

Depoimento do Professor de matemática Antônio César Nascimento Teixeira, mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz, membro da equipe do POME, sobre a aplicação da Oficina.

*Para mim foi gratificante participar das Oficinas. Pude perceber o envolvimento e o entusiasmo dos estudantes quando chegávamos nas salas de aula.*

*Esse envolvimento e entusiasmo dos alunos me trouxe a lembrança o pensamento de Vergnaud (1990). Para o referido teórico é por meio de situações que o sujeito é confrontado com novas experiências e ele utiliza dos conhecimentos já adquiridos na tentativa de realizar novas descobertas.*

*Embora as situações que os estudantes se confrontaram nas oficinas não fossem de um conteúdo matemático específico, via neles uma busca pelos conhecimentos que possibilitassem à ele solucionar o que estava sendo proposto.*

*Minha participação nessas oficinas me fez refletir quanto a minha didática, pois, novamente percebi que devemos levar aos estudantes a Matemática de uma maneira prazerosa, de forma que eles tenham gosto por ela e não aversão.*

# Capítulo 4

# Discussão e considerações finais

As aplicações e desenvolvimento das OMEs trouxeram uma contribuição relevante para nossa equipe do POME, permitindo trabalhar com a Matemática de uma forma diferenciada, por meio de atividades lúdicas, o que possibilitou que despertássemos a curiosidade e o interesse dos alunos para essa área de conhecimento vista por muitos com pouca empatia.

Além disso, a realização das oficinas reforça a importância de enfrentarmos os desafios relacionados ao ensino da matemática a partir da implementação de estratégias que vão de encontro ao ensino da matemática na forma tradicional, confrontando a dificuldade dos alunos com situações-problema que estimulem o pensamento autônomo deles, a partir do uso de recursos que despertem o seu interesse pela matemática.

Neste capítulo é mencionado alguns resultados encontrados com o POME, algumas sugestões que podem contribuir para o sucesso das OMEs e apresento as minhas considerações finais sobre este TCC.

## 4.1 Discussão dos resultados

O processo de ensino/aprendizagem em matemática apresenta uma série de desafios tanto para o professor quanto para o aluno. Diante de contextos escolares que evidenciam certa apatia, desinteresse e dificuldade por parte dos alunos em relação à matemática, emerge a necessidade de um olhar mais atento dos educadores para enfrentar os problemas latentes na matemática.

Entendemos que o papel do professor é abrir caminhos para novas práticas de ensino, de maneira a permitir com que os alunos conheçam a matemática de uma forma prazerosa e interessante. Nessa conjuntura, oficinas pedagógicas voltadas para o ensino da matemática se apresentam como uma excelente ferramenta de aprendizagem. As OMEs são uma alternativa que prioriza o diálogo, tornando a atividade uma oportunidade de trazer o aluno para mais perto da Matemática, valorizando a sua participação efetiva e dando aos mesmos a oportunidade de se expressarem.

Do ponto de vista do professor, por mais empolgantes que sejam as oficinas, percebemos que são atividades trabalhosas e de caráter dinâmico, pois exige deles um grande envolvimento tanto na sua elaboração quanto na aplicação. Não foram poucas as vezes em que, no processo de elaboração de uma oficina, saímos da nossa zona de conforto para estudar novos conteúdos e preparar material específico, sempre deixando tudo organizado com antecedência para que no dia da aplicação todas as interferências, relativas ao planejamento fossem amenizadas. Para que tudo ocorra conforme o planejado, o professor deve ter um forte envolvimento na criação das oficinas, conhecer profundamente o problema e desenvolver habilidades de improvisação efetiva.

Constatamos que a importância do planejamento e o conhecimento dos professores em relação à atividade, foram fundamentais para eles terem controle sobre todas as suas etapas. Facilitando a liderança e atraindo a atenção dos alunos, resgatando os possíveis dispersos, sem causar um desconforto para que eles não perdessem o interesse pela oficina e a motivação em realizá-la.

Outro fator que colaborou para o sucesso das OMEs foi a nossa equipe ser alicerçada por quatro pilares: professores de Matemática e professores de Educação Matemática da UESC, professores do CPMRG e alunos da licenciatura de matemática da UESC, participantes do PIBID. A troca de experiências entre os integrantes do POME, cada um com suas especificidades, foi um ponto forte pois todos contribuíram dando opiniões em todas as etapas do trabalho. Procuramos montar equipes aplicadoras formadas por pelo menos um membro de cada pilar antes mencionado, e destacamos que os alunos do CPMRG podem ser considerados o quinto pilar do projeto, pois as intervenções orais e escritas deles constituem uma fonte inesgotável de dados para o melhoramento das oficinas.

No começo da aplicação do projeto, embora os alunos tenham manifestado receio diante da proposta, foi perceptível a ansiedade frente à novidade, demostrando grande expectativa em saber como seriam tais atividades. Essa percepção nos motivou a encararmos o desafio de expor a esses alunos que a "verdadeira matemática" vai muito além da resolução de situações-problema cobrada pelas atividades escolares; coube a nós mostrar aos alunos que fazer matemática pode ser divertida. De forma simples ou complexa, a matemática se faz presente na nossa vida e, portanto, precisa ser encarada com a devida importância que tem.

Buscamos realizar as oficinas de maneira que os alunos se sentissem atraídos pela Matemática. Nesse sentido o uso do lúdico apresentou-se como algo bastante relevante, pois, assim, pudemos contatar um aumento gradativo na receptividade dos alunos em relação às atividades. Eles começaram a se sentir tão à vontade, que passaram a refletir, discutir e questionar.

Observamos que nas aulas tradicionais, é comum perceber muitos alunos incomodados com o fato de terem que efetuar contas, mas isto não ocorreu durante tal trabalho em momento algum, nos levando a conjecturar que a necessidade de executar operações aritméticas surge de modo natural. Assim, até aqueles que tinham dificuldades procuravam um colega para pedir ajuda na resolução.

O projeto foi aplicado com alunos do 6° ano e nesta idade os meninos não usam o princípio multiplicativo, a maioria deles efetuam operações de soma. Na aplicação desta oficina na XI Semana de Matemática da UESC com alunos do Ensino Médio, percebemos exatamente o contrário, eles logo utilizam a multiplicação na resolução dos cálculos .

## 4.2 Considerações futuras

Com a experiência adquirida com a realização das oficinas, identificamos e elencamos alguns procedimentos que são indispensáveis para o sucesso das mesmas.

Uma sugestão é reservar no final dela, um momento para reflexão com os alunos, para que eles possam expressar suas opiniões sobre a atividade destacando as contribuições provenienes delas. Este procedimento tem o objetivo de contribuir para possíveis ajustes nos próximos planejamentos. Salientamos que na maioria das oficinas que aplicamos nos anos anteriores, não conseguimos realizar este momento com os alunos, apenas com os professores e alunos do PIBID, e destacamos que isso fez falta. Para garantir este momento de reflexão sugerimos que algumas delas sejam reorganizadas, divididas em mais de uma sessão, possibilitando mais tempo para fazer as ponderações da atividade também com os alunos.

Com base em dois capítulos do projeto MegaMath conseguimos produzir sete oficinas, por isso como sugestão para trabalhos futuros, pretendemos explorar outros capítulos deste projeto. Outra sugestão é a criação de oficinas relacionadas com os conteúdos matemáticos da série aplicada. Por exemplo, em se tratando de Análise Combinatória podemos mencionar os trabalhos de Mariluce de Oliveira Silva, "Do Triângulo à Pirâmide de Pascal", e o de Vinícius Modesto Sertório de Souza, "Oficina de Matemática Experimental: Do Princípio multiplicativo ao Fatorial". Assim como, elaborar propostas de oficinas que explorem a escrita e a capacidade de argumentação dos alunos na resolução de problemas. Buscando diversificar o tipo de atividade lúdica, já criamos e aplicamos uma oficina intitulada "Batalha das Cores" que consiste em um jogo de estratégia entre dois jogadores, no qual não há empate.

Tendo em vista os bons resultados relativos à aplicação das oficinas realizadas, também podemos apontar como sugestão, elaborar outros formatos de atividades lúdicas para oficinas futuras, formatos como dramatização, paródias, etc. Importante mencionar que algumas sugestões citadas acima fogem um pouco da proposta original do POME, mas acreditamos que devemos sempre estar abertos a novas ideias, inovando e fazendo atividades cujo objetivo seja atingir o interesse do aluno pela matemática. As experiências com as OMEs está indo além do espírito do projeto MegaMath.

O projeto continuará sendo aplicado neste ano, 2017, no CPMRG com as turmas do 6° ano do Ensino Fundamental. O foco principal será consolidar as oficinas já existentes. Também será aplicada a oficina "Entrando numa Fria" no Projeto "Festival da Matemática" - IMPA, na cidade do Rio de Janeiro no período de 27 a 30 de abril.

Em relação a oficina "Uma História de TV", observamos que alguns alunos não conseguem chegar ao menor valor possível devido ao tempo da aplicação da oficina, por vezes não participando das discussões. Uma sugestão é que eles levem para casa o material e tentem chegar neste valor mínimo. No próximo dia de oficina, o professor deverá fazer uma exposição das soluções através de um varal, e pedir que eles analisem e façam comparações, e pedir ainda que observem que existe um único valor mínimo mas com distribuições diferentes das frequências.

## 4.3 Considerações Finais

A realização desse projeto contribuiu para o aprimoramento do meu trabalho como professora de matemática pertencente ao quadro do CPMRG. Com a aplicação das OMEs pude observar em toda a equipe uma evolução muito boa ao longo desse tempo, mas no começo muitos professores apresentaram resistência e dificuldade em migrarem para uma proposta pedagógica como esta, pois já estavam acostumadas ao modo tradicional de ensino. Foi difícil mas valeu a pena.

As OMEs, e em particular a oficina "Uma História de TV. Minimizando Custos" me permitiu trabalhar a disciplina com um olhar mais dinâmico e criativo. Esta conduta permitiu um melhor aproveitamento no processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que os mesmos desmistificaram a ideia que a matemática é algo inacessível.

A existência de objetivos emergentes revelou o caráter dinâmico não-linear das OMEs. Em outras palavras, uma OME nunca é um objeto finalizado, pois ela se retroalimenta com as aplicações.

Essa experiência mostrou-se positiva e evidenciou a importância de nós professores encontrarmos novos caminhos para o ensino da matemática, de modo a contribuir para que os alunos passem a enxergá-la como a área de conhecimento que ela de fato é, dito de outro modo, uma área fascinante. Ao mesmo tempo, é fundamental que os alunos sejam estimulados ao pensamento independente, o que lhes permitirá a utilização de recursos e instrumentos úteis no seu futuro. Assim, concluo que as Oficinas de Matemática Experimental são uma ótima contribuição para a construção do conhecimento no processo de ensino/aprendizagem em Matemática.

# Apêndice A

# Roteiro da Oficina: Uma História de TV. Minimizando custos.

## A.1 Objetivos

1. Objetivos matemáticos.
   (a) Induzir o aluno a perceber que há problemas que se resolvem por analogia com o problema das 4 cores.
   (b) Apresentar ao aluno uma situação interessante onde precisa executar operações aritméticas combinadas de adição e multiplicação.
2. Objetivos heurísticos.
   (a) Expor o aluno ao desafio de enfrentar problemas muito difíceis de serem resolvidos.
   (b) Induzir a percepção de que há problemas que tem muitas soluções.
   (c) Induzir o aluno a estabelecer analogias entre situações novas e situações familiares.
   (d) Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando–o a formular e testar hipóteses.
   (e) Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
   (f) Introduzir a ideia de simplificação como estratégia de resolução de problemas.
   (g) Estimular o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos processos de abstração e de argumentação.
3. Objetivos não–matemáticos.
   (a) Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

## A.2 Lista de Equipamentos e Materiais

1. Um datashow.

2. Um mapa das mesorregiões do estado de Minas Gerais por aluno (veja a Figura A.1).

3. Fichas de EVA etiquetadas nas seguintes quantidades por aluno.

   (a) 12 fichas F1.
   (b) 6 fichas F2 e 6 fichas F3.
   (c) 4 fichas F4 e 4 fichas F5.
   (d) 2 fichas F6 e 2 fichas F7.

   As fichas são construídas cortando quadrinhos em EVA e colando as etiquetas mostradas na Figura A.3.

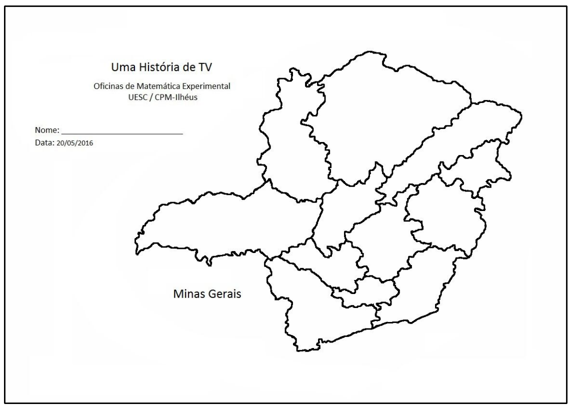


Figura A.1: Mapa das mesorregiões do estado de Minas Gerais. Este mapa é utilizado na atividade inicial da oficina.

1. **Carta na Manga 1.** Um mapa da República dos Camarões por aluno (veja a Figura A.2a).

2. **Carta na Manga 2.** Um mapa da República de Bielorrússia por aluno (veja a Figura A.2b).

### A.2.1 Atividades

1. **Relato da história.**

   (a) Divida a turma em dois grupos e forme um círculo com cada um.
   (b) Um professor no meio de cada grupo conta "Uma História de TV" em voz alta.
   (c) Os círculos não devem ficar muito distantes; os alunos de um círculo que estão próximos do *outro círculo* devem ser capazes de ouvir o que o professor daquele círculo está dizendo (veja as Recomendações 1 e 2).

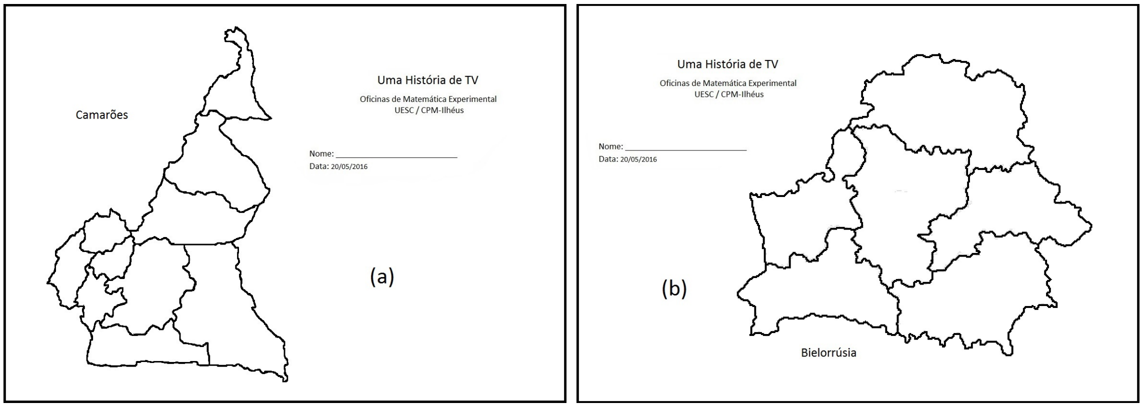


Figura A.2: Mapas das repúblicas de Camarões (a) e Bielorrússia (b). Estes mapas são usados para simplificar o problema das frequências e o problema da certeza.

**Uma história de TV**

Eu não sei se esta história é verdadeira, mas um amigo meu me contou que um amigo dele lhe contou que um amigo deste amigo contou para este amigo, que quando a televisão chegou ao Brasil, o governo de Minas Gerais decidiu instalar uma emissora de televisão em cada mesorregião do estado. Cada emissora teria sua própria programação, de interesse a quem morasse na região da emissora; deste modo, pensou o governador, todo mundo iria ficar satisfeito assistindo os programas de que mais gostasse.

A ideia pareceu muito boa, mas houve um problema. Como Minas Gerais tem doze mesorregiões, para economizar despesas o governo comprou doze aparelhos transmissores de televisão idênticos, que emitiam todos na mesma frequência. Assim, os moradores que viviam perto da fronteira entre duas regiões, quando ligavam seus aparelhos de tv assistiam às programações de duas regiões, a deles e a da região vizinha. O resultado, como você deve imaginar, era uma confusão de imagens e sons que não permitia assistir nenhuma das duas programações.

Houve muitas queixas e reclamações, e o governo se viu obrigado a desembolsar um bom dinheiro para consertar a situação. A solução, pensou–se, seria comprar aparelhos de transmissão novos que emitissem em frequências diferentes; assim, os moradores de cada região poderiam sintonizar seus aparelhos de tv no canal da emissora da sua região. Mas quando pesquisaram os preços dos novos aparelhos de transmissão... Resolveram que o melhor seria pensar mais um pouco até encontrarem uma solução menos cara.

Acontece que um jovem cientista baiano, cujo nome acho que era Jenivaldo, havia inventado uma maneira de mudar a frequência de emissão dos aparelhos transmissores. Quando essa notícia chegou aos assessores do governador de Minas Gerais, eles chamaram Jenivaldo e lhe pediram que usasse sua invenção para resolver o problema dos transmissores que eles tinham. Jenivaldo aceitou prontamente e lhes apresentou esta tabela de preços, para que eles escolhessem quantos aparelhos deveriam ser alterados, e para quais frequências deveriam ser modificados. (Mostrar a tabela no datashow)

| Troca de frequência | Preço em Cr$ |
|---|---|
| F1 → F2 | 600 |
| F1 → F3 | 1.200 |
| F1 → F4 | 2.400 |
| F1 → F5 | 4.800 |
| F1 → F6 | 9.600 |
| F1 → F7 | 19.200 |

Nesta tabela, a frequência F1 é a frequência original dos aparelhos de transmissão, as frequências F2, F3, até F7 são as novas frequências em que os transmissores modificados por Jenivaldo vão emitir, e os preços estão em cruzeiros, a moeda daquela época. A sua missão, se é que você decide aceita–la, é encontrar o menor preço que é possível pagar para consertar o problema da tv de Minas Gerias.

2. **Problema das frequências.**
   (a) Depois de terminar a história, faça os alunos voltarem às suas mesas.
   (b) Entregue a cada aluno um mapa das mesorregiões de Minas Gerais e as fichas de EVA.
   (c) Explique sem rodeios que uma ficha em uma região do mapa representa a frequência do transmissor naquela região, e peça para cada aluno distribuir as 12 fichas F1 no mapa, colocando uma ficha em cada mesorregião.
   (d) Peça para resolver o desafio.
   (e) Verifique mesa por mesa se todos entenderam *razoavelmente* o problema da interferência das transmissões .

3. **Discussão.** Compare as diversas soluções obtidas, mas para isto veja as Recomendações.
   (a) Qual foi o preço mais barato que alguém conseguiu para mudar as frequências dos aparelhos transmissores?
   (b) Entre os que conseguiram o preço mais barato, conseguiram todos a mesma distribuição de frequências para cada mesorregião?

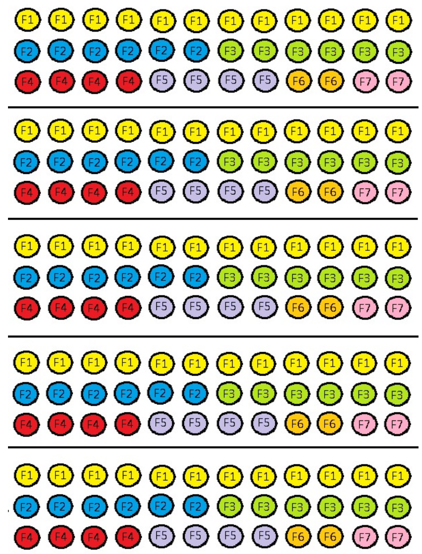

Figura A.3: Folha com as "fichas"; cada aluno recebe um pacote.

### A.2.2 Recomendações da Oficina Uma História de TV

1. Se na hora de contar "Uma História de TV" na Atividade 1, algum aluno se distrair com a história sendo contada no outro círculo; peça *levemente* para não se distrair. Não dê muita importância a este fato, nem tente impedir que aconteça de novo. Como se vê no próximo item, *é bom* que alguns alunos se distraiam e que isso aconteça algumas vezes.

2. O ponto difícil em "Uma História da TV" é entender o motivo das pessoas que moram em alguma fronteira terem problemas para assistir a programação. Quando surgirem estas dificuldades, faça analogia com o motivo que levou alguns colegas a se distraírem com a história sendo contada no outro círculo (veja o item anterior).

# Apêndice B

# Resumo dos capítulos do MegaMath

Neste apêndice, apresentamos um pequeno resumo de cada um dos 8 capítulos do texto de referência do projeto MegaMath, para que o leitor tenha uma idéia do que é abordado em cada um deles e possa estimular a sua curiosidade em conhecer o projeto que inspirou a criar o nosso POME.

O Capítulo 1 fala sobre a filosofia do projeto MegaMath apresentando uma descrição dos capítulos posteriores, introduzindo a alguns quebra-cabeças e idéias de ciência da computação importantes. Todas as atividades envolvem a exploração prática, e muitas oportunidades para o pensamento matemático, resolução de problemas e comunicação.

"A matemática mais colorida de todas", do Capítulo 2, gira em torno de um problema básico: O Problema das Quatro Cores. Este problema trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir qualquer mapa, de países reais ou imaginários, de forma a que países com fronteira comum tenham cores diferentes.

O Capítulo "Desembaraçar a matemática dos nós", centra a sua atenção na teoria dos nós, tema que tem capturado a atenção dos matemáticos durante os últimos cem anos. Recentemente o estudo de nós mostrou-se de grande interesse para físicos teóricos e biólogos moleculares. Este Capítulo 3 apresenta uma variedade de atividades que ajudam os alunos a explorar nós feitos de pedaços de corda. A experiência manipulativa é um desafio significativo e interessante para todos os alunos. Os professores podem ajudar os alunos a aprenderem a fazer isso, ajudando-os a desenvolver convenções de sala de aula para nomear nós, partes de nós, grupos de nós ou para rotular partes de nós tornando-os mais fáceis de falar.

Os grafos são objetos matemáticos que são feitos de pontos conectados por linhas. O capítulo 4 se utiliza da Teoria dos Grafos. Os grafos são ferramentas muito poderosas para criar modelos matemáticos em uma grande variedade de situações. A teoria dos grafos tem sido instrumento para analisar e resolver problemas em áreas tão diversas como o design de redes de computadores, planejamento urbano e biologia molecular. A teoria dos grafos tem sido usada para encontrar a melhor maneira de rotear e programar aviões e inventar um código secreto que ninguém possa rastrear.

O Capítulo 5 trata de uma máquina de estado finito, uma máquina imaginária, usada para estudar sistemas de design que reconheçam e identifiquem padrões. A idéia de uma máquina de estado finito tem muitas aplicações em ciência da computação. A principal atividade deste capítulo é a linguagem, na qual os alunos devem utilizar para operacionar uma máquina de estado finito, desenhada com fita adesiva na sala de aula. Os diagramas que descrevem a máquina de estado finito são modelos matemáticos que os cientistas usam para descobrir como projetar um sistema que lhes diga o que eles precisam saber. Em seguida, esses sistemas são transformados em programas de computador que analisam os dados para os cientistas.

Às vezes não achamos que temos informações suficientes para resolver um problema. Podemos usar a análise lógica para apontar informações que, embora não explicitamente afirmadas, podem ser inferidas a partir do que sabemos. No Capítulo 6, os alunos realizam um jogo que acontece em uma escola onde alguns desses alunos sempre mentem e o resto sempre dizem a verdade. No início, parece que nunca há informações suficientes, mas em cada caso, é possível que Terry, o protagonista, saiba mais sobre os alunos do que possa parecer possível.

Onde vamos localizar sorveterias em nossa cidade para que ninguém tenha que viajar muito longe para comprar um sorvete? As estratégias de resolução de problemas para esse contexto se aplicam a muitas outras situações que exigem planejamento para instalações. No Capítulo 7, Algoritmos e sorvetes para todos, os alunos terão a chance de lidar com a noção de prova e decidir o que torna uma solução satisfatória. Eles também estão expostos a um importante problema não resolvido em matemática.

O infinito surge no discurso cotidiano como uma forma superlativa da palavra muitos. Quanto é isso? Qual é o tamanho do infinito? Não podemos contar o infinito. Contudo, estamos confortáveis com a ideia de que existem infinitamente muitos números com os quais se pode contar: não importa quão grande seja o número que você possa imaginar, alguém pode vir com um número maior acima do citado. Simplesmente não há número maior. Existe algo maior do que o infinito? Essa e outras perguntas são feitas pelas crianças, pois para elas o conceito de infinito é novo e geralmente não se obtêm respostas muito satisfatórias. O Capítulo 8, nos apresenta o Hotel Infinito. Nele a aritmética transfinita é sutil e paradoxal. É esperado que os alunos devam desfrutar da história e apreciar os paradoxos, mas não resolvê-los.

# Referências Bibliográficas


[1] SADOVSKY, Patricia, *Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática*, Nova Escola. São Paulo, Ed. Abril, Jan./Fev. 2007.

[2] BRASIL - Parâmetros Curriculares Nacionais ($1^a$ a $4^a$ série): Matemática/ Secretaria de Educação. Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1997.

[3] BRASIL - Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF. 1998.

[4] CASEY, Nancy, FELLOWS, Mike, *This Is MEGA-Mathematics!, STORIES AND ACTIVITIES FOR MATHEMATICAL THINKING PROBLEM-SOLVING AND COMMUNICATION*, Los Alamos National Laboratory - grupo de pesquisa e aplicações informáticas (CIC-3): Los Alamos, EUA (NM), 1993.

[5] CANDAU, Vera Maria et al., *Oficinas pedagógicas de direitos humanos*, 2ª ed. Petrópolis, RJ : Vozes, 1995.

[6] FREIRE, Paulo, *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*, 8ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

[7] LUCKESI, Cipriano Carlos. *"Desenvolvimento dos estados de consciência e ludicidade"*, in Interfaces da Educação, Cadernos de Pesquisa - Núcleo de Filosofia e História da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, UFBA, vol. 2, no. 1, 1998.

[8] OLIVEIRA, Marta Kohl de, *Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento - Um processo sócio-histórico.*, São Paulo: CENP, 1998.

[9] TEIXEIRA, Carlos E. J., *A ludicidade na escola.*, São Paulo: Loyola, 1995.

[10] SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. *"Matemática é difícil": Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos.*, 2002. Disponível em: http://www.anped.org.br/25/marisarosaniabreu silveiratl9.rtf

[11] OMISTE, A. Saavedra, LÓPEZ, Maria Del C., RAMIREZ, C.*Formação de grupos populares: uma proposta educativa*, In CANDAU, Vera Maria; SACAVINO, Susana (Org.) Educar em direitos humanos: construir democracia. Rio de Janeiro : DP&A, 2000.

[12] http://www.cartaeducacao.com.br/reportagens/brasil-mantem-ultimas-colocacoes-no-pisa/

[13] MACEDO, Lino de, PETTY, Ana Lúcia Sícoli, PASSOS, Norimar Christe. *4 Cores, Senha e Dominó. Oficinas de Jogos em uma Perspectiva Construtivista e Psicopedagógica*, São Paulo: Casa do Psicólogo Livraria e Editora Ltda, 1997, 6ª Edição, 2008.

[14] GOMERO, Germán Ignacio Ferrer, SILVA, Mariluce de Oliveira. *Matemática Experimental com o Triângulo de Pascal* (Em preparação).

[15] BARBOSA, Ruy Madsen. *Combinatória e Grafos*, São Paulo: Livraria Nobel, 1974-1975, V2.

[16] SZWARCFITER, Jayme Luiz. *Grafos e algoritmos computacionais*, Rio de Janeiro: Editora Campus, 1988.