UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

VINÍCIUS MODESTO SERTÓRIO DE SOUZA

Oficinas de Matemática Experimental
Do Princípio Multiplicativo ao Fatorial

Ilhéus-Bahia
2017

VINÍCIUS MODESTO SERTÓRIO DE SOUZA

Oficinas de Matemática Experimental
Do Princípio Multiplicativo ao Fatorial

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Discreta e Análise Combinatória

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión

Co-Orientador: Germán Ignacio Gomero Ferrer

Ilhéus-Bahia
2017

S729 Souza, Vinícius Modesto Sertório de.

Oficinas de matemática experimental: do princípio multiplicativo ao fatorial / Vinícius Modesto Sertório de Souza. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.

59 f. : il. ; anexos.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Matemática – Ensino e aprendizagem. 2. Análise combinatória. 3. Matemática recreativa. 4. Análise fatorial. 5. Contagem. I. Título.

CDD 510.7

VINÍCIUS MODESTO SERTÓRIO DE SOUZA

Oficinas de Matemática Experimental
Do Princípio Multiplicativo ao Fatorial

Ilhéus-BA, 10/03/2017

Nestor Felipe Castañeda Centurión - Dr
UESC
(Orientador)

Vinícius Augusto Takahashi Arakawa - Dr
UESC

Mariluce de Oliveira Silva - Ma
IFBA – Campus de Ilhéus

À minha esposa, Lívia A. Lessa S. de Souza, pela parceria, paciência e atenção dada a mim nos períodos de alegrias e dificuldades durante o curso.

Ao meu filho, Lucas Lessa Sertório Souza, por entender e respeitar, mesmo ainda jovem, a ausência do pai durante a parte final do curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu sabedoria e saúde para desenvolver a dissertação.

À minha Esposa Lívia e ao meu filho Lucas, que estiveram presentes, pacientes nos momentos de ausências e incentivadores nos momentos de cansaço.

Ao programa PROFMAT, à CAPES, à UESC e aos professores que nos acompanharam nesses dois anos de curso, sempre à disposição para nos ajudar.

Ao meu Orientador Nestor, pois esteve ao meu lado sempre, incentivando-me e dizendo que o caminho estava correto, nunca contrariando minhas ideias ou destruindo-as, ao contrário, modificando-as e dando alternativas para melhorá-las. Agradeço também pela paciência que teve com minha falta de prática em escrita científica, acho que outro orientador não teria a paciência que você teve.

Ao meu Co-Orientador Germán que, nos contatos e reuniões que teve comigo, foi capaz de transmitir a ideia primária de uma Oficina de Matemática Experimental. Às vezes crítico e, aparentemente, rígido, mas com um coração gigante de quem pretendia mostrar o caminho certo. Dessa forma, me fazendo um exímio defensor do método de ensino.

À professora Elisa, esposa de Nestor, que desde o início, ainda não me conhecendo pessoalmente, fez intervenções importantes no texto da dissertação.

Ao meu Irmão Giva, consultor particular de redação via telefone. Valeu Mano!

Aos mestres do PROFMAT Enexandro e Mariluce, que, mesmo sem estarem cientes, dispuseram duas belas dissertações para que eu pudesse “fuçar” para a construção da minha dissertação.

A todos os colegas do PROFMAT, especialmente, Aldair, Almir, Beto, Dickson, Gabi, Joelson, Roberto, Robson e Walas, que estiveram comigo, nos momentos de alegria e de correria.

À direção e à coordenação do Colégio e Curso Galileu, que organizaram meus horários de 2015 e 2016 permitindo os meus estudos do PROFMAT e também não mediram esforços para aplicação da oficina em suas dependências.

À professora Cornelia Guimarães que, com orientações e conselhos, tem ajudado na minha formação docente dentro do Colégio Galileu.

A todos os meus alunos, desde 1998, sem vocês eu não teria desenvolvido minha capacidade profissional. Obrigado pelas críticas construtivas e destrutivas.

Aos amigos da Destroyer_Br e os companheiros de COD, em especial Tinoco, que sempre me derem apoio via *whatsApp*, elevando minha moral, me incentivando a continuar, me divertindo e me tranquilizando para as provas e estudos das disciplinas básicas de 2015.

RESUMO

Nesta dissertação mostramos como abordar dois tópicos da Análise Combinatória (AC), especificamente o Princípio Fundamental da Contagem e o Fatorial, através de uma Oficina de Matemática Experimental (OME) chamada O Senhor das Senhas. Esta metodologia de ensino envolve a participação direta dos alunos presentes na oficina podendo contribuir de forma lúdica e agradável no desenvolvimento cognitivo dos mesmos.

A oficina O Senhor das Senhas começa com uma estória fictícia com a qual os alunos são estimulados, de forma lúdica, à utilização do método recursivo para contagem. Após a aplicação da oficina, a análise das anotações dos participantes nos mostrou que alguns dos seus objetivos foram alcançados, entre eles, a utilização do método recursivo e o entendimento de definições matemáticas. Assim, empiricamente, nossa análise nos leva a acreditar que as OME's podem ser aliadas dos docentes que desejam estudar e, consequentemente, experimentar novas abordagens da matemática em sala de aula.

Palavras Chave: Matemática Discreta, Análise Combinatória, Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Oficina de Matemática Experimental

ABSTRACT

In this dissertation we show how to approach two topics of Combinatorial Analysis (AC), specifically the Fundamental Principle of Counting and Factorial, through an Experimental Mathematics Workshop (EMW) called The Lord of Passwords. This teaching methodology involves the direct participation of the students present in the workshop and can contribute in a fun and enjoyable way in their cognitive development.

The workshop The Lord of Passwords begins with a fictional story with which students are stimulated, in a playful way, to use the recursive method for counting. After the application of the workshop, the analysis of participants' notes showed that some of their objectives were achieved, among them, the use of the recursive method and the understanding of mathematical definitions. Thus, empirically, our analysis leads us to believe that EMW's can be allied with teachers who wish to study and, consequently, try new approaches to mathematics in the classroom.

Keywords: Discrete Mathematics, Combinatorial Analysis, Fundamental Principle of Counting, Factorial, Office of Experimental Mathematics

SUMÁRIO

INDÍCE DE FIGURAS **10**

INTRODUÇÃO **11**

Motivação para o Estudo 11

Estrutura e Organização do Trabalho 12

1. CAPÍTULO 1 - OFICINA DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL **13**

2. CAPÍTULO 2 - A MATEMÁTICA POR TRÁS DA OFICINA **17**

2.1 Definições Preliminares 17

2.2 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) 18

2.2.1 Exemplos de Aplicação do PFC 19

2.2.2 Demonstração do PFC 20

2.3 Permutação Simples 22

2.3.1 Teorema 2 – Total de permutações de n objetos 22

2.3.2 Demonstração do Teorema 2 23

2.4 Fatorial de um Número Natural 23

3. CAPÍTULO 3 - DA DEFINIÇÃO DO TEMA À APLICAÇÃO DA OFICINA **24**

3.1 Um Relato da Experiência 31

3.2 “Finalizando” a Aplicação da Oficina 36

4. CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS **38**

4.1 Conclusões 38

4.2 Princípio Multiplicativo Generalizado 39

4.3 Sugestão de tema para uma OME 41

4.4 Considerações Finais 42

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **44**

6. ANEXOS **46**

INDÍCE DE FIGURAS

Figura 1 - Parte da proposta inicial da oficina apresentada.....................................25

Figura 2 - Sugestão do orientador para a melhoria da oficina.................................26

Figura 3 - Parte da 2ª página da proposta da oficina O Senhor das Senhas 27

Figura 4 - Parte do anexo 1 da proposta da oficina O Senhor das Senhas..............28

Figura 5 - Parte das tabelas disponíveis para listagem na oficina............................30

Figura 6 - Parte da Página 2 da oficina aplicada no dia 5 de outubro de 2016 32

Figura 7 - Os alunos notam o padrão de contagem e daí são capazes de projetar quantidades das senhas de fases posteriores 33

Figura 8 - Listagens totais ou parciais das 120 senhas da 5ª fase do jogo, todavia acompanhadas dos padrões de contagens observados. 34

Figura 9 - Anotações de um aluno que afirmou que havia estudado previamente o conteúdo da oficina. 35

Figura 10 - A aluna reconhece o padrão de contagem e estabelece o fatorial.........36

Figura 11 - Parte da 2ª página da proposta da oficina Combinação Simples associada ao Código Binário..42

INTRODUÇÃO

Motivação para o Estudo

Em minha prática docente, tenho notado que, para alguns conteúdos do nível médio, o ensino da Matemática de forma tradicional não tem se mostrado eficaz para prender a atenção do aluno durante a aula. Nesse sentido, vejo a necessidade de diversificar a explanação dos conteúdos com aulas atrativas para os alunos, mostrando-lhes as ferramentas estruturais e formais da matemática, mas também as aplicações cotidianas dos conteúdos abordados. Por isso, junto com meus orientadores, Nestor e Germán, acreditamos que atividades elaboradas com histórias e problemas que prendam a atenção dos alunos, podem levá-los a investigar, perguntar, testar hipóteses, modificá-las, obter conclusões e, dessa forma colaborar com a construção das estruturas cognitivas, ajudando o aluno na aprendizagem da matemática.

Na proposta de criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em sua segunda versão, podemos notar a preocupação com a prática de um ensino apenas técnico da matemática, orientando para um ensino de compreensão e participação direta do aluno, fazendo-o refletir sobre os problemas a ele apresentados, formulando resoluções e, até mesmo, novas perguntas acerca do tema estudado. Essa preocupação na BNCC pode ser vista conforme descrita abaixo:

> Na matemática escolar, o processo de contextualizar, abstrair e voltar a contextualizar envolve outras capacidades essenciais, como questionar, imaginar, visualizar, decidir, representar e criar. Nessa perspectiva, alguns objetivos de aprendizagem formulados começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa formulação, está implícito que o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas, ao mesmo tempo em que, a partir de problemas conhecidos, deve-se refletir e questionar o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida.
> (BRASIL, 2016, p. 132)

Concordando que a abordagem diferenciada do conteúdo em sala de aula, quando possível, pode agregar valores ao ensino da Matemática, a presente dissertação, no que tange à abordagem de tópicos de Análise Combinatória (AC), visa mostrar aos professores de ensino médio como o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e o Fatorial podem ser abordados usando uma metodologia inovadora: Oficina de Matemática Experimental (OME).

Em nossas análises de artigos e dissertações sobre AC pudemos perceber que vários autores discordam da forma como o conteúdo é trabalhado no ensino médio, na maioria das vezes, apresentando fórmulas prontas e resoluções mecânicas de atividades relacionadas com o tema.

Nesse sentido, visamos colaborar com essa quebra de rotina de fórmulas prontas, apresentando uma alternativa pedagógica com a qual o aluno possa construir o conhecimento a partir de problemas, desenvolvendo individualmente ou em grupo as ferramentas cognitivas capazes de entender e até mesmo construir as estruturas matemáticas da AC.

Estrutura e Organização do Trabalho

No Capítulo 1 mostramos dados sobre dois índices que medem o desempenho da educação brasileira, IDEB e PISA. Em vista dos resultados desses índices estarem abaixo das médias esperadas nas últimas avaliações, discorremos sobre alternativas que possam melhorar a aprendizagem da matemática e, por conseguinte, elevar os índices citados. Para isso, apresentamos a OME como uma alternativa pedagógica para que o aluno seja impelido a fazer matemática de forma lúdica e agradável.

No Capítulo 2 mostramos a matemática envolvida na oficina *O senhor das Senhas*. Para isso, apresentamos teoremas e exemplos de aplicações desses teoremas.

No Capítulo 3 descrevemos a OME proposta neste trabalho, começando pela motivação do tema, passando pelo processo de criação da oficina e terminando com a aplicação. Em seguida, apresentamos o relato da experiência com dados obtidos na oficina.

No Capítulo 4, fazemos considerações finais acerca do nosso trabalho e colocamos orientações para futuras aplicações da oficina e também sugerimos um tema para outra oficina.

Finalmente, após as referências bibliográficas, apresentamos em três anexos a versão inicial e o projeto completo da oficina O Senhor das Senhas, para que as pessoas interessadas tenham acesso à OME.

1. CAPÍTULO 1 - OFICINA DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

O Ministério da Educação e Cultura (MEC), através do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), utiliza avaliações no intuito de medir o desenvolvimento da educação brasileira e, a partir dos resultados, investir nas áreas críticas a fim de sanar os problemas detectados. Dois índices utilizados como parâmetros de ações pelo MEC são as notas do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) e do Programa Internacional de Avaliação Estudantil (PISA).

O IDEB combina desempenho das notas dos alunos brasileiros, obtidas ao final de cada etapa dos ensinos fundamentais I e II – respectivamente, nos 5º e 9º anos do ensino fundamental – e no final do ensino médio (3º ano). Para isso, o IDEB utiliza resultados da prova Brasil ou do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que são avaliações diagnósticas do sistema de educação brasileiro aplicadas pelo MEC.

De acordo com dados do IDEB, os resultados na avaliação geral de 2015 mostram que houve leve evolução nas médias das séries iniciais, saindo de 4,2 - a meta era 3,9 - no levantamento de 2007, para 5,5 – a meta era 5,2 - no levantamento de 2015. Todavia, apesar dessa evolução das séries iniciais, o ensino médio apresentou notas abaixo do esperado nos três últimos levantamentos. O IDEB tem 10 como nota máxima possível e a média geral obtida para o ensino médio brasileiro foi de 3,7 nos levantamentos de 2011, 2013 e 2015. Entretanto, as metas para tais anos eram, respectivamente, 3,7, 4,9 e 5,3. Dessa forma, a meta foi cumprida somente em 2011, mesmo assim, foi alcançado apenas o valor exato dela.

Já o PISA é um dos indicadores criados pelo Programa de Indicadores dos Sistemas Educacionais Nacionais (INES), responsável por desenvolver indicadores capazes de analisar, comparar e apontar vias para melhoria dos índices educacionais, bem como das políticas públicas de um modo geral. O INES é coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que é uma organização internacional, com sede em Paris, composta por 34 países - entre eles França, Estados Unidos e Alemanha - que busca desenvolvimento econômico, financeiro e tecnológico e, por consequência, aumento da qualidade de vida dos cidadãos dos países membros, não estando o Brasil entre eles. A OCDE classifica os resultados do PISA em 6 níveis, sendo que no nível 6 figuram alunos com médias iguais ou superiores a 669,3.

As notas do PISA também corroboram a necessidade de melhoria do ensino brasileiro. Mesmo com evolução da média geral brasileira de 368 (nível 1) - no PISA de 2010 - para 402 (nível 1) - no PISA de 2012 - as médias nacionais têm figurado entre as mais baixas do exame. Atualmente participam do PISA 65 países, sendo que 34 deles são os membros da OCDE e o Brasil é um dos 31 países convidados. No PISA de 2012 a média brasileira do ensino médio para matemática foi de 391, fazendo o Brasil ocupar a 58ª posição entre os 65 países participantes. No Brasil, no último levantamento, em 2012, mais de 60% dos alunos brasileiros não atingiram o nível 2 (médias entre 420,1 e 482,4), sendo 1000 a maior nota que pode ser alcançada.

Em vista dos resultados obtidos no IDEB e no PISA para a educação do Brasil, algumas alternativas podem ser propostas para auxiliar na melhoria do nível de aprendizagem dos discentes brasileiros e, por conseguinte, das notas desses indicadores. Uma proposta para essa melhoria é a formação continuada. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996 prevê, em seu artigo 63, parágrafo III, o aperfeiçoamento dos profissionais da educação. Para isso, é necessário que haja compromisso político com a formação continuada dos professores, incentivando-os à formação e valorizando o profissional que a busca. Entretanto, isso não impede que os docentes busquem sua própria qualificação.

Métodos inovadores de ensino podem despertar o interesse e atenção dos alunos em relação aos conteúdos que estão sendo abordados em sala. Dessa forma, acreditamos que eles também possam contribuir na melhoria da aprendizagem. Para isso, quando viável, o professor pode trabalhar o conteúdo matemático com atividades de interesse dos estudantes. Assim, imaginamos que o docente possa ser capaz de, além de trabalhar em sala de aula com métodos tradicionais de ensino, utilizar metodologias nas quais o professor seja o mediador dos conteúdos e o discente motivado à construção do conhecimento. No livro Para aprender Matemática, Lorenzato (2006, p. 24) chama a atenção para a necessidade do aluno vivenciar o processo de ensino e aprendizagem em todos os seus níveis, sendo partícipe principal na construção do conhecimento, quando afirma:

> O "Aproveitar a vivência do aluno" não deve ser restrito ao início do aprendizado escolar, pois ele é válido por todo o processo de ensino. (LORENZATO, 2006, p.4)

Houve momentos em minha prática profissional que, ao apresentar o conteúdo em sala de aula, alguns adolescentes mostraram evidente falta de interesse acerca dos conteúdos. Geralmente duas perguntas foram feitas por eles: "quem inventou isso não tinha o que fazer?" e/ou "onde vou usar isso na minha vida?". Buscando justificar a importância do conteúdo ao aluno, utilizei exemplos já conhecidos da minha prática pedagógica. Todavia, nem sempre os exemplos dados convenciam o aluno dessa importância. Sendo assim, acredito que uma OME, além de poder promover interesse, pode levar o estudante a ter as respostas de perguntas como as mencionadas, mesmo antes de pensar em fazê-las.

Na Matemática Discreta, em especial na AC, existem abordagens práticas, com as quais, através de listagens e raciocínios recursivos, os alunos são levados à *"invenção"* de padrões próprios para a solução de problemas. Quando o educando vivencia o ensino com sentido para si é mais fácil conseguir dele a atenção requerida para a aprendizagem.

Ambientes inovadores, dentro do ensino de matemática, podem contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, focando no problema de atenção do aluno para compreender e "fazer" matemática, bem como sua disposição para entendê-la, apresentamos como alternativa nesta dissertação uma Oficina de Matemática Experimental. Uma OME pode ser definida como:

> Uma oficina de matemática experimental propicia um ambiente inovador de ensino e aprendizagem de matemática cujos mecanismos se sustentam em dois princípios fundamentais; o de que a maneira mais eficiente de aprender envolve a participação ativa do aluno (aprender fazendo), e o de que o papel do professor é o de orientar o aluno no processo de aprendizagem (professor mediador). Nestas oficinas os alunos são confrontados com situações ou problemas matemáticos fáceis de compreender e de interesse suficiente para capturar sua atenção, mas muitas vezes difíceis de resolver. O aluno, sem ser ciente desta dificuldade, se sente impelido a procurar por uma solução; e é nessa busca que acontecem os processos de aprendizagem e de desenvolvimento das habilidades cognitivas.
> (GOMERO; SILVA, 2017, p. 2)

Consideramos que uma OME pode propiciar um ambiente adequado para desenvolver o gosto pela matemática, assim como estabelecer uma via para compreender definições, convenções matemáticas e fundamentações de demonstrações matemáticas complexas. Dessa forma, as OME's podem colaborar no intuito de alavancar a aprendizagem de matemática dos alunos brasileiros. Baseandose nessas considerações, esta dissertação tem como proposta uma OME acerca de tópicos do conteúdo Análise Combinatória, incentivando o aluno a extrair conceitos e regras matemáticas a partir de situações concretas. Abramovich e Pieper defendem esse método de extração conceitual na Análise Combinatória ao afirmarem:

> Combinatória é um contexto apropriado para acomodar essa filosofia instrucional. Por exemplo, que tipo de raciocínio combinatório está por trás se a pessoa está classificando ou selecionando livros de uma prateleira? Como é que se distingue entre combinatória de uma estante de livros e uma combinação de fechadura ou de um telefone de tom? Enquanto essas são situações no mundo real com as quais os alunos estão familiarizados, eles precisam de ajuda para reproduzir sentido da matemática que está por trás da realidade, de modo que possam extrair dela o conceito apropriado.
> (ABRAMOVICH; PIEPER,1995, p.4, tradução nossa).

Na OME proposta, tentamos captar a atenção do aluno através de uma história, relacionada com seu cotidiano, que o desafia ao ponto de torná-lo sujeito ativo na construção do conhecimento matemático, e evitando o caminho tradicional de pura aplicação de fórmulas. Nesse sentido, concordamos, concordamos quando Katiane Pereira (2016, p. 16) afirma:

> Acreditamos que para despertar nos estudantes o gosto pela matemática é preciso apresentar aos mesmos a “verdadeira matemática", mostrando o quão interessante ela é, de modo a torná-la atraente. Para tanto, é necessário que o professor trabalhe a disciplina de maneira diferente daquela praticada nas aulas tradicionais, pois a “verdadeira matemática" pouco tem a ver com decorar fórmulas, executar operações aritméticas ou realizar outras tarefas rotineiras.
> (PEREIRA, 2017, p. 16)

A proposta da nossa oficina, O Senhor das Senhas, baseia-se num ambiente de jogo virtual no qual o aluno é desafiado à decodificação de uma senha. Com isso, buscamos desenvolver, através da oficina, três tópicos elementares da AC: a utilização do método recursivo para solucionar problemas, introdução ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e o entendimento da definição do fatorial de um número natural.

2. CAPÍTULO 2 - A MATEMÁTICA POR TRÁS DA OFICINA

Neste capítulo abordamos os conteúdos que foram trabalhados na nossa OME: o PFC, a Permutação Simples e o Fatorial. O capítulo traz informações técnicas e demonstrações matemáticas, mas não orientamos que, em nível de ensino médio, tais demonstrações sejam apresentadas aos alunos com rigor matemático.

Enunciamos teoremas, mostramos exemplos de aplicações desses teoremas e, na sequência, os demonstramos. O capítulo é proposto para os profissionais que desejam ter, juntamente com a oficina que apresentamos como anexo, a formalização matemática de todo o conteúdo abordado na OME.

Mais uma vez, orientamos que o trabalho com os alunos não seja feito a partir dos teoremas, mas sim, dos exemplos e suas consequências. Pois acreditamos na necessidade do aluno ser motivado a fazer listagens das possibilidades de cada um dos problemas, para que notem padrões de contagens, bem como, a dificuldade de fazê-las em alguns casos. Dessa forma, através do raciocínio recursivo, entendemos que o aluno possa ser capaz de compreender e até mesmo construir os conteúdos abordados.

Inicialmente apresentamos algumas definições necessárias.

2.1 Definições Preliminares

Convenção:

Em nosso trabalho adotamos o Conjunto dos Números Naturais como sendo o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, . . . \}$. Todavia, é comum que o 0 não seja adotado como elemento de $\mathbb{N}$. A opção por uma ou outra convenção é uma questão de gosto ou de conveniência.

Conjunto I_n

Chamamos I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n, ou seja, $I_n = \{1, 2, 3, . . ., n\}$.

Definição 1 – Conjunto Finito

Dizemos que X é um *Conjunto Finito* se for vazio ou se existir um $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e uma bijeção $f: X \to I_n$. Se $X \neq \emptyset$, dizemos que n é o *número cardinal* ou *número de elementos* de X. Se $X = \emptyset$, dizemos que 0 é o *número cardinal* de X.

***Observação 1*:** Em nosso trabalho, utilizaremos a notação #(X) para representar o número cardinal de X.

***Observação 2*:** Dizemos que dois conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma bijeção entre X e Y.

Definição 2 – Produto Cartesiano

Se A e B são dois conjuntos não vazios, então *o produto cartesiano* entre tais conjuntos é o conjunto $A \times B = \{(x;\ y),\ x \in A\ \text{ e }\ y \in B\}$.

2.2 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Textos escolares que abordam AC costumam enunciar o PFC nos seguintes termos informais: Considere um evento que consiste em escolher, sucessivamente, um elemento de A e um elemento de B. Se há *n* modos de escolher um elemento de A e *m* modos de escolher um elemento de B, então há *nm* modos de fazer a escolha sucessiva desses elementos.

Note que, escolher um elemento de A×B consiste em escolher um par de elementos, sendo o primeiro desses elementos selecionado no conjunto A e, o segundo, selecionado no conjunto B. Assim, é fácil notar que, se A e B são conjuntos finitos, contar o total de pares ordenados de A×B equivale a contar as possibilidades de escolher um elemento de A e um elemento de B. Logo um enunciado formal do PFC é o seguinte.

Teorema 1 – Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Se A e B são dois conjuntos finitos e não vazios, então $\#(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \#(\mathbf{A}) \cdot \#(\mathbf{B})$

2.2.1 Exemplos de Aplicação do PFC

<u>Exemplo 1</u>: Considere que Andréa possua 5 blusas de características distintas e 2 calças, também de características distintas. De quantos modos Andréa pode selecionar uma blusa e uma calça, nessa ordem, para se vestir?

Solução: Vamos considerar B = {b_1, b_2, b_3, b_4, b_5} o conjunto das blusas e C = {c_1, c_2} o conjunto das calças. Dessa forma, tabelando as possibilidades, temos:

Opções de calças Opções de blusas	**c_1**	**c_2**
b_1	(b_1; c_1)	(b_1; c_2)
b_2	(b_2; c_1)	(b_2; c_2)
b_3	(b_3; c_1)	(b_3; c_2)
b_4	(b_4; c_1)	(b_4; c_2)
b_5	(b_5; c_1)	(b_5; c_2)

Note, a partir da listagem das possibilidades, que há 10 escolhas de pares em possíveis para Andréa, em concordância com o PFC.

<u>Exemplo 2</u>: Para acesso à fase 2 de um jogo de computador, um jovem necessita digitar um algarismo seguido de um símbolo presente no jogo. Sabe-se que os algarismos são escolhidos a partir do conjunto A = {1, 2, 3, 4} e os símbolos, a partir do conjunto B = {☯, ☪, ✠}. Suponha que o jovem não saiba a senha e deseja testar, uma a uma, as possibilidades. Quantos testes, no máximo, o jovem deverá fazer?

Solução: Seguindo o raciocínio do exemplo anterior, vamos tabelar as possibilidades de testes que o jovem deverá fazer:

Opções símbolos Opções de algarismos	☯	☪	✠
1	(1; ☯)	(1; ☪)	(1; ✠)
2	(2; ☯)	(2; ☪)	(2; ✠)
3	(3; ☯)	(3; ☪)	(3; ✠)
4	(4; ☯)	(4; ☪)	(4; ✠)

Mais uma vez, analisando a tabela, observamos que há 12 pares para serem testados pelo jogador, em concordância com o PFC.

Exemplo 3: Considere o lançamento de um dado comum duas vezes sobre a mesa. De quantos modos distintos podemos obter as faces voltadas para cima?

Solução: Considerando A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {1', 2', 3', 4', 5', 6'} os conjuntos das possibilidades de números na face voltada para cima em cada um dos respectivos lançamentos, temos:

Opções no lançamento 2 / Opções no lançamento 1	**1'**	**2'**	**3'**	**4'**	**5'**	**6'**
1	(1; 1')	(1; 2')	(1; 3')	(1; 4')	(1; 5')	(1; 6')
2	(2; 1')	(2; 2')	(2; 3')	(2; 4')	(2; 5')	(2; 6')
3	(3; 1')	(3; 2')	(3; 3')	(3; 4')	(3; 5')	(3; 6')
4	(4; 1')	(4; 2')	(4; 3')	(4; 4')	(4; 5')	(4; 6')
5	(5; 1')	(5; 2')	(5; 3')	(5; 4')	(5; 5')	(5; 6')
6	(6; 1')	(6; 2')	(6; 3')	(6; 4')	(6; 5')	(6; 6')

Note, na tabela, que há 36 pares possíveis para obter a partir de dois lançamentos do mesmo dado, em concordância com o PFC.

2.2.2 Demonstração do PFC

No que segue utilizamos $\#(A) = n$ e $\#(B) = m$, onde $n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Vamos mostrar que existe uma bijeção $H: A\times B \to I_{nm}$ mostrando que existem bijeções $F: A\times B \to I_n\times I_m$ e $G: I_n\times I_m \to I_{nm}$ e tomando $H = G\circ F$. Sabemos que existem bijeções $f: A \to I_n$ e $g: B \to I_m$.

(I) $\#(A\times B) = \#(I_n\times I_m)$: Afirmamos que a função $F: A\times B \to I_n\times I_m$ que para cada $(a, b) \in A\times B$ associa o par $F(a, b) = (f(a), g(b)) \in I_n\times I_m$ é uma bijeção. De fato, F está bem definida pois $f(a) \in I_n$ e $g(b) \in I_m$, $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$. Agora,

(a) *F é injetiva*: Dados os pares $(a, b), (c, d) \in A\times B$ temos

$$\begin{aligned} F(a, b) = F(c, d) &\Leftrightarrow (f(a), g(b)) = (f(c), g(d)) \\ &\Leftrightarrow f(a) = f(c) \ \text{ e } \ g(b) = g(d) \\ &\Leftrightarrow a = c \ \text{ e } \ b = d \\ &\Leftrightarrow (a, b) = (c, d), \end{aligned}$$

Onde, na segunda e na quarta linhas, usamos o fato de dois pares ordenados serem iguais se, e somente se, suas entradas correspondentes são iguais, e na terceira linha usamos a propriedade de f e g serem injetivas.

(b) *F é sobrejetiva*: Lembrando que f e g são sobrejetivas, dado $(i, j) \in I_n \times I_m$ consideramos o par $(a, b) = (f^{-1}(i), g^{-1}(j)) \in A \times B$. Note que

$$F(a, b) = F(f^{-1}(i), g^{-1}(j)) = (f(f^{-1}(i)), \ g(g^{-1}(i))) = (i, j)$$

(II) $\#(I_n \times I_m) = \#(I_{nm})$: Afirmamos que a função $G: I_n \times I_m \to I_{nm}$ que a cada $(i, j) \in I_n \times I_m$ associa o número natural $G(i, j) = (i - 1)m + j \in I_{nm}$ é uma bijeção. De fato, note que G está bem definida, pois dado $(i, j) \in I_n \times I_m$, temos que $1 \leq i \leq n$, assim $0 \leq i - 1 \leq n - 1$ e, portanto, $0 \leq (i - 1)m \leq (n - 1)m$. Como $1 \leq j \leq m$, somando membro a membro estas duas desigualdades obtemos

$$1 \leq G(i, j) = (i - 1)m + j \leq (n - 1)m + m = nm,$$

isto é, $G(i, j) \in I_{nm}$. Agora,

(a) *G é injetiva*: Dados os pares $(i, j), (i', j') \in I_n \times I_m$ tais que $G(i, j) = G(i', j')$, usando a definição de G, temos $(i - 1)m + j = (i' - 1)m + j'$, ou equivalentemente, $(i - i')m = j' - j$. Observe que $j' - j$ é um múltiplo de m e como $j, j' \in I_m$, temos $|j' - j| \leq m - 1$, assim, o único valor possível, múltiplo de m, para $j' - j$ é 0. Daí, $j' - j = 0$ e $i - i' = 0$. Consequentemente, $j = j'$ e $i = i'$, isto é, $(i, j) = (i', j')$.

(b) *G é sobrejetiva*: Seja $x \in I_{nm}$. Como $m \neq 0$, pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $x = qm + r$, com $0 \leq r < m - 1$. Analisaremos em separado os casos $r = 0$ e $r > 0$. Se $r = 0$ temos $x = qm$. Como $x \in I_{nm}$ então qm é um múltiplo de m que está entre 1 e nm, dessa forma, $1 \leq q \leq n$. Assim, $(q, m) \in I_n \times I_m$ e $G(q, m) = (q - 1)m + m = qm = x$. Se $r > 0$, temos $x = qm + r$, com $1 \leq r \leq m - 1$. Como $x \in I_{mn}$ e $r > 0$, devemos ter $0 \leq q < n$. Assim, $(q + 1, r) \in I_n \times I_m$ e $G(q + 1, r) = (q + 1 - 1)m + r = qm + r = x$.

□

Outro modo de observar o PFC

Uma forma intuitiva e não formal de demonstrar o PFC, ou número de elementos do produto cartesiano entre dois conjuntos, é utilizando uma abordagem mais visual, através de tabela.

Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_r\}$, dessa forma, $\#(A) = k$ e $\#(B) = r$. Façamos então, a tabela de elementos de A×B.

Elementos de B / *Elementos de A*	***b₁***	***b₂***	***b₃***	**...**	***b_{r-1}***	***b_r***
$\boldsymbol{a_1}$	$(a_1; b_1)$	$(a_1; b_2)$	$(a_1; b_3)$	**...**	$(a_1; b_{r-1})$	$(a_1; b_r)$
$\boldsymbol{a_2}$	$(a_2; b_1)$	$(a_2; b_2)$	$(a_2; b_3)$	**...**	$(a_2; b_{r-1})$	$(a_2; b_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{a_{k-1}}$	$(a_{k-1}; b_1)$	$(a_{k-1}; b_2)$	$(a_{k-1}; b_3)$	**...**	$(a_{k-1}; b_{r-1})$	$(a_{k-1}; b_r)$
$\boldsymbol{a_k}$	$(a_k; b_1)$	$(a_k; b_2)$	$(a_k; b_3)$	**...**	$(a_k; b_{r-1})$	$(a_k; b_r)$

Note que, em cada linha da tabela, todo elemento $a_i \in A$, $1 \leq i \leq k$, possui *r* correspondentes no conjunto B. Assim, o total de elementos de A×B é dado por:

$$\#(A \times B) = \underbrace{r + r + r + ... + r}_{k \text{ linhas da tabela}} = k.r.$$ Como $k = \#(A)$ e $r = \#(B)$, temos:

$$\#(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \#(\mathbf{A}) \cdot \#(\mathbf{B}) \qquad \square$$

Este é um argumento convincente que pode ser mostrado aos alunos.

2.3 Permutação Simples

Definição

Seja A um conjunto com n elementos. Uma permutação simples dos elementos de A é qualquer n-upla formada com todos os n elementos de A. O total de permutações possíveis com tais elementos é denotado por P_n.

2.3.1 Teorema 2 – Total de permutações de n objetos

Se um conjunto possui n elementos, $n \geq 1$, então $P_1 = 1$ e $P_n = n \cdot P_{n-1}$

2.3.2 Demonstração do Teorema 2

Sejam M o conjunto das permutações de n – 1 elementos de um conjunto dado e B o conjunto dos espaços onde pode ser inserido um novo elemento em uma das permutações do conjunto M. Note que #(M) = P_{n-1} e #(B) = n. Dessa forma, usando o PFC, temos que $P_n = n \cdot P_{n-1}$. □

2.4 Fatorial de um Número Natural

Do teorema 2, temos:

$P_1 = 1$

$P_2 = 2 \times P_1 = 2 \times 1$

$P_3 = 3 \times P_2 = 3 \times 2 \times 1$

$P_4 = 4 \times P_3 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\vdots$

$P_{10} = 10 \times P_9 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\vdots$

$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1.$

Chamamos de fatorial de n ao produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ e o denotamos por n!. Segue que $P_n = n!$, $n \geq 1$.

Como $0 \in \mathbb{N}$, é interessante que 0! também seja definido. Nesse sentido, adotamos $P_0 = 0! = 1$. Observe que tal definição também faz sentido na equação de recorrência da definição, pois $P_n = n \cdot P_{n-1}$. Tomando n = 1, como $P_1 = 1 \cdot P_{(1-1)}$, temos $1 = P_0$, e dessa forma, a relação $P_n = n!$ para todo $n \in N$.

3. CAPÍTULO 3 - DA DEFINIÇÃO DO TEMA À APLICAÇÃO DA OFICINA

O estudo de Análise Combinatória sempre me fascinou e intrigou. Ora pela simplicidade de alguns cálculos na resolução de problemas, ora pela complexidade na interpretação dos mesmos. Por esses motivos, desde o início do curso no PROFMAT, queria que o tema para minha dissertação fosse acerca de Análise Combinatória.

Durante o 1º ano de mestrado esse desejo sobre o tema foi reforçado quando cursei a disciplina Matemática Discreta. Utilizando o livro texto da disciplina, notei que o programa do mestrado aborda o conteúdo Análise Combinatória tal como aprendi – e continuo a aprender – em minha prática docente: foco no princípio multiplicativo, poucas “fórmulas prontas” e apenas as definições necessárias. Por conseguinte, induzindo o aluno ao raciocínio combinatório e desenvolvimento de padrões próprios para resolução dos problemas.

Na sala de aula, ao longo de 18 anos de magistério, tenho percebido que, em termos de Análise Combinatória, quanto menos fórmulas e mais interpretações e raciocínios, melhor o aproveitamento e entendimento do discente. Estava então definido: o trabalho seria sobre o “descarte” da maior parte das fórmulas prontas de Combinatória e do ensino mecânico acerca do conteúdo. Só faltava definir como fazê-lo e quem seria o orientador.

Em janeiro de 2016, durante o curso de resolução de problemas e preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ), tive o prazer de ter o Professor Nestor ministrando o curso de Matemática Discreta. Com didática que segue a linha abordada por mim em sala de aula e discursos que valorizam os raciocínios do aluno, tive a certeza que ele poderia me orientar. Após a formalização da orientação, o professor Nestor me convidou a conhecer o Projeto de Oficinas de Matemática Experimental (POME), desenvolvido pela UESC em parceria com o Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão de Ilhéus (CPMRG). O POME está sob coordenação do professor Germán Ignacio Gomero Ferrer e conta com a participação de outros professores da UESC entre os quais está o professor Nestor. No POME os alunos do 6º ano do ensino fundamental do CPMRG participam de diversas oficinas sobre tópicos diversos da matemática, não necessariamente de conteúdos curriculares. Por exemplo, antes da implementação do POME, a aplicação da oficina *Do Triângulo à Pirâmide de Pascal*, com alunos do 4º ano do ensino médio do Instituto Federal de Educação Tecnológica da Bahia (IFBA), no Campus de Ilhéus-BA, a qual serviu como base para a construção da dissertação para a conclusão do PROFMAT, da professora Mariluce de Oliveira Silva, sendo esta oficina a primeira que trabalhou os conteúdos curriculares com alunos em sala de aula. Dessa forma, a oficina *O Senhor das Senhas*, é a segunda com as mesmas características citadas.

Uma OME permite abordagens de conteúdos matemáticos – tratados no ensino básico ou não – de forma atrativa e agradável para o educando. Fiquei encantado com a proposta de trabalho, visto que o aluno é partícipe ativo na construção do conhecimento, e pode ser levado ao conhecimento de conteúdos e/ou à capacidade de desenvolvimento de problemas complexos "brincando" de fazer matemática. Todavia, era necessário o conhecimento prático de uma oficina, o que ocorreu em agosto de 2016, quando assisti a aplicação de uma OME em salas do 6º ano do CPMRG, dentro das atividades do POME, e saí de lá decidido a fazer uma oficina, que seria aplicada em dois momentos, conforme pode ser observada na figura abaixo:

3. Ações a serem desenvolvidas

3.1. Do princípio multiplicativo ao Fatorial (Encontro 1 – Parte1)

3.1.1. Introdução ao método recursivo para princípio multiplicativo;
3.1.2. Introdução ao conceito de permutação simples;
3.1.3. Definição de Permutação Simples
3.1.4. Definição de Fatorial;

3.2. Permutação com elementos repetidos (Encontro 1 – Parte2)

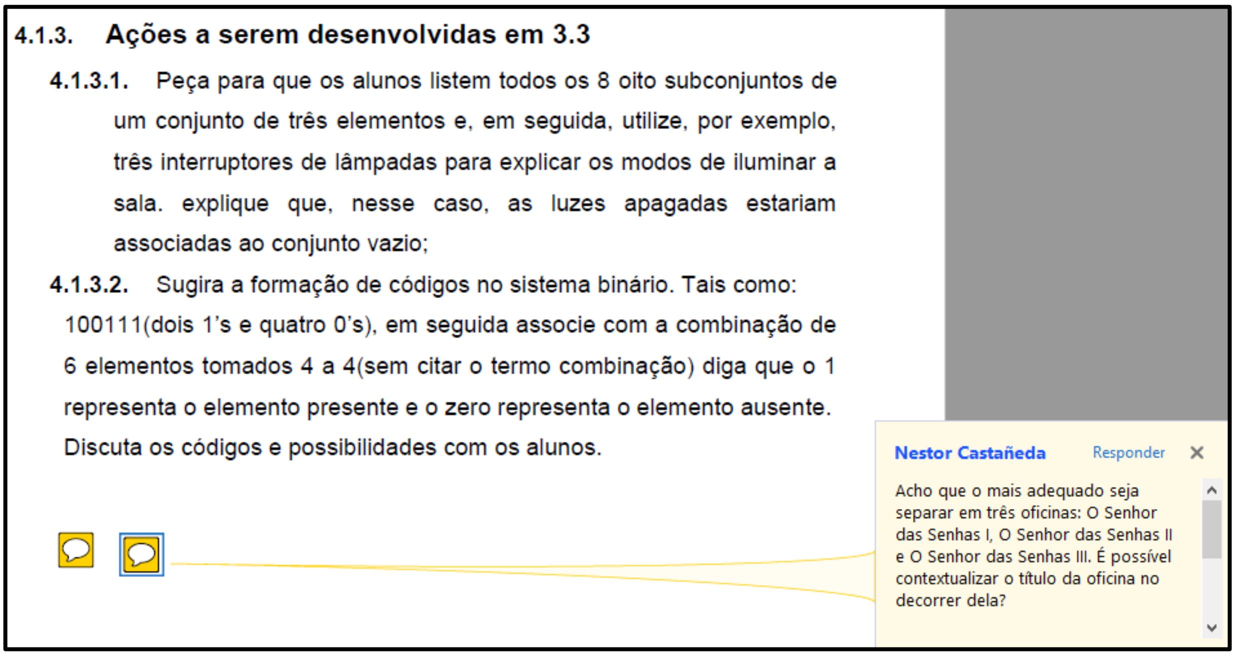
3.2.1. Introdução à ideia de como "retirar os excessos" da permutação simples em relação à permutação com repetição;
3.2.2. Definição de permutação com repetição;

3.3. Combinação Simples ou Permutação com Repetição? (Encontro 2)

3.3.1. Estabelecer a seleção de subconjuntos de um conjunto ao conceito de Combinação simples;
3.3.2. Definir Combinação Simples;
3.3.3. Associar o estudo da combinação ao estudo das permutações com repetições.

Figura 1 - Parte da proposta inicial da oficina apresentada

Entretanto, a proposta inicial ainda estava muito técnica, contendo abordagens diretas e sem nenhuma motivação para que os participantes se dispusessem em desenvolvê-la. Ao enviá-la ao meu orientador, ele sugeriu que separássemos a oficina em três e, o mais importante, que buscasse um contexto para utilização do título O Senhor das Senhas. Conforme exposto na figura abaixo.



4.1.3. Ações a serem desenvolvidas em 3.3

4.1.3.1. Peça para que os alunos listem todos os 8 oito subconjuntos de um conjunto de três elementos e, em seguida, utilize, por exemplo, três interruptores de lâmpadas para explicar os modos de iluminar a sala. explique que, nesse caso, as luzes apagadas estariam associadas ao conjunto vazio;

4.1.3.2. Sugira a formação de códigos no sistema binário. Tais como: 100111(dois 1's e quatro 0's), em seguida associe com a combinação de 6 elementos tomados 4 a 4(sem citar o termo combinação) diga que o 1 representa o elemento presente e o zero representa o elemento ausente. Discuta os códigos e possibilidades com os alunos.

Nestor Castañeda Responder

Acho que o mais adequado seja separar em três oficinas: O Senhor das Senhas I, O Senhor das Senhas II e O Senhor das Senhas III. É possível contextualizar o título da oficina no decorrer dela?

Figura 2 - Sugestão do orientador para a melhoria da oficina

A primeira ideia para a criação e aplicação da oficina mostrou que eu ainda era inexperiente em como desenvolvê-la. Após acatar algumas sugestões, decidi separar as oficinas em três, com os títulos abaixo:

1. Do Princípio Multiplicativo ao Fatorial – O Senhor das Senhas;
2. Permutação com Elementos Repetidos;
3. Combinação Simples associada ao Código Binário.

A primeira oficina, Do Princípio Multiplicativo ao Fatorial, abordaria o raciocínio recursivo, inicialmente através de listagens, para formação de padrões de contagem. Tal oficina seria a "mola mestra" no intuito de desenvolver o raciocínio combinatório dos participantes, bem como fundamentar as definições primárias da Análise Combinatória. Nesse sentido, visamos uma oficina na qual o aluno seria o precursor de seu próprio conhecimento, estabelecendo intuitiva e manualmente o desenvolvimento do Princípio Fundamental da Contagem.

A segunda oficina, Permutação com Elementos Repetidos, visaria a retirada de excessos na contagem, estabelecendo exemplos nos quais o aluno trabalharia com conjuntos de palavras as quais possuíam letras repetidas.

A terceira oficina, Combinação Simples associada ao Código Binário, seria uma aplicação da permutação com elementos repetidos associada ao código binário.

Após definidos os temas das oficinas iniciei a elaboração das mesmas, entretanto, apesar de minha prática docente e do conhecimento de perguntas frequentes feitas pelos alunos sobre Análise Combinatória, as primeiras versões das oficinas foram superficiais e mecânicas. Basicamente as oficinas eram resumidas em alguns nomes próprios e a orientação para que os participantes da oficina listassem todos os anagramas possíveis para tais nomes, conforme Figuras 3 e 4.

4. Atividades a serem desenvolvidas

4.1. Entregue a cada grupo quatro fichas, uma de cada tipo;

4.2. Solicite que cada aluno do grupo se responsabilize pela listagem de todas as senhas possíveis de serem formadas com a permutação das senhas contidas na ficha que será entregue a ele.

4.3. Depois de preenchidas as fichas, peça para que cada grupo desenvolva um método de contagem das senhas, sem que seja necessário listá-las.

5. Orientações

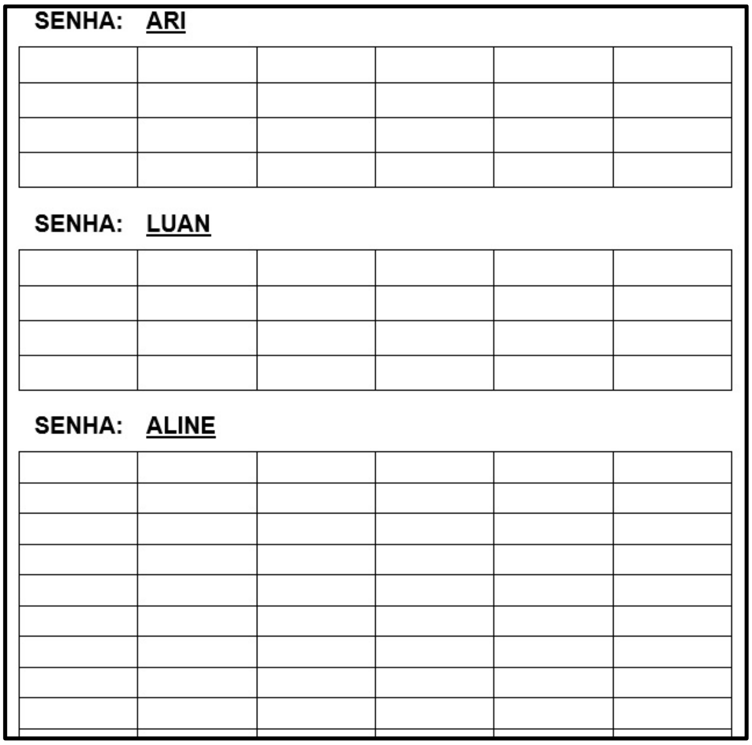
5.1. Cada aluno, dentro do grupo, deve receber as três senhas chaves e, individualmente, ter a responsabilidade de lista-las. No entanto, caso haja dificuldade para tal listagem, não explique como fazê-la, apenas permita que outros colegas do mesmo grupo deem ideias de listagens.

5.2. O aluno deve começar a listagem sempre pela senha com menos letras para, a partir dessa, desenvolver o raciocínio de listagem das demais.

5.3. É notável que, a partir da senha com 5 letras, a dificuldade de listagem seja notada. Nesse momento, sugira que cada grupo estabeleça um método para “contar” as senhas, sem necessidade de listá-las;

5.4. Entre os alunos do grupo deve haver discussões de como obter o total de senhas, sem a necessidade de listá-las.

Figura 3 - Parte da 2ª página da proposta da oficina O Senhor das Senhas


SENHA: ARI

SENHA: LUAN

SENHA: ALINE

Figura 4 - Parte do anexo 1 da proposta da oficina O Senhor das Senhas

Como pode se ver nas figuras, mesmo após as orientações e intervenções do meu orientador, as primeiras versões das oficinas não estavam de acordo com o ambiente que uma OME propõe gerar, pois não havia uma motivação nem uma estória que induzisse o participante da oficina a desenvolvê-la e vivenciá-la. Essa falta de ensino com sentido para o aluno ficou evidente quando fiz a apresentação do piloto da oficina aos professores Nestor, Germán e Carlos Bião (que também faz parte do POME). Na oportunidade fui indagado pelo professor Germán:

- Você parte do pressuposto que o aluno irá gostar de fazer isso?

Então, inocentemente, respondi:

- Não, eles não irão gostar, mas farão, pois eu lhes pedirei que o façam.

Nesse pequeno diálogo ficou claro que eu ainda não havia entendido o propósito da OME: O aluno deve sentir-se tentado à busca de soluções de problemas, às vezes complexos, e, nessa busca, o desenvolvimento cognitivo é feito de forma natural e agradável. Fui orientado a pensar numa estória que fascinasse os adolescentes e os impelissem à busca das soluções, pois conforme Duro e Becker:

> No momento em que o aluno se sente provocado por determinado problema ou situação, pode-se dizer que se ligou o motor da aprendizagem. São essas situações conflituosas que tendem a mobilizar o interesse do educando para aprender. Quando entra em conflito cognitivo, o sujeito se abre para um mundo de novas descobertas. O conflito cognitivo instaura um campo de significado. (DURO; BECKER, 2015, p. 878)

Por isso, era necessário “entrar na mente” de um adolescente no intuito de estabelecer uma oficina que propiciasse prazer para o participante. Nesse sentido, após a apresentação piloto, voltei para casa pensando em elaborar uma estória que prendesse a atenção dos alunos. As diferenças entre a versão inicial da oficina e a versão final aplicada podem ser observadas nos Anexos 1 e 2, onde ambas serão apresentadas.

Também na apresentação piloto definimos que a oficina Do Princípio Multiplicativo ao Fatorial, após reformulada e adaptada, contemplaria os fundamentos do raciocínio combinatório. Haja vista entendermos que se o aluno desenvolve corretamente o PFC e o fatorial, então será capaz de enxergar o estudo das permutações com elementos repetidos, bem como a combinação simples, como consequências e aplicações do PFC. Entretanto, sabemos que as aplicações das combinações simples são bastante usadas em problemas do ensino médio. Por isso, deixamos a oficina Combinação Simples associada ao Código Binário como sugestão para o futuro.

Após as críticas construtivas e decisões tomadas na apresentação piloto, busquei sugestões de pessoas não muito ligadas à matemática: Minha esposa, meu filho e, principalmente, alguns alunos do 2º ano D do ensino médio do Colégio Galileu. De maneira informal e descontraída, conversei com essas pessoas e colhi delas informações relevantes as quais eu pudesse utilizar na construção da estória que constaria na oficina. Segue abaixo a estória:

O Senhor das Senhas: A Estória

*O jogo **Galileu’s**, criado pelo mega-hiper-super programador de jogos, - professor Vinícius - é um jogo de estratégia, em 1ª pessoa, no qual o jogador deve vencer adversários diversos, desde monstros até zumbis.*

Para, posteriormente, ter acesso rápido à fase o jogador recebe um código de acesso (ao final de cada fase) formado por n caracteres distintos, sendo n a fase que o jogador acabou de concluir. Por exemplos:

- ✓ *Na fase 1, o código tem 1 caractere;*
- ✓ *Na fase 2, o código tem 2 caracteres distintos;*
- ✓ *Na fase 3, o código tem 3 caracteres distintos;*
- ✓ *E assim, sucessivamente.*

*Alexandre é viciado no jogo e já passou por algumas fases de **Galileu’s**, porém esqueceu de anotar o código da fase 7, lembrando-se, apenas, que o código é formado por uma das disposições dos símbolos ☯, ♈, ☪, ✠, ❖, ✪, **O**, sem recordar a ordem correta. Alexandre resolveu testar, um a um, cada um dos códigos possíveis, e para isso, gasta em média 20 segundos para cada teste.*

A empreitada de Alexandre seria “tranquila” não fosse a sua namorada. Sim, há uma namorada nessa história, chama-se Jel.

Jel tem programação para um encontro entre os dois, por isso foi curta e direta com Alexandre sobre o tempo que ele gastaria nessa brincadeira, bem como possíveis punições:

- ✓ *Se demorar até 10 horas para encontrá-la, Jel deixará de beijá-lo por dois dias;*
- ✓ *Se demorar entre 10 e 20 horas, Jel irá com as amigas à praia e vestirá “aquele biquíni” que Alexandre não gosta que ela vista quando não está com ele;*
- ✓ *Se demorar mais que 20 horas, Jel não dará a Alexandre o presente que havia prometido.*

Você seria capaz de saber qual punição Alexandre levará?
Vamos investigar quantos códigos Alexandre terá que testar?

Após a construção da estória, definimos as datas das aplicações para os dias 5 e 6 de outubro de 2016.

É possível ver na estória que a ideia era “listar” todas as senhas possíveis permutando 7 símbolos entre si, para depois calcular o tempo gasto para fazê-lo. Sabendo da dificuldade dos alunos conseguirem tal feito, orientamos que fizessem a listagem desde a situação com o conjunto contendo apenas 1 símbolo (exemplo já posto na tabela entregue aos alunos), até o conjunto contendo os 7 símbolos em questão. O objetivo final era a contagem das senhas, não simplesmente a listagem, por isso solicitamos que os alunos investigassem padrões para a contagem. Conforme podemos ver na Figura 3.

Dicas:

Tome as letras A, B, C, D...... para facilitar suas listagens iniciais.

O objetivo não é a simples listagem, assim que perceber um padrão para a *contagem* das senhas *sem que tenha que listá-las*, discuta com os colegas do grupo. Daí você será capaz de projetar quantos códigos Alexandre terá que testar.

FASE 1:	☯				
☯					

Fase 1: **1 código para teste**

FASE 2:	☯ ♈				
☯ ♈	♈ ☯				

Fase 2: **2 códigos para teste**

FASE 3:	☯ ♈ ☪				

Fase 3: ______ **códigos para teste**

Figura 5 - Parte das tabelas disponíveis para listagem na oficina.

Com a estória encaixando na rotina diária dos adolescentes, deu-se então uma disputa entre eles para ver quem acertaria primeiro o tempo gasto pelo personagem da estória. Para isso, sugerimos a utilização de símbolos conhecidos dos participantes, conforme observamos na Figura 5. Na versão inicial da oficina existiam orientações para listagens de senhas nas tabelas, mas sem nenhuma motivação para tais listagens. Note que essa exigência não foi retirada da versão final da oficina, só que agora, depois da leitura da estória construída a partir de ideias de alguns alunos, a disposição para a elaboração de listagens passou a ter sentido para eles.

Em geral, após a aplicação de uma OME, é possível notar a necessidade de algumas modificações ou melhorias. No nosso caso, isso é relatado na seguinte seção.

É pertinente apontar que a euforia decorrente da motivação do aluno em resolver o problema proposto através da história não deve ser coibida, sempre que o foco da atividade não seja perdido. Também, recomenda-se não dar explicações longas, pois a mediação deve ser feita de modo a não retirar dos alunos o papel de construtores do próprio conhecimento. Podemos perceber algumas dessas orientações no trabalho de Luciene Liger (2017, p. 20) e concordamos quando a mesma afirma:

> Como nas oficinas se procura a construção coletiva do conhecimento, as explicações devem ser curtas, para que assim o aluno possa chegar às conclusões por ele mesmo, em discussões com o grupo. Para manter uma “desordem produtiva", deve-se manter todos os alunos ocupados e respeitar o tempo dos grupos nas mesas, por último, deve-se ter uma boa logística. (ARAÚJO, 2017, p. 20)

Na sequência relatamos a aplicação da oficina apontando fatos relevantes observados.

3.1 Um Relato da Experiência

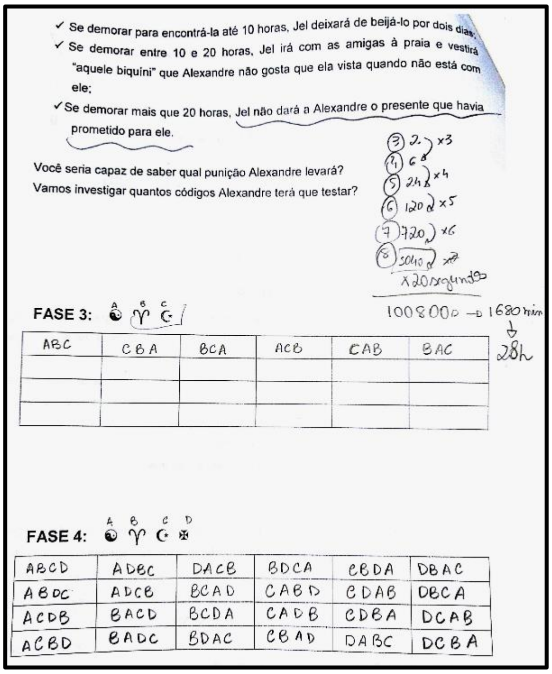
A OME O Senhor das Senhas foi aplicada nos dias 5 e 6 de outubro de 2016, com as turmas do 2º ano do ensino médio do Colégio e Curso Galileu, em Itabuna. Ao todo foram 199 participantes, divididos em 4 turmas: 45 alunos no 2º A, 54 alunos do 2º B, 55 alunos do 2º C e 45 alunos no 2º ano D. Em cada sala, os alunos foram divididos em grupos contendo 4 pessoas (podendo haver grupos com 5 pessoas) e os grupos foram organizados em círculos. A discussão interna no grupo foi permitida desde o início da oficina, dessa forma os alunos poderiam compartilhar raciocínios.

Após 35 minutos de aplicação a discussão foi aberta entre os grupos e foram colhidas, entre todos os alunos, as ideias de contagens obtidas por eles. O tempo total da aplicação da oficina foi em torno de 50 minutos. Em geral o método recursivo foi usado por todos os grupos e, a partir das suas conclusões sobre as permutações possíveis para as senhas, foi apresentada a todos a definição do fatorial.

No dia 5 de outubro a oficina foi aplicada apenas na turma B, com o material contendo algumas diferenças daquele que foi usado no dia 6 de outubro. Após a aplicação da oficina, nos dias 5 e 6 de outubro de 2016, a análise das anotações dos alunos nos permitiu evidenciar vários fatos relevantes, alguns dos quais são listados a seguir.

a) A apresentação da lista com as senhas contendo 1 e 2 caracteres, no material entregue aos alunos, interferiu de forma positiva nas conclusões dos alunos.

No dia 5 de outubro, primeiro dia de aplicação, o material foi entregue aos participantes contendo apenas os espaços para listagens a partir das senhas formadas com três símbolos, não havendo dicas para listagens, conforme se vê na Figura 6.



✓ Se demorar para encontrá-la até 10 horas, Jel deixará de beijá-lo por dois dias;
✓ Se demorar entre 10 e 20 horas, Jel irá com as amigas à praia e vestirá "aquele biquíni" que Alexandre não gosta que ela vista quando não está com ele;
✓ Se demorar mais que 20 horas, Jel não dará a Alexandre o presente que havia prometido para ele.

Você seria capaz de saber qual punição Alexandre levará?
Vamos investigar quantos códigos Alexandre terá que testar?

3 2 ×3
4 6 ×4
5 24 ×5
6 120 ×6
7 720 ×7
8 5040
×20 segundos
1008000 → 1680 min
28h

FASE 3: A B C

ABC	CBA	BCA	ACB	CAB	BAC

FASE 4: A B C D

ABCD	ADBC	DACB	BDCA	CBDA	DBAC
ABDC	ADCB	BCAD	CABD	CDAB	DBCA
ACDB	BACD	BCDA	CADB	CDBA	DCAB
ACBD	BADC	BDAC	CBAD	DABC	DCBA

Figura 6 - Parte da Página 2 da oficina aplicada no dia 5 de outubro de 2016

No dia 6, a página 2 da oficina continha os espaços e as listagens das primeiras senhas, para a fase 1 e a fase 2. Note, na Figura 5, que há dicas antes das tabelas dispostas para a listagem das senhas e também existem as tabelas com as senhas geradas utilizando apenas um símbolo e com as senhas geradas utilizando dois símbolos.

Entre os dias de aplicações, a alteração foi feita no material pois, apesar de termos apresentado para os alunos os exemplos da Fase 1 e da Fase 2 no quadro, notamos que os mesmos não fizeram uma boa associação do método recursivo com as duas primeiras fases, haja vista que fixavam os olhares no material entregue em mãos, fazendo pouco uso do exposto em quadro. Essa diferença entre os materiais usados nos dias 5 e 6 trouxe resultados diferentes, o que ficou evidente com o fato de maioria dos alunos do 2º ano B do Colégio Galileu – turma piloto da aplicação – ter listado em maior quantidade as senhas da Fase 5. Todavia, apesar de gastar mais tempo nas listagens, muitos foram capazes de fazer a associação recursiva entre as fases 3, 4 e 5.

b) O método recursivo surge naturalmente no raciocínio dos alunos

O método recursivo foi usado de forma natural pelos alunos e a construção cognitiva com elaboração de suas “próprias fórmulas” foi recorrente nas anotações. De forma positiva, notamos que a maioria dos alunos, exceto os alunos da Turma B, perceberam o padrão já na listagem das senhas formadas com o conjunto contendo 4 símbolos. Dessa forma, cerca de 60% dos participantes da oficina não iniciaram a listagem das 120 senhas da fase 5, visto que o padrão havia sido notado, conforme podemos observar em algumas situações a seguir:

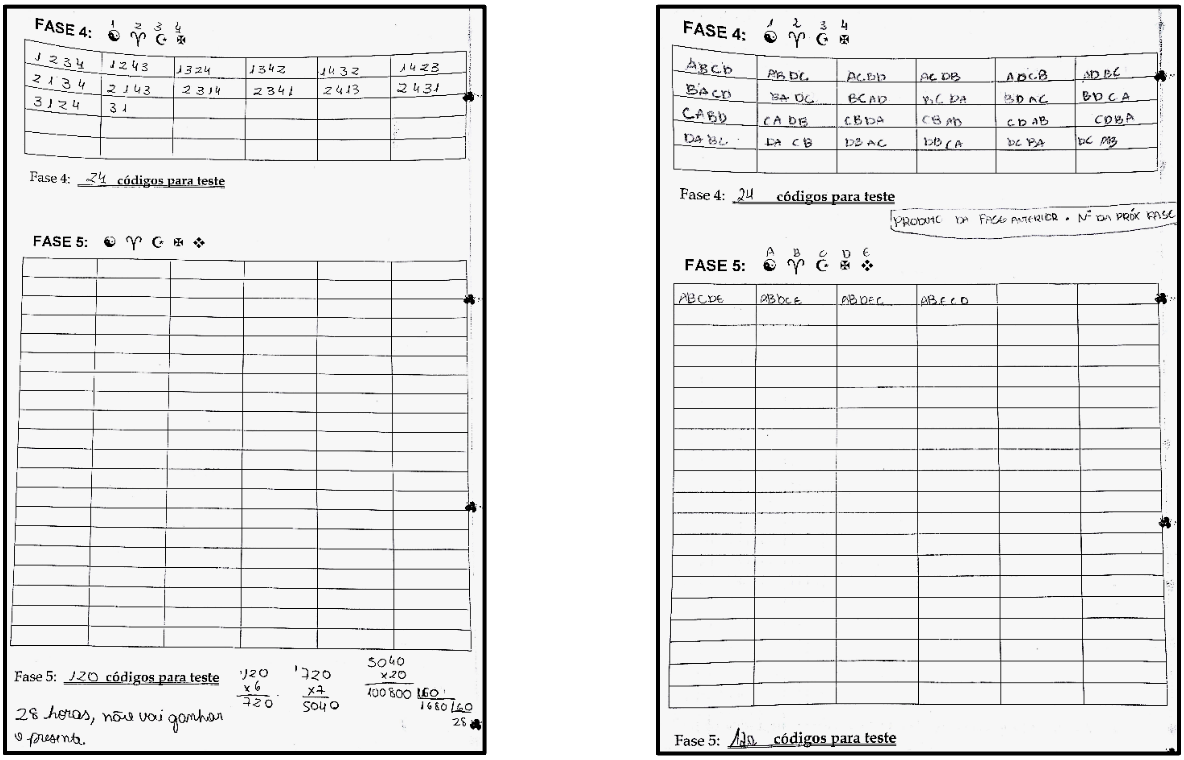
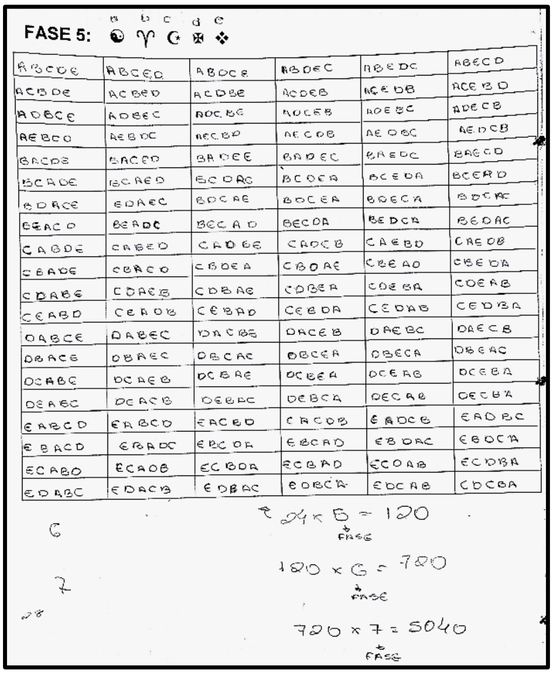
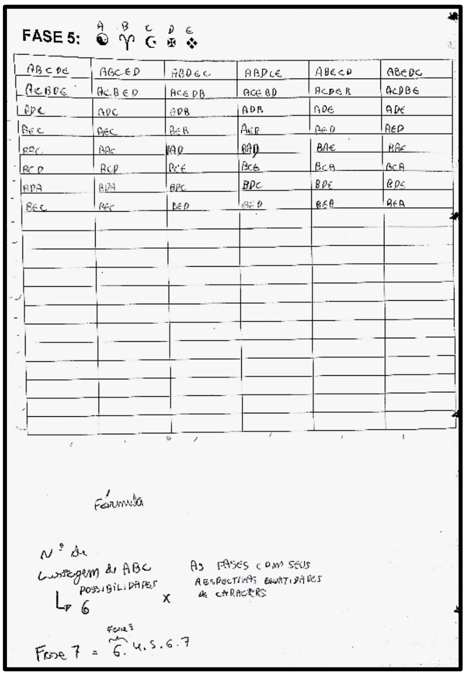


Figura 7 - Os alunos notam o padrão de contagem e daí são capazes de projetar quantidades das senhas de fases posteriores

c) **Os alunos entenderam que, além da simples listagem das senhas, a obtenção de um padrão para a contagem era o objeto final do processo de listagem.**





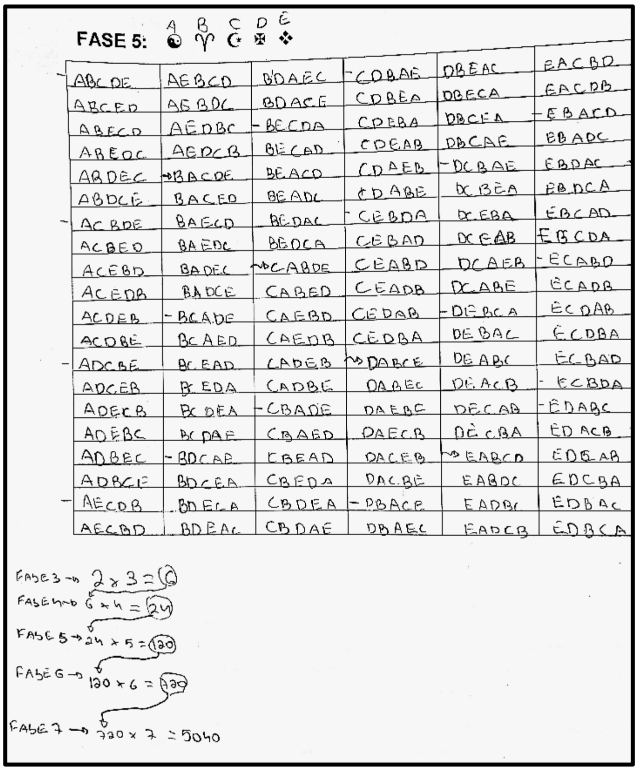


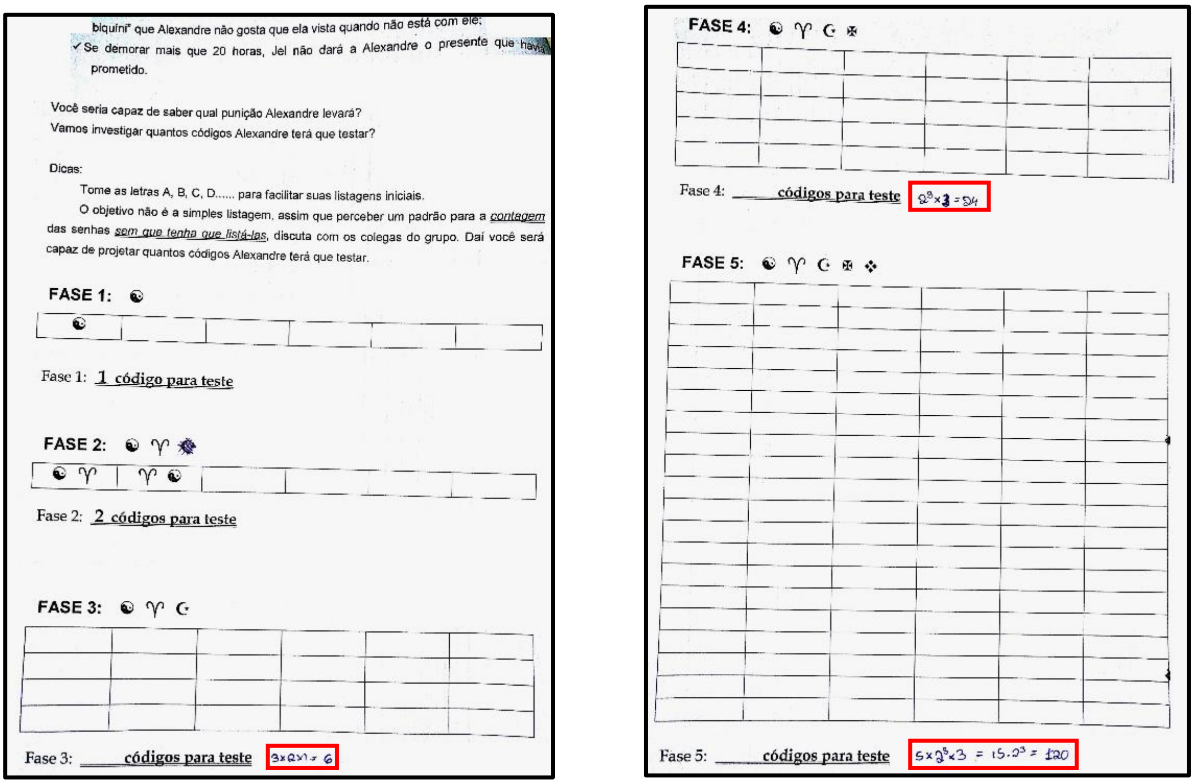
Figura 8 - Listagens totais ou parciais das 120 senhas da 5ª fase do jogo, todavia acompanhadas dos padrões de contagens observados.

d) Contato prévio com Análise Combinatória interferiu negativamente.

Alunos que, de alguma forma, tiveram contato com Análise Combinatória antes da aplicação da oficina não se empenharam na listagem e apresentaram dificuldades para aplicar o método recursivo.

Como professor dos alunos aos quais eu apliquei a oficina, essa prévia exposição ao tema do modo tradicional poderia ser encarada como obstáculo no desempenho do aluno na oficina, todavia a análise dos dados desses alunos é usada de forma positiva em nosso trabalho uma vez que, posteriormente à aplicação da oficina, alguns desses alunos se mostraram mais abertos a abordagens em sala de aula acerca do conteúdo que já haviam visto em cursos de reforços. Em geral a fala era parecida com: “Ah, então é por isso que se pode “isso” nesse exercício”.

Apenas 5 alunos afirmaram já ter estudado previamente o conteúdo e podemos notar que, durante a oficina, tais participantes tentaram “adivinhar” do que se tratava o trabalho e, nesse sentido, acabaram não participando da forma que os outros o fizeram (listando a senhas e observando padrões). Todavia a ação desses alunos não foi reprimida nem ignorada, visto que acabaram contribuindo posteriormente na abordagem do conteúdo.


biquíni" que Alexandre não gosta que ela vista quando não está com ele;

✓ Se demorar mais que 20 horas, Jel não dará a Alexandre o presente que havia prometido.

Você seria capaz de saber qual punição Alexandre levará?

Vamos investigar quantos códigos Alexandre terá que testar?

Dicas:

Tome as letras A, B, C, D...... para facilitar suas listagens iniciais.

O objetivo não é a simples listagem, assim que perceber um padrão para a *contagem* das senhas *sem que tenha que listá-las*, discuta com os colegas do grupo. Daí você será capaz de projetar quantos códigos Alexandre terá que testar.

FASE 1: ☯

Fase 1: 1 código para teste

FASE 2: ☯ ♈

Fase 2: 2 códigos para teste

FASE 3: ☯ ♈ ☪

Fase 3: ____ códigos para teste $3 \times 2 \times 1 = 6$

FASE 4: ☯ ♈ ☪ ✠

Fase 4: ____ códigos para teste $2^3 \times 3 = 24$

FASE 5: ☯ ♈ ☪ ✠ ❖

Fase 5: ____ códigos para teste $5 \times 2^3 \times 3 = 15 \cdot 2^3 = 120$

Figura 9 - Anotações de um aluno que afirmou que havia estudado previamente o conteúdo da oficina.

e) **Alguns participantes foram capazes de listar, perceber o padrão e, de forma indireta, “definir” o fatorial.**

O ápice da aplicação da oficina se deu quando notamos que alguns alunos foram capazes de estabelecer o método de contagem das senhas desde a Fase 1 até a Fase 7, relacionando todas entre si e, portanto, alcançando a ideia do fatorial.

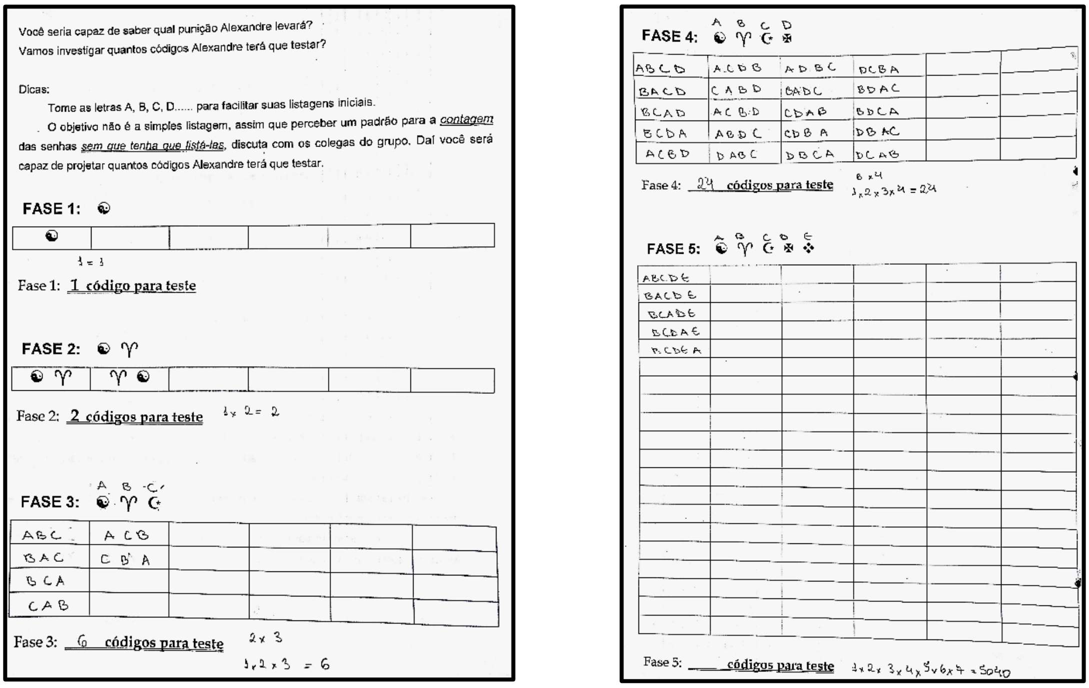


Figura 10 - A aluna reconhece o padrão de contagem e estabelece o fatorial.

3.2 “Finalizando” a Aplicação da Oficina

Após perceberem o padrão de listagem, boa parte dos alunos ficou em euforia, as calculadoras foram entregues aos grupos e uma pergunta foi feita:

“Se existisse a Fase 20, quantas senhas Alexandre listaria, no máximo, para obter a senha correta da fase? ”.

De forma rápida os alunos tomaram as calculadoras em mãos e iniciaram as contas, todavia, já na fase 12 os dígitos possíveis da calculadora acusaram erro de cálculo – o número era demasiadamente grande. Nesse momento afirmamos que uma calculadora científica seria capaz de nos dizer o valor, porém o interesse primário era mostrar-lhes que, mesmo reconhecendo o padrão de contagem, a conta não era pequena e até mesmo a escrita do produto 1x2x3x4x...x19x20 era demorada, nesse sentido, historicamente, deu-se a necessidade de uma notação para o produto.

Nesse momento da oficina foi apresentada a definição recursiva de permutação, bem como a notação do fatorial de um número natural n, $n \geq 1$. Foi agradável perceber os alunos entendendo o sentido de uma definição matemática, afinal a matemática tem regras e símbolos gerados, em sua maioria, a partir de acordos e convenções.

Posteriormente, foi explicado o sentido de definir $0! = 1$ sem maiores problemas para aceitação da sua definição.

4. CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 Conclusões

Ao final desta dissertação é difícil apontar um dado não relevante ou negativo no trabalho desenvolvido. A priori, apesar da minha experiência de 18 anos em sala de aula, imaginei que a pesquisa e aplicação da OME não encontraria nada distinto do que já tinha visto e/ou trabalhado em sala de aula. Entretanto, a descoberta feita por mim, no trabalho com a OME, foi que os discentes mostraram-se mais dispostos após terem participado dela. O processo de construção cognitiva, a partir de suas próprias ideias, e a liberdade para perguntar, sugerir e concluir sobre o conteúdo abordado nas aulas seguintes foram os pontos positivos que mais me agradaram. Após a participação na OME o aluno sentiu-se mais à vontade comigo, quebrando o paradigma do professor ser o único detentor do saber dentro da sala de aula. Contudo, há outros pontos positivos na OME que posso destacar:

(a) O aluno sente-se formador da matemática, elaborador de conteúdo e peça útil na engrenagem do processo de ensino-aprendizagem;

(b) A atividade em grupo expõe, entre os participantes, ideias inicias distintas (em alguns casos) com resultados finais idênticos. Dessa forma, ajudando o docente a formalizar a melhor "regra", o melhor acordo matemático para tal finalidade;

(c) Na sequência do conteúdo, a abordagem de tópicos mais complicados torna-se agradável para os alunos, pois deles já se obteve atenção e disposição para aprender;

(d) O profissional que aplica a oficina é capaz de "entrar na mente do aluno", vendo suas abordagens e métodos de elaboração do pensamento. Sendo assim, ele é capaz de colher desses alunos ideias que podem ajudar às futuras aplicações da OME.

(e) Quando um aluno tem uma ideia equivocada em uma OME sobre algumas construções matemáticas que não são válidas em todos os casos, não é indicado refutá-la imediatamente, na medida do possível, dialogando com o aluno, é interessante que ele consiga perceber onde há a falha e, eventualmente, pensar numa nova solução para o problema. Esse tipo de análise de validade ou não de regras matemáticas é crucial para que o aluno entenda uma definição matemática.

(f) O trabalho manual, “chato” e cansativo - em alguns pontos da oficina - mostra ao aluno que fórmulas não são inventadas, mas sim, descobertas. E o prazer dessas descobertas é capaz de tornar o desenvolvimento da pesquisa num sacrifício que vale à pena.

Não tenho dúvidas que, assim como notei desenvolvimento diferenciado na aprendizagem dos educandos, aprendi muito vendo-os fazer matemática. Anexamos ao final do trabalho toda a estrutura da oficina, para que outras pessoas possam entender o mecanismo de aplicação e elaboração da mesma. Assim, eles também poderão desenvolver melhorias na oficina ou mesmo criar suas próprias.

4.2 Princípio Multiplicativo Generalizado

Esse não era o objetivo primário da oficina O Senhor das Senhas, mas gostaríamos de salientar que o princípio multiplicativo pode ser abordado com a escolhas de n-uplas ordenadas, não apenas com pares ordenados. A seguir destacamos três exemplos utilizando o PFC generalizado.

Exemplo 1: Bianca dispõe de 2 pares de sapatos, 4 calças e 10 camisas de modo que todos os objetos têm características distintas entre si. A pessoa deseja escolher um conjunto para se vestir e, para isso, deve escolher um par de sapatos, uma calça e uma blusa, nessa ordem. Nessas condições, de quantos distintos a escolha dos três objetos poderá ser feita?

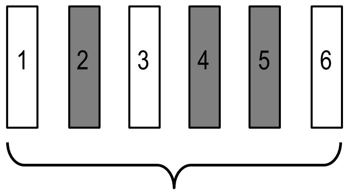
Solução: Seja o evento que consiste da escolha dos três objetos e E o conjunto das possibilidades de uma das escolhas desse evento. Vamos considerar os conjuntos de possibilidades A_1 (escolher o par de sapatos), A_2 (escolher a calça) e A_3 (escolher a blusa). Dessa forma, temos:

$\#(A_1) = 2$, $\#(A_2) = 4$ e $\#(A_3) = 10$

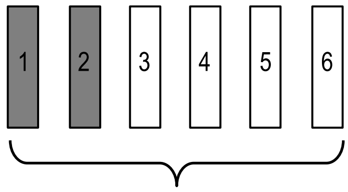
Usando o PFC generalizado, temos que o total de escolhas possíveis para Bianca é **$2 \times 4 \times 10 = 80$.**

Exemplo 2: A tela de desbloqueio de um smart phone possui 6 barras verticais que acendem de forma independente quando são tocadas. Um código de acesso para esse smart phone possui desde todas as barras apagadas até todas as barras acesas. Para desbloqueio, o usuário digita o código e, depois, clica no botão desbloquear.

Observe dois exemplos a seguir:



Foram clicadas as barras
“2”, “4” e “5”



Foram clicadas as barras
“1” e “2”

Com base nas informações anteriores, antes de clicar a tecla desbloquear, qual o total de códigos possíveis para desbloqueio do smart phone?

Solução: Note que para cada barra há duas decisões que podem ser tomadas: clicar ou não clicar. Para essas tomadas de decisões, vamos associar os conjuntos $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = \{0, 1\}$, de modo que o elemento 0 equivalha à opção de não clicar na barra e elemento 1 equivalha à opção de clicar na barra. Dessa forma, $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = n(A_6) = 2$. Assim, usando o PFC generalizado, temos que o total de senhas que podem ser formadas para o *smart phone* é **$2\times2\times2\times2\times2\times2 = 64$.**

Exemplo 3: Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Quantos subconjuntos o conjunto A possui?

Solução: Utilizando raciocínio análogo ao exemplo anterior, vamos associar as decisões possíveis de serem tomadas para cada um dos elementos de A aos conjuntos $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = \{0, 1\}$, de modo que 0 equivalha a não inserir o elemento a_i no subconjunto que será criado e 1 equivalha a inserir o elemento a_i no subconjunto que será criado. Dessa forma, usando o PCF generalizado, temos que o total de subconjuntos do conjunto A é **$2\times2\times2\times2\times2\times2 = 64$.**

4.3 Sugestão de tema para uma OME

O Código Binário e as Combinações Simples

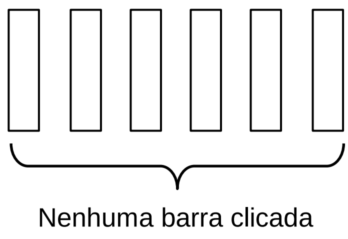
É possível um professor de matemática com o mínimo de experiência, dizer que os dois últimos exemplos têm o mesmo peso didático em sala de aula ou dizer que os exemplos são iguais entre si. Entretanto, será que para o discente eles são iguais?

- Não!

Minha experiência docente me leva a concluir que o estudante não enxerga estes dois exemplos da mesma forma. Pois, no momento tecnológico no qual vivemos, é provável que o aluno se interesse mais em saber quantas senhas ele poderá criar para o seu telefone do que, simplesmente saber o número de subconjuntos de um conjunto. Assim o aluno pode ser motivado à resolução do problema do *smart phone* por curiosidades sobre algo que ele utiliza todos os dias. Nesse sentido, concordamos com Polya (1995, p.3) quando afirma

> É uma tolice responder uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. (POLYA, 1995, p.3)

A ideia de utilizar o conjunto {0, 1} para problemas do PFC, nos quais as escolhas sejam associadas à presença ou não de um elemento num subconjunto, pode ser uma boa metodologia para que o aluno entenda a noção do conjunto vazio. Imaginamos que no exemplo do *smart phone*, haja uma excelente opção para tal aplicação. Para isso, é necessário que o aluno seja capaz de associar o conjunto vazio ao código binário 000000, equivalente à senha sem nenhuma barra clicada (veja na figura abaixo).



Também acreditamos que, após o aluno aprender a calcular o número de permutações com repetições, o código binário possa ser associado ao estudo das Combinações Simples. Assim, sugerimos uma OME com esse tema, visto que incialmente pensamos em aplicá-la, mas decidimos deixá-la como opção para algum profissional que queira desenvolvê-la.

A ideia primária da oficina pode ser observada em parte da proposta inicial que tínhamos para sua aplicação:

4.5. Defina Combinação Simples

4.6. Faça associação do número de combinações de n elementos, tomados p a p, $C_{n,\,p}$, com o número de permutações $P_n^{p,q}$ onde p + q = n

5. Orientações

5.1. Caso o aluno não consiga entender o enunciado de algum exercício, não o explique, oriente que entre os colegas do grupo haja uma definição do que deva ser feito.

5.2. Faça associações do 0 e do 1, do código binário, com a presença ou não de determinado objeto em determinados tipos de subconjuntos.
Observe: Do conjunto {a, b, c, d, e}, selecionar subconjuntos com 3 elementos pode ser associado ao código 10110. Nesse código específico, estabeleça a relação com subconjunto {a, c, d}.

Figura 11 - Parte da 2ª página da proposta da oficina Combinação Simples associada ao Código Binário

4.4 Considerações Finais

Sobre os temas específicos que trabalhamos, o PFC e o fatorial, fazemos algumas observações:

(a) Aconselhamos o teste com essa mesma oficina, ou com outra que levasse à construção de padrões e/ou fórmulas, numa série do 9º ano do ensino fundamental. Ainda que seja aplicada a título de curiosidade, a aprendizagem do aluno acerca dos acordos e definições matemáticas possivelmente ajudaria os professores das disciplinas Química e Física da mesma série, uma vez que, no 9º ano a quantidade de fórmulas transmitidas aos alunos aumenta.

(b) A segunda oficina, citada no Capítulo 3 - Permutação com repetição – foi idealizada, mas não aplicada, no intuito de desenvolver o raciocínio do participante para utilizar na oficina 3.

(c) A terceira oficina, citada também no Capítulo 3 - Combinação Simples associada ao Código Binário – é uma sugestão de trabalho para explicar combinação Simples a partir da Permutação com Repetição. Na figura 11, mostramos a ideia primária da oficina.

(d) Na medida do possível, desafie os alunos a criarem problemas e a solucioná-los no coletivo. Para isso, oriente-os na formação gramatical do enunciado dos exercícios, afinal a minha experiência mostra que a interpretação das perguntas dos problemas costuma causar grandes dificuldades na aprendizagem da Análise Combinatória.

Considerando a importância do desenvolvimento cognitivo durante todo o processo de aprendizagem escolar, concluímos nosso trabalho em defesa de pesquisas em métodos de ensino inovadores. Assim, defendemos o projeto das Oficinas de Matemática Experimental como auxílio na explanação e diversificação do trabalho com matemática.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, L. L do N., **Oficina de Matemática Experimental:** Uma História de TV, Minimizando Custos, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017, p.20

ABRAMOVICH, S.; PIEPER, A., **Fomentando o espírito recursivo em Combinatória através do uso de Manipulações e Tecnologia da Computação** 1995, p.4, tradução nossa.

BRASIL, **Base Nacional Comum**, Proposta Preliminar, Versão 2, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf . Acesso em 27/01/2017

BRASIL. **LDB -** Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

CONCEIÇÃO, D. C., PEREIRA, D.C., SANTOS, M. L. S., **O ensino-aprendizagem de Analise Combinatória: O Desempenho de Alunos de Belém do Pará**. 2016, p.7. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5075_3641_ID.pdf

DURO, M. L., BECKER, F., **Análise Combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática**, v. 40, n. 3, p. 860, set. 2015. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/edreal/2015nahead/2175-6236-edreal-41714.pdf

GOMERO, G. I.; SILVA, M. O., **Matemática Experimental com o Triângulo de Pascal,** 2017, p. 2

GONÇALVES, R. R. S., **Uma Abordagem Alternativa Para O Ensino De Análise Combinatória No Ensino Médio**, A utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica, Dissertação de mestrado do PROFMAT, IMPA, 2014. Disponível em: http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/rafaela_goncalves.pdf . Acesso em: 19/01/2017

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Autores Associados, 2008. 153 p. (Coleção Formação de Professores).

INEP, **IDEB - Resultados e metas**, Disponível: http://ideb.inep.gov.br/resultado/ Acesso em 29/11/2017

MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P., **Matemática Discreta**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. 192 p. (Coleção PROFMAT)

OECD; Fundação Santillana; INEP, **Relatório Nacional Pisa 2012**, Resultados Brasileiros, Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf, Acesso em 29/11/2017

PEREIRA, K. **Oficina de Matemática Experimental:** Entrando Numa Fria, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017, p.16

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: Um novo aspecto do método. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

6. ANEXOS

ANEXO 1 – Projeto Original (Oficina não aplicada)

Oficinas de Matemática Experimental

O Senhor das Senhas

09 de setembro de 2016

1. Objetivos

1.1. Objetivos Matemáticos.

1.1.1. Introduzir ideias iniciais dos princípios aditivo e multiplicativo.

1.1.2. Introduzir a noção de fatorial e permutação simples.

1.1.3. Definir Fatorial

1.1.4. Introduzir a noção de permutação com elementos repetidos.

1.1.5. Apresentar ao aluno uma aplicação da permutação simples e associações da mesma com o código binário.

1.1.6. Introduzir a noção de Combinação Simples.

1.2. Objetivos Heurísticos

1.2.1. Expor o aluno ao desafio de enfrentar problemas extremamente difíceis de serem resolvidos;

1.2.2. Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando-o a formular e testar hipóteses;

1.2.3. Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas;

1.2.4. Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação;

1.2.5. Introduzir a ideia de simplificação como estratégia de resolução de problemas;

1.2.6. Estimular o aluno a criar problemas difíceis a partir do conhecimento de uma resposta, sendo que a resolução do problema pode trazer respostas melhores.

1.3. Objetivos Não Matemáticos

1.3.1. Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

2. Equipes e Divisões

2.1. Em cada sala, com 48 alunos, serão formados 12 grupos, cada grupo contendo 4 alunos;

2.2. Na ocorrência de divisão não exata dos grupos, poderão existir grupos com quantidades diferentes de 4 pessoas. No entanto, apenas no caso de ocorrência de divisão não exata.

3. Lista de Equipamentos e Materiais

3.1. Fichas[1] contendo tabelas para listagens das senhas (Uma para cada senha em cada grupo). Portanto:
No Primeiro Encontro: 4 por grupo;
No segundo Encontro: 4 por grupo;

3.2. Lista de Senhas-Chave[2] (Nomes de pessoas, sem letras repetidas) para geração de novas senhas;

3.2.1. Em cada lista do 1º encontro constará:
- 4 senhas com 3 letras;
- 4 senhas com 4 letras;
- 4 senhas com 5 letras;
- 1 senha com a palavra PERNAMBUCO.

3.2.2. Em cada lista do 2º encontro constará:
- Uma senha de 4 letras, contendo 2 letras repetidas;
- Uma senha de 5 letras, contendo 2 letras repetidas;

[1] Ver anexo (a)
[2] Ver anexo (b)

- Uma senha de 5 letras, contendo 3 letras repetidas;
- Uma senha de 6 letras, contendo 3 letras repetidas.

3.3. Lápis com borracha (Um para cada aluno do grupo - Totalizando 48 lápis);

3.4. Calculadoras comuns (uma por grupo. Portanto, 12 calculadoras em cada oficina).

4. Ações a serem desenvolvidas

4.1. Do princípio multiplicativo ao Fatorial (Encontro 1 – Parte1)

4.1.1. Introdução ao método recursivo para princípio multiplicativo;

4.1.2. Introdução ao conceito de permutação simples;

4.1.3. Definição de Permutação Simples

4.1.4. Definição de Fatorial;

4.2. Permutação com elementos repetidos (Encontro 2)

4.2.1. Introdução à ideia de como "retirar os excessos" da permutação simples em relação à permutação com repetição;

4.2.2. Definição de permutação com repetição;

4.3. Combinação Simples ou Permutação com Repetição? (Encontro 3)

4.3.1. Estabelecer uma equivalência entre o número de possibilidades de escolhas de subconjuntos de um conjunto e conceito de Combinação simples;

4.3.2. Definir Combinação Simples;

4.3.3. Associar o estudo da combinação ao estudo das permutações com repetições.

5. Atividades

5.1.1. Atividades a serem desenvolvidas no Encontro 1 (4.1)

5.1.1.1. Cada aluno, dentro do grupo, deve preencher a Ficha de Senha observando as senhas Chave.

5.1.1.2. Entre os alunos do grupo deve haver discussões de como obter o total de senhas, sem a necessidade de listá-las.

5.1.2. Atividades a serem desenvolvidas no Encontro 2 (4.2)

5.1.2.1. Cada aluno, dentro do grupo, deve decidir sobre a quantidade de senhas geradas com as senhas contendo letras repetidas;

5.1.2.2. Após discussão interna, cada grupo deve estabelecer uma "regra" para extrair os excessos de permutações geradas com letras repetidas.

5.1.3. Atividades a serem desenvolvidas no Encontro 3 (4.3)

5.1.3.1. Cada Grupo de alunos deve listar todos os subconjuntos de conjuntos contendo 2, 3, 4 e 5 elementos, respectivamente.

5.1.3.2. Cada grupo deve calcular todas as combinações $C_{n,\ k}$, para valores de k satisfazendo $0 \leq k \leq n$.

5.1.3.3. Cada grupo deve listar os subconjuntos contendo 4 elementos de um conjunto universo contendo 7 elementos.

5.1.3.4. Cada grupo deve listar todos os códigos distintos formados com a permutação do código **1111000**

6. Orientações

6.1. Orientações acerca do 1º encontro (5.1.1)

6.1.1. Entregue a folha de papel em branco para listagens e anotações dos alunos;

6.1.2. Cada grupo deve receber senhas chave com letras distintas para a geração de novas senhas a partir das senhas conhecidas. Inicialmente, com três letras, em seguida, com 4 letras e, finalmente, com 5 letras.

6.1.3. É notável que, a partir da senha com 5 letras, a dificuldade de listagem seja notada. Nesse momento, sugira que cada grupo estabeleça um método para "contar" as senhas, sem necessidade de lista-las;

6.1.4. No momento em que o grupo perceber e utilizar o raciocínio da multiplicação, revele a senha PERNAMBUCO e permita o uso de calculadora. Em seguida, defina o fatorial.

6.2. Orientações acerca do 2º encontro (5.1.2)

6.2.1. Sugira uma senha com apenas duas letras repetidas (SARA, por exemplo), depois sugira (ALANA), então pergunte: “E agora, como faremos?”.

6.2.2. Nesse ponto é possível que o aluno diga, por exemplo, que basta dividir as permutações de SARA por 2, visto que há apenas duas letras repetidas. No entanto perceberão que esse mesmo raciocínio não funcionará com ALANA. Peça, então, sugestões para obter o total de senhas sem a necessidade de lista-las;

6.2.3. Discuta como extrair os excessos na contagem e defina a permutação com repetição.

6.3. Orientações acerca do 3º encontro (5.1.3)

6.3.1. Peça para que os alunos listem todos os subconjuntos de conjuntos contendo, respectivamente, dois, três, quatro e cinco elementos;

6.3.2. Tome o conjunto de três elementos e seus respectivos subconjuntos para explicação prática. Por exemplo, três interruptores de lâmpadas para explicar os modos de iluminar a sala. Explique que, nesse caso, as luzes apagadas estariam associadas ao conjunto vazio;

6.3.3. Sugira a formação de códigos no sistema binário do código **1111000**, em seguida associe com a combinação de 7 elementos tomados 4 a 4 listados em 5.1.3.3. Explique que o 1 representa o elemento presente e o zero representa o elemento ausente.

Anexo (a)

SENHA: ______________________

Anexo (b) – Não será entregue aos alunos, as senhas serão postas no quadro.

Ficha 2

Lista de senhas para o 1º Encontro:

Com três letras:

ARI, BIA, LEO e YSA.

Com quatro letras:

LUAN, RONY, YEDA, EDNA.

Com cinco letras:

ALINE, JULIA, LUCAS, TADEU.

Lista de senhas para o 2º Encontro:

Com quatro letras, contendo duas repetidas:

SARA

Com cinco letras, contendo duas repetidas:

PAULA

Com cinco letras, contendo três repetidas:

ALANA

Com seis letras, contendo três repetidas:

AMANDA

ANEXO 2 – Projeto da oficina O Senhor das Senhas – (Oficina Aplicada)

Oficinas de Matemática Experimental

O Senhor das Senhas

Do princípio multiplicativo ao Fatorial

04 de outubro de 2016

7. Objetivos

7.1. Objetivos Matemáticos.

7.1.1. Introduzir ideias iniciais do princípio multiplicativo.

7.1.2. Introdução ao método recursivo para o princípio multiplicativo;

7.1.3. Introduzir a noção de fatorial e permutação simples.

7.1.4. Definir Fatorial

7.2. Objetivos Heurísticos

7.2.1. Expor o aluno ao desafio de enfrentar problemas extremamente difíceis de serem resolvidos;

7.2.2. Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando-o a formular e testar hipóteses;

7.2.3. Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas;

7.2.4. Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação;

7.3. Objetivos Não Matemáticos

7.3.1. Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

8. Equipes e Divisões

8.1. Em cada sala, com 48 alunos, serão formados 12 grupos, cada grupo contendo 4 alunos;

8.2. Na ocorrência de divisão não exata dos grupos, poderão existir grupos com no mínimo 3 e, no máximo, 4 pessoas. No entanto, apenas no caso de ocorrência de divisão não exata.

9. Lista de Equipamentos e Materiais

9.1. Fichas[1] contendo tabelas para listagens das senhas. Uma para cada membro do grupo. Portanto, 4 por grupo – Totalizando 48 fichas por sala.
Como o trabalho será feito em quatro salas, serão necessárias 192 fichas por oficina.

9.2. Calculadoras comuns (uma por grupo. Portanto, 12 calculadoras em cada oficina).

[1] ver anexo

10. O Senhor das Senhas: A História

O jogo ***Galileu's***, criado pelo mega-hiper-super programador de jogos, - professor Vinícius - é um jogo de estratégia, em 1ª pessoa, no qual o jogador deve vencer adversários diversos, desde monstros até zumbis.

Para, posteriormente, ter acesso rápido à fase o jogador recebe um código de acesso (ao final de cada fase) formado por n caracteres distintos, sendo n a fase que o jogador acabou de concluir. Por exemplos:

- ✓ Na fase 1, o código tem 1 caractere;
- ✓ Na fase 2, o código tem 2 caracteres distintos;
- ✓ Na fase 3, o código tem 3 caracteres distintos;
- ✓ E assim, sucessivamente.

Alexandre é viciado no jogo e já passou por algumas fases de ***Galileu's***, porém esqueceu de anotar o código da fase 7, lembrando-se, apenas, que o código é formado por uma das disposições dos símbolos ☯, ♈, ☪, ✠, ❖, ✪, ○, sem recordar a ordem correta. Alexandre resolveu testar, um a um, cada um dos códigos possíveis, e para isso, gasta em média 20 segundos para cada teste.

A empreitada de Alexandre seria "tranquila" não fosse a sua namorada. Sim, há uma namorada nessa história, chama-se Jel.

Jel tem programação para um encontro entre os dois, por isso foi curta e direta com Alexandre sobre o tempo que ele gastaria nessa brincadeira, bem como possíveis punições:

- ✓ Se demorar até 10 horas para encontrá-la, Jel deixará de beijá-lo por dois dias;
- ✓ Se demorar entre 10 e 20 horas, Jel irá com as amigas à praia e vestirá “aquele biquíni” que Alexandre não gosta que ela vista quando não está com ele;
- ✓ Se demorar mais que 20 horas, Jel não dará a Alexandre o presente que havia prometido.

Você seria capaz de saber qual punição Alexandre levará?
Vamos investigar quantos códigos Alexandre terá que testar?

11. Atividades a serem desenvolvidas

11.1. Leia a estória para a sala.

11.2. Liste as Senhas possíveis da Fase 1 e da Fase 2 – use letras para facilitar

11.3. Entregue a cada grupo quatro fichas, uma para cada aluno;

11.4. Peça para que cada aluno associe cada caractere recebido para formação das senhas, a caracteres usualmente conhecidos (letras do alfabeto);

11.5. Solicite que cada aluno do grupo se responsabilize pela listagem de todas as senhas possíveis de serem formadas com a permutação dos caracteres que serão senhas contidas na ficha que será entregue a ele.

11.6. Depois de preenchidas as fichas, peça para que cada grupo desenvolva um método de contagem das senhas, sem que seja necessário listá-las.

12. Orientações

12.1. Cada aluno, dentro do grupo, deve receber as três senhas chaves e, individualmente, ter a responsabilidade de lista-las. No entanto, caso haja dificuldade para tal listagem, não explique como fazê-la, apenas permita que outros colegas do mesmo grupo deem ideias de listagens.

12.2. O aluno deve começar a listagem sempre pela senha com menos caracteres para, a partir dessa, desenvolver o raciocínio de listagem das demais.

12.3. É notável que, a partir da senha com 5 caracteres, a dificuldade de listagem seja notada. Nesse momento, sugira que cada grupo estabeleça um método para "contar" as senhas, sem necessidade de listá-las;

12.4. Entre os alunos do grupo deve haver discussões de como obter o total de senhas, sem a necessidade de listá-las.

12.5. No momento em que o grupo perceber e utilizar o raciocínio recursivo e o princípio da multiplicação, enuncie o princípio fundamental da contagem e, em seguida, defina permutação e fatorial.

13. Cartas na Manga

13.1. Caso algum grupo desenvolva o trabalho em tempo inferior ao programado, sugira desafios tais como:

- Das senhas com os 8 caracteres ☯, ♈, ☪, ✠, ❖, ✪, ❍, todos distintos, quantas iniciam com ♈ e terminam com ☪ ?

- Das senhas com os 8 caracteres ☯, ♈, ☪, ✠, ❖, ✪, ❍, todos distintos, quantas têm ♈ ☪ juntos, em qualquer disposição

ANEXO 3 – Material entregue aos participantes da oficina aplicada

O Senhor das Senhas

Do princípio multiplicativo ao Fatorial

O Senhor das Senhas: A História

O jogo ***Galileu's***, criado pelo mega-hiper-super programador de jogos, - professor Vinícius - é um jogo de estratégia, em 1ª pessoa, no qual o jogador deve vencer adversários diversos, desde monstros até zumbis.

Para, posteriormente, ter acesso rápido à fase o jogador recebe um código de acesso (ao final de cada fase) formado por n caracteres distintos, sendo n a fase que o jogador acabou de concluir. Por exemplos:

- ✓ Na fase 1, o código tem 1 caractere;
- ✓ Na fase 2, o código tem 2 caracteres distintos;
- ✓ Na fase 3, o código tem 3 caracteres distintos;
- ✓ E assim, sucessivamente.

Alexandre é viciado no jogo e já passou por algumas fases de ***Galileu's***, porém esqueceu de anotar o código da fase 7, lembrando-se, apenas, que o código é formado por uma das disposições dos símbolos ☯, ♈, ☪, ✠, ❖, ✪, **O**, sem recordar a ordem correta. Alexandre resolveu testar, um a um, cada um dos códigos possíveis, e para isso, gasta em média 20 segundos para cada teste.

A empreitada de Alexandre seria "tranquila" não fosse a sua namorada. Sim, há uma namorada nessa história, chama-se Jel.

Jel tem programação para um encontro entre os dois, por isso foi curta e direta com Alexandre sobre o tempo que ele gastaria nessa brincadeira, bem como possíveis punições:

- ✓ Se demorar até 10 horas para encontrá-la, Jel deixará de beijá-lo por dois dias;

- ✓ Se demorar entre 10 e 20 horas, Jel irá com as amigas à praia e vestirá “aquele biquíni” que Alexandre não gosta que ela vista quando não está com ele;
- ✓ Se demorar mais que 20 horas, Jel não dará a Alexandre o presente que havia prometido.

Você seria capaz de saber qual punição Alexandre levará?
Vamos investigar quantos códigos Alexandre terá que testar?

Dicas:

Tome as letras A, B, C, D,... para facilitar suas listagens iniciais.

O objetivo não é a simples listagem, assim que perceber um padrão para a *contagem* das senhas *sem que tenha que listá-las*, discuta com os colegas do grupo. Daí você será capaz de projetar quantos códigos Alexandre terá que testar.

FASE 1: ☯

☯					

Fase 1: **1 código para teste**

FASE 2: ☯ ♈

☯ ♈	♈ ☯				

Fase 2: **2 códigos para teste**

FASE 3: ☯ ♈ ☪

Fase 3: ______ **códigos para teste**

FASE 4: ☯ ♈ ☪ ✠

Fase 4: ________ **códigos para teste**

FASE 5: ☯ ♈ ☪ ✠ ❖

Fase 5: ________ **códigos para teste**