Vanderson Alamino

A Interdisciplinaridade entre a Geometria e o Esporte

Dissertação apresentada por **Vanderson Alamino** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
2016.

A318 Alamino, Vanderson.
A Interdisciplinaridade entre Geometria e Esporte / Vanderson Alamino. - Niterói, RJ: [s.n.], 2016.

81 f.

Orientador: Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) - Universidade Federal Fluminense, 2016.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria 3. Esporte . I. Título

CDD: 510.7

Vanderson Alamino

A Interdisciplinaridade entre a Geometria e o Esporte

Dissertação apresentada por **Vanderson Alamino** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Geometria.

Banca Examinadora

Aprovada em 18/11/2016:

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Milena Cortés - Membro
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Magda Kaibara - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Paulo Roberto Trales - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói
2016.

DEDICATÓRIAS

A Deus por ser minha luz.

À minha esposa e filhas que me apoiaram incondicionalmente, sendo fonte de inspiração.

Aos meu pais que nunca mediram esforços para o melhor na minha formação

Ao meu orientador, professor Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo.

Aos meus professores, meus mestres que passaram em toda minha vida.

A toda minha família que direta ou indiretamente me apóiaram.

Aos colegas do Mestrado, pelo companheirismo e disponibilidade.

E a todos que sempre torcem por mim: Muito obrigado!

O rio atinge seus objetivos porque aprendeu a contornar obstáculos.
Lao-Tsé

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ser minha luz, e que pensar nele obtive a força para superar todas as adversidades e chegar até aqui;

À minha esposa Danielly, por sempre estar do meu lado nessa caminhada, me incentivando e ajudando na minha ausência;

Às minhas filhas Ana Clara e Isabela, pois suas presenças eram um combustível extra nessa jornada;

Aos meus Pais, pois sem eles não seria nada;

Ao meu professor e orientador Dr Mitchael Alfonso Plaza, pela parceria, pela disponibilidade, pela sabedoria, pela orientação, pela calma, pela fonte principal e inspiradora;

Aos meus alunos, por tudo que me ensinaram ao longo dos meus dezoito anos de magistério;

Aos meus colegas do mestrado, na parceria exercida ao longo do curso;

E a todos os Familiares e Amigos, que torceram por mim, e que de alguma forma me ajudaram e motivaram.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo mostrar como o esporte pode estar associado ao ensino da matemática, podendo ser um tema norteador por excelência.
Nesta abordagem matemática, tanto no ensino médio como no ensino fundamental, trabalhamos alguns assuntos teóricos específicos como: escala, classificação de triângulos, teorema de Pitágoras, lei dos cossenos, arco capaz e polígono de Realeaux, bem como alguns esportes populares como o futebol, o vôlei, o basquete e o ciclismo.
Apresentamos como ilustração, tentando que seja mais um fator de associações motivadoras, uma breve parte histórica sobre os referidos esportes.
Selecionamos, também, uma série de atividades didáticas que têm o esporte como temática motivadora.
Ainda apresentamos um banco de questões com problemas encontrados em concursos, vestibulares e no ENEM, no qual os esportes estão relacionados, reafirmando a relevante associação da matemática ao esporte.
Palavras Chaves: Geometria e Esportes.

ABSTRACT

This dissertation aims at showing how sports can be associated with the learning of Mathematics, being a guiding theme for excellence.
In this maths approach, both in high school and in elementary school, we work with some specific theoretical issues, such as: scale, classification of triangles, Pythagorean theorem, law of cosines, arcocapaz and polygon of Realeaux, and also some popular sports like football, volleyball, basketball and cycling.
We are presenting as an illustration, trying to make it a way of motivating students, a brief historical overview of the sports mentioned previously.
Furthermore, we have selected some didactic activities involving sports.
In addition, we are showing a list of exercises with subjects easily found in some examinations, vestibular, ENEM, in which sports are related to them, in an attempt to reassert the relevant relationship between Maths and sports.

Key words: Geometry, Sports.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A escolha do tema a ser abordado originou-se do fato de ter sido o Brasil sede da Copa do Mundo recentemente (2014) e das Olimpíadas neste ano (2016). Tentamos, por isso, aproveitar o clima emocional-social que tem atribuido ao assunto, nestes últimos tempos, acentuada evidência.
Outro fator de extrema relevância foi a consideração dos benefícios não só ao aprendizado em nível intelectual, mas também ao estímulo à tão salutar prática esportiva, em geral. Estamos, assim, levando em consideração o desenvolvimento humano em diferentes áreas cognitiva, emocional e física. Nos jovens, o gosto pela matemática poderia ser estimulado a partir da associação com a prática esportiva que é agradável à maioria deles.

De acordo com o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) de matemática temos **"A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos"**. Considerando esse texto legal(o PCN), não mais hesitamos quanto à escolha definitiva do tema, mesmo nos deparando com significativas dificuldades na realização do trabalho devido à carência de material que associe a matemática ao esporte - fato que surpreende pois esse assunto é altamente atrativo sobretudo para a populaçao estudantil jovem cuja aprendizagem de certo se beneficiaria com a correlação dos dois campos de interesse.

Para dar início ao trabalho foram feitos contatos através de e-mail, com as confederações CBF (Confederação Brasileira de Futebol), CBV (Confederação Brasileira de Volei), CBB (Confederação Brasileira de Basquete) e CBC (Confederação Brasileira de Ciclismo), com o objetivo de esclarecer dúvidas sobre as medidas das quadras e seus acessórios. Obtivemos sucesso apenas com a CBV (Confederação Brasileira de Vôlei), que respondeu ao e-mail de forma superficial. Foram feitas pesquisas também na Internet, que pudessem comprovar que o esporte pode ser um grande aliado ao ensino da matemática.

Continuando com o trabalho de pesquisa, foram analisados também livros no segundo capítulo desta dissertação, referentes ao ensino médio e ao ensino fundamental para se deixar claro como é feita a abordagem da associação da matemática com o esporte. Neles encontramos o esporte sendo trabalhado na introdução de alguns assuntos e exercícios que usaram o esporte para conduzir a alguns estudos. Apesar de estar presente em todas as séries, achamos que deixa a desejar a exploração do tema que se presta para desencadear o incentivo no trato de muitas questões.

No terceiro capítulo, é contada a história e apresentadas as regras de alguns esportes, como futebol, vôlei, basquete e ciclismo. Assim podemos perceber o quanto a matemática e o esporte estão relacionados, pois em todos os esportes temos nas regras o aparecimento da matemática.

No quarto capítulo, são abordados alguns conceitos matemáticos como escalas, triângulos e suas classificações, teorema de Pitágoras, lei dos cossenos, arco capaz e polígono de Realeaux, sendo elaboradas suas teorias e definições.

No quinto capítulo, analisam-se esquemas táticos do futebol e do basquete sob um olhar matemático, lembrando pontos como: mudança de campo de jogo, alteração da quantidade de jogadores e exame dos arremessos do basquete. Enfim, aí, brincando com as regras, conseguimos abordar vários conteúdos e trabalhar a matemática de uma forma lúdica e bem interesante.

No sexto capítulo, várias atividades foram elaboradas envolvendo a matemática e o esporte, inclusive atividades extra-classe.Algumas delas, aplicadas e avaliadas, mostra o quanto é possível e viável trabalhar esses assuntos juntos.

No último capítulo, um banco de questões foi criado somente com problemas (encontrados em concursos, vestibulares e ENEM)que usavam o esporte como temática. Achamos uma quantidade significativa deles e isso reafirma o quanto o esporte pode ajudar no ensino-aprendizagem e avaliação da matemática.

Capítulo 2

Relação da Matemática com os Esportes na Escola

Indicam os PCNs o questionamento da realidade com a formulação de problemas cujas resoluções envolvam a utilização de pensamento lógico, da criatividade, da intuição e do espírito critico; ainda, a seleção de procedimentos cuja adequação seja devidamente verificada. Portanto, relacionar matemática aos esportes é altamente desafiador: provocar o interesse pelo desenvolvimento intelectual e pela prática esportiva com todos os benefícios à formação plena do adolescente que ambos oferecem.

2.1 Análise de Livros

Escolhemos as coleções "Matemática"dos autores Imenis e Lellis para o ensino fundamental e a coleção "Matemática"do autor Manoel Paiva para o ensino médio. Investigamos se nos livros didáticos aparecem os esportes como estimulantes ao aprendizado; pudemos constatar que, mesmo presentes nos livro de todas as séries, bem poucos tópicos eram introduzidos por meio dos esportes, porém, de maneira superficial e,às vezes sem uma interligação lógica. Enfim, poderiam aproveitar melhor o tema esportivo. Além disso, constatamos que existem muitos exercícios propostos que são aplicações dos esportes.
A seguir detalhamos o comentado acima.

2.1.1 Ensino Fundamental

Coleção: Matemática
Autores: Imenes e Lellis
Editora: Moderna

A seguir descrevemos os assuntos que tratam o esporte em cada ano escolar:

- 6º ano: Usa-se o futebol para trabalhar ângulos, área do retângulo e unidades de medida.

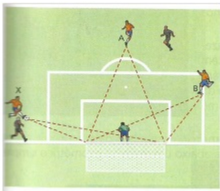


Figura 2.1: Exer. 20, pág 87

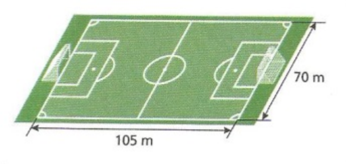


Figura 2.2: Exer. 22 pág 230

- 7º ano: Usa o futebol para trabalhar operações com números inteiros, estatística, construção de gráfico de setores, gráfico de barras e operações com o conjunto dos números racionais. Usa a corrida de automóveis para trabalhar grandezas, unidade de velocidade, proporcionalidade e regra de três.

Figura 2.3: Exer. 25, pág 157

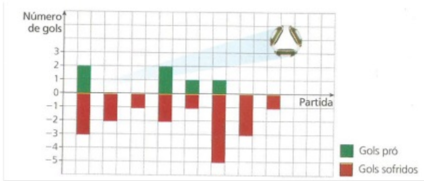


Figura 2.4: Exer. 15, pág 205

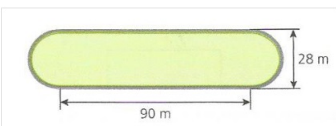
- 8º ano: Usa a corrida de automóveis e trabalha cálculo de menor múltiplo comum. Usa o futebol e trabalha leitura de dados e cálculo de porcentagens.

Figura 2.5: Exer. 31 pág 24

Time	Porcentagem
Flamengo	19%
Corinthians	12%
Palmeiras	8%
São Paulo	7%
Vasco	5%
Cruzeiro	3%
Grêmio	3%
Santos	3%
Internacional (RS)	2%
Outros	15%
Nenhum time	23%

Figura 2.6: Exer. 29 pág 185

- 9º ano: Usa o futebol para introduzir o cálculo de probabilidade. Usa o atletismo para trabalhar o conceito de perímetro e comprimento da circunferência. Usa o ciclismo para trabalhar o comprimento da circunferência. Usa a canoagem para trabalhar conceito de velocidade e equações fracionárias.



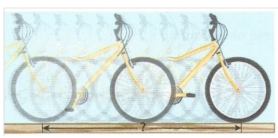


Figura 2.7: Exer. 46 pág 200, Exer. 47 pág 200 e Exer. 20 pág 276.

2.1.2 Ensino Médio

Coleção: Matemática
Autor: Manoel Paiva
Editora: Moderna Plus

- 1ª série: Usa o Basquete para introduzir a noção de conjuntos e o atletismo para introduzir o conceito de módulo de um número. Usa o futebol para trabalhar raízes de uma função, o atletismo para trabalhar equações modulares, o arco e flecha para trabalhar equações modulares, o basquete para trabalhar o conceito de sequência e o atletismo para trabalhar equações trigonométricas.

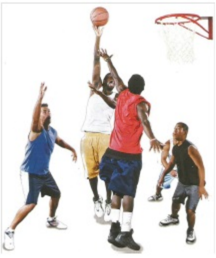



Figura 2.8: Introdução de conceitos

- 2ª série: Usa o futebol para introduzir sistemas lineares. Usa o futebol para trabalhar matrizes, sistemas lineares, o princípio fundamental da contagem e combinação. Usa a natação para trabalhar arranjo simples, as olimpíadas para trabalhar permutação, o atletismo para trabalhar combinação e o voleibol para trabalhar probabilidade.



Figura 2.9: Exer. 36 pág 322, Exer. 42 pág 325 e Exer. 47 pág 344.

- 3ª série: Usa o futebol para introduzir médias e a elipse. Usa o motociclismo para introduzir as cônicas. Usa o atletismo para trabalhar estatística, geometria analítica e polinômios. Usa o automobilismo para trabalhar elipse.


Figura 2.10: Introdução de conceitos

2.2 Proposta de Ensino

Nossa proposta de ensino consiste em utilizar o esporte, principalmente aqueles mais populares no pais, como motivação no aprendizado da matemática. Com este fim, destacamos alguns conteúdos com suas respectivas séries, no quais podemos trabalhar o esporte e a matemática associados.

Quando começamos algum assunto contando uma história, conseguimos atrair o interesse dos alunos. Essas narrativas fazem com que a aula ganhe não somente em conteúdo matemático, mas, também, em conhecimento, de uma forma mais ampla, pois proporciona também cultura geral e posição temporal. Após este início, podemos aproveitar para falar das regras, estratégias e outras coisas nos quais a matemática está presente, e, aí, sim, explorar bem o tema.

2.2.1 Ensino Fundamental

6º ano: construção de tabelas, operações com números racionais não negativos, cálculo de área de retângulos e quadrados

7º ano: operações com racionais, proporcionalidades, simetria, porcentagens

8º ano: classificação de triângulos e cálculo de áreas

9º ano: função linear, função quadrática e trigonometria.

2.2.2 Ensino Médio

1ª série: função exponencial, função logarítmica, progressões aritméticas e geométricas

2ª série: análise combinatória, probabilidade, matrizes e sistema linear.

3ª série: geometria analítica e álgebra linear.

Capítulo 3

Esportes

Neste capítulo abordaremos a origem e as regras de cada esporte escolhido como tema. Esperamos, com isso, possibilitar a motivação e o desenvolvimento de algum assunto matemático a fim de tornar mais lúdico o aprendizado. Os esportes escolhidos foram o futebol, o basquete, o vôlei e o ciclismo, por serem de grande apelo popular e estarem incluídos entre os esportes olímpicos.

3.1 Futebol

O futebol é um dos esportes mais populares no mundo. Praticado em centenas de países, este esporte desperta grande interesse em função de sua forma de disputa atraente, onde o resultado é imprevisível, pois nem sempre o time com melhor desempenho na partida irá vencer. Embora não se tenha muita certeza sobre os primórdios do futebol, historiadores descobriram vestígios dos jogos de bola em várias culturas antigas. Por exemplo, na China Antiga, por volta de 3000 A.C, os militares praticavam um jogo que na verdade era um treino militar. Após as guerras, formavam equipes para chutar a cabeça dos soldados inimigos. Com o tempo, as cabeças dos inimigos foram sendo substituídas por bolas de couro revestidas com cabelo. Formavam-se duas equipes com oito jogadores e o objetivo era passar a bola de pé em pé sem deixar cair no chão, levando-a para dentro de duas estacas fincadas no campo. Estas estacas eram ligadas por um fio de cera. No Japão Antigo, foi criado um esporte muito parecido com o futebol atual, chamado Kemari. Praticado por integrantes da corte do imperador japonês, o kemari acontecia num campo de aproximadamente 200 metros quadrados. A bola era feita de fibras de bambu e entre as regras, o contato físico era proibido entre os 16 jogadores (8 para cada equipe). Historiadores do futebol encontraram relatos que confirmam o acontecimento de jogos entre equipes chinesas e japonesas na antiguidade. Já, os gregos criaram um jogo por volta do século I a.C que se chamava Episkiros. Neste jogo, soldados dividiam-se em duas equipes de nove jogadores cada e jogavam num terreno de formato retangular. Na cidade de Esparta, os jogadores, também militares, usavam uma bola feita de bexiga de boi cheia de areia ou terra. O campo onde se realizavam as partidas, eram bem grandes, pois as equipes eram formadas por quinze jogadores. Quando os romanos dominaram a Grécia, entraram em contato com a cultura grega e acabaram assimilando o Episkiros, porém o jogo tornou-se muito mais violento.

Na Itália Medieval apareceu um jogo denominado gioco del calcio. Era praticado em praças e os 27 jogadores de cada equipe deveriam levar a bola até os dois postes que ficavam nos dois cantos extremos da praça. O barulho, a desorganização e a violência eram tão grandes que o rei Eduardo II teve que decretar uma lei proibindo a prática do jogo, condenando à prisão os praticantes. Porém, o jogo não terminou, pois integrantes da nobreza criaram um nova versão dele com regras que não permitiam a violência. Nesta nova versão, cerca de doze juízes deveriam fazer cumprir as regras do jogo. Pesquisadores concluíram que o gioco de calcio saiu da Itália e chegou à Inglaterra por volta do século XVII. Na Inglaterra, o jogo ganhou regras diferentes e foi organizado e sistematizado. O campo deveria medir 120 metros por 180 metros e nos lados de menor comprimento seriam instalados dois arcos retangulares chamados de gol. A bola era de couro e enchida com ar. Com regras claras e objetivas, o futebol começou a ser praticado por estudantes e filhos da nobreza inglesa. Aos poucos foi se popularizando. No ano de 1848, numa conferência em Cambridge, estabeleceu-se um único código de regras para o futebol. No ano de 1871 foi criada a figura do guarda-redes (goleiro) que seria o único que poderia colocar as mãos na bola e deveria ficar próximo ao gol para evitar a entrada da bola. Em 1875, foi estabelecida a regra do tempo de 90 minutos e em 1891 foi estabelecido o pênalti, para punir a falta dentro da área. Somente em 1907 foi estabelecida a regra do impedimento. O profissionalismo no futebol foi iniciado somente em 1885 e no ano seguinte seria criada, na Inglaterra, a International Board, entidade cujo objetivo principal era estabelecer e mudar as regras do futebol quando necessário. No ano de 1897, uma equipe de futebol inglesa chamada Corinthians fez uma excursão fora da Europa, contribuindo para difundir o futebol em diversas partes do mundo. Em 1888, foi fundada a Football League com o objetivo de organizar torneios e campeonatos internacionais. No ano de 1904, foi criada a FIFA (Federação Internacional de Futebol Associação) que organiza até hoje o futebol em todo mundo.

Figura 3.1: Bola de futebol final do século XIX

Figura 3.2: Bola da Copa de 2014 (Brazuca).

No Brasil, a história do futebol começa com Charles Miller, nascido no bairro paulistano do Brás, que viajou para a Inglaterra aos nove anos de idade para estudar. Lá tomou contato com o futebol e, ao retornar ao Brasil em 1894, trouxe na bagagem a primeira bola de futebol e um conjunto de regras. O primeiro jogo de futebol no Brasil foi realizado em 15 de abril de 1895 entre funcionários de empresas inglesas que trabalhavam em São Paulo (CIA. de Gás X CIA. São Paulo Railway). No início, o futebol era praticado apenas por pessoas da elite, sendo vedada a participação de negros em equipes oficiais. O primeiro time a se formar no Brasil foi o São Paulo Athletic, em 13 de maio de 1888.

Figura 3.3: Charles Miller

3.1.1 Regras

Regra 1 - As dimensões de um capo de futebol

O campo de jogo deve ser retangular, com um máximo de 120 m e um mínimo de 90m de comprimento, por uma largura máxima de 90 m e mínima de 45 m. Em partidas internacionais, essas medidas mudam para 110/100 m de comprimento e 75/64 m de largura. O campo deve ser delimitado com linhas visíveis de no máximo 12 cm de largura, sendo chamadas laterais as mais longas e de fundo as mais curtas. Em cada canto do retângulo deve haver uma bandeirola de no máximo 1,50 m de altura. O centro do campo será marcado com um ponto, em torno do qual se traçará uma circunferência com 9,15 m de raio. A pequena área será delimitada por duas linhas perpendiculares à linha de fundo, traçadas a 5,50 m de cada trave e avançando 5,50 m para dentro do campo, unidas então por outra linha. A grande área terá linhas semelhantes, colocadas a 16,50 m de cada trave a avançando outros 16,50 m campo adentro. Essa também é a área de pênalti, penalidade a ser cobrada de um ponto situado a 11 m do centro do gol. Desse ponto serão traçados, no exterior de cada grande área, arcos com 9,15 m de raio. Em cada canto, a partir da bandeirola, devem ser traçados arcos com 1 m de raio. Na parte central de cada linha de fundo serão colocadas traves, separadas entre si, interiormente, por 7,32 m, unidas em cima por um travessão colocado a 2,44 m do solo. A largura das traves não pode exceder 12 cm, e do lado de fora do campo elas podem ser guarnecidas por redes.

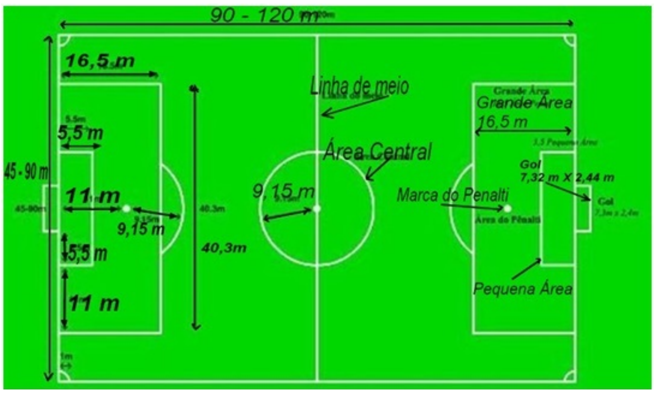


Figura 3.4: campo

Regra 2 - A Bola

A bola dever ser esférica, recoberta de couro ou outro material aprovado pela FIFA, que não represente perigo à integridade dos atletas. Sua circunferência máxima será de 69,5 cm, e a mínima 68,5 cm; o peso dever estar entre 420 e 445 g no início da partida, e depois de cheia ela deve ter a pressão de 0,8 bar. Sem autorização do árbitro ela não pode ser substituída por outra no transcorrer do jogo.

Figura 3.5: Forma espacial

Figura 3.6: Forma planificada

Regra 3 - Número de Jogadores

O jogo será disputado por dois times, cada um deles formado por no máximo 11 jogadores, um dos quais atuará como goleiro. Permite-se até cinco substituições por equipe, em partidas amistosas, e duas mais o goleiro nas oficiais. Antes do início da partida, o juiz deve ser informado dos nomes dos eventuais reservas. Qualquer atleta poderá desempenhar a função de goleiro, desde que o árbitro seja antecipadamente informado. Caso, no intervalo ou durante o jogo, um atleta troque de posição com o goleiro sem notificar o juiz, será marcado pênalti assim que ele tocar a bola com a mão dentro da grande área.

Regra 4 - Equipamento dos jogadores

Nenhum jogador pode portar objeto perigoso que possa machucar os demais jogadores. E suas chuteiras terão de obedecer às seguintes exigências:

1. as barras serão transversais e planas, com no mínimo 12,7 mm de largura, arredondadas nas extremidades da sola;

2. os cravos substituíveis, montados diretamente nas solas, podem ser de couro, borracha, alumínio, plástico ou material similar, planos e com diâmetro mínimo de 12,7 mm. A parte que forma sua base não pode sobressair mais que 6mm a 6,35mm da sola. Não se permitem cravos rosqueáveis em porcas pregadas à sola, nem os que tenham bordas salientes, relevos ou adornos;

3. cravos fundidos à sola e não substituíveis devem ser de plástico, borracha, poliuretano ou material macio, devendo haver no mínimo dez por sola, com diâmetro não inferior a 10 mm; podem ser empregadas combinações de barras e cravos, desde que o conjunto respeite as demais regras, e o comprimento não deve nunca exceder 19mm. O goleiro deve usar cores que o distingam dos demais.

3.2 Voleibol

O voleibol foi criado pelo norte-americano William George Morgan, professor de Educação Física da Associação Cristã de Moços (YMCA) de Holyoke, Massachusetts (EUA), em 1895. Embora o basquetebol, criado alguns anos antes pelo também professor da YMCA James Naismith tenha tido uma grande aceitação, Morgan considerava o esporte extenuante e de grande contato físico. Desta forma, teve a ideia de desenvolver uma modalidade que fosse mais leve e, ao mesmo tempo, estimulante para seus alunos de meia-idade, grande parte deles formada por homens de negócio. Morgan teve o tênis como inspiração para a criação do voleibol: redes, quadra e a lógica de passar e repassar a bola de um lado para o outro. Entretanto, desejava que sua modalidade não exigisse tantos materiais e recursos, isto é, que fosse mais prática e democrática que o tênis. Assim, nascia o voleibol, um esporte que podia ser jogado em áreas cobertas ou fechadas, sem uma regra para a quantidade de jogadores, e que não requeria materiais específicos (a bola era passada pelas próprias mãos dos jogadores).

Figura 3.7:

Os maiores problemas enfrentados por Morgan se concentraram na decisão de qual tipo de bola deveria ser utilizado. A primeira opção era usar a bola de basquete, porém rapidamente o professor viu que a mesma era muito pesada. Posteriormente, tentou usar apenas a câmera do objeto, contudo ficou algo bastante leve para a prática. A questão somente foi resolvida depois que Morgan solicitou à firma A.G. Spalding & Brothers a fabricação de uma bola especialmente adaptada às necessidades do voleibol, algo bastante parecido com a bola que conhecemos hoje em dia. A primeira partida pública de voleibol ocorreu em 1896, durante uma convenção de professores de Educação Física da YMCA, na Universidade de Springfield. Uma curiosidade é que até esta data, William Morgan chamava o esporte de "minonette". Foi após a primeira demonstração da modalidade que o nome, pelo qual conhecemos o esporte, foi sugerido pelo professor Alfred Halstead.

Não se tem registro de quando o vôlei chegou às terras brasileiras. Oficialmente, a primeira competição do esporte no país foi realizada em Recife (PE), em 1915, organizada pela Associação Cristã de Moços (ACM) local, e com regras e regulamento definido. A partir daquele momento, entretanto, colégios de outras cidades pernambucanas passaram a ter o vôlei como uma de suas disciplinas de educação física. Dois anos depois, em 1917, o esporte chegou à ACM de São Paulo.

Figura 3.8:

A primeira competição internacional da qual o Brasil participou foi o 1º Campeonato Sul-Americano, em 1951, mesmo antes da fundação da Confederação Brasileira de Voleibol (CBV), em 1954. O Sul-Americano foi patrocinado pela então Confederação Brasileira de Desportos (CBD), com o apoio da Federação Carioca de Voleibol, e aconteceu no ginásio do Fluminense, no Rio de Janeiro, entre 12 e 22 de setembro daquele ano, sendo campeão o Brasil, nos Torneios Masculino e Feminino. Em 1954, a Confederação Brasileira de Voleibol foi criada com o objetivo de difundir e desenvolver o vôlei no país. Dez anos mais tarde, o vôlei brasileiro marcou presença nos Jogos Olímpicos de Tóquio, quando o esporte fez sua estreia na competição. Assim como no futebol, o Brasil é o único país que disputou todas as Copas do Mundo, os sextetos nacionais masculinos de vôlei participaram de todas as edições das Olimpíadas.

3.2.1 Regras

A primeira quadra de Voleibol tinha as seguintes medidas: 15,24m de comprimento por 7,62m de largura. A rede tinha a largura de 0,61m. O comprimento era de 8,235m, sendo a altura de 1,98m (do chão ao bordo superior). A bola era feita de uma câmara de borracha coberta de couro ou lona de cor clara e tinha por circunferência de 63,7cm a 68,6cm e seu peso era de 252g a 336g. Hoje, o esporte é regulamentado como se esclarece a seguir.

Área do jogo

A área de jogo compreende a quadra de jogo e a zona livre. Deverá ser retangular e simétrica. A quadra de jogo é um retângulo medindo 18 metros x 9 metros, circundada por uma zona livre de, no mínimo, 3 metros de largura em todos os lados. O espaço livre de jogo é o espaço sobre a área de jogo desprovido de qualquer obstáculo. O espaço livre de jogo deve medir, no mínimo, 7 metros a partir da superfície de jogo. A rede é colocada verticalmente sobre a linha central. Sua parte superior é ajustada a 2,43 metros do solo para os homens e 2,24 metros para as mulheres. Sua altura é medida a partir do centro da quadra de jogo. A altura da rede sobre as linhas laterais deve ser exatamente a mesma, não excedendo a altura regulamentar em mais de 2 centímetros.

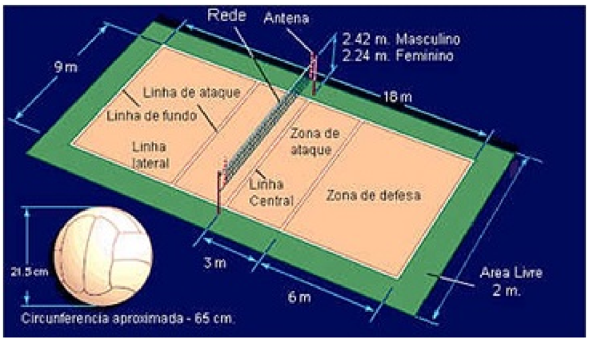


Figura 3.9: Quadra

A bola

A bola deve ser esférica, sendo sua capa formada de couro flexível ou couro sintético e a câmara interior feita de borracha ou material similar. Sua cor pode ser uniforme e clara ou uma combinação de cores. O couro sintético e a combinação de cores das bolas usadas em Competições Internacionais Oficiais deverão obedecer aos padrões da FIVB. A circunferência deve ser de 65cm a 67cm e o peso de 260g a 280g. A pressão interna deve ser de 0,30kg/cm a 0,325kg/cm (294,3mbar a 318,82mbar ou hPa) ou 0,423Ibs a 0,456Ibs.

Partida

Uma partida de vôlei tem, normalmente, dois juizes, 5 sets, sem tempo definido. Cada set é terminado quando uma equipe alcança os 25 pontos, tendo 2 pontos de vantagem sobre a equipe adversária. Caso não os tenha, o set prossegue até que uma equipe conquiste tal vantagem. Cada time é composto por 6 jogadores em quadra e 6 jogadores reserva. Após o saque, cada time só poderá tocar a bola três vezes, sendo proibido que um jogador toque a bola duas vezes seguidas. A equipe vencedora é aquela que ganhar o maior número de sets.

3.3 Basquetebol

O basquetebol surgiu em 1891 nos Estados Unidos, no Instituto Técnico de Springfield. Situada numa região muito fria, Springfield, encontra-se coberta a maior parte do ano por gelo e neve, tendo a prática dos esportes ao ar livre restrita a um curto período de verão. Com o objetivo de superar esse inconveniente, e porque notava que os alunos do seu Instituto sentiam pouca predisposição para os exercício fisicos aplicados no ginásio, o director de educação física deste estabelecimento Dr. Luther Halsey Gulick, recomendou aos seus colaboradores que tomassem uma providência para solucionar o problema. O novo esporte a ser criado deveria servir para um grande número de alunos, constituir um exercício completo, atraente e com a capacidade de se adaptar a qualquer espaço. Coube ao Dr. James A. Naismith, professor da cadeira de Anatomia do Internacional "Young Men's Cristian Association College", depois de grandes estudos, solucionar o problema.

Figura 3.10: Dr. James A. Naismith

Depois de uma pesquisa sobre diversos jogos, Naismith chegou às seguintes conclusões:

- Para o novo jogo, a bola deveria ser grande e leve, de modo que não pudesse ser escondida pelos jogadores;
- O jogo deveria ser praticado durante o Inverno, entre a prática do Futebol Americano e do Basebol;
- Deveria ser um jogo de espírito coletivo e de grande poder emocional, mas que, ao mesmo tempo evitasse a violência;
- O jogo deveria ser de inspiração puramente americana, isto é, corresponder ao espírito de livre iniciativa (influenciado pela personalidade do homem da época do "pioneirismo").

O primeiro jogo, em Dezembro de 1891, no Springfield College nos Estados Unidos, foi um êxito. Este, tendo sido arbitrado pelo seu próprio inventor, foi disputado com nove homens de cada lado, com o objetivo de marcação de pontos a partir do arremesso da bola para dentro de um cesto de pêssegos, colocado em cada lado do campo a uma altura de três metros. Um aluno, Frank Mahan, propôs ao Professor James Naismith, o nome de "basketball", pelo fato de ser jogado com cestos e bola; tendo obtido a sua concordância. Apesar rápida expansão do jogo, só em 18 de Julho de 1932 é fundada a FIBA (Federação Internacional de Basquete) no 1º Congresso Internacional de Basquetebol realizado em Genebra. A FIBA impôs pouco a pouco a sua identidade. Em 1935 organizou em Genebra os primeiros campeonatos da Europa de basquetebol. O reconhecimento deste jogo com um esporte olímpico ocorreu nos Jogos Olímpicos de Berlim de 1936, quando fez parte destes jogos.

O Brasil foi um dos primeiros países a conhecer a novidade. Augusto Shaw, um norte-americano nascido na cidade de Clayville, região de Nova York, completou seus estudos na Universidade de Yale, onde em 1892 graduou-se como bacharel em artes e onde Shaw tomou contato pela primeira vez com o basquete. Dois anos depois, recebeu um convite para lecionar no tradicional Mackenzie College, em São Paulo. Mas demorou um pouco até que o professor pudesse concretizar o desejo de ver o esporte criado por James Naismith adotado no Brasil. A nova modalidade foi apresentada e aprovada imediatamente pelas mulheres. Isso atrapalhou a difusão do basquete entre os rapazes, movidos pelo forte machismo da época. Para piorar, havia a forte concorrência do futebol, trazido em 1894 por Charles Miller, e que se tornou a grande coqueluche da época entre os homens. Aos poucos o persistente Augusto Shaw foi convencendo seus alunos de que o basquete não era um jogo só de mulheres. Quebrada a resistência, ele conseguiu montar a primeira equipe do Mackenzie College, ainda em 1896.

Figura 3.11: Primeira equipe de basquete no Brasil

A aceitação nacional do novo esporte veio a partir do Professor Oscar Thompson, na Escola Nacional de São Paulo e Henry J. Sims, então diretor de Educação Física da Associação Cristã de Moços (ACM), do Rio de Janeiro. As primeiras regras em português foram traduzidas em 1915. Nesse ano a ACM realizou o primeiro torneio da América do Sul, com a participação de seis equipes. O sucesso foi tão grande que a Liga Metropolitana de Sports Athléticos, responsável pelos esportes terrestres no Rio de Janeiro, resolveu adotar o basquete em 1916. O primeiro campeonato oficializado pela Liga foi em 1919, com a vitória do Flamengo. Em 1933 houve uma cisão no esporte nacional, quando os clubes que adotaram o profissionalismo do futebol criaram entidades especializadas dos vários esportes. Nasceu assim a Federação Brasileira de Basketball, fundada em 25 de dezembro de 1933, no Rio de Janeiro. Em assembléia, aprovada no dia 26 de dezembro de 1941, passou ao nome atual, Confederação Brasileira de Basketball.

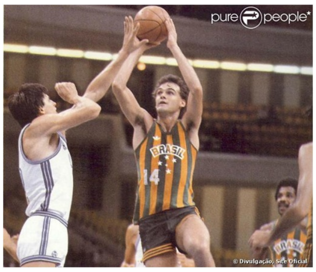


Figura 3.12: Oscar

3.3.1 Regras

Área do jogo

A quadra de basquete tem 26 metros de comprimento por 14 metros de largura. As cestas ficam fixadas em estruturas a 3,05 metros do chão nas extremidades da quadra e tem um perímetro de 59 cm. A Tabela tem 1,80 m de comprimento, 1,20 m de altura e 4,2m a distância da cesta a marca de lance livres.

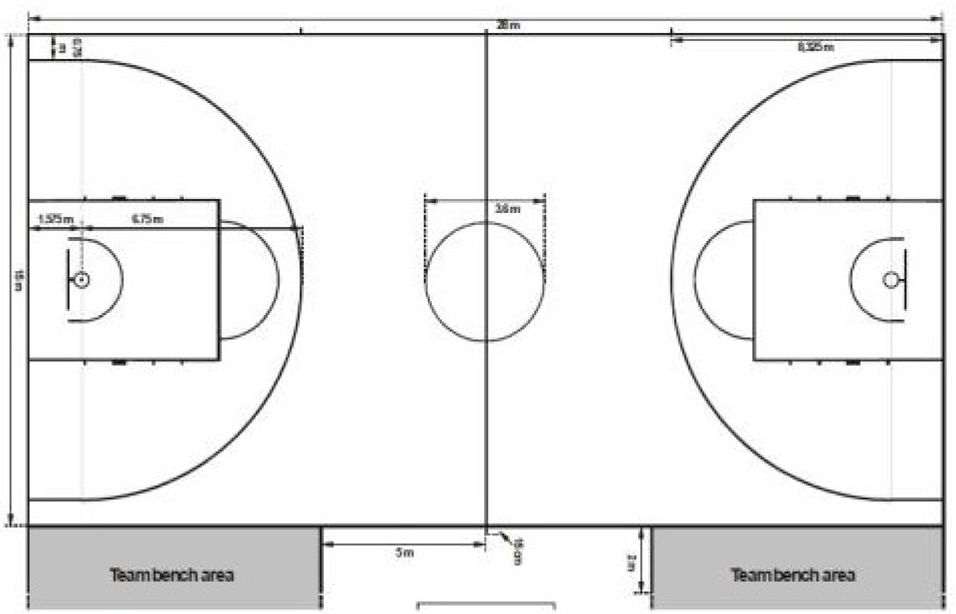


Figura 3.13: Quadra

A Bola

Para os Jogadores do sexo masculino que praticam o esporte no colégio, na faculdade e nas ligas profissionais a bola com 74,9 centímetros de circunferência e pesa 623 gramas. Já a bola usada em jogos femininos é ligeiramente menor que a usada em jogos masculinos, possuindo 72,3 centímetros de circunferência e pesando 566 gramas.

Figura 3.14: A bola no início e a atual

Partida

- Duração do jogo: 40 minutos, divididos em dois períodos de 20 minutos cada.
- Juízes: 2 árbitros, 1 marcador, 1 cronometrista e um operador de 30 segundos.
- O jogo inicia-se com bola ao ar no círculo central;
- A bola só pode ser tocada com as mãos depois de atingir o ponto mais alto;
- Nenhum dos saltadores pode agarrar a bola ou tocar nela mais de duas vezes;
- Os restantes dos jogadores devem estar fora do círculo central. O que ocorre no início do jogo repete-se no início do próximo períodos.
- Os lançamentos de campo são os que ocorrem no decorrer normal do jogo e em qualquer local do campo. Os lances livres são executados como penalização ao adversário e efetuados com o cronómetro parado atrás da linha de lançamento livre;
- A bola tem que entrar no cesto pela sua parte superior, caindo através da rede;
- Os pontos são obtidos a partir da concretização de lançamentos de campo ou lances livres;
- 2 pontos - lançamento convertido de qualquer local sobre ou à frente da linha de 6,25m;
- 3 pontos - lançamento convertido de qualquer local atrás da linha de 6,25 m;
- 1 ponto - lançamento livre convertido.
- Ganha o jogo a equipe que obtiver mais ponto ao final de dois tempos de 20 minutos.

3.4 Ciclismo

Existem controvérsias sobre o surgimento da bicileta. Alguns acreditam que Leonardo da Vinci foi o seu criador quando apresentou um esboço da bicicleta moderna em 1492. Porém, alguns pesquisadores dizem que a idéia surgiu muito antes, no Egito Antigo, onde já havia meio de transportes de duas rodas. A partir de nossas pesquisas em vários livros e sites, constatamos que o primeiro a patentear a bicicleta foi o alemão Karl von Drais, em 1817.

Figura 3.15: Karl Von Drais

Por outro lado, o francês Ernest Michaux, que muitos acreditam ser o inventor, na verdade, criou uma versão de bicicleta com a introdução dos pedais, em 1855. Já o irlandês John Boyd Dunlop, foi o responsável pelo pneumático em 1888.

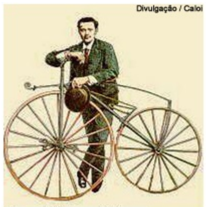


Figura 3.16: Ernest Michaux

O ciclismo é um esporte que envolve um atleta e um equipamento: a bicicleta. Se pensarmos assim, é possível chamar de ciclismo quaisquer modalidades que envolvam essas duas partes, como o ciclismo de estrada, o ciclismo de pista, o mountain bike e o bmx.

A modalidade mais tradicional talvez seja o ciclismo de estrada. Isso porque o Tour de France, ou a Volta da França, é a competição mais esperada de ciclismo no mundo. Essa competição acontece anualmente, no mês de julho, somando 3.000 quilômetros, que os atletas devem percorrer com suas bicicletas. Ou seja, percebe-se que as provas de estrada são provas de longa distância, que podem ser percorridas no mesmo dia, ou com paradas, como é o caso das Grandes Voltas. Os resultados dessas provas são dados de duas formas: individualmente e por equipe.

O ciclismo de pista é considerada como uma das modalidades mais bonitas de se assistir em Jogos Olímpicos, pela disputa e pela velocidade atingida pelas bicicletas. São disputados em uma pista geralmente fechada, denominada velódromo. As provas mais comuns são as provas de perseguição (em que um atleta ou uma equipe de atletas precisa ficar a menos de um metro de distância da outra) e as provas contra o relógio, em que os atletas devem pedalar o mais rápido possível, vencendo aquele que cumprir a distância em menor tempo.

Mountain bike é também conhecido como ciclismo de aventura. São competições disputadas em locais abertos, com trilhas de terra bastante acidentadas, e que envolvem muitas subidas e descidas. Ao contrário das bicicletas utilizadas para o ciclismo de estrada e de pista, que são bastante leves e com pneus muito finos, a bicicleta de mountain bike deve ter suspensão resistente e pneus mais grossos, para enfrentar os obstáculos encontrados.

O BMX é uma modalidade que utiliza rodas de vinte polegadas de diâmetro, ou seja, de tamanho pequeno se considerada para um homem adulto. Há dois tipos de provas diferentes: uma que é uma corrida disputada em terreno acidentado - BMX Racing - e a outra é caracterizada por manobras com e sobre a bicicleta - BMX Freestyle.

Figura 3.17: Velo club

Na capital paulista surgiu o primeiro velódromo brasileiro. O Velódromo Paulista, como era chamado, sediou a primeira prova oficial de ciclismo no Brasil, da qual participaram um pouco menos de 40 atletas. Apesar de já possuir bicicletas no ano de 1896, o Brasil não esteve presente nos primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna, em Atenas, na Grécia. Porém, neste período, já funcionavam nas cidades de Porto Alegre (RS) e São Paulo (SP) ativas sociedades de ciclistas. Estas entidades dirigiam competições que reuniam, a cada ano, um número maior e um desempenho mais expressivo dos competidores.

3.4.1 Regras

- Apenas a bike será inspecionada;
- O ciclista estará livre para escolher uma das duas exceções morfológicas: posição do selim ou a extensão do guidão;
- Nenhum teste morfológico será necessário, seja para a exceção do selim (teste do joelho) ou para a exceção do clipe (teste do ângulo do braço);
- Todos os tipos de trocadores (manual, automático e eletrônico) montados na extremidade das extensões (clipe) serão medidos na sua extremidade (posição das alavancas manuais alinhadas com as extensões);
- A diferença de altura entre o ponto de apoio do cotovelo e o ponto mais alto e mais baixo da extensão (clipe), incluindo o trocador deve ser menor que 10cm, para garantir a horizontalidade do antebraço.

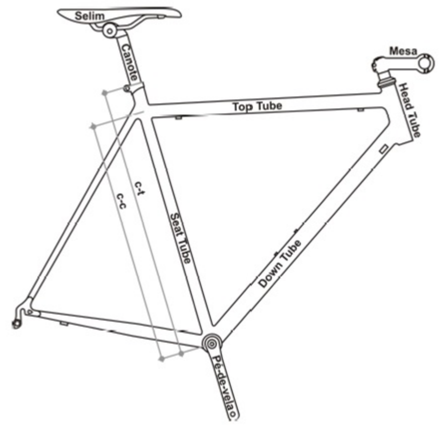


Figura 3.18: Quadro de uma bicicleta

Com essa regras, tornará mais próxima da realidade em campo, simplificará o trabalho feito pelos comissários, garantirá a repetição e a consistência da verificação, proporcionará aos ciclistas mais liberdade para posicionamento, evitará perturbar o ciclista antes da sua largada e evitará ter uma penalização de posição ilegal durante a corrida.

Capítulo 4

Conceitos Teóricos

Alguns conceitos muito usados e importantes, trabalhados tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, serão tratados aqui, são eles: proporção, triângulos, teorema de Pitágoras, lei dos cossenos e arco capaz.
O polígono de Realeaux não é um assunto abordado no ensino fundamental e nem no ensino médio, porém poderia facilmente ser trabalhado, até com o intuito de enriquecer a aula com o desenvolvimento um tema diferente,em decorrência das situações problemáticas estudadas anteriormente.

4.1 Proporções

Hoje em dia é muito importante saber ler gráfico, porque várias informações transmitidas pela mídia, de uma forma geral, são ilustradas por gráficos.
Este assunto é trabalhado desde o 6º ano do ensino fundamental até a 3ª série do ensino médio. É muito utilizado em diversas disciplinas como ferramenta e, em provas de concurso aparecem questões com leitura de gráficos. O esporte constitui uma forma atraente de se tratar o tema em sala de aula, com o aproveitamento de toda variação dos tipos de gráficos, estudando a variação do tamanho de campos ou apenas, começando como uma simples pesquisa de preferência.

Os dois exemplos a seguir mostram a importância de conhecermos o funcionamento da construção de gráficos, para que um deles seja ser interpretado de maneira correta.

- Construção do gráfico de equação $x^2 + y^2 = 1$ em escalas diferentes.

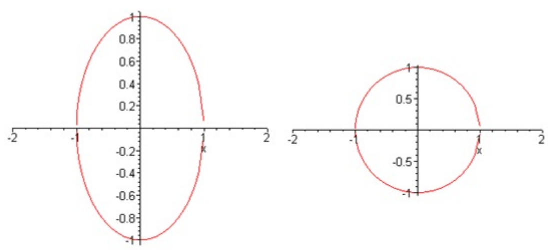


Figura 4.1: Escalas diferentes

- O gráfico a seguir representa os níveis de estresse e de recuperação dos voluntários, obtidos por meio de um questionário chamado RESTQ-Sport. Na representação gráfica observa-se que os atletas apresentaram baixos níveis de estresse e altos níveis de recuperação, em relação tanto nas escalas gerais, quanto nas esportivas.

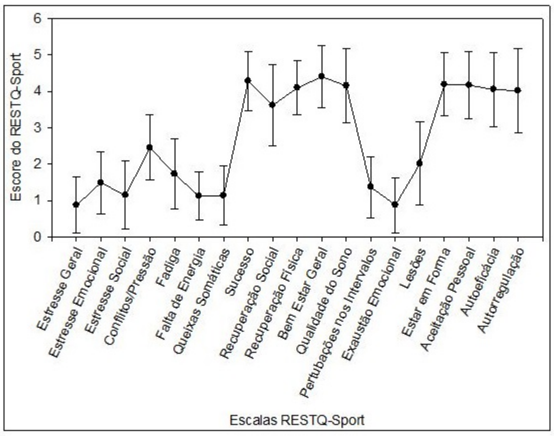


Figura 4.2: Nivel de estresse.

4.2 Triângulo

Os triângulos estão entre os objetos mais importantes estudados em matemática devido à rica estrutura construida em torno deles na geometria euclidiana e na trigonometria, e assim estabelecer várias relações fundamentais, como por exemplo: a classificação em função dos lados ou dos ângulos, na trigonometria, nas relações métricas do triângulo retângulo, nos casos de semelhanças e congruências, na lei dos cossenos e lei dos senos, nas maneiras diferentes de cálculo de áreas e perímetros, no Teorema de Pitágoras, na decomposição de um polígono em triângulos, entre outras.

Definição 4.2.1 *Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC. Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo. Os segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do triângulo. Os ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos do triângulo.*

Figura 4.3: Triângulos

Os triângulos se classificam quanto ao tamanho da medida dos seus lados e, também, quanto à medida de seus ângulos.

Definição 4.2.2 *Quanto à medida de seus lados um triângulo será chamado:*

1. **Equilátero**, *se possui os três lados com medidas iguais;*
2. **Isósceles**, *se possui somente dois lados com medidas iguais; e*
3. **Escaleno**, *se possui os três lados com medidas diferentes.*

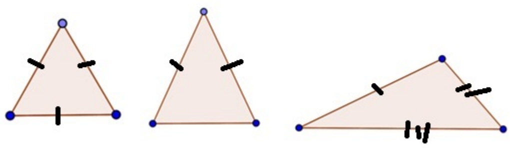


Figura 4.4: Classificação quanto aos lados

Quanto à medida de seus ângulos,

Definição 4.2.3 *Quanto à medida de seus ângulos um triângulo será chamado:*

1. **Acutângulo**, *se possui todos os ângulos com medidas menores que 90º;*
2. **retângulo**, *se possui um ângulo com medida igual a 90º; e*
3. **Obtusângulo**, *se possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90º.*

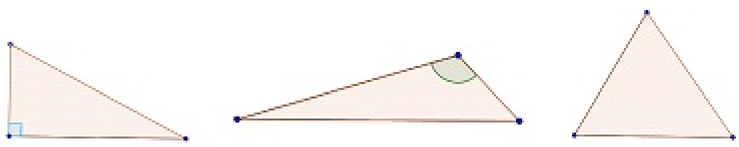


Figura 4.5: Classificação quanto aos ângulos

Num triângulo retângulo, temos como razões trigonométricas o seno, o cosseno e a tangente.

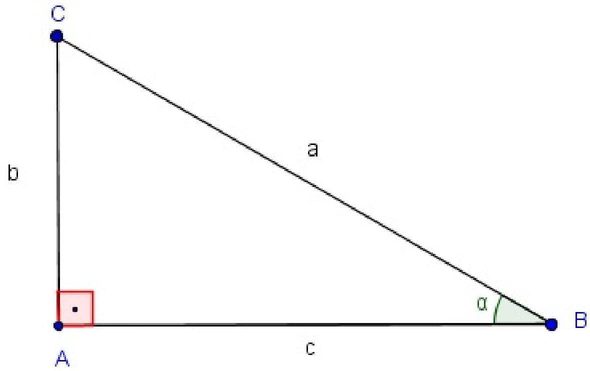


Figura 4.6: Razões trigonométricas

De acordo com a figura temos:

- A, B e C são os vértices do triângulo;
- a, b e c são os lados do triângulo;
- $\hat{A}$ é o angulo reto;
- a é a hipotenusa;
- b é o cateto oposto a α;
- c é o cateto adjacente a α;

dessa forma, em relação a α, podemos dizer que:

Cosseno: $cos(\alpha) = \dfrac{cateto\ adjacente\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$

Seno: $sen(\alpha) = \dfrac{cateto\ oposto\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$

Tangente: $tg(\alpha) = \dfrac{cateto\ oposto\ \alpha}{cateto\ adjacente\ \alpha} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{b}{c}$

4.3 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um resultado clássico na matemática que descreve a relação existente entre os lados do triângulo retângulo. Isto é,

Teorema 4.3.1 *A soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado de sua hipotenusa.*

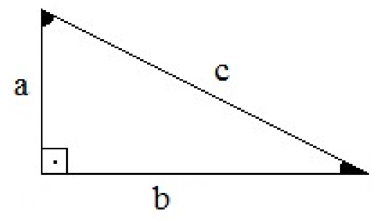


Figura 4.7: Triângulo Retângulo

Segundo a figura anterior temos: $a^2 + b^2 = c^2$.

A seguir vamos realizar várias verificações deste fato. A primeira demonstração é atribuída ao próprio Pitágoras. Como antes, considere um triângulo retângulo cujos lados medem, numa dada unidade, a e b, e a hipotenusa mede c. Constroem-se dois quadrados iguais de lados $a + b$:

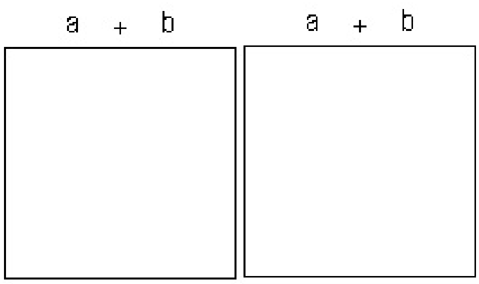


Figura 4.8:

Em um dos quadrados constroem-se 4 triângulos retângulos de catetos a, b e hipotenusa c, da seguinte forma:

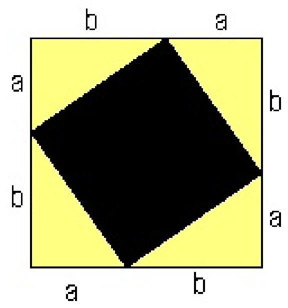


Figura 4.9:

Logo, a área do quadrado de lado $(a+b)$ é igual a a área dos 4 triângulos mais a área do quadrado de lado c. Já, no outro triângulo, constroem-se dois quadrados com lados a e b e 4 triângulos com catetos a e b, como mostra a seguinte figura:

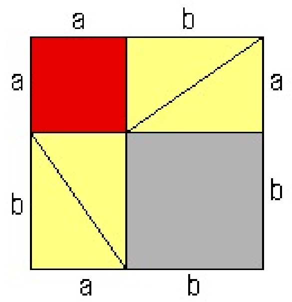


Figura 4.10:

Obtém-se assim, que a área do quadrado de lado respectivamente $(a+b)$ é igual à área dos 4 triângulos mais a área dos dois quadrados de lados a e b, o que nos leva a concluir que a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados de lados a e b. Isto é, $c^2 = a^2 + b^2$.

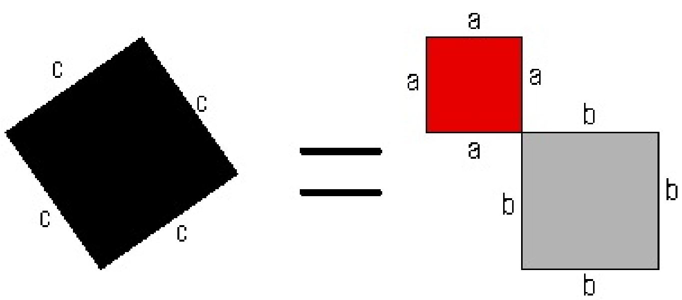


Figura 4.11:

A seguir apresentamos uma verificação do Teorema de Pitágora, que é comumente divulgada nos livros de ensino médio:

Desenha-se um triângulo retângulo [ABC], qualquer, retângulo em A.

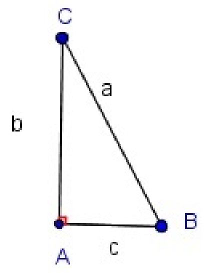


Figura 4.12:

Sobre cada lado do triângulo, são construidos quadrados. Em seguida, desenham-se as diagonais do quadrado de lado [AC], para determinar o centro O deste quadrado. Logo, por O traçamos dois segmentos de reta paralelos aos lados do quadrado de lado [BC].

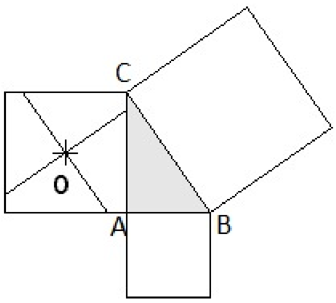


Figura 4.13:

O quadrado de lado [AC] ficou dividido em 4 partes que se numeram de 1 a 4. O quadrado de lado [AB], numera-se com o número 5.

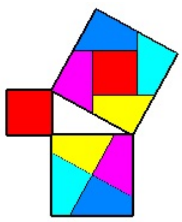


Figura 4.14:

Recortam-se as 5 partes numeradas e com elas tenta-se obter o quadrado de lado [BC].

4.4 Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos é uma importante fórmula matemática que relaciona as medidas dos lados e de um ângulo de um triângulos. De fato, a lei diz que em um triângulo ABC qualquer, de lados opostos aos ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, com medidas respectivamente a, b e c, valem as relações:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

Logo, esta lei pode ser considerada uma generalização do Teorema de Pitágoras. Faremos a demonstração deste fato em duas etapas, dependendo do tipo de triângulo (acutângulo ou abtusângulo). Assim, considere um triângulo ABC acutângulo. Traçamos por C a perpendicular (CH) ao lado AB.

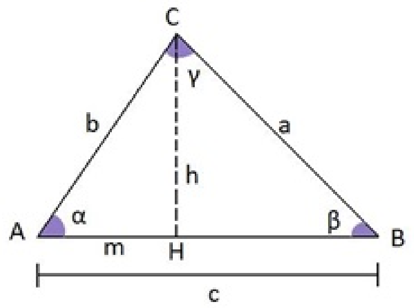


Figura 4.15:

Obtemos dois triângulos retângulos (AHC e HBC) internos ao triângulo ABC. Suponha ainda que o lado AH tem medida m e que o lado HC tem medida h. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo HBC, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 (1)$$

Ao aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo AHC, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 (2)$$

logo, de (1) e (2), obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - m^2 + (c - m)^2 \\ &= b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2mc \end{aligned}$$

Ainda no triângulo ACH, temos que

$$cos(\widehat{A}) = \frac{m}{b}$$

Isso permiténos concluir a primeira relação da lei dos cossenos. As outras são obtidas de

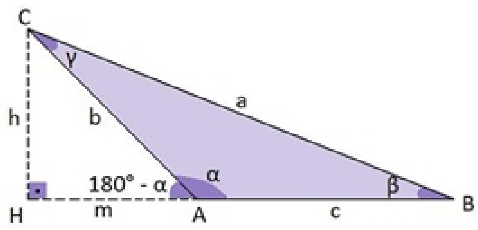


Figura 4.16:

forma análoga.
Agora, vamos supor queo triângulo ABC é obtusângulo, com ângulo obtuso $\widehat{A}$. Logo, tomamos por C a perpendicular (CH) ao lado AB,

Obtemos assim dois triângulos retângulos HAC e HBC. Suponhamos ainda que o lado AH tem medida m e que o lado HC tem medida h. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo HBC, temos:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2$$

No triângulo retângulo HAC, novamente por Pitágoras, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

De onde obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - m^2 + (c+m)^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2mc \end{aligned}$$

Ainda, no triângulo retângulo HAC, temos:

$$\frac{m}{b} = cos(180° - \widehat{A}) = -cos(\widehat{A})$$

Assim, temos que,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + 2c(-bcos(\widehat{A})) \\ &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot cos(\widehat{A}) \end{aligned}$$

4.5 Arco Capaz

Definição 4.5.1 *Lugar Geométrico de pontos é o lugar do plano onde todos os pontos nele situados gozam de uma mesma propriedade.*

Por exemplo, uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo. Neste caso, a propriedade associada ao lugar geométrico é que todos seus pontos encontram-se a uma mesma medida de um ponto fixado.

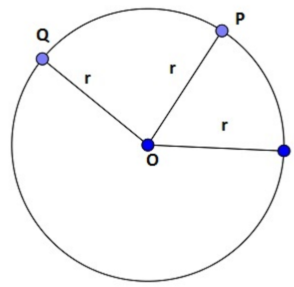


Figura 4.17: Lugar geométrico

Definição 4.5.2 *O Arco capaz de medida α de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos P do plano tal que o ângulo $A\widehat{P}B = \alpha$.*

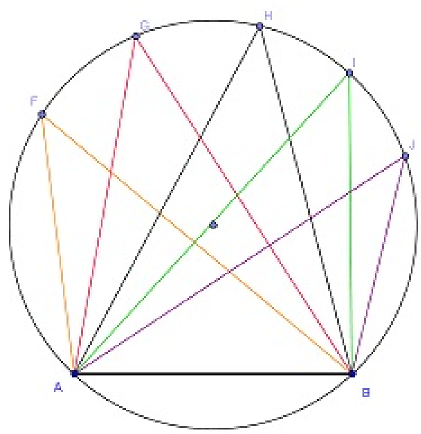


Figura 4.18:

Ou seja, o Arco capaz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que veem um segmento dado sob um mesmo ângulo de medida conhecida. Logo, um arco capaz é uma porção de uma circunferência com centro no semi-plano superior ao segmento ou no semi-plano inferior ao segmento, excetuando-se os pontos A e B. Ao considerar um arco capaz de medida α na parte superior de um segmento AB, ao completar a circunferência que o define, podemos observar que dito "completamento"também forma um arco capaz de medida β tal que $\alpha + \beta = 180°$ (basta notar que temos um quadrilátero inscríto numa circunferência).

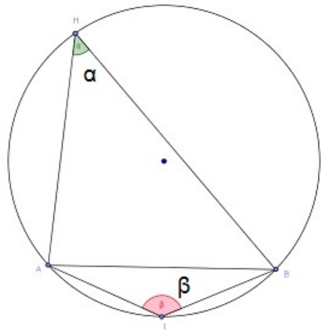


Figura 4.19:

A circunferência tem como uma de suas características ser um par de arcos capazes dos pontos que enxergam o seu diâmetro AB à 90º, excetuando-se os pontos A e B do próprio diâmetro.

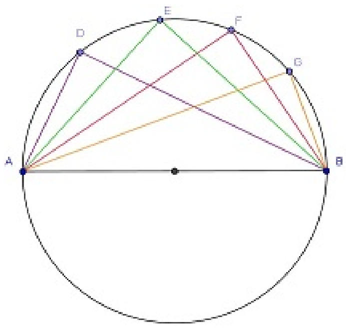


Figura 4.20:

Construção geométrica do arco capaz usando régua e compasso

1. Traçar um segmento de reta AB;
2. Pelo ponto A, trace uma reta t formando com o segmento AB um ângulo congruente a α;
3. Traçar uma reta p perpendicular à reta t passando pelo ponto A;
4. Determinar o ponto médio M do segmento AB;
5. Traçar a reta mediatriz m ao segmento AB;
6. Obter o ponto O que é a interseção entre a reta p e a mediatriz m.
7. Com o compasso centrado no ponto O e abertura OA, traçar o arco de circunferência localizado acima do segmento AB.
8. O arco que aparece em vermelho no gráfico abaixo é o arco capaz.

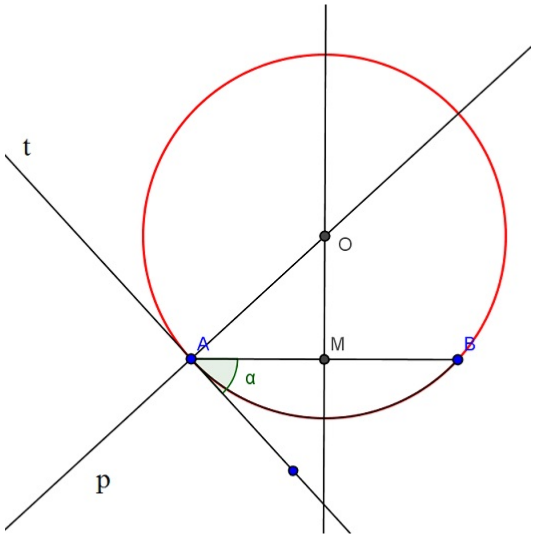


Figura 4.21: Construção do arco capaz

4.6 Polígonos de Realeaux

Os polígonos de Realeaux não são trabalhados no ensino fundamental nem no ensino médio, porém são formasque podem ser encontradas no nosso dia a dia sem percebemos a sua presença, como por exemplo num lápis, pois as seções transversais de um certo tipo de lápis podem ter a forma de triângulo de Realeaux.
A motivação foi o trabalharmos algo novo, e ao mesmo tempo útil. Usamos o polígono de Realeux numa atividade, simulando uma roda e assim foi possível trabalhar o comprimento da circunferência, a sua área e o valor de π.

Definição 4.6.1 *Um diâmetro de uma circunferência é um segmento com extremos nesta que passa pelo centro.*

Em uma circunferência, podemos deduzir que todos os diâmetros têm a mesma medida.Neste caso dizemos que a circunferência tem "largura"constante. Logo, é natural saber se, somente a circunferência tem esta propriedade; mais ainda, como podemos definir o conceito de largura para qualquer curva plana simples (sem auto-interseção) fechada. Um caminho para esta definição é observar o que acontece com a circunfêrencia, se tomarmos um ponto qualquer dela e traçarmos a reta tangente (t) por este ponto, (reta que corta circunferência somente num ponto). Notemos que encontrar uma outra reta tangente à circunferência paralela à reta construída (t) e que a distância entre estas duas retas é constante independentemente do ponto escolhido.

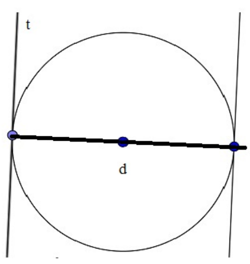


Figura 4.22:

As seguintes definições podem ser encontradas em [15]:

Definição 4.6.2 *Dada uma curva plana fechada C. Uma reta s é dita uma reta suporte de C, se s toca C, de modoo que C esteja contida num dos semiplanos definidos por s.*

Foi provado em [15] que em cada direção existem exatamente duas retas suportes de C.

Definição 4.6.3 *A largura de uma curva plana fechada C numa direção dada é a distancia entre as suas duas retas suporte nesta direção.*

Logo, dizemos que uma curva fechada C tem largura constante, se sua largura em todas as direções for constante.

Definição 4.6.4 *Os polígonos de Reuleaux não são polígonos, mas curvas fechadas, planas, convexas e de largura constante que são obtidas a partir de um polígono convexo. Se o polígono que dá origem ao polígono de Reuleaux é regular, então o polígono de Reuleaux é chamado regular.*

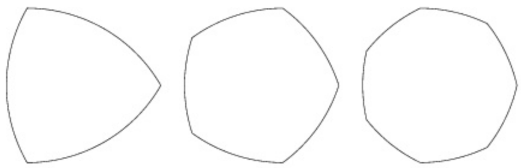


Figura 4.23:

A seguir destacamos algumas de suas principais propriedades:

- Eles só podem ser construídos com polígonos que tenham número ímpar de lados.
- Possuem o mesmo diâmetro.
- Um Triângulo de Reuleaux construído a partir de um triângulo equilátero de lado L pode ser inscrito em um quadrado de lado L.

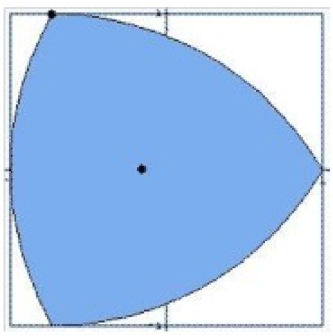


Figura 4.24:

- A área coberta pelo Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado de lado 1 quando este gira em torno de um eixo móvel é $A = 0,9877003907...$

- Os perímetros de um triângulo de Reuleaux (PT), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo de diâmetro 1 e perímetro(PC), satisfazem $PT = PC = \pi$ (curvas de mesmo diâmetro, como no caso das figuras deste problema, apresentam sempre o mesmo perímetro. Esse resultado é conhecido como teorema de Barbier).

Contrução do triângulo de Reuleaux usando régua e compasso.

Para a contrução do triângulo de Reuleaux, usaremos um triângulo equilátero como base da curva.

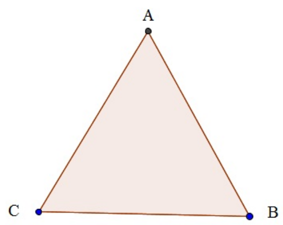


Figura 4.25: Triangulo equilatero

Agora, no triângulo ABC, centra o compasso no vértice A, faça a abertuta $\overline{AB}$ e o arco circular $\widehat{BC}$.

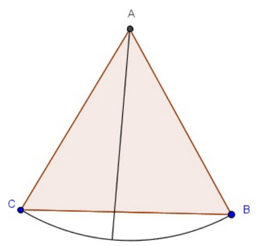


Figura 4.26: Triângulo de Reuleaux em construção

Da mesma forma, analogamente, se constrói os demais arcos circulares na contruçao de um triângulo de Reuleaux.

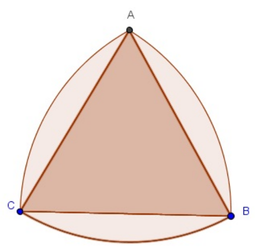


Figura 4.27: Triângulo de Reuleaux

Capítulo 5

A Matemática e o Esporte

Neste capítulo trabalharemos a matemática sendo aplicada nos esportes mencionados acima, aproveitando a oportunidade para ampliar o conhecimento e contextualiza-lo com vários assuntos
Simulamos várias situações como alterações em quadras e alterações de movimentos, entre outras, mostrando o quanto o esporte e a matemática podem e devem ser associados no ensino da matemática, para enriquecimento das aulas, tornando-as mais prazerosas.

5.1 Futebol

Com o assunto futebol usando as dimensões, podemos desenvolver várias questões como escala, geometria analítica, determinante, equação da elipse, cálculo de integral, porcentagens, probabilidade e o quanto mais a criatividade mandar.

Escalas

Considerando as dimensões do campo na seção 3.1, podemos estudar sobre escala, até na construção de uma maquete.

Exemplo de situação problemática.

Com uma escala 1:1000,transforme as medidas oficiais do campo em centímetro.

- Como o campo tem: largura de 75 m = 7500 cm; no real na maquete 7,5 cm
- Comprimento, 100m = 10000 cm; no real na maquete 10,0 cm
- Cálculo da Área: A = 75m x 100m= 7500 m^2; no real na maquete 7,5x 10 = 75 cm^2

Se a distância de dois jogadores na maquete for de 5cm, qual seria a distancia real?

- 5 x 1000=5000cm ou 50 metros.

Áreas

Um bom exercicío é o cálculo da área das figuras geométricas no campo de futebol, com base nas espeficações deste estudadas na seção 3.1.

- Grande área: $A = 16,5 \cdot 40,3 = 664,95m^2$

- Pequena área: $A = 5,5 \cdot 28,3 = 155,65m^2$
- Área do campo máxima: $A = 110 \cdot 75 = 8250m^2$
- Área do campo mínima: $A = 100 \cdot 64 = 6400m^2$
- Área do grande círculo: $A = \pi \cdot 9,15^2 = 262,88m^2$
- Área do forma circular na entrada da grande área:

$$\begin{aligned} A &= A_{Setor} - A_{Triangulo} \\ &= \frac{106}{360}\pi \cdot (9,15)^2 - \frac{14,62 \cdot 5,5}{2} \\ &= 78,87 - 40,2 = 38,67m^2 \end{aligned}$$

- Área do gol: $A = 7,32 \cdot 2,44 = 17,86m^2$

Geometria Analítica

No campo reproduzido num plano cartesiano, podemos abordar a geometria analítica. De fato, o mesmo campo pode ser utilizado para ensinar o conceito de plano cartesiano, orientação, números positívos e negativos. Utilizando jogadores no campo, podemos entender como funciona a localização de pontos no plano e ainda indagar sobre a distância entre dois jogadores (distância entre dois pontos) ou a distância entre um jogador e o gol (distância entre um ponto e uma reta). Vamos considerar um campo que possui 10 unidades de comprimento por 7 unidades de largura. Com a ajuda de software de geometria dinâmica (Geogebra), podemos animar o campo e atrair ainda mais a atenção dos alunos.

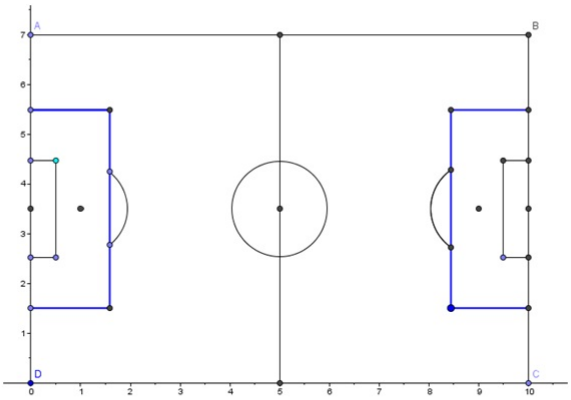


Figura 5.1: Campo no plano cartesiano

Novamente, utilizando as medidas oficiais do campo vistas na seção 3.1, assim, no plano cartesiano temos:

- Equação da circunferência do grande círculo: Seu centro é $(5; 3,5)$ e o raio $0,915$.

$$(x - 5)^2 + (y - 3,5)^2 = 0,9152$$

- Equação da reta diagonal que passa pelos pontos $(0,7)$ e $(10,0)$,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x - 10y - 70 = 0 \Rightarrow y = \frac{7x}{10} - 7$$

A Equação da outra reta diagonal que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(10,7)$, é

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x + 10y = 0 \Rightarrow y = \frac{7x}{10}$$

- Distância entre duas bandeirinhas de escanteio do campo, ou seja distância entre os pontos $(10,0)$ e $(0,7)$

$$d = \sqrt{(10-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{100 + 49} = \sqrt{149} \cong 12,2$$

- Distância entre as marcas de pênalti, isto é, entre os pontos $(1;3,5)$ e $(9;3,5)$,

$$d = \sqrt{(9-1)^2 + (3.5-3.5)^2} = \sqrt{64} = 8$$

Curiosidade Matemática

Com o objetivo de estimular a criatividade dos alunos, podemos fazer as seguintes perguntas:

Podemos ter outros formatos para campo de futebol?

Se o campo de futebol tivesse formato elíptico, então como seriam as regras? o que mudaria?

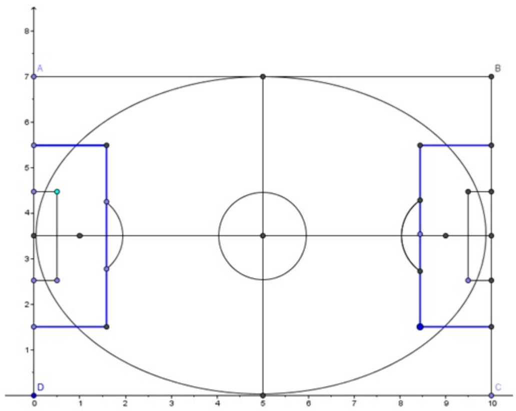


Figura 5.2: Campo Eliptico

Aproveitando as questões apresentadas, podemos ensinar a definição lugar geométrico e deduzir a equação da elipse:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3,5)^2}{12,25} = 1$$

e de sua área :

$$A = 2ab\int_0^{10} cos^2(x)dx = 2ab\frac{\pi}{2} = ab\pi \approx 54,95m^2$$

Porcentagens

Podemos abordar este assunto considerando um campo com as dimensões 10 x 7 como acima:

- Numero de m^2 por jogadores:$70/22 = 3,18$
- Se o campo fosse uma elipse: $54,95/22 = 2,50$
- A área do campo elíptico corresponde a $54,95/70 = 78,5\%$ em relação ao campo retangular
- Se considerássemos o mesmo número de jogadores por m^2 do campo retangular no campo elíptico, teríamos um total de $54,95 \cdot 0,31 = 17$ jogadores, logo jogaríamos com 16 jogadores sendo 1 goleiro e 7 jogadores de linha.
- Se considerássemos o mesmo número de jogadores por m^2 do campo elíptico, no campo retangular teríamos um total de $70 \cdot 0,4 = 28$ jogadores, sendo 1 goleiro e 13 jogadores de linha.

Probabilidade

Como vimos na seção 3.1, as dimensões do campo de futebol variam de acordo com o tipo de competição. Logo, podemos indagar sobre as ventagens ou desvantagens que os jogadores teriam em campos menores; especificamente, quais são as chances de um jogador fazer um gol no campo menor e no maior e estudar a relação entre estas.

Para isto, seja um retângulo que tenha o comprimento igual à linha de fundo de um campo (usando as medidas máximas e mínimas) e a altura de uma das traves do gol, então temos as seguintes áreas:

- Área do retângulo com a medida máxima: $A = 2,44 \cdot 75,0 = 183,0m^2$
- Área do retângulo com a medida mínima: $A = 2,44 \cdot 64,0 = 156,16m^2$
- Área do retângulo formado pelas traves: $A = 7,32 \cdot 2,44 = 17,86m^2$

Logo, a probabilidade de um chute numa altura inferior a $2,44m$ ser gol na dimensão máxima é

$$P(e) = \frac{17,86}{183} \approx 9,7\%$$

e se o campo é menor, a probabilidade é

$$P(e) = \frac{17,86}{156,16} \approx 11,43\%$$

Assim, podemos concluir que, se um jogador chutar ao gol num campo com a menor dimensão, ele terá $0,9\%$ a mais de chance de fazer um gol em relação ao campo com maior dimensão.

5.1.1 Esquemas Táticos

Nesta seção, estudamos alguns esquemas táticos empregados no futebol e, mais adiante, propomos algumas atividades com estes esquemas. A intenção é que o aluno se questione sobre o posicionamento dos jogadores, analise as figuras geométricas obtidas ao ligar os pontos que determinam a posição dos jogadores, entenda a distribuição destes por m^2 e qual dos esquemas, na teoria, pode trazer ventagens a seu time.

1-3-4-3 Também conhecido como esquema WM

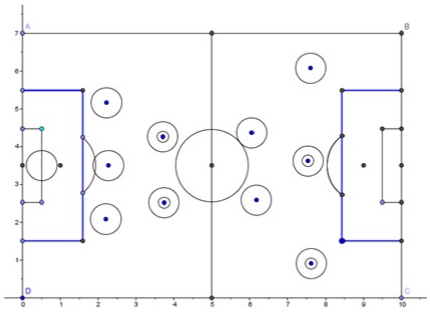


Figura 5.3:

- O esquema tem esse nome por lembrar as letras W e M;
- Temos nesse esquema dois eixos de simetrias, um vertical e outro horizontal;
- No meio de campo temos o quadrado, sendo que os quatro jogadores estão ajudando a defesa e o ataque;

Esquema introduzido no Brasil em 1937 por Dori Kreschener no Flamengo;

1-4-4-2 Esquema Diagonal

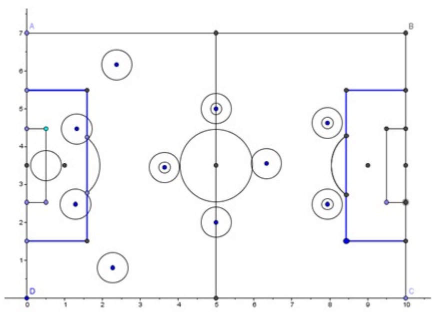


Figura 5.4:

- Esquema utilizado pelo Brasil na copa de 50, quando o Brasil foi vice-campeão;
- Nesse esquema há um eixo de simetria horizontal;
- No meio de campo temos um losango.

1-4-4-2 Esquema utilizado pelo Brasil na copa de 1994, ocasião em que o Brasil foi tetracampeão mundial

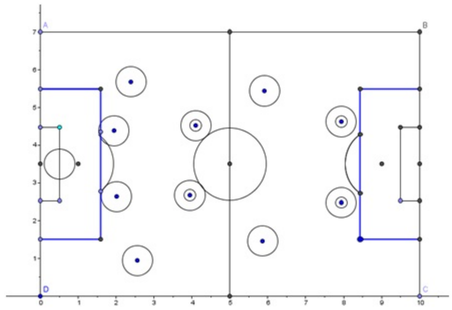


Figura 5.5:

- Existe um eixo de simetria horizontal;
- A consolidação deste esquema praticamente acaba com os pontas abertos;
- Esquema que depende de uma saída de bola rápida da defesa para o ataque.

1-4-2-4 Esquema utilizado Pelo Brasil na copa de 54

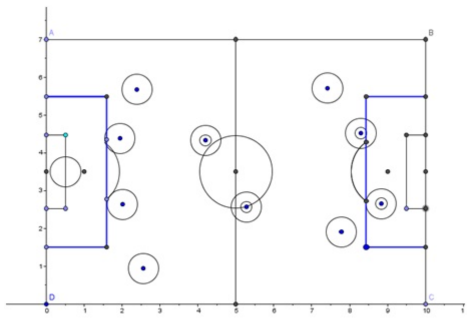


Figura 5.6:

- Nesse esquema o ponta de lança foi jogar perto do centro avante
- No esquema poderia há uma facilidade numa mudança para o esquema 4-4-2.

1-4-3-3 Carrossel

- Esquema utilizado pela seleção da Holanda na copa de 1974, na qual foi vice-campeã;
- Existe um eixo de simetria horizontal;
- Nesse esquema nenhum jogador tinha posição fixa, todos defendiam e todos atacavam;

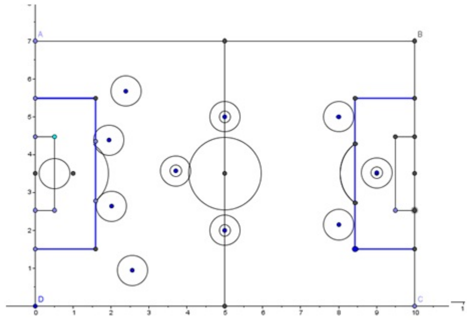


Figura 5.7:

1-2-3-5 Pirâmide

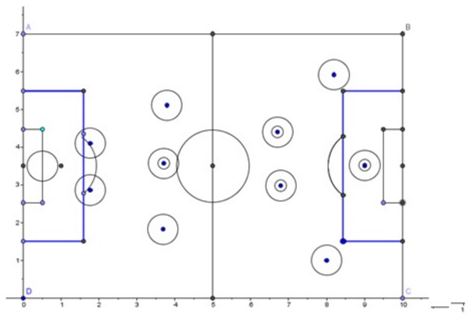


Figura 5.8:

- Um dos primeiros esquemas táticos utilizados no futebol;
- Um eixo de simetria horizontal;
- Nesse esquema o time atacava com 8 jogadores e defendia com 2 jogadores, assim predominava o ataque sobre a defesa;
- Esquema utilizado nos mundiais 1934 e 1938 por Itália e Inglaterra e pelas seleções sul-americanas Argentina, Brasil e Uruguai.

1-4-3-3 Esquema utilizado pelo Brasil no Bicampeonato mundial em 1962

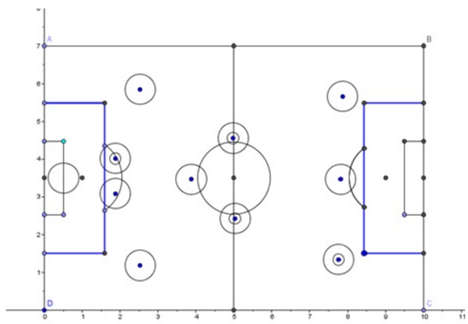


Figura 5.9:

- Possui um eixo de simetria horizontal;
- Jogava com dois postas abertos;
- Teve seu auge nas décadas de 60 e 70.

1-3-5-2 Esquema moderno e utilizado pelo Brasil na copa de 1990

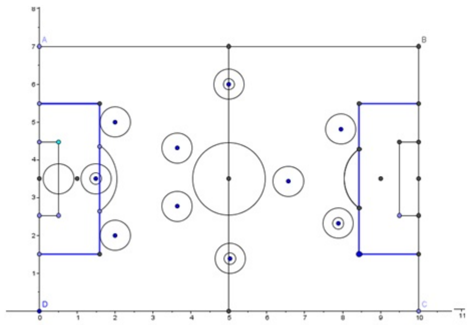


Figura 5.10:

- Possui um eixo de simetria horizontal;
- Com três zagueiros, sempre tem pelo menos um zagueiro na sobra, ode este é chamado de libero;
- Os laterais viram ala, dando um poder maior ao ataque.

5.2 Vôlei

Do mesmo modo que no futebol, podemos explorar vários conceitos matemáticos associado a este esporte. Entre tais concecitos, destacamos as unidades de medida, de área e de perímetro.

Unidades de medidas

Podemos utilizar a altura dos jogadores, o bloqueio, os pontos de ataques e os de defesa, para introduzir as unidades de medidas. De fato, ao entender um pouco este esporte naturalmente aparecem as unidades de medida: os jogadores da seleção masculina de vôlei de hoje, tem em média um 1,98m. Quando ele dá um salto de 50cm com os braços que medem 70cm, estendidos, a distância do solo até a sua mão é de 3,18m como a rede está a 2,44m de altura, o seu corpo ultrapassa 74cm da rede. Além disso, podemos estudar a mudança das unidades de medida, pois, como vimos anteriormente, aparecem duas unidades de medida-metros e centímetros.

- Metro para centímetro $1m = 100cm$, então $54m = 5400cm$

Área e Perímetro

Podemos usar a quadra para entender o conceito de área e perímetro.

- Área da quadra (retângulo): $A = 9 \cdot 18 = 162m^2$
- Área de meia quadra (quadrado): $A = 9 \cdot 9 = 81m^2$
- Área da linha dos três metros: $A = 3 \cdot 9 = 27m^2$, ou seja, um terço do campo.
- Perímetro da quadra: $P = 2 \cdot 18 + 2 \cdot 9 = 54m$
- Também podemos estudar as mudançãs de unidades de área m^2 para cm^2. Como vimos $1m = 100cm$, então

$$1m^2 = (100cm)^2 = 10000cm^2$$

  Assim $162m^2 = 1620000cm^2$

Mudança do tipo de quadra

- Se a quadra fosse um hexágono regular, sendo a maior diagonal o comprimento da rede,

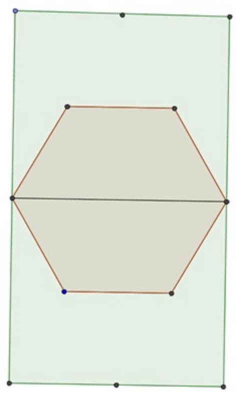


Figura 5.11:

a área do hexágono seria

$$\begin{aligned} A_{hex} &= 6 \cdot A_{tria.} \ (equilatero \ de \ lado \ 4,5) \\ &= 6 \cdot \frac{4,5 \cdot 4,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot (4,5)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 52,61m^2 \end{aligned}$$

Esta área corresponde à $52,61/162 = 32\%$ da área da quadra com formato retangular. Levando isso em consideração, teríamos aproximadamente 4 jogadores em quadra e não 12.

- Se a quadra tivesse a forma de um hexágono regular, no qual um dos lados fosse o linha de fundo da quadra, a área do hexágono seria

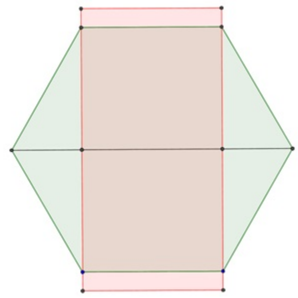


Figura 5.12:

$$\begin{aligned} A_{hex} &= 6 \cdot A_{tria.}\ (equilatero\ de\ lado\ 3) \\ &= 6 \cdot \frac{9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot (9)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 210,44m^2 \end{aligned}$$

A área do campo retangular corresponde à $162/210,44 = 77\%$ da área do campo hexagonal. Levando isso em consideração, teríamos aproximadamente 16 jogadores em quadra, e não 12 jogadores.

O Saque

Vamos supor que o jogador vai sacar lançando a bola verticalmente para cima, em seguida vai saltar para bater na bola de modo que ela caia do outro lado da rede. Por que a trajetória da bola é uma parábola e não uma reta?

Se a trajetória da bola fosse linear, a bola teria de passar pelo ponto A da rede que está posicionada no meio da quadra à 2,43m de altura.

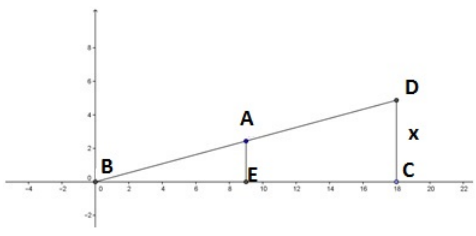


Figura 5.13: saque retilineo

Se o ponto C representa a posição do jogador a realizar o saque, D é o ponto de saque da bola e o ponto B é a extremidade da quadra, podemos então formar o triângulo retângulo BCD, que possue dentro dele o triângulo semelhante ABE (onde E é projeção na quadra do ponto A). De onde,

$$\frac{BE}{BC} = \frac{EA}{CD}$$

Assim,

$$\frac{9}{18} = \frac{2,44}{x}$$

Portanto, $x = 4,88m$, algo impossível!, pois vimos que em média um jogador de voleibol profissional alcança uma medida total de $x = 3,18m$.Isso prova que a trajetória da bola não é uma reta, e sim, uma parábola.

A seguir, descrevemos o movimento típico de um saque, isto é, a bola descrevendo um movimento parabólico: supomos que o saque se inicia no ponto $(18, 3.2)$ e finaliza no ponto $(0, 0)$, levando em consideração a altura da rede $(9, 2.45)$. Com essas coordenadas, a equação (quadrática) que representa o saque é:

$$y = -\frac{7x^2}{675} + \frac{82x}{225}$$

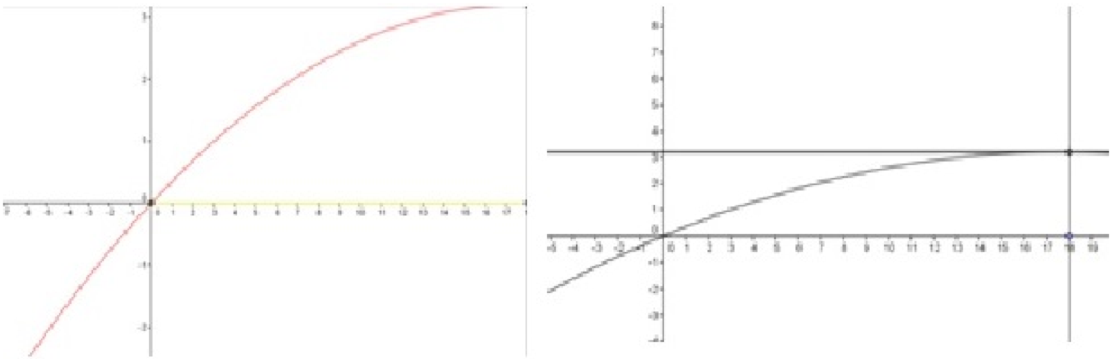


Figura 5.14: Saque parabolico

5.3 Basquete

Reforçamos os conceitos de geométria analítica, distância, área, perímetro, médias, equação de primeiro e segundo grau e triângulos, usando o basquete para atrair a atenção dos alunos.

Geometria analítica

- Dados três jogadores lacalizados nos pontos A(22,3 ; 8), B(5,7;8) e C(1 ,1)da quadra, sendo A e B a posição de lance livre, podemos calcular:
- Distância entre B e C: $d(B, C) = \sqrt{(1 - 5,7)^2 + (1 - 8)^2} = \sqrt{71,09} = 8,4$
- Distância entre A e C :$d(A, C) = \sqrt{(1 - 22,3)^2 + (1 - 8)^2} = \sqrt{502,69} = 22,4$
- Distância entre A e C :$d(A, B) = \sqrt{(5,7 - 22,3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{275,56} = 16,6$
- Diagonal da quadra: $D = \sqrt{28^2 + 16^2} = 32,24$
- O ângulo BÂC usando a lei dos cossenos: $(8,4)^2 = (22,4)^2 + (16,6)^2 - 2.(22,4).(16,6).cosA \rightarrow cosA = 0,95 \rightarrow cos\hat{A} \approx 18°$

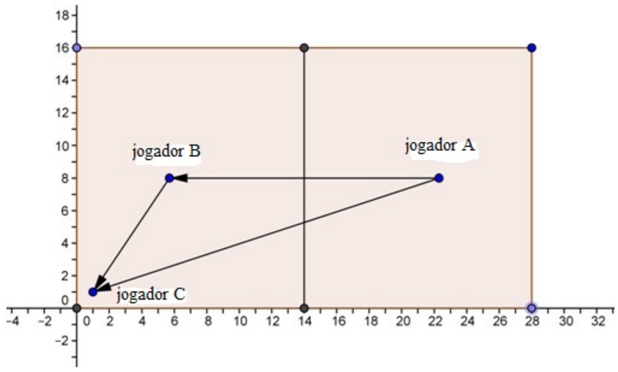


Figura 5.15:

Distância do arremesso a cesta

- Distância do lance livre até a cesta:

  A figura abaixo representa uma vista lateral de um suposto arremesso na marca de lançe livre.

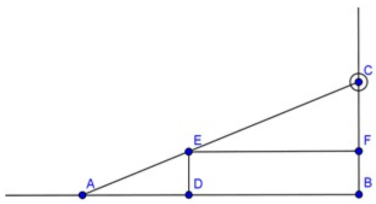


Figura 5.16:

Seja o ponto A a marca do lance livre e o ponto C a cesta. Temos que: $AB = 4,20m$; $BC = 3,05m$ e $AC = x$, então

$$x^2 = 4,2^2 + 3,05^2 = 17,64 + 9,30 = 26,94$$

Assim, $x = 5,19m$

- Distância do jogador até a cesta:

  A figura abaixo representa uma vista lateral de um suposto arremesso na marca de lançe livre. Seja o ponto C a cesta e o ponto D o jogador no lance livre. Temos que:

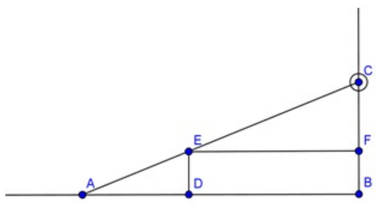


Figura 5.17:

$DE = 2,00m$ (altura estimada do jogador); $EF = 4,20m$, $FC = 1,05m$ e $EC = x$, então

$$x^2 = 4,2^2 + 1,05^2 = 17,64 + 1,10 = 18,74$$

Então, $x = 4,32m$.

Área e Perímetro

- Área da quadra: $A = 26 \cdot 14 = 364m^2$
- Área do garrafão: A = Área do ret. + área do semicírculo

$$A = 5,7 \cdot 3,6 + \frac{1,8^2\pi}{2} = 20,52 + 5,02 = 25,54m^2$$

- Perímetro da quadra: $P = 2 \cdot 26 + 2 \cdot 14 = 80m$
- Perímetro do garrafão: $P = 2 \cdot 5,7 + 3,6 + \pi \cdot 1,8 = 20,58m$

Médias

- Poderíamos trabalhar a média das alturas dos jogadores, pontos da equipe por partida, do jogador por partida, dos arremessos livres, dos arremessos de três pontos, dentre outras situações.
- Fazer uma análise estatística com desvios médios dos acertos e erros, dos adversários e da própria equipe e verificar em qual momento a equipe esteve melhor ou pior, podendo assim analisar os erros cometidos.
- A probabilidade também pode ser trabalhada de maneira a decidir as jogadas que têm maior chance de acontecer, por exemplo.

Equações do 1º grau e do 2º grau

Neste exemplo a área é dada. Podemos pensar em um problema de área máxima, usando o perímetro da quadra.

- Dada uma quadra de basquete na qual um lado excede em 12m o outro lado, com perímetro igual 88m. Calcule os lados dessa quadra.

Figura 5.18:

Seja $b = x$ e $a = x + 12$ os lados do retângulo, então

$$\begin{aligned} 88 &= P \\ &= 2.x + 2.(x+12) \\ &= 2x + 2x + 24 \end{aligned}$$

De onde $4x = 64$ e $x = 16$. Assim $a = 28m$ e $b = 16m$

- Dada uma quadra de basquete no qual um lado excede em 12m o outro lado, com área igual $448m^2$. Calcule os lados dessa quadra.

$$\begin{aligned} 448 &= A \\ &= x.(x+12) \end{aligned}$$

De onde, $x^2 + 12x - 448 = 0$. Logo $x = 12$ ou $x = -28$ são as soluções da equação anterior, mas como x representa uma medida, somente pode tomar o valor positivo, portanto $x = 12$

Classificar os triângulos quanto aos lados

De acordo com o posicionamento dos jogadores sobre a quadra de basquetebal, podemos obter triângulos equiláteros, isósceles e escalenos.

- Suponha que a distância entre os jogadores A e C é igual à distância entre os jogadores B e C e diferente da distância entre A e B, assim o triângulo ABC é isósceles.

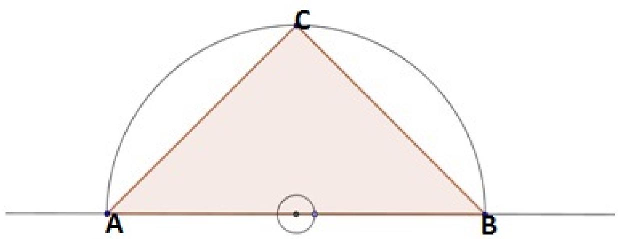


Figura 5.19: Isóceles

- Suponha que as distâncias entre os jogadores sejam todas diferentes, então A, B e C formam um triângulo escaleno.

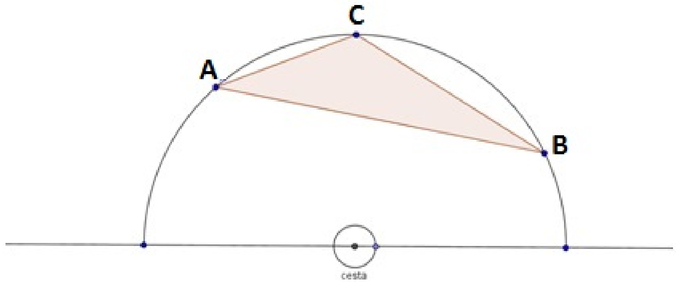


Figura 5.20: Escaleno

- Suponha que todos os jogadores estão à mesma distância, então A, B e C formam um triângulo equilátero.

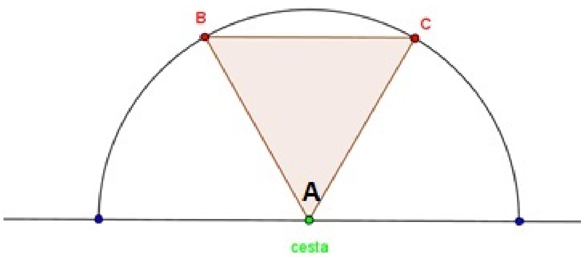


Figura 5.21: Equilátero.

Mudando o formato da quadra

- Supondo que a quadra fosse inserida numa pista de atletismo:

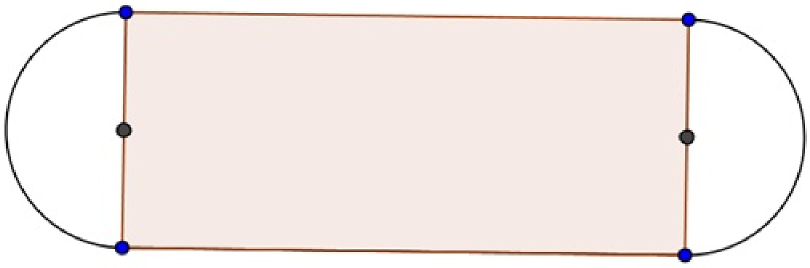


Figura 5.22:

Podemos calcular a área da nova quadra, sabendo que a área da quadra oficial é de $364m^2$, temos que a área da nova quadra é $A_n = 26 \cdot 14 + \pi \cdot (7,5)^2 = 364 + 3 \cdot 56,25 = 532,75m^2$. Ou seja, a quadra oficial equivale aproximadamente a 68% da nova quadra, com isso teríamos um jogo com aproximadamente 14 jogadores.

- Supondo agora a nova quadra num formato da pista de atletismo inserida na quadra oficial.

Figura 5.23:

A área da nova quadra é $A_n = 11 \cdot 14 + \pi \cdot (7,5)^2 = 154 + 3 \cdot 56,25 = 322,75m^2$. Assim, a nova quadra equivale aproximadamente a 88% da quadra oficial; com isso temos um jogo com aproximadamente 9 jogadores.

5.4 Ciclismo

Um bicicleta de aro 26 tem geralmente 36 raios trabalhando aos pares e uma roda de aproximadamente 56cm de diâmetro e um quadro ou "alma"em forma triângular. Com estas informações, podemos explorar a área e o perímetro da circunferência, a lei dos cossenos para o cálculo do ângulo do quadro e as probabilidades de acerto nas trocas de marchas.

Área e Perímetro da Circunferência

- Área da roda: $A = \pi \cdot (28)^2 \cong 2461,76cm^2$
- Comprimento da roda: $C = 2 \cdot \pi \cdot 28 \cong 175,84cm$

Função e Probabilidade

Se a cada pedalada a bicicleta percorre 175,84cm, podemos ter a seguinte função:

$$y = 175,84 \cdot x$$

Onde x representa o número de pedaladas e y a distância percorrida em centímetros.

Se tenho 3 coroas e 7 piões temos um total de $3 \cdot 7 = 21$ possibilidades de marchas diferentes. A coroa grande combinada com um dos três piões pequenos, nos da $3 \cdot 1 = 3$ marchas de velocidade. Se um ciclista muda de marcha ao acaso. Qual é a probabilidade de ser a marcha de velocidade a escolhida?

$$P = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \cong 14\%$$

Lei do cosseno

No quadro de uma bicicleta tem a forma de um triângulo. Suponha que $AB = 60cm$, $BC = 36cm$ e $AC = 52cm$ então,

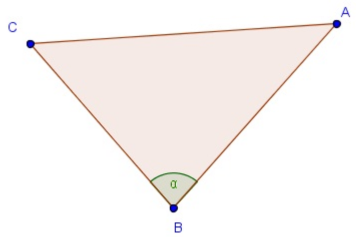


Figura 5.24:

podemos usar a lei do cosseno para calcular o ângulo α

$$52^2 = 36^2 + 60^2 - 2 \cdot 36 \cdot 60 \cdot cos(\alpha)$$

De onde, $cos(\alpha) \cong 0,5$, logo $\alpha = 60°$.

Podemos observar que, se o ângulo α é menor, a bicicleta fica ideal para área planas, para uso urbano e iniciantes; serve para manter o ciclista numa posição de condução mais em pé, o que facilita olhar o trânsito. Ele fica mais exposto ao vento, o que torna a bicicleta mais lenta e terá maior dificuldade em realizar subidas. O pescoço é menos exigido e a lombar passa a ser o amortecedor do ciclista. Enquanto um ângulo α maior, torna a bicicleta ideal para esportistas e profissionais, visa retirar o máximo do funcionamento muscular do corpo do ciclista, facilita arrancadas, subidas e mudanças bruscas de direção, permitindo uma condução agressiva. Como o corpo do ciclista fica mais deitado, há menos arrastos aerodinâmicos, facilitando a manutenção de altas velocidades.

5.5 Ginástica Artística

Com este esporte podemos explorar a circunferência, os polígonos e a inscrição de figuras geométricas.

Circunferência e Inscrição

No solo, o tatame é um quadrado com 12m de lado. Logo, sua área é $A = 12 \cdot 12 = 144m^2$, seu perímetro é $P = 4 \cdot 12 = 48m$ e sua diagonal é $D = 12 \cdot \sqrt{2} \cong 12 \cdot 1,4 \cong 16,8m$.

Se a Dayane dos Santos desse cinco saltos mortais de mesmo tamanho de forma paralela a um dos lados do tatame, utilizando toda sua extensão, então poderíamos imaginar 5 semi-circunferências em cima do tatame, onde a soma de seus diâmetros é a medida do lado do tatame 12. Logo, o raio de cada semicircunferência é $R = \frac{12}{10} = 1,2m$ e a distância percorrida no tatame ao dar um mortal é $D = 2 \cdot R = 2,4m$. E a distância total percorrida no deslocamento áereo é a distância de 5 vezes o perímetro de cada semi-circunferência, isto é,

$$D = \frac{(5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,2)}{2} = 5 \cdot \pi \cdot 1,2 = 5 \cdot 3 \cdot 1,2 = 18m$$

Quantos mortais seriam executados na diagonal? Para encontrar isto, basta saber a medida da diagonal e dividir pelo diâmetro da semi-circunferência, ou seja $M = \frac{16,8}{2,4} = 7$ mortais e, neste caso, a distância total percorrida seria calculada multiplicando o número de salto mortais, que são 7, pelo comprimento do semi-cículo descrito. $Dt = 7 \cdot \pi \cdot 1,2 = 7 \cdot 3 \cdot 1,2 = 25,2m$

Por outro lado, se o tatame fosse um círculo inscrito ao quadrado (tatame oficial), a área do novo tatame (círculo) sería $A_o = \pi \cdot 6^2 = 3 \cdot 36 = 108m^2$ e, como vimos, a área do quadrado é $A_q = 144m^2$. Então, o novo tatame sería 25% menor, ou seja, menos espaço para executar os movimentos, mas teria a vantagem de, em qualquer direção que fosse executado o movimento, o comprimento seria o mesmo.

Se o tatame fosse um círculo circunscrito ao quadrado $A_o = \pi \cdot (8,4)^2 = 3 \cdot 70,56 = 211,68m^2$. O percentual do tatame sería $\frac{211,68}{144} = 1,47$, ou seja, o novo tatame é 47% maior que o oficial, tendo assim mais espaço em qualquer direção para execução dos movimentos e a desvantagem seria ter que fazer uma série que aproveitasse todo esse espaço e nesse caso o desgaste físico seria maior.

Polígonos

Supondo que uma atleta tenha $1m$ de abertura de perna, e no movimento de uma estrela ela forme um pentágono regular, qual é o tamanho da sua perna?

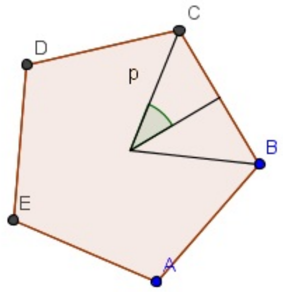


Figura 5.25:

Temos que $Sen(36°) = \frac{0,5}{p}$, assim $p = \frac{0,5}{0,58} \cong 0,86m$, ou seja $86cm$.

Capítulo 6

Atividades

A seguir, listamos uma série de atividades aplicadas nas escolas Fórum Cultural e Miraflores, aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª e 2ª séries do Ensino Médio. Tais atividades têm como fator motivador o uso de esportes no aprendizado de diferentes conceitos matemáticos.

As atividades 4 e 5 foram aplicadas a uma turma de 1ª série do ensino médio do Colégio Fórum Cultural, com alunos entre 14 e 16 anos. As atividades foram divididas em duas partes, como se esclarece abaixo.
1ª parte: A turma foi dividida em trios e cada um deles foi levados para a quadra, onde fizeram a simulação de um circuito, usando o futebol, descrita na atividade e coletaram dados.
2ª parte: Voltaram para a sala e efetuaram os cálculos propostos na atividade.
O tempo gasto foi de aproximadamente 3 horas e o trabalho realizado valeu como uma das notas dentro do período.

As atividades 6 e 7 foram aplicadas a uma turma de 9ª ano do ensino fundamental do colégio Fórum Cultural , com alunos entre 13 e 15 anos. A atividade foi dividida em duas partes, como se esclarece abaixo
1ª parte: A turma foi dividida em trios e cada trio foi levado para a quadra poliesportiva, onde fizeram uma simulação de ataque no vôlei, descrito na atividade, e coletaram as medidas das quadras.
2ª parte:Voltamos para a sala e efetuaram os cálculos propostos na atividade. O tempo gasto foi de aproximadamente 3 horas e o trabalho realizado valeu como uma das notas dentro do período
Em ambas as atividades a realização foi muito positiva, os alunos aprovaram, conseguiram realizar as etapas sem maiores complicações, gostaram de ver a aplicação da teoria, e gostaram muito de realizar uma atividade fora da sala de aula. A maior dificuldade encontrada por eles foi a utilização da trena, pois muitos não a conheciam e nem sabiam como funcionava; no mais, tudo funcionou perfeitamente.

A atividade 9 foi aplicada a uma turma de 2ª ano do ensino médio do colégio Miraflores, com alunos entre 15 e 17 anos. A atividade foi dividida em duas partes, como indicamos a seguir.

1ª parte: Apresentamos o tema polígono de Reuleaux e para cada trio formado pelos alunos, pedimos a cada um, uma apresentação em Power point em que constam definição, a construção e aonde encontramos esses polígonos.

2ª parte: cada grupo fez uma apresentação para a turma, dirigimos uma discussão sobre o tema e, depois, os alunos realizaram a atividade proposta.
Essa atividade foi muito positiva, os alunos gostaram de todas as etapas e o ponto alto foi o conhecimento de algo novo, fora do currículo escolar.
Essa atividade foi pontuada como uma das notas do período, e o tempo gasto nela foram de três aulas, aproximadamente, 50 minutos.

Objetivos e avaliações

1. Objetivos, Competências e habilidades:

   - Identificar e solucionar, de maneira autônoma e eficaz, problemas do cotidiano, cuja solução requeira estratégias de investigação científica e de procedimentos próprios da Matemática.
   - Compreender e explicar fenômenos e situações do mundo atual, por meio da utilização de estratégias, na busca, no armazenamento e no tratamento da informação, na exploração de suas alternativas e de suas representações gráficas e numéricas.
   - Elaborar estratégias pessoais de estimativas, de cálculo mental e de orientação espacial, por meio do raciocínio lógico, para resolução de problemas cotidianos simples.
   - Identificar, sempre que necessário, formas geométricas que compõem o mundo por meio da utilização do conhecimento de seus elementos e de suas propriedades, para desenvolver novas possibilidades de ação em sua vida cotidiana.
   - Compreender e utilizar os conceitos, os procedimentos e as estratégias matemáticas para a interpretação, a valorização e a produção de informações e de mensagens em situações distintas e fenômenos conhecidos.
   - Expressar-se, oral, escrita e graficamente sempre que necessário, em situações suscetíveis de serem tratadas matematicamente, mediante a aquisição e o manejo de vocabulário específico de terminologia e de noções matemáticas.
   - Analisar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas, na formação da opinião própria que permita uma expressão crítica em problemas atuais.

2. Critérios de Avaliação:

   - Competência do aluno/grupo para agregar conhecimento, em termos de interpretação da proposta;
   - Análise da correlação entre a disciplina e situação cotidiana;
   - Realização da atividade;
   - Empenho, determinação e capricho;
   - Valorização do trabalho como espaço de exercício da criatividade

6.1 Atividade 1: Classificação de Triângulos

Leitura do Texto Cordel Matemática: *Triângulos* Autor: *Clerton Gomes*

A geometria pra quem não sabe
Nasceu há muitos anos atrás
Euclides da Alexandria já estudava
Não queria ficar pra trás

E até hoje é ainda
Bastante empregada
Na construção de edifícios
Sua definição é usada

E para começar
Sem fazer nenhum preâmbulo
Vou apresentar para vocês
Tudo sobre triângulos

O triângulo é fascinante
Pela sua elaboração
Figura geométrica muito usada
Nas estruturas de uma construção

Por ser uma figura rígida
E de fácil manuseio
Possui três lados e três ângulos
Digo isso sem receio

Agora vou apresentá-lo
Segundo sua classificação
Quanto aos lados e quanto aos ângulos
Sem nenhuma complicação

Se o triângulo apresentar
A igualdade nos três lados
Será chamado equilátero
Fica assim explicado

Um triângulo quando tem
Apenas dois lados iguais
É conhecido como isósceles
Não esqueça jamais

Mas se em todos os lados
As medidas forem desiguais
Será chamado escaleno
Diferente dos demais

Mas se em todos os lados
As medidas forem desiguais
Será chamado escaleno
Diferente dos demais

Antes que eu esqueça
Quero ainda definir
Se as medidas forem incompatíveis
O triângulo não vai existir

Para entender o que eu disse
Vamos logo compreender
Que a soma dos lados menores
Maior que o maior lado deverá ser

Ao enunciar essa regra
Vou tornar a repetir
Se as medidas forem incompatíveis
O triângulo não vai existir

Um triângulo quanto aos ângulos
Se quiser classificar
É só prestar atenção
O que vou lhe explicar

Mas se o triângulo
Tiver um ângulo obtuso
O chamaremos obtusângulo
Parece até ser confuso

Se em um dos vértices do triângulo
Uma reta sair
Poderemos chamar de altura
Não vá se confundir

Mas se reta dividir o ângulo do triângulo
Em duas partes iguais
Foi traçada a bissetriz
E existem duas outras mais

Para calcular a área do triângulo
Não deixe pra depois
Multiplique Base vezes altura
Divida tudo por dois

E para finalizar
Evitando qualquer problema
A respeito do triângulo
Vou ditar um teorema:

A soma dos ângulos internos
De um triângulo qualquer
É igual a 180°
Viu só como é que é

Se um dos ângulos do triângulo
medir um valor de 90°
Triângulo retângulo vai ser
Viu só como é legal

Se todos os ângulos do triângulo
Agudo se apresentar
Será chamado Acutângulo
Assim vou denominar

O assunto sobre triângulos
É por demais fascinante
É preciso também estudar
Saber disso é importante

E se um dia precisar
De triângulo entender
Comece a ler esse cordel
Com certeza ira aprender

Esta atividade consistiu na leitura do cordel na sala de aula por parte do professor e logo foi passado para os alunos o texto retirando as palavras sublinhadas para ser completado, com a seguinte indicação:

"Leia o texto e complete as lacunas usando as palavras: acutângulo, ângulo, equilátero, escaleno, isósceles, lados, obtusângulo, polígonos, retângulo, altura e bissetriz, prestando atenção nas suas propriedades e definições."

Apesar de não ser um esporte, ressaltamos que a matemática está presente em quase tudo na natureza e a atividade foi dinâmica quase parecendo uma brincadeira.

6.2 Atividade 2: Escalas

Esta atividade consistiu na apresentação da história dos esportes pelo professor, assim como as regras e medidas oficiais de cada quadra esportiva. Com a ajuda de uma malha no geoplano os alunos foram convidados a desenhar em várias escalas cada quadra com as suas medidas oficiais.

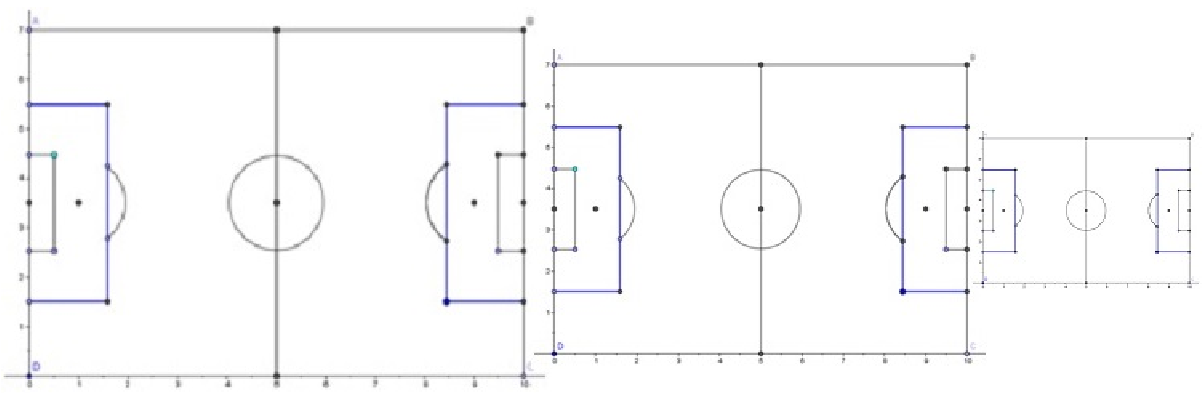


Figura 6.1: Quadra de futebol.

6.3 Atividade 3: Esquema Tático

Nesta atividade, reforçamos a classificação de triângulos. Como vimos na seção 5.1.1, no futebol existem vários esquemas táticos; a atividade consistiu em apresentar estes esquemas numa malha do geoplano, com as indicações e questões apresentadas a seguir.

Etapas da tarefa proposta aos alunos:

- Forme duplas ou trios de jogadores;
- Escolha um esquema tático;
- Represente no geoplano, o esquema escolhido utilizando a idéia de defesa, meio campo e ataque;
- Encontre, utilizando somente três jogadores, o número máximo de triângulos de cada tipo apresentado acima, sendo cada tipo em uma malha e utilizando cores diferentes;

Questões:

1. Existem triângulos com mesma área?
2. Existem triângulos com mesmo perímetro?
3. Num esquema, forme todos os triângulos possíveis, que não tenham áreas em comum.
4. Calcule a área máxima do esquema utilizando todos os jogadores.
5. Calcule o perímetro do esquema utilizando todos os jogadores.
6. Qual percentual do campo o esquema consegue cobrir?

6.4 Atividade 4: Lei dos Cossenos no Futebol

Figura 6.2: Alunos na quadra.

Esta atividade foi realizada na quadra de esporte da escola e na sala de aula com a ajuda do geoplano. O objetivo foi identificar qual é a melhor posição para que o chute leve ao gol, com a ajuda da lei do cosseno. Na sala de aula foi planteado o seguinte problema:

Um aluno fará um circuito com a bola, e durante o circuito escolhera três pontos no qual chutara para o gol, conforme a Figura 6.3. Em cada ponto escolhido, o aluno medirá a distância da posição do chute até as traves, formando assim um triangulo. Pedimos que ele faça um esquema em cada situação.

Os alunos foram levados à quadra de futebol, para entender o problema; nela, eles escolheram posições e fizeram medições. Depois, foram levados à sala de aula, onde formaram várias duplas para resolver o problema no geoplano. No final da aula, foram comparadas todas as possíveis posições entre as duplas e as da quadra da escola e escolhida, dentre todas, a posição mais vantajosa.

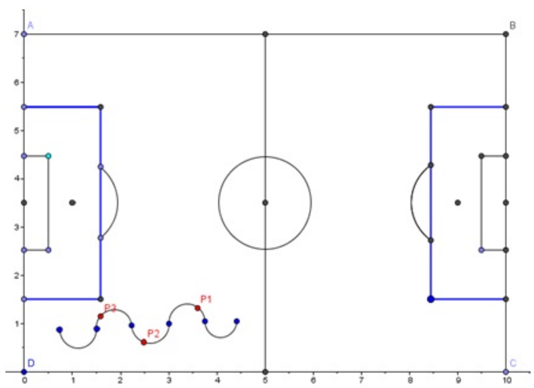


Figura 6.3: Posições de chute.

- Para o 1º chute temos as seguintes medidas $P1M =$ ___; $P1N =$ ___ e $MN =$ ___. Fazendo os cálculos, quanto mede o ângulo em P1?

- Para o 2º chute temos as seguintes medidas $P1M =$ ___; $P1N =$ ___ e $MN =$ ___. Fazendo os cálculos, quanto mede o ângulo em P2?

- Para o 3º chute temos as seguintes medidas $P1M =$ ___; $P1N =$ ___ e $MN =$ ___. Fazendo os cálculos, quanto mede o ângulo em P3?

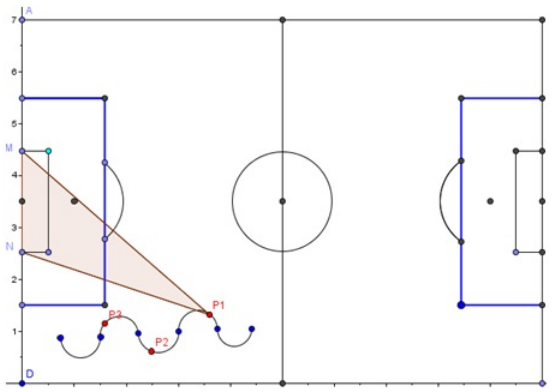


Figura 6.4:

Analisando os três chutes, o que você pode concluir, em relação ao posicionamento para chutar ao gol?

6.5 Atividade 5: Arco Capaz e o Futebol

Esta atividade também foi feita na quadra de esportes e na sala de aula seguindo o mesmo esquema da atividade anterior.

Supondo três jogadores nas posições P_1, P_2 e P_3, como na figura abaixo:

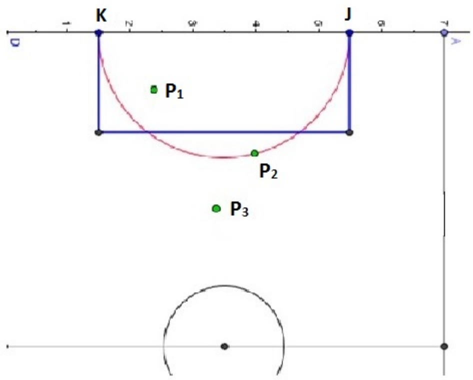


Figura 6.5:

- Construa os triângulos KP_1J, KP_2J e KP_3J.
- Com o auxílio de um transferidor, calcule os ângulos $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ e $\hat{P}_3$

Responda:

1. Se colocássemos um ponto dentro da semicircunferência e construíssemos um triângulo e os outros dois vértices em K e J, o que poderíamos falar em relação ao ângulo P2?
2. Se colocássemos um ponto fora da semicircunferência e construíssemos um triângulo e os outros dois vértices em K e J, o que poderíamos falar em relação ao ângulo P2?
3. Se colocássemos um ponto na semicircunferência e construíssemos um triângulo e os outros dois vértices em K e J, o que poderíamos falar em relação ao ângulo P2?
4. O que podemos concluir, se um ponto pertence à semicircunferência?
5. Se colocássemos um ponto P fora da semicircunferência, unindo os pontos formariamos um triângulo KJP, como podemos classificar esse triângulo?

6.6 Atividade 6: Quadra Poliesportiva

Nesta atividade fornecemos uma quadra poliesportiva no geoplano e pedimos para calcular:

1. Áreas dos retângulos;
2. Se for quadra de basquete, a área do trapézio;
3. Área dos círculos e dos setores circulares;

4. A razão do comprimento da circunferência e o raio para chegar ao número π.
5. Fazer a mudança de unidade métrica (metro para centímetro)
6. Fazer a mudança de unidade de área (m^2 para cm^2)

6.7 Atividade 7: O Teorema de Pitágoras no Vôlei

Esta atividade também foi realizada na quadra de esportes e na sala de aula. Desta vez foram escolhidos grupos de três alunos. Nesta atividade, conciste na simulação de um ataque na rede de vôlei, no qual, de acordo com a figura abaixo temos:

- na posiçao K, os pés do jogador;
- na posição I, aonde haverá o corte na bola, sobre a rede;
- e na posição J, aonde a bola cairá na quadra adversária.

Os alunos revezam-se em suas posições e passam para o papel os dados coletados.

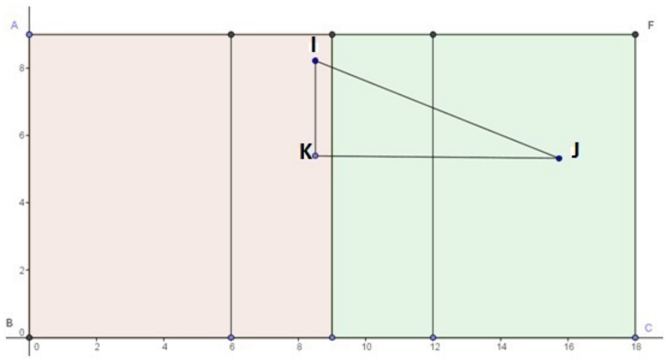


Figura 6.6:

Assim, para cada corte temos as seguintes medidas $KI = \_\_$ e $KJ = \_\_$. Usando o Teorema de Pitágoras, calcule $IJ = \_\_$. Fazendo os cálculos, quanto mede o ângulo de corte em $\hat{I}$?

6.8 Atividade 8: Função Quadrática no Vôlei

A popularização do vôlei no Brasil ocorreu no fim da década de 1970 e início da década de 1980. Um dos responsáveis foi o jogador Bernard Rajzman, que estreiou aos 17 anos na Seleção Brasileira, foi capitão e um dos líderes da geração de prata, assim chamada por ter conquistado a medalha de prata nos Jogos Olímpicos de Los Angeles, em 1984. Em 1982, o ginásio do Maracanãzinho foi palco do primeiro Mundialito de Vôlei. Na vitória brasileira sobre a extinta União Soviética, por 3 sets a 2, Bernard deu pela primeira vez, em competição internacional, o famoso saque "jornada nas estrelas". Sua estratégia era ficar de lado para a quadra, com o ombro direito paralelo à linha de fundo, lançar a bola suavemente para cima e golpeá-la com o braço direito. A bola alcançava cerca de 25 m, e fazia essa jornada com efeito, o que dificultava a recepção dos adversários.

Figura 6.7:

Em uma partida de vôlei, Rafael utilizou a jogada do Bernard, executando o saque jornada nas estrelas. O saque de Rafael descreveu aproximadamente uma trajetória parabólica que pode ser modelada pela função $h(x) = -0,398d^2 + 5,572d$, em que d representa a distância percorrida horizontalmente em metros, e h, a altura, também em metros. Responda:

1. Qual foi a distância horizontal que o saque de Rafael alcançou?
2. Qual foi a altura máxima alcançada pela bola no saque de Rafael?
3. Esboce um gráfico relacionando a distância e a altura alcançada pela bola com $d \in [0, 14]$, na folha milimetrada.

6.9 Atividade 9: Triângulo de Reuleaux e o Ciclismo

O triângulo de Reuleaux é um exemplo simples de forma geométrica plana não circular de diâmetro constante. O nome desse triângulo foi dado em homenagem ao engenheiro alemão Franz Reuleaux que, no século 19, projetou mecanismos envolvendo essa forma geométrica. Reuleaux é considerado por muitos historiadores da ciência como sendo o pai da cinemática por suas contribuições a essa área da física. Apesar do nome, o triângulo de Reuleaux não é propriamente um triângulo, mas, sim, uma curva formada a partir de um triângulo equilátero da seguinte maneira: partindo de um triângulo equilátero ABC de lado L, fazemos três arcos de circunferência de raio L, centrados em A, B e C, conforme indica a figura a seguir.

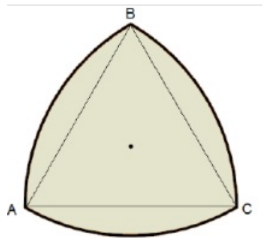


Figura 6.8: Triângulo de Reuleaux

De forma geral, chamamos de polígono de Reuleaux a uma curva particular do universo das curvas de diâmetro constante, obtida a partir de um polígono convexo. O polígono de Reuleaux tem que ser formados por arcos circulares, de mesmo raio, centrados nos vértices opostos aos lados do polígono.

Depois do professor ter introduzido o assunto, foram levantados os seguintes questionamentos.

Supondo que a roda de uma bicicleta fosse o triângulo de Reuleaux, você acha que esta andaria? Seria menos eficiente que uma bicicleta tradicional? Por quê?

Figura 6.9: Reuleaux bike - Qingdao, China

Imediatamente, foi proposto o seguinte dever de casa: Construir, usando cartolina, isopor, madeira ou outro material, um triângulo de Reuleaux e um círculo com o mesmo diâmetro. Com ajuda destes objetos responda as questões anteriores. Além disso, responda também:

- Qual é o comprimento da circunferência?
- Qual é o perímetro do polígono de Reuleaux?
- Se dobrássemos o diâmetro do círculo e do triângulo de Reuleaux, haveria alguma mudança no comprimento deles?
- Existe alguma relação entre o comprimento da circunferência e do triângulo de Reuleaux de mesmo diâmetro? Qual?
- Você já viu o polígono de Reuleaux em algum lugar? Aonde?
- Você conhece alguma aplicação para o polígono de Reuleaux?

Figura 6.10: Tampa de esgoto

- Calcule e compare as áreas de um triângulo de Reuleaux (A_t), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo (A_c) de diâmetro 1.
- Calcule e compare os perímetros de um triângulo de Reuleaux (P_t), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo (P_c) de diâmetro 1.
- Dado o quadrilátero PQRS, calcule seus respectivos ângulos.

6.10 Conclusões

Os trabalhos propostos nas escolas foram uma novidade para os alunos, eles puderam experimentar uma atividade cujo tema foi o esporte, um assunto de interesse geral entre os jovens, associado ao ensino da matemática .

O trabalho proposto na Escola Fórum Cultural, localizado no município de Niterói (RJ), nas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental II e 1ª série do Ensino Médio, foi muito apreciado pelos discentes. Conseguimos associar uma situação esportiva e assim trabalhar conteúdos curriculares. Desta forma, houve um total comprometimento, interesse e entusiasmo de ambas as partes-discente e docente.

Após a atividade, foi elaborado um questionário, como descrito abaixo, para que fosse respondido pelos alunos e sem a necessidade de identificação. As respostas foram bem positivas. Os comentários, bem pertinentes, de como tinha sido bom trabalhar fora de sala e de que não sabiam que poderiam aplicar a matemática daquela maneira. O resultado da avaliação de aprendizagem foram boas, o tempo gasto em média foi de 3 horas e a formação de trios funcionou perfeitamente, sendo dois alunos na mensuração e um anotador.
Questionário:

- De que forma a atividade ajudou no aprendizado do conteúdo?
- Você acha válida as atividades? Por que?
- O que você gostou da atividade?

- Você acha que existe alguma relação entre esporte e a matemática?
- Qual dificuldade encontrada na realização da atividade?

E essas são algumas respostas:

" Com a atividade podemos exercitar mais o conteúdo, e reforçar o aprendizado"

"Eu gostei do fato da gente sair do ambiente da sala de aula e explorar o conteúdo da matemática com outras disciplinas"

"Foi uma nova maneira de aprender a matéria"

"Foi um jeito de ver aonde a matemática se encaixa"

"Eu esqueci de como era usar o transferidor"

"No começo, na aplicação da fórmula"

Na minha percepção, a maior dificuldade durante o trabalho foi o uso da trena. Precisamos orientar sobre seu uso na metragem e nos cálculos. O emprego da calculadora foi liberado, e pudemos, assim, aproveitar para trabalhar um pouco a tecnologia.

Na Escola Miraflores, localizada também no município de Niterói (RJ), a atividade foi aplicada numa turma da 2° série do Ensíno médio. Foram organizados trios de alunos para a execução das tarefas. As atividades propostas foram realizadas pelos aluno com muita qualidade, tanto a apresentação do tema quanto a confecção do polígono de Reuleaux. O ponto principal foi a discussão durante a apresentação dos trabalhos, sendo ela fundamental para o ótimo aproveitamento da atividade. Os alunos gostaram de trabalhar um conteúdo que não faz parte da grade curricular.

Finalizando, os objetivos foram cumpridos com as tarefas propostas, o que tornou o aprendizado algo leve e prazeroso. Segundo as respostas relacionadas ao questionário aplicado, a opinião dos alunos de ambas as escolas foi praticamente a mesma: que uma atividade diferente, extra e com foco no esporte, ajudou na integração dos mesmos e é uma forma de melhor entendimento da matemática .

Concluimos que as atividades propostas motivam o aluno no aprendizado, bem como o professor no ensino de uma disciplina, considerada, às vezes, difícil para grande número pessoas.

Capítulo 7

Problemas Relacionados ao Esporte

Neste capítulo apresentamos uma série de questões nas quais se relacionam a matemática e o esporte, que forma parte do acervo do portal *www.sprweb.com.br* à qual a escola Miraflores fornece o acesso aos seus professores, e foram realizadas no ENEM, exame de acesso a algumas faculdades e concursos, sendo assim de domínio público.

1) **(Ufsc)** Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).
Para a transmissão da copa do mundo de 2014 no Brasil, serão utilizadas câmeras que ficam suspensas por cabos de aço acima do campo de futebol, podendo, dessa forma, oferecer maior qualidade na transmissão. Suponha que uma dessas câmeras se desloque por um plano paralelo ao solo orientada através de coordenadas cartesianas. A figura abaixo representa o campo em escala reduzida, sendo que cada unidade de medida da figura representa 10m no tamanho real.

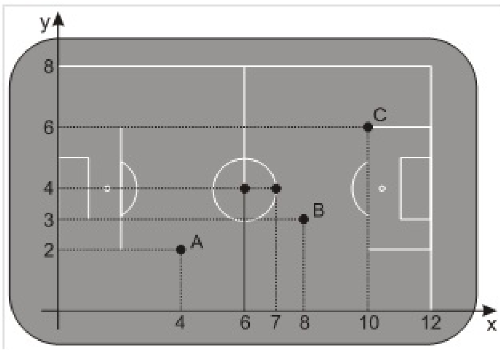


Figura 7.1:

(01) A equação da circunferência que delimita o círculo central do campo na figura é $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 51 = 0$

(02) Se a câmera se desloca em linha reta de um ponto, representado na figura por $A(4, 2)$ até outro ponto, representado na figura por $C(10, 6)$ então a equação da reta que corresponde a essa trajetória na figura é$2x - 3y - 2 = 0$

(04) Na figura, o ponto $B(8, 3)$ está a uma distância de 8 unidades da reta que passa pelos pontos $a(4, 2)$ e $C(10, 6)$

(08) Os pontos$(7, 4), (4, 2)$ e $(10, 6)$ não são colineares.

(16) No tamanho real, a área do círculo central do campo de futebol é igual a$100\pi m^2$

Gabarito: 1+2+16=19
Conteúdos: Geometria Analítica - fundamentos, reta e circunferência.
G*eometria Plana - àreas de figuras planas.*

2) **(Ufpb)** Para estimular a prática de atletismo entre os jovens, a prefeitura de uma cidade lançou um projeto de construção de ambientes destinados à prática de esportes. O projeto contempla a construção de uma pista de atletismo com 10 m de largura em torno de um campo de futebol retangular medindo 100 m x 50 m. A construção será feita da seguinte maneira: duas partes da pista serão paralelas às laterais do campo; as outras duas partes estarão, cada uma, entre duas semicircunferências, conforme a figura a seguir.

Figura 7.2:

A partir desses dados, é correto afirmar que a pista de atletismo terá uma área de (Use $\pi = 3,14$):

a) $2.184m^2$

b) $3.884m^2$

c) $3.948m^2$

d) $4.284m^2$

e) $4.846m^2$

Gabarito: b
Conteúdos: Geometria Plana - áreas de figuras planas.

3) **(Enem)** O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

a) 1

b) 4

c) 5

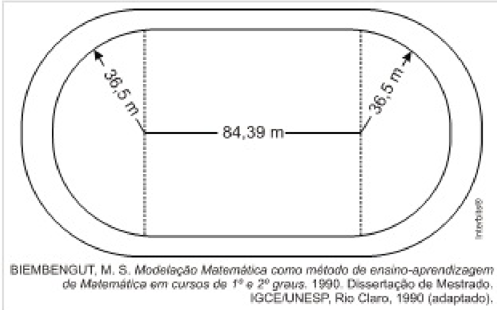


Figura 7.3:

d) 7

e) 8

Gabarito: a
Conteúdos: Geometria plana - circunferência e círculo

4) **(UFSM)** Sabe-se que a prática regular de esportes melhora o aprendizado escolar. O gráfico a seguir representa o resultado de uma pesquisa realizada junto a um grupo de 1500 alunos do ensino médio, com o qual foi feito um levantamento a respeito do esporte praticado regularmente.

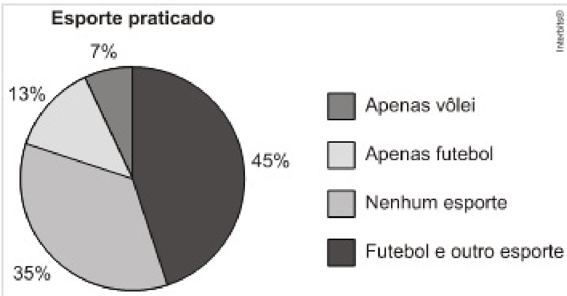


Figura 7.4:

De acordo com a pesquisa, se x é o número de alunos do ensino médio que pratica apenas vôlei, então:

a) x é maior que 150

b) x pertence ao domínio da função $f(x) = \frac{5}{3x-315}$

c) $x \in [-100, 200] \cap [100, 300]$

d) x é igual a 195

e) x satisfaz a equação $(x - 105)(x - 195) + 5 = 0$

Gabarito: c
Conteúdos: grandezas proporcionais e porcentagens

5) **(Ufg)** As Regras Oficiais de Voleibol, aprovadas pela Federação Internacional de Voleibol (FIVB), definem que a quadra para a prática desse esporte deve ser retangular, medindo 18 m de comprimento por 9 m de largura.
A rede, colocada verticalmente sobre a linha central da quadra, deve ter uma altura de 2,43 m para jogos profissionais masculinos. Em cada campo da quadra há uma linha de ataque, desenhada a 3 m de distância da linha central, marcando a zona de frente, conforme a figura a seguir.

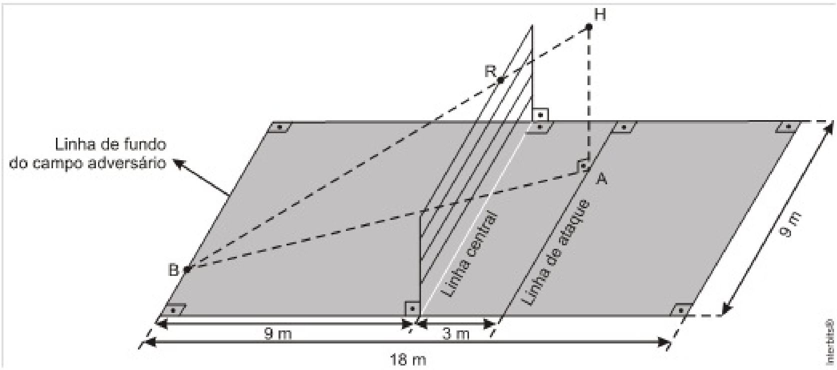


Figura 7.5:

Durante um jogo profissional masculino, um jogador fez um ponto do seguinte modo: estando sobre a linha de ataque de seu campo, saltou verticalmente batendo na bola no ponto H, fazendo-a descrever uma trajetória retilínea, passando rente ao topo da rede, no ponto R, tocando a quadra exatamente num ponto B, pertencente à linha de fundo do campo adversário.

Segundo as condições descritas, calcule a altura, AH, que o jogador alcançou para conseguir fazer o ponto.

Gabarito: altura de 3,24m
Conteúdos: Geometria Plana - áreas de figuras planas

6) **(Unifesp)** Um comício deverá ocorrer num ginásio de esportes, cuja área é delimitada por um retângulo, mostrado na figura.

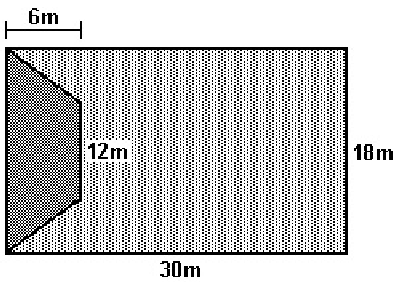


Figura 7.6:

Por segurança, a coordenação do evento limitou a concentração, no local, a 5 pessoas para cada $2m^2$ de área disponível. Excluindo-se a área ocupada pelo palanque, com a forma de um trapézio (veja as dimensões da parte hachurada na figura), quantas pessoas, no máximo, poderão participar do evento?

a) 2700

b) 1620

c) 1350

d) 1125

e) 1050

Gabarito: d
Conteúdos: Geometria Plana - áreas de figuras planas

7) **(Uel)** Numa prova de arremesso de peso, figura a seguir, considere que a trajetória do objeto é parabólica.

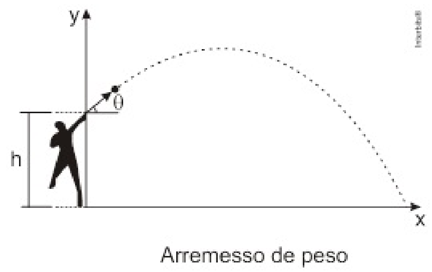


Figura 7.7:

Sabe-se que:
A aceleração da gravidade é: $g = 10m/s^2$
A velocidade inicial é: v_0
O ângulo do arremesso é: θ
A altura inicial do arremesso é: h
A equação horária do movimento é: $s = s_0 + v_0 t + at^2$

Nestas condições, a equação da parábola é:

a) $y = h + \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} \cdot x - \frac{5x^2}{v_0^2 \cdot cos^2(\theta)}$

b) $y = h + \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \cdot x - \frac{5x^2}{v_0^2 \cdot cos^2(\theta)}$

c) $y = h + \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \cdot x - \frac{5x^2}{v_0^2 \cdot sen^2(\theta)}$

d) $y = h + \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \cdot x + \frac{5x^2}{v_0^2 \cdot cos^2(\theta)}$

e) $y = h + sen(\theta) \cdot x - \frac{5x^2}{v_0^2 \cdot cos^2(\theta)}$

Gabarito: b
Conteúdos: Funções - função composta

8) **(Cps)** A corrida de São Silvestre é disputada tradicionalmente no dia 31 de dezembro na cidade de São Paulo. São 15 quilômetros de percurso dentro da cidade, em trechos de asfalto, com subidas e descidas. Os atletas que dela participam precisam de um excelente condicionamento físico para conseguir terminar a prova, e com sucesso, em primeiro lugar.

Um atleta resolve fazer um programa de condicionamento, conforme tabela:

Semana	metros percorridos x dias
1	1000
2	1500
3	2000
4	2500

Se (C) representa o condicionamento semanal, (S) o número de semanas e (A) o acréscimo de distância percorrida por semana

a) $C = 1000 + (S - 1) \cdot A$

b) $C = 500 + 1000 \cdot (S - 1) \cdot A$

c) $C = A + 1000 \cdot (S - 1)$

d) $C = A + 500 \cdot (S - 1)$

e) $C = (1000 + S) \cdot A$

Gabarito: a
Conteúdos: Função - função linear

9) **(Ufu)** Para participar de um campeonato de Futsal, um técnico dispõe de 3 goleiros, 3 defensores, 6 alas e 4 atacantes. Sabendo-se que sua equipe sempre jogará com 1 goleiro, 1 defensor, 2 alas e 1 atacante, quantos times diferentes o técnico poderá montar?

a) 216

b) 432

c) 480

d) 540

Gabarito: d
Conteúdos: Análise Combinatória - combinação

10) **(Fuvest)** Participam de um torneio de voleibol, 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada. Na 1^a fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam

para a 2^a fase. Na 2^a fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é

a) 39

b) 41

c) 43

d) 45

e) 47

Gabarito: d
Conteúdos: Análise Combinatória - combinação

11) **(Enem)** O excesso de peso pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância como a maratona (42,2km), a meia-maratona (21,1km) ou uma prova de 10km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de peso, muitos atletas utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico:

Altura(m)	Peso (Kg) ideal para atleta masculino de ossatura grande, corredor de longa distância
1,57	56,9
1,58	57,4
1,59	58,0
1,60	58,5
...	...

Figura 7.8:

Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 63kg e com altura igual a 1,59m, que tenha corrido uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em:

a) $0,32$ minutos.

b) $0,67$ minutos.

c) $1,60$ minutos.

d) $2,68$ minutos.

e) $3,35$ minutos.

Gabarito: e
Conteúdos: Função - função linear

12) **(Cpcar)** Lucas e Mateus são apaixonados por futebol. Eles praticam futebol no quintal de casa, que é totalmente plano e possui uma rede de 3m de altura.

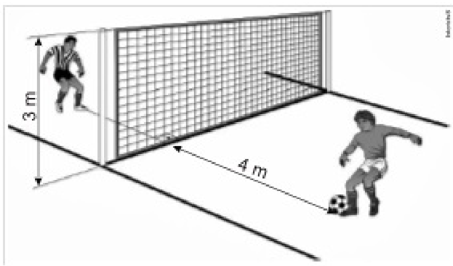


Figura 7.9:

Numa brincadeira, Mateus posiciona a bola a 4m da rede e Lucas varia sua posição em lado oposto à rede, aproximando-se ou afastando-se dela, conservando uma mesma linha reta com a bola, perpendicular à rede. Mateus lança a bola para Lucas, com um único toque na bola, até que ela atinja o chão, sem tocar a rede.

Considere um plano cartesiano em que: Cada lançamento realizado por Mateus é descrito por uma trajetória parabólica; Lucas e o ponto de partida da bola estão no eixo x e a posição da bola é um ponto (x, y) desse plano, onde y é a altura atingida pela bola, em metros, em relação ao chão

Assinale, dentre as alternativas abaixo, aquela que tem a lei de uma função f que satisfaz às condições estabelecidas na brincadeira de Lucas e Mateus.

a) $f(x) = -\frac{x^2}{8} + 2$

b) $f(x) = -\frac{3x^2}{16} + 3$

c) $f(x) = -\frac{x^2}{16} + \frac{x+15}{4}$

d) $f(x) = -0,1 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x + 4,8.$

Gabarito: d
Conteúdos: Função - função quadrática

13) **(Unesp)** O gol que Pelé não fez

Na copa de 1970, na partida entre Brasil e Tchecoslováquia, Pelé pega a bola um pouco antes do meio de campo, vê o goleiro tcheco adiantado, e arrisca um chute que entrou para a história do futebol brasileiro. No início do lance, a bola parte do solo com velocidade de 108 km/h (30 m/s), e três segundos depois toca novamente o solo atrás da linha de fundo, depois de descrever uma parábola no ar e passar rente à trave, para alívio do assustado goleiro.

Na figura a seguir vemos uma simulação do chute de Pelé.

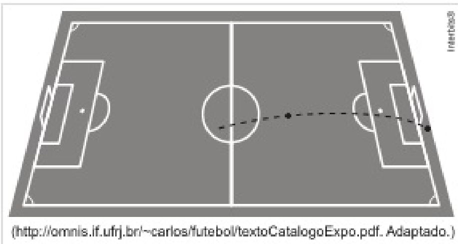


Figura 7.10:

Considerando que o vetor velocidade inicial da bola após o chute de Pelé fazia um ângulo de 30° com a horizontal ($sen(30°) = 0,50$ e $cos(30°) = 0,85$) e desconsiderando a resistência do ar e a rotação da bola, pode-se afirmar que a distância horizontal entre o ponto de onde a bola partiu do solo depois do chute e o ponto onde ela tocou o solo atrás da linha de fundo era, em metros, um valor mais próximo de:

a) $52,0$

b) $64,5$

c) $76,5$

d) $80,4$

e) $86,6$

Gabarito: c
Conteúdos: Trigonometria - razões trigonométricas no triângulo retângulo

14) **(Uema)** A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas formam os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente, pode ser utilizado o Teorema de Descartes-Euler, $A + 2 = V + F$

Figura 7.11:

a) 80 e 60

b) 80 e 50

c) 70 e 40

d) 90 e 60

e) 90 e 50

Gabarito: d
Conteúdos: Geometria Espacial - superfície poliédricas e poliedros

15) **(Insper)** A figura mostra parte de um campo de futebol, em que estão representados um dos gols e a marca do pênalti (ponto P).

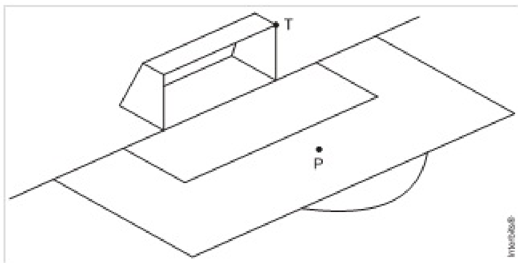


Figura 7.12:

Considere que a marca do pênalti equidista das duas traves do gol, que são perpendiculares ao plano do campo, além das medidas a seguir, que foram aproximadas para facilitar as contas.

- Distância da marca do pênalti até a linha do gol: 11 metros.
- Largura do gol: 8 metros.
- Altura do gol: 2,5 metros.

Um atacante chuta a bola da marca do pênalti e ela, seguindo uma trajetória reta, choca-se contra a junção da trave esquerda com o travessão (ponto T). Nessa situação, a bola terá percorrido, do momento do chute até o choque, uma distância, em metros, aproximadamente igual a

a) 12

b) 14

c) 16

d) 18

e) 20

Gabarito: a
Conteúdos: Geometria Plana - relações métricas no triângulo retângulo

16) **(Unesp)** No futebol, um dos gols mais bonitos e raros de se ver é o chamado gol olímpico, marcado como resultado da cobrança direta de um escanteio.

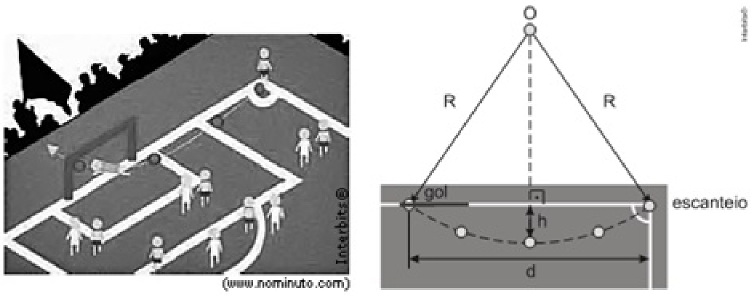


Figura 7.13:

Suponha que neste tipo de gol:

1. A projeção da trajetória da bola descreva um arco de circunferência no plano do gramado;
2. A distância (d) entre o ponto da cobrança do escanteio e o ponto do campo em que a bola entra no gol seja 40m;
3. A distância máxima (h) da projeção da trajetória da bola à linha de fundo do campo seja 1m.

Determine o raio da circunferência (R), em metros, do arco descrito pela trajetória da bola, com uma casa decimal de aproximação.

Gabarito: 200,5m
Conteúdos: Geometria Plana - relações métricas no triângulo retângulo

17) **(Uerj)** Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras a seguir.

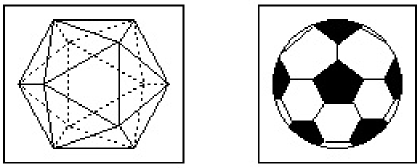


Figura 7.14:

Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha.
Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

a) $7,0m$

b) $6,3m$

c) $4,9m$

d) $2,1m$

Gabarito: b
Conteúdos: Geometria Espacial - superficie poliédrica e poliedros

18) **(Uft)** Um jogador de futebol, ao bater uma falta com barreira, chuta a bola de forma a encobrí-la. A trajetória percorrida pela bola descreve uma parábola para chegar ao gol.

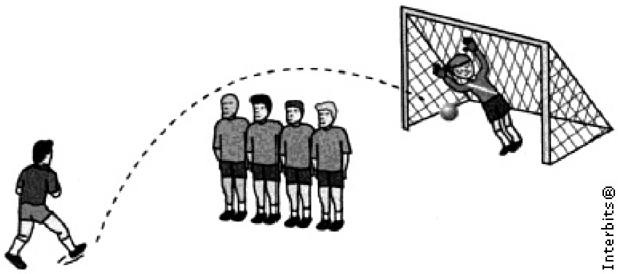


Figura 7.15:

Sabendo-se que a bola estava parada no local da falta no momento do chute, isto é, com tempo e altura iguais a zero. Sabendo-se ainda, que no primeiro segundo após o chute, a bola atingiu uma altura de 6 metros e, cinco segundos após o chute, ela atingiu altura de 10 metros.

Pode-se afirmar que após o chute a bola atingiu a altura máxima no tempo igual a:

a) 3 segundos

b) $3,5$ segundos

c) 4 segundos

d) 4, 5 segundos

e) 5 segundos

Gabarito: b
Conteúdos: Função - função quadrática

19) **(Uerj)** Três corredores - A, B e C - treinam sobre uma pista retilínea. As posições ocupadas por eles, medidas a partir de um mesmo referencial fixo, são descritas pelas funções

$$S_A = 5t + 3, \;\; S_B = 2t + 9 \;\; e \;\; S_C = t^2 - 2t + 9.$$

Nestas funções, a posição S é medida em metros e o tempo t é medido em segundos. Durante a corrida, o número de vezes em que a distância entre os corredores A e B é igual à distância entre os corredores B e C corresponde a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Gabarito: c
Conteúdos: Função - função quadrática

20) **(Uerj)** Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão"chutou a bola em direção ao gol, de 2,30m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.

A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura a seguir:

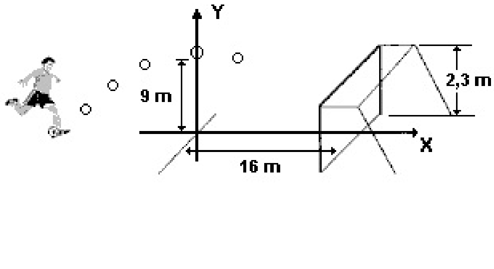


Figura 7.16:

A equação da parábola era do tipo: $y = \frac{x^2}{36} + c$

O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:

a) na baliza

b) atrás do gol

c) dentro do gol

d) antes da linha do gol.

e) 20

Gabarito: c
Conteúdos: Função - funçao quadrática

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Cláudio Lopes de; *GeoGebra, um bom software livre.* Revista do Professor de Matemática, n°67, 2008.

[2] ATRACTOR; *A Matemática do Futebol.* Gazeta de Matemática n 161-2010

[3] AYALA, Thiago Melo; *Bike fit e sua importância no ciclismo.* Revista Movimento, vol 2, 2009

[4] BARBOSA, João Lucas Marques; *Geometria Euclidiana Plana.* SBM, coleção do professor,1997.

[5] BOYER, Carl Benjamin; *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

[6] BRASIL; *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.

[7] EVANGELISTA, Maria Betânia Evangelista da Silva; *Aprendendo a representar escala em gráficos: Um estudo de intervenção.* Dissertação de mestrado em educaçao matemática e tecnológia, UFPE, 2014

[8] EVES, Howard; *Introdução à História da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora UnicamP, 2004.

[9] FOULIS, Munem; *Cálculo.* Ed Guanabara,1982.

[10] IMENES, Luiz Márcio; *Matemática-Imenes e Lellis.* Ed Moderna, 2010.

[11] LIMA, Elon Lages; *Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança.* Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[12] MACHADO, Rui; *A Matemática pelo Basquetebol.* Gazeta de matematica N 161-2010

[13] MELLO, J.L.P.; *Polígonos de Reuleas a e generalização de PI.* Revista do professor de matemática, N 81, 2 quadrimestre de 2013, SBM, RJ,2013.

[14] PAIVA, Manoel; *Matemática.* Coleção Moderna Plus,2010.

[15] Voloch, J.F; *Curvas de Largura Constante.* Matemática Universitária, n°5 junho de 1997,69-75.

[16] WAGNER, Eduardo; *Uma Introdução às Construções Geométricas.* Brasil, OBMEP, 2012.

SITES:

[17] CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE BASKETBALL; disponível em *http://www.cbb.com.br.*

[18] CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL; disponível em *http://www.cbf.com.br.*

[19] CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE VOLEIBOL; disponível em *http://www.cbv.com.br.*

[20] CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE CICLISMO; disponível em *http://www.cbc.esp.br.*

[21] CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE GINÁTICA; disponível em *http://www.cbginastica.com.br.*