UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RESOLVENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

JOSÉ ROBERTO TIMOTE SANTOS

ORIENTADOR: VINICIUS AUGUSTO T. ARAKAWA

Ilhéus - BA
22 de março de 2017

JOSÉ ROBERTO TIMOTE SANTOS

RESOLVENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Básica.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

Ilhéus - BA
22 de março de 2017

S237 Santos, José Roberto Timote.
Resolvendo problemas de matemática utilizando áreas de figuras geométricas / José Roberto Timote Santos. – Ilhéus : UESC, 2017.
69f. : il.
Orientador : Vinicius Augusto Takabashi Arakawa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Geogebra (Programa de computador). I. Arakawa, Vinícius Augusto Takabashi. II. Título.

CDD – 510.7

JOSÉ ROBERTO TIMOTE SANTOS

RESOLVENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Básica.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 09 de março de 2017:

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa
Orientador

Natália Rocha Pinheiro

Prof. Me. Natália Rocha Pinheiro
(UESC - Ilhéus)

Prof. Me. Roque da Silva Lyrio
(IFBA - Valença)

Ilhéus - BA

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus que iluminou meu caminho, dando-me saúde e paz para a realização dessa árdua tarefa.

À minha esposa Gerlane, por ter me acompanhado dando-me força e incentivos a vencer mais essa etapa da minha vida.

Ao meu filho Mateus Timote e à meus pais pela compreensão de alguns momentos não ter dado a atenção necessária.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa, que sempre se mostrou disposto a contribuir e a apoiar-me no desenvolvimento deste trabalho. Me encorajou e acreditou na minha aprovação no exame de qualificação.

Aos colegas, que sempre me deram as mãos quando mais precisei, em especial os amigos Manoel Isaque e Roberto Loscha que foram como um irmãos nessa longa jornada.

À escola Maria Carelli Lomonte e toda equipe que contribuíram com meus horários de aula.

À Capes pelo apoio financeiro.

"A cabeça que encontra a solução
é a mesma que elabora o problema".
(Leandro Karnal)

RESUMO

Esse trabalho tem o objetivo geral de apresentar o conceito de áreas de figuras geométricas no plano como uma ferramenta matemática para resolução de diversos problemas e também para demonstração de proposições e teoremas importantes que não necessariamente estão no contexto de áreas ou mesmo de Geometria.

Foi proposta e realizada uma sequência didática para alunos do 6º ano referente a esse tópico que muitas vezes é subutilizado. Foram propostas atividades com uso do software Geogebra na tentativa de, juntamente com os alunos, conjecturar fórmulas, demonstrar os padrões visualmente para que os alunos ficassem munidos de ferramentas para resolução de outros problemas propostos. Acreditamos que a internalização desse conceitos e também de seu uso em diversos campos da Matemática, o educando terá oportunidade de pensar, repensar e definir estratégias para resolver os problemas de forma mais criativa, lúdica e independente.

Palavras-chave: Conceito de área; Resolução de Problemas; Fórmulas; Sequência Didática; Software Geogebra.

Abstract

This work has the general objective of presenting the concept of areas of geometric figures in the plane as a mathematical tool to solve various problems and also to demonstrate important propositions and theorems that are not necessarily in the context of areas or even Geometry.

A didactic sequence was proposed and carried out for students of the 6th year referring to this topic that is often underutilized. Activities with the use of Geogebra software were proposed in an attempt to conjecture formulas with the students, to demonstrate the patterns visually so that students would be provided with tools to solve other problems proposed. We believe that the internalization of these concepts and also their use in various fields of Mathematics, the student will have the opportunity to think, rethink and define strategies to solve problems in a more creative, playful and independent.

Key-words: Area concept; Problem solving; Formulas; Didactic Sequence; Geogebra Software.

Lista de Figuras

1 Triângulo Egípcio . . . 13
2 Parte do Rhind . . . 13
3 Os Elementos de Euclides . . . 14
4 Os Elementos de Euclides traduzido para português . . . 14
5 George Polya, (1887-1985) . . . 15
6 Unidade de Área 1 . . . 18
7 Unidade de Área 2 . . . 18
8 Região irregular . . . 19
9 Polígono inscrito na região irregular . . . 19
10 Polígono inscrito com mais aproximação . . . 20
11 Triângulo . . . 20
12 Triângulo 1 . . . 21
13 Triângulos de mesma área . . . 22
14 Utilização da propriedade 1 . . . 23
15 Triângulo dividido em seções triangulares de mesma área . . . 23
16 Triângulo dividido em partes . . . 24
17 Triângulos de áreas proporcional as suas bases . . . 24
18 Igualdade de áreas . . . 26
19 Triângulo isósceles . . . 27
20 Triângulo com bissetriz . . . 28
21 Triângulo retângulo em A de lados a, b e c . . . 29
22 Demonstração do Teorema de Pitágoras . . . 29
23 Triângulo ABC qualquer . . . 31
24 Demonstração da lei dos cossenos . . . 32
25 Feixe de retas paralelas r, s e t por transversais u e v . . . 34
26 Triângulos no feixe de retas . . . 34
27 semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e centro C . . . 36
28 Turma do 6º ano . . . 39
29 Tela do Geogebra . . . 41
30 Retângulo . . . 42
31 Triângulo . . . 43
32 Transformação de triângulo em retângulo . . . 43
33 Triângulo obtusângulo . . . 44
34 Triângulo retângulo ADC . . . 44
35 Triângulos de mesma base e altura . . . 45
36 Paralelogramo . . . 45
37 Transformação de paralelogramo em retângulo . . . 46
38 Trapézio . . . 46
39 Transformação de Trapézio em retângulo . . . 46
40 Losângo . . . 47
41 Transformação de Losango em retângulo . . . 47
42 Figuras geométricas básicas . . . 49
43 Mesma quantidade de Unidades . . . 49
44 Área de algumas figuras básicas feita por aluno do 6º Ano . . . 50
45 Unidade . . . 51
46 Polígonos no quadro branco . . . 51
47 Figura com malha . . . 52
48 Problema deixado no quadro . . . 52

49 Malha com vários modelos da fórmula de Pitágoras 53
50 Teorema de Pitágoras contando unidades 53
51 Desenho feito por aluno 54
52 Dois quadrados da OBMEP 55
53 Figura da OBMEP no reticulado com dois cortes 55
54 Partição da figura no reticulado 56
55 Trabalhando em grupo 56
56 Perigal no geogebra 1 57
57 Perigal no geogebra 2 57
58 Perigal no geogebra 3 58
59 Teorema de Pitágoras por Perigal 58
60 Piso da sala em malha 58
61 Transformação a partir dos quadrados menores com cores 59
62 Transformação a partir dos quadrados menores com recortes 1 59
63 Transformação a partir dos quadrados menores com recortes 2 60
64 Pentágono e Hexágono 61
65 Teorema de Pick usado por aluno 1 62
66 Teorema de Pick usado por aluno 2 62
67 Quadrado circunscrito tirado do papiro de Rhind 63
68 Círculo de diâmetro 9 feito pelos Escribas 64
69 Círculo inscrito 64
70 Círculo 65
71 Círculo 66
72 Transformação de unidades de referência 66
73 Círculo 67

Sumário

INTRODUÇÃO **10**

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS **12**
1.1 Um pouco de história da geometria e resolução de problemas 12
1.2 As etapas de George Polya para Resolução de Problemas 14
1.3 Geometria à luz dos PCNs 16
1.3.1 Resolução de problemas 16

2 ABORDANDO PROPRIEDADES E PROBLEMAS UTILIZANDO ÁREA **18**
2.1 Abordagem de alguns conceitos de área e aplicações 20
2.2 Propriedades fundamentais para uso em demonstração por área de figuras geométricas 22

3 A UTILIZAÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA EM ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES E PROBLEMAS DE MATEMÁTICA **25**
3.1 Algumas demonstrações 25
3.1.1 Demonstração do seno da diferença por área 25
3.1.2 Demonstração do arco duplo por área 26
3.1.3 Demonstração do teorema da bissetriz interna por área 27
3.1.4 Demonstração do teorema de Pitágoras por área 29
3.1.5 Demonstração da lei dos cossenos por área 31
3.1.6 Demonstração do teorema de Tales por área 33
3.2 Resolução de problemas por conceitos de áreas 35
3.2.1 Problema 1 35
3.2.2 Problema 2 36
3.2.3 Problema 3 37

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS **39**
4.1 Sequência Didática 1 - Utilizando o Geogebra para o Cálculo de Áreas de Figuras Geométricas 39
4.1.1 Proposta de aula com Software Geogebra 39
4.1.2 Objetivo 40
4.1.3 Objetivos Didáticos 40
4.1.4 Materiais utilizados 40
4.1.5 Metodologia e Justificativas 40
4.1.6 Atividades - Usando a Equidecomponibilidade de figuras para transformação em Retângulo 42
4.1.7 Relatos da Aplicação para Sequência de Atividade 1 47
4.2 Sequência Didática 2 - Atividades e Resolução de Problemas utilizando Área como ferramenta 48
4.2.1 Atividade 1 - Calculando área contando unidades 48
4.2.2 Atividade 2 - Preenchendo figuras com unidades de área 50
4.2.3 Atividade 3 - Quanto mede o terceiro lado? 52
4.2.4 Atividade 4 - Escadinha da OBMEP 54
4.2.5 Atividade 5 - Basta contar pontos 60
4.3 Proposta de cálculo de área de círculos para o 6º ano do ensino fundamental 63

4.3.1 Navegando pelo história da matemática 63
4.3.2 Aproximando a área do círculo utilizando PICK para o 6º ano . . 65

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **68**

REFERÊNCIAS **69**

INTRODUÇÃO

A geometria no ensino fundamental deve ser abordada de forma simplificada, para tentar alcançar ao máximo o entendimento desses alunos. Para isso, a sua abordagem deve contar com apoio de instrumentos que aproximam conceito ao conhecimento prévio advindo dos alunos com o objetivo de facilitar, estreitar, aproximar a geometria ao cotidiano deles.

Existem muitas fórmulas de área dadas como prontas, como a do retângulo, triângulo, trapézio ou outras figuras que são exploradas sem justificativas ao aluno de ensino fundamental, favorecendo o fracasso escolar, uma vez que o conteúdo não será assimilado.

Esse trabalho busca valorizar o conceito de área de figuras geométricas de forma ampla: desde a abordagem da história onde se registrou o início dos primeiros conceitos geométricos como nas medições de terrenos no entorno do Rio Nilo e também na Grécia Antiga até os tempos atuais onde a evolução trouxe tecnologias capaz de simular situações problemas com ajuda de software que trazem uma abordagem mais elegante e contribui para experiências pedagógicas com os alunos da escola atual.

No primeiro capítulo, buscamos registros na história a abordagem intuitiva com relação ao conceito e utilização de áreas de figuras geométricas, como por exemplos, a prática a eficiência nas medições dos terrenos no Egito e Grécia Antiga pelos agrimensores e a utilização do triângulo Egípcio como instrumento essencial. Traremos também uma abordagem por George Polya explorando as quatro etapas que permitem a resolução de problemas, visto que os alunos do ensino fundamental necessitam de especial atenção devido às suas dificuldades em resolvê-los de forma natural. Ao final desse capítulo, faremos uma análise sucinta aos PCNs que mencionam sobre resolução de problemas em geometria para que possamos propor uma atividade em sala de aula para alunos do ensino fundamental.

No segundo capítulo, iniciaremos com o conceito inicial de cálculo de áreas de superfície em uma abordagem elementar, mostrando que a superfície pode ser decomposta por unidades de referência e que a quantidade de unidades no interior representa a área ou uma aproximação para figuras não regulares. Nesse momento, poderá ser feita uma associação com o cotidiano do aluno, como por exemplo, revestimento de um piso. Após essa abordagem inicial, algumas fórmulas de figuras geométricas serão demonstradas e propriedades serão citadas no intuito de as utilizarmos em problemas posteriormente abordados. O objetivo é trazer o conceito de área como instrumento para resolvermos problemas que estejam, em princípio, descontextualizadas com o estudo de áreas em si, isto é, utilizar o conceito de área como ferramenta no ato de resolução de problemas em geral.

No terceiro capítulo, novamente o conceito de área é utilizado como ferramenta, porém, agora será abordado de forma menos elementar: demonstrar teoremas, proposições e problemas mais complexos. O objetivo é mostrar que será uma ferramenta fundamental e ainda pedagógica para se provar resultados que comumente os alunos possuem bastante dificuldade em assimilar de outra forma. Por exemplo, a demonstração do Teorema da Bissetriz Interna, que, a primeira vista, não envolve o conceito de área, porém, sua demonstração seguirá facilmente utilizando áreas.

No quarto capítulo, traremos uma sequência didática envolvendo o conceito de área para uma turma do 6º ano do ensino fundamental. Escolhemos essa série, pois nesta fase da aprendizagem é indispensável valorizar o conceito de área usando todos os recursos possíveis para que o aluno tome consciência da importante ferramenta que o possibilitará resolver problemas como os mencionados nos capítulos anteriores. Será proposta atividades utilizando o software Geogebra que permite formular situações para convencer e estimular a conjecturar as “fórmulas” que muitas vezes vêm prontas. O objetivo é perceber esses padrões.

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Faremos neste capítulo alguns registros sobre a história da geometria para mostrar que ela foi experimentalmente desenvolvida na Babilônia nas construções e marcações de terrenos. O objetivo é mostrar que povos antigos já usavam instrumentos de área para medições de superfícies. Abordaremos também a resolução de problema por George Polya, que fala sobre as quatro etapas da resolução de um dado problema associados a muitos questionamentos que reflete nos objetivos desse trabalho. E os PCNs, que orienta como deve ser a resolução de problemas em geometria e quais objeto deve associar a teoria.

1.1 Um pouco de história da geometria e resolução de problemas

Geometria surgiu sob a influência das necessidades da vida. Por exemplo, a necessidade de organizar o ambiente de modo que os objetos ficassem melhor alocados, a necessidade na precisão dos cálculos relacionados com comprimentos lineares ou não lineares, negócios na área de construções, etc. A palavra "geometria" tem o mesmo significado da palavra "agrimensura" e alguns pesquisadores gregos apontam que a geometria se originou no Egito e posteriormente se desenvolveu na Grécia.

Há registro sobre o desenvolvimento significativo do conhecimento geométrico no Egito, deixados em papiros que continha problemas geométricos do dia a dia. O Vale fértil, uma estreita faixa de terra entre o deserto do Saara e o Rio Nilo submetidos anualmente a inundações, foi o palco dos experimentos geométricos. Esse vale, era dividido proporcionalmente ao que seus proprietários pagavam de impostos. Por conta do dilúvio anual, as demarcações eram destruídas pelas enchentes e anualmente era necessária nova demarcação pelos cobradores de impostos, com as "medidas de terra" justas para cada proprietário. A nomenclatura dada ao vale foi devido a sua valorização pelo desenvolvimento das plantações e do comércio local. As decorrentes enchentes e as demarcações anuais fez com que os egípcios desenvolvessem formas de medir a terra, o que determinou a origem da função dos agrimensores, que também eram os cobradores de impostos na época. Além disso, os agrimensores levaram ao desenvolvimento do comércio no Egito e, dessa forma, naturalmente se tornaram capazes de medir outras grandezas necessárias na época, como por exemplo, a capacidade dos navios e futuramente para medidas astronômicas.

A eficiência nas pirâmides, ainda existente, demonstram o alto nível de conhecimento dos egípcios sobre formas espaciais, e historicamente, tudo foi realizado com formas puramente experimentais da geometria. Para erguer uma obra, era muito importante conhecer a área de terra destinada para tal construção e para fazer isso, os antigos egípcios usavam como ferramenta um triângulo especial, de lados fixos, tomando medidas constantes: eles levavam uma longa corda, subdividia essa corda em 12 nódulos de tamanhos iguais a um cotovelo Faraó (como mostra a *Figura 1*) e esticada (por homens denominados por "esticadores de corda") e presa por estacas em pontos "estratégicos" da corda resultava em um triângulo, com lados medindo 3, 4 e 5, cuja superfície foi tomada como o padrão para resolver problemas relacionados à área. Esse triângulo ficou conhecido como o triângulo egípcio, que era ativamente usado na construção de ângulos retos pelos topógrafos e arquitetos por um grande período de tempo. Isso demonstra que, mesmo muito antes de Pitágoras, os babilônios já tinham certo conhecimento experimental para as medidas utilizadas.

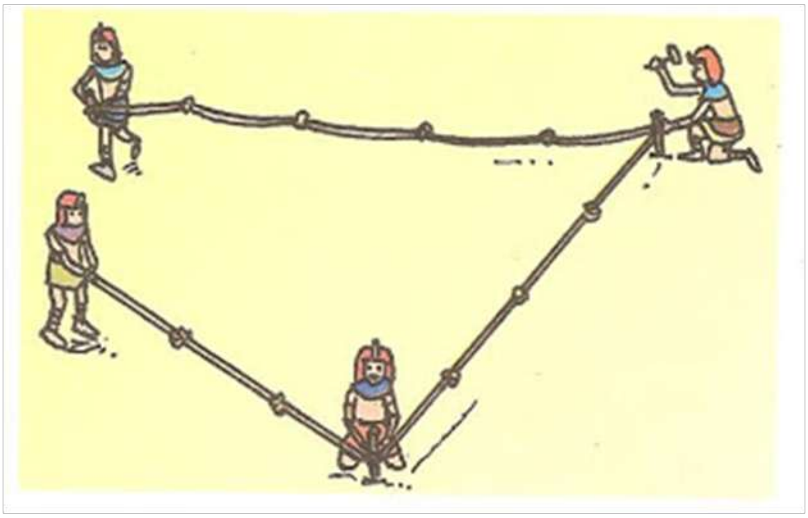


Figura 1: Triângulo Egípcio
(fonte: www.fundamentalmatsv.blogspot.com.br)

Com o avanço da matemática e das engenharias, nos dias atuais existem ferramentas mais adequadas para as construções. A "Geometria Egípcia" era bastante prática porém não era bem fundamentada em regras intuitivamente estabelecidas de operações ou aplicações convenientes. Já há milhares de anos, os egípcios calculavam corretamente a área de alguns polígonos: retângulo, quadrado, triângulo e trapézio, e o quadrado serviu, e serve até atualmente, como medida de referência para medir área de superfícies graças à sua forma especial. Para recalcular as áreas das superfícies lavadas pelas enchentes, os Egípcios delimitavam o campo e o transformavam em pequenas unidades menores. A dificuldade maior que tinham, obviamente, era na remarcação de terrenos não regulares já que os instrumentos disponíveis na época (como o triângulo egípcio, ou mesmo medidas de partes do corpo) não os favoreciam. Um outro importante registro histórico sobre Geometria se deu com o papiro matemático de Rhind *Figura 2*, que foi descoberto em 1858 e pouco mais tarde foi decifrado e publicado. A

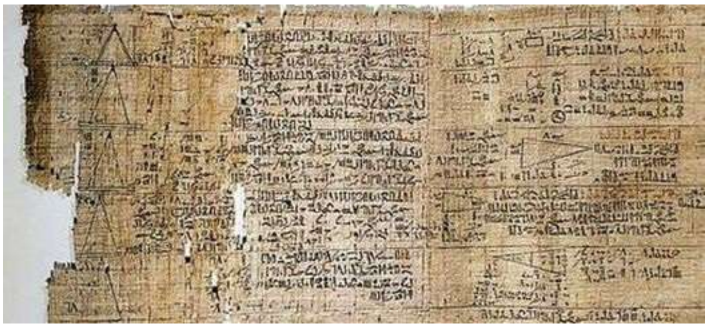


Figura 2: Parte do Rhind

maior parte dos manuscritos está no Museu Britânico (British Museum), em Londres, e em Nova York. Ele traz uma coleção de 84 soluções de problemas como fração, definição da área de um retângulo, de um triângulo, de um trapézio e também de um círculo, além disso, o volume de sólidos com cubo, cilindro. Há também problemas que abordam aritmética, proporcionalidades, solução de problemas envolvendo o cálculo da soma de uma progressão geométrica e etc, no entanto, tudo isso foi formulado e postulado sem qualquer teoria formalizada. Quando nos tratamos de Geometria, o registro mais antigo para a origem da teoria formal se deu com a obra "Os Elementos" de Euclides, que é utilizado até os dias atuais nos cursos de Graduação em Matemática.

Figura 3: Os Elementos de Euclides
(fonte: https://esquadraodoconhecimento.wordpress.com)

Figura 4: Os Elementos de Euclides traduzido para português

1.2 As etapas de George Polya para Resolução de Problemas

Esta seção tem por objetivo oferecer embasamento teórico na organização da solução de um problema por mais difícil que seja a sua entrada. São etapas que estruturam a solução com início, meio e fim. A tentativa é forçar o aluno o pensamento organizado e evitar o uso de perguntas básicas como: Por onde devo começar? É de multiplicar ou dividir? São perguntas que podem ser respondidas pelo próprio aluno que usa esse método, uma vez que o mesmo é diferente e interativo e completam com as etapas de Polya, por exemplo a segunda etapa que evidencia esse conceito quando faz menção a outros tipos de resoluções.

Figura 5: George Polya, (1887-1985)

George Polya, foi um grande matemático, nasceu em Budapeste, Hungria, no dia 13 de dezembro de 1887. Ele deu contribuições essenciais para o mundo da análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria da probabilidade. Ficou também conhecido por seu trabalho em heurística na área de educação matemática com uma de suas mais belas obras: **A arte de resolver problemas**.

A resolução de problemas em sala de aula, é o momento propício para o aluno expor suas ideias, empregar conhecimentos advindos de outras situações em novos problemas, fazer uma análise daquilo que já sabe com aquilo que espera. Se pensarmos na definição de **problemas** e compreendermos a sua etimologia, entenderemos a necessidade dos elementos observados na execução de uma possível solução lógica para tal problema. Situações que exige o pensamento pode ser considerado um problema. E em matemática esse pensamento vem carregado de ferramentas e propriedades, possibilita escapar mentalmente transformando propriedades mais específicas em problema simples, ou seja as ferramentas matemática, transforma um problema difícil em um problema mais fácil.

Pensando na ideia de resolução de problemas, segue a seguinte pergunta: Quais são as regras para solucionar problemas? (ver **[5]**) Para George Polya (1978), há quatro etapas a se considerar para solução de um dado problema: compreender o problema, planejar sua resolução, executar o plano e examinar a solução.

Analisaremos as etapas ditadas por Polya (1978), que nos dará o suporte necessário para organizar e resolver um problema.

Primeira etapa: Compreensão do problema. Polya (1978) defende a ideia que devemos fazer perguntas do tipo: O que não é conhecido? O que é dado? Qual é a condição? É a condição suficiente para determinar a incógnita? Ou não é suficiente? Dá para fazer um desenho?

Segunda etapa: Elaborar um plano. Polya (1978), afirma que para desenvolver boas ideias em um problema é preciso indagar, ou seja, se colocando no lugar de quem aprende para fazer uma interligação com pontos de partida e suas reais dificuldades.

Tais como: Conhece um outro problema similar a esse? Pelo menos alguma outra forma? Sabe qualquer problema relacionado a esse? Olhe para o desconhecido e tente lembrar-se de um problema familiar parecido. É possível aplicar o resultado? É possível utilizar o método para resolver? É possível formular o problema de forma diferente? Outra maneira? Reveja as definições. Você consegue imaginar um problema semelhante mais acessível? É possível resolver parte do problema? É possível extrair algo útil a partir dos dados? Para Polya,

> É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. (POLYA, 1978, p. 36).

Terceira etapa: Execução do plano elaborado, com a implementação de plano de soluções, controlar cada passo. Você está certo que o passo dado é correto?

Quarta etapa: Examinar a solução, você pode verificar o resultado? É possível verificar o progresso da solução? É possível obter o mesmo resultado de outra maneira? O resultado é de fácil percepção? O resultado é útil em alguma outra tarefa?

É importante oferecer artifício ao aluno para solucionar problemas, principalmente no que se refere a compreensão, interpretação, estratégias de resolução e revisão do problema. Pois um problema bem estruturado possibilita possível tranquilidade na solução de novos problemas.

1.3 Geometria à luz dos PCNs

1.3.1 Resolução de problemas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais são a transparência da importância que damos a ferramenta "matemática" para entender o mundo a nossa volta e perceber o quão necessário é para o estímulo, desencadeando a curiosidade e o espírito de investigação e resolução de problemas. Os PCNs indicam a resolução de problemas como ponto de partida dando grande ênfase a história da matemática e a tecnologia da comunicação. Os princípios que organizam o processo de ensino aprendizagem em matemática pela resolução de problemas, diz que:

> • A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> • O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> • Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

> • Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> • A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.(PCNs, 1998, p. 40-41)

Os conceitos de geometria são importantes para resolver problemas em matemática, pois proporciona o pensamento ativo dando suporte necessário para compreensão, descrição e representação de fatos.

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.(PCNs, 1998, p. 51)

E se tratando de geometria a intenção é levar a exploração de problemas cotidianos previstos e não previstos, habilitando o aluno a:

> • Resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
> • Estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
> • Resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.(PCNs, 1998, p. 64)

Alguns conteúdos apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais em geometria, são:

> • Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.
> • Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
> • Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).
> • Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.(PCNs, 1998, p. 89)

A análise feita nos PCNs de 6º ao 9º ano do ensino fundamental apontaram como deve ser a abordagem na geometria em resolução de problemas e quais associações podem ser feitas para não se ter um conteúdo isolados dos anseios dos alunos, do seu cotidiano e como deve ser essa abordagem. Em tese, esse apontamento dos PCNs confirmam a abordagem de área de figura plana por composição e decomposição de figuras planas, transformações e etc... destacados nesse trabalho.

2 ABORDANDO PROPRIEDADES E PROBLEMAS UTILIZANDO ÁREA

Aqui serão apresentadas algumas ferramentas para o cálculo de áreas, como fórmulas de área de triângulo e algumas propriedades. O objetivo dessa apresentação é facilitar a percepção de que o uso dessas ferramentas prontas pode ajudar na resolução de problemas e demonstrações futuras. A abordagem das propriedades são extremamente importantes, uma vez que cada uma delas configura elementos distintos na superfície geométrica, tornando possível o manuseio para diversas situações distintas. A área de uma dada figura geométrica é fixa, mas existem muitos modos de constata-la, dentre esses modos, um, pode ser suficiente para resolver um dado problema.

Usaremos o pensamento mais primitivo para conceituar áreas. Se tomarmos o quadrado mostrado na *figura 6* como unidade básica de medição, a área de qualquer superfície seria a quantidade de vezes que a unidade cabe dentro. Outras figuras geométricas, como por exemplo o triângulo da *figura 7*, poderiam ser usados como medidas básicas, ou qualquer objeto ou qualquer figura plana que possa ser utilizada como unidade de medida de referência. O desafio é encontrar a figura plana básica tal que conseguimos preencher o máximo do interior da superfície. É claro que existem superfícies não regulares, como mostra na *Figura 8*, onde será um procedimento mais complexo para obtermos uma quantidade exata de medidas de referência para obtermos sua área, isto é, difícil encontrarmos uma quantidade exata de objetos a preencher o seu interior. Neste caso, se faz necessária uma melhor aproximação por uma malha poligonal, que será explorada nesse capítulo, como por exemplo, no caso de medirmos a área de uma cidade.

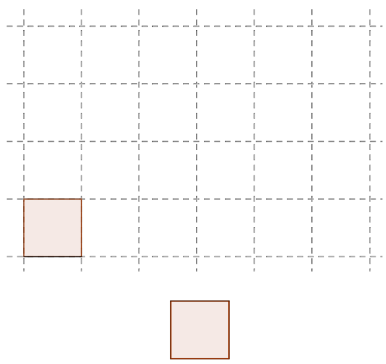


Figura 6: Unidade de Área 1

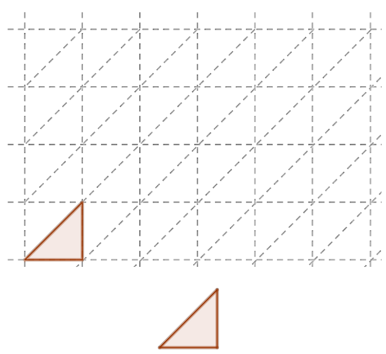


Figura 7: Unidade de Área 2

Existem regiões irregulares onde o preenchimento com objetos são feitos por aproximação, pois a sua forma em muitos casos não permitem uma quantidade de revestimentos que se encaixam livremente. Faremos aqui uma abordagem para o conceito de área que acreditamos ser mais didática para o aluno em vez dos professores começarem as suas aulas colocando as fórmulas das figuras básicas de modo a não mostrar ao aluno qual foi o contexto inserido da formulação delas. Dessa forma, acreditamos que o aprendizado será melhor absorvido pelos estudantes e também será mais prazeroso e lúdico. Vejamos por exemplo, a *figura 8*, de uma região irregular, que poderia ser o mapa de uma cidade, por exemplo. Com a definição de área dada a seguir, faremos a abordagem ds cálculos de área de uma forma mais lúdica, como segue.

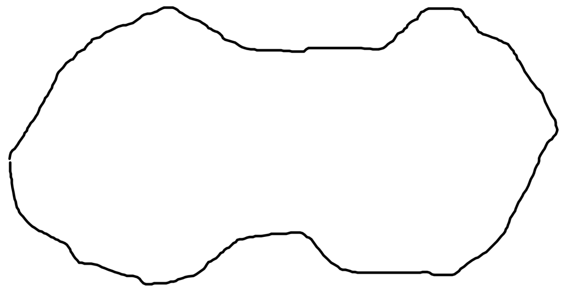


Figura 8: Região irregular

Definição 1: A área de uma figura qualquer é o número real, que é definido pelas aproximações por falta das áreas dos polígonos inscritos nela.

Na *figura 9*, verifica-se que a figura azul assinalada é um polígono inscrito à *figura 8* e que seria uma aproximação da sua área.

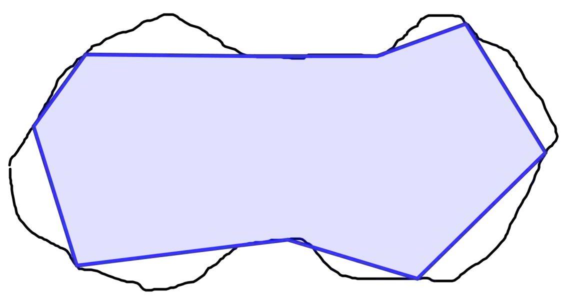


Figura 9: Polígono inscrito na região irregular

Veremos que a medida que aumentamos a quantidade de lados desse polígono inscrito, como por exemplo, mostrado na *figura 10*, esse novo polígono, assinalado de vermelho, terá área mais próxima do valor exato da área da *figura 8* que queremos calcular.

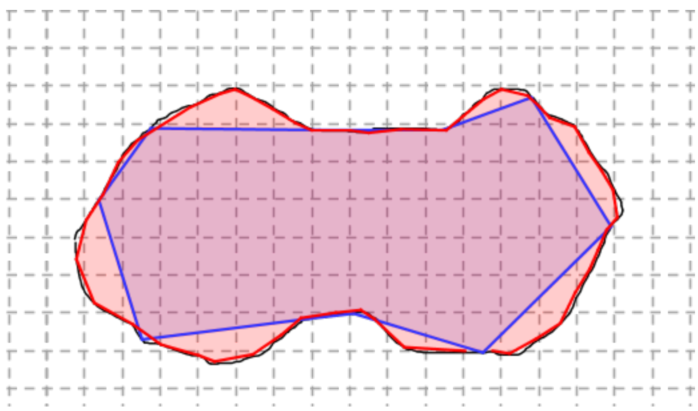


Figura 10: Polígono inscrito com mais aproximação

Quando se fala em área, a única ideia que surge é de calcular a medida de uma superfície. O pensamento mais incomum, seria usá-la para outros fins. Por exemplo, para demonstração de proposições importantes de geometria que não envolvam em si o conceito de área, ou mesmo, resolver problemas diversos na matemática, não necessariamente da Geometria, como por exemplo, em teoria dos números. Nos capítulos 2 e 3 desse trabalho, partiremos do pressuposto que os leitores já tenham um conhecimento prévio sobre área de superfícies. A intenção é utilizar o conhecimento de áreas como ferramenta para resolver problemas. No *Capítulo 4*, utilizaremos o conceito de área com uma proposta didática para o ensino fundamental.

2.1 Abordagem de alguns conceitos de área e aplicações

Abordaremos nessa seção alguns conceitos e resultados importantes referente ao conceito de áreas que poderá ser utilizado pelo professor de Geometria no sentido de fazer um resumo de algumas propriedades importantes e que utilizaremos nos capítulos posteriores. As abordagens realizadas nesse capítulo são uma sugestão de como abordar aos alunos do ensino fundamental problemas e contextualizações lúdicas de transmitir o conceito de área, mostrando que a utilização das fórmulas de área pode ser feita em diversos problemas.

Faremos aqui algumas demonstrações de resultados importantes de Geometria Euclidiana para resolução de problemas futuros. Seja "S"a área do triângulo ABC abaixo.

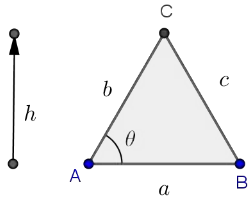


Figura 11: Triângulo

Sabemos que a área do triângulo é:

$$\boxed{S = \frac{a.h}{2}}$$

Onde a é base e h altura do triângulo ABC. Se utilizarmos a relação trigonométrica abaixo, teremos uma nova fórmula para área do mesmo triângulo.

$\frac{h}{b} = sen\theta \Rightarrow h = b.sen\theta$

$$\boxed{S = \frac{a.b.sen\theta}{2}}$$

É importante que se perceba que a partir desse momento já serão utilizadas fórmulas de área para demonstrar. Agora mostraremos a fórmula de Heron utilizando apenas a última fórmula de área de triângulo demonstrada acima e a lei dos cossenos, que será demonstrada usando o conceito de área no decorrer deste trabalho.

Proposição 1: Seja o triângulo ABC, onde os comprimentos dos lados são dados por a, b e c.

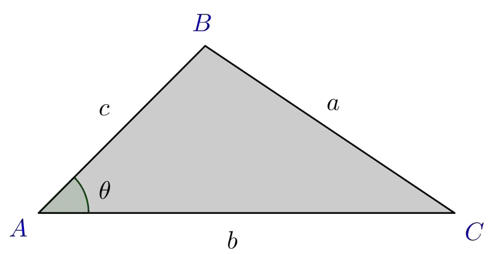


Figura 12: Triângulo 1

Seja p o semiperímetro do triângulo ABC. Prove que a área do triângulo ABC pode ser dada por:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

.

Prova

Da lei dos cossenos, sabemos que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\theta \Rightarrow \; cos\theta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c}$

Elevando a fórmula da área do triângulo ao quadrado, obteremos: Observe que S representa a área desse triângulo.

$S^2 = (\frac{a.b.sen\theta}{2})^2 \Rightarrow \; 4S^2 = b^2c^2(1 - cos^2\theta) \Rightarrow 4S^2 = b^2c^2(1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4S^2 = b^2c^2(\frac{4b^2c^2}{4b^2c^2} - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}) \Rightarrow 16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Rightarrow$

$16S^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Rightarrow 16S^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \Rightarrow$

$16S^2 = [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] \Rightarrow 16S^2 = (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$

Como $a + b + c = 2p \Rightarrow 2a - a + b + c = 2p \Rightarrow b + c - a = 2(p - a)$, ideia análoga para os outros parênteses.

$16S^2 = 2p.2(p - a).2(p - b).2(p - c) \Rightarrow S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ como queríamos, Portanto,

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Usaremos agora algumas propriedades

2.2 Propriedades fundamentais para uso em demonstração por área de figuras geométricas

Propriedade 1

Dois triângulos com a mesma base e o terceiro vértice de cada triângulo pertencendo a uma mesma reta paralela a base possuem a mesma área. Veja *figura 13* a seguir.

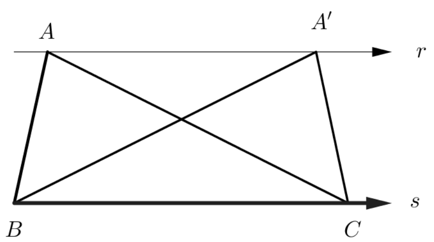


Figura 13: Triângulos de mesma área

$r//s \Leftrightarrow A(ABC) = A(A'BC)$

Quando é fixada a base, e a altura dos triângulos é a mesma, dessa forma, os dois triângulos terão áreas iguais, que é uma consequência do Princípio de Cavalieri, um importante axioma enunciado no livro, “A matemática do ensino médio”, volume 2, p. 287.

Exemplo: No trapézio abaixo, os triângulos de área D e área E possuem a mesma área.

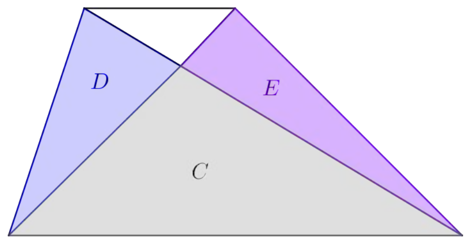


Figura 14: Utilização da propriedade 1

Pela propriedade acima, os triângulos de áreas $D + C$ e $C + E$ são equivalentes e portanto mesma área, logo $D = E$.

Propriedade 2

Um triângulo cuja base está dividida em partes iguais por cevianas que originam do mesmo vértice, como mostra a *figura 15*, será repartido em triângulos menores de áreas iguais.

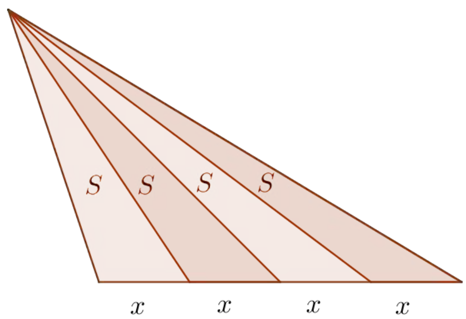


Figura 15: Triângulo dividido em seções triangulares de mesma área

Isso ocorre pois os triângulos menores possuem mesma base e altura, que é a própria altura do triângulo maior.

Exemplo: Determine a área do triângulo sombreado em função da área k do triângulo ABC, sabendo que os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais (congruentes).

Nesse exemplo não calculemos a área em si, pois esse não é o objetivo. Apenas usaremos a área do triângulo ABC e a *propriedade 2* para determinarmos a área sombreada.

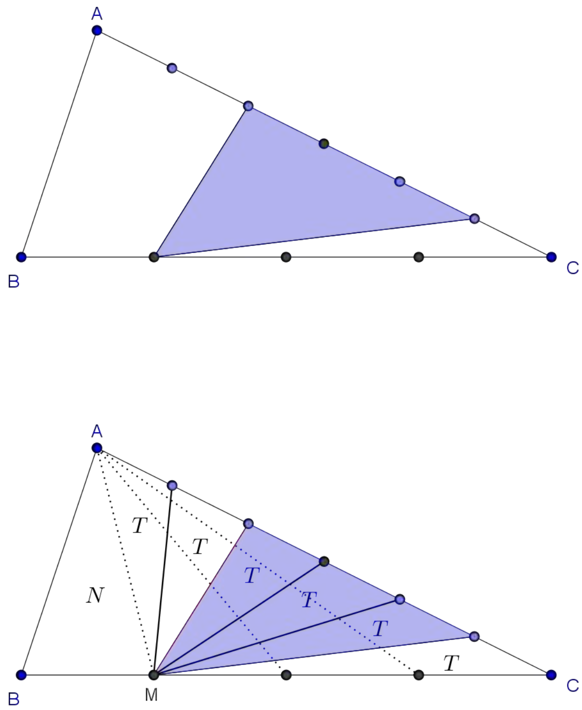


Figura 16: Triângulo dividido em partes

Da *propriedade 2*, $N = \frac{K}{4}$, pois a base BC está dividida em 4 segmentos congruentes com BM , daí a área do triângulo AMC é $\frac{3K}{4}$. O lado AC está dividido em 6 segmentos congruentes, que formam 6 triângulos de mesma base e mesma altura e portanto possuem áreas equivalentes. Logo, a área sombreada é $\frac{A(AMC)}{2}$, ou seja $\frac{3k}{8}$.

Propriedade 3

Uma ceviana divide o triângulo em duas áreas que estão entre si na mesma razão que suas bases.

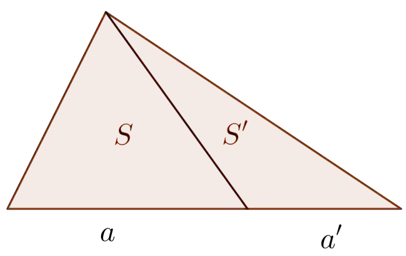


Figura 17: Triângulos de áreas proporcional as suas bases

$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

3 A UTILIZAÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA EM ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES E PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

Nessa seção, utilizaremos o conceito e o artifício de áreas de figuras planas para demonstrações de resultados importantes de Geometria, Teoria dos Números, que usualmente não são dadas na sala de aula ou mesmo não são feitas utilizando o conceito de área. A intenção é que a demonstração fique mais clara, didática e lúdica como estímulo ao processo de aprendizagem.

Estamos acostumados em calcular área de superfícies, como se a área fosse apenas objeto de medição. Mas área de figuras geométrica vai muito além do simples fato de medir. Analisando alguns problemas e proposições em geometria, percebe-se que os elementos procurados fazem parte da composição de algumas fórmulas da área da figura associada a algumas propriedades. Dessa forma essa mesma área pode ser usada como o instrumento para resolução desse problema. Então o objetivo é apresentar área como instrumento de resolver problemas através de algumas aplicações e também ajudar a facilitar a compreensão do ensino de área para o ensino fundamental. Uma vez que a geometria é abordada nas escolas ou até mesmo pelo livro didático sem justificativas. Fórmulas prontas são colocadas para serem decoradas.

Nesse capítulo aplicaremos área para demonstração de problemas de outras naturezas, a maioria dos resultados enunciados e problemas foram vistos em **[7] e [8]**, por Eduardo Wagner (IMPA).

Algumas demonstrações por área

Sabemos que a figura em si não evidencia uma demonstração, apenas valoriza. Tentaremos induzir a ideia dessas provas pelas figuras, em seguida uma demonstração bastante elementar usando apenas conceito de área. De acordo com os PCNs.

> No que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras [...], as principais funções do desenho são as seguintes:
> . visualizar, fazer ver, resumir;
> . ajudar a provar;
> . ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer).
> Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto.(PCNs, 1998, p. 125)

3.1 Algumas demonstrações

3.1.1 Demonstração do seno da diferença por área

Proposição 3.1.1: $sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cos\beta - sen\beta \cos\alpha$, com α e $\beta \in \Re$

Prova

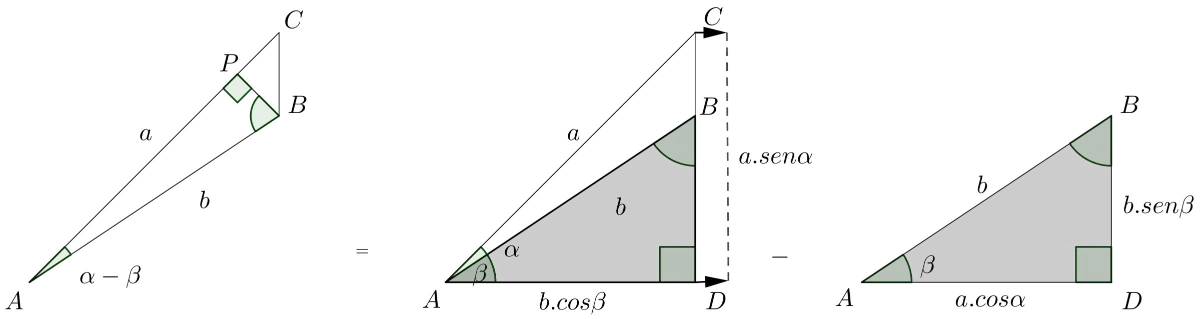


Figura 18: Igualdade de áreas

Observe que a área do triângulo ABC é dado por $\frac{absen(\alpha-\beta)}{2}$ (ver **[4]**), fórmula de área dada inicialmente. E temos que essa área é equivalente à diferença das áreas dos triângulos ADC e ADB respectivamente:
Considere essa notação $A(ABC)$ como área do triângulo ABC.

$A(ABC) = A(ADC) - A(ADB)$

$\frac{(asen\alpha).(b\cos\beta)}{2} - \frac{(bsen\beta)(a\cos\alpha)}{2}$, segue

$\frac{absen(\alpha-\beta)}{2} = \frac{(asen\alpha).(b\cos\beta)}{2} - \frac{(bsen\beta)(a\cos\alpha)}{2}$, portanto,

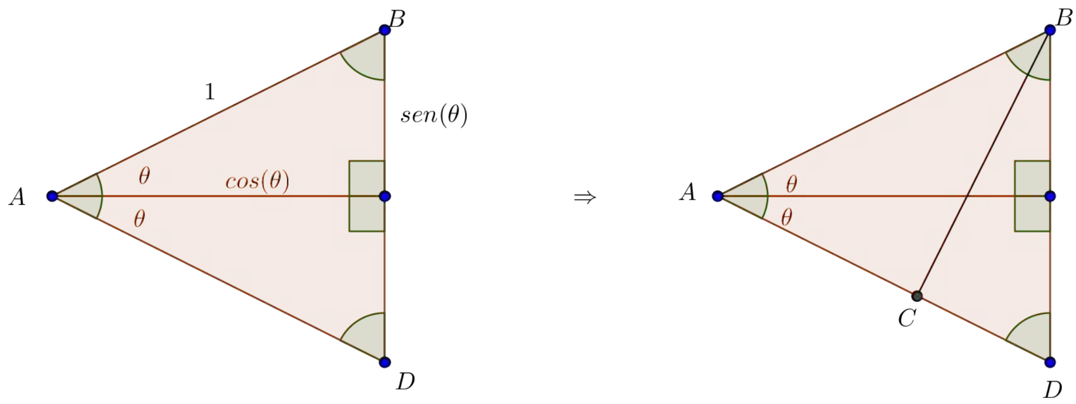
$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha$

3.1.2 Demonstração do arco duplo por área

Proposição 3.1.2: $Sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta)$

Prova

Observe atentamente as figuras a seguir.



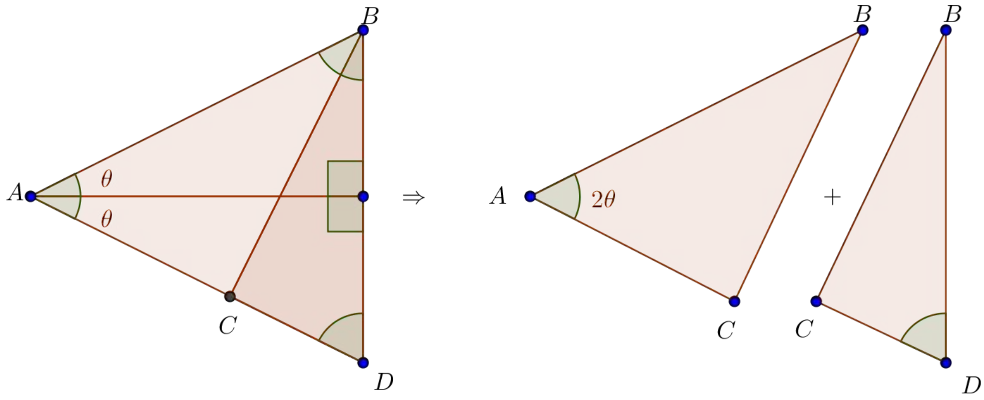


Figura 19: Triângulo isósceles

Seja o triângulo ABD isósceles de base BD onde $AB = AD = 1$. A área do triângulo ABD é dada por:

$$(ABD) = \frac{2sen(\theta)cos\theta}{2} = sen(\theta)cos(\theta)$$

Calcularemos agora a área do triângulo ABD considerando AD como base e altura BC

$(ABC) = \frac{AD.BC}{2}$

Através do triângulo ABC calculemos a altura BC sabendo que a hipotenusa $AB = 1$ e o ângulo $\measuredangle CAB = 2\theta$ Temos:

Usando a relação trigonométrica

$\frac{BC}{1} = sen2\theta \Rightarrow BC = sen2\theta$

Logo, $(ABD) = \frac{1.sen2\theta}{2} \Rightarrow (ABD) = \frac{sen2\theta}{2}$. Portanto,

$$(ABD) = \frac{2sen(\theta)cos\theta}{2} = sen(\theta)cos(\theta) = \frac{sen2\theta}{2}$$

3.1.3 Demonstração do teorema da bissetriz interna por área

O teorema da bissetriz é muito usado para encontrar comprimentos em um certo triângulo que fica evidenciado a bissetriz. Apesar de aparentemente não apresentar a ideia de área, faremos uso de área para sua demonstração.

Teorema 3.1.3: Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Na figura a seguir, $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$. O teorema diz que $\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

Prova

Seja a figura

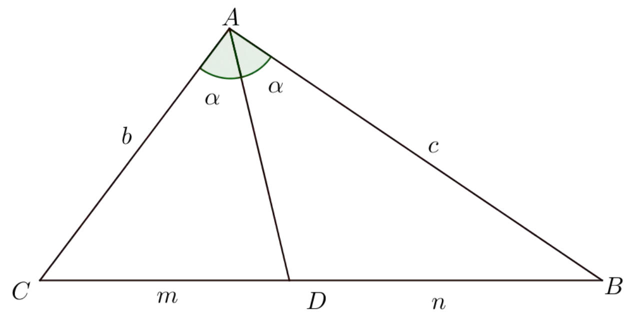


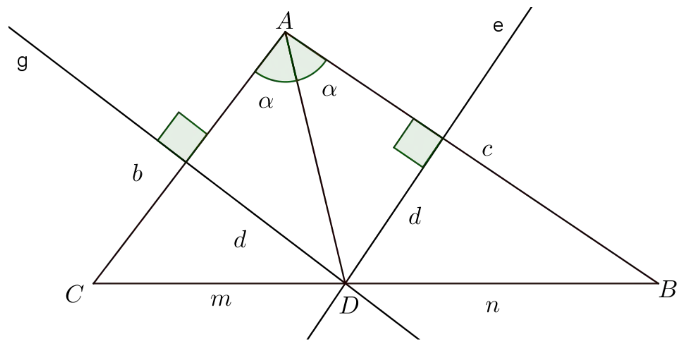
Figura 20: Triângulo com bissetriz

A bissetriz interna (ou externa) de um ângulo divide o lado oposto na mesma razão dos lados adjacentes. Usando a propriedade 3 teremos:

Seja s a área do triângulo ACD e s' a área do triângulo ADB

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{s'}$$

Seja d as alturas dos triângulos ACD e ADB



$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{b.d}{2}}{\frac{c.d}{2}} = \frac{b}{c}$$

Demonstração clara, que consiste em mostrar o conceito de áreas.

3.1.4 Demonstração do teorema de Pitágoras por área

A demonstração que daremos aqui, é a demonstração original dada por Euclides no seu livro **"OS ELEMENTOS".** (**ver [2]**)

Teorema 3.1.4: Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos desse triângulo.

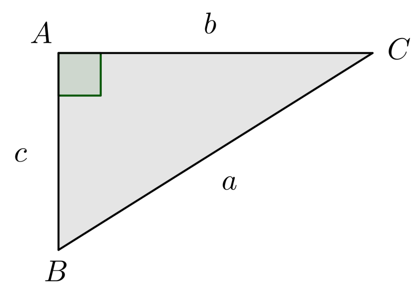


Figura 21: Triângulo retângulo em A de lados a, b e c

Prova

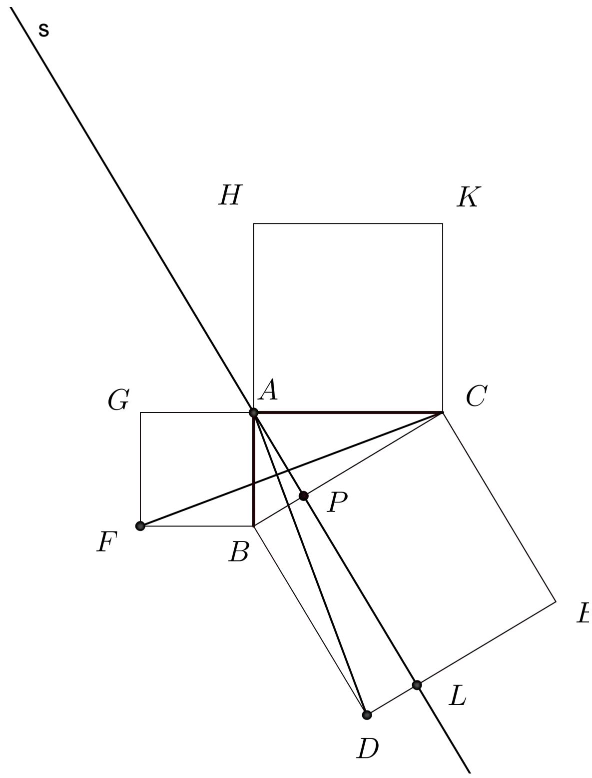


Figura 22: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Seja o triângulo retângulo ABC retângulo em $\measuredangle A$. A partir dos lados do triângulo, constroem se quadrados. Trace os segmentos $\overline{FC}$ e $\overline{AD}$. Por A trace uma reta s paralela a $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ que intersecta $\overline{DE}$ em L.

Provaremos que a soma das áreas dos quadrados $ABFG$ e $ACKH$ é igual a área do quadrado $BCED$

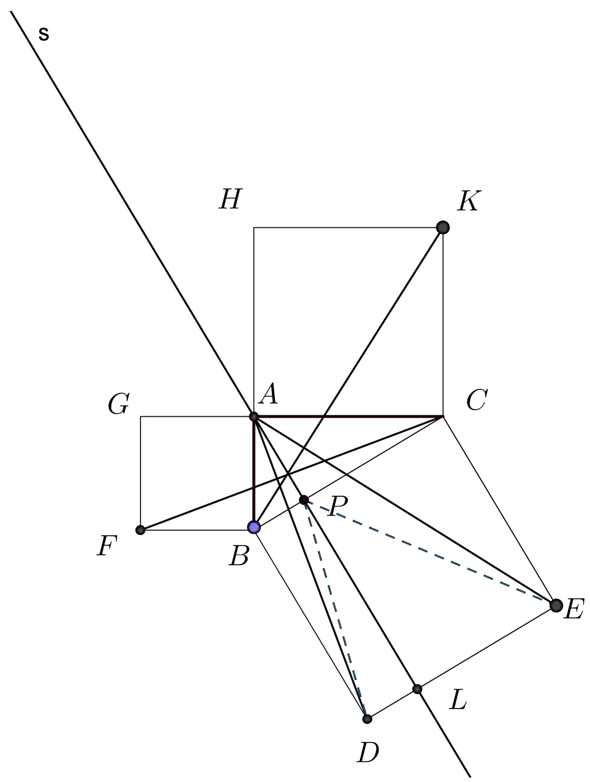
Inicialmente observa-se que:

$$\begin{array}{l} \overline{BF} \equiv \overline{BA} \\ \overline{BC} \equiv \overline{BD} \\ \measuredangle FBC \equiv \measuredangle ABD \end{array} \quad \Rightarrow \quad \triangle FBC \equiv \triangle ABD, \;\; caso \;\; LAL$$

Os triângulos FAB e FBC são equivalentes pela propriedade 1. (Eles possuem a mesma base FB e os vértices C e A construídos em segmento paralelo a base.

Como $\triangle FBC \equiv \triangle ABD$, então FAB e ABD são equivalentes. Daí, os triângulos FAB, ABD e PBD são equivalentes (mesma área). Sabendo que $\triangle FBA$ é metade do quadrado $ABFG$ e $\triangle PBD$ metade do retângulo $PBDL$. Logo, $ABFG$ e $PBDL$ tem mesma área.

Usando pensamento análogo para segunda parte.



Trace os segmentos $\overline{BK}$ e $\overline{AE}$. Pelo mesmo motivo da primeira parte $\triangle BKC \equiv \triangle ACE$, Caso LAL. Os triângulos BKC e KCA são equivalentes pela propriedade 1.

$\triangle ACE \equiv \triangle CPE$ pela mesma propriedade. Portanto $\triangle CPE$ é metade do quadrado $ACKH$. Logo, $PCEL$ e $ACKH$ tem mesma área. Consequentemente, a soma das áreas dos quadrados $ABFG$ e $ACKH$ é exatamente a área do quadrado $BCED$, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$.

3.1.5 Demonstração da lei dos cossenos por área

Valorizaremos nesta demonstração o conceito de área, com uma breve adaptação do teorema de Pitágoras apresentado acima. Sabemos que o resultado é válido para qualquer triângulo, faremos apenas para o caso de triângulo acutângulo.

Proposição 3.1.5: Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao lado inicial.

Prova

Seja o triângulo acutângulo ABC.

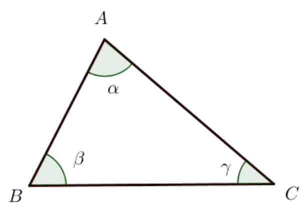


Figura 23: Triângulo ABC qualquer

Pelos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ construiremos quadrados.

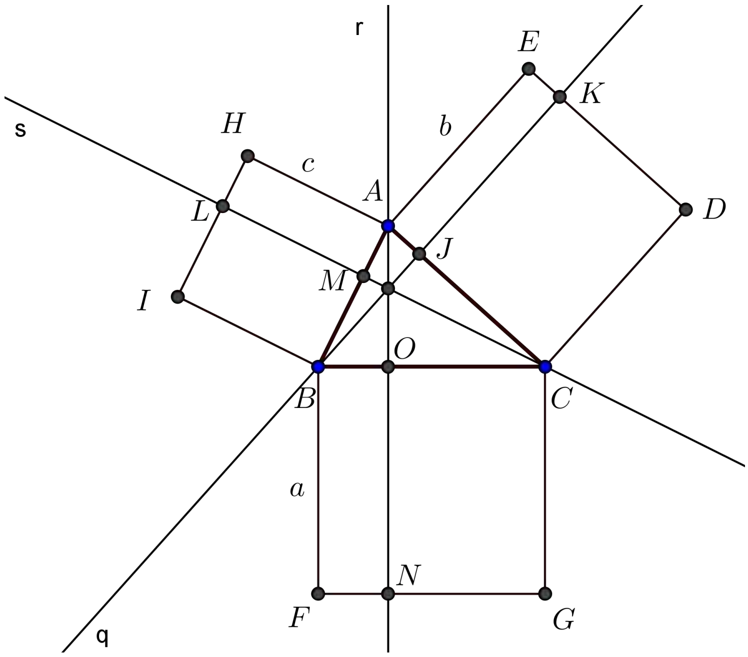
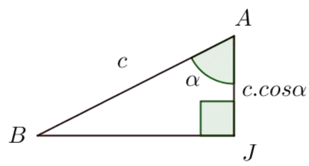


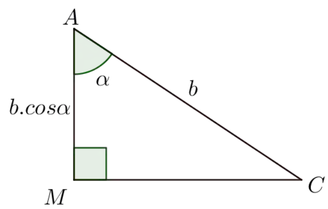
Figura 24: Demonstração da lei dos cossenos

Por A, B e C traçamos as retas r, q e s perpendicular a $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ respectivamente. O triângulo ABJ é retângulo em J, usando as relações trigonométricas temos:

$\overline{AJ} = c.cos\alpha$, disto podemos concluir que a área do retângulo $(AJKE)$ é $b.c.cos\alpha$



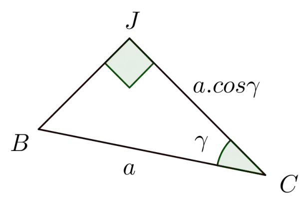
O triângulo AMC é retângulo em M, Daí



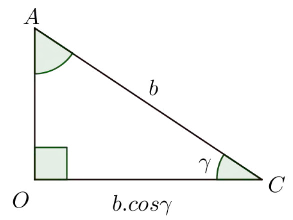
$\overline{AM} = b.cos\alpha$, o que leva a concluir a área do retângulo $(AMLH)$ é $b.c.cos\alpha$. Contudo observa-se que os retângulos $(AJKE)$ e $(AMLH)$ são equivalentes.

Mostraremos que os retângulos $(JCDK)$ e $(OCGH)$ são equivalentes.

O triângulo BJC é retângulo em J, segue



$\overline{JC} = a.cos\gamma$, disto a área do retângulo($JCDK$) é $a.bcos\gamma$
O triângulo AOC é retângulo em O,



$\overline{OC} = b.cos\gamma$, a área do retângulo ($OCGN$) é $a.bco\gamma$, os retângulos ($JCDK$) e ($OCGN$) são equivalentes.

Finalmente mostraremos que os retângulos ($BONF$) e ($MBIL$) são equivalentes. Usando o processo puramente análogos aos dois ja feitos.

O triângulo AOB é retângulo em O, como $\measuredangle OBA = \beta$ então $BO = c.cos\beta$, e a área do retângulo ($BONF$) $= a.c.cos\beta$. E o triângulo BMC retângulo em M, $\measuredangle MBC = \beta$, a área do retângulo ($MBIL$) $= c.a.cos\beta$. Portanto,

$$(BCGF) = (ACDE) + (ABIH) - (AJKE) - (AMLH)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - b.c.cos\alpha - b.c.cos\alpha$$

como queríamos demonstrar.

3.1.6 Demonstração do teorema de Tales por área

Será feita agora a demonstração do teorema de Tales, considere a *figura 25*.

Proposição 3.1.6: Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

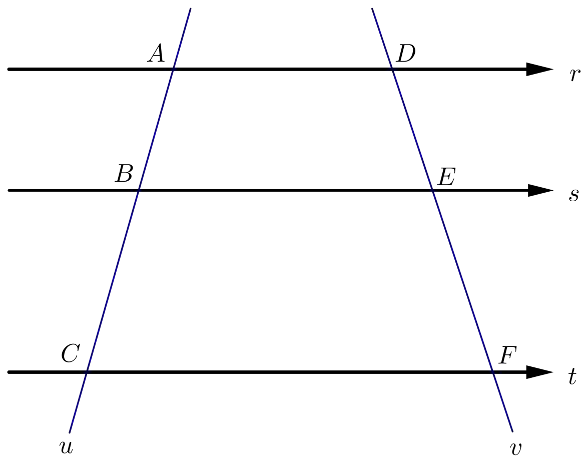


Figura 25: Feixe de retas paralelas r, s e t por transversais u e v

Prova

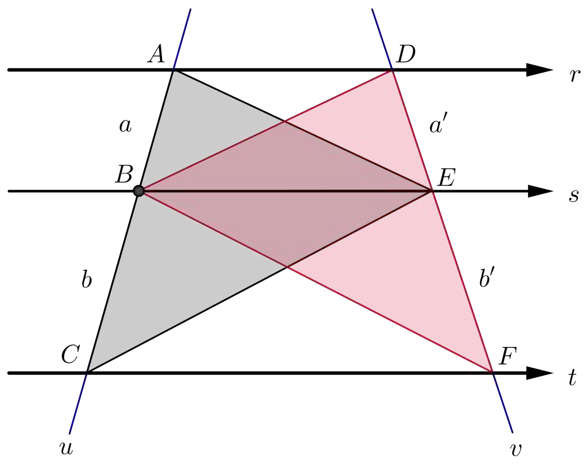


Figura 26: Triângulos no feixe de retas

Sejam $\overline{AB} = a$, $\overline{DE} = a'$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{EF} = b'$, provaremos por área que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

.
Considere os triângulos AEB e BEC da figura, observem que eles possuem as mesmas alturas, pela *propriedade 3*,

$$\frac{A(AEB)}{A(BEC)} = \frac{a}{b}$$

pela *propriedade 1*

$$A(AEB) = A(DBE)$$

$$A(BEC) = A(EBF)$$

De modo análogo, Considere os triângulos DBE e EBF da figura, observem que eles possuem as mesmas alturas pela *propriedade 3*

$$\frac{A(DBE)}{A(EBF)} = \frac{a'}{b'}$$

Logo,

$$\frac{A(DBE)}{A(EBF)} = \frac{a'}{b'} = \frac{A(AEB)}{A(BEC)} = \frac{a}{b}$$

Como queríamos mostrar.

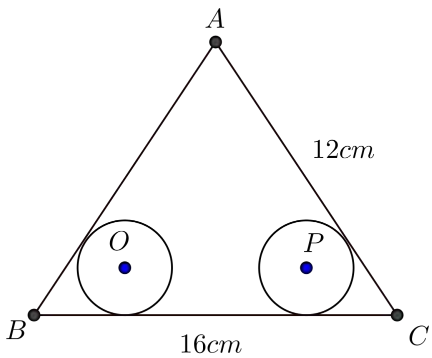
3.2 Resolução de problemas por conceitos de áreas

Abordaremos nessa seção a resolução de alguns problemas que, a princípio, não se pensaria em utilizar o conceito de área para sua solução e que possui melhor entendimento e rapidez na resolução utilizando tal conceito.

Usando o conceito de área

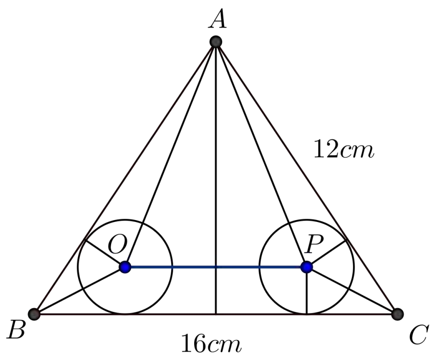
3.2.1 Problema 1

Seja um triângulo isósceles ABC, com lados congruentes medindo 12cm e base 16cm. Considere duas circunferência de raio 2cm, cada uma tangenciando a base e um dos lados congruentes. Determine a distância entre seus centros.



Esse é um problema típico, e que visualmente o uso de área não seria uma alternativa pensada logo de imediato pelos estudantes que tentassem resolvê-lo. Mas o resolveremos utilizando o conceito de área.

Primeiramente, una os centros e trace os segmentos $\overline{BO}$ e $\overline{OA}$, o mesmo com $\overline{CP}$ e $\overline{PA}$, formando assim os triângulos ABO e ACP de altura **raio**, o trapézio $BCPO$ de altura **raio** e um triângulo AOP. Sabemos que a soma das áreas das partes é igual a área da figura inteira.



A área do trapézio é dada por $\dfrac{(B+b).a}{2}$, B é base maior, b base menor e a a altura. Chame de X a distância entre os centros e h a altura do triângulo AOP. Determinaremos h.

H é altura do triângulo ABC. Por Pitágoras temos,

$12^2 = 8^2 + H^2$, pois o pé da perpendicular que passa por A, corta $\overline{BC}$ no ponto médio. Logo $H = 4.\sqrt{5}$, então $h = 4.\sqrt{5} - 2$.

Então somaremos as áreas das partes do triângulo ABC, sabendo que sua área é $\dfrac{16.4.\sqrt{5}}{2} = 32.\sqrt{5}$

$$32\sqrt{5} = \frac{12.2}{2} + \frac{12.2}{2} + \frac{(16+X).2}{2} + \frac{X.(4.\sqrt{5}-2)}{2}$$

Portanto $X = 16 - 4.\sqrt{5}$

3.2.2 Problema 2

A *figura* 18 mostra um segmento $\overline{AB}$, seu ponto médio C e as semicircunferências de diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Uma circunferência de centro P é tangente às duas semicircunferências e também ao segmento $\overline{AB}$.

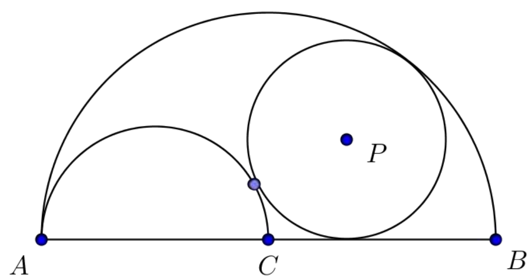


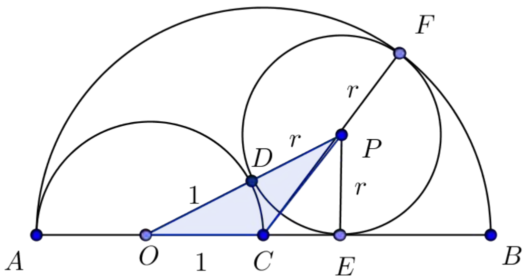
Figura 27: semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e centro C

Sendo $\overline{AB} = 4cm$, calcule o raio da circunferência de centro P.

Seja O, o ponto médio de $\overline{AC}$. Traçamos $\overline{OP}$, que passa pelo ponto de tangência D, $\overline{CP}$, que passa pelo ponto de tangência F e $\overline{PE}$, perpendicular a $\overline{AB}$. Seja r o raio da circunferência de centro P, $\overline{CP} = 2 - r$.

O perímetro do triângulo OCP é $2p = 1 + 1 + (2 - r) + r = 4$.

Logo, $p = 2$.



Agora determinaremos a área do triângulo OCP através da fórmula de Heron e a fórmula básica de triângulo (metade do produto da base pela altura).

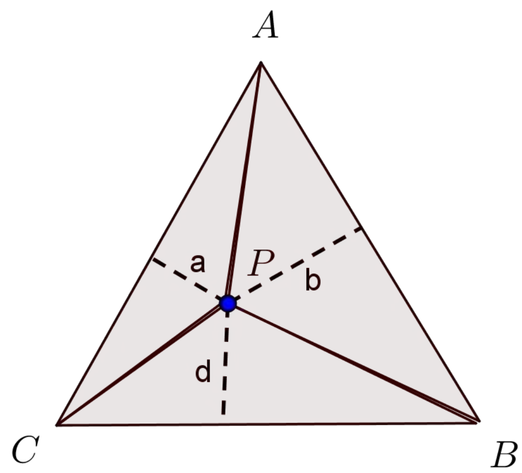
$$\sqrt{2.1.(1 - r).r} = \frac{1.r}{2}$$

Portanto, $r = \dfrac{4}{5}$.

3.2.3 Problema 3

Provar que a soma das distâncias a partir de qualquer ponto dentro do triângulo equilátero com seus lados não dependem da posição do ponto.

Tomaremos o ponto P no seu interior. Uniremos esse ponto através de segmentos com os vértices. Em seguida, construiremos as alturas relativas aos lados do triângulo ao ponto P. Veja a figura abaixo.



Seja a, b e d as alturas dos triângulos APC, APB e CPB respectivamente. Considere S a área do triângulo ABC. Daí,

$S = \dfrac{\overline{AC}.a}{2} + \dfrac{\overline{AB}.b}{2} + \dfrac{\overline{CB}.d}{2}$, Como o triângulo ABC é equilátero, $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{CB} = x$. Daí,

$S = \dfrac{x}{2}(a + b + d) \Rightarrow \dfrac{2.S}{x} = a + b + d$. Assim, a soma das distâncias a partir de qualquer ponto dentro de um triângulo equilátero, não depende da posição desse ponto.

É pouco provável que uma pessoa, ao resolver um problema que não esteja explicitando cálculo de área, intuitivamente e imediatamente pensaria em utilizar tal conceito para abordá-lo ou solucioná-lo. A intenção desse trabalho é que o aluno e o professor enxerguem as diversas aplicações e abordagens distintas em que o conceito de área pode aparecer. É claro que não conseguiremos abordar todas as possíveis áreas e problemas que poderíamos resolver utilizando área, o intuito é demonstrar que temos outra ferramenta que muitas vezes é pouco utilizadas nas aula de geometria.

No próximo capítulo, traremos uma proposta de abordagem de área de figuras básicas para o 6º ano, não com intuito de ferramenta, mas sim de conjecturar fórmula através de decomposição de figuras básicas. A tentativa é que o aluno entenda precocemente o conceito de área de figuras geométricas, o que possibilitará mais tarde o seu uso como ferramenta de resolver problemas.

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Introdução

Esse capítulo foi desenvolvido propondo dois momentos para o estudo de área de figuras geométricas para serem aplicadas em turmas do 6º ano do ensino fundamental. O objetivo é fazer com que eles entendam a conceituação de área de figuras geométricas, uma vez que as fórmulas de áreas não serão dadas, para que os alunos intuitivamente perceba os padrões, e construa suas próprias ferramentas,tendo em vista que os mesmos ainda não têm base para resolver problemas através de fórmulas.

A turma selecionada para o desenvolvimento desse capítulo foi o 6º ano da escola Maria Carelli Lomonte, com 24 alunos no ano letivo de 2016.

Figura 28: Turma do 6º ano

4.1 Sequência Didática 1 - Utilizando o Geogebra para o Cálculo de Áreas de Figuras Geométricas

4.1.1 Proposta de aula com Software Geogebra

A proposta de aula será apresentar figuras geométricas padrões para os alunos utilizando o Geogebra para ilustração e também para iniciarmos algumas atividades de cálculo das áreas dessas figura de maneira mais natural e simples. A intenção é que percebam certos padrões para diferentes figuras, como o quadrado, o retângulo, o triângulo e etc...

> No que diz respeito ao campo das figuras geométricas, inúmeras possibilidades de trabalho se colocam. Por exemplo, as atividades de classificação dessas figuras com base na observação de suas propriedades e regularidades. Atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans, poliminós, fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal pode ser

> composta/decomposta por outra e em particular por triângulos, o que facilita o cálculo de áreas e a determinação da soma das medidas dos seus ângulos internos.(PCNs, 1998, p. 123)

4.1.2 Objetivo

Perceber o conceito de área através de figuras e transformações;

Perceber padrões ao contar unidades de áreas;

Conjecturar fórmulas de cálculo de área de figuras diversas;

Assimilar o conceito de área como ferramenta de resolver problemas;

Visualizar, reconhecer, analisar e estabelecer relações entre as figuras geométricas.

4.1.3 Objetivos Didáticos

Apresentar aulas diferenciadas aos alunos, tendo em vista que no 6º ano, não é comum essa matéria ser abordada dessa forma, porém é uma fase em que os alunos ainda estão curiosos com desenhos podendo achar lúdico manipular áreas e encontrar soluções através da percepção das imagens dadas.

4.1.4 Materiais utilizados

Aparelho de Multimídia com Projetor de imagens, notebook com *software* Geogebra instalado, folha de papel A4, régua, lápis e borracha.

4.1.5 Metodologia e Justificativas

O primeiro momento desenvolveu-se através de uma sequência de aula expositiva com o auxílio do *software* Geogebra. Com a apresentação de algumas simples figuras e transformações em retângulos, deseja-se defender a ideia de que é possível abordar o conceito de área criando seus próprios padrões, detalhes que apontam para a riqueza e brilho da geometria. Pensou-se nesta abordagem devido ao fato desse software oferecer ferramentas para composição e decomposição de figuras geométricas, além de cores e estilos, proporcionou-se uma janela algébrica onde se torna possível ao desenhar a figura, a obtenção da área. Criou-se no coletivo algumas figuras básicas para uma possível transformação no retângulo de referência.

No segundo momento disponibilizou-se atividades individuais referentes as aulas do primeiro momento. Esperava-se que os alunos as desenvolvessem sem tentativas de forma automática (com regras decoradas), uma vez que os mesmos tiveram a liberdade de manipulação de figuras com seus materiais.

A importância do uso da tecnologia para o ensino da geometria reside no fato de que os alunos possam dominar e fazer simulações de situações problemas, fazer comparação de imagens, perceber as diferenças entre figuras.

> Atualmente, existem softwares que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos etc.(PCNs), p. 124.

Contudo *software* permite que a geometria seja vista através do ponto de vista estético. A utilização da tecnologia em sala de aula contribui para o desenvolvimento das capacidades criativas dos alunos. Nas construções geométricas o trabalho ganha força no sentido da investigação, da transformação de casos particulares para o geral (conjecturas de fórmulas). (MIRANDA, BLAUDARES, 2007).

> A sociedade e a tecnologia estão integradas e a tecnologia tornou-se o aspecto dominante da civilização. A matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação, e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação. (Miranda e Blaudares, 2007, p. 73).

O Geogebra permite que o aluno enxergue a geometria de modo mais amplo tornando suas percepções mais evidentes, já que o mesmo tem a função de demonstração visual e lúdica do problema em questão, favorecendo para uma conclusão imediata, na visão de Bolgheroni e Silveira (2008):

> O uso de softwares de geometria dinâmica pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo. Softwares educativos podem representar possibilidades de simulação deste material concreto (BOLGHERONI e SILVEIRA, 2008, p. 3).

Para o cálculo de área, o Geogebra oferece vantagem, pois possui um conjunto de elementos que oferece clareza para o aluno, como exemplo: malha quadriculada, régua, pontos no plano cartesiano. Sem contar que o mesmo calcula e exibe a área dos polígonos com opção de cores e estilos a fim de motivar a resolução de problemas, favorecendo os primeiros ensinamentos para calcular área ver *figura 29*. Sendo assim, fortalece a criação de fórmulas a partir de contagem das unidades de área.

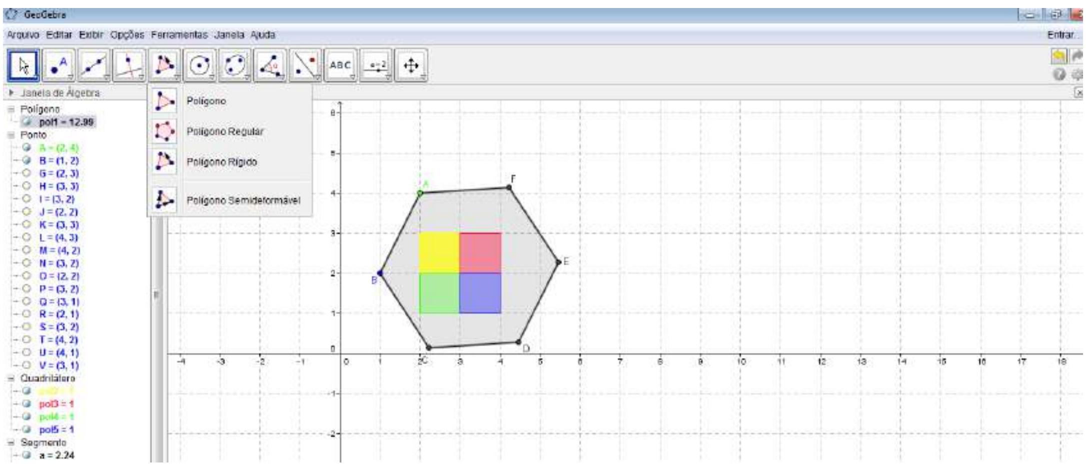


Figura 29: Tela do Geogebra

Daremos em seguida uma sequência de aula sobre alguns polígonos, cálculo da área e alguns elementos. Aqui os alunos já têm conhecimento sobre os elementos do retângulo. Como os ângulos de 90º, lados opostos paralelos e iguais, comprimento perpendicular a largura e altura de uma figura (retângulos e triângulos)

4.1.6 Atividades - Usando a Equidecomponibilidade de figuras para transformação em Retângulo

O objetivo nesta atividade é fazer com que os alunos através da visualização do Geogebra percebessem os padrões para determinar a área de algumas figuras básicas. Uma vez que o mesmo permite manipular as figuras equidecomponíveis[1], encaixando e sobrepondo dando clareza e entendimento.

POL é o nome do polígono que o *software* se refere.

Momento 1 - Retângulo

Determinar a medida da superfície de um retângulo contando as unidades no seu interior pode proporcionar a clareza que se busca no cálculo de área. Acredita-se que com a malha quadriculada torna-se acessível a visualização e a compreensão. Os antigos Egípcios já usavam essa malha para determinar área de superfície nas construções ou mesmo aproxima-las a uma já conhecida. Beneficiando dessa ideia faremos a contagem das unidades S no interior da *figura 30*, percebe-se que a quantidade que cabe dentro do retângulo pode ser dada da mesma forma que **(comprimento) X (largura)**. Esse passo é importante, pois algumas figuras básicas da geometria elementar podem ser decompostas em retângulos, o que beneficia ao não uso de fórmulas de encontrar área de figuras. Usaremos o retângulo como referência para determinar a área de algumas figuras geométricas.

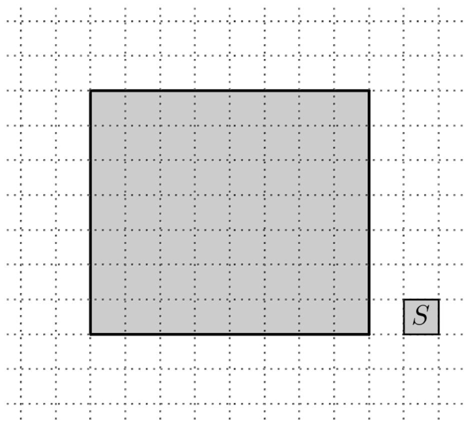


Figura 30: Retângulo

Momento 2 - Triângulo

[1]Equidecomponibilidade é transformação de figuras em superfície distintas mas com mesmas áreas.

Para determinar a área da *figura* 31, foi proposto completar a figura para que se perceba um número inteiro de unidades no seu interior, possibilitando uma transformação em retângulo, já que a área de retângulo foi trabalhada no momento 1.

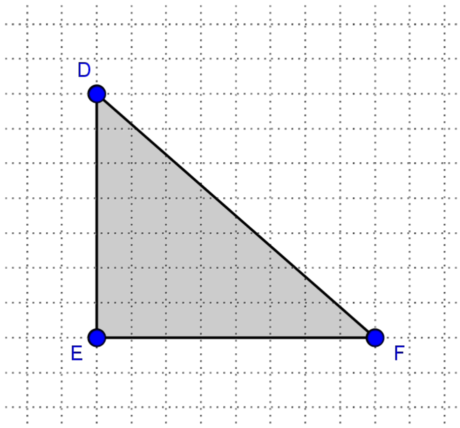


Figura 31: Triângulo

Na *figura* 32 mostra o quão mais fácil ficou determinar a área . A partir de várias tentativas chegou-se a conclusão de que a área do triângulo é $\frac{comprimentoXlargura}{2}$, pois a parte que foi adicionada para completar o retângulo, deve ser retirada do cálculo de área. A medida que o cálculo de área de triângulo se torna comum, as dimensões "comprimentos e larguras"se transformam em "bases e alturas"

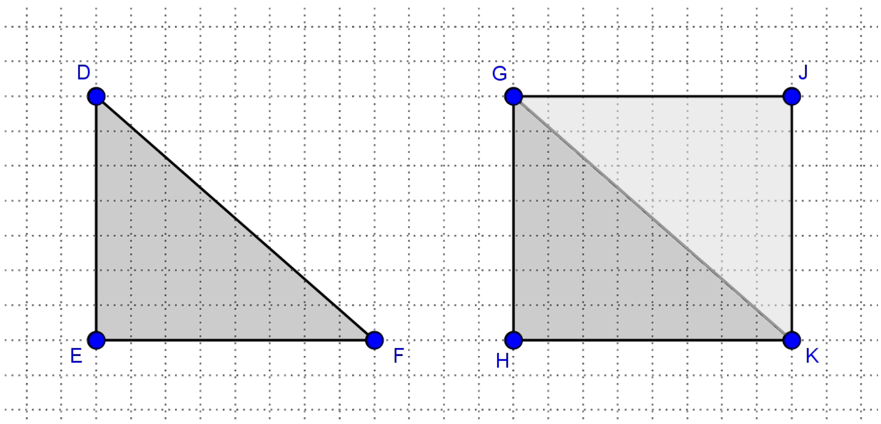


Figura 32: Transformação de triângulo em retângulo

Triângulos de formatos não retangulares, também podem se beneficiar dessa ideia, porém com mais manipulações. Então com ajuda do software pode-se propor um problema.

Determine a área do triângulo abaixo

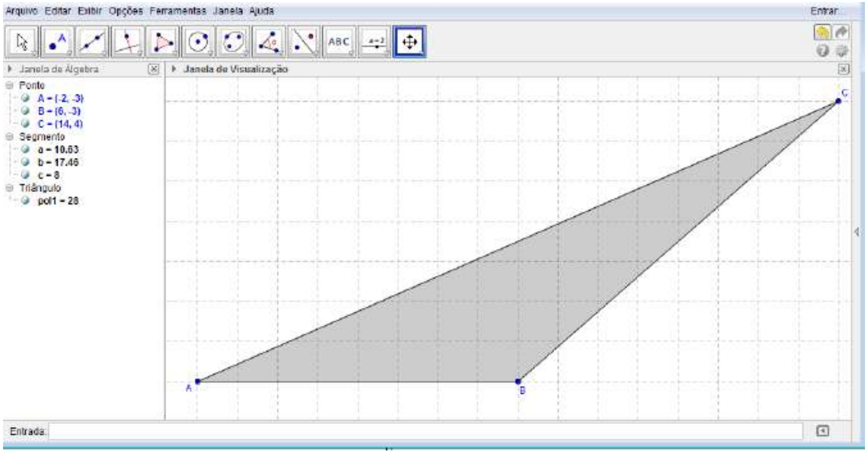


Figura 33: Triângulo obtusângulo

A janela algébrica do *software figura 33* permiti a visualização da área do polígono $Pol1 = 28$. Mas a questão é: Como chegar a essa resposta? Qual é a altura neste caso?

Para responder tais perguntas, podem ser feitas algumas adaptações na tentativa de transformá-la em uma figura já conhecida como na $figura$ 34 .

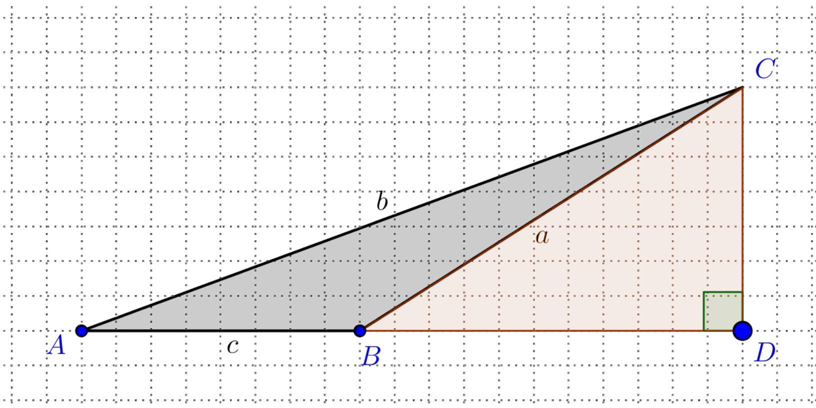


Figura 34: Triângulo retângulo ADC

Basta criar o triângulo retângulo em D, BDC. Calcula-se a área do triângulo já familiar (pois é triângulo retângulo) ADC e subtrai a área do triângulo BDC também familiar. O resultado será a área do triângulo ABC. Contudo se torna claro que $\overline{CD}$ é altura comum de $\triangle\ ABC$ e $\triangle\ ADC$. O que também favorece para compreensão da **propriedade 1**, uma vez que o software permite deslizar o vértice C paralelo a base $\overline{AB}$, mostrando a área $pol1$ constante $figura$ 35.

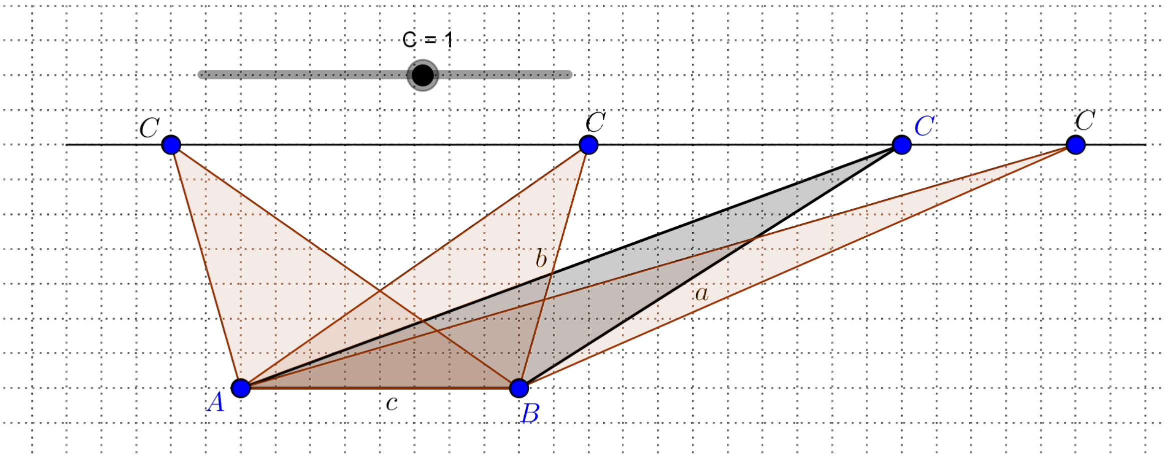


Figura 35: Triângulos de mesma base e altura

Verificaremos a seguir a área de alguns quadriláteros convexos.

Momento 3 - Paralelogramo

Paralelogramo é um quadrilátero que contém os lados opostos paralelos.

Para determinar a área do paralelogramo, basta multiplicar base pela altura, visto que na *figura* 37 o mesmo foi transformado em retângulo.

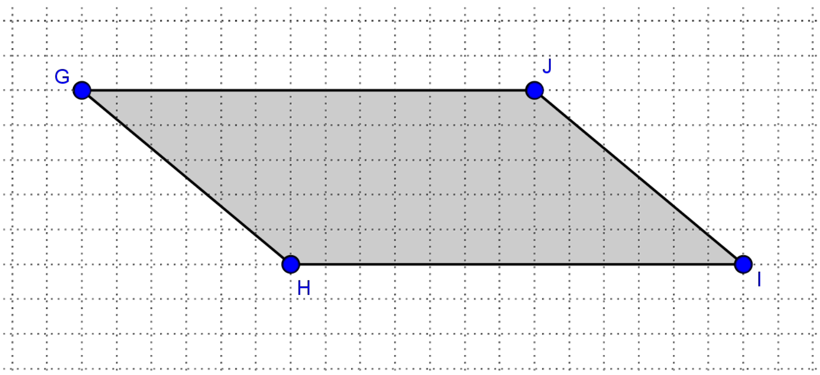


Figura 36: Paralelogramo

Essa transformação foi possível, pelas características do paralelogramo de lados opostos paralelos e iguais que se assemelham as características de um retângulo.

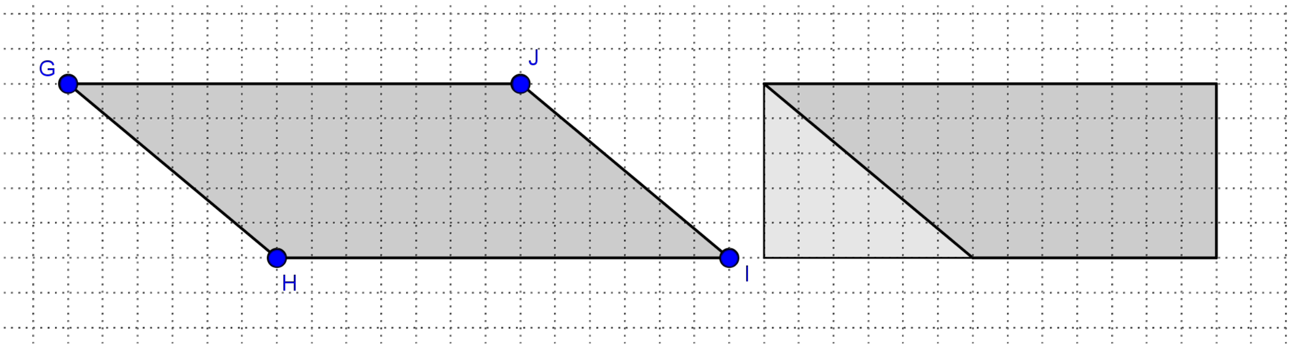


Figura 37: Transformação de paralelogramo em retângulo

Momento 4 - Trapézio

Definição 4.3.4: é um quadrilátero que possui dois lados paralelos.

O que foi dito para o paralelogramo na subseção anterior, não funciona com um trapézio escaleno.

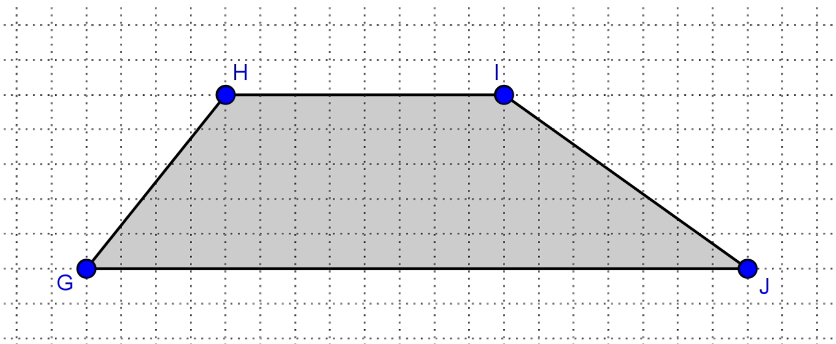


Figura 38: Trapézio

Neste caso, para transformar o trapézio em retângulo é preciso inserir um outro trapézio igual encaixando o lado correspondente. Dai terá um paralelogramo que foi facilmente transformado em retângulo na seção anterior. Observando a $figura$ 39 nota-se que no retângulo sombreado a base é soma da *Base maior* com a *Base menor* do trapézio inicial, logo a área se verifica $\frac{(Base\ maior)+(Base\ menor)X(Altura)}{2}$

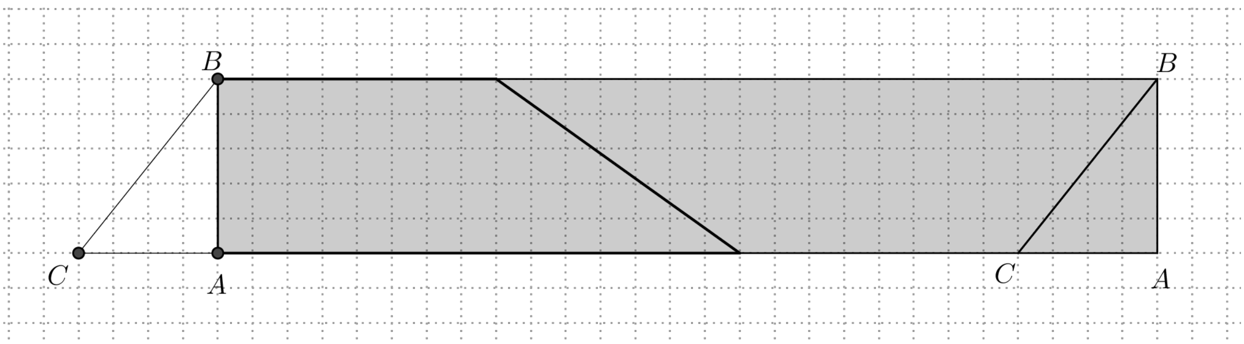


Figura 39: Transformação de Trapézio em retângulo

Momento 5 - Losango

Definição 4.3.5: é um quadrilátero que possui quatro lados de mesma medida.

Para facilitar o cálculo da área do losango, tentamos relacionar a sua superfície com a superfície de um retângulo de mesma área, na $figura$ 41 observa-se um retângulo formado a partir dos triângulo retângulo da figura inicial.

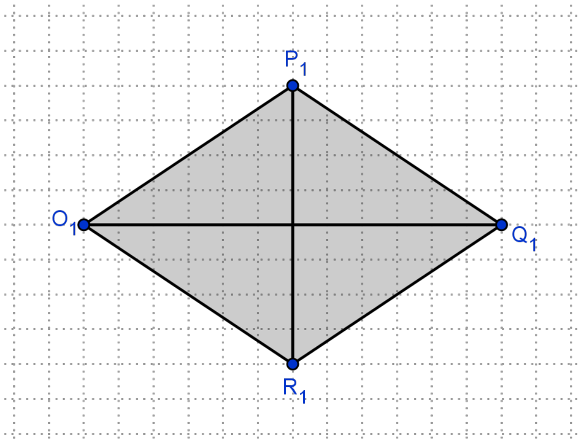


Figura 40: Losângo

Nota-se na *figura 41* que a base do retângulo é igual a diagonal maior do losango, e a altura do retângulo é metade da altura do losango, portanto a sua área fica determinada da seguinte forma:

$$(Diagonal\ maior) X \frac{(Diagonal\ menor)}{2}$$

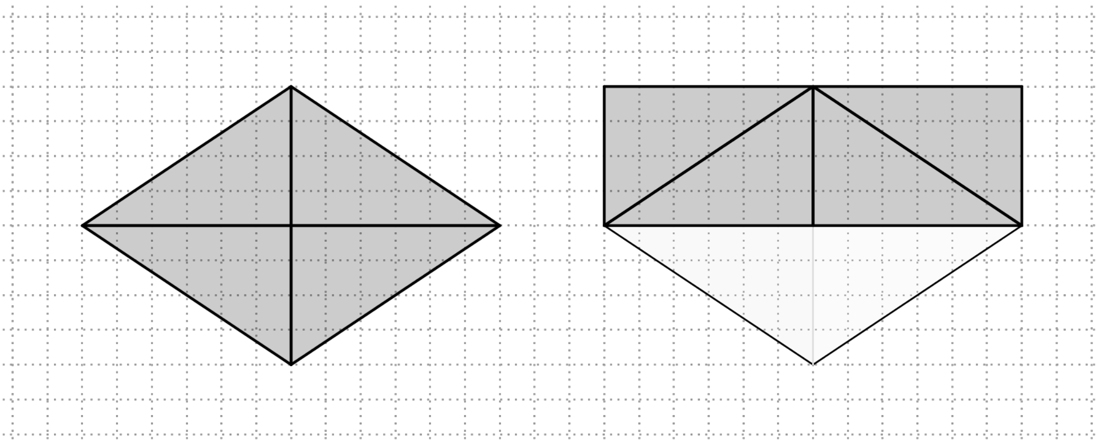


Figura 41: Transformação de Losango em retângulo

4.1.7 Relatos da Aplicação para Sequência de Atividade 1

A apresentação dessas figuras básicas contribuiu para a percepção do conceito inicial de área, uma vez que a abordagem permitiu a ludicidade na manipulação, fazendo construção e desconstrução de figuras, a fim de transformar uma dada imagem a uma já conhecida.

Os alunos se interessaram muito pelo conteúdo, o que permitiu um bom aproveitamento, onde os mesmos participaram ativamente, fazendo questionamentos, dando sugestões e inclusive trazendo figuras para serem estudadas, como por exemplo polígonos com mais lados como o hexágono.

Este trabalho contribuiu de forma positiva na formação destes alunos, possibilitando nos anos posteriores compreensão mais satisfatória no momento em que lhes foram apresentados a geometria euclidiana plana com respeito, especificamente ao assunto tratado aqui nas atividades: áreas.

A todo momento no decorrer dessa apresentação foi feito indagações de acordo com as etapas de George Polya da *seção 1.2*, induzindo os alunos a pensarem de forma organizada em possíveis soluções, o interessante é que a maioria da turma respondia assertivamente, dando um *feedback* positivo as aulas dadas. No entanto, houve momentos em que os mesmos tiveram grandes dificuldades, como por exemplo achar a área de um triângulo que não fosse retângulo. Notou-se como ponto negativo o não reconhecimento de muitas figuras. Alguns alunos não sabiam nem desenhar um triângulo, mostrando que houve um déficit de aprendizado em geometria nos anos anteriores. E também a falta de habilidades em trabalhar com as ferramentas, como por exemplo Régua. Uma possível sugestão seria, antes de iniciar esse trabalho, fazer uma oficina para apresentação de todas figuras geométricas e como usar o próprio material.

4.2 Sequência Didática 2 - Atividades e Resolução de Problemas utilizando Área como ferramenta

4.2.1 Atividade 1 - Calculando área contando unidades

4.2.1.1 Objetivo da atividade 1

Fazer com que os alunos do 6º ano manipulem as figuras e descubra a quantidade de unidades de referências. Parece uma atividade simples, porém proporciona a descoberta de padrões. Alunos do 6º ano não compreendem que a área do quadrado é base multiplicado pela altura, mas se a proposta for contar as unidades, logo ele vai querer multiplicar.

4.2.1.2 Objetivo didático da atividade 1

Perceber após a decomposição das figuras, que para diferentes modelos de imagens, também há diferentes padrões para obtenção da área.

4.2.1.3 Materiais utilizados na atividade 1

Aparelho multimídia com projetor de imagens, computador com Geogebra instalado, folha de papel A4, borracha, lápis e régua.

4.2.1.4 Desenvolvimento Atividade 1

Usando área como unidade em uma malha quadriculada que cobre toda a superfície das figuras, é possível através da equidecomponibilidades das figuras planas, transformá-las em outra figura que aponte visualmente a uma quantidade inteira de unidades no seu interior.

O desenvolvimento da atividade será feito para que os alunos possam realizar a seguinte atividade:

Calcule, utilizando equidecomponibilidade das figuras, as áreas das seguintes figuras geométricas:

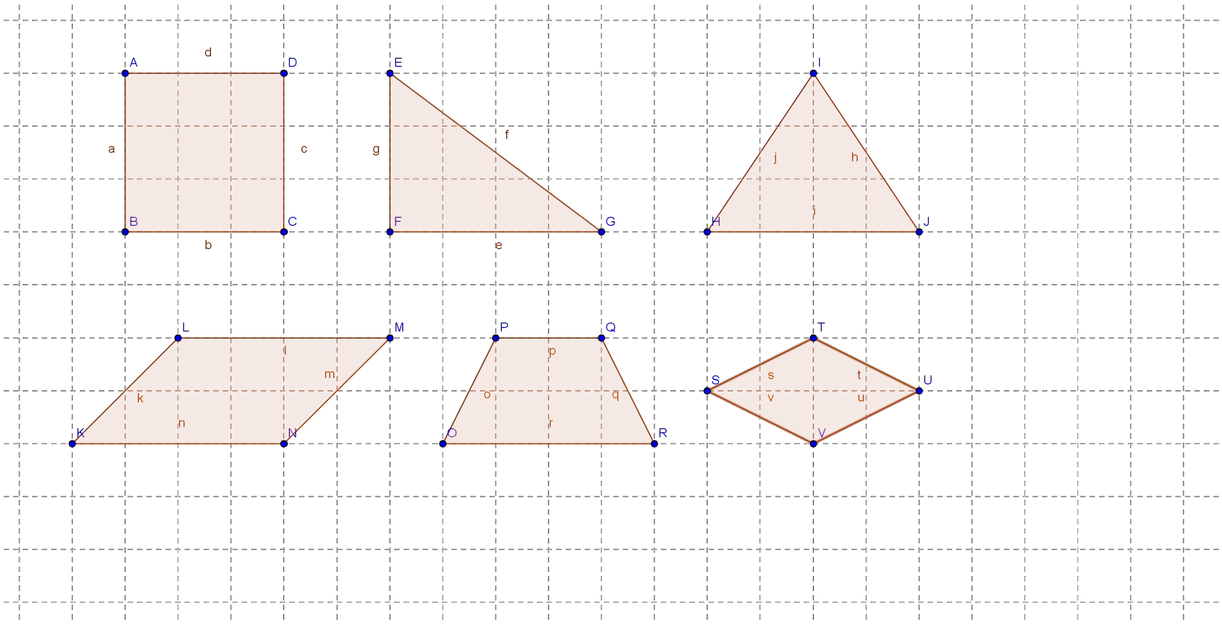


Figura 42: Figuras geométricas básicas

Para esclarecer sobre a equidecomponibilidades das figuras foram apresentadas as figuras a seguir.

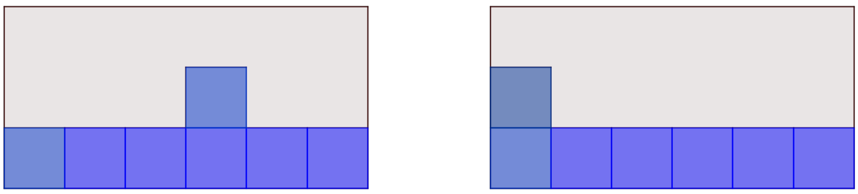


Figura 43: Mesma quantidade de Unidades

Faça o questionamento aos alunos de qual é a área da parte pintada de violeta em cada figura apresentada. O professor deverá mostrar a ideia de equidecomposição e apresentando formas e ferramentas para o cálculo da área de figuras planas. O professor deve afirmar e comprovar que a área das duas figuras é a mesma, mesmo que sejam figuras distintas. Esse será um passo importante para que os alunos tenham independência para a realização das atividades futuramente aplicadas.

Após explanação dos conceitos importantes é proposto aos alunos o questionário apresentado na it figura 42 e dados 15 minutos para que eles entregassem suas respostas para avaliar a independência dos alunos e se utilizaram as ferramentas propostas.

4.2.1.5 Relatos e Comentários Atividade 1

Após a correção, pode-se notar que a turma realmente compreendeu o conteúdo, tendo em vista que os alunos tiveram a liberdade de pintar, completar, preencher de modo que a quantidade de unidades fosse visivelmente ilustrada, como mostra a atividade realizada por um aluno na *figura 44*, muitos outros alunos realizaram a atividade de forma semelhante, eles reproduziram novas figuras no caderno já com as unidades de áreas inteiras. A área do quadrado teve 100 por cento de acerto, e apenas poucos alunos se equivocaram nas respostas.

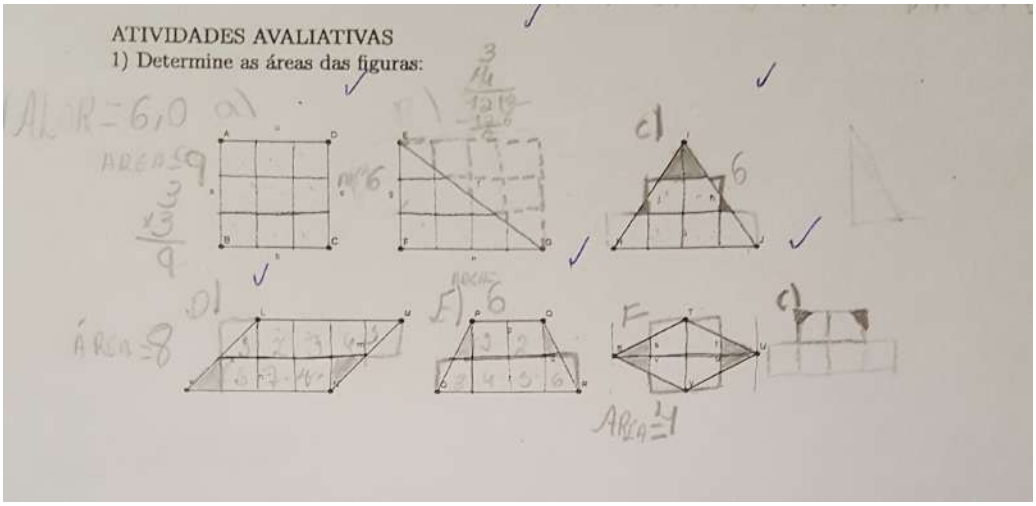


Figura 44: Área de algumas figuras básicas feita por aluno do 6º Ano

4.2.2 Atividade 2 - Preenchendo figuras com unidades de área

4.2.2.1 Objetivo da atividade 2

Desenvolver habilidade do aluno com a manipulação de régua e desenho no intuito de calcular área do trapézio.

4.2.2.2 Materiais utilizados Atividade 2

Quadro branco, pincel, régua graduada, folha de papel a4, lápis, borracha.

4.2.2.3 Desenvolvimento Atividade 2

O professor deverá fazer o desenho de figuras geométricas a escolher e também a do trapézio no quadro, como mostra na *Figura 45*.

Note que na *figura 45* da atividade 2, foram dadas as figuras sem a malha. A intenção é que os alunos construa essa malha de acordo o comprimento numérico dos lados das figuras, e depois conte as unidades. Sabemos que existem figuras que precisam de ajustes para conseguirmos preencher o seu interior com unidades inteiras de área. Segue a pergunta.

Considerando a unidade abaixo um quadrado de lado 1 metro, quantos caberão em cada figura?

Figura 45: Unidade

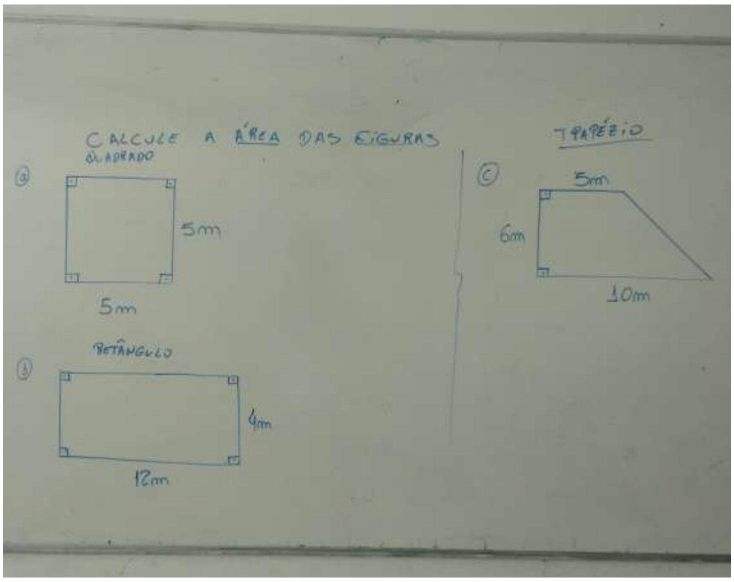


Figura 46: Polígonos no quadro branco

O professor deve questionar aos alunos e desafiá-los a calcularem as áreas das figuras desenhadas utilizando a régua e os conhecimentos e ferramentas apresentadas até o momento.

Todos os alunos receberam uma folha em branco e uma régua. Foi pedido para eles usarem o $1cm$ da régua como $1m$ para desenhar as figuras. Na figura do item C, foi sugerido a separação em duas figuras, retângulo e triângulo.

4.2.2.4 Relatos e Comentários Atividade 2

Os alunos construíram com uso da régua uma malha quadriculada cobrindo a figura (reticulado) nos ítens a) e b), no ítem c) sentiram maiores dificuldades, pois a figura não comportaria uma quantidade inteira de unidades dadas. Precisaram completar a figura para caber uma quantidade inteira de unidades. Logo contaram as unidades que preencheram em cada figura e retiraram aquelas que foram completadas como na $figura$ 47, ítem C.

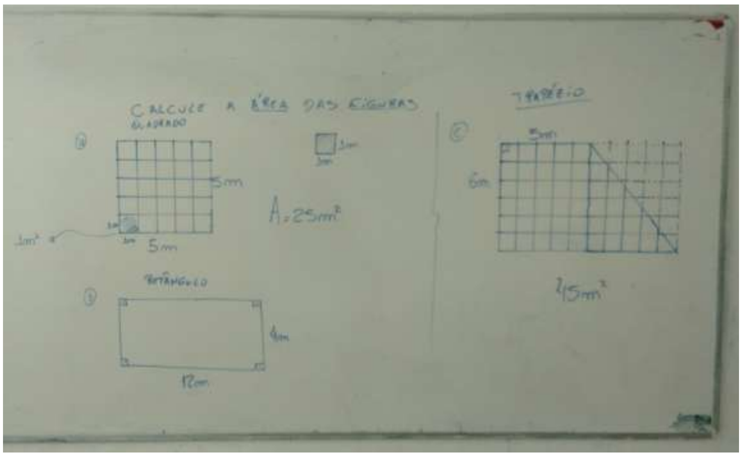


Figura 47: Figura com malha

Do item c), o problema foi tomando proporções maiores. Fugindo do simples problema de encontrar área, para o problema de usar área para determinar comprimento na figura. Tentando assim injetar na caixa de ferramentas, um grande artifício para resolver problemas. A essa altura do conhecimento os alunos já tem a noção de triângulos retângulos, desenhado a partir do esquadro. O problema consiste em construir os dois lados do triângulo (catetos) e o ângulo reto entre eles, sabendo essas medidas em centímetros, qual o comprimento do terceiro lado (hipotenusa)? Continuaremos na *atividade 3*.

4.2.3 Atividade 3 - Quanto mede o terceiro lado?

4.2.3.1 Objetivo da atividade 3

Influenciar o aluno a construir uma malha quadriculada cobrindo toda a folha inclusive o desenho. E a partir disso desenhar quadrados com os lados do triângulo.

4.2.3.2 Materiais utilizados atividade 3

Aparelho de multimídia com projetor de imagens, *notebook* com Geogebra instalado, quadro branco, pincel, régua graduada, folha de papel a4, lápis, borracha.

4.2.3.3 Desenvolvimento atividade 3

Sabemos que a relação de Pitágoras é fundamental para determinar o valor que está como ponto de interrogação, que é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, mas o intuito e o desenvolvimento dessa atividade será induzir a utilização de área como ferramenta pedagógica nesse cálculo.

O professor deve colocar no quadro o seguinte desenho, mostrado na *Figura 48*. Considerando o triângulo da figura abaixo, determine o lado desconhecido.

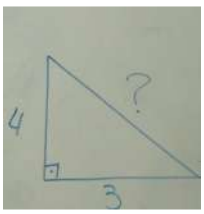


Figura 48: Problema deixado no quadro

Na mediação foi proposto desenhar uma malha quadriculada, onde os alunos deveriam encontrar todos os triângulos retângulos que conseguissem, onde os catetos deveriam sobrepor as linhas da malha, em seguida construir quadrados com os lados dos triângulos e contar as unidades nos limites de cada quadrado *figura 49*.

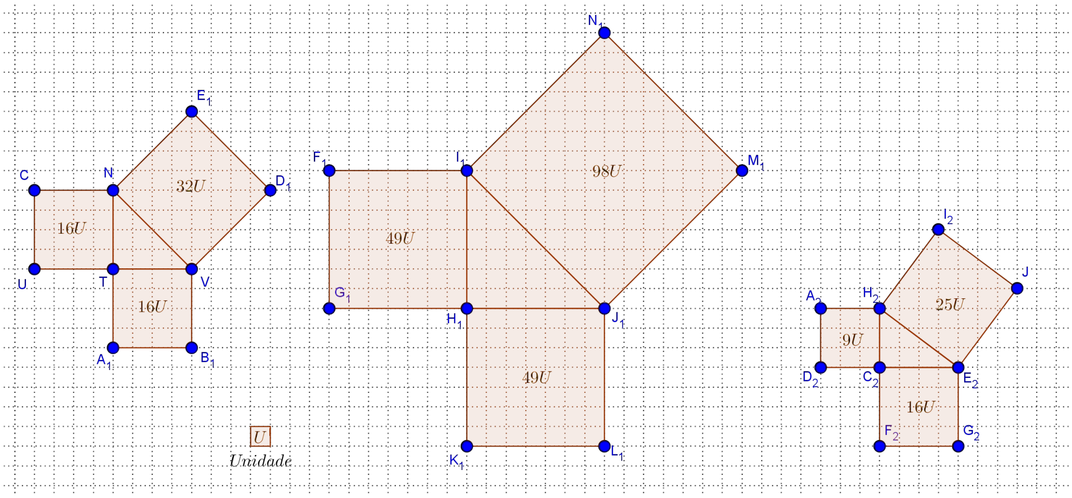


Figura 49: Malha com vários modelos da fórmula de Pitágoras

Logo o modelo abaixo foi desenvolvido para facilitar a visualização da contagem das unidades.

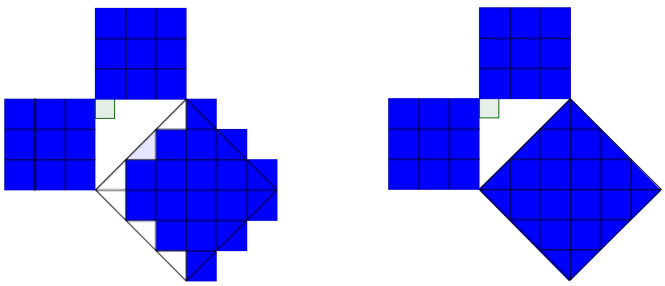


Figura 50: Teorema de Pitágoras contando unidades

4.2.3.4 Relatos e Comentários Atividade 3

Tentados pelos exercícios anteriores, fizeram a malha cobrindo a figura, em seguida contaram os quadradinhos. Enquanto outros mediram com a régua o terceiro lado. Pela proposta anteriormente dada, eles perceberam que a soma das unidades dos dois quadrados menores era exatamente igual as unidades do quadrado maior. Então para responder o exercício eles descobriram que o quadrado grande deveria ter área 25U, o que evidencia comprimento 5. Fazendo isso, então os alunos acabam de usar o conceito de área para encontrar um comprimento. Com essa ideia vários outras atividades foram propostas.

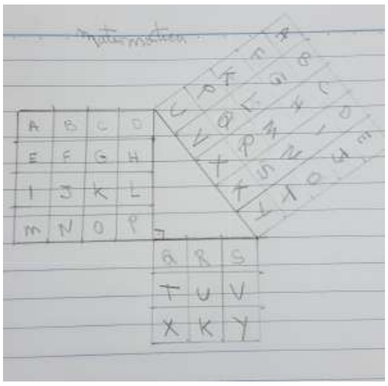


Figura 51: Desenho feito por aluno

4.2.4 Atividade 4 - Escadinha da OBMEP

4.2.4.1 Objetivo da atividade 4

Fazer com que os alunos percebam relações de áreas já estudadas, e a partir daí, criar estratégias para resolver o problema e ideias para resolver problemas semelhantes.

4.2.4.2 Objetivo Didático da atividade 4

Aprender o real sentido da palavra **equidecomponibilidade** de figuras geométricas. Uma vez que será feito recortes e transformação em um quadrado.

4.2.4.3 Materiais utilizados atividade 4

Internet, aparelho multimídia com projetor de imagens, *notebook* com Geogebra instalado, régua, esquadro, cartolina, tesoura,papelão, lápis, borracha e lápis de cor.

Fonte de pesquisa

www.obmep.org.br

4.2.4.4 Desenvolvimento atividade 4

Essa atividade deverá ser proposta como um desafio do professor para os alunos. A mediação como desafio faz com que os alunos se motivem mais para a descoberta da resolução do problema e também para que possam utilizar as ferramentas abordadas durante a sequência de atividades.

Existem problemas, onde as relações estudadas ficam implícitas. Esse tipo de problema tem a característica de identificar alunos que realmente tem conhecimento da teoria estudada e além disso domina o conteúdo. O problema abaixo é um deles e foi um recorte adaptado da OBMEP nível 1. Segue o problema:

A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e um de lado $6cm$. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.

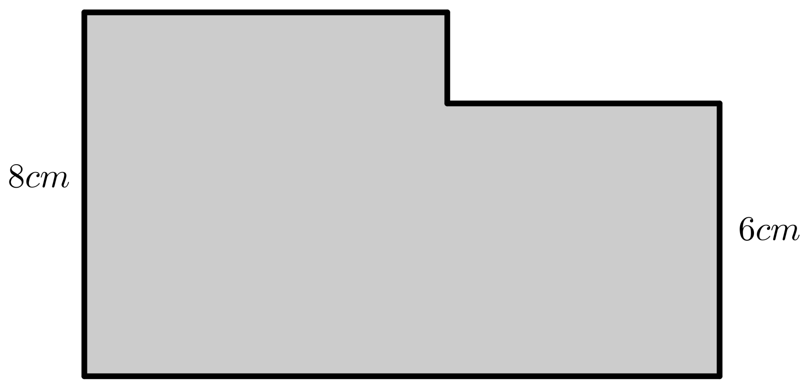


Figura 52: Dois quadrados da OBMEP

Mostre que com dois cortes em linha reta, conseguimos um quadrado com a mesma área da figura acima. Calcular a área da figura sombreada, em seguida adaptar essa superfície em dois cortes apenas e transformar em um quadrado. A resposta correta dessa tarefa está ilustrada na *figura 53*.

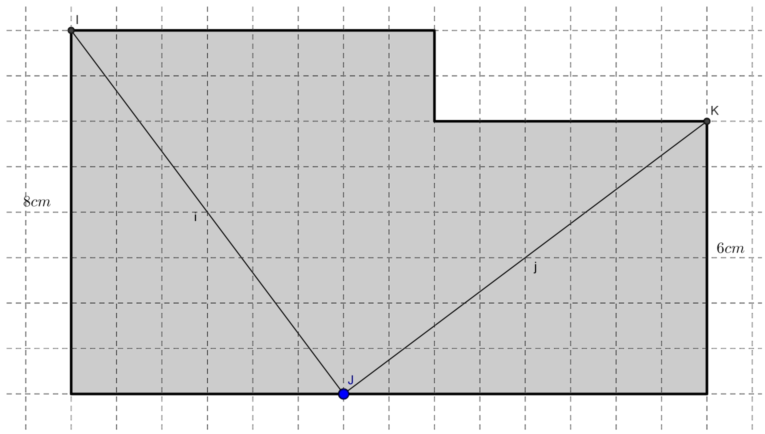


Figura 53: Figura da OBMEP no reticulado com dois cortes

Essa ideia remete a ideia anterior, uma vez que a soma das áreas de dois quadrados formam a área de um novo quadrado, como na *figura 54*

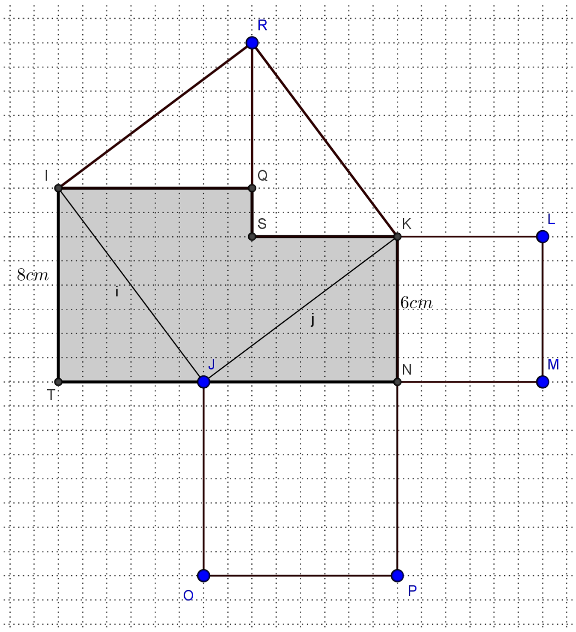


Figura 54: Partição da figura no reticulado

Já que essa atividade trabalha com recortes, então para completar o desenvolvimento da mesma, foi sugerido uma experiência fazendo recortes em cartolinas coloridas, para fazer a demonstração do teorema de Pitágoras por Perigal.

Figura 55: Trabalhando em grupo

Mas essa demonstração é de caráter puramente experimental, uma vez que a manipulação de materiais proporcionam encaixes perfeitos. A demonstração do teorema de Pitágoras através de HENRY PERIGAL [2].

> Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa. (EDUARDO WAGNER, 2015, p. 8)

Em seguida foi proposto que desenhasse um triângulo retângulo e dois quadrados com lados iguais aos dois lados menores do triângulo. Logo após desenvolver

[2]HENRY PERIGAL, um livreiro londrino, publicou em 1873 a demonstração interessante do teorema de Pitágoras e que ficou bastante famosa porque resgata o enunciado original proposto por Pitágoras:
Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

a experiência de Perigal. Observem a *figura 56*. A reta I é perpendicular e a reta m paralela a hipotenusa do triângulo retângulo.

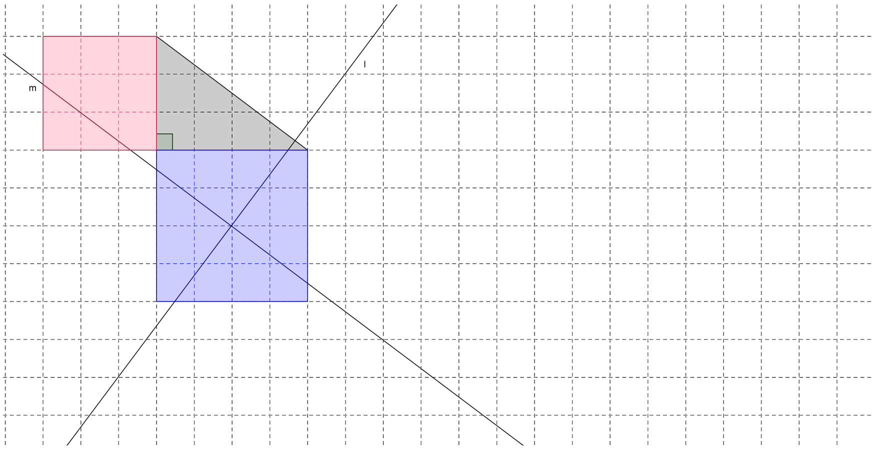


Figura 56: Perigal no geogebra 1

Foi proposto com o uso da tesoura destacar as quatro parte demarcadas no quadrado azul *figura 57*

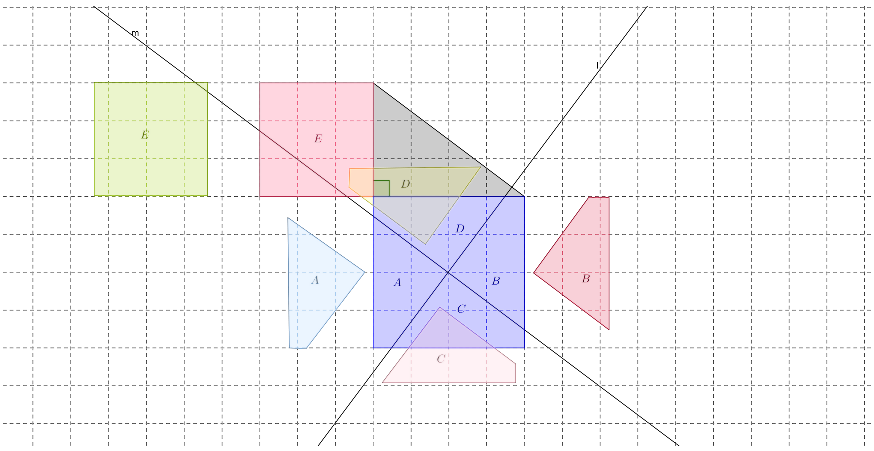


Figura 57: Perigal no geogebra 2

E por fim, foi proposto juntar essas fatias, inclusive o quadrado pequeno pintado em verde, e montar um quadrado que coincida com a hipotenusa *figura 58*, fechando assim essa experiência.

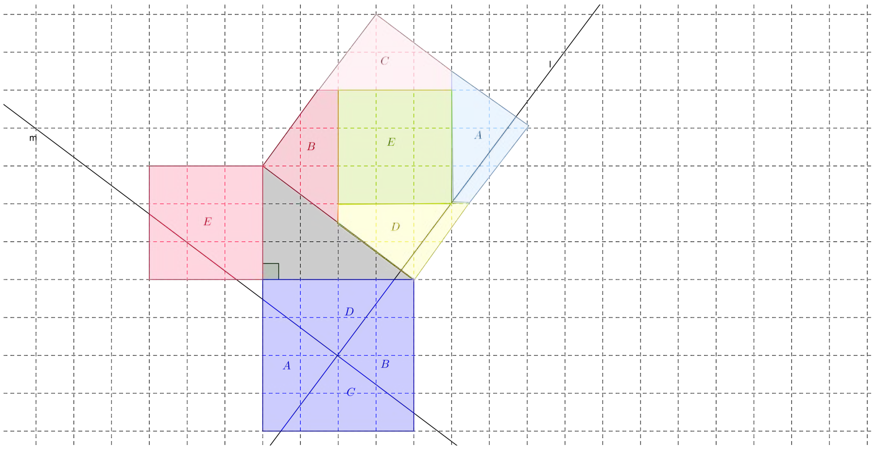


Figura 58: Perigal no geogebra 3

4.2.4.5 Relatos e comentários atividade 4

Após algumas tentativas e intervenções, os alunos usaram a ideia do exercício (a soma das áreas dos dois quadrado menores era exatamente igual a área do quadrado maior) e montaram a figura de Perigal *figura 59*. Surgem os questionamentos, tipo: Isso sempre vai dar certo? Quem descobriu isso? Porque isso é importante?

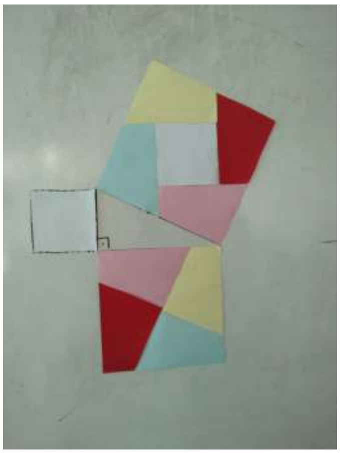


Figura 59: Teorema de Pitágoras por Perigal

Muitas perguntas foram respondidas pelo fato da figura se encaixar no quadrado que contém o maior lado do triângulo retângulo, mesmo com unidades não padrão. As dúvidas foram acabando na medida que as verificações se confirmavam ao longo da aula, a sala virou palco de experiências já que estava dividida por quadrados.

Figura 60: Piso da sala em malha

Após a complementação com os recortes de Perigal que buscou ajudar na solução da atividade da OBMEP. Voltamos com o relato da atividade da OBMEP

A primeira tentativa do aluno L, foi descobrir a área total da figura, para saber qual deveria ser o lado do quadrado grande á ser descoberto. Ao descobrir e verificar que seria 10, tentou adaptar seus cortes com ajuda da régua, fizeram muitas tentativas com número de cortes maiores que o pedido no enunciado. Só então foram tentar os cortes passando pelo interior da figura. Veja a figura abaixo construída por esse aluno.

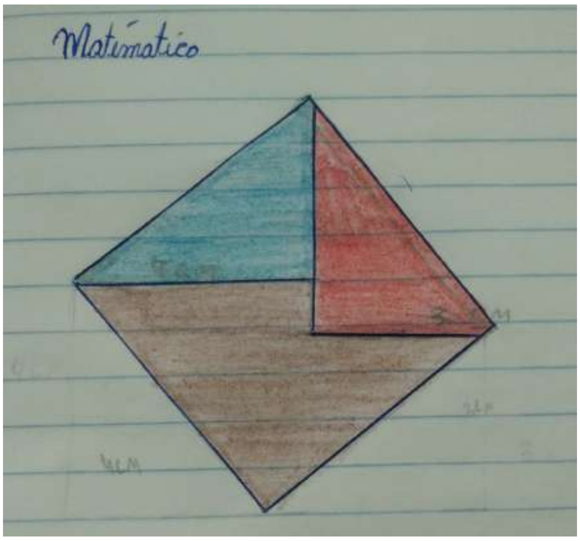


Figura 61: Transformação a partir dos quadrados menores com cores


Figura 62: Transformação a partir dos quadrados menores com recortes 1
(fonte: O autor)

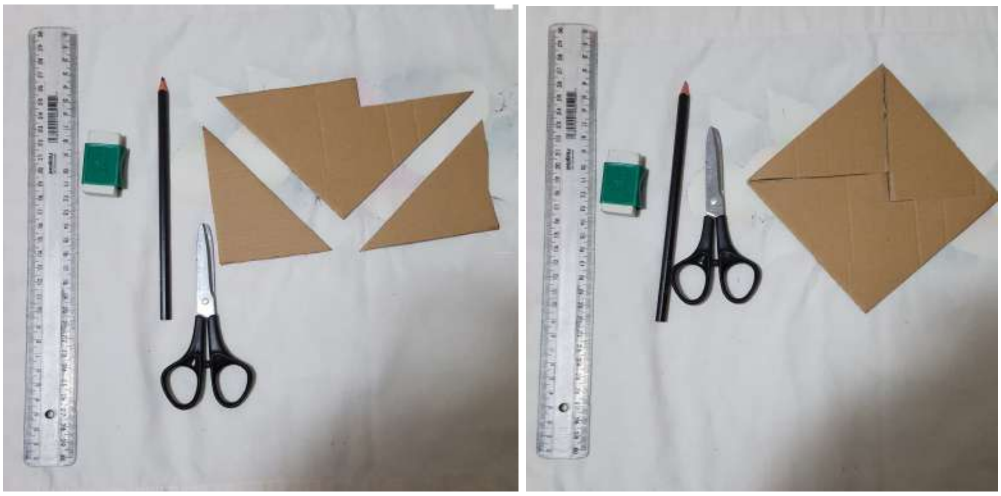


Figura 63: Transformação a partir dos quadrados menores com recortes 2
(fonte: O autor)

4.2.5 Atividade 5 - Basta contar pontos

4.2.5.1 Objetivo da atividade 5

Apresentar uma maneira mais fácil de calcular área de figuras em um reticulado, através dos pontos internos e na borda da figura.

Proporcionar habilidade para construir malha de forma estratégica para diferentes figuras.

4.2.5.2 Materiais utilizados atividade 5

Internet, aparelho multimídia com projetor de imagens, *notebook* com Geogebra instalado, régua, esquadro, tesoura, lápis, borracha e lápis de cor.

4.2.5.3 Desenvolvimento atividade 5

É didático apresentar ao aluno várias formas para solução de problemas em geometria, o importante é focar na teoria para que perceba que todos os modos utilizados para resolver problemas afirma a única teoria. Aqui pensou-se na fórmula de Pick, mesmo sabendo que a ideia é o não uso de fórmulas prontas, mas essa abordagem usando o teorema de Pick tem o perfil dos alunos que estão iniciando o estudo de geometria, pois o mesmo calcula a área apenas contando pontos da figura. Ver demonstração do teorema de Pick em **[10]** . Segue:

Determine a área do pentágono e do hexágono da figura abaixo:

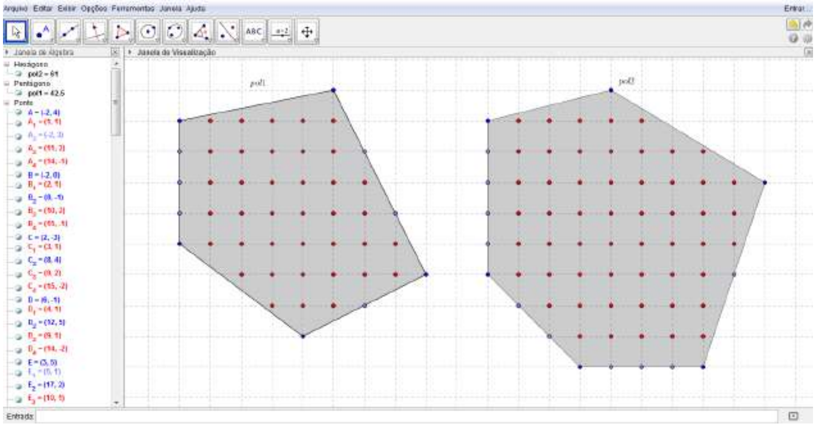


Figura 64: Pentágono e Hexágono

Calculemos as áreas de um pentágono e hexágono através da janela algébrica do *software* e em seguida verificaremos a sua veracidade através do teorema de PICK. Não será feita uma abordagem como na seção anterior, visto que alguns polígono com mais lados como o caso desses dois, não proporciona para o público em questão facilidades para uma possível transformação em retângulos. O teorema de Pick será a ferramenta para resolver esse problema.

Apresentação do teorema de Pick

Teorema de Pick: *Dado um polígono P com vértices cujas coordenadas no plano cartesiano são números inteiros, sua área pode ser calculada pela fórmula*

$$A(P) = i + \frac{b}{2} - 1$$

onde i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras interiores ao polígono e b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas do polígono.

Onde i (interno) é a família de pontos em vermelho e b (borda) a família de pontos em azul.

4.2.5.4 Relatos e comentários da atividade 5

Os alunos já se familiarizaram com a janela algébrica do *software*, pois a mesma mostra sempre a área da figura desenhada. Então bastaria confirmar esse resultado pela teorema de Pick. Alguns exemplos foram feitos no quadro, usando Pick para servir de base. Um aluno disse: "É possível encontrar a área da figura apenas contando pontos?"o outro disse : "Porque você não mostrou isso no começo?". Agora basta contar pontos obedecendo a regra de Pick. Prosseguimos:

Pol1

✓38 *pontos vermelho*
✓11 *azul*

Logo a área é, A(*pol1*)= $38 + \frac{11}{2} - 1 = 42,5$

Pol2

✓54 *pontos vermelho*
✓16 *azul*

Logo a área é, A(*pol2*)= $54 + \frac{16}{2} - 1 = 61$

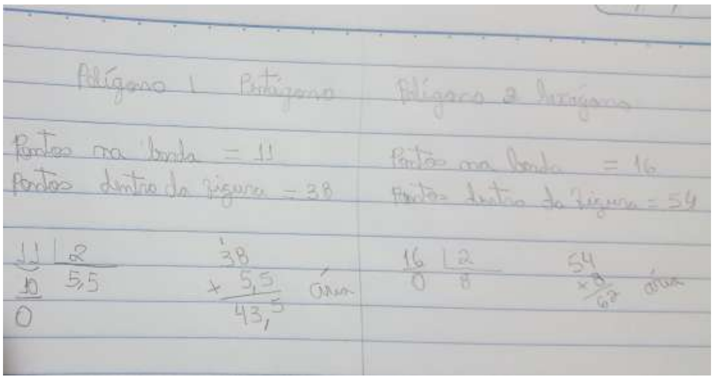


Figura 65: Teorema de Pick usado por aluno 1
(fonte: O autor)

Essa ideia foi reaproveitada para outros exercícios propostos, com o da *figura 66*

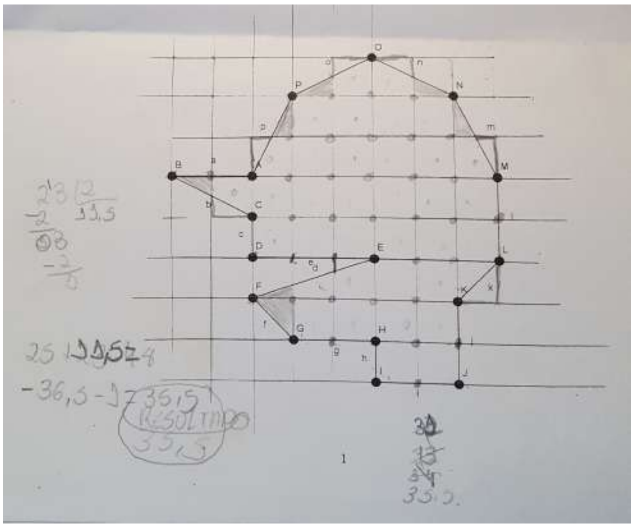


Figura 66: Teorema de Pick usado por aluno 2
(fonte: O autor)

Essa foi uma experiência muito positiva, pois os alunos não precisaram decorar fórmulas, apenas contar os pontos do reticulado, o que favoreceu a compreensão de todos. Ao longo desse trabalho, todas as figuras que estão no reticulado, se aplica o teorema de Pick para verificação da área.

Contudo, o objetivo almejado ao apresentar tais aulas foram alcançados, pois a partir dessas apresentações os alunos obtiveram conhecimento para resolver problemas relacionados a cálculo de áreas sem a necessidade de fazer o uso de fórmulas prontas, como pode-se observar no desenvolvimento das atividades. Esta foi uma pequena demonstração de que é possível apresentar a geometria de forma clara para alunos iniciante.

Na seção seguinte será apresentado o cálculo de área do círculo por aproximação usando PICK, apenas como proposta para sala de aula. A grande vantagem é que não precisa decorar fórmulas da área do círculo que envolve constantes irracionais. Basta contar pontos interno e na borda da figura no reticulado.

4.3 Proposta de cálculo de área de círculos para o 6º ano do ensino fundamental

O objetivo é calcular a área do círculo usando área de figuras já conhecidas como o quadrado para determinar uma melhor aproximação para essa área.

4.3.1 Navegando pelo história da matemática

Os Egípcios já tinham uma boa aproximação para a área do círculo, eles utilizavam malhas quadriculadas para aproximar áreas já conhecidas. O próprio papiro de Rhind trazia problemas para calcular a área do círculo como segue:

✓ **Problema 48: Compare a área do círculo com a de um quadrado circunscrito.**

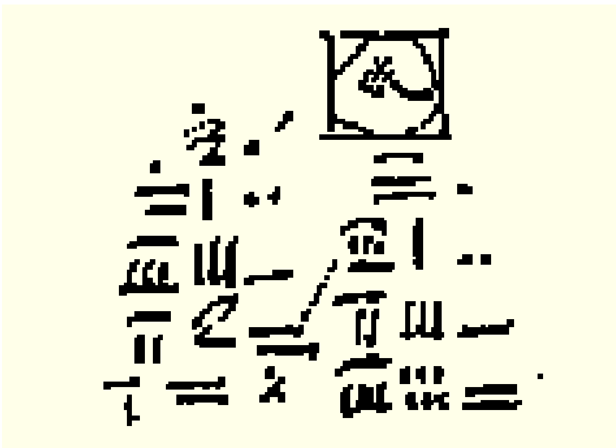


Figura 67: Quadrado circunscrito tirado do papiro de Rhind

✓ **Problema 50: Um círculo com diâmetro 9. Qual a sua área?**

Figura 68: Círculo de diâmetro 9 feito pelos Escribas
(fonte:http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf)

Para calcular a área do círculo era retirado "um nono"do diâmetro. Acredita-se que essa retirada era baseada nos experimentos como no esquema abaixo. Eles desenhavam um círculo inscrito ao quadrado em uma malha quadriculada, em seguida retiravam os triângulos sombreados como na *figura 69*. O resultado é uma boa aproximação da área do octógono.

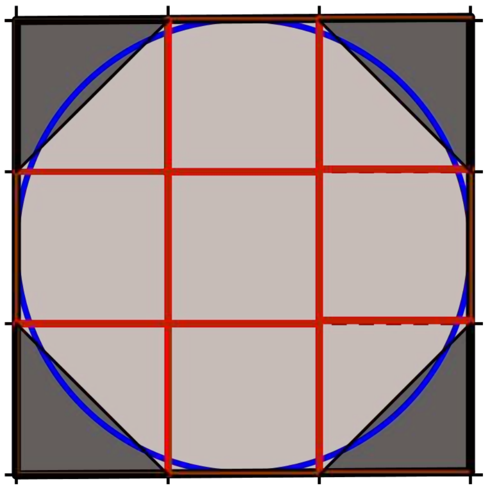


Figura 69: Círculo inscrito
(fonte: O autor)

Algebricamente a área do círculo seria:

$$\mathbf{A = (d - \frac{d}{9})^2 = (\frac{8d}{9})^2}$$

onde d é diâmetro.

Se considerarmos o diâmetro igual ao comprimento de 3 unidades, o modelo Egípcio daria,

$$\mathbf{A = (\frac{8x3}{9})^2 = \frac{64}{9} = 7.1111...}$$

Para confirmação dessa aproximação, a área do octógono se dá contando as unidades no seu interior. Percebe-se que a diferença entre as áreas é muito pequena.

4.3.2 Aproximando a área do círculo utilizando PICK para o 6º ano

Faremos aqui uma aproximação da área do círculo para o 6º ano do ensino fundamental usando o Teorema de PICK, enunciado na seção 4.2.5. Resolveremos um problema ilustrado pelo Geogebra e tentaremos uma melhor aproximação da área do círculo descrito na janela algébrica do software.

Problema do círculo: Determine uma melhor aproximação para área do círculo da *figura 70.*

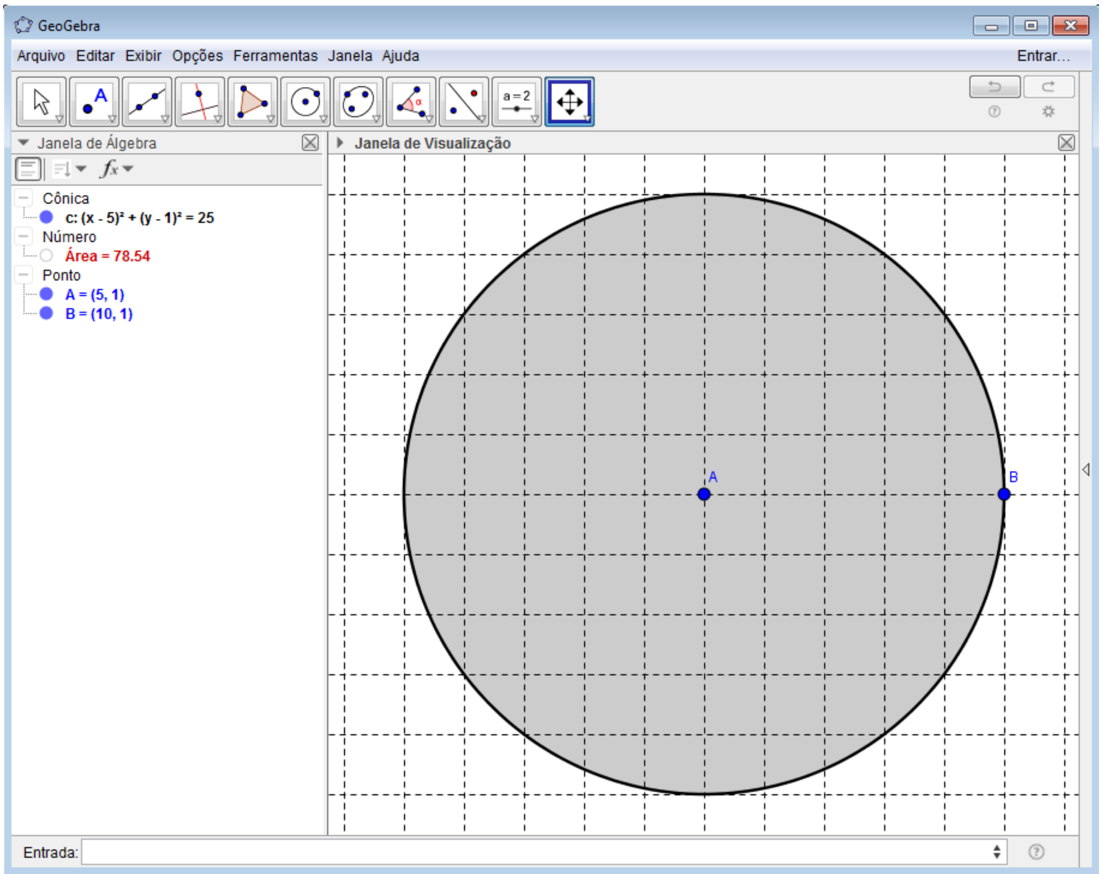


Figura 70: Círculo
(fonte: O autor)

Observando a janela algébrica do Geogebra, percebemos a área do círculo, Área=78,54 unidades. É possível uma boa aproximação dessa área por PICK, bastando para isso construir um polígono por falta ou por excesso, próximo a essa circunferência. A medida que o polígono aproxima dessa circunferência, a sua área aproximará da área do círculo. Vejamos na *figura 71* a construção do polígono azul:

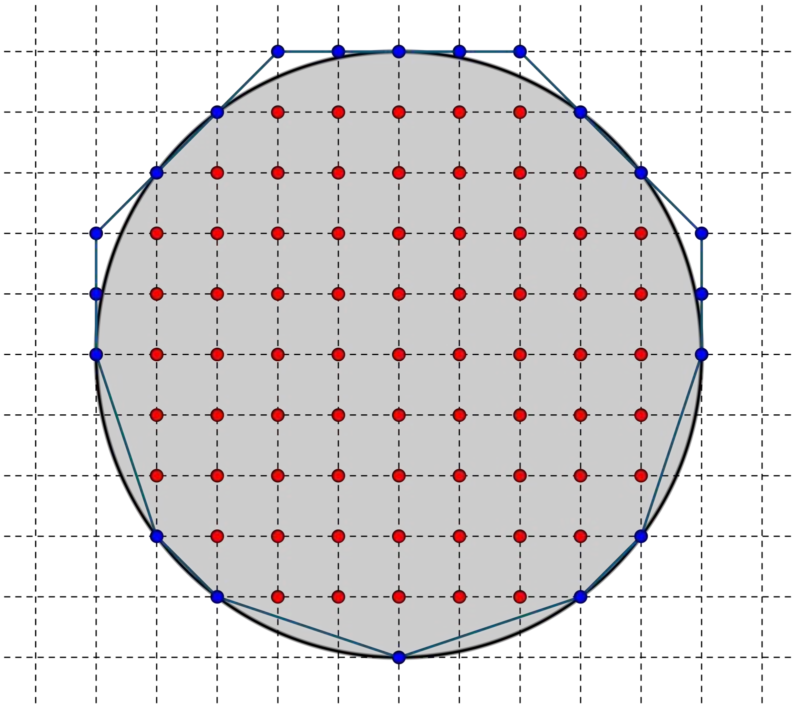


Figura 71: Círculo
(fonte: O autor)

✓69 *pontos vermelhos*

✓20 *pontos azuis*

Logo a área é, A(*polígono azul*)= $69 + \frac{20}{2} - 1 = 78$ unidades

Essa área é muito próxima da área do círculo.

Se contarmos os pontos internos da figura em uma malha mais fina como na *figura 73*, teremos uma aproximação melhor, uma vez que o polígono construído fique mais próximo da circunferência.

- Note que cada unidade de referência da *figura 71* será transformada em quatro unidades menores na *figura* 73.

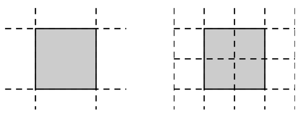


Figura 72: Transformação de unidades de referência
(fonte: O autor)

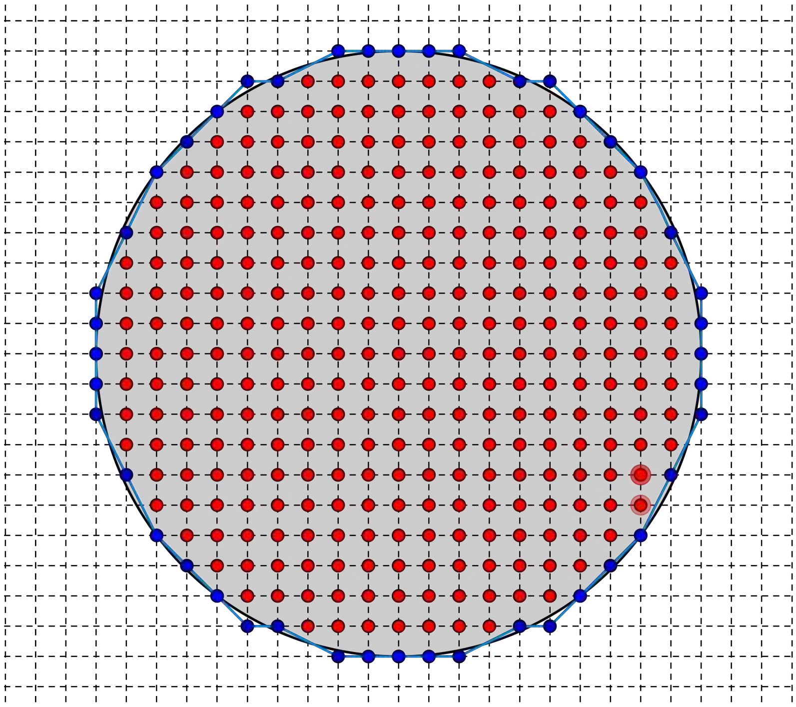


Figura 73: Círculo
(fonte: O autor)

✓293 *pontos vermelhos*

✓44 *pontos azuis*

Logo a área é, A(*polígono azul*) $= \frac{1}{4}(293 + \frac{44}{2} - 1) = \frac{314}{4} = 78.5$ unidades

Se usarmos malhas quadriculadas cada vez mais finas, a aproximação das áreas será sempre melhor.

Esse método de aproximar áreas do círculo ao polígono, proporciona conhecimento acerca do conceito de áreas. Sabemos que no 6º ano do ensino fundamental não é abordado esse conteúdo devido a constante irracional (π). Mas por Pick, pode-se mostrar a existência desse número fixo por aproximação sem usá-lo para determinar áreas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se que o campo da matemática é extenso, e precisamos dos instrumentos necessários para o seu manuseio, uma vez que ela é composta de proposições, teoremas, postulados e axiomas. Questionamentos podem ser feitos a respeito desses elementos. Por exemplo: O que é mais adequado? Qual ferramenta simplifica mais o problema? A escolha do melhor elemento depende da compreensão dos conceitos, da teoria, da riqueza de sua história, dos detalhes.

A abordagem de matemática para o ensino fundamental precisa estar conectada com o meio que os cerca, dando sentido cada elemento, mostrando e associando teoria com objetos palpáveis. A geometria possibilita essa interação, os seus elementos podem ser explorados de diversas formas, como o triângulo, retângulo, trapézio e outros. A história conta que os egípcios do Egito Antigo já usavam instrumentos da geometria para remarcação de área de terra próximo ao Rio Nilo após as inundações, mesmo depois que as águas fortes das correntezas lavavam os terrenos.

Na sala de aula essas interações proporcionam um melhor entendimento uma vez que é possível trazer para realidade do aluno a abstração da geometria. Esse trabalho se preocupou em apresentar o conceito de área e associar a objetos que após a absorção, o seu uso como ferramenta de resolver problemas.

O aluno precisa estar atento ao conceito de área, não apenas para cálculo de área, mas como proposta de resolução de problemas. O professor por sua vez necessita de materiais metodológicos para representar esta geometria. O software Geogebra permite essa analogia, pois o mesmo possui mecanismos que permitem simular problemas e usar ferramentas necessárias para resolvê-los.

REFERÊNCIAS

[1] Howard Eves. **Introdução à história da matemática**. Campinas, Editora Unicamp, 2004.

[2] Euclides.**Os elementos**. Traduzido por Irineu Bicudo. São Paulo, Editora Unesp, 2009.

[3] Rogério S. Mol. **Introdução à história da matemática** . Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

[4] B. Nelsen, **Proofs Without Words- Exercises in Visual Thinking**, The Mathematical Association of America, 1993.

[5] G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

[6] **Parâmetros curriculares nacionais :** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

[7] Wagner, Eduardo: **Teorema de Pitágoras e Áreas** Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[8] Wagner, Eduardo: **Usando áreas**, RPM, Revista do Professor de Matemática, EDIÇÃO 21.

[9] DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**.3. Ed. São Paulo: Ática, 1991.

[10] Souza, Fabrício Oliveira, 1979 - **Teorema de Pick : uma nova abordagem sobre áreas de figuras planas para o ensino básico** / Fabrício Oliveira Souza. – 2013.

[11] ENGELS, H. **Quadrature of the Circle in Ancient Egypt Historia Mathematica**, v. 4, p. 137-140, 1977.