UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
SOCIEDADADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LUING ARGÔLO SANTOS

UMA PROPOSTA DE EXPERIMENTAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

ILHÉUS – BAHIA
2017

LUING ARGÔLO SANTOS

UMA PROPOSTA DE EXPERIMENTAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) para a obtenção do título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Doutor Cícero Alfredo da Silva Filho

ILHÉUS – BAHIA

2017

S237 Santos, Luing Argôlo.
Uma proposta de experimentações geométricas para o 9º ano do ensino fundamental / Luing Argôlo Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.
74 f. : il.

Orientador: Cícero Alfredo da Silva Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Referências: 74-76.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Pesquisa educacional. 3. Professores de matemática – Formação. 4. Aprendizagem. I. Título.

CDD 516

Luing Argôlo Santos

UMA PROPOSTA DE EXPERIMENTAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 17 de março de 2017:

Prof. Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho
Orientador

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Prof. Ms. Roque da Silva Lyrio

Ilhéus - 2017

DEDICATÓRIA

À Deus Criador,

minha esposa Letícia

e meu filho Théo.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao Criador e Sábio Arquiteto do Universo acima de tudo, por ter nos concedido vida e saúde abundantes. Aos meus queridos pais que sempre têm apoiado e incentivado a continuar nos estudos e qualificação profissional.

Aos sábios professores do PROFMAT que com toda competência transmitiram durante o curso os conteúdos, por mais complexos que fossem, da melhor maneira possível, tentando estimular o pensar e o anseio pelo que é desafiador, inovador e belo no raciocínio matemático. Em especial agradeço ao professor Cícero Alfredo (meu sábio e compreensivo orientador) e ao professor Vinicius Arakawa (coordenador do PROFMAT).

Aos meus colegas do mestrado, pelo companheirismo em todos os momentos e pela força e incentivo nos momentos de desamino. Em especial aos meus colegas, Altamiro Bispo, Bruno Mendonça, Eliane Santos, Gideoni Francisco dos Santos e Marlúcia Brasil pelos momentos de estudos que foram essenciais nesta caminhada.

A minha querida esposa pela dedicação, pelo incentivo também e pelo amor demonstrado em todos os momentos da minha vida. Esse amor foi quem me deu tranquilidade e paz para continuar e não esmorecer ante as dificuldades que iam surgindo durante o curso. Ele me ajuda sempre a continuar.

“O que sabemos é apenas uma gota, mas o que não sabemos é um oceano.”

(Isaac Newton, 1643 - 1727)

RESUMO

Esse estudo é resultado de pesquisas na área de Educação Matemática, cujo objetivo é mostrar a importância de se utilizar a metodologia investigativa nas aulas de geometria. Para isso, buscamos mostrar a relevância de se propor alterações na maneira de lecionar conteúdos de matemática e, em particular, a geometria, enfatizando a investigação como uma importante ferramenta para o professor fomentar o prazer pelo estudo da disciplina por parte dos alunos. No seio da pesquisa tentamos enfatizar também que uma das fases da investigação é a experimentação, que pode tornar o trabalho investigativo mais aprazível e significativo para o educando, por causa de sua importância histórica e por desenvolver áreas específicas no raciocínio geométrico dos alunos. Por fim, acreditando que é muito viável investigar utilizando experimentações e materiais didáticos que facilitem essa prática, propomos uma sequência de atividades para o 9º ano do Ensino Fundamental II, que estão ao alcance do professor na sala de aula e pode potencializar o ensino/aprendizagem de conceitos da geometria.

Palavras-chave: geometria; experimentação; investigação matemática.

ABSTRACT

This study is a result of research in the area of Education Mathematics, whose goal is to show the importance of using the research methodology in geometry classes. For this, we seek show the relevance of proposing changes in the way of teaching Mathematics contents, and in particular geometry, emphasizing research as an important tool for the teacher to foster study of the discipline by students. Within the research we also emphasize that one of the stages of research is the experimentation, which can make investigative work more and meaningful to the student, because of his or her historical importance and for developing specific areas in the geometric rationale of students. Finally, believing that it is very feasible to investigate using experiments and didactic materials that facilitate this practice, we propose a sequence of activities for the 9th grade of Elementary School II, which are available to the teacher in the classroom and can enhance the teaching / learning of concepts of geometry.

Keywords: geometry; experimentation; mathematical research.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é mostra qual o papel da experimentação nas investigações matemáticas e propõe uma sequência de atividades experimentais em geometria para o 9° ano do Ensino Fundamental II. Partimos de uma proposta deveras interessante para educadores, pois sugere um breve afastamento do plano do conhecimento formal e uma tentativa de entender o conhecimento intuitivo que norteia a vida de adolescentes na supracitada série.

Sabemos que a qualidade do ensino/aprendizagem de geometria nas escolas atuais ainda não tem sido satisfatória. O ensino da mesma tem sido negligenciado por decorrência de diversos fatores, dentre eles, à má formação dos professores. Muitos profissionais da educação declaram não ter familiaridade com a área. Por isso, nossa proposta se torna significativa no contexto educacional contemporâneo pois, além de envolver geometria, envolve também o uso de perspectivas que estão tendendo a se tornarem presentes no cotidiano escolar.

Os conhecimentos de desenho geométrico para o estudante servem para desenvolver a capacidade de expressão gráfica, senso de ordem e proporção, através do contato com objetos geométricos fundamentais do plano e resolução de problemas básicos a ele relativos. Para uma aprendizagem ainda mais satisfatória, também é necessário familiarizar o aluno com programas computacionais adequados para maior entendimento do desenho geométrico, promovendo desenvolvimento.

A proposta desta pesquisa deve contribuir para desenvolver nos interessados técnicas para o ensino de geometria plana para o 9° ano, isto é, de construções geométricas que possuem como base a régua e compasso propondo problemas que utilizam a metodologia experimental. Também abordamos alguns problemas de geometria espacial, utilizando dobraduras, em que o próprio aluno participa do processo de construção e resolução do problema. Tais situações abordadas permitirão ao professor entender quais são as dificuldades dos estudantes em geometria, além de permitir aos últimos elaborar definições, argumentações, demonstrações etc. Além disso, nossa abordagem incentiva o professor a aderir métodos computacionais adequados ao desenvolvimento do pensamento geométrico no âmbito do trabalho para facilitar a exposição/compreensão de conceitos.

Este trabalho foi organizado da seguinte maneira: Referencial teórico, onde expomos o que é, como fazer e qual o papel do professor em uma aula de investigação, explicando também o seu potencial em geometria; Importância da experimentação e seu papel no trabalho investigativo, bem como sua utilização em sala de aula; A utilização de Materiais Didáticos (MDs), inclusive de baixo custo, que auxiliam a promoção de experimentações geométricas; Ambientes que propiciam experimentações e o Laboratório de Ensino da Matemática (LEM); Possibilidades metodológicas para a investigação de relações geométricas; Propostas de atividades experimentais; E avaliação do aluno que experimenta.

Entendemos que se o professor propõe aos alunos atividades bem ordenadas, planejadas e interessantes, facilita sua atuação em sala de aula. Sem esquecer que o aluno também aprenderá de uma forma mais participativa, o que provavelmente trará maior fixação dos conteúdos abordados. Como profissionais, jamais podemos esquecer de que o aprendizado do aluno deve ser o fim a se atingir.

O que mais levamos em conta também nesse estudo é a tentativa de uma transposição didática que será amadurecida e assimilável pelos próprios alunos, com o devido auxílio e intervenção do professor mediador. Ou seja, desejamos que os primeiros sejam capazes de entender conceitos, transmiti-los aos colegas e, se possível, utilizá-los em seus cotidianos. Para isso, seria bastante razoável elaborar atividades não só individuais, mas coletivas, lançando mão de MDs que propiciem maior entendimento de geometria e possibilitem ao educando ir além dos conteúdos que o professor está ensinando. Ou seja, abrir espaço na sala de aula para investigações e redescobrimentos.

Diante de toda problemática que vimos apresentando, resolvemos investigar como propor aulas de geometria no 9º ano do Ensino Fundamental II, de maneira experimental, utilizando além do lápis, papel, lousa e piloto, as dobraduras, régua, compasso e o software GeoGebra como potencializadores desse ensino. Nesse âmbito, propor uma sequência de ensino em que o estudante terá a oportunidade de ser partícipe da institucionalização dos seus conhecimentos com as devidas intervenções do professor mediador.

Para orientar nossa busca, formulamos o seguinte problema de pesquisa: **Qual o papel da experimentação nas investigações geométricas? Como a introdução**

de práticas experimentais pode contribuir para o processo de ensino/aprendizagem de conceitos e propriedades dessa área?

A partir deste questionamento, o objetivo geral deste estudo foi discutir qual o papel da experimentação na investigação matemática e no ensino/aprendizagem de conteúdos. Além disso, com base nas contribuições teóricas, propor a experimentação como uma metodologia capaz de potencializar a aula de investigação e, concomitantemente, o aprendizado de geometria no Ensino Fundamental II. Além disso, recomendar uma sequência de aula/atividades experimentais para o 9º ano, utilizando os MDs: régua, compasso, dobraduras e o software GeoGebra.

Não podemos esquecer de que os alunos é que nos ensinam a ser professores, então se trabalharmos em função deles, automaticamente estaremos melhorando como profissionais. A leitura desse trabalho poderá ser útil aos profissionais da educação que têm o desejo de elaborar aulas mais dinâmicas e que prendam mais atenção dos alunos.

Com as propostas de intervenção desta pesquisa, pretendemos despertar reflexões nas escolas e corpo docente, no sentido de estimular educadores a investirem na elaboração de aulas mais criativas, que possam atrair os alunos para o objeto de estudo e assegurar a boa qualidade das aprendizagens. Além disso, incentivar a criação de espaços propícios para esse tipo de trabalho. Acreditamos que profissionais dispostos a engajar nessas reflexões e práticas, podem se comprometer de maneira mais profunda com a aprendizagem dos estudantes.

É de fundamental importância também que essa reflexão não seja realizada apenas por docentes da Educação Básica, mas pelas instituições responsáveis pela formação desses docentes, que oferecem cursos de Licenciatura em Matemática. Os professores que atuam nos cursos de formação também necessitam propagar propostas de mudanças, caso contrário, estarão contribuindo para que a situação atual permaneça e as transformações não ocorram. Logo, este estudo é bastante abrangente, pois, propicia contribuições para o educador enriquecer suas aulas, para as escolas se reestruturarem, para docentes dos cursos de licenciatura e para os próprios cursos investirem na formação de profissionais qualificados ao uso de metodologias diferenciadas que possam ser mais atraentes para os estudantes.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo refletiremos sobre a prática do ensino de geometria atualmente, depois mostraremos o que é uma investigação matemática e como se dá a utilização dessa metodologia em sala de aula por parte dos professores e alunos. Além disso, apresentaremos o papel da experimentação (utilizando MDs) na metodologia investigativa e sua importância histórica e atual para o ensino/aprendizagem de conceitos geométricos. Por fim, discutiremos quais os ambientes mais propícios para promover experimentações e a importância das escolas possuírem um LEM para que essas práticas se concretizem e tenham maior significado.

2.1 ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Por mais surpreendente que possa ser, a afirmação de Papert (1994) que a prática docente quase não se modificou ao longo dos tempos, e que tem sido incomum encontrar professores que deixaram para trás a maneira tradicional de ensinar, ainda é uma realidade no século XXI. De fato, estudos mais atuais ainda comprovam que o ensino público ainda continua sendo tratado de maneira formalista e tradicional por muitas instituições e profissionais docentes.

A situação aumenta o grau de gravidade no que tange à geometria, quando importantes autores percebem em suas pesquisas que o ensino desta área, tão essencial do conhecimento matemático, ainda não é devidamente explorada no ensino público. Desde denúncias de Lorezato (1995), Soares (2009) e, recentemente, Rodriguez (2016), observa-se que esse ensino tem sido negligenciado. Segundo Soares (2009, p. 43),

> Em suma, o que podemos perceber é a pouca importância que vem sendo dada ao ensino da Geometria em todos os níveis. [...] por muito tempo foi relegada à disciplina de Educação Artística ou foi apresentada no final do programa de Matemática. Essas características levam-nos a concluir que esta importante área do conhecimento, muitas vezes, tem sido negligenciada, tratada sob uma certa forma teórica e com isso tem se tornado árida e sem sentido para boa parte dos alunos e até professores.

O que parece ser mais grave fazendo análise dessas pesquisas, é que muitas vezes as raízes pelo não ensino da dessa importante área está na falta de conhecimento da área por parte do professor. Logo, por não saber transmitir o conteúdo, ele faz saltos no livro didático e, quando enfatiza a geometria, sua insuficiente qualificação não lhe permite entusiasmar o educando, propondo situações interessantes, atraentes e motivantes. De fato,

> Ninguém é capaz de motivar o aluno para o aprendizado, se não possuir motivação. Se você não gosta de um assunto, dificilmente fará com que seu aluno se interesse por ele. O interesse e entusiasmo do professor pelo que ensina são, portanto, indispensável, juntamente, é claro, com o conhecimento teórico de sua matéria: ninguém pode ensinar o que não sabe (POLYA,1953 p. 12).

Quando o ensino de geometria não é totalmente esquecido, segundo Santos (2011) dificilmente ele é proposto com uso de ferramentas peculiares da própria área (como régua, esquadro, transferidor e compasso) e/ou materiais concretos que propiciem experimentação e, possivelmente maior compreensão geométrica. Comparando a educação com as práticas trabalhistas ele afirma que:

> O caixa do supermercado utiliza a calculadora, a balança ou o computador; o topógrafo usa o teodolito; e o pedreiro, o esquadro, o nível e o prumo. Da mesma forma, acreditamos que, se o professor se apoia em recursos que permitam a experimentação do estudante, ele provavelmente será capaz de compreender, descrever e representar melhor o mundo em que vive (SANTOS, 2011, p. 28).

Nesse ínterim porque renegar o ensino da geometria com MDs adequados? Por que não abrir espaço para o lúdico, para a investigação, para o experimental e, concomitantemente, para o desenvolvimento da autonomia do discente? Essas perguntas só podem ser respondidas pelo próprio educador. Proporemos aqui apenas sugestões, porém, para realizar o cumprimento daquilo que sugerimos, cabe a cada docente "perceber a necessidade de inserir em suas aulas uma dinâmica experimental (investigatória; a pesquisa como princípio científico e educativo) como fator formativo dos alunos" (MENDES, 2009, p. 110).

A importância de se aprender geometria desde as séries iniciais é indiscutível. Os PCNs, por exemplo, afirmam que

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive". (BRASIL, 1997, p. 55)

A problemática exposta então encontra-se mais no âmbito do 'como' do que 'porque' ensinar a geometria. Não desconsiderando o ensino tradicional, nem o excluindo em detrimento de “novas metodologias”, mas acreditando que deixar importantes formas de pensamento esquecidas pode gerar prejuízos futuros ou retardar o aprendizado. Portanto, cremos que todos os alunos deveriam passar pela experiência de fazer investigações matemáticas. Sabemos que isto é possível desde o ensino infantil porque a própria matemática elementar foi construída através de muita investigação dos teóricos antepassados. Mas em que consiste uma investigação matemática? Vejamos a seguir.

2.2 ENTENDENDO O QUE SIGNIFICA INVESTIGAR EM MATEMÁTICA

Entendemos por investigação, o trabalho com questões que se apresentam *a priori* de maneira confusa, não necessariamente difícil, mas que procuramos tentar abordá-las da forma mais assimilável possível ao estudo e análise da mesma. É um estilo diferenciado de se formular questões em que se procuram realizar testes e até provar se for o caso, com a característica de possuir uma estrutura de conjectura-tese-demonstração. Podemos realizar investigações nas mais variadas séries e das mais variadas maneiras. O importante é fazer com que essas investigações valorizem o pensamento intuitivo dos sujeitos envolvidos e não fiquem apenas condicionadas à formalidade e ao tecnicismo.

O processo de investigação norteia-se em tentar conhecer, ou seja, procurar informações do desconhecido ou até mesmo o “conhecido” a ponto de examinar da forma mais minuciosa possível o objeto em estudo. Essas informações referem-se à estrutura, potencialidades, relações, propriedades e funções do que se está estudando e podem ser essenciais na investigação de objetos da matemática.

Uma investigação definida matematicamente, “é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE, BROCADO & OLIVEIRA, 2005, p. 13). Ela pode se desenvolver em torno de um ou mais problemas. O primeiro grande passo a ser dado por alguém que quer investigar é identificar qual o problema a ser resolvido. Por isso, em matemática há uma forte relação entre problemas e investigações. Ou seja, ao contrário dos exercícios prontos e técnicos, as investigações apresentam um caráter de uma problemática envolvida, ou seja, o aluno não dispõe de um método para resolver imediatamente o que ele precisa.

É uma situação aberta que depende muito de quem investiga, por isso que podem surgir várias formas de resolvê-la entre um grupo de alunos. Além do problema proposto, podem-se descobrir novos eventos, que são tão importantes quanto a solução do problema original. A história da matemática está repleta de exemplos em que esse fato aconteceu. Como exemplo, podemos citar Henri Poincaré (1854 - 1912) que tentou provar que não existiam funções com a estrutura que ele procurava e acabou descobrindo que essas funções na realidade existiam. Esse fato sugere que a investigação matemática é uma tarefa aberta que pode inclusive "falhar" nos objetivos iniciais, porém, abrir novas possibilidades, novos objetivos, enfim, novos rumos e interesses.

2.3 PROCESSOS USADOS NA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A realização de uma atividade matemática segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2005) envolve quatro momentos principais. Primeiro temos que reconhecer o problema em questão, explorá-lo e formular questões. Depois temos que formular conjecturas. No terceiro momento deve-se realizar testes em torno da situação principal e refinar as conjecturas. Por fim, devemos demonstrar e avaliar o trabalho realizado através de argumentações. De fato, a atividade investigativa,

> Ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2013, p. 23).

O que queremos enfatizar é que esses passos e possíveis resultados estão ao alcance das aulas de Matemática atuais. Esta metodologia pode ser poderosa aliada do professor para gerar aprendizado significativo, pois o docente pode estimular seus alunos a agirem como matemáticos e a construírem seus conhecimentos semelhantemente à maneira com que foram construídos historicamente, podendo também, adquirir a capacidade de formular questões, provas, apresentação de resultados e argumentar matematicamente. Ou seja, o estudante é convidado a participar efetivamente do processo de construção das atividades a serem estudadas, se envolvendo de fato na própria aprendizagem. Além disso, a investigação ajuda a recuperar o espírito da matemática que desde os primórdios da história da mesma era intuitiva, experimental e investigatória.

O professor entra aqui como um agente mediador/validador dos processos empregados pelos alunos. Porém, o mesmo não deve deixar os discentes realizarem as investigações de maneira totalmente independente e descomprometida. Torna-se necessária a intervenção do profissional sempre que for preciso. Vejamos como se dá essa intervenção por parte do professor.

2.4 ESTRUTURA DA AULA DE INVESTIGAÇÃO

Conforme o modelo proposto por Ponte, Brocado e Oliveira (2005), o modo de começar uma investigação só é programável no início dela. A conclusão a se chegar pode percorrer inúmeros caminhos, não sendo possível discernir como ela irá acabar. Por isso, o professor deve estar sempre no controle da situação para que essas divergências que possam surgir não atrapalhem o desenvolvimento da aula ou até mesmo do pensamento matemático dos alunos.

Uma atividade investigativa é geralmente composta de três fases:

1. Proposta da tarefa (feita pelo professor);
2. Realização da tarefa (feita pelos alunos);
3. Discussão dos resultados obtidos entre os alunos.

2.4.1 Proposta da tarefa

Nessa fase inicial o professor deve assegurar-se de que todos os alunos entenderam, de fato, o sentido da tarefa proposta e o que se espera deles ao final dessa atividade. Vale lembrar que os mesmos não estarão diante de uma questão fechada a qual devem oferecer uma resposta exata, mas de uma situação apresentada de forma que ele próprio possa formular questões a respeito da mesma. O docente nessa fase deve estimular os seus alunos a serem investigadores, valorizando suas ideias e corrigindo as mesmas quando tomarem caminhos fora de contexto. O sucesso dessa atividade vai depender muito desse estímulo oferecido pelo educador. Conforme enfatiza Cruz (2015, p.12)

> Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da atividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos e do tipo de apoio que presta no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais.

2.4.2 Realização da tarefa

Torna-se crucial para a realização da tarefa que o professor entenda o processo que os alunos estão usando para tentar resolver a questão e que dê o apoio necessário para que eles não se percam em suas ideias. A realização da tarefa passa por alguns processos, que são: a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho. Vejamos cada um desses subitens.

Explorando a situação e formulando questões

A exploração da situação é uma das ou a etapa em que os alunos gastam mais tempo. Essa etapa é muito importante para a posterior formulação de questões e conjecturas, pois o estudante estará passando pela fase de entendimento da tarefa e familiarizando-se com os dados nos quais ela está proposta. Esse surgimento de conjecturas desencadeará a necessidade de se fazer testes, o que possivelmente ocasionará uma coleta ainda maior de dados.

Formulando e testando conjecturas

As conjecturas podem surgir ao aluno de diversas maneiras. Porém, deve-se dar muita importância ao registro delas para que os mesmos sintam a necessidade de explicitarem suas ideias e estabelecerem maior entendimento do problema. O professor deve ter cuidado porque a tendência natural dos alunos é de se convencerem das conjecturas por um número pequeno de casos em que as mesmas funcionam. Para que isso não aconteça o professor pode estimulá-los a procurarem contraexemplos.

Observa-se nessa fase que os alunos já estão aprendendo a formular conjecturas, porém numa linguagem baseada em gestos e na observação de dados.

Mas é fundamental que depois eles escrevam os resultados para que o professor analise o desempenho dos mesmos. Sem contar que tais sujeitos estarão aprendendo a se comunicar matematicamente de forma espontânea e original. Essa tentativa de escrever matematicamente também auxilia os alunos clarificarem suas ideias.

Justificando as conjecturas

Essa vertente tende a ser deixada para segundo plano em aulas do Ensino Fundamental, mas a sua importância não pode ser desconsiderada. Sem ela o processo investigativo se tornará empobrecido. Uma vez que o teste por si só não conclui os resultados, deve-se introduzir aos alunos a necessidade de justificarem, por meios sofisticados ou não dependendo da série, os procedimentos usados para resolver o problema, obtendo pequenas provas matemáticas. Somente o trabalho continuado com esse tipo de tarefa levará ao aluno a compreender a real necessidade de justificarem matematicamente as suas afirmações.

2.4.3 A discussão da investigação

No final de uma investigação deve-se haver partilha de conhecimentos. Os alunos podem confrontar-se com suas estratégias, conjecturas e justificações, e o professor pode atuar como um moderador, sem dizer que determinado pensamento está certo ou errado, mas tentando aproveitar as intenções por trás daquela opinião. Isso estimulará os alunos a questionarem-se mutuamente, o que desencadeará numa sistematização das reflexões principais sobre o trabalho realizado. A discussão produz um entendimento mais rico do que significa investigar, a capacidade de comunicar-se matematicamente e de refletir sobre seu trabalho e seu poder de argumentação. Sem essa discussão final corre-se o risco de perder o sentido da investigação.

2.5 OS PAPÉIS DO PROFESSOR EM AULAS DE INVESTIGAÇÃO

Sabemos que o professor tem um papel determinante nas aulas de investigação. Entretanto, o cuidado de fazer com que os alunos possuam, de fato, a autoria da investigação e garantir que o trabalho dos mesmos desempenhe um papel significativo do ponto de vista matemático é imprescindível. Cabe ao docente no decorrer da investigação, desafiar o aluno, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho dele. Vejamos como se dão esses processos.

2.5.1 Desafiar os alunos

Aqui se deve propor a atmosfera investigativa de tal maneira que os alunos se sintam realmente motivados para realizar a tarefa. É de fundamental importância que a atividade sugerida constitua, de fato, um verdadeiro desafio para os educandos. Também faz-se necessário que a atividade proposta estimule a criatividade dos alunos e promova um ambiente interrogativo perante as ideias matemáticas, mostrando aos sujeitos envolvidos como é possível interrogar matematicamente as situações e formular boas questões a serem investigadas.

2.5.2 Avaliar o progresso dos alunos

Primeiramente é ideal que o professor se certifique que seus alunos entenderam bem a tarefa, como reagiram a ela e se esta constitui realmente um desafio para eles. Depois, fique atento à forma como encaram o trabalho, para não correrem o risco de procurar obter uma resposta objetiva, como se estivessem resolvendo um mero exercício. Nessa fase da investigação, o professor há que se cuidar para não ajuizar apressadamente as considerações feitas pelos alunos, valorizando as variadas formas de pensar (geralmente pouco corretas) de cada um. Porém, para um melhor desempenho, o docente deve tentar perceber as conclusões que eles almejam obter, intervindo em suas necessidades.

2.5.3 Raciocinar matematicamente

Nesse tipo de aula o professor é conduzido a raciocinar matematicamente e de modo autêntico, pois podem surgir muitos imprevistos que ele talvez não havia prognosticado no início da investigação. Isso ocorre devido à própria natureza dessa atividade, por ser composta de questões abertas, dinâmicas e imprevisíveis.

2.5.4 Apoiar o trabalho dos alunos

Os alunos devem compreender que o principal papel do professor não é o de legitimar seu trabalho mais de apoiá-lo. É preferível que a postura desse profissional seja mais interrogativa e reflexiva do que afirmativa ou negativa. O mesmo pode oferecer ou recordar informações já estudadas pelos alunos. Torna-se importante também ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo seus avanços e recuos, os objetivos que tinham pensado anteriormente e as estratégias que seguiram. Além disso, estimulá-los a refletir sobre o processo investigativo, de forma a tirar algum proveito dele. Para isso, as justificações são fundamentais e o professor não deve deixar com os alunos as renunciem ou reneguem para segundo plano.

Como visto, é possível investigar nas aulas de matemática. Essas investigações podem ocorrer nos âmbitos aritmético, geométrico, algébrico ou estatístico. Neste trabalho nos ateremos às investigações geométricas. Diante disso, precisamos entender o que elas representam no contexto investigativo.

2.6 INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS

Desde os primeiros anos da escolaridade, a geometria permite ao professor criar um ambiente baseado na exploração e investigação de entes matemáticos. As investigações geométricas ajudam ao aluno perceber muitos aspectos essenciais para um bom desenvolvimento nessa área. Pode-se através delas testar conjecturas e até mesmo demonstrá-las. Além de poder fazer relações entre situações da realidade com a matemática, as investigações geométricas também contribuem para o desenvolvimento da noção de espaço e capacita o aluno a ilustrar situações matemáticas. Para Cruz (2015, p.13)

> A Geometria é o conteúdo matemático com mais possibilidades para a realização de atividades de natureza exploratória e investigativa na sala de aula e que necessita de poucos pré-requisitos. Valendo-se pela visualização e intuição, e recorrendo à manipulação de materiais, a Geometria torna-se especialmente favorável a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas mais elementares.

De fato é possível investigar em qualquer área da matemática, mas a geometria é bastante propiciatória à esta tendência metodológica, até mesmo pela própria maneira pela qual foi desenvolvida historicamente. Se o educador não percebe a natureza investigatória da geometria, isso pode demonstrar pouco conhecimento histórico da criação e evolução da mesma. BRASIL (1997, p. 56) afirma que é um dos objetivos do 2° ciclo, por exemplo, “Demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados”. Tal comportamento, porém, pode abranger ensinos posteriores, uma vez que diversos autores têm dedicado trabalhos salientando a importância de se investigar em todas as séries do ensino básico.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) enfatiza a importância de se abordar os conceitos e objetos geométricos de maneira experimental e indutiva, e orienta a utilizarmos aplicações da geometria a situações cotidianas, utilizando diagramas e modelos concretos na construção dos conceitos geométricos. Em consonância com os autores supracitados, acreditamos ser de grande importância a realização de investigações geométricas no Ensino Fundamental II. Por isso, proporemos neste trabalho uma sequência de atividades para 9° ano. Antes disso, discutiremos mais algumas ações importantes para se percorrer ao se pensar em produzir aulas com investigação matemática. Dentre elas, a experimentação, que pode ser fundamental à prática investigatória. Vejamos sua importância.

2.7 A IMPORTÂNCIA DA EXPERIMENTAÇÃO NO PROCESSO DE INVESTIGAR

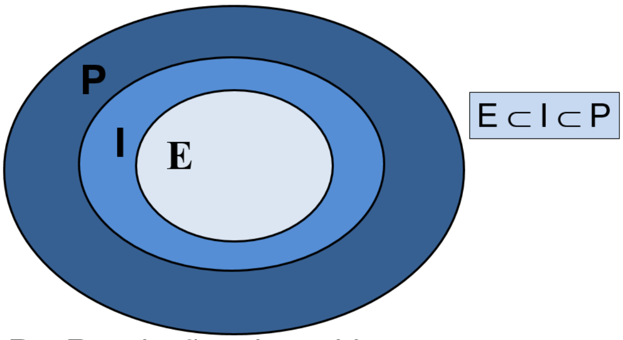
Conforme ressaltado anteriormente, quando o aluno realiza uma investigação matemática, ele pode se equivocar, achando que o exemplo que funcionou para determinado caso serve para casos gerais. Por isso, é importante que o professor incentive o aluno a experimentar. Essa prática pode se fazer presente em todas as fases da investigação matemática. Vale lembrar que a experimentação não é algo exclusivo dos matemáticos, mas pode ser realizado em muitas outras áreas do conhecimento, principalmente nas ciências. O processo de experimentação gera fixação do conteúdo estudado na memória dos alunos, pois se utiliza do empírico como um caminho para se chegar na abstração e não vice-versa, o que pode dificultar o aprendizado. Conforme pesquisas de SANTOS (2011, p. 28),

> Os derivados da palavra *experimentar* (experimental, experimentos, experimentações e experimentalmente) aparecem 12 vezes nos PCNs do Ensino Fundamental II (1998). Sem contar alguns termos (que não deixam de ser sinônimos) como: prática, explorar, experiência, experiências práticas, experiências concretas etc. Isso significa que esse documento de importância nacional valoriza bastante a prática experimental.

Lorenzato (2006a, p. 72) afirma que “Experimentar é valorizar o processo de construção do saber em vez do resultado dele, pois, na formação do aluno, mais importante que conhecer a solução é saber como encontrá-la”. Para Lazarowitz e Tamir *apud* Neves *et al.* (2006, p. 384) “é a actividade desenvolvida num ambiente criado para esse fim, envolvendo-se os alunos em experiências de aprendizagem planeadas, **interagindo com materiais** para observar e compreender fenómenos” (grifo nosso). O processo de construir, com o uso de instrumentos, fez e continua fazendo parte da produção e aplicação dos conhecimentos matemáticos e, em particular, dos conceitos geométricos. Sendo assim, por que não utilizar essa metodologia em sala de aula para facilitar o aprendizado?

Lorenzato (2006a, p. 71) também nos recorda que “é antiga a sabedoria referente ao ‘é fazendo que se aprende’; ela está bem clara no antigo provérbio chinês ‘se escuto, esqueço; se vejo, lembro; mas se faço, aprendo’ ”. Ponte, Brocado e Oliveira (2005) reforça tal pensamento e, retomando as ideias de Pólya (1975), relembra que a Matemática em seus primórdios foi construída como uma ciência experimental e indutiva. Segundo ele, os dois últimos aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática; portanto, mesmo com os avanços da Matemática atual, essas formas de raciocínio continuam sendo válidas para produzir e transmitir conhecimentos.

Entretanto, pode-se verificar que Ponte, Brocado e Oliveira (2005) aborda a questão do raciocínio no processo de investigação matemática; porém, ele não comenta sobre o lugar que a experimentação ocupa nesse cenário investigativo. Como tentativa de definir o espaço ocupado pela experimentação nesse contexto, nos fundamentaremos na afirmação de Lorenzato (2006a, p. 72), que em meio a sua pesquisa assevera: “experimentar é investigar”. Tal afirmação nos permite estabelecer a experimentação como um campo da investigação, que é, por sua vez, uma área específica da resolução de problemas. Nessa perspectiva, fazendo uma analogia com a teoria dos conjuntos, Santos (2011, p. 31) propõe o seguinte diagrama para ilustrar essa relação:



• **P** – Resoluções de problemas
• **I** – Investigações
• **E** – Experimentações

Figura 1 – O campo da experimentação

Vale salientar que nessa relação de inclusão fica claro que nem sempre quem investiga experimenta, mas sempre que alguém realiza uma experimentação está investigando algo. Nesse âmbito, a experimentação demonstra exímia importância no ato de investigar, pelo fato de ela ser inerente ao próprio indivíduo que investiga. Só o próprio sujeito pode experimentar. Assistir alguém experimentar não é experimentar. Já a investigação pode ser realizada por terceiros e o “pesquisador” pode obter apenas os resultados. Ou seja, ele pode não participar do processo, lançando apenas o problema e adquirindo as informações necessárias. Segundo Moreira & Penido (2009, p. 2)

> Tomar a experimentação como parte de um processo pleno de investigação é uma necessidade, reconhecida por aqueles que pensam e fazem o ensino de ciências, pois a formação do pensamento e das atitudes do sujeito ocorre preferencialmente nos entremeios de atividades investigativas.

Diante do exposto, é evidente que a experimentação pode ocorrer em atividades investigativas e há que se refletir também sobre sua necessidade, pois a mesma está ligada diretamente à formação do pensamento e das atitudes do estudante. Ela propicia que o sujeito esteja aprendendo ativamente, o que é uma vantagem, uma vez que a importância de se desenvolver autonomia nos estudos é defendida pela grande maioria (senão todos) dos educadores.

Logo, para experimentar o estudante necessita se concentrar e/ou sentir, tocar, ouvir, escrever, falar, errar, consertar, manipular, interagir etc. Assim a experimentação tende a aumentar a capacidade heurística do indivíduo que está resolvendo um problema por meio de investigação. Nesse âmbito, a experimentação pode ser bastante significativa no processo de investigar em sala de aula, pois "obrigatoriamente" o aluno que se propôs a realizar uma experimentação terá de se valer dos seus próprios sentidos para se envolver na atividade. Entretanto, essa será uma tarefa desafiadora para os docentes, pois demandará tempo para acostumar os alunos com esse tipo de atividade, principalmente se sua trajetória escolar for marcada pelo excesso de tradicionalismo e formalismo nas aulas.

O esquema proposto por Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 21) nos dá motivos suficientes para deduzir que a experimentação não é passível de finalizar uma investigação. Torna-se necessário também, nos entremeios desse processo, justificar e avaliar o raciocínio ou o resultado da experiência. Dessa maneira, temos outro pretexto para supor que investigar é uma área mais extensa do que experimentar, ou seja, a primeira contém a segunda. Segundo o mesmo autor, na investigação, devem-se buscar objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar propriedades, mas esse processo também deve ser fundamentado e rigoroso. Enquanto isso, a experimentação, apesar de ser uma etapa importante, não vai exigir demonstrações justificadas com tanto rigor e abstração.

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mais o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração (PONTE, BROCADO & OLIVEIRA, 2005, p. 10).

No enfoque investigativo, o aluno é convidado a agir como um matemático, sendo possível ao mesmo formular questões e conjecturas e realizar provas e refutações, além de apresentar resultados que podem ser discutidos e argumentados com colegas e professor. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 37) "A justificação ou prova das conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência, a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida, em especial nos níveis de escolaridade mais elementares". Esse processo está ao alcance dos alunos em sala de aula e podem atribuir mais sentido à investigação realizada, não devendo, portanto, ser negligenciada pelo professor.

A importância da experimentação nesse âmbito é auxiliar no estabelecimento ou refutação dessas conjecturas, promovendo assimilação daquilo que experimenta com o que se quer demonstrar. Auxilia a sair do particular para alcançar o geral ou, partindo do geral, testar a validade dos casos particulares.

É na experimentação que o aluno vai perceber a importância de se demonstrar se a propriedade observada serve para quaisquer exemplos ou é um equívoco. Nem sempre é importante chegar a algum resultado, mas, também, é importante saber quando não se pode chegar a resultado algum. O professor pode considerar essa perspicácia como um grande avanço no raciocínio matemático dos alunos. Nosso objetivo então é examinar como a experimentação participa da construção do pensamento matemático, em particular do pensamento sobre o eixo espaço e forma. Para isso, veremos a seguir um pouco da história dessa vertente no conhecimento científico e como inseri-la nas aulas.

2.8 BREVE APANHADO HISTÓRICO DA EXPERIMETAÇÃO NO CONHECIMENTO CIENTÍFICO E IMPORTÂNCIA DE SUA UTILIZAÇÃO EM AULAS DE GEOMETRIA

Segundo Santos (2011, p. 29),

> A preocupação de ensinar aos alunos procedimentos experimentais, semelhante ao que é praticado pelos cientistas nos laboratórios, surge a partir de 1969, tendo como base os trabalhos de Piaget e Wallon sobre a maneira pela qual a criança aprende. Entretanto, segundo Laugier e Dumon (1998, p. 1), “em 1985, os programas voltam a uma visão mais tradicional, como conteúdos disciplinares nitidamente marcados”. Aos poucos, essa prática é totalmente extinta das salas de aula, o que gerou graves implicações no ensino de matemática.

Contudo, diversos pesquisadores contemporâneos já defendem a importância de retomar a prática do ensino experimental, acreditando que a mesma tem potencial para fomentar o senso investigativo dos alunos e, automaticamente, estimular o gosto pelas técnicas científicas. De acordo com Laugier e Dumon (1998, p. 3),

> desde suas origens o ensino científico valoriza a primeira etapa do procedimento experimental: a observação. Quer se trate da observação de um objeto [...] quer aquela de um fenômeno onde o aluno deve recolher as informações "usando todos sentidos". Em suma, essa prática do procedimento experimental deve permitir ao aluno validar seus conhecimentos, como o pesquisador valida suas hipóteses.

Não se trata apenas de propor que o estudante utilize o procedimento experimental, senão aprenda a empregar esse método, despertando sua autonomia e autocrítica para não só observar, mas conjecturar, testar essas deduções e, posteriormente, validar suas hipóteses, com o devido auxílio docente. Dito de outra forma, é interessante que o aluno sinta-se um partícipe ativo nas aulas, redescobrindo conhecimentos ou, quem sabe até, descobrindo-os. Conforme assinala Lorenzato (2006a, p. 72):

A experimentação possibilita:

- a integração de diferentes assuntos;
- a redescoberta;
- a memorização de resultados;
- a aprendizagem de diferentes estratégias de resolução de problemas;
- a verificação de conjecturas ou de resultados.

O segundo tópico é digno de destaque, pois a experimentação deve conduzir o aluno a descobertas, as quais não passam, na maioria das vezes, de redescobertas. Dessa maneira, talvez o gosto pelo conhecimento seja despertado. Lorenzato (2006a, p. 82) destaca que a descoberta também valoriza a compreensão. Portanto, é razoável conjecturar que, nessa situação de aprendizagem, conceitos e propriedades geométricos seriam assimilados mais facilmente pelos sujeitos envolvidos.

Laugier e Dumon (1998, p. 3) esclarecem que o procedimento experimental era apresentado através do esquema **OHERIC**, que consiste simultaneamente em: **O**bservação – **H**ipótese – **E**xperimentação – **R**esultados – **I**nterpretação – **C**onclusão. Segundo os autores,

> Nesse método, a observação dos fenômenos permite passar do mundo percebido ao mundo pensado. É a observação repetida de um número grande de fatos que induz, no cientista, a ideia que o conduzirá à uma hipótese: é Newton tendo a intuição da lei de atração universal observando a queda de uma maçã ou Galileu "descobrindo" a periodicidade das oscilações do pêndulo observando as oscilações do lustre da catedral de Pisa. Em seguida, a experiência permite "verificar a teoria". Neste método experimental, se os resultados experimentais não comprovarem a teoria, esta é abandonada.

Temos razões para crer que o Esquema OHERIC, que se assemelha bastante às fases de uma investigação propostas por Ponte, Brocado e Oliveira (2005), pode favorecer bastante o aprendizado de geometria de forma consciente e verificável.

Portanto, não é interessante que a atitude do professor nessas aulas seja a de alguém que possua respostas para tudo, pois o método contrasta com a antiga ideia que o estudante é uma moringa vazia que precisa ser cheia pelo professor, criticada por diversos autores. O docente, porém, deve motivar os estudantes a buscarem a auto superação em relação ao aprendizado, propondo a descoberta, que pode ser denominada, nesse contexto, de descoberta dirigida, pois, o professor na verdade não ensina, auxilia no aprendizado. Assim,

> A função do professor é, portanto, proporcionar situações de aprendizagem ao aluno na descoberta daquilo que deve ser conhecido. Dessa forma, o professor não estará privando o estudante do prazer da descoberta, ao mesmo tempo que estará sendo verdadeiramente útil, na medida em que “faz” pensar (ZARO; HILLEBRAND, 1992, p. 7).

Não é de se duvidar, contudo, que o ensino por experimentação tenha uma grande importância para as aulas de Matemática e possua efeitos positivos no ensino da mesma. Inclusive ela também pode favorecer o trabalho em grupo, segundo afirma Lorenzato (2006), ela permite a socialização com os colegas, o envolvimento com o assunto estudado e a participação das descobertas.

Entretanto, há dificuldades provavelmente que surgirão na implementação dessas atividades e é necessário que o professor já esteja preparado. Esses entraves ocorrem desde a escassez de materiais e locais adequados, críticas de colegas tradicionalistas e/ou direção escolar, talvez barulho e agitação por conta da natureza das tarefas, enfim. Além disso, os alunos podem não estar acostumados com aulas que não fornecem respostas prontas. Por isso, talvez sejam os primeiros a resistirem a esse tipo de abordagem de ensino. Seria ingenuidade desconsiderar as limitações e dificuldades que são encontradas na tentativa de modificar práticas escolares que perduram por décadas.

2.9 O USO DE INSTRUMENTOS QUE FACILITAM A EXPERIMENTAÇÃO EM GEOMETRIA: CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Ao estudar a maneira como a Matemática evoluiu historicamente, sempre é possível encontrar os seres humanos utilizando materiais como instrumentos para medir, contar ou fazer relações. Às vezes, até mesmo com partes do corpo, como dedos das mãos e dos pés, palmos etc., ou instrumentos como corda (estiradores de cordas no Egito), ábaco (China), tábua de contar (Europa e China), entre outros (BOYER, 1974). No momento atual, é possível constatar que os alunos não estão habituados com o uso dos instrumentos que acrescentam significados ao estudo de geometria, atribuindo a este mais eficácia e sentido. Dada sua importância histórica, o educador, como agente responsável pela condução do processo de formação dos alunos, não deveria ignorar tais instrumentos.

Talvez a falta de utilização de alguns recursos nas aulas de Matemática, como, por exemplo, régua, compasso, transferidor e esquadro, sendo instrumentos de ensino, também contribua para o aumento das dificuldades dos alunos em absorverem conceitos e propriedades geométricas. É do conhecimento da comunidade científica o quanto esses instrumentos auxiliaram na evolução da geometria desde os tempos do matemático grego Euclides, quando a essência do pensamento geométrico era o raciocínio construtivo[1]. Diante disso, não é interessante privarmos os nossos estudantes de se envolver com a prática da experimentação matemática e desta forma de raciocínio que foi e poderia continuar sendo estímulo ao interesse e prazer de investigar.

De fato, o professor de Matemática pode utilizar régua, compasso, transferidor, esquadro, papel milimetrado, dentre outros recursos, para facilitar o ensino de geometria, propiciando a experimentação dos conceitos e propriedades dessa área. Os PCNs do Ensino Fundamental II enfatizam a importância de tirar proveito dessas ferramentas e de suas propriedades para ensinar. Podemos destacar alguns trechos desse documento que servem como orientação importante para os docentes, no que se refere à apropriação desses MDs para o ensino de geometria:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com **régua** e **compasso**, como visualização e aplicação de **propriedades das figuras**, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p. 51, grifo nosso).
> Outro aspecto que merece atenção [...] é o ensino de procedimentos de construção com **régua** e **compasso** e o uso de outros instrumentos, como **esquadro**, **transferidor**, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as **propriedades geométricas** que neles estão presentes (BRASIL, 1998, p. 68, grifo nosso)

E ainda,

> Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como **régua**, **compasso**, **esquadro** e **transferidor** (p. 89, grifo nosso).

[1] Consiste-se em aplicar a premissa de que se uma ideia matemática é válida, então deve ser possível construí-la, geometricamente, com régua e compasso, justificando a validade de cada etapa do raciocínio. Desta forma, a demonstração é tão clara que a intuição poderia acompanhá-la sem que houvesse dúvidas. Desde os gregos, esta forma do pensamento matemático se estende a outros campos da Matemática como a aritmética e a álgebra, conservando sua essência.

Nas aulas, é essencial salientar como os conhecimentos geométricos foram gerados historicamente. Por exemplo, o professor deve mostrar como os gregos antigos construíam triângulos retângulos, equiláteros e isósceles, com réguas (sem marcas) e cordas (em vez do compasso). Assim, é possível dar bastante ênfase à evolução da geometria, trabalhando em sala de aula com instrumentos que eram e ainda são usados atualmente para obter construções geométricas. Percebe-se que a pergunta: "como fazer um círculo sem dispor de objetos arredondados?" não é facilmente respondida com precisão pelos alunos atuais, o que na Grécia antiga era um conhecimento muito comum entre os estudantes.

Mendes (2009, p. 109) sugere que as informações históricas da Matemática devem passar por adaptações pedagógicas que "devem recorrer a materiais manipulativos sempre que necessário sem perder de vista que a aprendizagem deve ser alcançada a partir de experiências e reflexões dos próprios estudantes". Essa afirmação propõe uma metodologia de ensino que inicie com o concreto para alcançar o abstrato, e com a experimentação para obter a formalização. Os MDs podem facilitar bastante essa metodologia. Apresentaremos uma sugestão.

2.10 EXPERIMENTAÇÕES GEOMÉTRICAS COM MATERIAIS DIDÁTICOS DE BAIXO CUSTO

Em qualquer área do conhecimento, o estudo com MDs concretos pode ser benéfico para originar conhecimento. Na Matemática não é diferente, pois, dessa maneira, os alunos podem participar mais na construção do próprio aprendizado, fazendo com que o conhecimento seja gerado com mais solidez. Não se pode desprezar também que "[...] vivemos em um mundo de três dimensões e é sempre bom contar com modelos concretos como recurso didático para o Ensino de Matemática" (VASCONCELOS, [S.d.], p. 1).

Segundo Lorenzato (2006a, p. 20), "[...] assim como é preciso abrir mão do rigor para se conseguir o rigor, para se alcançar a abstração é preciso começar pelo concreto". Entretanto, o professor que será mediador do processo de experimentar com MDs concretos não pode esquecer de estar atento para que o aluno não venha, através da experiência, reforçar conhecimentos inadequados ou errôneos. O conhecimento dos alunos pode ser bastante diferente ou até oposto ao rigor matemático. Muitas vezes, ele é empírico e intensamente baseado em modelos concretos.

Uma vez que a Matemática é uma ciência pouco empírica, os instrumentos que permitem com que o aluno investigue o abstrato podem ser muito válidos. Talvez haja mais complexidade em fazer uso constante de experimentação com materiais concretos nas aulas de álgebra ou aritmética. Todavia, a utilização desses artefatos torna-se bastante permeável ao ensino dos conhecimentos geométricos. Tal abordagem encontra-se ao alcance de estudantes de qualquer idade, pois, o concreto retrata melhor a realidade. No entender de Zaro e Hillebrand (1992, p. 7),

> [...] experimentos no qual o aluno tem a possibilidade de manusear o material, "construir" seu experimento, ser levado a formular explicações e conclusões, certamente podem ser de grande contribuição numa formação mais interessante, tanto no aspecto puramente científico como no aspecto humano.

Nesse sentido, os conhecimentos precisam ser passados de modo a tornarem-se mais adequados às concepções de mundo desses sujeitos. O material concreto pode chamar mais atenção dos discentes para o objeto de estudo, fazendo com que experimentem propriedades com suas próprias mãos, e possam tirar maiores conclusões acerca do que está sendo analisado. Conforme assinala Mendes (2009, p. 108), seus estudos mostraram que os estudantes

> [...] consideram que uma das melhores maneiras de aprender Matemática, na sala de aula hoje, é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, de modo que ambos lancem mão das brincadeiras, de atividades práticas e **experimentos** (grifo nosso).

A escola muitas vezes carece de materiais manipuláveis, fazendo com que alguns professores utilizem este álibi para não promover aulas diferenciadas. Para enfraquecer esse argumento, uma proposta interessante é a utilização de dobraduras, que são recursos que não demandam gastos altos, e que, com um pouco de disposição, podem ser incrementados facilmente nas aulas para gerar aprendizado. Esse simples recurso pode auxiliar na investigação de propriedades geométricas importantes.

As dobraduras podem ser atraentes e significativas quando utilizadas para ensinar geometria. Elas facilitam a visão das propriedades de objetos de maneira intuitiva, muitas vezes sem necessidade de demonstração, para perceber que tais propriedades são verdadeiras (PONTE, BROCADO & OLIVEIRA, 2005). Fazer dobraduras vai além da geometria, envolve relações sociais, interação do grupo, autoestima e iniciativa para enfrentar desafios.

É perceptível no ensino moderno que ainda: “Aos alunos costuma ser ensinada a Matemática de maneira repetitiva, automática e desligada da realidade” (FAINGUELERNT, 1999, p. 23). O uso de MDs manipuláveis como as dobraduras pode contribuir para alterar esse fenômeno, favorecendo o processo experimental dos alunos e aproximando-os do real e palpável.

Inserir a prática experimental nas aulas de geometria pode ser essencial para os alunos; pois, na vida, tudo é experiência. Os MDs concretos, e particularmente as dobraduras, favorecem o processo de construção e podem ser adequadas à condução da formação de um aluno investigador e curioso, que não é mero expectador das aulas, senão um contribuinte para seu próprio aprendizado. Dessa maneira, tais MDs podem servir para mediar, significativamente, o ato de experimentar. Contudo a experimentação pode ocorrer em diversos ambientes. Analisemos alguns deles.

2.11 AMBIENTES PROPÍCIOS AO PROCESSO DE EXPERIMENTAÇÃO MATEMÁTICA

A experimentação matemática pode ocorrer de variadas maneiras e em variados contextos. Além disso, em cada situação, o sujeito que está atuando nesse tipo de prática pode utilizar diversificados ambientes. Na história da Matemática é possível constatar que muitos resultados foram descobertos experimentalmente, desde a invenção das tábuas de argila até o advento dos mais avançados computadores. As classificações abaixo servem como uma tentativa de identificar os principais ambientes que podem ser utilizados atualmente para propiciar o processo de experimentação matemática.

Começamos destacando a ideia de ambiente concreto dado ao sujeito. Este envolve qualquer MD manipulável que é entregue pronto nas mãos do indivíduo que vai praticar a experimentação. São exemplos disso: poliedros, ábaco, tangram, instrumentos musicais, geoplano, multiplano, dobraduras etc.

Pontuamos ainda a perspectiva de ambiente concreto construído pelo sujeito. São materiais que o próprio sujeito fabrica, com ou sem orientação de alguém, para a posterior experimentação de propriedades. Como exemplo, têm-se o tangram, as dobraduras, os recortes em papel, desenhos geométricos etc.

Observe que o tangram e as dobraduras apareceram em ambas classificações. Isso se dá ao fato de que esses instrumentos podem ser utilizados em sala de aula de duas maneiras: o professor pode entregá-los prontos para os alunos experimentarem conceitos e/ou propriedades, ou construí-los juntamente com a turma. Na segunda opção, o ato de construir o tangram, por exemplo, dependendo da maneira como o docente conduza essa construção, já pode ser caracterizado como uma experimentação.

Logo, pode-se concluir que a experimentação não depende propriamente do MD utilizado, mas da postura dos professores e alunos em relação à atividade. O professor pode conduzir os estudantes a um laboratório de informática, trabalhar com jogos e metodologias diferenciadas, e, ainda assim, os sujeitos podem não estar praticando a experimentação, que deve ser entendida como uma postura, um modo de ver as situações e o mundo.

Não podemos esquecer o clássico ambiente papel/lápis. Esse ambiente também é propício à experimentação, entretanto, pode necessitar do suporte de:

- Instrumentos de medida: régua, compasso, fita métrica, transferidor, esquadro, papel milimetrado, etc., que podem dar suporte a experimentação;
- Algoritmos de operações básicas ou fórmulas;
- Calculadoras eletrônicas ou computador como ferramenta de verificação de hipóteses; entre outros.

Enfim, o uso de tecnologias oferece a alternativa do ambiente computacional (principalmente com softwares dinâmicos de abordagem construtiva). Trata-se de um ambiente muito rico para desenvolver o processo de experimentação dispensando, geralmente, o uso de instrumentos de medida ou calculadoras eletrônicas. Mesmo diante de alguns entraves que os softwares podem conter, o ambiente computacional é bastante abrangedor, no sentido de ampliar as alternativas de experimentação do estudante. Conforme assinala Gravina (2001, p. 89-90),

> Os ambientes de Geometria Dinâmica também incentivam o espírito de investigação Matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os *experimentos de pensamento*. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações/operações, conjecturam e

> testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica.

Não se pode esquecer de que em todos esses ambientes é importante que o professor esteja mediando o processo, para que seja evitada a absorção de conceitos precipitados e/ou equivocados por parte dos alunos. No caso dos softwares, não é interessante adotar os que reprimam o erro do aluno, como muitos que estão disponíveis atualmente na internet, mas aqueles que dão certo grau de liberdade para os usuários poderem errar e corrigir seus próprios erros. Esses momentos serão importantes para o processo de experimentação.

Existem alternativas metodológicas que, inclusive, permitem a experimentação e que podem ser utilizadas em diversos ambientes, como por exemplo:

- Jogos: existem jogos que possibilitam a experimentação matemática. Esses jogos podem estar incluídos em quaisquer ambientes citados acima. Por exemplo, o professor pode utilizar jogos de computadores, de videogame, jogos confeccionados pelo estudante, jogos dados ao estudante (xadrez, baralho, jogos de tabuleiro, etc.), entre outros, para propiciar a experimentação;
- Tentativa e erro: É uma ferramenta que pode ser útil para a experimentação, e que pode ser realizada também em quaisquer ambientes citados acima. O estudante pode usar o método da tentativa e erro com a calculadora, jogos, computador, materiais concretos, algoritmos de operações básicas, ou até através de cálculo mental. A tentativa e erro é uma maneira interessante de experimentar matematicamente e foi bastante empregada na construção histórica de algumas propriedades e padrões matemáticos. Por esse motivo, deveria ser valorizada igualmente pelos professores de Matemática que, algumas vezes, desprezam essa maneira de resolver problemas;
- Tratamento da informação: consente ao sujeito obter e organizar as informações, através da coleta de dados, interpretá-las, fazer cálculos e, desse modo, produzir argumentos para fundamentar conclusões sobre elas, fazendo previsões, propondo hipóteses explicativas, etc. Segundo os PCNs, o tratamento da informação permite a “Elaboração de experimentos” (p. 90). Os PCNs também afirmam que “As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em

que o aluno realiza experimentos” (p. 52), logo, pode ser mais uma alternativa para as aulas de experimentação.

Na escola, seria bastante proveitoso se houvesse um local para servir de suporte ao emprego da experimentação nesses ambientes. O local ideal para isso é o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), que discutiremos no capítulo a seguir.

2.12 O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA REALIZAÇÃO DE EXPERIMENTAÇÕES

A ausência de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser um grande obstáculo para a realização de tarefas de experimentação geométrica. Apesar de propormos aqui neste trabalho experimentações com MDs de baixo ou praticamente isentos de custos, o ideal é que o colégio possua instrumentos para o professor usufruir junto aos alunos e evitar transtornos como a famosa frase: “professor, esqueci em casa o material”. É indispensável então discutirmos a importância do LEM para o aprendizado de Matemática e, obviamente, de geometria.

Na concepção de Lorenzato (2006) o LEM é um local utilizado para guardar os MDs necessários às aulas de Matemática, provendo a escola de materiais que atendam às necessidades especiais peculiares da disciplina. Podem ser eles: livros didáticos, sólidos geométricos, jogos, filmes, régua, esquadro, transferidor, compasso, calculadoras, computador, entre outros. É também

> [...] uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender (LORENZATO, 2006b, p. 7).

Corroboram com essa visão Silva & Silva (2004, p. 9-10), afirmando que esses laboratórios constituem “um ambiente privilegiado, que explorado adequadamente, pode promover melhoras importantes na aprendizagem dos alunos. Por exemplo, o desenvolvimento de habilidades estratégicas dos alunos para resolver problemas”.

É razoável conceber que toda atividade tende a ser mais proveitosa quando se lança mão das ferramentas e locais adequados à sua realização. Por esse motivo, as escolas deveriam ter seus componentes essenciais para o ensino de cada disciplina e, particularmente, de Matemática. Assim, se essas instituições instalassem um LEM, isso facilitaria o acesso aos mais diversificados MDs necessários à resolução de problemas experimentais. Possuir um LEM ainda não é uma realidade vivenciada pela maioria das escolas brasileiras, apesar de sua implementação ser defendida por diversos autores como fundamental para facilitar a realização de atividades experimentais. Segundo Lorenzato (2006b, p. 6), o LEM deve ser imaginado como "um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais, inclusive de produção de materiais instrucionais que possam facilitar o aprimoramento da prática pedagógica". Ele também afirma que "o LEM deve ser o centro da vida matemática da escola", facilitando a prática dessa disciplina e, concomitantemente, tornando-a "mais compreensível aos alunos".

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 48), "A situação mais familiar na aula de Matemática é a procura de respostas para as questões colocadas pelo professor, o que pode levar os alunos a serem mais afirmativos do que interrogativos". Nesse ambiente, o professor deve orientar os alunos a fazerem suas próprias descobertas, introduzindo, assim, esses sujeitos na busca pela autonomia e pelo senso interrogativo, que são elementos fundamentais para realizar quaisquer experimentos. Essa proposta metodológica vem contrapor à antiga opinião que afirma que o conhecimento deve vir do meio e ser transmitido na escola. Baseia-se no pressuposto de que o conhecimento pode ser construído dentro da própria escola, pelos sujeitos que compõem a mesma. Assim, nesse espaço será dada maior ênfase em provocar os estudantes a buscar as respostas para seus questionamentos do que na exposição dessas respostas prontas. Assim, o LEM pode se tornar fundamental para uma formação mais completa dos discentes atuais. Portanto, "dispor de um laboratório de ensino é uma excelente alternativa, não só para ter variados modelos concretos como também para criar um ambiente que incentive a criação de vários mecanismos facilitadores do aprendizado" (VASCONCELOS, [S.d.], p. 1).

Muitas instituições já comprovaram que o uso do LEM contribui em demasia para aperfeiçoar a formação dos alunos. Entre os diversos exemplos que podem ser encontrados, podemos citar o da Universidade Federal da Bahia (UFBA):

> As atividades de laboratório se inseriram naturalmente, em disciplinas dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFBA, contribuindo para uma melhor formação dos alunos. Isso também nos dá a certeza de que foi plantada a semente de incentivo à utilização de modelos concretos como recurso didático no ensino de Matemática. (VASCONCELOS, [S.d.], p. 3)

Sem dúvidas, o LEM é uma excelente alternativa metodológica, mas essa proposta provavelmente vai contrastar com uma atmosfera de bastante resistência por parte de muitas escolas. Logo, se o docente almeja pôr em prática essa metodologia, deve estar consciente que existem alguns fatores que podem dificultar esse processo. Dentre eles podemos destacar, em concordância com Lorenzato (2006b), esses itens são os mais comuns de serem observados, entretanto existem outros:

- O despreparo dos professores, como em qualquer outra metodologia isso pode ser um entrave;
- o comportamento dos alunos, que pode ser diferente do que os professores estão acostumados rotineiramente. A intenção da proposta é fazer com que o estudante deixe de ser mero ouvinte das aulas, mas isso, para alguns professores acostumados ao tradicionalismo, pode ser sinônimo de bagunça;
- a quantidade de alunos/sala. Com uma quantidade superior a trinta alunos por turma, o fazer provavelmente será substituído pelo ver;
- o tempo utilizado para o aluno experimentar com o MD pode ser maior do que o tempo gasto numa aula comum. Porém, esse tempo pode ser recompensado principalmente em qualidade;
- e, principalmente, a descrença de muitos profissionais da educação nessa metodologia.

O professor que utiliza os MDs do LEM deve ter bastante cuidado com a tomada de decisões precipitadas dos alunos no âmbito da experimentação. Segundo Lorenzato (2006b, p. 14), “O LEM pode induzir o aluno a aceitar como verdadeiras as propriedades matemáticas que lhe foram propiciadas pelo material manipulável [...]”, além disso, nem sempre o MD vai retratar as propriedades matemáticas que o professor ambiciona demonstrar. Porém, o LEM seria o lugar ideal para propor situações que realcem o perigo de confiar em conclusões fundamentadas somente no que foi capturado pelos sentidos. Percebemos que esses riscos são proveitosos, pois seria pouco produtivo um ensino que conduz o aluno à total descrença em tudo que a observação, a intuição ou a indução podem lhe revelar ou sugerir.

Um dos maiores objetivos do LEM também é facilitar o acesso aos mais diversificados MDs, porque eles são instrumentos excessivamente úteis ao processo de ensino/aprendizagem, contudo, não podem garantir por si só a aprendizagem do aluno. É necessário que aja empenho de todos os sujeitos envolvidos. Ou seja, é importante a escola possuir um LEM, bem como é essencial que o professor saiba utilizar os MDs contidos nesse LEM, escolhendo devidamente os materiais utilizados com suas respectivas finalidades, dando significância ao aprendizado do aluno, e este último precisa se empenhar em uma mudança de postura, empreendendo-se ativamente no próprio aprendizado.

Vale destacar que o modo de utilizar os MDs em sala de aula vai depender muito do docente e de sua concepção de ensino e da própria Matemática. Alguns podem ter em mãos uma ferramenta bastante inovadora e, mesmo assim, abordá-la de forma meramente expositiva. Todavia,

> Para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da auto-imagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar (LORENZATO, 2006b, p. 25).

Além de facilitar a realização de descobertas, uma grande vantagem do MD, quando manuseado pelos aprendizes, é que os resultados dessas descobertas podem ser memorizados mais facilmente por eles. Contudo, se esses resultados forem incompletos ou errôneos, a função do professor é intervir sempre que for preciso, evitando possíveis precipitações desses indivíduos. Eles correm o risco de fazer generalizações (induções) apressadas e sem fundamento, pois “existe alguma tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas num número reduzido de casos” (PONTE, BROCADO & OLIVEIRA, 2005, p. 33). Por isso, é essencial que o professor conduza os discentes à compreensão do caráter provisório das conjecturas, não depositando toda sua confiança apenas no teste.

Nessas aulas, porém, a postura do professor não deve ser somente de ponderador das atividades realizadas pelos alunos. É interessante, ainda, provocá-los a descobrir caminhos e soluções para as conjecturas que hão de surgir nos momentos de desafios e situações inesperadas, talvez até mesmo para o próprio docente. Como as aulas no LEM são bastante imprevisíveis, muitas vezes o que foi planejado no início vai percorrer caminhos bastante diferenciados, ou mesmo desconhecidos. Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 50) nos adverte acerca desse fenômeno, assegurando que “é mesmo impossível antever todas as explorações que podem surgir a partir de uma tarefa matemática verdadeiramente aberta e estimulante”. Talvez esse seja um motivo muito razoável para alguns professores atuais optarem pelo ensino e avaliação tradicionais, porque os resultados destes são muito mais previsíveis do que os daqueles.

3 POSSIBILIDADES METODOLÓGICAS PARA A INVESTIGAÇÃO DE RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, sugerimos primeiramente uma sequência de atividades que proporcionam a aquisição de habilidades espaciais e geométricas, com o intuito de fomentar no estudante o reconhecimento de figuras planas, a percepção de suas respectivas propriedades e o desenvolvimento de habilidades espaciais tais como a coordenação motora-visual, memória visual, discriminação visual, percepção espacial, composição e decomposição de figuras. Depois discutiremos como o professor pode avaliar o aluno em uma aula de experimentação.

3.1 PROPOSTAS DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Como vimos, são inúmeras as possibilidades de ambientes propiciatórios para a prática de experimentações. Utilizamos na seguinte proposta, além do clássico ambiente papel/lápis, instrumentos como régua e compasso, as dobraduras e o software GeoGebra. Tais ambientes podem ser muito motivadores para o 9° ano, pois, além de serem materiais manipuláveis, podem tornar as atividades desafiadoras. Procuramos relacionar esses instrumentos de ensino e aprendizagem com situações que envolvam o cotidiano dos alunos na crença de que isso produz um aprendizado mais concreto preparando-os melhor para usar matemática na continuação dos estudos e, possivelmente, no mercado de trabalho.

- **ATIVIDADE 1**

Tema: **Área e medidas**
Série: 9° ano do Ensino Fundamental
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Lápis, borracha, caderno, régua, compasso e lousa.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Ampliar e aprofundar sua compreensão das noções geométricas sobre incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para esclarecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais;
- Obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos.

ATIVIDADE PROPOSTA

Desenhar e descobrir os lados de uma piscina quadrada, conhecendo somente a área do fundo da mesma.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Desenhar uma piscina em forma de quadrado sem estabelecer medidas com régua e compasso, utilizando conhecimentos de desenho geométrico;

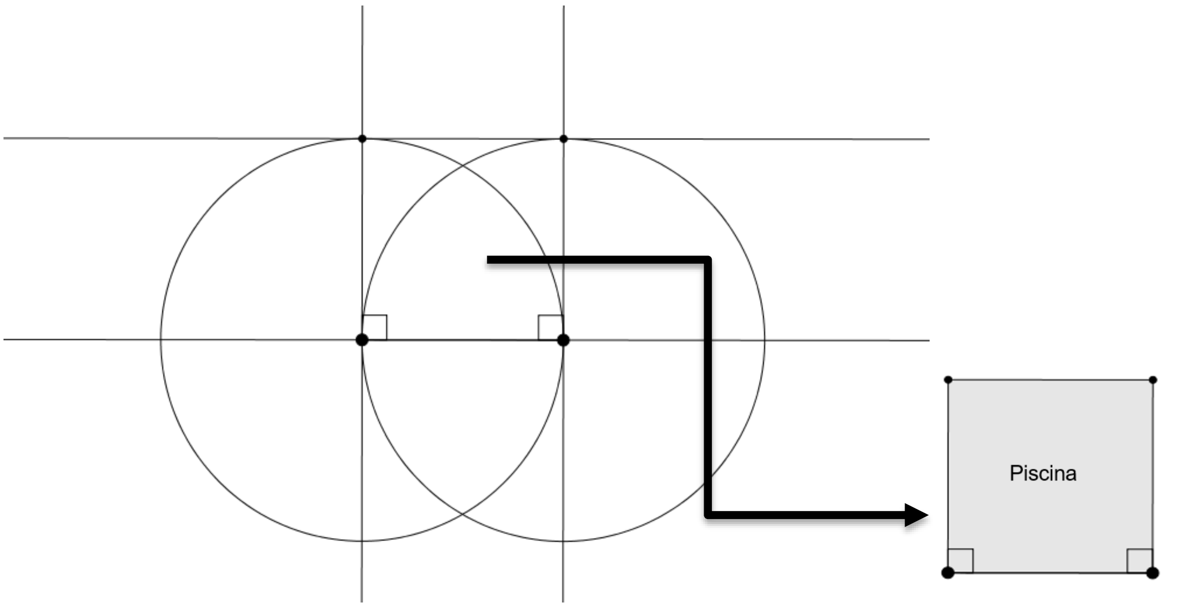


Figura 2 – Obtendo uma piscina quadrada.

- Descobrir a medida do lado da piscina, dado o valor de sua área em metros quadrados;

- Deduzir a fórmula da área do fundo da piscina;
- Observar as definições de potenciação e radiciação;
- Encontrar o valor do lado da piscina.

2) Os estudantes devem experimentar a realização da construção para perceber relações e transformações possíveis.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Num primeiro momento, questionar o que é necessário para se construir um quadrado e porquê fazê-lo com o compasso;
- Após desenhar o quadrado, supor a piscina em forma de cubo e discutir que para achar o comprimento de qualquer que seja o lado da piscina, basta saber a área do fundo desse cubo;
- Depois dessas etapas, o professor provoca os alunos a deduzirem a fórmula do quadrado (caso não saibam) e pergunta sobre a área do retângulo, para que eles percebam que essa figura é um caso geral do quadrado;
- Pode-se também trabalhar o conceito área do cubo e o volume do cubo (utilizando o "Princípio de Cavalieri"), visto que esse objeto é formado apenas por faces quadradas.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Utilize corretamente a fórmula da área do quadrado entendendo suas relações com equações incompletas do segundo grau;
- O professor pode perguntar qual o lado da piscina construída se sua área for de 9m² e posteriormente, se repetir a pergunta para 36m², 64m², 100m² etc.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Indicando correspondência entre as medidas dos lados da piscina e a área do fundo da mesma;
- Percebendo a relação da geometria com a radiciação e as equações de segundo grau incompletas;
- Partindo do raciocínio utilizado no cálculo da área do quadrado para obter o cálculo do volume da piscina em forma de cubo.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Comparando as medidas dos lados do quadrado com a área do mesmo;
- Associando o paralelismo e perpendicularismo entre retas;
- Criando outros exemplos em que a área não é um quadrado perfeito e verificando o funcionamento da fórmula e do raciocínio;
- Generalizando uma fórmula para calcular área de cubos.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- Demonstrar geometricamente que o círculo feito pelo compasso, valida a construção do quadrado e conserva suas propriedades;
- Provar que todo quadrado é um retângulo, mas a recíproca não é verdadeira;
- Mostrar o conceito e os casos de áreas para quadrados, retângulos e cubos;
- Instituir fórmulas para calcular áreas de retângulos (em particular, quadrados) e de cubos quaisquer;
- Exemplificar como encontrar a aresta de um cubo sabendo o seu volume, chegando assim a uma equação de terceiro grau e trabalhando também o conceito de raiz cúbica.

- **ATIVIDADE 2**

Tema: **Áreas e medidas**

9° ano do Ensino Fundamental

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Recursos para a experimentação: Lápis, caderno, papel milimetrado ou malha quadriculada e quadro negro.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- Obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas.

ATIVIDADE PROPOSTA

Um azulejista usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir 45 m^2 da parede da sua casa. Qual a medida do lado de cada azulejo?

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Desenhar o problema em malha quadriculada com as dimensões estabelecidas pelos próprios alunos;

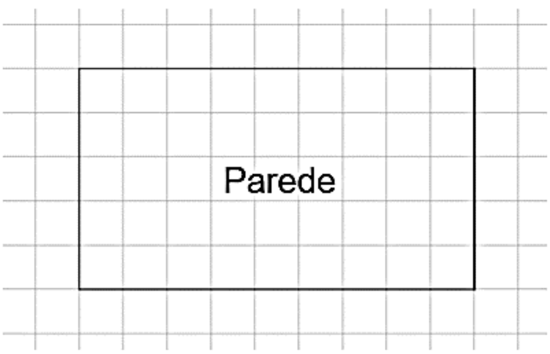


Figura 3 – Parede retangular desenhada na malha quadriculada.

- Transformar as medidas;
- Realizar os cálculos para descobrir a medida dos azulejos.

2) Os estudantes devem experimentar a construção na malha quadriculada para perceber relações e transformações possíveis.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Questionar quais as dimensões utilizadas no retângulo que representa a parede;
- Mostrar que existem várias maneiras de se representar um retângulo de 45m², uma vez que conhecem a forma que é calculada a área;
- Mostrar a eles que a área total da parede é a soma das áreas dos azulejos, desprezando-se os espaços entre eles;
- Comparar as estratégias utilizadas pelos diversos alunos na resolução do problema.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Perceba que esse é um problema que pode surgir em inúmeras situações de seu cotidiano;
- Experimentar calcular áreas de diversos formatos, fazendo estimativas de seu valor.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Percebendo que se os azulejos não fossem quadrados ou fosse considerado os espaços (rejuntes) entre eles, haveriam sobras;

- Operando com os sistemas de medidas;
- Realizando composição de áreas.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Comparando áreas e medidas;
- Efetuando outras construções de áreas não muito comuns para ver se é possível obtê-las através da soma das áreas internas.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito de área;
- Transformações no sistema de medidas;
- O fato de que a área de uma superfície plana sempre pode ser obtida pela soma de várias superfícies no interior da mesma;
- Algumas demonstrações para validar formalmente as hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 3**

Tema: **Composição de Áreas**
9° ano do Ensino Fundamental
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Lápis, caderno e quadro negro.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- Obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas;
- Ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

ATIVIDADE PROPOSTA

Uma certa cidade tem um terreno de formato retangular de $80m^2$, em que um lado tem 2m a mais que outro. O prefeito dessa cidade pretende construir uma praça nesse terreno, onde deverá haver duas passarelas perpendiculares dividindo a praça em 4 retângulos congruentes. Qual será a área ocupada por essas passarelas se elas tiverem 2m de largura?

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Definir área;
- Definir fórmula da área;
- Definir soma de áreas.

2) Os estudantes devem experimentar a construção para perceber relações e transformações possíveis.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Num primeiro momento, desenhar ou mostrar o desenho;

- Num segundo momento, perguntar se eles percebem alguma relação entre a área da passarela com a área da praça, uma vez que o polígono que representará a área da passarela não é convexo.

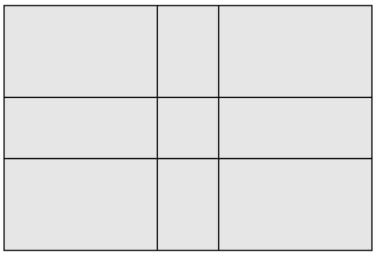


Figura 4 – Praça dividida por duas passarelas.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Perceba que há várias formas de achar a área da passarela;
- Crie fórmulas para isso.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Indicando correspondência entre os lados da passarela e os lados da praça;
- Resolvendo a equação de segundo grau para encontrar os lados da praça;
- Somando e subtraindo áreas para se obter a área da passarela.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Vendo que há uma estreita relação entre a geometria e as equações de segundo grau;
- Percebendo que podemos não só somar áreas, mas, também, subtraí-las;
- Percebendo que o valor negativo da raiz não pode ser solução.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- Que não existe medida negativa;
- Que álgebra e geometria andam sempre juntos na resolução de problemas;
- Que a equação de segundo grau pode ser vista como um problema de geometria;
- A soma de equações que se faz em sala de aula, pode estar representando a soma de áreas planas e que isso pode ser útil em seus cotidianos;
- Algumas demonstrações para validar formalmente hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 4**

Tema: **Construção de polígonos regulares**
9° ano do Ensino Fundamental.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Ambiente computacional – Cabri Géomètre ou Geogebra.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Ampliar e aprofundar sua compreensão das noções geométricas sobre incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para esclarecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

ATIVIDADE PROPOSTA

Experimentar se um hexágono regular, em ambiente computacional (Geobebra), pode ser contruído partindo de circunferências, retas e segmentos de retas.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Criar um segmento de reta;
- Marcar seu ponto médio com a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" do software;
- Com o auxílio da ferramenta "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos", construir três circunferências com centro nos três pontos do segmento.

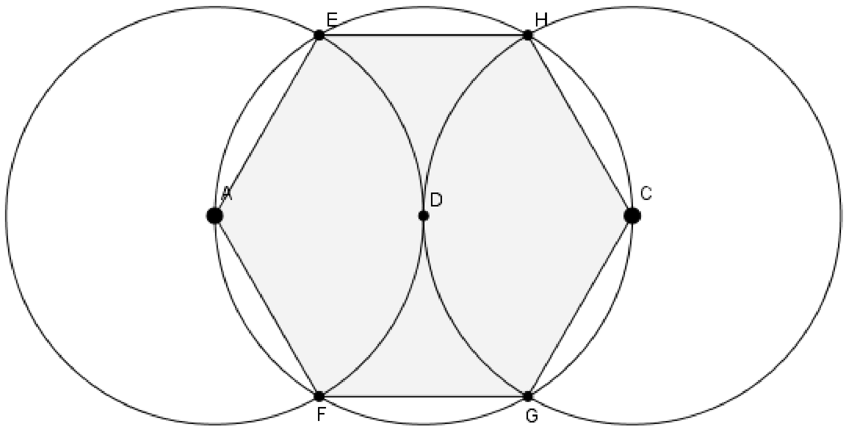


Figura 5 – Obtendo um hexágono regular.

2) Os estudantes devem experimentar a construção, movendo a figura e percebendo que pela maneira que a mesma foi construída, ela preserva as propriedades ao ser movimentada.

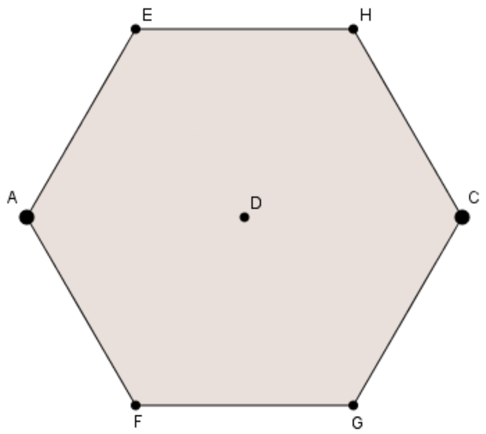


Figura 6 – Hexágono regular.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção.

Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Num primeiro momento, desenhar um hexágono no quadro com as ferramentas de desenho geométrico (régua e compasso).
- Num segundo momento, perguntar se eles percebem algo em comum com a construção feita em ambiente computacional e quais as vantagens do segundo ambiente;
- Depois o professor pode sugerir que os alunos calculem a área do hexágono utilizando a ferramenta “área”;
- Em seguida, pode-se sugerir que eles construam triângulos com a ferramenta “polígono” utilizando dois vértices consecutivos do hexágono e o seu centro e, depois, calculem a área (através da ferramenta “área”) de cada um desses triângulos, somando para conferir se o resultado da soma é igual à área do hexágono.

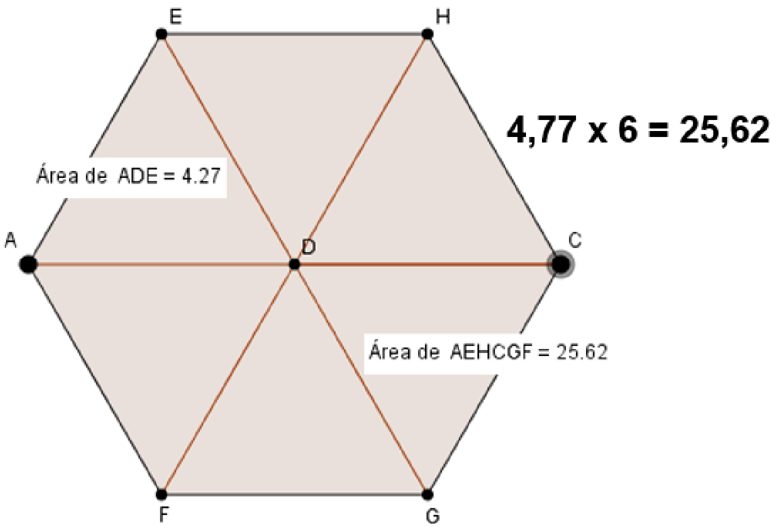


Figura 7 – Hexágono regular decomposto em triângulos.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Utilize corretamente as ferramentas do software, em particular as de construção de circunferências, ponto médio e segmentos de reta;

Ao experimentar as possibilidades de movimento e reconfiguração da construção espera-se que o estudante:

- Note e perceba que as deformações realizadas não podem produzir irregularidades ou, caso contrário, a figura não foi construída da maneira adequada, de forma que ao movê-la, não se perca suas propriedades.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Indicando correspondência entre as medidas dos segmentos do hexágono construído;
- Percebendo que a figura é um polígono regular;
- Associando o método de construção à definição de congruência de triângulos;
- Percebendo que a área total é a soma das áreas das partes em que a figura foi subdividida.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Percebendo que os lados do hexágono são iguais, pois são a base de triângulos isósceles congruentes;
- Percebendo as propriedades de um hexágono regular;
- Ampliando seu conhecimento de áreas de polígonos.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito e os casos de semelhança de triângulos;
- Relações dos triângulos isósceles com as circunferências;
- O fato de que os triângulos são isósceles por construção;
- Podemos usar circunferências para fazer inúmeros tipos de polígonos regulares;
- Algumas demonstrações para validar formalmente hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 5**

Tema: **Área do círculo**
9° ano do Ensino Fundamental
Duração: 4 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Ambiente computacional – Geogebra

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Ampliar e aprofundar sua compreensão das noções geométricas sobre incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para esclarecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

ATIVIDADE PROPOSTA

Experimentar se: “A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados sobre o ângulo reto é igual ao raio, e o outro à circunferência, do círculo” e deduzir uma fórmula para a área do círculo.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Definir uma circunferência;
- Definir como se calcula a área da circunferência e do triângulo;
- Construir uma circunferência por meio da ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”;
- Traçar um segmento de reta tal que seja o raio circunferência;
- Através da ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” descobrir o perímetro da circunferência e o seu raio;

➢ Construir um triângulo reto, no qual um dos lados sobre o ângulo reto possui a mesma medida do raio, e o outro do perímetro da circunferência.

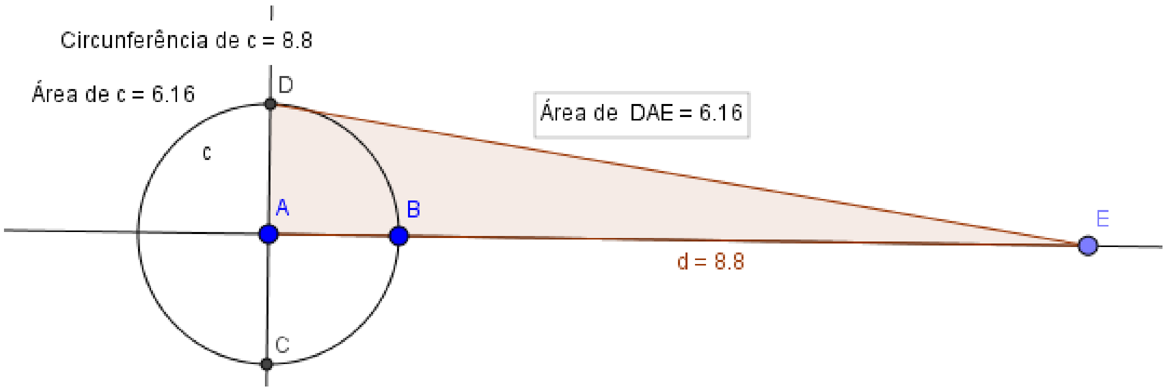


Figura 8 – O círculo e o triângulo retângulo.

2) Os estudantes devem experimentar a construção para perceber relações e transformações possíveis.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

➢ Mostrar o desenho e discutir as propriedades da imagem;
➢ Perguntar se eles percebem que a área do círculo é igual a área do triângulo reto;
➢ Deduzir a área do círculo pela fórmula da área do triângulo.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

➢ Utilize corretamente as ferramentas do software, em particular as de construção da circunferência e do triângulo retângulo.
➢ Ao experimentar as possibilidades de movimento e reconfiguração da construção espera-se que o estudante:
➢ Note que movendo as figuras, irá permanecer as mesmas relações entre as áreas.
➢ Depois de algum tempo de experimentação o professor pode tornar a atividade ainda mais interessante, pedindo para os alunos construírem outro

círculo e calcularem sua área sem usar a ferramenta “área” diretamente no círculo.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Estabelecendo maneiras de se inscrever polígonos regulares na circunferência. O professor pode orientar como realizar tais construções no GeoGebra. Pode-se auxiliar a construção de um tipo de polígono regular, como o quadrado, e deixar que eles façam o mesmo com outros, como forma de instigar o senso investigativo;

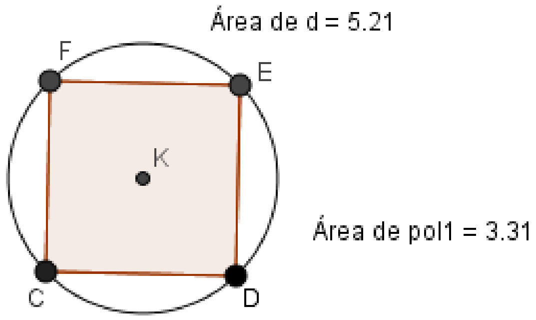


Figura 9 – Área do quadrado inscrito.

- Percebendo que a área dos polígonos construídos se aproxima da área do círculo que o circunscreve. O professor deve solicitar para que os estudantes sempre que construam um polígono regular inscrito na circunferência, utilizem a ferramenta “área” e calculem a área do polígono e do círculo, comparando-as como nos exemplos abaixo:

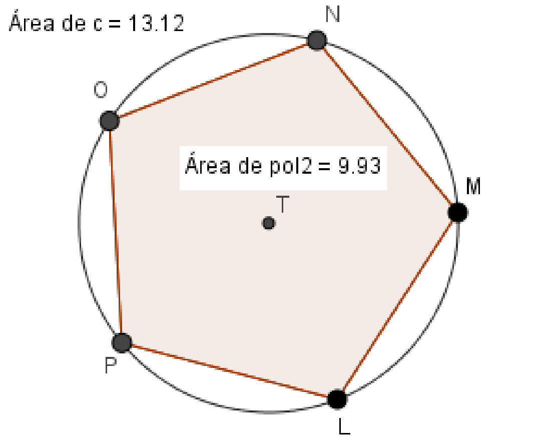


Figura 10 – Pentágono inscrito.

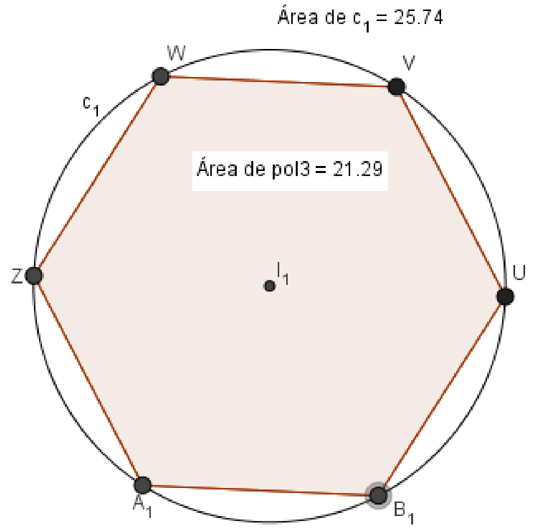


Figura 11 – Hexágono inscrito.

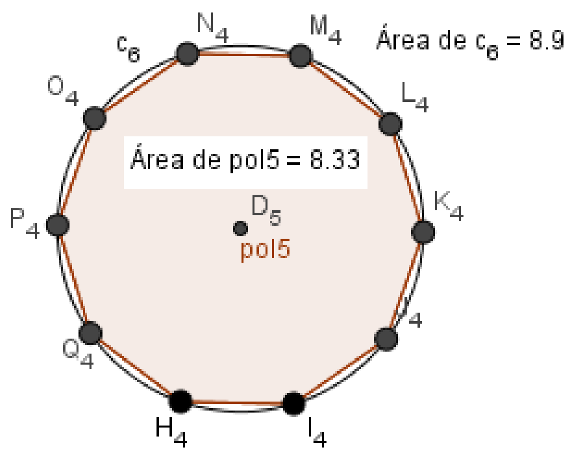


Figura 12 – Decágono inscrito.

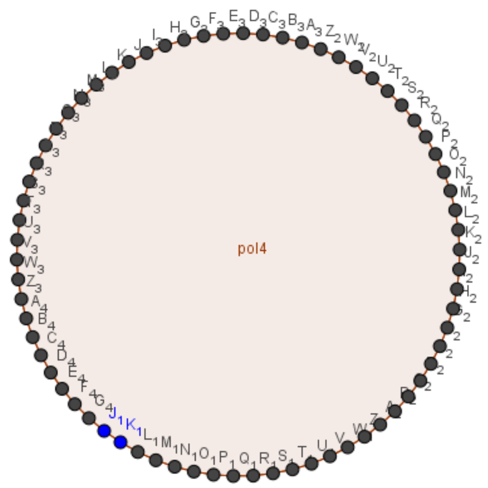


Figura 13 – Polígono de 70 lados inscrito.

- Observando que para um polígono de 70 lados, a observação já sugere que sua área seja muito próxima da área do círculo.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Comparando as medidas das áreas dos polígonos inscritos na circunferência e o círculo que circunscreve esses polígonos;
- Deduzindo a área do círculo ao perceber que o mesmo pode ser concebido, intuitivamente, como um polígono de infinitos lados.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito de área de circunferência e triângulo;
- Através de atividades de magnificação e de variação do número das casas decimais, colocar o estudante diante do fato de que a informação do computador é limitada à precisão utilizada;
- Que pode se achar uma estimativa para a área do círculo, usando as áreas dos polígonos regulares;
- O fato de que todos os polígonos regulares podem ser decompostos em triângulos isósceles e, se o círculo pode ser concebido como um polígono regular de infinitos lados, então pode-se calcular sua área, calculando as áreas dos infinitos triângulos que compõem esse polígono;
- Algumas demonstrações para validar formalmente algumas das hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 6**

Tema: **Construção de um trapézio**
9° ano do Ensino Fundamental
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Ambiente computacional – Geogebra

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Ampliar e aprofundar sua compreensão das noções geométricas sobre incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para esclarecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

ATIVIDADE PROPOSTA

Experimentar se um trapézio pode ser composto por um número ímpar de triângulos em ambiente computacional (Geogebra) a partir das técnicas do desenho geométrico.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Criar um segmento de reta;

Com auxílio da ferramenta “círculo definido pelo centro e um de seus pontos”:

- Construa uma circunferência com centro no ponto A, passando por C;
- Construa outra circunferência com centro em C, passando por A;
- Construa outra circunferência com centro em D, passando por C;
- Construa outra circunferência com centro em B, passando por D;
- Escolha as intersecções superiores ou inferiores entre as circunferências de raio AC e CA e entre as circunferências de raio DC e BD;
- Chame as intersecções do passo anterior de E e F, respectivamente;
- Una os pontos A e E; E e F; e F e D.

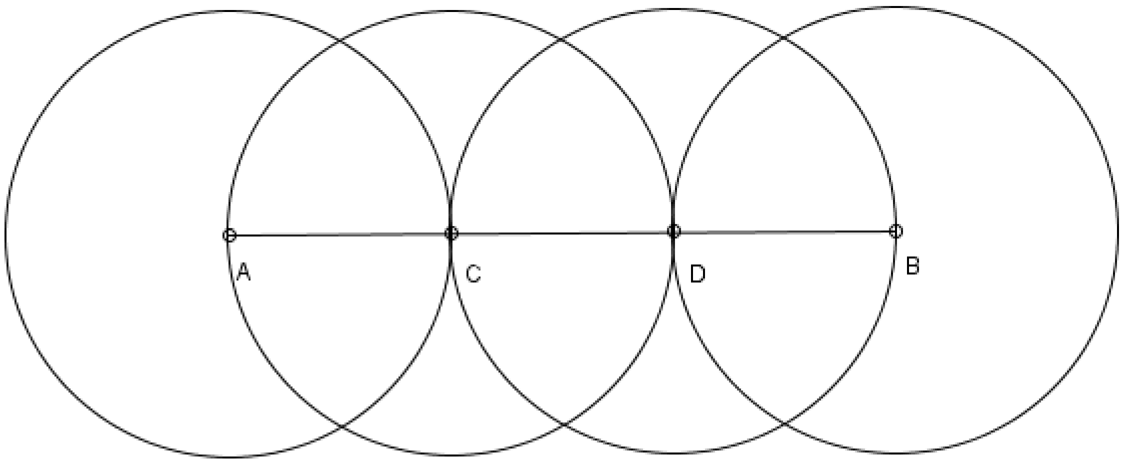


Figura 14 – Constuindo o trapézio.

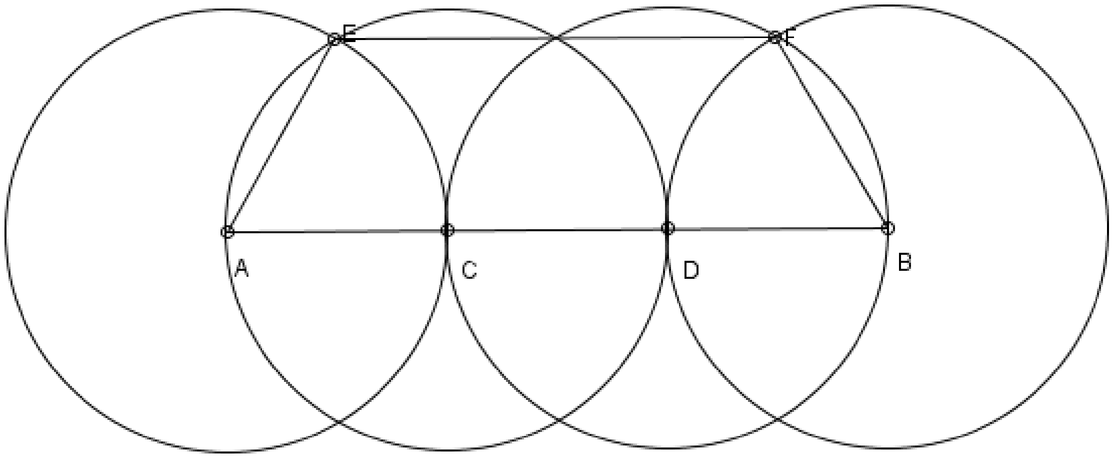


Figura 15 – Finalizando a construção do trapézio.

2) Os estudantes devem experimentar a construção para perceber relações e transformações possíveis.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Num primeiro momento, ocultar os objetos desnecessários e escrever ao lado da sua construção o nome da figura geométrica que eles desenharam. Perguntar o que eles podem dizer sobre essa figura.
- Num segundo momento, perguntar se os alunos percebem as propriedades de um trapézio.

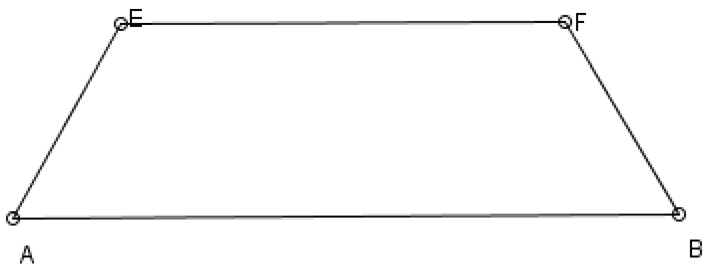


Figura 16 – Trapézio

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Utilize corretamente as ferramentas do software, em particular as de construção de triângulos, circunferências e segmentos de reta;

Ao experimentar as possibilidades de movimento e reconfiguração da construção espera-se que o estudante:

- Perceba que as deformações realizadas não podem alterar as propriedades dos triângulos e nem tão pouco do trapézio formado por eles. Se essas deformações produzirem irregularidades, a construção não estará bem feita.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Indicando possíveis correspondências entre os triângulos que formam o trapézio;
- Estabelecendo a possível semelhança entre esses triângulos;
- Associando o método de construção à definição da semelhança;
- A partir dessas conclusões, dizer quando o trapézio é isóscele ou não. Se isso tem a ver com os tipos de triângulos formados ou não.

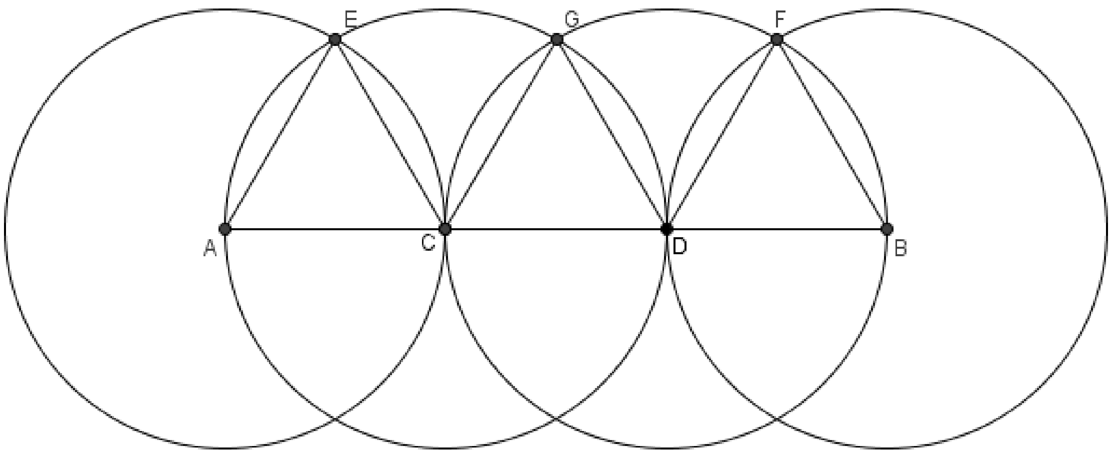


Figura 17 – Decompondo o trapézio em triângulos.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Comparando as medidas dos ângulos dos triângulos;

- Percebendo o paralelismo das bases do trapézio.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito e os casos de semelhança de triângulos;
- Suas relações com paralelismo;
- As propriedades dos trapézios;
- Demonstrar que com um número ímpar de triângulos isósceles podemos construir um trapézio isóscele;
- Algumas demonstrações para validar formalmente algumas das hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 7**

Tema: **Polígonos formados por dobraduras**
9° ano do Ensino Fundamental
Duração: 3 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Dobraduras com papel sulfite.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Ampliar e aprofundar sua compreensão das noções geométricas sobre incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para esclarecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais;
- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções e figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança.

ATIVIDADE PROPOSTA

Analisar e tirar conclusões acerca dos polígonos regulares contidos no interior da caixa.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Pintar os polígonos após a realização das dobras no papel para facilitar a visualização;
- Construir uma caixa de papel através dessas dobraduras em conjunto com o professor;

2) Os estudantes devem experimentar a construção para perceber relações e transformações possíveis.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Num primeiro momento, mostrar o fundo da caixa construída e dizer uma das relações que ela possui.
- Num segundo momento, incentivar os alunos a descobrir quais as outras relações contidas na mesma.

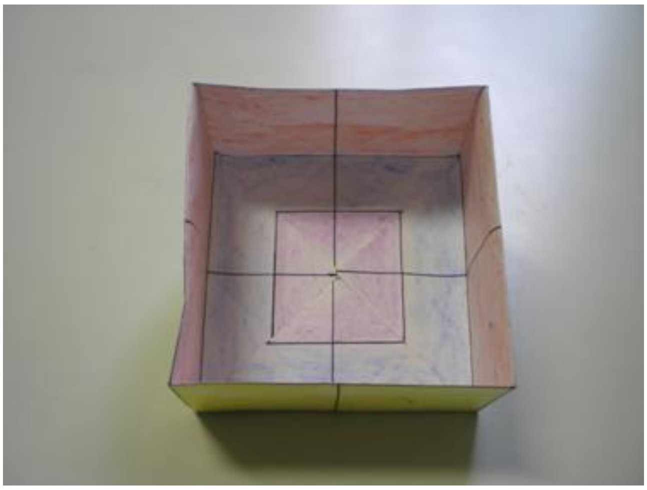


Figura 18 – Caixa feita por dobraduras.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Perceba as relações de congruência, paralelismo e perpendicularismo contidos no interior da caixa, bem como os polígonos que estão inscritos nela.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Indicando correspondência entre os triângulos, quadrados, e ângulos do interior da caixa;
- Estabelecendo a semelhança e congruência entre os triângulos;
- Associando o método de construção à definição de congruência.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Comparando as medidas dos polígonos;
- Estabelecendo casos de congruência e semelhança de triângulos.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito e os casos de semelhança de triângulos;
- Suas relações com paralelismo;
- Algumas demonstrações para validar formalmente algumas das hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 8**

Tema: **Áreas com dobraduras**

9° ano do Ensino Fundamental

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Recursos para a experimentação: Dobraduras com papel sulfite.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções e figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança.

ATIVIDADE PROPOSTA

Analisar e tirar conclusões, através de experimentação, das áreas dos polígonos regulares contidos no interior da caixa.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Pintar os polígonos após a realização das dobras no papel para facilitar a visualização;
- Construir uma caixa de papel através dessas dobraduras em conjunto com o professor;
- Expor no quadro as fórmulas do quadrado, retângulo, triângulo e trapézio.

2) Os estudantes devem experimentar a construção da figura 18 para perceber relações entre os polígonos.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Num primeiro momento, mostrar no fundo da caixa construída a área do quadrado maior;
- Num segundo momento, perguntar como eles podem calcular essa área através dos polígonos contidos nesse quadrado.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Perceba que podemos deduzir fórmulas para obter a área do quadrado maior partindo das figuras que estão contidas no mesmo.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Indicando correspondência entre as áreas das figuras contidas na caixa;
- Estabelecendo relações de congruência;
- Igualdade entre áreas.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Percebendo que no processo de construção as áreas de algumas figuras ficaram iguais no interior da caixa;
- Percebendo que a soma delas é igual a área do interior da caixa;
- Produzindo fórmulas de dedução para essas áreas.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito de área;
- Composição de áreas;

- Algumas demonstrações para validar formalmente algumas das hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

- **ATIVIDADE 9**

Tema: **Volume a partir de dobraduras**
9° anodo Ensino Fundamental
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Recursos para a experimentação: Dobraduras com papel sulfite.

OBJETIVO GERAL (PCNs)

Nessa atividade o aluno deverá ser capaz de:

- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções e figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.

ATIVIDADE PROPOSTA

Construir uma caixa com dobraduras e verificar se é possível determinar o volume da caixa através de cubos no interior da mesma.

ORGANIZAÇÃO

1) O procedimento de construção será feito em conjunto com o professor e tem as seguintes etapas:

- Pintar os polígonos após a realização das dobras no papel para facilitar a visualização;
- Construir uma caixa de papel através com essas dobraduras em conjunto com o professor;

- Construir cubos com lados do tamanho dos quadrados contidos no fundo da caixa.

2) Os estudantes devem experimentar a construção para perceber quantos cubos cabem dentro dessa caixa.

3) Após algum tempo de experimentação o professor deve conversar com a turma e verificar se alguém notou padrões, relações ou algo de interessante na construção. Dependendo das respostas, para estimular/provocar a turma o professor pode:

- Colocar o cubo no centro da caixa e pedir para o aluno verificar quantos cubos pode determinar o volume dessa caixa.

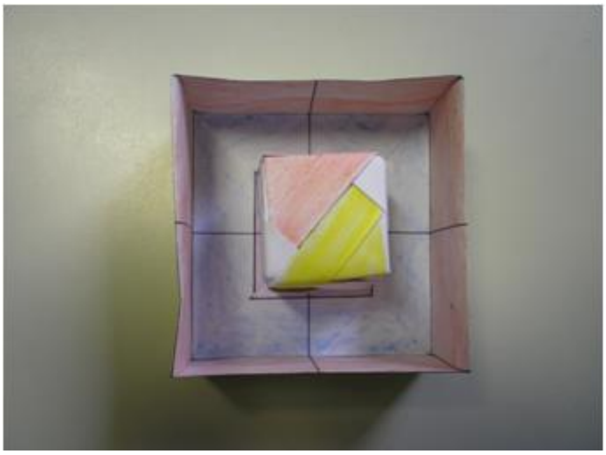


Figura 19 – Um cubo dentro da caixa.

Figura 20 – Dois cubos dentro da caixa.

Figura 21 – Três cubos dentro da caixa.

Figura 22 – Quatro cubos dentro da caixa.

AÇÕES POSSÍVEIS

Durante o processo de construção, espera-se que o estudante:

- Construir a caixa conservando as propriedades de congruência;
- Construir os cubos de forma correta.

FORMULAÇÕES POSSÍVEIS

Espera-se que estudante formule hipóteses:

- Verificando se o volume desses cubos pode determinar o volume da caixa;
- Estabelecendo a semelhança entre os quadrados do interior da caixa;
- Percebendo a relação entre área e volume.

VALIDAÇÃO

Espera-se que estudante valide suas hipóteses principalmente:

- Vendo que quatro cubos compõem o volume da caixa;
- Percebendo que se soubermos o volume desses cubos menores podemos definir o volume da caixa através de uma simples soma de volumes.

INSTITUCIONALIZAÇÃO (CONSOLIDAÇÃO)

Ao consolidar em aula os conhecimentos construídos por estudantes e professor ao longo da atividade, o professor pode sistematizar:

- O conceito de volume;
- Suas relações com a área;
- Construir estratégias variadas para o cálculo de volume de um sólido geométrico;
- Obter fórmulas para o cálculo de volume;
- Algumas demonstrações para validar formalmente algumas das hipóteses/afirmações formuladas durante a investigação.

3.2 A AVALIAÇÃO EM ATIVIDADES DE EXPERIMENTAÇÃO

As concepções dos autores estudados nesse trabalho e nossas vivências em sala de aula nos levam a acreditar que, quando o sujeito utiliza os próprios sentidos para obter conhecimento, suas concepções acerca do objeto de estudo podem ser aprimoradas. Todavia, mesmo com todo o potencial das atividades experimentais, percebemos que ainda é um desafio para o docente interessado adotar essa metodologia nas aulas, mostrar que a nota (quantidade) não é mais importante do que o conhecimento.

Grande parte dos discentes atuais ainda mantém essa concepção, até porque o próprio sistema escolar condiciona o aprendiz a relacionar esse tipo de avaliação como prova de sua capacidade, "tendo em vista que o seu destino, enquanto aluno, depende da nota obtida na prova" (CAVALLARI, 2008, p. 98). A avaliação sob essa perspectiva metodológica torna-se agradável, por deixar que o aluno experimente e registre suas próprias conclusões acerca dos objetos de estudo, substituindo (momentaneamente) as provas formais que podem representar em alguns momentos um ambiente de nervosismo e tensão. Lembrando que nossa proposta não é desprezar completamente as provas formais ou o ensino tradicional. Temos consciência de sua importância, mas criar também espaços para o despertamento de outras habilidades que o estudante pode desenvolver e o professor deve estar atento para avaliá-lo qualitativamente também.

Percebemos que a investigação ajuda a recuperar o espírito da Matemática que, desde os primórdios da história dessa área do conhecimento, era baseada na intuição e experiência. Propor o fomento desses dois elementos nas aulas foi a intenção da nossa pesquisa, já que ambos podem estimular a obtenção de conhecimentos baseados na observação, manipulação, testes e verificação de hipóteses, semelhantemente à maneira como os antigos matemáticos obtinham suas descobertas. Posteriormente, também pode ser oportuno incentivar os sujeitos na apresentação de resultados e no argumentar matematicamente com colegas e professor, ou seja, a agir como autênticos matemáticos.

Esse método de ensino permite avaliar processualmente o aluno na resolução de situações-problemas, mostrando aos educandos que existem variadas atitudes implicadas nessas atividades. Dessa maneira, estamos diante de uma forma muito poderosa de se construir conhecimento, aumentando a autoconfiança e autoimagem do estudante que investiga. Entretanto, podemos perceber cotidianamente que há uma forte tendência nos alunos ao comodismo nas aulas, constituindo-se assim meros espectadores dos conteúdos expostos pelo professor. Isso pode ser provocado até mesmo pela estrutura formalista que tem sido preservada em muitas instituições de ensino atuais e, inclusive, nas universidades.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um modelo mais completo de curso de licenciatura em Matemática poderá ser aquele que se preocupa mais com a formação de profissionais que estejam capacitados a não só ensinar gometria, senão, principalmente, a utilizar outros métodos para esse ensino, internalizando e exteriorizando em sala de aula estratégias que possam promover um aprendizado mais significativo desses conteúdos para os alunos. Para Lorenzato (2006, p. 10) "é inconcebível um bom curso de formação de professores de matemática sem LEM". É nesse ambiente que os futuros educadores seriam estimulados para praticar propostas como as supracitadas nesse trabalho. Esse estudo pode contribuir para docentes de Matemática que se interessam constantemente pela busca por "despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo" (PCN, 1998, p. 122).

Quando o professor promove uma aula de investigação com o aluno, ele também está fazendo uma investigação de seu próprio trabalho. Portanto, não há um caminho certo a ser seguido. Não há um método melhor do que outro de promover nos alunos e professores as atitudes e competências necessárias ao processo investigativo. O próprio docente irá descobrir com a prática os "melhores caminhos" para que esse tipo de atividade se torne o mais eficiente possível.

Observamos com este trabalho que em meio às investigações podemos percorrer por caminhos que não estavam previstos anteriormente, mas que podem abrir novos horizontes, fazendo-nos descobrir outras coisas semelhantes ou até mesmo diferentes daquilo que queríamos, mas que são importantes para a compreensão estrutural da matemática. Vale ressaltar que a maneira experimental com que propomos as atividades, refletem características que são mais antigas do que a própria matemática e que sempre estiveram presentes na utilização prática da mesma. Logo, o ato de experimentar nas investigações matemáticas é uma forma poderosa de auxiliar a construção do conhecimento e sua aplicação.

As aulas de investigação podem ser de grande valia para melhorar a qualidade do ensino tradicional e desafiadoras para a prática docente. Essas aulas caracterizam-se por uma grande margem de imprevisibilidade, exigindo do professor flexibilidade e muito conhecimento matemático para lidar com as situações novas que, com grande probabilidade, irão surgir.

A sequência de atividades proposta no seio deste estudo pode contribuir para o professor que almeja inserir em suas aulas a prática experimental. Elas sugerem um começo, mas não são o fim a se atingir. Esse docente pode utilizar a criatividade para propor inúmeras outras atividades, introduzindo conteúdos já conhecidos de uma forma diferenciada e, possivelmente, mais atraente para o principal sujeito pelo qual todo o sistema educacional trabalha incansavelmente: o aluno.

5 REFERÊNCIAS

BASTIAN, Irma Verri. **O Teorema de Pitágoras**. 2000. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC, 1998.

CRUZ, Josinaldo dos Santos. **O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2015. 67 p.

CAVALLARI, Juliana Santana. **Representações de avaliação formal e a constituição da identidade do aluno**. In: Dossiê: Identidade e Educação. São Paulo: EDUSF, 2008. v. 26, n.2. p. 93-102. Disponível em: <http://www.saofrancisco.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/RevistaHorizontes_26_Num_2%5B12995%5D.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2016.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática**: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999. 227p.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação),Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LAUGIER, A.; DUMON, A. **Ensinar ciências físicas ao lado dos jovens estudantes**: Qual epistemologia? Através de qual procedimento? 1998. 11p.

LIMA, Maria Cristina Ponciano de; TINANO, Marilene Turíbia de Rezende. **Matemática**: 7S/8A ensino fundamental: Livro 2. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2009. 95p.

LIMA, José Gutembergue. **Por que alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em Gemetria Plana?** Brasília, 2016. 154 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, 2016.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006a. 140 p. (Coleção Formação de Professores)

______. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sergio (org). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006b, p. 3-37. (Coleção Formação de Professores)

MENDES, Iran Abreu. In: MIGUEL, Antonio. *et al*. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. rev. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. cap. 2.

MOREIRA, A. C. S.; PENIDO, M. C. M. Sobre as propostas de utilização das atividades experimentais no ensino de física. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2009, Florianópolis. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/abrapec/viempec/7enpec/pdfs/814.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2015.

NEVES, Margarida Saraiva; CABALLERO, Concesa; MOREIRA, Marco Antonio. Repensando o papel do trabalho experimental, na aprendizagem da física, em sala de aula – Um estudo exploratório. In: **Investigações em Ensino de Ciências**, 2006. p. 383-401. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID159/v11_n3_a2006.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2015.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994. 210 p.

POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1953. 196 p.

PONTE, J. P., BROCARDO, J. OLIVEIRA. H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2005.

______. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3. Ed. rev. Ampl. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SILVA, Raquel Correia da; SILVA, José Roberto da. O papel do laboratório no ensino de matemática. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <http://www.sbem.com.br/ files/viii/pdf/07/RE75541815487.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2011.

SOARES, Luís Havelange. **Aprendizagem Significativa na Educação Matemática**: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica. 2009. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

VASCONCELOS, Elinalva Vergasta de. **Laboratório de ensino de Matemática**: uma experiência na UFBA. Disponível em: <http://www.lema.ufba.br/historico.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2011.

ZARO, Milton; HILLEBRAND, Vicente. **Matemática Experimental**. São Paulo: Editora Ática, 1992. 119p.

Disponível em: <http//www.inrp.fr/lamap/pedagogie/articles/BUPenseigner_sciences.htm>. Acesso em: 10 ago. 2016.