UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WALAS DA SILVA SANTOS

PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

ILHÉUS – BAHIA

2017

WALAS DA SILVA SANTOS

PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

ILHÉUS – BAHIA

2017

S237 Santos, Walas da Silva.
Proposta de abordagem dos conceitos básicos de matemática financeira no ensino básico / Walas da Silva Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.
81 f. : il.

Orientador: Vinicius Augusto T. Arakawa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Referências: f. 81.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática financeira. 3. Professores de matemática – Formação. 4. Atividades criativas na sala de aula. I. Título.

CDD 510.7

WALAS DA SILVA SANTOS

PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito final à obtenção do título de mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 09 de março de 2017

Vinícius Augusto Takahashi Arakawa - Dr
UESC
(Orientador)

Claudemir Mota da Cruz- Me
UESC

Roque da Silva Lyrio- Me
(Membro Externo – IFBA Valença)

ILHÉUS – BAHIA
2017

AGRADECIMENTOS

Principalmente a Deus reconhecendo que não sou merecedor, mas tenho sido alvo da sua graça e imensurável amor, por ter me dado forças em todo esse tempo, por ter atendido às minhas orações, especialmente os livramentos nas estradas, percurso de aproximadamente 1200 km de ida e volta.

À minha esposa Ediléia que sempre me apoiou e me deu forças nos momentos difíceis e meus queridos filhos Ester e Estevão que me serviram de inspiração.

Ao meu orientador, professor Doutor Vinicius Augusto Takahashi Arakawa pelo grande apoio e também pela sua grande competência, pois nunca mediu esforços para colaborar na minha formação, desde as disciplinas lecionadas até a orientação deste trabalho.

A todos os professores do programa PROFMAT da UESC que se empenharam em dá o melhor e desta forma contribuíram imensamente em minha aprendizagem e formação.

Aos meus colegas de curso, especialmente Almir Cabral Ferreira (companheiro de estudos e estradas em todo o curso), Vinicius Sertório e Roberto Loscha que ajudaram bastante a turma com suas colaborações e conhecimentos.

À minha colega de trabalho Marcela Loures que de forma indireta muito contribuiu na elaboração deste trabalho com a sua experiência de Mestre em Educação Matemática.

À minha diretora Adriana Bonatto que desde que iniciei o curso não mediu esforços para colaborar e apoiar em todas as etapas vivenciadas.

À CAPES pelo apoio financeiro, recurso esse que foi essencial à minha formação

Meus sinceros agradecimentos a todos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo contemplar os temas da matemática financeira que deveriam ser trabalhados no ensino médio e que seriam primordiais para uma boa formação dos alunos de modo que eles possam aplicá-los de forma prática (financiamentos de naturezas diversas: crédito direto ao consumidor, financiamentos habitacionais, financiamentos de veículos, empréstimos a pessoas físicas e jurídicas, dentre outros) e caso queiram seguir carreira em áreas que exijam conhecimentos financeiros e que os mesmos tenham uma base sólida para dar continuidade em suas preparações para concursos públicos. O foco desta dissertação é expor ao professor de matemática a importância da matemática financeira e realizar a conexão com a realidade em que seus alunos estão inseridos, ir além do que trazem os livros didáticos, formando alunos cidadãos críticos às tomadas de decisões que podem mudar suas vidas. Ao final deste trabalho é apresentada uma série de atividades contextualizadas de matemática financeira como sugestões voltadas ao cotidiano do aluno para o professor aplicar em sala de aula.

Palavras - chave: Matemática Financeira. Financiamentos. Atividades Contextualizadas.

ABSTRACT

This work aims to approach the topics of financial mathematics that should be worked in high school and that would be essential for a good training of students so that they can apply them in their practices (financing of various natures: credit consumer loans, housing finance, vehicle financing, loans to individuals and legal entities, among others). Besides this, if the students desire to pursue careers in areas that require financial knowledge, they will have a solid basis for continuing their preparation for public tenders. The focus of this dissertation is to show to the mathematics teacher the relevance of financial mathematical and doing connection to the reality in which the students are inserted, to go beyond what the textbooks bring, forming students critical citizens to the decisions that can change their lives. At the end of this paper is presented a series of contextualized activities of financial mathematics as suggestions, aimed at the everyday of the student for the teacher to apply in the classroom.

Keywords: Financial math. Financing. Contextualized Activities

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É muito comum no dia a dia, nos depararmos com situações relacionadas a porcentagens, ganho de capital, financiamentos, empréstimos, inflação, entre outros. No entanto, é perceptível que muitos dos nossos alunos de nível médio não possuem domínio em questões de conhecimento financeiro.

Enfrentamos um momento muito delicado em nossa economia. Inflação crescendo a cada dia, fazendo com que o dinheiro valha cada vez menos, isto é, o poder de compra diminuindo cada vez mais. Nesse cenário, a educação financeira, torna-se primordial para possibilitar aos nossos alunos condições e caminhos de minimizar tal crise, aprendendo a como economizar, como fugir de juros abusivos, de tal forma que a aprendizagem seja transpassada aos pais e familiares que não sabem fazer o bom uso do dinheiro.

A matemática financeira em sua aplicabilidade é capaz de despertar nos alunos o gosto pelas finanças, passando a compreender como funcionam empréstimos bancários, financiamentos de carros, de imóveis, cartões de crédito, etc. Vale ressaltar, que nos dias atuais o mau uso dos cartões de crédito tem contribuído para o alto índice de inadimplência, o que mostra que o conhecimento financeiro é de extrema importância no contexto pessoal e social.

A ideia central deste trabalho se baseia em como desenvolver a matemática financeira em sala de aula explorando o tema de maneira aprofundada, de forma que o aluno adquira uma base sólida e, acima de tudo, se torne um cidadão conscientizado capaz de aplicar o conhecimento adquirido no meio familiar.

Esta dissertação é estruturada da seguinte forma: iniciamos o primeiro capítulo fazendo uma conexão dos Parâmetros Curriculares Nacionais com a matemática financeira, expomos como é a abordagem da educação financeira no currículo Básico Comum do Estado do Espírito Santo, apresentamos alguns questionários respondidos por professores das redes estaduais, privadas e também do ensino superior quanto à abordagem da matemática financeira nas escolas e universidades e trazemos uma análise de alguns livros didáticos quanto à abordagem do tema.

No segundo capítulo é apresentado uma proposta de abordagem aprofundada dos conceitos básicos de matemática financeira no ensino médio, relacionando juros simples a função afim e progressão aritmética, juros compostos a função exponencial e progressão geométrica, equivalências de capitais, taxas de juros, séries uniformes, renda perpétua, amortizações e, para aplicar os conhecimentos adquiridos, os alunos são desafiados ao final com questões de Enem e concursos públicos relacionados aos tópicos trabalhados anteriormente.

No terceiro capítulo é sugerida uma série de questões contextualizadas de matemática financeira voltada ao cotidiano do aluno em forma de proposta de atividade de sala de aula e também são apresentados alguns comentários relevantes para o professor aplicar em sala de aula.

1. A REALIDADE ATUAL DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

O campo de estudo da matemática financeira é o valor do dinheiro no tempo, nos pagamentos de empréstimo, nas aplicações de dinheiro, entre outros, o que mostra que nos dias atuais é de suma importância aprender sobre finanças, uma vez que vivemos em um mundo capitalista. Desta forma, planejar, organizar e controlar nossas entradas e saídas de dinheiro é um exercício que deve ser iniciado com os estudantes da Educação Básica, uma vez que acreditamos ser esta uma estratégia para formarmos consumidores conscientes. A educação financeira pode evitar futuros problemas financeiros por meio da promoção de reflexões acerca das tomadas de decisões, para que estas priorizem a estabilidade financeira.

Em muitos momentos, o professor de matemática é questionado por seus alunos a respeito da aplicabilidade de alguns conteúdos em seu cotidiano, onde dependendo do contexto, exigem um esforço por parte do professor para justificá-los, já que não tem uma relação direta com o dia-a-dia ou com a cultura dos mesmos. No entanto, a matemática financeira é um ramo da matemática onde a sua relação com o cotidiano do aluno é evidente, pois a mesma é responsável pelo estudo de juros, financiamentos, aplicações financeiras, dentre outras situações relacionadas ao mercado financeiro.

Este estudo tem por base mostrar a importância de desenvolver a educação financeira em sala de aula, enfatizando sempre situações cotidianas do aluno de modo que o mesmo tenha condições reais de absorver o conhecimento e ir além dos muros da escola. Desta forma teremos cidadãos conscientes no exercício da economia doméstica e pessoal, criando até mesmo um olhar de perspectiva profissional.

1.1 A Matemática Financeira e os Parâmetros Curriculares Nacionais no Ensino Médio

As estatísticas nos últimos anos têm mostrado que há um crescente aumento no fracasso escolar matemático. Tal fracasso pode ser verificado na divulgação da seguinte nota: só 9,3% dos alunos do ensino médio no Brasil dominam a matemática ([11]).

Em função disso há de se perceber a necessidade de mudanças no ensino da matemática, sempre priorizando melhorias no ensino e aprendizagem. É exatamente neste cenário que entra os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), não com a ideia meramente de mudar conteúdos, mas sim uma mudança na metodologia de ensino e aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais colocam que ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Assim, destacamos que o ensino da matemática financeira no ensino médio deve ser relacionado com a vivência do aluno.

Com o objetivo de formar cidadãos críticos, conhecedores de seus deveres e direitos, a escola deve dedicar especial atenção à Matemática financeira, uma vez que este conteúdo pode contribuir para a organização financeira dos estudantes e de suas famílias. Ressaltamos que os alunos não devem apenas ter o conhecimento das fórmulas matemáticas, devem ter uma real compreensão da aplicação destes saberes em situações cotidianas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam estes aspectos e ressaltam que os estudantes devem trabalhar com dinheiro, negociar e buscar seus direitos.

> É fundamental que nossos alunos aprendam a se posicionar criticamente diante dessas questões e compreendam que grande parte do que se consome é produto do trabalho, embora nem sempre se pense nessa relação no momento em que se adquire uma mercadoria. É preciso mostrar que o objeto de consumo, [...], é fruto de um tempo de trabalho, realizado em determinadas condições. [...] Habituar-se a analisar essas situações é fundamental para que os alunos possam reconhecer e criar formas de proteção contra a propaganda enganosa e contra os estratagemas de

> marketing que são submetidas os potenciais consumidores. (BRASIL, 1998, p. 35).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999):

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 1998, p. 251).

Desta forma, a Matemática Financeira precisa estabelecer relação entre o conteúdo matemático e os dilemas do cotidiano, constituindo assim um importante elemento na construção da cidadania. Entretanto, estes conteúdos nem sempre são trabalhados corretamente no ensino médio. Os PCNs explicitam o que os estudantes devem saber com relação à Matemática Financeira:

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc. é necessário trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais, pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos. (BRASIL, 1998, p. 84).

Portanto, destacamos a importância da Matemática Financeira no currículo escolar, embora este conteúdo seja muitas vezes deixado em segundo plano. Este conteúdo deve ser trabalhado estabelecendo uma ligação com a vida cotidiana e com o mundo do trabalho. Destacamos também a importância agregada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais a este conteúdo e os direcionamentos apontados pelo documento para a associação do conteúdo à vida.

1.2- A Matemática Financeira no CBC do Estado do Espírito Santo

Por meio da Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo- SEDU, foi feita a elaboração do novo currículo cujo foco inovador é a definição do Conteúdo Básico Comum – CBC para cada disciplina da Educação Básica. A proposta é trazer a ideia de que existe um conteúdo básico de cada disciplina que é necessário e fundamental para a formação da cidadania e que precisa ser aprendido por todos os estudantes da Educação Básica da rede estadual, correspondendo a 70% do conteúdo total, onde o professor tem a liberdade de complementar o restante (30%)

com conteúdos que estejam de acordo coma realidade sociocultural da região onde a unidade escolar está inserida.

Vamos mostrar nesta seção, o que o CBC do estado do Espírito Santo considera fundamental para a formação da cidadania no que tange à matemática financeira. Inicialmente, daremos a definição de competências e habilidades contidas no CBC para as séries do Ensino Médio, pois todo conteúdo mencionado é entrelaçado às competências e habilidades que o aluno deve alcançar.

De acordo com o Currículo Básico Comum do Estado do Espírito Santo: as competências são entendidas como a "capacidade de agir em situações previstas e não previstas, com rapidez e eficiência, articulando conhecimentos tácitos e científicos a experiências de vida e laborais vivenciadas ao longo das histórias de vida". As habilidades são entendidas como desdobramentos das competências, como parte que as constituem. Comumente, expressam a forma de o aluno conhecer, fazer, aprender e manifestar o que aprendeu.

Desta forma a competência é uma habilidade de ordem geral, enquanto a habilidade é uma competência de ordem particular, específica. Apresentaremos numa tabela a distribuição de conteúdos por série relacionando as suas respectivas competências e habilidades relacionadas à matemática financeira.

1ª Série do Ensino Médio
Conteúdos:
• A matemática do comércio: porcentagem, juros, desconto, etc. • Juros simples e progressão aritmética. • Juros compostos e progressão geométrica.
Competências: • Reconhecer os conjuntos dos números inteiros, racionais e reais, suas diferentes representações e as relações entre eles. • Compreender as propriedades das operações em cada um dos conjuntos numéricos e saber usá-las em situações concretas.
Habilidades:
• Trabalhar com porcentagens, reconhecer suas diferentes representações e

utilizá-las para resolver problemas.

2ª Série do Ensino Médio
Conteúdos: • A matemática do comércio e da indústria: matemática financeira.
Competências: • Reconhecer os conjuntos dos números reais, suas diferentes representações e operar com eles; • Compreender as propriedades das operações em cada um dos conjuntos numéricos e saber usá-las em situações concretas.
Habilidades: • Calcular porcentagens, juros, descontos, amortização, etc. e utilizar esses conceitos na resolução de problemas.
3ª Série do Ensino Médio
Conteúdos: • A matemática do comércio e da indústria: matemática financeira
Competências: • Resolver problemas, traçando estratégias e validando soluções.
Habilidades: • Trabalhar com porcentagens, juros, descontos, amortização, etc. e utilizar esses conceitos na resolução de problemas.

Percebe-se que os conteúdos de matemática financeira apresentados no CBC do Estado do Espírito Santo concentram-se em porcentagem, juros, descontos, juros simples e compostos associados às progressões aritméticas e geométricas respectivamente e amortizações. No entanto, muitos tópicos da educação financeira deixam de ser abordados no sentido de conexão à prática do educando. Ainda neste capítulo, faremos uma análise de alguns livros didáticos e poderemos comparar os conteúdos contemplados nos mesmos com a abordagem no CBC em questão.

1.3 - Questionários realizados com professores de níveis médio e universitário a cerca da abordagem da matemática financeira nas escolas pública, particular e licenciatura plena em matemática.

1.3.1 Questionário com professor de escola pública:

***Tema**:* "Abordagem da Matemática Financeira em Escolas Públicas"

Professor Entrevistado: A. M. G. P.
Cidade em que atua: Pinheiros-ES
Formação Acadêmica/Instituição: Mestre /UESC-BA

1) Qual é o conceito de matemática financeira para você?

Matemática Financeira pra mim é um conjunto de ferramentas e procedimentos utilizados para trabalhar diretamente com o Sistema Monetário e tudo que envolve este campo.

2) Quais são as teorias básicas da matemática financeira que você mais trabalha com o aluno?

Juros Simples, Juros Compostos e Descontos.

3) Como você analisa os livros didáticos adotados em sua escola quanto a abordagem da matemática financeira? Caso conclua que é uma abordagem superficial, como tem sido a sua linha de trabalho?

Normalmente os Livros abordam poucos itens relacionados à Matemática Financeira, pode-se dizer que é uma abordagem superficial. Trabalho apenas o que o Livro traz, quando dá tempo.

4) Como você contextualiza a matemática financeira ao cotidiano do aluno?

Trabalho apenas o que traz o Livro Didático;

5) Ao abordar juros simples em sala de aula, qual seria a sua resposta, se um aluno lhe perguntasse : Professor, onde se aplica juros simples na prática?

Na prática não se aplica.

6) Sua escola proporciona condições de fazer conexões entre a matemática financeira e o uso das tecnologias?

Não, só tem um Quadro Digital que fica no LIED e está quebrado (com defeito); e o LIED raramente tem internet disponível.

7) Como a matemática financeira pode contribuir na vida pessoal e profissional do seu aluno?

Pode ajudá-lo a tomar decisões em compras ou vendas (negociações financeiras de forma geral) de forma que não tome prejuízo financeiro; profissionalmente pode fazê-lo se destacar dentre os demais dependendo de sua área de atuação.

1.3.2 Questionário com professor de escola privada:

***Tema**:* “Abordagem da Matemática Financeira em Escolas Privadas”

Professor Entrevistado: V. M. S. S.

Cidade em que atua: Itabuna-BA

Formação Acadêmica/Instituição: Mestrando em Matemática/UESC-BA

1) Qual é o conceito de matemática financeira para você?

Em linhas específicas, defino a matemática financeira como o estudo que, em alguns casos, pode prever juros e/ou montantes de aplicações financeiras. No entanto, na prática em sala de aula, faço abordagem da “matemática financeira” com associações com funções polinomiais de 1º grau e funções “tipo exponenciais”.

2) Quais são as teorias básicas da matemática financeira que você mais trabalha com o aluno?

- ✓ Primordialmente os conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais, daí, suas diversas aplicações, inclusive gráficas.
- ✓ Juros Simples: muito superficialmente, para não deter o aluno a fórmulas e induzi-lo melhor ao raciocínio.

- ✓ Capitalização composta (aumentos e descontos), porém sem prender-me à fórmula clássica $M = C(1+i)^n$, pois entendo que muito restrita, uma vez que a mesma é útil para aplicações com taxa fixa. Prefiro abordar melhor o fator de aumento (1 + i) e o fator de desconto (1 – i), pois, dessa forma, sou capaz de associar perdas e ganhos com taxas fixas (ou não) num mesmo exercício.
- ✓ Na medida do necessário para o ensino médio, trabalho a equivalência de taxas fixas, o conceito de taxa real e de poder de compra.

3) Como você analisa os livros didáticos adotados em sua escola quanto a abordagem da matemática financeira? Caso conclua que é uma abordagem superficial, como tem sido a sua linha de trabalho?

Os livros são suficientes para o que se pretende para o aluno do ensino médio. Porém, penso que o trabalho com taxas distintas nas aplicações deveria ser mais bem abordado.

4) Como você contextualiza a matemática financeira ao cotidiano do aluno?

Com exercícios de sala que abordem situações-problemas vivenciadas por eles, tais como o aumento do lanche na cantina, aumento nas tarifas de celulares, passagens de ônibus etc.

5) Ao abordar juros simples em sala de aula, qual seria a sua resposta, se um aluno lhe perguntasse : Professor, onde se aplica juros simples na prática?

Posso estar errando, mas minha resposta é sincera: “Nos concursos públicos e provas de vestibulares”.

Respondo dessa forma por não ter conhecimento direto em aplicações reais com juros simples. Se elas existem, então não me foram ensinadas na faculdade e/ou os autores de livros devem explicitá-las melhor nos livros, além dos problemas clássicos de investimentos, os quais eu desconheço na prática. Talvez um aluno de contabilidade, administração ou economia poderia dizer melhor onde se aplica juros simples.

6) Sua escola proporciona condições de fazer conexões entre a matemática financeira e o uso das tecnologias?

Uso de data show para projeção de vídeos e imagens. Porém, penso que um laboratório de informática ajudaria mais na abordagem financeira, mas, infelizmente, a escola ainda não dispõe desse apoio.

7) Como a matemática financeira pode contribuir na vida pessoal e profissional do seu aluno?

Vejo a matemática financeira como um portal para o salto da teoria da matemática para a prática do aluno, uma vez que propicia um leque de opções para abordagens cotidianas. Na mais simples hipótese, a matemática financeira ajuda no raciocínio lógico e interpretativo do aluno, ajudando-o aluno a desmistificar fórmulas prontas.

1.3.3 Questionário com professor do Ensino Superior:

***Tema**:* "Abordagem da Matemática Financeira nas Licenciaturas Plenas em Matemática das Universidades Estaduais /Federais"

Professor Entrevistado: A. C.
Universidade em que atua: Universidade Federal do Espírito Santo – UFES – CEUNES – Campus São Mateus
Formação Acadêmica/Instituição:
Licenciatura em Matemática – Coordenação Universitária Norte do Espírito Santo – Antiga CEUNES – UFES – 1995

- ✓ Mestrado em Matemática Aplicada – PUC/RJ – 2000
- ✓ Doutorado em Educação – Linha de Pesquisa: Educação e Linguagens – PPGE/UFES – 2013

1) A instituição em que você atua como professor, oferece a disciplina matemática financeira na grade curricular do curso de licenciatura plena em matemática?

Em parte sim. No Curso de Licenciatura Plena em Matemática do CEUNES oferece-se a Disciplina intitulada “Tópicos de Matemática”, de 60 horas, cuja ementa contempla a Matemática Financeira, como segue: “Funções polinomiais. Funções logarítmicas. Funções exponenciais. O binômio de Newton. Problemas e aplicações. Progressões aritméticas. Progressões geométricas. Matemática financeira no cotidiano”.

2) Em sua graduação foi ofertada a disciplina matemática financeira? Se não, a ausência da disciplina foi sentida em algum momento de sua carreira profissional?

Não.

Sim, a ausência foi sentida quando voltei do mestrado e fui trabalhar numa Instituição de Ensino Superior da Rede Particular. Nela, tive de lecionar disciplinas, como por exemplo: Matemática Básica (Pré-Cálculo), Matemática Financeira e Estatística.

Apesar da base matemática que a Licenciatura me deu, não me sentia segura para discutir questões da Matemática Financeira que abarcavam problemas econômicos atuais como operações financeiras, comparações entre sistemas de amortização, análise de taxas de juros, etc... Como também o uso da calculadora financeira HP 12C. Desse modo, na época, fiz um curso específico de Matemática Financeira na Fundação Getúlio Vargas no RJ, com apoio da Instituição Particular que eu trabalhava, e isso então me deu mais segurança para lecionar a Disciplina de Matemática Financeira.

3) Como você analisa o grau de relevância da matemática financeira na formação de um professor de matemática?

Eu considero importante ter uma disciplina que discuta a matemática financeira num curso de formação de matemática, exatamente para que o licenciando tenha uma formação mais ampla sobre as questões econômicas além da base de matemática pura que lhe é proporcionada.

4) Muitos professores de matemática do ensino médio ao abordar matemática financeira , ensinam somente porcentagem, juros simples e juros compostos. O que você tem a dizer a respeito desse fato?

Penso que a abordagem sobre esses tópicos da matemática financeira é relevante, mas, ela deveria ir além... Pois, o que mais vemos, atualmente, nas operações financeiras, são temas relacionados a financiamentos de imóveis, carros, pagamentos de empréstimos, entre outros, os quais usam sistemas de amortização, compras a prazo, juros nominais e reais. Quando o professor deixa de discutir esses assuntos, perde a oportunidade de levar o aluno a refletir mais criticamente sobre os sistemas financeiros que existem, quais as melhores formas de avaliar as operações financeiras segundo as taxas de juros vigentes, etc.

5) Na sua opinião até que ponto a educação financeira pode influenciar na formação de cidadãos conscientes ao momento crítico da economia brasileira?

Eu penso que a educação financeira é imprescindível, principalmente, no momento atual em que vivemos: de instabilidade financeira, social e política.

Penso também que essa educação financeira deveria começar desde a infância até a fase adulta. Deveria começar na família e ser tratada, posteriormente, no ambiente escolar, considerando é claro cada nível de ensino. Desse modo, nossas crianças, adolescentes e jovens teriam maiores possibilidades de crescerem com consciência crítica sobre os usos que as pessoas fazem do dinheiro público, dos salários, dos gastos de uma família, sobre o consumo compulsivo e desenfreado, etc.

1.3.4 Pontos positivos e negativos das respostas dos professores:

Na entrevista com o professor de escola pública, ele destaca positivamente que através da matemática financeira o educando poderá tomar decisões importantes em compras e vendas para não tomar prejuízos e até mesmo dependendo da área de atuação profissional, obter certo grau de destaque, apesar de que negativamente sua abordagem da matemática financeira tem sido superficial.

Na entrevista com o professor de escola privada quanto à abordagem da matemática financeira o que chama atenção é a contextualização feita dos conteúdos e desta forma os alunos terão mais condições de aprender. No entanto, ele afirma que os conteúdos da matemática financeira nos livros didáticos são suficientes para o que se pretende para os alunos do ensino médio, acreditamos e mostraremos neste trabalho que é possível ir além, de modo a obter um bom conhecimento financeiro e aplicar em suas vivências.

Na entrevista com a professora de ensino superior, ela enfatiza muito bem a importância da matemática financeira na formação de um professor de matemática, fato esse, que faltou em sua graduação, o que a trouxe insegurança em trabalhar o tema numa instituição privada de ensino superior. Muito interessante também é o alerta que a mesma traz quanto à abordagem superficial da matemática financeira que muitos professores desenvolvem em sala de aula e desta forma permitem que os alunos não interajam com o sistema econômico tais como empréstimo e financiamentos.

1.4 - Análises sucintas de livros didáticos a cerca da abordagem da matemática financeira: pontos positivos e negativos.

Nesta seção faremos uma análise sucinta e simples de três livros didáticos do ensino médio quanto à abordagem da matemática financeira, observando se os mesmos atendem às demandas dos estudantes e do mundo do trabalho. Vamos destacar também se na abordagem do tema há uma contextualização dos conhecimentos tratados no texto, ou se apenas trazem informações restritas à aplicação de fórmulas.

Os livros que analisaremos serão:

- ✓ Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr, José Ruy. Matemática Fundamental – volume único – São Paulo: FTD, 1994
- ✓ Ribeiro, Jackson. Matemática: ciência e linguagem – volume único – São Paulo: Scipione, 2007.

- ✓ Souza, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática – 1ª. ed. – São Paulo: FTD, 2010.

É importante enfatizar que a escolha desses três livros se deu em função de serem livros que foram adotados ao longo do tempo na escola em que atuo (Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Antônio dos Santos Neves”).

1.4.1 - Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr, José Ruy. Matemática Fundamental – volume único – São Paulo: FTD, 1994

Os autores subdividem o livro em seis unidades: álgebra, porcentagem, trigonometria, geometria, geometria analítica e noções de estatística. A partir desta partição, percebe-se que a abordagem da matemática financeira neste material concentra-se somente em porcentagem. E também, percebemos que os autores não abordaram o tema “Educação Financeira” uma vez que porcentagem poderia ser vista como pré-requisito ao tema, tendo foco maior no ensino fundamental.

É interessante ressaltar que o livro em questão é do ano de 1994 e que veremos nos materiais a seguir que passadas duas décadas tiveram grandes avanços na abordagem da matemática financeira, mas que acreditamos ainda não ser o ideal. Também, é importante destacar que os próprios autores com o passar dos anos perceberam a importância da matemática financeira e concluíram que o tema deva ser trabalhado no ensino médio. Observamos por exemplo que no livro Matemática Completa 1ª série, lançado em 2005 (11 anos depois), os mesmos autores contemplam uma unidade **Noções de Matemática Financeira**, abordando porcentagem, lucro e prejuízo, acréscimos e descontos sucessivos, juros simples, juros compostos, a fórmula do montante, usando logaritmo no cálculo de juro composto, valor atual e valor futuro, ou seja, demonstrando que os autores acreditaram que matemática financeira deveria ser melhor abordada nos seus livros nos tempos atuais.

1.4.2 Ribeiro, Jackson. Matemática: ciência e linguagem – volume único – São Paulo: Scipione, 2007

A unidade que contempla matemática financeira abordada pelo autor está subdividida em proporcionalidade, porcentagem, acréscimo e desconto, juros, juros e funções.

O autor alerta na introdução que é comum pagarmos juros quando compramos um produto em prestações, no entanto, quando o pagamento é à vista, é possível obtermos descontos. Também, enfatiza que práticas como essas envolvendo compras, vendas, pagamento de empréstimos e aplicações serão os elementos centrais de estudo na matemática financeira.

O livro aborda inicialmente a Matemática Financeira revisando proporcionalidade e porcentagem que são conceitos relevantes no ensino fundamental. Tais temas são explorados muito bem nos exercícios e problemas contextualizados. No entanto, a parte de proporcionalidade é cobrada também em questões de vestibulares, o que é visto como interessante na proposta desta dissertação, porém, foi sentida a ausência deste detalhe na parte de porcentagem.

Na abordagem de acréscimos e descontos (simples, simultâneos e sucessivos) é notória a grande ênfase em que o autor concede a tais tópicos (8 páginas). São apresentados exercícios desafiadores, mas acreditamos que não são tópicos da matemática financeira que deva apresentar um foco maior. Como por exemplo, a teoria de juros simples e composta é desenvolvida em 4 páginas.

No que se referem aos juros simples e compostos, as fórmulas aparecem sem explicações formais de suas origens. O autor não contextualiza a situação de modo a conjecturar as fórmulas dos juros. Nos exercícios de juros simples, a dificuldade principal do estudante é a simples substituição. Um ponto positivo do autor é a sua abordagem em juros compostos com a calculadora científica. É explorada muito bem a conexão de juros compostos com logaritmo.

O autor faz conexão de juros simples à função afim e juros compostos à função exponencial de maneira bem superficial, contemplando apenas um exercício para cada conexão, o que deixa a desejar.

Ao finalizar a abordagem de matemática financeira, de maneira bem positiva, o autor traz 22 questões de vestibulares e um desafio, todos são interessantes. Mas fazendo uma análise minuciosa nos problemas de vestibulares, percebemos que alguns problemas têm certo grau de dificuldade, onde muitos alunos teriam também dificuldades para resolvê-los, alguns por falta de uma abordagem mais completa dos tópicos da matemática financeira, como por exemplo, a ausência de equivalências de capitais, como na questão 18 da página 317:

(Unesp – SP) Mário tomou um empréstimo de R$ 8 000,00 a juros de 5% a.m. Dois meses depois, pagou R$ 5 000,00 do empréstimo e, um mês após esse pagamento, liquidou o seu débito. O valor do último pagamento foi de:

a) R$ 3 015,00 b) R$ 3 820,00 c) R$ 4 011,00 d) R$ 5 011,00 e) R$ 5 250,00

Apontamos também como negativo algumas questões de vestibulares que abordam conteúdos não mencionados no capítulo, tais como taxas de juros equivalentes, é feita a definição no enunciado do problema e de maneira imediata o aluno precisa fazer a aplicação. A dificuldade não está no enunciado do problema, em definir taxa de juros equivalentes, poderia ser vista como uma revisão se o autor aprofundasse a teoria de taxas de juros, que entendemos ser uma ferramenta importantíssima da matemática financeira, uma vez que toda operação financeira rende juros a certa taxa.

1.4.3 Souza, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática – 1ª. ed. – São Paulo: FTD, 2010.

No capítulo 3 do livro Coleção Novo Olhar, Volume 2, o autor contempla a matemática financeira abordando porcentagem, acréscimos e descontos sucessivos, juros, juros e funções e sistema de amortização.

A introdução deste livro é muito semelhante à introdução do livro analisado na seção 1.4.2. No entanto, o autor coloca três perguntas do cotidiano que só podem ser respondidas utilizando a matemática financeira, o que torna interessante, pois o aluno imediatamente é capaz de perceber que a teoria a estudar tem muitas aplicações com a realidade cotidiana. São elas:

- ✓ Durante quanto tempo devo aplicar uma quantia, a certa taxa, para que ao final obtenha determinado juro?
- ✓ Quanto terei de pagar de juros por certo empréstimo?

- ✓ Qual é a taxa de juros que essa loja cobra ao vender seus produtos a prazo?

O livro inicia com uma seção de porcentagem no intuito de trazer uma revisão do assunto, pois é de suma importância que o aluno domine o tema para então aprofundar na teoria da matemática financeira. A seção traz exemplos e exercícios com textos voltados à prática familiar dos alunos. As atividades abordadas, por mais que se trate de um assunto “fácil”, exigem certo raciocínio em interpretação de tabelas, questões do ENEM e da OBM. Um detalhe negativo no banco de exercícios sobre porcentagem é a ausência da aplicação de situações financeiras nos mesmos.

Na seção de acréscimos e descontos sucessivos, o livro inicia com um exemplo para acréscimos e outro para descontos, logo em seguida faz a generalização do conceito e às fórmulas: $P = P_0(1 + i_1)(1 + i_2) \dots (1 + i_N)$ e $P = P_0(1 - i_1)(1 - i_2) \dots (1 - i_N)$, respectivamente. Há nesta seção bastantes exercícios com contextualizações variadas, haja vista a possibilidade de abrir espaços para situações mais concretas como, por exemplo, aplicações bancárias e desta forma gerar discussões a respeito da aplicabilidade da matemática financeira no cotidiano.

Na parte que se refere a juros, o autor inicia com duas situações práticas: empréstimo no banco e aplicação em caderneta de poupança para contextualizar o termo juros. Logo em seguida são apresentadas as definições de capital, juro, taxa de juros, tempo e montante com suas respectivas nomenclaturas. É apresentado também um pouco do contexto histórico da matemática financeira. Para introduzir juros simples e juros compostos, o livro inicia com um exemplo para cada situação, cujas soluções induzem às fórmulas gerais dos respectivos montantes, mostrando também que juros compostos representam um caso particular de acréscimos sucessivos (taxas de juros todas iguais). Quanto aos exercícios, tanto de juros simples quanto de juros compostos há interessantes contextualizações. Boa parte dos exercícios vai além de uma mera substituição de dados na fórmula do montante, exigem o raciocínio do aluno. Há também da parte do autor incentivo ao uso da calculadora. Quanto à relação taxa de juros e tempo, não é passado o que fazer se estiverem em unidades de tempo diferentes.

Na seção de juros e funções, através de um mesmo exemplo é feita a conexão de juros simples à função afim e juros compostos à função exponencial, cujos gráficos são feitos em um único plano cartesiano para que a partir da visualização sejam feitas comparações. A seção aborda oito exercícios contextualizados que exploram satisfatoriamente o tema juros e funções.

Por fim, é trabalhada uma seção abordando Sistema de Amortização. É mencionado que existem diversos outros sistemas de amortizações e que no Brasil os sistemas de amortizações mais adotados pelas instituições bancárias são o Sistema Francês de Amortização (Tabela PRICE) e o Sistema de Amortização Constante (SAC). O autor aborda apenas o Sistema Francês de Amortização, em que o devedor paga o empréstimo em prestações fixas, sendo o número de prestações variável, de acordo com o contrato entre as partes. É dada ou simplesmente abordada de forma descontextualizada a fórmula para calcular o valor das prestações, o que dificultará na resolução dos exercícios, que foram bem contextualizados à prática do cotidiano. Infelizmente, se o professor for questionado sobre a origem das fórmulas apresentadas, será muito difícil para ele responder ao aluno, uma vez que em momento algum foi falado de equivalências de capitais e séries uniformes.

1.4.4 Quadro: Comparação entre os livros analisados sobre os conteúdos abordados

Livro 1: Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr, José Ruy. Matemática Fundamental – volume único – São Paulo: FTD, 1994

Livro 2: Ribeiro, Jackson. Matemática: ciência e linguagem – volume único – São Paulo: Scipione, 2007

Livro 3: Souza, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática – 1ª. ed. – São Paulo: FTD, 2010.

Assunto abordado	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**
Faz uma revisão de porcentagem	Sim	Sim	Sim
Relaciona juros a funções	Não	Sim	Sim
Relaciona juros a progressões	Não	Sim	Não

Apresenta desafios contextualizados com questões do cotidiano	Não	Sim	Sim
Apresenta exercícios apenas com aplicações de fórmulas	Não	Sim	Sim
Apresenta questões com valor do dinheiro no tempo	Não	Não	Não
Contempla questões de vestibulares	Não	Sim	Não
Fala de equivalências de capitais, séries uniformes, Renda Perpétua	Não	Não	Não
Fala de Sistemas de Amortizações	Não	Não	Sim

Numa análise sucinta dos livros expostos aqui nesse trabalho, vê-se que os conhecimentos de matemática financeira tratados são principalmente porcentagem, descontos, acréscimos, juros simples e compostos. A Matemática Financeira não se limita a esses conceitos. Os livros foram escolhidos de forma que são livros que acabam sendo os modelos de forma de abordagem de Matemática Financeira no Ensino Básico. Como critério, escolhemos um livro bem antigo, um intermediário e um atual para basearmos se ao longo do tempo houve evolução na abordagem da matemática financeira nos livros didáticos.

Ao nosso entender, os conceitos a serem explorados no Ensino Médio devem ser melhores contextualizados, mediante situações do dia a dia dos alunos, trazendo a realidade e a importância dessa matéria no Ensino. Além disso, devem ser explorados todos os conceitos pertinentes e importantes de Matemática Financeira de modo a contemplar o mínimo que consideramos importante, relacionando com outros tópicos de Matemática Básica. Nesse sentido, no próximo capítulo faremos uma proposta de abordagem de Matemática Financeira que o professor poderá utilizar em sala de aula contemplando o que acreditamos ser primordial para um ensino satisfatório de Matemática Financeira no Ensino Básico.

2. PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

Esse capítulo visa apresentar uma proposta de abordagem de conceitos da matemática financeira que acreditamos ser bem didática de modo a atender às deficiências apontadas, por exemplo, nos questionários e análise de livros didáticos apresentados no capítulo anterior e bem como objetiva os PCN's quanto à matemática financeira em formar cidadãos críticos e preparados para lidar com o nosso sistema financeiro, visamos preparar nossos alunos de ensino médio a concluir os estudos e não serem pegos de surpresa na abordagem da matemática financeira em provas de ENEM, concursos e vestibulares.

Quando se pensa em matemática financeira, muitos a associam logo a dinheiro. Imaginam que, no que diz respeito a dinheiro, a Matemática só entra para realizarmos o cálculo do troco e o total a pagar no caixa. Porém, não é apenas nisso que a Matemática está presente. Sem ela, não seria possível entender os números dos contracheques, calcularmos os aumentos de salário, saber quais produtos aumentaram demasiadamente de preço, quanto se paga de juros ao fazermos uma compra parcelada, etc.

Pensando exatamente na educação financeira de nossos alunos de modo a torná-los consumidores cada vez mais conscientes, impactando dentro de seus lares e desenvolvendo condições dos mesmos de superação nas provas externas, tais como Enem e concursos, abordaremos neste capítulo, temas primordiais da teoria básica da matemática financeira no ensino médio, são eles: capitalização simples, capitalização composta, equivalências de capitais, taxa de juros, séries uniformes, renda perpétua e sistemas de amortização.

2.1 Termos conceituais importantes de Matemática Financeira

Para fixarmos as definições dos conceitos importantes de Matemática Financeira que utilizaremos durante todo o trabalho, propomos que as definições sejam colocadas mediante exemplos para que os estudantes comecem a perceber a aplicação e também definirmos conceitos de forma mais lúdica, que acreditamos ser mais proveitosa e eficiente. Dessa forma, citamos Dante:

> Suponhamos que uma pessoa tenha aplicado certa quantia (***capital***) em uma caderneta de poupança por um determinado período (***tempo***). Tal aplicação seria como se ela estivesse fazendo um empréstimo ao banco. Então, no fim desse período, essa pessoa recebe uma quantia **(*juros***) como compensação. O valor desta quantia é estabelecido por uma porcentagem (***taxa de juros***). Ao final da aplicação, a pessoa terá em sua conta a quantia correspondente a capital + juros (***montante***). (2008, p. 336)

Exemplo 2.1: *Um banco oferece rendimento de 0,56% ao mês. Se uma quantia de R$ 1000,00 for aplicada nesse banco, vejamos que quantia o cliente terá em sua conta no final de um mês:*

Solução:

Se no começo do mês o cliente aplicou R$ 1000,00, ao final do mês ele terá um rendimento de 0,56%, vamos calcular quanto seria 0,56% fazendo o seguinte cálculo: 0,56% de 1000 = 0,0056. 1000 = 5,60. Logo, ao final do mês, o cliente terá sua conta uma quantia de R$ 1005,60.

Neste exemplo, temos:

Capital: R$ 1000,00

Tempo: um mês

Taxa: 0,56% ao mês

Juros: R$ 5,60

Montante: R$ 1005,60

2.2 Capitalização Simples

Regime de capitalização simples é aquele em que a taxa de juros incide somente sobre o capital e não sobre o montante acumulado. Isto é, os juros variam linearmente com o tempo, a uma determinada taxa.

No estudo de juros simples veremos que a equação do montante é uma função afim cujo gráfico é representado por uma reta, com crescimento constante a cada período de tempo formando uma progressão aritmética, dessa forma iniciaremos esta seção relembrando alguns conceitos de função afim e definição e aplicação de progressão aritmética.

2.2.1 Função Afim e Progressão Aritmética

Função afim

Definição 2.1 *Uma função afim f é uma função real definida na reta que obedece a lei $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais, com $a \neq 0$. Na função $f(x) = ax + b$, a é a taxa de variação e b é o coeficiente linear*.

Veja alguns exemplos de funções afins:

$$f(x) = 3x + 2, \qquad a = 3 \ e \ b = 2$$

$$f(x) = 5x, \quad a = 5 \ e \ b = 0$$

$$f(x) = -6x + \frac{4}{5}, \quad a = -6 \ e \ b = \frac{4}{5}$$

Gráfico da função afim:

O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ é uma reta. Dessa forma, podemos obter o gráfico de qualquer função afim $f : R \to R$ atribuindo dois valores a x, determinando o valor correspondente de $y = f(x)$, obtendo assim dois pontos (x, y) no plano cartesiano. Finalmente o gráfico será a reta unindo esses dois pontos.

Veja por exemplo o gráfico da função $f(x) = 5x$. Atribuindo na tabela abaixo três valores para x mesmo sendo suficiente apenas dois valores, determinaremos os valores correspondentes $y = f(x)$.

x	$y = f(x)$
-1	-5
0	0
2	10

Assim, obtemos três pontos no plano cartesiano. A reta ligando esses pontos determina o gráfico da função f esboçada abaixo na Figura 1.

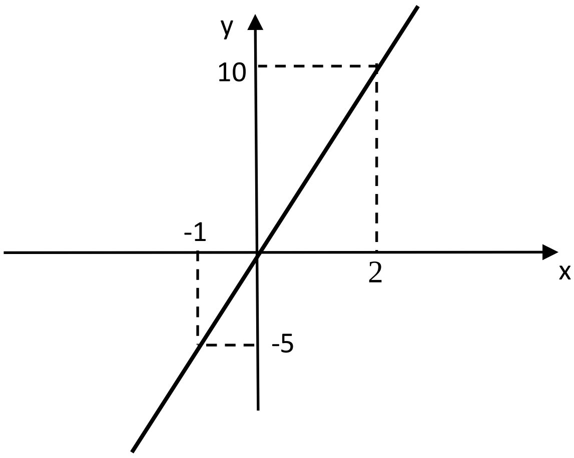

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = 5x$

Progressão aritmética

Definição 2.2*: Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo imediatamente anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e usualmente é representada pela letra r. (*MORGADO, 2015*, p. 32)*

As sequências $(2, 4, 6, 8, \ldots)$ e $(3, 6, 9, 12, \ldots)$ são exemplos de progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 2 e 3.

Termo geral de uma Progressão Aritmética:

Seja (a_n) uma PA com primeiro termo a_1 e razão r, segue da definição de progressão aritmética que:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Chamamos essa fórmula de termo geral de uma PA. Vamos mostrar a validade da mesma usando indução sobre n.

Temos que:

(i) $n = 1$, tem-se que $a_1 = a_1 + (1 - 1).r \Rightarrow a_1 = a_1$ (ok)

(ii) Hipótese de Indução: Suponha que $a_n = a_1 + (n-1).r$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Tese de Indução: $a_{n+1} = a_1 + [(n+1) - 1]r = a_1 + nr$

Temos pela definição de PA que $a_{n+1} = a_n + r$.

Segue da hipótese de indução que $a_{n+1} = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + nr$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que:

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1).r}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos no caso prático a seguir, uma conexão entre juros simples e progressão aritmética:

Exemplo 2.2*: Em janeiro de certo ano, João estava ganhando R$ 250,00 por mês. O patrão prometeu aumentar o salário de João em R$ 40,00 todos os meses. Vamos calcular quanto ele ganhará em dezembro do mesmo ano.*

Solução:

Observe que a sequência de salários de cada mês de João é uma progressão aritmética de razão 40, já que o salário é aumentado (somado) de R$ 40,00 todos os meses. Temos que:

Janeiro: $a_1 = 250$

Fevereiro: $a_2 = a_1 + r = 250 + 40 = 290$

Queremos determinar o salário de João em Dezembro, o que equivale a calcularmos o 12º termo da PA. Assim,

Dezembro: $a_{12} = a_1 + 11r = 250 + (11 \times 40) = 690$

Logo o salário de João em dezembro será de R$ 690,00.

Este problema trata-se de uma situação de capitalização simples, pois o salário de João aumenta linearmente R$ 40,00, o que equivale a 16 % ao mês sobre o salário inicial que era de 250 reais.

2.2.2 Juros Simples

Apresentaremos a seguir, uma situação prática, para introduzirmos a ideia de juros simples.

Exemplo 2.3: *Nestor tomou emprestado a juros simples, a importância de R$ 10.000,00 pelo prazo de 5 meses, à taxa de 4% ao mês. Vamos obter o valor dos juros a ser pago, após esse prazo.*

Solução:

Temos que o capital inicial é de R$ *10.000*,00 e a taxa de juros é de 4 % ao mês.

Vamos construir uma tabela, calculando os juros mês a mês:

Capital	Tempo (mês)	Juros pagos a cada mês	Juros Acumulados (Mensal)
10.000	1	*4% de 10.000 = 400*	*400*
10.000	2	*4% de 10.000 = 400*	*800*
10.000	3	*4% de 10.000 = 400*	*1200*
10.000	4	*4% de 10.000 = 400*	*1600*
10.000	5	*4% de 10.000 = 400*	*2000*

Logo o valor dos juros total a ser pago, ao final do quinto mês, é de R$ 2.000,00.

Observe que o capital usado para o cálculo de juros foi sempre o mesmo (R$ 10.000,00). Isso mostra que os juros ao final de cada período (mês) não são incorporados ao capital para render juros no período seguinte. Neste caso, os juros pagos a cada mês são todos iguais, pois foram calculados sobre o mesmo valor de R$ 10.000,00, que é o capital inicial. Dizemos, então que os juros são simples. Percebe-se que na coluna de juros acumulados temos uma P. A de razão 400.

Cálculo de juros simples:

Temos que se um capital C aplicado a uma taxa i ao período, no sistema de juros simples, rende juros J, no final de t períodos, então:

$i.C$ é juros obtidos no fim de um período.

$(i.C).t$ é juros obtidos no fim de t períodos, ou seja, $J = Cit$

Como o montante é o capital acrescido dos juros então a fórmula do montante é dada por $M = C + J = C + C.i.t = C(1 + it)$.

Veremos uma aplicação para o cálculo de juros simples no exemplo a seguir.

Exemplo 2.4: *Um professor de matemática colocou no quadro a função* $f(t) = 30t + 100$ *e pediu que através da mesma, os alunos enunciassem um problema de matemática financeira envolvendo juros simples. Vamos enunciar um problema satisfazendo a condição pedida.*

Solução:

O valor inicial é 100, pois $f(0) = 0 + 100 = 100$. Além disso, após o período de uma unidade de tempo, o valor acumulado será $f(1) = 30 + 100 = 130$. Daí é possível obter o valor dos juros correspondentes a um período: 130 – 100 = 30. Segue daí que a taxa de juros será igual a $\frac{30}{100} = 30\%$. Neste caso, um problema possível seria:

Uma pessoa aplicou R$ 100,00 em regime de juros simples a uma taxa de 30% ao mês. Qual é o montante correspondente à aplicação em função do tempo (meses)?

Vamos comprovar que o montante pedido representa a função afim $m(t) = 30t + 100$.

Considere t o tempo de aplicação. Temos o capital C = 100 e a taxa i = 0,30. Logo o montante é dado por $m(t) = C(1 + it) = 100(1 + 0{,}30.t) = 30t + 100$.

2.3 Capitalização Composta

No cotidiano, o regime de capitalização composta é utilizado nas principais operações financeiras (investimentos ou financiamentos), constituindo a base do atual sistema financeiro brasileiro.

A taxa de juros (i) ocorre sempre de forma cumulativa, isto é, incide sobre o montante acumulado no final do período anterior, neste caso sendo a taxa de variação do capital constante, os valores do capital seguem uma progressão geométrica, podendo ser modelados por uma função exponencial. Em função desta conexão de juros compostos com progressão geométrica e função exponencial, iniciaremos esta seção recordando alguns conceitos de função exponencial e definição e aplicação de progressão geométrica.

2.3.1 Função Exponencial e Progressão Geométrica

Função Exponencial

Definição 2.3: *Dado um número real a (a > 0, a ≠ 1), denomina-se função exponencial de base* ***a*** *uma função* f *de* R *em* R_+^* *definida por* $f(x) = a^x$.

São exemplos de função exponencial:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$ d) $f(x) = 3^{-x}$

Vamos construir o gráfico de uma destas funções, $f(x) = 2^x$ (a > 1), Atribuindo na tabela abaixo alguns valores para x, determinando os valores correspondentes $y = f(x)$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

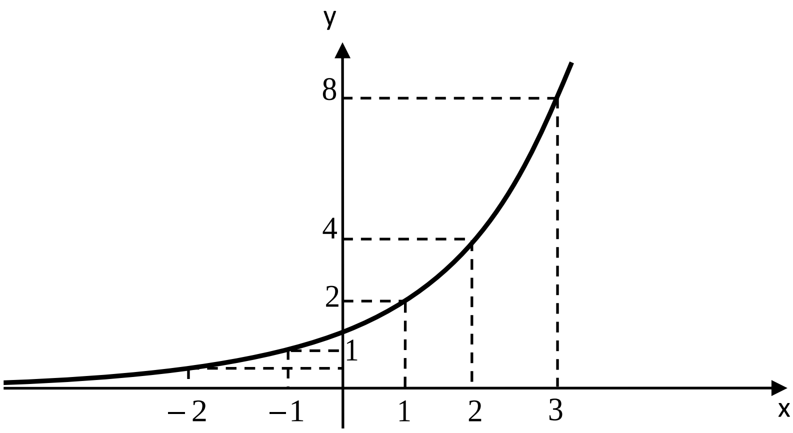

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = 2^x$

Progressão Geométrica

Definição 2.4: *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada de razão da progressão geométrica. A razão é indicada geralmente pela letra q.*

As sequências (2, 4, 8, 16,...) e (3, 9, 27, 81,...) são exemplos de progressões geométricas cujas razões valem respectivamente 2 e 3.

Termo Geral de uma progressão geométrica

Seja (b_n) *uma PG com primeiro termo* b_1 *e razão* q, *segue da definição de progressão geométrica que:*

$$b_2 = b_1.q$$

$$b_3 = b_2.q = (b_1.q).q = b_{1.}.q^2$$

$$b_4 = b_3.q = (b_1.q^2).q = b_1.q^3$$

$$b_5 = b_4.q = (b_1.q^3).q = b_1.q^4$$

$$...$$

$$b_n = b_1.q^{n-1}$$

Chamamos essa fórmula de termo geral de uma PG. Vamos mostrar a validade da mesma usando indução sobre n.

Temos que:

(i) $n = 1$, tem-se que $b_1 = b_1 \cdot q^{1-1} \Rightarrow b_1 = b_1 \cdot q^0 \Rightarrow b_1 = b_1$ (ok).

(ii) Hipótese de Indução: Suponha que $b_n = b_1.q^{n-1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Tese de Indução: $b_{n+1} = b_1 \cdot q^{(n+1)-1} = b_1 \cdot q^n$

Temos pela definição de PG que $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Segue da hipótese de indução que $b_{n+1} = b_1 . q^{n-1} . q = b_1 . q^n$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que $b_n = b_1.q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

2.3.2 Juros Compostos

Para introduzirmos a ideia de juros compostos, apresentaremos o mesmo exemplo que iniciamos com juros simples, diferenciando apenas o regime de capitalização.

Exemplo 2.5: *Nestor tomou emprestado a juros compostos, a importância de R$ 10.000,00 pelo prazo de 5 meses, à taxa de 4% ao mês. Vamos obter o valor dos juros a ser pago, após esse prazo.*

Solução: Temos que o capital inicial é de R$ 10.000,00 e taxa de juros é de 4% ao mês. Vamos construir uma tabela, calculando os juros mês a mês:

Capital	*Tempo (mês)*	*Juros pagos a cada mês*	*Juros acumulados*
10 000	1	*4% de 10.000 = 400*	*400,00*
10 400	2	*4% de 10.400 = 416*	*816,00*
10 816	3	*4% de 10.816 = 432,64*	*1.248,64*
11248,64	4	*4% de 11.248,64 = 449,95*	*1.698,59*
11698,59	5	*4% de 11.698,59 = 467,94*	*2.166,53*

Os juros produzidos no fim de cada período (mês) são somados ao capital que os produziu, passando os dois, capital e juros, a render juros no período seguinte. Assim, o valor dos juros a ser pago, ao final do quinto mês, é de R$ 1300,00.

Observação: Note que se C_k é o capital no mês k , temos que C_1 = 10 000; C_2 = 10 400= C_1 .1,04; C_3 = 10 816 = C_2 .1,04; C_4 = 11 248,64 = C_3 .1,04 e C_5 = 11 698,59 = C_4 .1,04, temos então uma progressão geométrica de 5 termos cuja razão é 1,04.

Cálculo de juros compostos

Vamos determinar no sistema de juros compostos, qual será o montante M, produzido por um capital C , aplicado a uma taxa i ao período, no fim de t períodos:

	Aplicação	Juros	Montante no fim do período
1º período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1+i)$
2º Período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+i)$ $= C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
3º Período	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1+i)$ $C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$
4º Período	M_3	iM_3	$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3(1+i)$ $C(1+i)^3(1+i) = C(1+i)^4$
...	...	...	...
Nº Período	M_{n-1}	iM_{n-1}	$M_n = C(1+i)^n$

De fato, mostraremos que a fórmula é válida usando indução sobre n.

(i) $n = 1$, tem-se que $M_1 = C(1+i)^1 = C(1+i) = M_1$ (ok).

(ii) Hipótese de Indução: Suponha que $M_n = C(1+i)^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Tese de Indução: $M_{n+1} = C(1+i)^{n+1}$

Temos por definição de capitalização composta que $M_{n+1} = M_n + iM_n$. Logo, $M_{n+1} = M_n(1+i)$.

Segue da hipótese de indução que $M_{n+1} = C(1+i)^n(1+i) = C(1+i)^{n+1}$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que $M_n = C(1+i)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos ver uma aplicação de juros compostos.

Exemplo 2.6: *Uma pessoa deseja aplicar R$ 10.000,00 a juros compostos e no fim de* 3 *meses obter R$ 11.248,64. Vamos determinar a taxa de juros.*

Solução:

Temos que o capital (C) a ser investido é de R$ 10.000,00 por um período de três meses (n = 3), de modo a obter um montante (M) de R$ 11.248,64. Queremos descobrir a taxa de juros (i). Segue pela fórmula de juros compostos que:

$$M = C(1+i)^n \Leftrightarrow 11\ 248{,}64 = 10\ 000\ (1+i)^3 \Leftrightarrow$$

$$(1+i)^3 = \frac{11248{,}64}{10000} \Rightarrow (1+i)^3 = 1{,}125 \Rightarrow$$

$$(1+i)^3 = \sqrt[3]{1{,}125} \Rightarrow 1 + i \cong 1{,}04 \Rightarrow \mathrm{i} \cong 0{,}04$$

Portanto, a taxa de juros procurada é de aproximadamente 4 % ao mês.

Vamos associar na próxima seção juros a funções explorando a parte gráfica dos montantes para juros simples e juros compostos.

2.4 Juros e Funções

Representaremos os juros simples e o seu montante em função do tempo de aplicação através de funções do tipo $f(x) = ax$ e $f(x) = ax + b$ respectivamente.

Tomemos, por exemplo, um capital de 200 reais aplicados à taxa de 15% ao ano. Assim, uma vez que para determinarmos os juros e o montante no tempo t em regime de juros simples temos as equações $J = C.i.t$ e $M = C + J$ então podemos definir as funções juros e montante respectivamente por:

$$j : R_+ \to R\text{, onde } j(t) = 200.0{,}15t \text{ ou } j(t) = 30t\text{,}$$

$$m_1 : R_+ \to R\text{, onde } m_1(t) = 30t + 200\text{.}$$

Agora tomando o mesmo exemplo, porém no regime de capitalização composta e lembrando que o montante no tempo t é dado por

$M = C(1+i)^t$, representaremos o montante da aplicação por meio da função $m_2 : R_+ \to R$, $m_2(t) = 200.1{,}15^t$.

Vamos fazer o esboço das funções $m_1, m_2 : R_+ \to R$, $m_1(t) = 200 + 30t$ e $m_2(t) = 200.1{,}15^t$ em um mesmo plano cartesiano para observarmos graficamente o comportamento do montante nos regimes de capitalização simples e composta respectivamente.

Atribuiremos na tabela abaixo alguns valores para t, determinando os valores correspondentes $y = m_1(t)$ e $y = m_2(t)$.

t	0	1	2	3
$m_1(t)$	200	230	260	290
$m_2(t)$	200	230	264,5	304,2

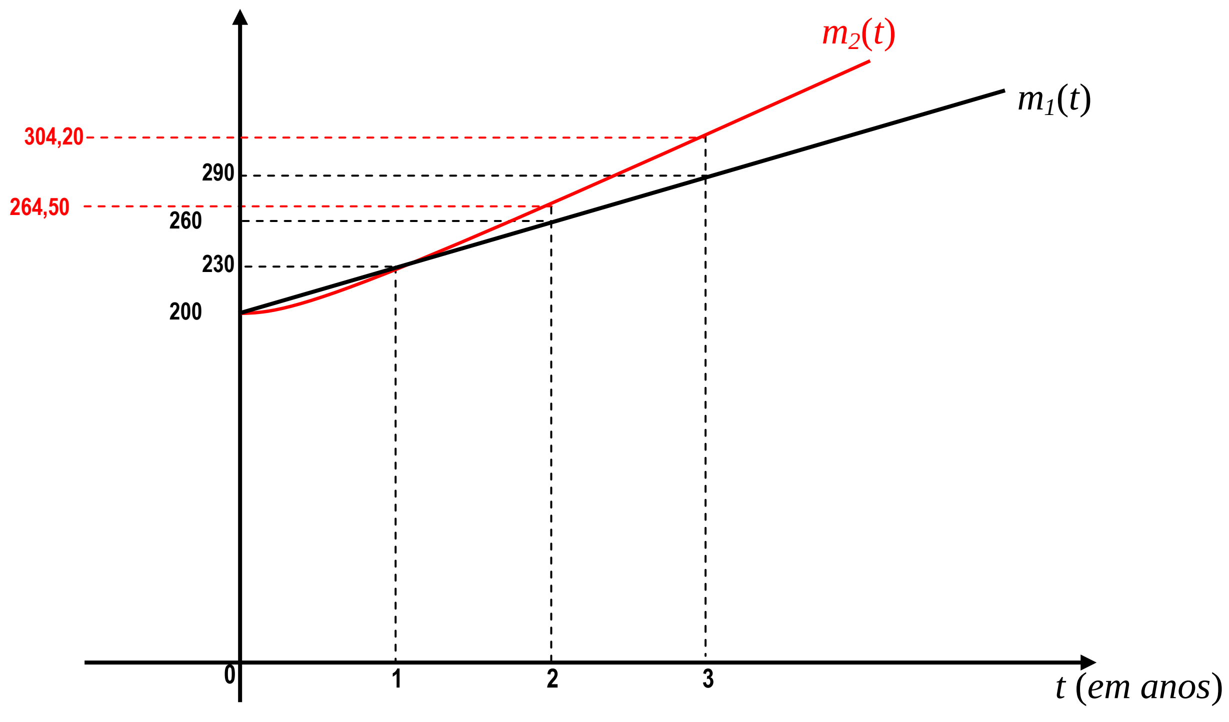

Figura 3: Gráfico das funções montantes $m_1(t)$ e $m_2(t)$.

Na representação gráfica da função montante para juros simples, vemos que o gráfico é representado por uma reta, com crescimento constante a cada período de tempo. Enquanto na função montante para juros compostos o crescimento não é constante variando no intervalo de tempo produzindo uma curva crescente.

Visualizando o comportamento das funções no intervalo fechado [0,1], nota-se que para $t = 0$ e $t = 1$ os montantes $m_1(t)$ (capitalização simples) e $m_2(t)$ (capitalização composta) são iguais e para $t \in (0,1)$ o montante $m_1(t)$ é maior do que $m_2(t)$. Da mesma forma que a partir do segundo mês, o montante para juros compostos cresce bem mais rápido, afastando cada vez mais da reta do montante dos juros simples. Esse fato ocorre justamente porque o montante de juros compostos incide sobre o montante do mês anterior, produzindo o fenômeno popular “juros sobre juros”, o que também pode ser explicado pelo fato da função exponencial ter uma taxa de crescimento maior do que o da função afim.

Vamos explorar na próxima seção o valor do dinheiro no tempo. Aprenderemos como definir a partir de dois ou mais investimentos qual será o mais vantajoso, comparando-os para saber se possuem o mesmo valor presente em uma determinada data.

2.5 Equivalências de Capitais

Para entendermos o que significa equivalências de capitais, iniciaremos com a seguinte situação prática: Se Sérgio investe seu dinheiro a juros de 3% ao mês, é indiferente para ele pagar R$ 1000,00 hoje ou R$ 1030,00 daqui a um mês. Isto é, para Sérgio R$ 1000,00 hoje têm o mesmo valor que R$ 1030,00 daqui a um mês, ou seja, o dinheiro vale para Sergio 3% ao mês. Esse exemplo prático mostra que a época de referência do montante de capital é muito importante para realizarmos comparações entre valores.

A equivalência de capitais é uma ferramenta fundamental para a análise de investimento, pois permite que se comparem duas opções de investimento, ou que se encontre uma opção de investimento equivalente a um ou mais investimentos.

Vimos que no regime de juros compostos de taxa i, um capital C transforma-se após t períodos de tempo, em um montante $M : M = C(1+i)^t$. Denotaremos aqui o valor de um capital numa certa data, de valor presente VP (valor naquele momento) e o valor desse capital numa data futura, de valor futuro VF (montante). Temos então a fórmula fundamental da equivalência de capitais: $VF = VP(1+i)^t \Leftrightarrow$ $VP = \dfrac{VF}{(1+i)^t}$.

Vamos ver algumas situações na prática em que se aplica a equivalência de capitais considerando o regime de capitalização composta.

Exemplo 2.7: *Os juros do cheque especial estão em 15% ao mês. Se Almir ficou com saldo negativo de R$ 100,00 durante um mês, vejamos quanto ele pagou para saldar sua dívida.*

Solução:

É preciso transportar o valor presente (R$ 100,00) para o futuro (um mês depois). Como a taxa i = 15% = 0,15, aplicando a fórmula de equivalência de capitais, temos que:

$$VF = 100(1 + 0{,}15)^1 \Rightarrow VF = 100.\ 1{,}15 = 115$$

Portanto, Almir terá de pagar R$ 115,00 para saldar sua dívida.

Exemplo *2.8:* *Vinicius prometeu pagar a Cícero R$ 100,00 no dia 01 de fevereiro. No entanto, no dia 01 de janeiro, resolveu quitar sua dívida. Sabendo que os juros combinados eram de 7% ao mês, descobriremos quanto ele pagou.*

Solução:

É preciso transportar o valor futuro (R$ 100,00) para o presente (um mês antes).

Como a taxa de juros é 7% ao mês, temos i = 7% = 0,07, aplicando a fórmula, temos:

$$VP = \frac{100}{(1+0{,}07)^1} \Rightarrow VP = \frac{100}{1{,}07} = 93{,}46$$

Portanto, a dívida de R$ 100,00 em 01 de fevereiro foi saldada em 01 de janeiro com um pagamento de R$ 93,46.

Nesta seção não poderíamos deixar de mencionar uma ferramenta da matemática financeira muito usada em resolução de problemas que envolvem equivalência de capitais que é o fluxo de caixa: esquema, na forma de diagrama ou tabela, que representa as entradas e saídas financeiras ao longo do tempo. Vamos fazer a ilustração do conceito de fluxo de caixa nos exemplos a seguir no desenvolvimento de suas resoluções.

Exemplo 2.9: Uma loja oferece duas opções de pagamento:

a) à vista, com 25% de desconto, só para pagamentos em dinheiro.

b) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra.

Vamos determinar a taxa de juros embutidos na venda a prazo.

Solução: Fixando o valor do bem em 100, temos os esquemas de pagamento da figura 4.

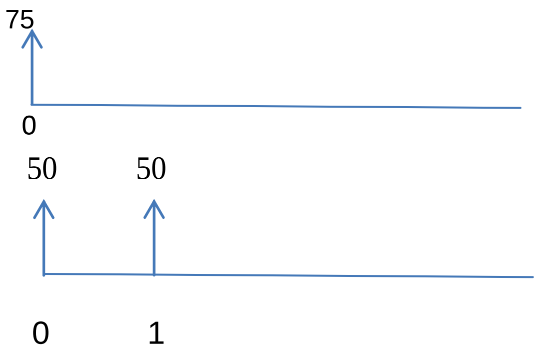

Figura 4: Fluxo de caixa

Igualando os valores na época 0 (data focal), obtemos: 75 = 50 + $\frac{50}{1+i}$ $\Rightarrow$ 25+25i = 50 $\Rightarrow$ i = 1 = 100%

Portanto, a loja cobra 100% ao mês nas vendas a prazo.

Exemplo 2.10: *(Profmat - MA12- AV1 – 2014) Um comerciante contraiu um empréstimo de R$ 8 000,00 a juros semestrais de 10%. O pagamento foi realizado em duas parcelas, uma de R$ 5 808,00 após um ano da contratação do empréstimo e a outra seis meses após a primeira.*

a) Calcule o valor da segunda parcela do empréstimo.

b) Caso o comerciante optasse por quitar a dívida em três parcelas semestrais fixas, a primeira partir do 1º semestre após a contratação do empréstimo, qual seria o valor das parcelas?

Solução: item a) Os esquemas de pagamento representados no fluxo de caixa abaixo são equivalentes:

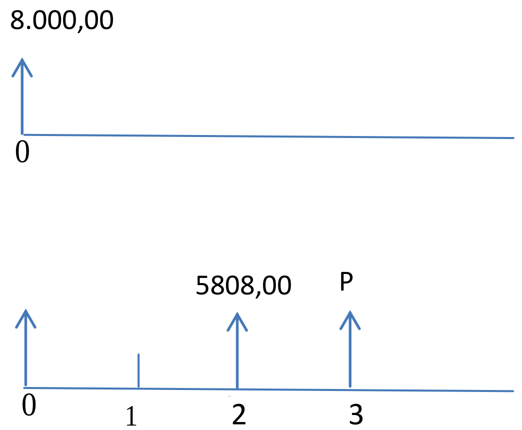

Figura 5: Fluxo de caixa

Considerando os esquemas de pagamentos da figura 5, ambos são equivalentes, ou seja, R$ 8 000,00 na data zero, tem o mesmo valor de R$ 5808,00 dois meses após (data 2), mais um pagamento P na data 3.

Igualando os valores, na época zero dos pagamentos em ambos os esquemas, obtemos:

$$8000 = \frac{5808}{1{,}1^2} + \frac{P}{1{,}1^3} \Rightarrow 8000 = \frac{5808}{1{,}21} + \frac{P}{1{,}331} \Rightarrow$$

$$8000 = 4800 + \frac{P}{1{,}331} \Rightarrow \frac{P}{1{,}331} = 3200 \Rightarrow P = 4259{,}20.$$

Logo, o valor da segunda parcela é de R$ 4259,20.

b) Os esquemas de pagamentos representados no fluxo de caixa abaixo também são equivalentes:

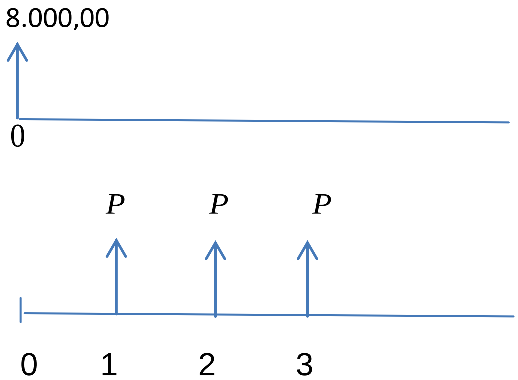

Figura 6: Fluxo de Caixa

Considerando os esquemas equivalentes de pagamentos da figura 5, o pagamento de R$ 8 000 na data zero tem o mesmo valor de 3 parcelas semestrais P, à partir do primeiro semestre após a contratação.

Igualando os valores dos pagamentos de ambos os esquemas, na data zero, obtemos:

$$8000 = \frac{P}{1{,}1} + \frac{P}{1{,}1^2} + \frac{P}{1{,}1^3} = \frac{1{,}21P + 1{,}1P + P}{1{,}1^3} \Rightarrow 10648 = 3{,}31\,P \Rightarrow P = 3216{,}92.$$

Portanto o valor das parcelas será de R$ 3216,92.

Exemplo 2.11: *Numa loja, um notebook está sendo vendido da seguinte forma:*

a) à vista, por R$ 2 500,00;

b) a prazo, em 5 prestações mensais de R$ 520,00, sendo a primeira no ato da compra.

Supondo que o consumidor disponha de dinheiro pra efetuar a compra à vista e o dinheiro vale 3% ao mês para ele. Vamos verificar qual é a forma mais vantajosa de adquirir o bem.

Solução:

Devemos comparar os seguintes esquemas de pagamento representados nos fluxos de caixa abaixo:

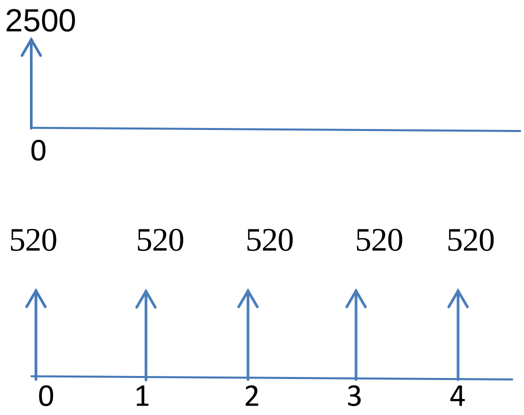

Figura 7: Fluxo de caixa

Fazendo a equivalência de capitais para a data 4, temos:

Compra à vista: $2500 \times (1{,}03)^4 = 2500 \times 1{,}125 = 2813$

Compra a prazo: $520 \times (1{,}03)^4 + 520 \times (1{,}03)^3 + 520 \times (1{,}03)^2 + 520 \times (1{,}03)^1 + 520 = 2760{,}75$

Portanto, o consumidor deve adquirir o bem levando em consideração a segunda opção, pois o valor da compra a prazo é inferior.

Na seção seguinte vamos estudar taxas de juros, uma importante ferramenta da matemática financeira, pois um capital investido numa operação financeira renderá sempre juros a partir de uma determinada taxa num período estabelecido.

2.6 Taxas de Juros

As taxas de juros são de extrema importância no estudo da matemática financeira, pois um capital investido numa operação financeira renderá sempre juros a partir de uma determinada taxa num período estabelecido.

As taxas de juros podem ser lineares ou exponenciais de acordo com sua capitalização (simples ou composta) ou ainda nominal, efetiva e real de acordo com o capital inicial tomado por referência na base de cálculo.

Geralmente a taxa de juros é acompanhada por uma nomenclatura que representa a periodicidade da taxa:

$a.d.$ (ao dia); $a.m.$ (ao mês); $a.b.$ (ao bimestre); $a.t.$ (ao trimestre); $a.a.$ (ao ano); $a.q.$ (ao quadrimestre); $a.s.$ (ao semestre).

Nesta seção estudaremos os três tipos de taxas: nominal, efetiva e real. Vamos explorar também as taxas equivalentes, uma vez que elas permitem o mesmo crescimento do dinheiro em períodos diferentes no regime de juros compostos, cujo regime de capitalização é o mais usual no cotidiano.

2.6.1 Taxa de Juros Nominais

Definição 2.5: *Taxa nominal é aquela expressa em unidade de tempo diferente da unidade de tempo do período de capitalização (Puccini, 2006, p. 58).*

Assim, são taxas nominais de juros:

24% $a.a.$ com capitalização trimestral (Note que a taxa é dada por ano enquanto a capitalização é dada trimestralmente, o que caracteriza uma taxa nominal);

15% $a.t.$ com capitalização mensal;

10% $a.b.$ com capitalização mensal.

A taxa nominal é obtida pela razão entre os juros pagos e valor nominal da aplicação (valor facial ou valor expresso na própria aplicação), isto é:

$$\text{Taxa nominal} = \frac{Juros\ pagos}{Valor\ \ nominal\ da\ aplicação}$$

2.6.2 Taxa de Juros Efetiva

Definição 2.6: *Taxa efetiva é a taxa de juros em que a unidade referencial de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização (Puccini, 2006, p. 51).*

São exemplos de taxas efetivas:

24% $a.a.$ com capitalização anual (Note que a taxa e a capitalização são dadas por ano, diferentemente de uma taxa nominal, caracterizando então uma taxa efetiva);

15% $a.t.$ com capitalização trimestral;

10% $a.b.$ com capitalização bimestral.

Sempre que coincidir as unidades de medida dos tempos da taxa de juros e dos períodos de capitalização, podemos dizer simplesmente 24% ao ano, 15% ao trimestre, 10% ao bimestre.

Vejamos agora como transformar taxa nominal em taxa efetiva. É bem simples, basta usar proporcionalidade. Observe no exemplo a seguir:

Exemplo 2.12: *Vamos determinar as taxas semestral, mensal e diária, proporcionais à taxa de 36% ao ano.*

Solução:

Sejam i_a , i_s , i_m e i_d as taxas anual, semestral, mensal e diária respectivamente, onde i_a = 36% ao ano.

Temos que:

$$\begin{cases} i_s x2 = i_a \\ i_m x12 = i_a \\ i_d x360 = i_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_s = \dfrac{i_a}{2} \\ i_m = \dfrac{i_a}{12} \\ i_d = \dfrac{i_a}{360} \end{cases}$$

a) Taxa semestral

$$i_s = \frac{36\%}{2} = \frac{0,36}{2} = 0,18$$

Logo, 18% ao semestre;

b) Taxa mensal

$$i_m = \frac{36\%}{12} = \frac{0,36}{12} = 0,03$$

Logo, 3% ao mês;

c) Taxa diária

$$i_d = \frac{36\%}{360} = \frac{0,36}{360} = 0,001$$

Logo, 0,1% ao dia.

Nas operações com juros compostos é necessário trabalhar com taxa efetiva. Veremos uma situação no cotidiano para melhor entendimento.

Exemplo 2.13: *Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 3 000,00 (capitalização composta) a uma taxa nominal de 20%* $a.a.$ *com capitalização trimestral, vamos determinar qual foi o saldo da dívida após* 6 *meses.*

Solução: Sejam i_n e I as taxas nominal e efetiva respectivamente. Temos que:

$$I = \frac{20\%}{4} = \frac{0,20}{4} = 0,05 \Rightarrow I = 5\% \text{ a.t.}$$

Notemos que o prazo é de seis meses, o equivalente a dois trimestres, o principal é de R$ 3 000,00, a taxa de juros é de 5% ao trimestre e queremos determinar qual foi o saldo da dívida após esse período de 6 meses, isto é, procuramos saber qual é o montante acumulado no período. Basta usar a fórmula de juros compostos.

$$M = 3000 \times (1{,}05)^{2} = 3\,307{,}50$$

Portanto, após 6 meses, o saldo da dívida foi de R$ 3 307,50.

2.6.3 Taxa de Juros Reais

Definição 2.7: *A taxa real é a taxa de juros obtida após eliminar o efeito da inflação, correspondendo à taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.*

É de extrema importância destacar as consequências da inflação cujo efeito da mesma eleva os preços de bens e serviços de modo que torna perceptível a perda do poder de consumo.

Haja vista que os juros reais são os juros recebidos acima da inflação. É interessante que todo investidor saiba como determinar a rentabilidade real de seus investimentos. A taxa real de juros pode ser obtida pela relação:

$$\text{Taxa real} = \frac{1+ \,taxa\ efetiva}{1+taxa\ de\ inflação} - 1$$

Essa relação mostra que a taxa real de juros podem ser inclusive negativas. Perceba que se uma pessoa aplica seu dinheiro a 5% e naquele mesmo período os preços sobem 7% então sua rentabilidade real será negativa de 1,87%.

Veremos uma aplicação de taxa real:

Exemplo 2.14: *Deseja-se saber a taxa real de juros em um capital aplicado por um ano à taxa de juros de 12,4 % ao ano onde no mesmo período a inflação foi de 7,85% ao ano.*

Solução:

Temos que a taxa efetiva é de 12,4% e a taxa de inflação é de 7,85%. Segue pela fórmula de taxa real que:

$$\text{Taxa real} = \frac{1+0{,}124}{1+0{,}0785} - 1 = \frac{1{,}124}{1{,}0785} - 1 = 1{,}042 - 1 = 0{,}042$$

Portanto, a taxa real de juros envolvida no investimento foi de 4,2% ao ano.

2.6.4 Taxas Equivalentes

Definição 2.8: *Taxas equivalentes são taxas de juros utilizadas no regime de juros compostos, que, apesar de serem fornecidas em unidades de tempo diferentes, levam a um mesmo montante acumulado, quando aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo* prazo. (Puccini, 2006, p. 54)

Taxas equivalentes:

Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente à n períodos de tempo é I tal que 1 + I = $(1+i)^n$. (MORGADO, 2015, p. 90)

Exemplo 2.15: (MORGADO, 2015, p. 95*) Determinar as taxas efetivas anuais equivalentes a:*

a) 30% ao ano, com capitalização mensal.
b) 30% ao ano, com capitalização trimestral.
c) i ao ano, capitalizados k vezes ao ano.

Solução:

a) A taxa $i = \frac{30\%}{12} = \frac{0{,}30}{12} = 0{,}025 \Rightarrow i = 2{,}5\%$ ao mês. Assim, temos que:

$$1 + I = (1+0{,}025)^{12} \Rightarrow I = (1{,}025)^{12} - 1 \Rightarrow I = 1{,}345 - 1 = 0{,}345 \Rightarrow I = 34{,}5\%.$$

b) A taxa $i = \frac{30\%}{4} = \frac{0,30}{4} = 0,075 \Rightarrow i = 7,5\%$ ao trimestre. Assim, temos que:

$$1 + I = (1 + 0,075)^4 \Rightarrow I = (1,075)^4 - 1 \Rightarrow I = 1,3355 - 1 = 0,3355 \Rightarrow I = 33,55\%.$$

c) A taxa relativa ao período de capitalização é $\frac{i}{k}$. Temos então que:

$$1 + I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k \text{ e assim, } I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1.$$

Exemplo 2.16: *Determinar a taxa mensal equivalente a 80% ao ano.*

Solução:

Temos a seguinte relação: $1 + I = (1+i)^n$.

Vamos determinar a taxa mensal equivalente a 80% ao ano.

Temos que a taxa efetiva é I = 80% = 0,8; o período é um ano, isto é, n =12, queremos descobrir i =?

Aplicando na fórmula, segue que:

$$1 + 0,8 = (1+i)^{12} \Rightarrow 1,8 = (1+i)^{12} \Rightarrow (1+i) = \sqrt[12]{1,8} \Rightarrow 1 + i \cong 1,05 \Rightarrow i \cong 0,05$$

Portanto, a taxa mensal equivalente a 80% ao ano é de aproximadamente 5% ao mês.

Na próxima seção vamos estudar séries uniformes, ramo da matemática financeira de extrema importância no cotidiano do cidadão, pois através da mesma, é possível ele saber como determinar as prestações de financiamentos de casas, carros, aluguéis, dentre outros.

2.7 Séries Uniformes

Definição 2.9: *Série ou anuidade (apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda é um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou* *termos), referidas a épocas diversas. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme.* (Morgado, 2015, p. 92)

Série uniforme é um ramo da matemática financeira de extrema importância no cotidiano do cidadão, pois através da mesma, é possível ele saber como determinar as prestações de financiamentos de casas, carros, aluguéis, dentre outros.

Nesta seção, vamos desenvolver fórmulas usadas nas soluções de problemas envolvendo uma série uniforme de valores monetários e mostrar suas aplicações por meios de exemplos numéricos.

Visto que numa série uniforme, as prestações têm o mesmo valor, isso nos facilitará na obtenção de fórmulas simplificadas para a capitalização e o desconto dessas parcelas.

Cálculo de um valor "V" a ser pago em n prestações iguais a uma taxa i de juros compostos:

Vamos achar uma fórmula para o valor de uma série uniforme, considerando sempre um tempo antes do primeiro pagamento. Tais prestações serão ditas postecipadas sempre que a primeira prestação for paga um tempo depois da compra.

Vamos representar tal situação através do fluxo de caixa:

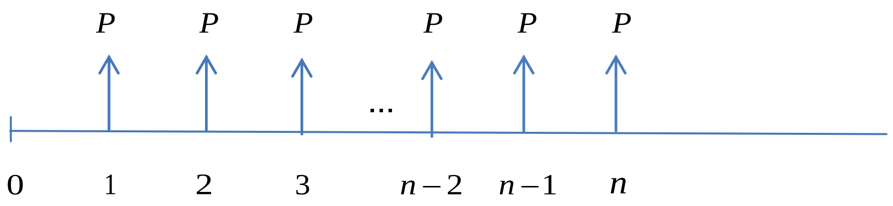

Figura 8: Série Uniforme

Igualando o valor da série na época 0 (um tempo antes do primeiro termo da série), temos que:

$$V = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Claramente, vê-se que V é uma soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{1+i}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{P}{1+i}$. Segue assim que:

$$V = \frac{P}{1+i} \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} \right] \Rightarrow V = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i) - \frac{1+i}{1+i}} = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1+i-1} \Rightarrow V = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemplo 2.17 *Uma pessoa quer um carro cujo valor a vista é de R$ 45 000,00. No entanto, ela só pode dá de entrada R$ 10 000,00. A loja decidiu financiar o restante em 24 parcelas iguais, sendo a primeira parcela paga um mês após a compra a uma taxa de 1,82% ao mês. Vamos determinar, qual será o valor de cada prestação.*

Solução: O valor financiado pela loja foi de 45000 – 10000 = 35000.

Vamos ilustrar a situação real através do fluxo de caixa:

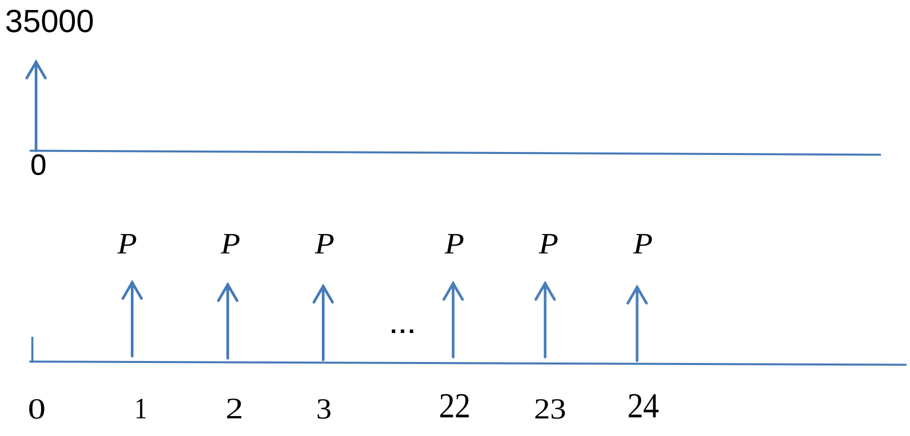

Figura 9: Pagamento em 24 parcelas

Igualando os valores na época 0 (um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

$$35000 = P \frac{1 - (1+0{,}0182)^{-24}}{0{,}0182} \Rightarrow P = 35000 \frac{0{,}0182}{1 - 1{,}0182^{-24}} \Rightarrow P \cong 1813$$

Portanto, as prestações serão de R$ 1 813,00.

Vamos ver nos casos a seguir, duas situações em que queremos descobrir o valor das parcelas onde o primeiro pagamento é feito no ato da compra e em outra situação, dois meses após a compra.

Exemplo 2.18: *José pretende comprar uma motocicleta no valor de R$ 12 000,00 a vista. No entanto, a concessionária permitiu que ele realizasse a compra em seis prestações iguais, mensais, com primeiro pagamento no ato da compra, sendo cobrada uma taxa de 3% ao mês. Supondo que José optou por comprar a motocicleta a prazo, vamos determinar o valor dos pagamentos.*

Solução:

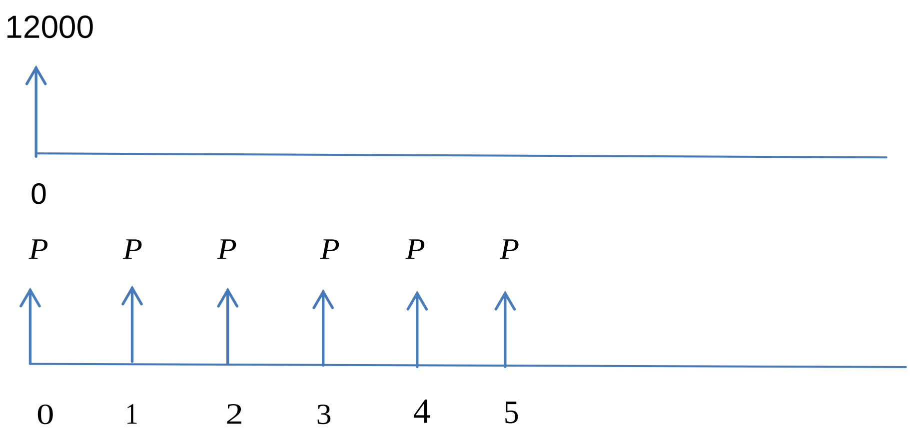

Figura 10: Pagamento em 6 parcelas

Igualando os valores na época -1 (essa escolha, que pode parecer exótica, é muito conveniente, pois dispomos de uma fórmula que calcula diretamente o valor da série nessa época), segue que:

$$\frac{12000}{1+0{,}03}=P\frac{1-(1+0{,}03)^{-6}}{0{,}03}\Rightarrow P=\frac{12000.0{,}03}{1{,}03\left(1-1{,}03^{-6}\right)}\cong 2150{,}65$$

Portanto, o valor de cada pagamento será de R$ 2 150,65.

Exemplo 2.19: *Roberto quer comprar uma TV no valor de R$ 1 200,00 à vista. A loja lhe abriu a possibilidade de pagar em cinco pagamentos iguais, mensais, sendo o primeiro dois meses após a compra. Vamos determinar o valor do pagamento sabendo que a taxa vigente seria de 2%* $a.m.$

Solução:

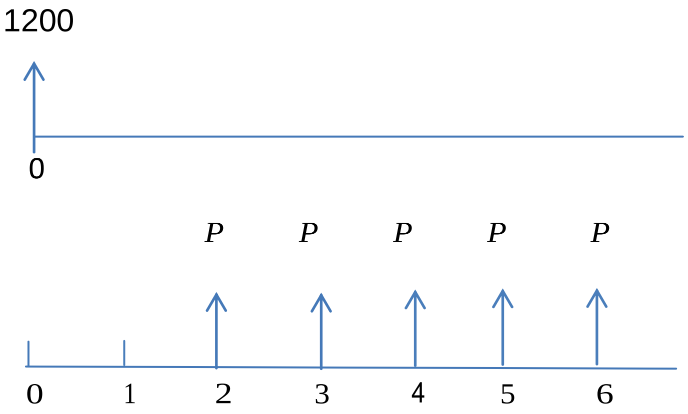

Figura 11: Pagamento em 5 parcelas

Igualando os valores na época 1 (essa é a escolha natural da data de comparação: um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

$$1200(1+0,02) = P\frac{1-(1+0,02)^{-5}}{0,02} \Rightarrow P = \frac{1200.1,02.0,02}{1-1,02^{-5}} \cong 259,70$$

Portanto, o valor das parcelas é de R$ 259,70.

2.8 Rendas Perpétuas

Definição 2.10: *Rendas perpétuas ou perpetuidades são rendas cujo número de pagamentos é infinito ou em sua praticidade é muito grande.*

A perpetuidade tem muita utilidade para empresas quando fazem análise de um novo investimento. Rendas perpétuas são comuns em locações, como por exemplo, a locação ou aluguel de um imóvel de modo que o conjunto de aluguéis caracterize uma renda perpétua.

Nesta seção, vamos estudar o valor de uma renda perpétua de prestações iguais e postecipadas.

Vimos na seção anterior que o valor de uma série de termos iguais a P , um tempo antes do primeiro pagamento é dado por $V = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Numa renda perpétua, n tende a infinito e desta forma $(1+i)^{-n}$ tenderá a zero. Por tanto, o valor de uma renda perpétua de prestações iguais e postecipadas é dada por$V = \frac{P}{i}$.

Exemplo 2.20 *Benedito possui um investimento que dá uma renda líquida de 0,6% ao mês (no sistema de juros compostos) e deseja dar ao seu filho uma renda mensal perpétua de R$ 600,00. Vamos determinar a quantia que Benedito deve investir para que seu filho receba essa renda mensal perpétua.*

Solução:

Como queremos determinar o valor atual (V) que Benedito deve investir para que seu filho receba uma renda perpétua de pagamentos postecipados e iguais, temos então que $V = \frac{P}{i}$, onde P $(P = 600)$ é o valor dos pagamentos mensais e i $(i = 0{,}006)$ é a taxa de juros. Portanto, $V = \frac{600}{0{,}006} = 100000$. Portanto, Benedito deve investir R$ 100 000,00.

Na próxima seção vamos falar de sistemas de amortizações, cuja aplicabilidade acontece em compras à prestação, empréstimos em bancos para pagamento em parcelas periódicas, empréstimos de habitação para compra da casa própria, dentre outras modalidades.

2.9 Amortizações

Definição 2.11: *Amortização é o mesmo que redução da dívida, ou seja, amortizar é pagar uma parte da dívida para que ela reduza de tamanho até a sua eliminação.*

É muito importante o cidadão conhecer como funciona o processo de amortização de uma dívida, para que se tenha um planejamento dentro da sua realidade e tome decisões e escolhas corretas.

Nesta seção vamos conhecer os modelos básicos de amortização de dívidas no Brasil que são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema francês de amortização (PRICE) e aprenderemos a construir os quadros de amortização de dívidas.

Independente do sistema de amortização, a cada mês, a parcela corresponde à amortização acrescida dos juros aplicados sobre o saldo devedor, onde os juros são obtidos através do produto da taxa combinada e o saldo devedor no período anterior, lembrando que pode ser acrescida de encargos, como impostos. Assim, temos que: $P_k = A_K + J_k$ e $J_k = iSD_{K-1}$ onde P_k, A_k, J_k e SD_k são respectivamente a parcela, a amortização, os juros e o saldo devedor no período k e i é a taxa de juros combinada.

Vamos estabelecer um modelo de quadro de amortização de dívidas que usaremos nesta seção:

k	J_k	A_k	P_k	SD_k
0				
1				
2				
...				
n				

2.9.1 Sistema de Amortização Constante

O sistema de amortização constante é muito utilizado no Brasil em financiamento de imóveis. Nesse modelo de amortização para quitar o financiamento, o pagamento da dívida é baseado em parcelas de amortizações iguais com prestações e juros decrescentes, o que desperta o interesse de muitas pessoas, que na maioria das vezes, por sua “ignorância” no assunto, acabam aderindo ao financiamento sem saber que o montante final da dívida pode ser ainda maior comparado a outros sistemas de amortizações.

Na tabela SAC, para calcular o valor da amortização basta dividir o saldo devedor inicial (valor financiado) pelo número de períodos (meses) correspondente ao financiamento. Assim, $A_k = \frac{SD_0}{n}$, onde SD_0 é o saldo devedor inicial e n é o número de pagamentos.

Note que o estado da dívida após k amortizações é dado por:

$$SD_k = SD_0 - kA_k = SD_0 - k\frac{SD_0}{n} \Rightarrow SD_k = SD_0\frac{n-k}{n}$$

Para entendermos melhor o SAC vamos construir uma tabela detalhada envolvendo uma determinada situação:

Exemplo 2.21 *Uma instituição bancária liberou para uma pessoa um crédito de R$ 200 000,00 para ser pago pelo SAC em 10 parcelas mensais. Vamos construir uma tabela para visualizarmos o valor das parcelas e o total dos juros sabendo que a taxa de juros é de 4% ao mês.*

Solução:

Calculando o valor das amortizações, temos que: $A_k = \frac{200000}{10} = 20000.$

k	J_k	A_k	P_k	SD_k
0	0	0	0	*200.000,00*
1	*8.000,00*	*20.000,00*	*28.000,00*	*180.000,00*
2	*7.200,00*	*20.000,00*	*27.200,00*	*160.000,00*
3	*6.400,00*	*20.000,00*	*26.400,00*	*140.000,00*

4	*5.600,00*	*20.000,00*	*25.600,00*	*120.000,00*
5	*4.800,00*	*20.000,00*	*24.800,00*	*100.000,00*
6	*4.000,00*	*20.000,00*	*24.000,00*	*80.000,00*
7	*3.200,00*	*20.000,00*	*23.200,00*	*60.000,00*
8	*2.400,00*	*20.000,00*	*22.400,00*	*40.000,00*
9	*1.600,00*	*20.000,00*	*21.600,00*	*20.000,00*
10	*800,00*	*20.000,00*	*20.800,00*	0
Totais	*44.000,00*	*200.000,00*	*244.000,00*	

Neste exemplo, podemos notar que as parcelas e os juros diminuem numa progressão aritmética de razão 800.

2.9.2 Sistema Francês de Amortização ou Sistema PRICE

O sistema francês de amortização é um modelo de amortização muito usado em financiamentos em geral de bem de consumo, cuja característica principal é apresentar pagamentos mensais iguais, com uma amortização crescente. Vimos na seção 3.6 que um valor SD_0 (saldo devedor inicial) quitado em n prestações iguais a uma taxa i de juros compostos é dado por $SD_0 = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow P = SD_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

Como as prestações são constantes, então $P_k = SD_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

Vamos agora, encontrar o estado da dívida após k amortizações, isto é, vamos determinar o valor de SD_k. Para melhor esclarecimento, faremos um diagrama de fluxo de caixa.

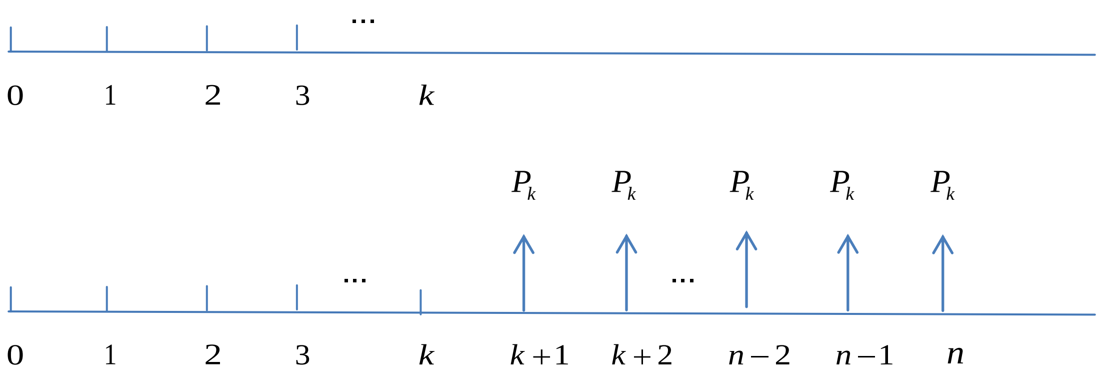

Figura 11: Pagamento em $n-k$ parcelas

Como na Tabela PRICE (Sistema Francês de Amortização) todas as prestações são iguais, consideramos as prestações em todos os períodos de valor P_k (prestação no período k).

Igualando os valores na época k (um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

$$SD_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} \Rightarrow SD_k = SD_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} \Rightarrow$$

$$SD_k = SD_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

Vejamos no exemplo a seguir como ficaria a situação do financiamento do exemplo 3.21 feito pelo SAC agora feito pela Tabela PRICE, para então compararmos qual dos sistemas de amortização seria o mais vantajoso.

Exemplo 2.22 *Uma instituição bancária liberou para uma pessoa um crédito de R$ 200 000,00 para ser pago pela Tabela PRICE em 10 parcelas mensais. Vamos construir uma tabela para visualizarmos o valor das parcelas e o total dos juros sabendo que a taxa de juros é de 4% ao mês.*

Solução:

Calculando o valor das parcelas, temos que:

$$P_k = SD_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 200000 \frac{0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-10}} = 200000 \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-10}} = 24658{,}18$$

Para recordar, os juros do período serão obtidos sempre pelo produto da taxa e o saldo devedor do período anterior e a amortização do período pela diferença entre a parcela e os juros naquele período.

k	J_k	A_k	P_k	SD_k
	0	0	0	*200.000,00*
0	*8.000,00*	*16.658,18*	*24.658,18*	*183.341,82*
1	*7.333,67*	*17.324,51*	*24.658,18*	*166.017,31*
2	*6.640,69*	*18.017,49*	*24.658,18*	*147.999.82*
3	*5.919,99*	*18.738,19*	*24.658,18*	*129.261,63*
4	*5.170,46*	*19.487,72*	*24.658,18*	*109.773,91*
5	*4.390,95*	*20.267,23*	*24.658,18*	*89.506,68*
6	*3.580,26*	*21.077,92*	*24.658,18*	*68.428,76*
7	*2.737,15*	*21.921,03*	*24.658,18*	*46.507.73*
8	*1.860,30*	*22.797,88*	*24.658,18*	*23.709,85*
9	*948,33*	*23.709,85*	*24.658,18*	0
Totais	*46.581,80*	*200.000,00*	*246.581,80*	

Ao analisarmos o financiamento hipotético de R$ 200 000,00 feito pela tabela SAC em 10 prestações a juros de 4% ao mês, temos de juros o valor de R$ 44 000,00, ao passo que o mesmo financiamento, nas mesmas condições, porém feito pela tabela PRICE gera juros de R$ 46 581,80. Como os bancos estão sempre interessados no lucro como qualquer outra empresa, esse exemplo nos dá a ideia de que para os bancos é melhor adotar o sistema francês de amortização em liberação de empréstimo para períodos pequenos.

Agora vamos comparar qual sistema de amortização seria mais vantajosa numa situação hipotética desenvolvida em um período de alguns anos.

Exemplo 2.23 *Um banco liberou um financiamento de R$ 100 000,00 com taxa de 1% ao mês. Sabendo que o prazo foi de 100 meses, vamos verificar qual sistema de amortização seria o mais vantajoso de aderir e sob quais condições.*

Solução:

Tabela SAC: Temos que o saldo devedor inicial é $SD_0 =$ 100000. Como a amortização no período k é dada por $A_k = \frac{SD_0}{n}$, então $A_1 = A_2 = \frac{100000}{100} = 1000.$

Temos também que $SD_1 = SD_0 - A_1 =$ 100000 – 1000 = 99000. Logo os juros nos períodos $k =$ 1 e $k =$ 2 são respectivamente $J_1 = iSD_0$ = 0,01.100000 = 1000 e $J_2 = iSD_1$ = 0,01.99000 = 990.

Como os juros obedecem a uma progressão de razão r = -10, então o total de juros (T_J) é dada pela soma dos termos dessa PA. Vamos determinar os juros no período $k =$ 100. Temos que:

$$J_{100} = J_1 + (100-1)r = 1000 + 99(-10) = 10 \Rightarrow T_J = \frac{(J_1 + J_{100})n}{2} = \frac{(1000+10)100}{2} = 50500{,}00.$$

Tabela PRICE:

Sabemos que as parcelas são constantes e iguais a $P_k = SD_0 \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow$ $P_k = 100000 \dfrac{0{,}01}{1-(1{,}01)^{-100}} = 1586{,}57$. Podemos então expressar o total de juros do financiamento pela relação: T_J = $nP_K - SD_0$

Logo o total de juros do financiamento em questão é:

T_J = 100x1586, 57 – 100000 = 58657,00.

Notemos que a parcela inicial pelo SAC é P_1= $A_1 + J_1$= 1000 + 1000 = 2000, enquanto pela tabela PRICE é de 1586,57. No entanto, apesar de as parcelas serem maiores no começo, há uma amortização maior da dívida gerando uma economia significativa no final. Desta forma, concluímos que se houver um planejamento de modo que o cliente perceba que é capaz de suportar o pagamento de uma prestação maior no início, será mais vantajoso para ele optar pela tabela SAC.

Na última seção deste capítulo traremos algumas questões desafiadoras de ENEM e também de concursos públicos abordando todo conteúdo de matemática financeira desenvolvido neste trabalho e desta forma, o aluno poderá colocar em prática todo o seu aprendizado.

2.10 Questões de Concursos Públicos e/ou ENEM abordando cada um dos temas da matemática financeira mencionados neste trabalho

ENEM 2011 - Questão 157 – Prova Azul (Capitalização Simples)

1) *Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (Certificado de Depósito Bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:*

	Rendimento Mensal (%)	*IR (Imposto de Renda)*

Poupança	*0,560*	*ISENTO*
CDB	*0,876*	*4% (sobre o ganho)*

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.

b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.

c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.

d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

*(***Resposta: letra d)**

ENEM 2011 - Questão 177 – Prova Azul (Capitalização Composta)

2) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:
Investimento A: 3% ao mês.

Investimento B: 36% ao ano.

Investimento C: 18% ao semestre.

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093

6	1,194
9	1,305
12	1.426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

A) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

B) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

C) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

D) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

E) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39 % ao é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

(Resposta: letra c)

Questão 82 – Fiscal SEFAZ PI – 2002 [ESAF] (Equivalência de Capitais a Juros Compostos)

3) José tem uma dívida a ser paga em três prestações. A primeira prestação é de R$ 980,00 e deve ser paga ao final do terceiro mês; a segunda é de R$ 320,00 e deve ser paga ao término do sétimo mês; a terceira é de R$ 420,00 e deve ser paga ao final do nono mês. O credor cobra juros compostos com taxa igual a 5% ao mês. José, contudo, propõe ao credor saldar a dívida, em uma única prestação ao final do décimo segundo mês e mantendo a mesma taxa de juros contratada de 5%.

Se o credor aceitar a proposta, então José pagará nesta única prestação o valor de:

a) R$ 1.214,91 b) R$ 2.114,05 c) R$ 2.252,05

d) R$ 2.352,25 e) R$ 2.414,91

(Resposta: letra e)

Prova: Técnico Bancário/Órgão: Banpará/Banca: ESPP/ Ano: 2012 (Taxas Equivalentes)

4) A taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 10% ao ano no período de capitalização semestral é:

a) 10% b) 5,125% c) 21% d) 12,5% e) 10,25%

(Resposta: letra e)

FMP Concursos – 2012 – Concurso Público para Contador – Prefeitura de Porto Alegre (Séries Uniformes)

5) Uma loja utiliza a taxa de juros de 2% ao mês para financiar produtos a seus clientes. Para financiar uma compra cujo valor à vista é de R$ 2.000,00, em 8 prestações mensais, iguais e sucessivas, a primeira delas vencendo 2 meses após a compra, o valor da prestação será:

a) R$ 267,60 b) R$ 273,00 c) R$ 278,46 d) R$ 284,00 e) R$ 289,80

(Resposta: letra c)

Cesgranrio-Petrobras-2005 (Renda Perpétua)

6) Qual é o valor atual de uma renda perpétua, de pagamentos mensais postecipados, iguais a R$ 100,00, a juros de 1% ao mês?

a) R$ 1 000,00 b) R$ 5 000,00 c) R$ 8000,00
d) R$ 10 000,00 e) R$ 100 000,00

(Resposta: letra d)

Técnico Bancário- Caixa / 2008 – Cesgranrio (Sistema de Amortização Constante)

7) *Um empréstimo de R$ 200,00 será pago em 4 prestações mensais, sendo a primeira delas paga 30 dias após o empréstimo, com juros de 10% ao mês, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). O valor, em reais, da terceira prestação será:*

a) 50,00 b) 55,00 c) 60,00 d) 65,00 e) 70,00

(Resposta: letra c)

Técnico Bancário- Caixa / 2008 – Cesgranrio (Sistema Francês de Amortização)

8) Um imóvel de 100 mil reais é financiado em 360 prestações mensais, a uma taxa de juros de 1% ao mês, pelo Sistema de Amortização Francês (Tabela PRICE), gerando uma prestação de R$ 1.028,61. Reduzindo-se o prazo do financiamento para 240 prestações, o valor de cada prestação é, em reais, aproximadamente:

Dado: $(1{,}01)^{-120} = 0{,}3$

a) 1.099,00 b) 1.371,00 c) 1.428,00 d) 1.714,00 e) 2.127,00

(Resposta: letra a)

3. SUGESTÕES DE ATIVIDADES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA EM SALA DE AULA

Muitos professores são surpreendidos quando os alunos os perguntam onde usariam determinadas teorias em suas vidas. É possível que haja determinado assunto em que o professor tenha dificuldade de associar ao cotidiano dos alunos. Mas sempre que o professor fizer a correlação do conteúdo matemático trabalhado em sala de aula com o cotidiano dos alunos, certamente os mesmos terão maior interesse em aprender.

Não é novidade ouvirmos indagações de professores das redes estaduais de que pouco é investido pelos governos estaduais em cursos de formação inicial que aborde ou aprimore disciplinas relacionadas ao uso de tecnologias de informação e comunicação ou até mesmo *softwares* educacionais. Desta forma, muitos professores usam esse fato como justificativa de não usar as tecnologias como auxílio no processo de ensino e aprendizagem. A educação tende a melhorar à medida que haja na particularidade, o desejo de fazer a diferença.

Não há dúvidas de que a matemática financeira está presente na vida dos alunos. Este capítulo visa abordar a matemática financeira em situações do cotidiano através de atividades contextualizadas a serem aplicadas por professores em sala de aula recorrendo também ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação.

ATIVIDADE 1

A fatura de telefone e internet da residência de Gabriela com vencimento em 25.12.2016 veio no valor de R$ 142,15. Gabriela é professora de uma rede municipal do estado da Bahia. Haja vista, seu pagamento do mês de dezembro junto ao décimo terceiro e um terço de férias só caiu em sua conta no dia 15.01.2017. No mesmo dia Gabriela pagou sua fatura atrasada de telefone e internet. Quanto de juros foi pago por Gabriela sabendo que na fatura consta que para pagamentos atrasados será cobrado multa de 2% e juros de 0,075% ao dia.

Metodologia: O professor deve pedir aos alunos que citem situações do cotidiano em que se aplicam juros simples (pode acontecer de a turma não conseguir mencionar um exemplo). Após este momento, o professor apresenta a atividade e mostra a aplicabilidade dos juros simples e após a correção, pede a turma que formem duplas e elaborem uma questão que envolva juros simples no dia a dia.

Público Alvo: 1ª série do Ensino Médio

Tempo: 1 hora-aula

Comentário: Este é um exemplo típico de aplicação de juros simples no cotidiano. É interessante o professor mostrar a aplicabilidade dos juros simples no dia a dia, pois, muitos professores passam para os alunos a ideia de que juros simples só existem nos livros didáticos, sendo na prática a ocorrência de juros compostos.

ATIVIDADE 2

Certo investimento rende 3% ao mês, a juros compostos. Se um cliente aplicar R$ 1000,00, em quanto tempo ele obterá um montante de R$ 10000,00?

Metodologia: O professor aplicará essa atividade primeiramente explorando as propriedades de logaritmos, deverá solicitar que os alunos resolvam cerca de dois exercícios de aplicação das propriedades de logaritmos e depois mostrar para a turma que este problema de juros compostos trata-se de uma aplicação logarítmica.

Público Alvo: 2ª Série do Ensino Médio

Tempo: 2 horas - aula

Comentário: Neste problema para a obtenção do tempo em questão será necessário que o aluno recorra aos recursos tecnológicos fazendo uso da calculadora científica para ter conhecimento do logaritmo correspondente. O uso da calculadora em sala de aula tem levantado muitos questionamentos. Muitos acham que o uso constante da mesma impede o aluno de saber a tabuada e até mesmo de pensar. Algumas considerações devem ser ponderadas. Não é o uso da calculadora que conduzirá o aluno a resposta correta e quando este tipo de problema é abordado em provas externas (ENEM, vestibulares, concursos públicos), o não uso da calculadora não trará prejuízos, pois os logaritmos necessários virão como dados.

ATIVIDADE 3

Mirela depositou R$ 8000,00 em sua caderneta de poupança que rende 0,68% ao mês. Ao sair do banco, ela se deparou com o anúncio de uma motocicleta 0 km, cujo pagamento à vista era de R$ 8000,00 ou em três prestações iguais de R$ 2680,00 sendo a primeira paga no ato da compra. Ela percebeu que a compra a prazo sairia por R$ 8040,00. Como tinha muito interesse na compra da motocicleta, no mesmo dia voltou ao banco e retirou todo dinheiro depositado e efetuou a compra no intuito de economizar R$ 40,00. Pergunta-se, Mirela fez um bom negócio?

Metodologia: O professor inicialmente perguntará a turma quais são as vantagens da compra à vista? Logo após perguntará se comprar a vista é sempre a melhor decisão? Caso contrário, justificar. Ao aplicar a atividade, o professor pedirá para a turma solucionar sem usar fórmula alguma e após a correção, enfatizar a todos de que este problema traduz a tomada de decisões em investimentos.

Público Alvo: 3ª Série do Ensino Médio

Tempo: 2 aulas - hora

Comentário: Nos dias atuais, uma grande parcela da sociedade tem o mesmo pensamento da Mirela. Muitos tomam decisões financeiras precipitadas por conta de propagandas atrativas e levam grandes prejuízos por não ter conhecimento da matemática financeira.

O professor pode até usar este problema para introduzir a teoria de equivalências de capitais. Neste problema, daria para ser abordado pelo aluno ou professor da seguinte forma:

- À vista, não sobraria nada em minha caderneta de poupança.
- A prazo, no mesmo dia da realização do depósito, ao efetuar o pagamento da primeira parcela, restaria R$ 5320,00. Após um mês, o valor atualizado na minha caderneta de poupança seria de R$ 5320,00 + 0,68% de R$ 5320,00 = R$ 5356,18, que ao pagar a segunda parcela restaria ainda R$ 2676,18. Desta forma, ao findar de mais um mês, a atualização final na poupança seria de R$ 2676,18 + 0,68% de 2676,18 = 2694,38 que obviamente quitaria a dívida e ainda me sobraria R$ 14,38. Portanto, a prazo seria mais vantajoso.

Este problema conscientiza o aluno em como fazer o melhor investimento financeiro. Lembramos que nos dias atuais, muitos empresários até têm condições de comprar veículos novos à vista, mas preferem pagar uma taxa de juros em cartas de créditos e aplicar seu dinheiro em investimentos bancários ou em suas empresas, pois terão maior rentabilidade.

ATIVIDADE 4

(Atividade Prática)

Peçam aos alunos que extraiam da internet as contas de água e energia de suas residências dos últimos seis meses. Calcular o percentual de aumento ou desconto mês a mês e registrar numa tabela e através do Excel representar os dados em gráficos de linhas ou barras e por fim, apresentar medidas que tragam economias no consumo mensal de água e energia dentro de seus lares.

Metodologia: Nesta atividade o professor pedirá aos alunos para levar à sala de aula uma conta de água e uma de energia. Levará os alunos para o laboratório de informática com internet para eles extraírem os dados das contas referidas nos últimos seis meses. Na aula seguinte os alunos farão os cálculos de aumento ou desconto mês a mês e registrarão numa tabela simples e na terceira aula, todos retornarão ao laboratório e com auxílio do professor e do estagiário do laboratório, representarão através do Excel os dados em gráficos de linhas ou barras.

Público Alvo: 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio.

Tempo: 3 aulas – hora

Comentário: O objetivo desta atividade é trabalhar descontos e aumentos percentuais numa realidade cotidiana dos alunos associando aos recursos tecnológicos, cujo foco principal é conscientizá-los à economia de água e energia dentro de seus lares.

ATIVIDADE 5

Almir Cabral solicitou um cartão de crédito da instituição "O Melhor Cartão" que cobra 13,75% de juros ao mês. Logo na primeira fatura cujo valor veio de R$ 2350,00, Almir ficou muito preocupado, pois ficou desempregado e não tinha como pagar o valor cobrado. Almir então quebrou o cartão para não aumentar sua dívida e procurou sua mãe que o ajudou e conseguiu pagar o valor mínimo da fatura (20% do total da fatura) por três meses seguidos. Exatamente no vencimento da quarta fatura, seu irmão mais velho pagou o valor integral. Pergunta-se, quanto de juros a instituição recebeu de Almir?

Metodologia: O professor deve iniciar perguntando a turma se eles conhecem algum familiar que possui cartão de crédito? Algum familiar ou amigo que se apertou financeiramente por mau uso do cartão de crédito? Após todo debate, o professor passará a atividade, dará o tempo necessário para os alunos responderem e depois da correção o professor fechará a aula trazendo algum relato (pesquisa) que relacione cartão de crédito ao SPC e SERASA.

Público Alvo: 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio.

Tempo: 1 aula – hora

Comentário: Nesta tarefa o professor não vai trabalhar somente juros. A parte principal é mostrar aos alunos que cartão de crédito é um recurso muito importante para o cidadão, desde que o mesmo saiba usá-lo. O professor deve mostrar na sala de aula alguma pesquisa que relaciona cartões de créditos com o aumento de pessoas inseridas ao **SPC** e **SERASA** e principalmente conscientizá-los de que para usar cartões de créditos deve haver planejamentos para nunca pagar o valor mínimo e se possível sempre pagar o valor integral.

SPC – Serviços de Proteção ao Crédito

SERASA – (Centralização de Serviços dos Bancos) é uma empresa privada brasileira de caráter público, responsável por reunir informações, fazer análises e pesquisas sobre as pessoas físicas e jurídicas que estão com dívidas financeiras**.**

Fonte: https://www.significados.com.br/serasa/

ATIVIDADE 6

(Financiamento com Prestações Fixas)

Cada aluno deve criar quatro exercícios de juros compostos simulando um financiamento de prestações fixas de modo que cada problema peça para determinar exatamente o número de meses, a taxa de juros mensal, o valor da prestação e o valor financiado respectivamente. Logo após o professor adotará o seguinte critério: os exercícios criados por cada aluno serão resolvidos por outro colega de sala de aula. Finalmente, o professor levará os alunos ao laboratório de informática com uso de internet e os próprios alunos verificarão se suas respostas estão corretas utilizando o endereço:

https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/calcularFinanciamentoPrestacoesFixas.do

Metodologia: O enunciado do problema já deixa evidente a metodologia que o professor deverá usar.

Público Alvo: 2ª Série do Ensino Médio

Tempo: 3 aulas – hora

Comentário: Fazer um financiamento de um bem qualquer é algo muito comum nos dias atuais, tornou-se rotineiro na vida dos pais de nossos alunos e até mesmo dos alunos acima de 18 anos. A tarefa pedida acima aproxima os alunos de uma realidade em prática no mercado financeiro, bastando somente conhecer a taxa de juros mensal para poder fazer simulações e tomar decisões.

ATIVIDADE 7

José ganhou em jogos de loteria R$ 500 000,00. Seu único filho conseguiu 50% de bolsa em um curso de medicina na Faculdade "Aqui Prepara Seu Futuro". José procurou a instituição e conseguiu em contrato um acordo de que manteriam constantes os 50% de mensalidades até o final do curso. Sabendo de que a mensalidade integral era de R$ 4000,00, José recorreu ao banco estadual da sua região para fazer uma aplicação na caderneta de poupança que rende 0,55% ao mês para obter no mínimo uma renda de R$ 2000,00 por pelo menos até o final do curso de medicina de seu filho. Quanto José deve investir para alcançar seus objetivos?

Metodologia: Inicialmente, o professor poderá perguntar à turma qual seria uma forma justa de determinar o valor do aluguel de um imóvel? Após ouvir as opiniões dos alunos, o professor passará ou reforçará o conceito de renda perpétua. O professor definirá um valor para certo imóvel e a partir da taxa da caderneta de poupança de um banco qualquer mostrará aos alunos qual deve ser o valor do aluguel daquele imóvel. Logo após passará a atividade proposta e deixará os alunos raciocinarem.

Público Alvo: 3ª Série do Ensino Médio

Tempo: 1 aula – hora

Comentário: Este é um tipo de problema que dificilmente será encontrado em livros didáticos da atualidade, pois o conceito de renda perpétua não tem sido abordado nos livros, o que deixa a desejar. Por se tratar de uma relação em grande conexão ao cotidiano, é interessante que o professor enfatize em sala de aula o tema, pois muito é cobrado em provas de concursos públicos.

ATIVIDADE 8

O Banco Cidadão liberou para um cliente um crédito de 100 mil reais a ser pago em 10 parcelas mensais a uma taxa de 3% ao mês, utilizando o Sistema de Amortização Constante. Suponhamos que no mesmo dia, o banco liberou o mesmo crédito a outro cliente nas mesmas condições citadas anteriormente, agora pelo Sistema Francês de Amortização. Faça um quadro comparativo entre o Sistema de Amortização Constante e o Sistema Francês de Amortização apontando vantagens e desvantagens.

Metodologia: Uma vez que os livros didáticos praticamente não exploram amortização ou quando exploram é pouco, o professor deverá levar os alunos ao laboratório de informática com internet e solicitá-los que façam uma pesquisa sobre as tabelas SAC e PRICE (pode ser duplas). Na aula seguinte, o professor desenvolverá uma aula expositiva sobre o tema. Na terceira aula o professor desenvolverá alguns exercícios resolvidos e na quarta aula será passada a atividade proposta (lembrando que será necessário o uso de uma calculadora científica).

Público Alvo: 3ª Série do Ensino Médio

Tempo: 2 aulas – hora

Comentário: O uso da calculadora científica para resolver este tipo de problema é muito importante. Após a visualização das duas planilhas de amortizações, uma ao lado da outra, o aluno será capaz de apontar vantagens e desvantagens, estimulando o seu censo crítico em relação a movimentos financeiros. Também, é interessante, que o professor leve os alunos ao laboratório de informática e exponha a solução do problema usando as ferramentas do programa Excel para o aluno perceber a importância de dominar os recursos tecnológicos e computacionais para a prática da vida.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática financeira é um dos ramos da matemática de maior aplicabilidade no cotidiano, em função disso, é destacada neste trabalho a esperança de que os professores deem maior ênfase à educação financeira. É necessária também uma mudança de cima para baixo, por exemplo, o olhar do MEC para a abordagem da matemática financeira nas escolas, inserção da disciplina matemática financeira nas licenciaturas de matemática, a estruturação do currículo básico comum nas secretarias estaduais de educação quanto aos conteúdos contemplados de educação financeira, a partir daí os autores de livros didáticos também farão ajustes nas abordagens da matemática financeira, indo além de porcentagem, acréscimos, descontos e juros compostos.

As dificuldades citadas acima não devem ser empecilhos ou transferências de culpas por parte dos professores. Através da contextualização e interdisciplinaridade é possível melhorar este aspecto negativo do ensino da matemática financeira. Um bom planejamento das aulas conectando os alunos à realidade em que os mesmos estão inseridos fará toda diferença.

A matemática financeira precisa ir além dos muros da escola. O professor é o principal agente nesse desafio. Esta dissertação apresenta exatamente essa visão, preparar alunos críticos ao momento economicamente difícil em que vivemos para que saibam tomar decisões corretas nas diversas situações que envolvam conhecimentos de matemática financeira, desde compras à vista ou a prazo a financiamentos de veículos e imóveis, observando sempre os menores juros e parcelas que sejam da realidade deles para não entrarem em dificuldades financeiras e até mesmo incentivar os alunos que tomem gosto pela educação financeira para que no futuro sigam carreiras profissionais que exijam amplo conhecimento financeiro.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília/DF: MEC/SEF, 1998.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio / Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

[3] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contextos e aplicações – volume único – 3ª Ed. São Paulo: Ática 2008.

[4] ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação. Guia de Implementação: currículo básico escola estadual – Vitória: Sedu, 2009.

[5] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy. Matemática Fundamental – volume único – São Paulo: FTD, 1994.

[6] MORGADO, Augusto césar; CARVALHO, Paulo César Pinto. Matemática Discreta: coleção profmat. – 2ª Ed. SBM, 2015.

[7] PITOMBEIRA, João Bosco; BORDEAUX, Ana Lúcia. Multicurso Ensino Médio: matemática, 2ª série – 3ª Ed. – Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2008.

[8] PUCCINI, Abelardo de Lima; PUCCINI, Adriana. Matemática Financeira: objetiva e aplicada – Ed. Compacta. – São Paulo: Saraiva, 2006.

[9] RIBEIRO, Jackson. Matemática: ciência e linguagem – volume único – São Paulo: Scipione, 2007.

[10] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática – 1ª. ed. – São Paulo: FTD, 2010.

[11] *http://www.correio24horas.com.br/detalhe/educacao/noticia/matematica-so-93-dos-alunos-do-ensino-medio-dominam-a-materia/?cHash=7732c6e62c3327e4dd97a7432 0e017a2*