UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GABRIELA NERY PEREIRA

PROPOSTA DE OFICINAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO TRAÇOS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSINO

ILHÉUS, BAHIA

2017

GABRIELA NERY PEREIRA

PROPOSTA DE OFICINAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO TRAÇOS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa

Ilhéus, Bahia

2017

P436 Pereira, Gabriela Nery.

Proposta de oficinas didáticas para o ensino de análise combinatória utilizando traços da investigação matemática como método de ensino / Gabriela Nery Pereira. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.

46 f. : il. ; anexo.

Orientador: Vinicius Augusto Takahashi Arakawa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Pesquisa. 3. Análise combinatória. 4. Aprendizagem. I. Título.

CDD 510.7

GABRIELA NERY PEREIRA

PROPOSTA DE OFICINAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO TRAÇOS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 10 de março de 2017

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa

(Orientador)

Prof. Me. André Malvezzi Lopes

(UESC)

Prof. Me. Aldo José Conceição da Silva

(IFBA – Eunápolis)

Ilhéus, 2017.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, pelas graças e cuidado que me concede sempre.

Aos meus pais, Lena e Jean, que sempre me proporcionaram a oportunidade dos estudos, contribuindo sempre com todo apoio para que esse sonho se concretizasse.

A meu esposo Tiago Rosário de Souza que vivenciou comigo todos os momentos deste Mestrado, compreendendo minhas ausências, me apoiando e incentivando para que eu tivesse êxito.

A todos os professores do curso e de maneira especial a meu professor orientador, Vinícius Augusto Takahashi Arakawa, pelo apoio, orientações e ensinamentos durante todo esse percurso.

A meus colegas guerreiros e sobreviventes: Dickson Magno, Vinícius Sertório, Roberto Loscha, José Roberto, Almir Cabral, Walas da Silva e também, aos que por diversos motivos, não puderam concluir esta etapa nesse momento, por todo conhecimento e experiência compartilhada.

Aos meus amigos e familiares que são parte de mim, e que sem eles não seria possível a realização dessa, nem de nenhuma outra conquista.

Aos colegas e amigos do Colégio Estadual Dr. Vasco Filho, que me incentivaram e deram suporte para conseguir fazer o curso de Mestrado, mesmo estando trabalhando com carga horária total.

A Capes pelo apoio financeiro.

A Universidade Estadual de Santa Cruz pela oportunidade.

.

ABSTRACT

This paper approaches the Mathematics Research as a teaching tool in the teaching of Combinatorial Analysis in the 2nd year of High School, taking as objective the proposal of a workshop that enables the development of ideas and exploration of different strategies in counting situations. To achieve this goal we have chosen to present an example of a situation in which the steps that mathematical research provides are clear. Next, we did a theoretical review on Mathematics Research with an approach to teaching methodology, emphasizing the steps involved and the very important role of the teacher during these activities. Finally, our research proposes a workshop using traces of such methodology that aims to awaken the interest of the students to the studies in combinatorial analysis, thus providing the development of logical reasoning and with this, promoting the improvement of teaching in this subject and make their learning significant.

Keywords: Mathematics Research, Teaching and Learning, Combinatorial Analysis.

RESUMO

O presente trabalho aborda a Investigação Matemática como ferramenta didática no ensino da Análise Combinatória no 2º ano do Ensino Médio, tendo como objetivo a proposta de oficinas que possibilitem o desenvolvimento de ideias e exploração de estratégias variadas em situações de contagem. Para alcançar esse objetivo optamos por apresentar um exemplo de uma situação, no qual ficam claros os passos que a investigação em matemática proporciona. Em seguida, fizemos uma revisão teórica sobre a Investigação Matemática com uma abordagem de metodologia de ensino, enfatizando as etapas envolvidas e o tão importante papel do professor durante estas atividades. Finalmente, nossa pesquisa propõe oficinas utilizando traços de tal metodologia que visa despertar o interesse dos alunos para os estudos em análise combinatória proporcionando assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico e com isto, promover a melhoria do ensino neste tema e tornar seu aprendizado significativo.

Palavras-chaves: Investigação Matemática. Ensino-Aprendizagem. Análise Combinatória.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Infelizmente percebe-se ainda que o ensino de Matemática no Brasil, em sua maioria, é feito da forma tradicional, seguindo uma tendência tecnicista, sem significado. Os alunos aprendem o como fazer sem saber o porquê e para que. Desta maneira, muitas vezes, o ensino resume-se em o professor passar definições, propriedades e fórmulas prontas, sem dar margem à reflexão e questionamentos, seguidos de uma série de exercícios sem sentido, enquanto que o aluno executa as fórmulas e repete os procedimentos como aprendeu.

Assim, quando o aluno, se depara com qualquer outra situação que exija uma reflexão e tomada de decisões, ele não sabe usar os conceitos utilizados pelo professor em sala de aula para fazer uma conexão com o problema e solucioná-lo, indo totalmente pela contramão do que dizem os documentos oficiais que regem a Educação no Brasil.

Segundo [1], o ensino da Matemática nessa modalidade deve adequar-se ao desenvolvimento dos alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, para que desta forma possa criar condições para que ele seja inserido neste mundo em constantes mudanças, desenvolvendo capacidades para sua vida social e profissional.

Nesse emaranhado de novas necessidades sociais, culturais e profissionais, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática, pois ela nos proporciona a compreensão de conceitos e procedimentos para tirar conclusões, argumentar e tomar decisões, sejam elas enquanto cidadãos, consumidores, profissionais.

Partindo dessa visão, percebemos que a prática pedagógica da Matemática no processo de ensino e aprendizagem deve partir de situações reais para que os alunos consigam relacionar a teoria com a prática no seu dia-a-dia. Esta prática pode se apoiar em uso de jogos, aplicativos computacionais, materiais concretos, metodologias de ensino que visam a construção do conhecimento. Tais metodologias apoiam-se em recursos de modo a aproximar cada vez mais os conteúdos aos alunos, estimulando-os e fazendo com que o asco que a Matemática causa fique cada vez menor, e no lugar dele fique a vontade de aprender mais, visto que o alunado passará a perceber a sua utilidade e necessidade.

Assim, tendo como objetivo uma proposta em que o professor não seja apenas expositor de conteúdos e conceitos e que o aluno seja o participante ativo do seu conhecimento, faremos uma proposta com o uso da metodologia de Ensino das Investigações Matemáticas, proposta esta que coloca o aluno como sujeito (autor principal) das ações educativas, onde ele se colocará como um verdadeiro matemático em investigação, tendo que conjecturar, testar e provar suas conclusões.

Vale salientar que em contextos de ensino e aprendizagem,

> Investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos a resposta pronta, e procuramos essa reposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. ([2], p.9)

Logo, investigar aqui não significa trabalhar com problemas extremamente difíceis, mas sim trabalhar com problemas que inicialmente podem estar confusos, mas que busquemos maneiras de deixá-los claros para o estudo de modo organizado.

Nesse sentido, a Análise Combinatória, que se caracteriza como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático de forma plena e eficaz dos jovens e adolescentes, quando não trabalhada de forma mecânica e repetitiva, faz com que os alunos consigam desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas.

A análise Combinatória representa um conteúdo relevante no contexto social, pois seus problemas estão presentes em situações corriqueiras do dia-a-dia dos alunos, e mantem uma estreita relação com outros ramos de estudos, como a estatística e probabilidade.

Ainda assim, trata-se de um conteúdo considerado difícil por muitos professores e muitas vezes até deixado em segundo plano ou trabalhado apenas por meio de fórmulas devido às dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem.

Nessa perspectiva, a proposta a ser apresentada, objetiva contribuir para o ensino de Matemática, discutindo as possíveis contribuições e dificuldades desse tipo de atividade trabalhadas com o conteúdo de Análise Combinatória no 2º ano do Ensino Médio.

Este trabalho será desenvolvido em 5 capítulos e se apresenta estruturado da seguinte forma:

O próximo capítulo conceitua e exemplifica o que é uma Investigação em Matemática, enfatizando cada um de seus passos e a sua importância.

No capítulo 2, fundamentamos a Investigação Matemática como uma metodologia de ensino baseados em autores renomados no assunto como Ponte, Brocado e Oliveira.

No capítulo 3, damos ênfase ao comportamento e às ações do professor ao desenvolver atividades que trabalham com essa metodologia de ensino.

No capítulo 4, apresentamos nossa proposta de ensino e detalhamos os objetivos de cada uma das etapas, bem como tempo médio de aplicação de cada atividade e possíveis atitudes dos alunos juntamente com sugestões de intervenções do professor.

Finalmente, no último capítulo, apresentamos algumas considerações sobre os estudos realizados e proposta apresentada.

CAPÍTULO 1:

A INVESTIGAÇÃO EM MATEMÁTICA

A palavra investigar significa seguir vestígios, pesquisar. Possui sinônimos como, estudar, explorar, analisar, indagar. Segundo [2], para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades.

Um exemplo famoso de uma investigação em matemática é o “Último Teorema de Fermat”. Historicamente, sabe-se que Pierre Fermat viveu na França no século XVIII e dedicava seu tempo livre à matemática, Fermat gostava de apresentar problemas a outros matemáticos com o intuito de desafiá-los a encontrar a solução. Entretanto, Fermat era considerado um Matemático amador, e por isso, apesar da qualidade do que produzia, não havia preocupação em formalizar e documentar os seus achados.

Num desses estudos informais, Fermat analisando a equação $x^2 + y^2 = z^2$ do Teorema de Pitágoras, percebeu que substituindo a potência 2 por 3, a equação não apresentava solução e que trocando a potência por números maiores que 3 a equação continuava a não ter solução. Então, conjecturou a seguinte afirmação: *"É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de duas quartas potências ou, em geral, para qualquer número que é uma potência maior do que a segunda, ser escrito como a soma de duas potências com o mesmo expoente”.*

Segundo a história, Fermat teria conseguido a demonstração desta proposição, mas não a teria feito formalmente por não “caber nas margens de um livro”, o qual, provavelmente, usava para seus rascunhos. Isso foi o suficiente para manter o interesse de diversos Matemáticos a cerca do tema, tentando provar que a conjectura feita em meados do século XVIII era verdadeira ou até mesmo falsa. Conjectura esta posteriormente, intitulada de O Último Teorema de Fermat.

Vários matemáticos ao longo de 350 anos tentaram solucionar o problema, dentre eles: Euler, Dirichlet (1828), Legendre (1830), Gabriel Lamé (1839), Sophie Germain, Kummer e mais recentemente, Wagstaff (1980). Todos falharam na demonstração em algum ponto, embora tais estudos não tenham sido totalmente desperdiçados, visto que novas teorias puderam ser estudadas, por exemplo, Kummer em 1847, tentando solucionar o teorema desenvolveu o método dos números complexos ideais e contribuiu assim para o desenvolvimento da teoria dos números.

A solução definitiva chegou com o Matemático Andrew Wiles, um professor da Universidade de Princeton que despertou o interesse pelo Teorema ainda menino em uma biblioteca de sua cidade, começando a estudá-lo de fato em busca de sua resolução, em segredo, a partir de 1986. Sua solução foi baseada na conjectura Taniyama-Shimura, conjectura apresentada por dois Matemáticos: Yutaka Taniyama e Goro Shimura e que não tinha a pretensão de resolver o teorema de Fermat.

Percebe-se já com isso, que:

> (...) não é possível desenvolver um trabalho em matemática ou em qualquer outra área, sem a contribuição de outros pesquisadores, sendo sempre necessário consultar outras pesquisas de modo a encontrar algo que possa ser útil, pois a pesquisa matemática não se faz isoladamente, mas através do intercâmbio de idéias entre diversas pessoas e o estudo minucioso de pesquisadores já consagrados pela relevância de seus trabalhos. ([3], p.5-6)

A conjectura feita pelos dois matemáticos diz que para cada equação elíptica há uma forma modular correspondente; Wiles percebeu que se tal afirmação estivesse de fato correta, ela poderia ser aplicada para provar o Teorema de Fermat, e assim Andrew Wiles fez, conseguiu demonstrar o problema de Taniyama-Shimura e consequentemente o problema de Fermat.

Mas, em junho de 1993, quando em uma Conferência no Sir Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences em Cambridge, Wiles apresentou a sua demonstração, ficou constatado um pequeno erro, o qual necessitou de mais um ano de estudos para ser corrigido. Finalmente a demonstração reformulada e sem erros, com cerca de 200 páginas, foi apresentada e apreciada.

> Um detalhe deve ser lembrado nesse momento: para a maioria das pessoas, a matemática é uma ciência exata e perfeita, isso se deve a maneira como os professores, de modo geral, apresentam a matéria a seus alunos nas salas de aula, onde há sempre uma solução para cada problema e essas soluções se desenvolvem naturalmente sem percalços e nem dificuldades, pelos menos da maneira como são apresentadas, dando a impressão ao aluno que a dificuldade de encontrar uma solução para tais problemas é somente dele, que não tem capacidade para resolvê-los. Esse tipo de matemática "higiênica" não deixa o aluno perceber que as dificuldades são normais na matemática e que até os grandes matemáticos se atolam na tentativa de solucionar os problemas. E que em matemática, tão importante quanto a solução de um problema é a maneira como se chega a ele, e é durante esse processo que ocorre a aprendizagem e não

> simplesmente obtendo uma resposta correta, que em si não significa nada, mas possui significado apenas se vier acompanhada de uma demonstração, pois é ai que reside o processo de aprendizado e onde algo de relevante pode ser notado. Como foi visto até aqui, várias contribuições foram feitas a matemática na tentativa de solucionar um problema, sem necessariamente atingir o objetivo principal. ([3], p.7)

Com esse pequeno apanhado histórico a cerca do Último Teorema de Fermat podemos notar que essa investigação se deu em fases distintas: a primeira de experimentação, levantamento de conjecturas; a segunda fase consiste em testes em busca de provas e demonstrações, que até ocasionaram novas descobertas em outras áreas; e, finalmente a etapa em que, com contribuições, inclusive de outras pessoas despretensiosas no assunto, há uma sistematização e verificação para posterior validação dos resultados.

Vemos que a investigação na Matemática pode ser bastante instigante e desafiadora, percebermos a matemática como uma ciência viva, em pleno processo de descobertas e não estática e pronta como é vista por muitos alunos e professores.

CAPÍTULO 2:

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, existem competências e habilidades que os alunos devem desenvolver no ensino médio, dentre elas estão, a capacidade de:

> • Procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema.
> • Formular hipóteses e prever resultados.
> • Elaborar estratégias de enfrentamento das questões.
> • Interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações ([1], p.12).

Como visto no capítulo anterior, estas habilidades estão intimamente ligadas às atividades de uma investigação em matemática.

O uso de atividades de Investigação Matemática como metodologia de ensino para a construção do conhecimento,

> (...) ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. ([2], 2005 p. 23)

O desenvolvimento destas atividades em sala de aula possui raízes na perspectiva da resolução de problemas, pois da mesma forma que um problema, tal qual definido por Polya, uma investigação não possui resolução imediata, consiste em um processo de solucionar uma situação matemática onde não se conhece os meios para chegar ao fim, requerendo do aluno um esforço, uma reflexão aprofundada, formulação de conjecturas e estratégias de resolução seguida da validação dos resultados obtidos.

Entretanto, a resolução/aplicação de problemas vem sendo aplicada de forma equivocada por muitos profissionais da educação, visto que, cada vez mais se vê professores apresentando a resolução para esse problema e o aluno, mais uma vez apenas repetindo os processos mecanicamente em outros problemas parecidos, e por consequência aprendendo sem significado. Vê-se ainda a aplicação de exercícios sendo chamados de problemas.

Segundo [2], exercícios e problemas possuem características em comum, pois ambos possuem no enunciado claramente o que é pedido, mas diferem quando o problema é uma questão onde o aluno não conhece métodos prontos para resolução de imediato enquanto que o exercício ele já tem a mão tais métodos. Em contrapartida, a investigação possui um diferencial, são questões mais abertas, cabendo a quem a investiga definir os pontos de partida e os pontos de chegada.

Na utilização da investigação matemática, é necessário que a atividade possibilite ao aluno o arriscar, a formulação de conjecturas, sem medo do erro, pois além de encontrar a solução para o problema proposto, é possível que haja outras descobertas, que algumas vezes podem ser tão importantes ou mais que a solução do problema original. Deve–se ainda lembrar que o trabalho ao investigar sempre vale a pena, pois trabalha com áreas que ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

Para [4], uma investigação matemática começa com um problema que possa ser compreendido, analisado e depois escrito em termos matemáticos. E possui três etapas principais: a introdução da tarefa, o desenvolvimento da investigação e a discussão final.

2.1 Introdução da tarefa:

Nesta etapa, o professor apresenta a proposta à turma, podendo ser oralmente ou escrita. Este é um momento importante, principalmente se os alunos ainda não possuem o hábito de investigar, pois eles estarão diante de algo novo e poderão questionar “o que é pra fazer”.

O professor funcionará como um mediador e incentivador à investigação, podendo dar alguns pequenos direcionamentos sobre o que se pode descobrir com a situação para que o trabalho progrida posteriormente mais depressa. Porém, essas intervenções devem ser feitas com cuidado, afinal não se pode esquecer que a interpretação da tarefa, deve ser também um dos objetivos dessas aulas.

O ambiente precisa ser favorável para que os alunos se sintam a vontade para explorar, pensar e debater suas ideias com os outros colegas e até mesmo com o professor. Eles devem sentir que suas tentativas são valorizadas, que podem sempre contar com o apoio do professor, mas que eles que estão no comando da atividade.

2.2 Desenvolvimento da Investigação:

Neste momento, a atividade já deverá estar devidamente apresentada pelo professor de modo que os alunos já tenham compreensão sobre ela, e daí o professor passa a desenvolver um papel secundário, deixando que os alunos assumam o trabalho principal. Aqui, espera-se que eles possam utilizar de processos que caracterizam a investigação matemática, tais como dito anteriormente: a exploração e formulação de questões, o levantamento de conjecturas, o teste das conjecturas e reformulação de conjecturas (caso necessário), concluindo com a justificação das mesmas e avaliação de todo processo investigativo.

Autores como Tudella [5] e [6] defendem que este trabalho pode ser desenvolvido em pequenos grupos, pois esta forma de organização permite a exploração de diferentes ideias possibilitando ao professor a oportunidade de estimular o confronto de opiniões e sentido crítico dos alunos em cada grupo.

De início, a exploração das questões tendem a tomar um pouco mais de tempo e pode parecer ao professor que nada acontece ou que os alunos estejam com dificuldades com a atividade, mas esse é momento crucial para que os alunos comecem a se familiarizar com os dados do problema e formular suas questões.

Aqui também o trabalho do professor, apesar de ser coadjuvante, é bastante importante, pois ele possui a função de estar atento a possíveis conjecturas que podem se mostrar sem utilidades para o objetivo da aula, cabendo-lhe questionar os alunos de maneira que os estimulem a olhar para outras direções e fazer com que eles possam refletir sempre sobre o que estão fazendo.

Após a exploração, é natural a formulação de conjecturas. Mas, os alunos devem ser incentivados a não apenas pensar nessas conjecturas e verbalizar com os demais colegas, e sim a também escrever suas ideias em um papel, registrando ‘sua lógica’ de modo que possa haver um confronto, um debate e uma aceitação, ou não, das suas ideias. Entretanto, é comum os alunos aceitarem muito facilmente as conjecturas após testarem e verificarem para um número reduzido de casos, e com isso, mais uma vez entra em questão o papel do professor na função de fazê-los refletir nas suas ações e até instigá-los a procurar contraexemplos de modo a testar a validade de suas conjecturas.

A justificação ou prova das conjecturas é fundamental para que o processo investigativo seja mais produtivo. É claro que essa prova, inicialmente, não precisa ser feita com todo o rigor dos matemáticos, esse conceito de prova pode ser introduzido gradualmente e pode restringir-se à procurar uma justificativa que se baseie em um raciocínio aceitável de acordo com o nível do conhecimento de cada um dos alunos.

2.3 Discussão Final

Nessa etapa, os alunos deverão pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, enquanto o professor assume o papel de moderador. Esse momento deve proporcionar uma sistematização de todas as ideias e mais uma vez, a reflexão de todo trabalho realizado. Essa discussão é fundamental para que os alunos percebam o significado de investigar e despertem para a importância da justificação das conjecturas.

É importante salientar que,

> Pode-se sempre programar o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação. ([2], p. 5).

Em [5], os processos matemáticos envolvidos nas atividades de investigação são denominados como processos não lineares, pois a qualquer momento pode-se perceber que os testes realizados não confirmam uma determinada conjectura e então se faz necessário voltar atrás e formular uma nova conjectura, repetindo assim todo o processo. Deste modo, tais atividades são caracterizadas não apenas pelos processos matemáticos nela envolvidos, mas também pela interação entre eles.

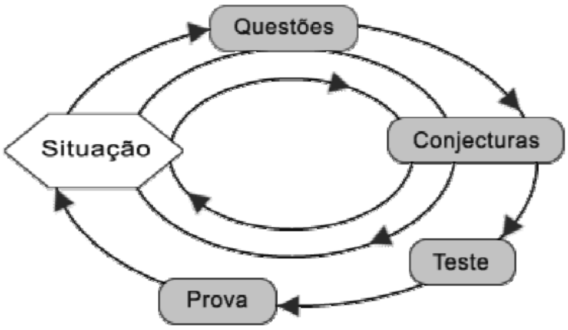


Figura - A Atividade de investigação
([5], p.100)

Assim, os alunos desenvolvem uma atividade próxima a dos matemáticos profissionais. Desta maneira, investigar significa partir de problemas e formular questões usando conhecimentos e processos matemáticos de modo a tomar decisões sobre essas questões.

CAPÍTULO 3:

O PAPEL DO PROFESSOR

É sabido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem, independentemente do seguimento escolar, componente curricular ou metodologia utilizada. O professor de matemática, especificamente, deve se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos propriamente ditos quanto com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender. Precisar estar atento para os momentos de *ação x reflexão*, para ajudar os alunos na construção dos conceitos matemáticos.

Pudemos perceber em vários momentos citados anteriormente, que o professor assume um papel fundamental e determinante nas aulas que utilizam a investigação matemática como metodologia e que a sua interação com os alunos difere da que ocorre em outros tipos de aula, o que pode ocasionar algumas dificuldades em tal condução.

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. ([2], p. 47)

Esta tarefa não é fácil, visto que, se o professor reconhece que os alunos devem seguir seus próprios caminhos torna-se um problema perceber de fato o que deve ser feito com o intuito de os alunos atinjirem objetivos considerados importantes para a aula. Para [5] alguns questionamentos fazem parte do receio dos professores, tais como: Até que ponto deve explicitar o que pretende? Como decidir sobre o apoio que deve dar aos alunos? Que fazer quando estes enveredam por caminhos que ele não tinha previsto?

Ponte et al [5] agrupam os papéis do professor em três grandes grupos, apresentados na tabela abaixo:

X. Modo afirmativo	X.1. Faz uma afirmação ou clarifica o sentido de afirmações anteriores X.2. Faz afirmações ou explica conceitos ou procedimentos X.3. Valida
Y. Modo interrogativo	Y.4. Pede clarificações Y.5. Questiona de forma específica Y.6. Questiona de forma aberta Y.7. Pede justificações
Z. Modo de gestão	Z. 8. Gere a situação didáctica

Tabela - A Atividade de investigação
([5], p.148)

Para facilitar o entendimento desta tão importante função do professor desses tipos de aulas [4] enumeram diversos papéis desempenhados pelos professores no decorrer de uma investigação, dos quais falaremos suscintamente, a seguir, são eles: Desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.

3.1 <u>Desafiar os alunos:</u>

Na fase inicial da investigação, como visto, o professor deve propiciar um ambiente adequado ao trabalho investigativo, e dar a devida atenção às questões formuladas, as quais devem ser desafiantes e nem tão difícil, para que não se sintam intimidados a trabalhar com ela, e nem tão fácil a ponto de desestimular a investigação.

Os enunciados devem ser precisos, com informações estritamente necessárias, sem ambiguidades, para que não haja informações demasiadas que distraem os alunos do objetivo principal, nem informações de menos que deixem os alunos “perdidos” sem saber por onde começar.

Ressalta-se que a possibilidade de desafiar os alunos não é restrita ao momento inicial, o professor precisa continuar a desafiá-los no decorrer de toda a atividade, incentivando-os ao trabalho.

> Ao mostrar aos alunos que é possível olhar para as ideias matemáticas de modo interrogativo, colocando questões que podem ser investigadas – e promovendo a investigação, de facto, de algumas delas – o professor está a exercer um importante papel na educação não só do raciocínio matemático dos alunos, mas também do modo de eles se relacionarem com o mundo. ([4], p.13).

3.2 Avaliar o progresso dos alunos

Conforme o trabalho investigativo vai se desenvolvendo o professor deve observar se os alunos compreenderam a tarefa e como estão reagindo a ela. Se já formularam alguma conjectura, se estão testando as conjecturas ou se estão apenas a fazer afirmações da forma convencional, sem testes.

Como as investigações normalmente são desenvolvidas em grupo, o professor precisa acompanhar as discussões, observando o trabalho, com o objetivo de recolher informações. Fazer boas perguntas e pedir explicações é fundamental para que o professor consiga perceber aonde os alunos querem chegar, para que a partir daí ela possa traçar suas ações, como: não interferir no trabalho, interferir com questionamentos maiores, interferir de maneira discreta ou ainda dedicar uma atenção maior a um grupo de alunos que precise de um acompanhamento mais de perto.

A avaliação do progresso da investigação poderá levar o professor a perceber que se faz necessário mais tempo para as investigações, ou que ele precise fazer uma discussão intermediária ou ainda poderá passar para outra etapa da investigação, a discussão final.

3.3 Raciocinar matematicamente

Como as questões a serem trabalhadas são abertas e o aluno que é o sujeito da investigação, é comum e natural que eles formulem situações em que o professor ainda não havia pensado, portanto deve existir, por parte do professor, uma predisposição ao raciocínio matemático.

[4] reforça a importância de o professor ser matematicamente confiante, afinal

> o professor deve ter presente que na sala de aula ele é um representante da comunidade dos matemáticos e que, consequentemente, a forma como se envolve nos problemas constitui um modelo para os alunos. Ao observar o professor a raciocinar matematicamente, os alunos poderão focar a sua atenção na formulação e reformulação de problemas, na especialização, na generalização, na elaboração de conjecturas e na argumentação. Assim, reforça-se a importância do professor ser matematicamente confiante.
> ([4], p.7).

Ao se deparar em uma situação como essa, onde o aluno lhe apresenta uma situação até então não pensada pelo professor, pode acontecer do professor encontrar certa dificuldade inicialmente em compreender a ideia dos alunos e sentir a necessidade de reformular a questão com base nos novos elementos que lhe foram apresentados. Esse pode ser um momento privilegiado para que o professor pense em voz alta com os alunos evidenciando o teste de conjecturas, afinal ver alguém pensar matematicamente é uma excelente forma de perceber como acontecem de fato os passos de uma investigação.

A realização de atividades investigativas pode, além desses episódios citados, proporcionar a conexão com outros conteúdos matemáticos ou até mesmo com temas interdisciplinares. Desta forma, o professor precisa estar munido da capacidade de decidir, em cada situação, se deve prosseguir o trabalho ou incentivá-los a explorar mais atentamente tais conexões.

3.4 Apoiar o trabalho dos alunos

Segundo [2], na condução da aula, o professor tem que estar atento a aspectos característicos do processo investigativo, bem como a outros de maneira geral. Esse apoio pode vir de várias formas, colocando questões mais ou menos diretas, relembrar ou até mesmo fornecer informações relevantes, sintetizar pensamentos e promover a reflexão dos alunos.

A postura do professor nas aulas com investigação matemática, sem dúvidas, deve ser a de interrogar sempre. No entanto há vários tipos e objetivos de interrogações. Algumas vezes serão necessários questionamentos para ajudar a esclarecer algumas ideias. Outras vezes, com o objetivo de eliminar impasses e confrontos, o professor deverá apresentar questionamentos mais abertos. E, quando os alunos lhe colocam alguma questão, a melhor forma é devolvê-la levando-os a pensar melhor sobre seu problema e suas estratégias.

Assumindo esta postura interrogativa, o professor ajuda o aluno a compreender o seu papel, que é de apoio ao trabalho e não de validação.

O professor deve ainda ajudar os seus alunos a fazerem uma reflexão das atividades desenvolvidas, enumerando seus avanços e recuos, os objetivos traçados e os caminhos que foram seguidos e o quê e como aprenderam com as investigações.

Vale salientar que o trabalho do professor que se inicia com um planejamento para estabelecer as prioridades curriculares, a seleção das tarefas, a análise de possíveis caminhos a serem seguidos pelos alunos, passando pelo acompanhamento propriamente dito da investigação, continua após o fim da aula, com a avaliação da atividade realizada, definição de novas tarefas e modos de trabalho com os seus alunos. Evidenciando assim, a complexidade do papel do professor que utiliza a investigação como metodologia de ensino.

CAPÍTULO 4:

UMA PROPOSTA DE OFICINAS DIDÁTICAS UTILIZANDO A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Neste trabalho, pretendemos desenvolver uma proposta de oficinas, as quais utilizarão a Investigação Matemática como metodologia de ensino para despertar a curiosidade e atenção dos alunos para a Análise Combinatória.

Desta forma, esta proposta possui como Objetivo Geral:

- Propor oficinas para despertar o interesse na Análise Combinatória, através da Investigação Matemática, possibilitando o desenvolvimento de ideias e exploração de estratégias variadas em situações de contagem.

Para tanto, traçaremos maneiras de alcançar tal fim, como:

- Realização de atividades investigativas abordando conceitos da Análise Combinatória de forma dinâmica e interativa, incentivando o trabalho em equipe e o pensamento matemático;
- Observar o desenvolvimento dos educandos quanto à utilização dos passos para realização da investigação (experimentação, levantamento de conjecturas, busca de provas e demonstrações, sistematização, verificação e validação dos resultados), fazendo pequenas interferências sempre que necessário.

Ressaltamos que, o objetivo dessa proposta pedagógica não é a construção formal completa dos conceitos combinatórios: princípio multiplicativo e aditivo, permutação, combinação, mas sim o desenvolvimento do pensamento combinatório para o despertar do interesse pelo assunto.

Segundo nossa proposta, os alunos serão avaliados durante a execução das atividades, observando prioritariamente, sua participação, interesse, interação com os colegas e discussão das resoluções das questões.

A seguir, as sugestões de atividades, bem como seus objetivos, tempo médio de aplicação, prováveis atitudes dos alunos ao investigar os problemas, bem como possíveis intervenções a serem feitas pelo professor. Este que pode acrescentar outros recursos e adaptar as questões levando em consideração os variados contextos nos quais os educandos estão inseridos.

QUESTIONÁRIO:

TEMPO MÉDIO: 2 aulas - 1 hora e 40 minutos. (Deve ser aplicado anteriormente a Atividade 1)

OBJETIVOS:

- Familiarizar os alunos com o termo investigação matemática;
- Verificar o que os alunos entendem por contagem.

GRUPO ______

a) O que você entende por INVESTIGAÇÃO?
____
____
____

b) Como você definiria uma INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA?
____
____
____

c) Cite palavras ou expressões que o termo ANÁLISE COMBINATÓRIA lhe faz pensar.
____
____
____

d) O que é CONTAR para você?
____
____
____

ETAPA 1: Problemas simples envolvendo contagem

TEMPO MÉDIO: 2 aulas - 1 hora e 40 minutos (Aplicada posteriormente às discussões do Questionário)

OBJETIVO:

- Perceber o Princípio Fundamental da Contagem (ou princípio multiplicativo) para resolução de problemas.

GRUPO : ______

Imagino que, como você é um aluno do Ensino Médio, sua resposta foi SIM, né?!?

Então vamos contar um pouco:

1- Um quiosque de praia na Bahia lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 8,00

Para esse combinado, há quatro opções de sanduíche (Frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango). De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher seu combinado? [7]

ATITUDES PROVÁVEIS:

É provável que os alunos resolvam esta questão utilizando a enumeração de todas as possibilidades, escrevendo todas as possibilidades, utilizando tabelas para facilitar a organização, ou ainda uma “árvore das possibilidades”.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

O professor poderá instigar os alunos a pensar em maneiras de facilitar os cálculos, fazendo, por exemplo, o questionamento: “E se fossem 7 opções de sanduíches e 10 de sucos?”. Com isso espera-se que os alunos possam refletir em maneiras mais fáceis de contagem e talvez perceber o princípio multiplicativo.

2- Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom.

a) De quantos modos diferentes ele pode se vestir, dispondo dessas peças?

b) De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas? [8]

ATITUDES PROVÁVEIS:

Resolução através do princípio aditivo, somando uma a uma as possibilidades de conjunto de roupas;

Resolução através do principio multiplicativo e, em seguida, usando a exclusão dos casos que não podem ocorrer (as duas peças de roupas com cores iguais).

Pode acontecer uma confusão por haver duas camisas pretas: uma de mangas curtas e outra de mangas compridas.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

O professor deve estar atento às discussões e, caso perceba confusão por conta das camisas pretas, deverá levar os alunos a pensarem se as camisas, mesmo tendo mangas diferentes, devem ser consideradas como uma só.

Caso não haja dentre os grupos a solução utilizando a exclusão dos casos onde aparecem camisa e calça de cores iguais, é válido que o professor, no momento da discussão da investigação, levante questionamentos, tais como: “Será que teria outra forma de resolver esse problema?”, “O que não poderia acontecer de maneira alguma?”.

ETAPA 2: Problemas envolvendo contagem para formação de números e senhas

TEMPO MÉDIO: 2 aulas - 1 hora e 40 minutos

OBJETIVO:

- Perceber a diferença entre número e algarismo;
- Contar corretamente com a utilização, ou não do zero.

GRUPO : ______

1- Escreva exemplos de números que possuem:

a) 2 algarismos: ____

b) 5 algarismos: ____

c) 4 algarismos distintos: _______________________________________

PARA PENSAR UM POUCO MAIS:

023 corresponde a um número de quantos algarismos?

____

ATITUDES PROVÁVEIS:

Responder que 023 é um número de três algarismos;

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

Levantar discussão sobre a diferença entre números e algarismos, e se o uso do zero à esquerda altera o número.

2- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Responda:

a) Quantos números de 4 algarismos podemos formar?

b) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?

c) E se considerarmos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de quatro algarismos podemos formar?

ATITUDES PROVÁVEIS:

Os alunos podem tentar, utilizando a enumeração, escrever todos os possíveis números que atendam aos requisitos solicitados.

Nesse momento é normal a confusão entre escrever, por exemplo, que há sete possibilidades para o último algarismo e escrever que o sete é uma possibilidade para o algarismo final.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

No caso dos alunos estarem tentando enumerar, o professor deve sugerir que talvez não seja o melhor caminho, visto que perderá muito tempo e ainda poderá esquecer algum número. Deverá, neste caso, encorajá-lo a perceber métodos mais rápidos.

O professor deverá redobrar a atenção e auxiliá-los bem de perto quanto à diferenciação entre o número de possibilidades e o uso do algarismo como uma possibilidade.

3- Leila esqueceu a senha de quatro algarismos para desbloquear seu smartphone. Ela só lembra que escolhera algarismos distintos entre si e que o último dígito era 9. Considerando que o aparelho permita fazer até 500 tentativas até bloquear totalmente, e que ela fará tentativas com senhas distintas, é garantido que ela conseguirá desbloquear o aparelho? (Questão adaptada de [7])

ATITUDES PROVÁVEIS:

Confundir dígitos de senha com algarismos de números e por isso, não considerar o zero como sendo uma possibilidade para o primeiro dígito.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

Chamar à reflexão sobre o zero ser o primeiro dígito de uma senha em um smartphone.

ETAPA 3: Introdução do símbolo e significado do fatorial (!)

TEMPO MÉDIO: 3 aulas - 2 horas e 30 minutos

OBJETIVOS:

- Perceber padrões do princípio multiplicativo quando não há repetição;
- Introduzir o símbolo e o significado do fatorial (!);
- Dar significado e resolver problemas com permutações e anagramas.

GRUPO: ______

1- Os irmãos Carlos e Renata adoram tirar fotos. Numa viagem que fizeram com seus pais decidiram aproveitar a paisagem para tirar fotos juntos. Renata decide que devem tirar mudando de posição entre eles o máximo possível para obter fotos distintas. Supondo que o fotógrafo demorou 30s em cada foto, quantos minutos foram necessários para ele tirar todas as fotos? [9]

ATITUDES PROVÁVEIS:

Utilizar o princípio multiplicativo corretamente e no final, ao multiplicar por 30 para achar o tempo correto, não converter para minutos.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

Chamar atenção para as unidades de tempo do problema e verificar a utilização correta do princípio multiplicativo.

2- De quantas maneiras podemos acomodar 5 pessoas em um carro popular para uma viagem:

a) Sabendo que qualquer um deles pode ser o motorista?

b) Sabendo que apenas dois deles dirigem?

3- De quantas maneiras diferentes podemos distribuir dez crianças em uma fila? E se fossem 25 crianças?

ATITUDES PROVÁVEIS:

Aplicação correta do princípio multiplicativo e perceber ‘padrão’ de repetição em sua resolução.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

Após discussões das respostas, introduzir o símbolo e definição do fatorial (!), com o intuito de simplificar os cálculos.

4- Procure em um dicionário o significado da palavra PERMUTAR. Agora escreva com suas palavras o significado de PERMUTAÇÃO.

____

____

5- Anagrama é uma palavra ou frase que é construída através da alteração das letras de uma outra palavra ou frase. Um anagrama pode ser uma palavra com significado (presente no dicionário) ou não.

Para criar um anagrama, podem ser trocadas duas ou mais letras. Por exemplo: a palavra ‘Alma’ pode ser transformada nas palavras ‘mala’ ou ‘lama’, bastando pra tanto trocar a ordem de algumas letras. Assim, mala e lama são anagramas de alma.

a) Escreva exemplos de anagramas da palavra PEDRA que possuam significado na língua portuguesa.

____

b) Escreva exemplos de anagramas da palavra PEDRA que <u>não</u> possuam significado na língua portuguesa.

____

c) Quantos são <u>todos</u> os anagramas possíveis da palavra PEDRA?

____

6- Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

a) De quantas maneiras podemos organizar esses 10 livros nessa prateleira?

b) De quantas maneiras podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

c) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros na mesma prateleira de modo que nas extremidades apareçam livros de Álgebra e os livros de Trigonometria fiquem juntos?

ATITUDES PROVÁVEIS:

Não associar a questão como um tipo de permutação onde os objetos permutam entre si e entre os tipos diferentes

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

Perguntar aos alunos o modo como estão desenvolvendo a questão e confrontá-los com exemplos que não foram contados na sua solução, para que assim perceba todas as permutações possíveis.

ETAPA 4: Trabalhando com Arranjos e Combinações

TEMPO MÉDIO: 3 aulas - 2 horas e 30 minutos

OBJETIVOS:

- Perceber a diferença entre os dois tipos de agrupamento;
- Interpretar e resolver problemas que envolvam esses agrupamentos;
- Conjecturar fórmulas para resolução mais prática de questões desses tipos.

GRUPO: ______

1- Um estudante possui 12 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região nordeste, cada um de uma cor?

2- Para a seletiva dos JERP (Jogos Estudantis da Rede Pública) foram inscritas 12 meninas para o time de futsal. De quantas maneiras podemos escolher a capitã e goleira?

Você acha que conseguiria resolver essas atividades utilizando o fatorial? Será que existe algum padrão? Seria possível encontrarmos uma fórmula coerente para resolvê-las? REFLITA UM POUCO COM SEUS COLEGAS E TENTE!

ATITUDES PROVÁVEIS:

Resolução rápida pelo método multiplicativo e 'preguiça' de pensar na fórmula visto que o resultado já foi encontrado.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

O professor poderá, após resolução e discussão coletiva das resoluções, na lousa chamar os alunos para juntos tentarem conjecturar possíveis fórmulas e aos poucos ir direcionando para a fórmula pretendida. Ele deverá ainda ressaltar que tal fórmula é importante, mas não imprescindível para esse tipo de resolução.

3- Observe o painel abaixo com algumas vagas de emprego para o ensino médio

PAINEL DE VAGAS – NÍVEL MÉDIO
ADMINISTRAÇÃO Empresa instalada em Petrolina oferece bolsa auxílio no valor de R$ 425, 00 para estagiário na área administrativa, meio período, para alunos de 1º à 3º anos. Benefícios: vale-transporte e assistência médica.
MECÂNICA Empresa instalada em Juazeiro oferece bolsa auxílio no valor de R$ 700, 00 para estagiário na área de automotivos, período de 7 horas, para alunos de 2º e 3º anos. Benefícios: vale-transporte.
CONTABILIDADE Empresa instalada em Petrolina oferece bolsa auxílio no valor de R$ 700, 00 para estagiário na área contábil, período integral, para alunos de 1º à 3º anos. Benefícios: vale-transporte e alimentação.
PROCESSAMENTO DE DADOS Empresa instalada em Petrolina oferece bolsa auxílio no valor de R$ 750, 00 para estagiário na área de processamento de dados, período de 6 horas, para alunos de 1º à 3º anos. Benefícios: vale-transporte.
TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO Empresa instalada em Juazeiro oferece bolsa auxílio no valor de R$ 800,00 para estagiário na área de construção civil, período de 6 horas, para alunos de 1º e 3º anos. Benefícios: vale-transporte.

Um candidato quer escolher três anúncios entre os cinco publicados para enviar currículos. De quantos modos diferentes ele pode fazer essa escolha? [10]

4- Seis vereadores da cidade de Jequié querem participar de um encontro estadual que acontecerá em Salvador, capital. Mas, cada cidade só poderá enviar dois vereadores para lhe representar. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos esses dois vereadores que participarão do evento?

ATITUDES PROVÁVEIS:

Proceder resolução conforme a de arranjo.

SUGESTÃO DE INTERVENÇÃO:

Levantar pequenos questionamentos sobre quais seriam as possíveis escolhas, enumerando se for o caso, para que os alunos possam perceber que a ordem da escolha não faz diferença.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho realizamos um estudo teórico acerca do uso das atividades de investigação matemática como metodologia de ensino desenvolvido por alguns pesquisadores citados nesta dissertação, e apresentamos uma proposta de ensino para o 2º ano do ensino médio com o conteúdo de análise combinatória, visando a participação efetiva dos alunos na construção dos conceitos e técnicas de contagem (permutação, anagramas, arranjo e combinação) dando mais ênfase ao Princípio Fundamental da Contagem na resolução de tais problemas.

Os estudos realizados a cerca de tal metodologia defendem que o uso de tarefas investigativas promove experiências singulares que possibilitam diversas formas de construção autônoma do conhecimento. A partir daí então, organizamos Oficinas Didáticas compostas por quatro momentos, onde cada momento tem objetivos distintos traçados e uma série de atividades para este fim.

As Oficinas propostas por este trabalho não puderam ser, ainda, desenvolvidas com alunos devido ao pouco tempo para que o trabalho fosse aplicado, mas defendemos que a resolução de problemas de análise combinatória utilizando as atividades de investigação matemática caracteriza-se como fonte de motivação à aprendizagem significativa da matemática e estreita a relação entre professores e alunos.

Desta maneira, acreditamos que a utilização de tais atividades juntamente com a postura proposta pela metodologia da Investigação Matemática, pode ser um caminho para dar significado e contexto nos conceitos abordados na Análise Combinatória, visto que a ênfase na investigação, onde o aluno coloca-se no lugar de sujeito da descoberta, favorece a mobilização, a aquisição de conhecimentos significativos, e na construção das fórmulas do conteúdo.

Assim sendo, esta proposta de atividades pode ser um instrumento poderoso de ensino para os docentes de Matemática do Ensino Médio, ela foi preparada pensando nos problemas enfrentados por professores e alunos no ensino-aprendizado da contagem. Estas Oficinas poderão diminuir essas dificuldades contribuindo assim para uma prática docente coerente e eficaz do tema.

Nesta proposta, em todas as atividades sugeridas, deseja-se que os alunos trabalhem com situações de contagem sem uso de definições formais, como forma de despertar o interesse pelo assunto para posterior aprofundamento, visto que a análise combinatória é um conteúdo de extrema relevância do ensino médio. Posteriormente as questões trabalhadas, após a formalização do conteúdo, devem continuar a abordar problemas do cotidiano, para que os educandos participem de forma efetiva do processo de ensino aprendizagem através da interação e trabalho em equipe, e o professor pode/deve ainda manter a postura investigativa diante da vasta gama de tipos de problemas que a contagem proporciona.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. Secretaria média e tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais*: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

[2] PONTE, da João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 1. ed. 2.rev. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[3] JACINTO, Jaime Ferreira. O ultimo teorema de Fermat. Disponível em: http://www.ensino.eb.br/portaledu/conteudo/artigo8953.pdf. Acesso em: 28 dez 2016.

[4] PONTE, J.P. FERREIRA, C. BRUNHEIRA, L. OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. M. Investigando as aulas de investigação Matemática. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), Investigações Matemáticas na aula e no currículo (pp. 133-152). Lisboa: APM e Projecto MPT (1998).

[5] BROCADO, Joana. AS INVESTIGAÇÕES NA AULA DE MATEMÁTICA: Um projecto curricular no 8º ano. Departamento de educação da Faculdade de Ciências: Universidade de Lisboa, 2001

[6] PONTE, J.P, QUARESMA, Maria, BRANCO, Neuza. Tarefas de Exploração e Investigação na aula de matemática. Revista Educação Matemática em foco. Campina Grande: EdUepb. V.1, n.1, jan/jun 2012.

[7] IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David, PÉRIGO, Roberto, ALMEIDA, Nilze de. MATEMÁTICA ciência e aplicações. 7ª Ed. São Paulo: Saraiva, 2013

[8] OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n1-2008.pdf>. Acesso em: 16 jan 2017

[9] PORTAL DA MATEMÁTICA. Disponível em: < http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=15&tipo=2#>. Acesso em 04 jan 2017.

[10] SILVA, Poliana M. T. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação de Jovens e Adultos: Uma abordagem através de Jogos e

Resolução de Problemas. Juazeiro: Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2013.

ANEXO

Respostas das atividades apresentadas nas Oficinas:

ETAPA 1: Problemas simples envolvendo contagem

1- Um quiosque de praia na Bahia lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 8,00

Para esse combinado, há quatro opções de sanduíche (Frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango). De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher seu combinado? [7]

Em primeiro lugar, a pessoa poderá optar pelo sabor do lanche. Há 4 opções de lanches: frango (F), atum (A), vegetariano (V) e queijo branco (Q)
Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco pode ser feita de três maneiras possíveis: laranja (L), uva (U) ou morango (M).
Portanto, o número de possibilidades é 4 x 3 = 12

2- Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom.

c) De quantos modos diferentes ele pode se vestir, dispondo dessas peças?
d) De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas? [8]

a) 5 opções de camisas x 4 opções de calças = 20 possibilidades

b) Separando por casos, teremos:

- *(1 camisa preta manga curta) x (3 calças – azul, verde ou marrom –) = 3*
- *(1 camisa preta manga longa) x (3 calças – azul, verde ou marrom –) = 3*
- *(1 camisa azul) x (3 calças – preta, verde ou marrom –) = 3*
- *(1 camisa cinza) x (4 calças – preta, azul, verde ou marrom –) = 4*

- *(1 camisa branca) x (4 calças – preta, azul, verde ou marrom –) = 4*

TOTAL DE COMBINAÇÕES = 3 + 3 + 3 + 4 + 4 = 17.

Outra maneira:

Como visto na resolução do item (a) o total de possibilidades de combinações com essas peças de roupas é 20.

As únicas possibilidades que o item (b) não admite são:

- *Camisa manga longa preta e calça preta,*
- *Camisa manga curta preta e calça preta, e*
- *Camisa azul e calça azul.*

Portanto, por exclusão teremos 20 – 3 = 17 possibilidades.

ETAPA 2: Problemas envolvendo contagem para formação de números e senhas

1- Escreva exemplos de números que possuem:

d) 2 algarismos: ____

e) 5 algarismos: ____

f) 4 algarismos distintos: ______________________________________

PARA PENSAR UM POUCO MAIS:

023 corresponde a um número de quantos algarismos?

____

a) Resposta pessoal. Podem ser exemplos como: 12, 77, 93, etc.

b) Resposta pessoal. Podem ser exemplos como: 23375, 19065, 76398, etc.

c) Resposta pessoal. Podem ser exemplos como: 7420, 8307, 1295, etc.

PARA PENSAR UM POUCO MAIS: 023 corresponde ao número 23 e portanto, possui dois algarismos.

2- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Responda:

d) Quantos números de 4 algarismos podemos formar?

e) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?

f) E se considerarmos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de quatro algarismos podemos formar?

a) Temos 7 opções para o cada uma dos algarismos do número, portanto temos 7 x 7 x 7 x 7 = 2401 possibilidades

b) Nesta situação devemos observar que para o último algarismo só existe a possibilidade de ser um algarismo par e portanto para este existem apenas 3 opções: 2, 4 ou 6. Assim teremos 7 x 7 x 7 x 3 = 1029 possibilidades.

c) Note que agora, o zero não é uma opção para o primeiro algarismo, pois se assim fosse o número formado teria apenas 3 algarismos e não 4 conforme pede a questão. Assim, teremos 6 x 7 x 7 x 7 = 2058 possibilidades.

3- Leila esqueceu a senha de quatro algarismos para desbloquear seu smartphone. Ela só lembra que escolhera algarismos distintos entre si e que o último dígito era 9. Considerando que o aparelho permita fazer até 500 tentativas até bloquear totalmente, e que ela fará tentativas com senhas distintas, é garantido que ela conseguirá desbloquear o aparelho? (Questão adaptada de [7])

A partir do enunciado do problema, sabemos que a senha apresenta a seguinte estrutura: $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\mathbf{9}}$ *Note que, por se tratar de senha nada impede que se tenha o zero como primeiro dígito. Observe também que basta que façamos a análise dos 3 primeiros dígitos, visto que o último já é o 9. Assim, teremos:*

- *9 opções de algarismos para o 1º dígito: (todos, exceto o 9).*
- *8 opções de algarismos para o 2º dígito: (exclui-se o 9 e o que foi usado no primeiro dígito)*
- *7 opções de algarismos para o 3º dígito: (exclui-se o 9 e os que foram usados no primeiro e segundo dígito)*

Desta forma, teremos: 9 x 8 x 7 = 504 possibilidades. Assim não existe garantia que ela desbloqueará o seu aparelho.

ETAPA 3: Introdução do símbolo e significado do fatorial (!)

1- Os irmãos Carlos e Renata adoram tirar fotos. Numa viagem que fizeram com seus pais decidiram aproveitar a paisagem para tirar fotos juntos. Renata decide que devem tirar mudando de posição entre eles o máximo possível para obter fotos distintas. Supondo que o fotógrafo demorou 30s em cada foto, quantos minutos foram necessários para ele tirar todas as fotos? [9]

Temos quatro pessoas, Carlos, Renata e seus pais para alternar a posição entre eles, desta forma teremos 4 x 3 x 2 x 1 = 24 fotos distintas. Considerando que o fotógrafo demorou 30s para fazer cada foto, ele gastou 24 x 30 = 720s, que correspondem a 12 minutos.

2- De quantas maneiras podemos acomodar 5 pessoas em um carro popular para uma viagem:

c) Sabendo que qualquer um deles pode ser o motorista?

d) Sabendo que apenas dois deles dirigem?

a) 5! = 120

b) O banco do motorista pode ser ocupado por uma das 2 pessoas que sabem guiar o carro e as outras 4 podem ser permutadas pelos 4 lugares restantes, logo: 2 · 4! = 2 · 24 = 48 maneiras.

3- De quantas maneiras diferentes podemos distribuir dez crianças em uma fila? E se fossem 25 crianças?

Basta fazermos a permutação das crianças. Isto é, 10! para a primeira situação e 25! para a segunda.

4- Procure em um dicionário o significado da palavra PERMUTAR. Agora escreva com suas palavras o significado de PERMUTAÇÃO.

(PESSOAL)

5- Anagrama é uma palavra ou frase que é construída através da alteração das letras de uma outra palavra ou frase. Um anagrama pode ser uma palavra com significado (presente no dicionário) ou não.

Para criar um anagrama, podem ser trocadas duas ou mais letras. Por exemplo: a palavra 'Alma' pode ser transformada nas palavras 'mala' ou 'lama', bastando pra tanto trocar a ordem de algumas letras. Assim, mala e lama são anagramas de alma.

d) Escreva exemplos de anagramas da palavra PEDRA que possuam significado na língua portuguesa.

(PADRE)

e) Escreva exemplos de anagramas da palavra PEDRA que <u>não</u> possuam significado na língua portuguesa.

(PESSOAL) – São exemplos: PDRAE – EPADR - ADERP

f) Quantos são <u>todos</u> os anagramas possíveis da palavra PEDRA?

Como a palavra PEDRA possui 5 letras, basta fazer uma permutação com n = 5. Ou seja, 5! = 120 anagramas.

6- Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

d) De quantas maneiras podemos organizar esses 10 livros nessa prateleira?

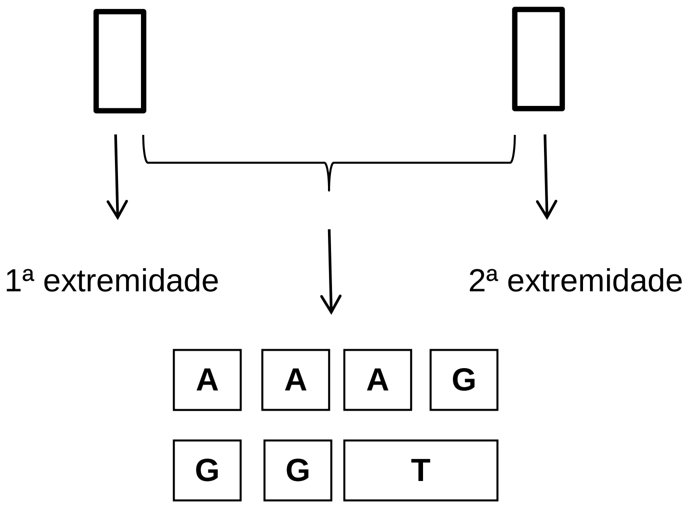
e) De quantas maneiras podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

f) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros na mesma prateleira de modo que nas extremidades apareçam livros de Álgebra e os livros de Trigonometria fiquem juntos?

a) *Basta permutar todos os livros: 10!*

b) *Consideremos os 5 livros de Álgebra como um só livro (L1), os de Geometria como um só livro (L2) e os de trigonometria como um só livro (L3). Devemos então permutar L1, L2 e L3, em um total de 3! = 6 maneiras distintas. Mas, para cada uma dessas maneiras devemos permutar os livros em L1, os livros em L2 e os livros em L3, totalizando: 6 x 5! x 3! X 2! = 8640.*

c) *Teremos a seguinte situação:*



1ª extremidade: 5 opções

2ª extremidade: 4 opções

No meio, devemos permutar 7 blocos e, além disso, permutar dentro do bloco de Trigonometria: 7! x 2 = 10.080

Desta maneira, o resultado procurado é: 5 x 4 x 10.080 = 201.600 modos.

ETAPA 4: Trabalhando com Arranjos e Combinações

1- Um estudante possui 12 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região nordeste, cada um de uma cor?

Utilizando o princípio multiplicativo, teremos:

12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 79.833.600 maneiras

Ou, utilizando arranjos: $\frac{12!}{(12-9)!} = \frac{12!}{3!} =$ *79.833.600 maneiras*

2- Para a seletiva dos JERP (Jogos Estudantis da Rede Pública) foram inscritas 12 meninas para o time de futsal. De quantas maneiras podemos escolher a capitã e goleira?

Essa escolha pode ser feita de 12 x 11 = 132 maneiras distintas

Ou, utilizando arranjos: $\frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12!}{10!} =$ *132*

3- Observe o painel abaixo com algumas vagas de emprego para o ensino médio

PAINEL DE VAGAS – NÍVEL MÉDIO
ADMINISTRAÇÃO Empresa instalada em Petrolina oferece bolsa auxílio no valor de R$ 425, 00 para estagiário na área administrativa, meio período, para alunos de 1º à 3º anos. Benefícios: vale-transporte e assistência médica.
MECÂNICA Empresa instalada em Juazeiro oferece bolsa auxílio no valor de R$ 700, 00 para estagiário na área de automotivos, período de 7 horas, para alunos de 2º e 3º anos. Benefícios: vale-transporte.
CONTABILIDADE Empresa instalada em Petrolina oferece bolsa auxílio no valor de R$ 700, 00 para estagiário na área contábil, período integral, para alunos de 1º à 3º anos. Benefícios: vale-transporte e alimentação.
PROCESSAMENTO DE DADOS Empresa instalada em Petrolina oferece bolsa auxílio no valor de R$ 750, 00 para estagiário na área de processamento de dados, período de 6 horas, para alunos de 1º à 3º anos. Benefícios: vale-transporte.
TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO Empresa instalada em Juazeiro oferece bolsa auxílio no valor de R$ 800,00 para estagiário na área de construção civil, período de 6 horas, para alunos de 1º e 3º anos. Benefícios: vale-transporte.

Um candidato quer escolher três anúncios entre os cinco publicados para enviar currículos. De quantos modos diferentes ele pode fazer essa escolha? [10]

Utilizando o princípio multiplicativo para escolher três dentre os cinco anúncios, teríamos: 5 x 4 x 3 = 60 modos. Mas, observe que se o candidato tivesse escolhido Administração (A), Mecânica (M) e Contabilidade (C) nesta ordem (AMC) teria mandado o currículo exatamente para os mesmo lugares caso a escolha tivesse *sido (ACM), (MCA), (MAC), (CMA), ou ainda (CAM). Portanto existem 60 ÷ 6 = 10 modos diferentes de fazer a escolha.*

Utilizando combinação, teremos: $\frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!\,3!}$ *= 10 modos diferentes.*

4- Seis vereadores da cidade de Jequié querem participar de um encontro estadual que acontecerá em Salvador, capital. Mas, cada cidade só poderá enviar dois vereadores para lhe representar. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos esses dois vereadores que participarão do evento?

Analogamente a questão anterior, teremos: $\frac{6!}{(6-2)!4!} = \frac{6!}{4!\,2!}$ = *15 maneiras.*