**Universidade Estadual de Santa Cruz**
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

# Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano

por: Leonardo dos S Ferreira

Orientador:
Prof. *Dr*. **Romenique da Rocha Silva**

# Dissertação de Mestrado

# Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano

por: Leonardo dos S Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. *Dr*. **Romenique da Rocha Silva**

ILHÉUS - BA
2017

F383 Ferreira, Leonardo dos S.
Como o teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano / Leonardo dos S. Ferreira. – Ilhéus : UESC, 2017.
Xiii, 36f. : il.
Orientador : Romenique da Rocha Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Mileto, Teorema de. 3. Livro didático – Brasil. 4. Matemática – História. I. Silva, Romenique da Rocha. II. Título.

CDD – 510.7

Leonardo dos S Ferreira

# COMO O TEOREMA DE TALES É APRESENTADO EM LIVROS DIDÁTICOS DO NONO ANO

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 10 de março de 2017.

Romenique R. Silva

Prof. Dr. Romenique Da Rocha Silva

Orientador

Cícero Alfredo da S. Filho

Prof. Dr. Cícero Alfredo Da Silva Filho

Dilo Marquesini

Prof. Me. Dilo Marquesini

Ilhéus, 2017

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu tão amado filho Thales, a quem, carinhosamente chamo, "Meu Miletinho".

# AGRADECIMENTOS

A meus pais, Osvaldo e Maria de Lourdes, que mais do que me trazer à vida, proporcionaram uma boa infância e vida acadêmica. Obrigada por estarem sempre presentes na minha vida.

À minha esposa, Célia, que representa companheirismo e incentivo tão necessário, especialmente em tempos de desmotivação. Obrigado por fazer eu me sentir tão amado.

À Sirleth, minha amiga, irmã e pedagoga, em quem enxergo as mesmas raízes que me sustentam. Sua presença e suas palavras foram essenciais pra mim.

Meu eterno amor e muito obrigado a meu filho, meu Miletinho, pelos afagos e mimos recíprocos. Por vezes, interrompi meus estudos, pois a inocência de seus quatro anos, manifestava-se despreocupada e carinhosamente: “ pala de estudar, papai, vem bincar comigo...”

Aos amigos, Dr. João Marcos, Carlos Alberto, Breno Mohandas, Me. Celio, Me Elias Santos, pelo apoio e preocupação.

Ao meu professor e orientador deste trabalho, professor Dr. Romenique, pelo apoio e paciência.

Ao colega Diego Novais, à tia Delda e tia Chica (In memóriam).

Muito obrigada nunca será suficiente para demonstrar a grandeza do que recebi de vocês. Peço a Deus que os recompense à altura.

E é a Ele que dirijo minha maior gratidão. Deus, mais do que me permitir a vida, tem sempre me guiado e protegido.

Como o teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano.

**RESUMO**

Este trabalho apresenta uma análise de como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano, como são feitas as demonstrações, os exercícios, as figuras, etc..

**Palavras-Chave:** Teorema de Tales, Tales de Mileto, livro didático.

# As the Tales are in ninth grade textbooks

**ABSTRACT**

This work presents a How Analysis Tales Theorem and presented in textbooks of the ninth year, How Are Made as demonstrations, exercises such as pictures, etc.. .
**Keywords:** Theorem of Thales, Thales of Miletus, textbook.

# LISTA DE FIGURAS

Página

# SUMÁRIO

Página

# Introdução

As experiências em sala de aula nos permitem observar que os alunos chegam ao primeiro ano do ensino médio com pouco ou nenhum conhecimento acerca do Teorema de Tales. Nos permite observar também, que a apresentação do Teorema de Tales nos livros didáticos da educação fundamental é pouco criativa, se limitando quase que de modo generalizado, a cálculo de distância entre pontos em ruas, distância entre pontos em extremidades de terrenos ou afins. A demonstração do teorema nos livros do ensino fundamental é incompleta, contemplando apenas a demonstração para segmentos comensuráveis. Os alunos chegam ao ensino médio construindo pouco e sem o costume de verificar as propriedades. Neste estudo, apresentamos uma sugestão da apresentação completa da demonstração do Teorema de Tales. A sugestão que apresentamos é compreensível a alunos do nono ano e contempla segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

Observa-se ainda, que alguns fatores como professores sem habilitação, ou que atendem a uma grande carga horaria semanal ou trabalho em várias escolas, também contribuem para a manutenção e agravamento do fato de alunos conhecerem pouco o teorema. Fato outro, que corrobora para o estudo superficial do Teorema de Tales, em turmas de nono ano, é que, em vários livros didáticos desta série, o conteúdo de Geometria é apresentado, no final do livro, ou seja, sempre que falta tempo para cumprir o planejamento anual, parte deste conteúdo não é estudado em sala de aula. O professor que segue a sequência definida pelo livro, muitas vezes não consegue chegar ao seu final e o aluno é encaminhado para a série seguinte sem ter visto, ou sem ter aprofundado nenhum conteúdo importante de geometria.

Dada a importância do Teorema de Tales para a vida estudantil e para o cotidiano do aluno e a importância do livro como recurso didático, resolvemos analisar como o teorema é apresentado em livros didáticos do nono ano do ensino fundamental.

Antes, fizemos um breve texto com história da escrita e da leitura, visto que é através da escrita que os conhecimentos e ensinamentos estão registrados nos livros didáticos e através da leitura que se recebe as informações contidas nesses livros. Posteriormente, fizemos um texto que contempla a história do livro didático no Brasil.

Também examinamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática da série final do Ensino Fundamental, onde queremos verificar nesse período da escolaridade, quais as orientações legais sobre: demonstrações de teoremas; recursos didáticos aconselhados; a contextualização dos conteúdos. Pesquisamos ainda, em outros trabalhos de conclusão de curso, a Biografia de Tales de Mileto, onde buscamos identificar algumas de suas atividades e as áreas do conhecimento de seu maior interesse.

# CAPÍTULO 1

## Um pouco de história, de regulamentação e o livro didático

Neste capítulo, veremos um pouco da história da escrita e da leitura. Como os humanos fizeram os primeiros registros dos conhecimentos e das ideias adquiridas. Como esses registros colaboraram com a humanidade. Um pouco da história de Tales de Mileto; O que ele estudava, o modo como vivia e motivo de seus estudos serem tão importantes até os dias de hoje. Veremos ainda, um pouco da história da legislação que regula a educação e o livro didático no Brasil.

### 1.1 A escrita e a leitura

Enquanto os primeiros humanos viviam os primeiros passos da evolução, surgiu um excelente recurso para registrar e transmitir ideias. A escrita. Com esse recurso, a humanidade dá os primeiros passos para a vida em sociedade. Basicamente, a escrita consiste em registrar marcas em um suporte ou anteparo, de modo que as ideias registradas podem ser vistas, analisadas e entendidas por outros humanos. Assim, as ideias de uma pessoa ou grupo de pessoas podem ser repassadas para outras pessoas. Enquanto a fala é mais espontânea, momentânea, a escrita pode permanecer por décadas, séculos ou milênios, a depender de quais instrumentos foram usados para fazer o registro.

Tal ferramenta possibilitou ao homem expandir suas mensagens para muito além do seu próprio espaço ou do seu tempo, deixando registros que poderiam ser utilizados a milhares de quilômetros e que poderiam ser revistos após milhares de anos, e se desenvolveu em todas as regiões do planeta. Possivelmente as escritas mais antigas são os hieróglifos e a escrita cuneiforme (escritos feitos com objetos em formato de cunha). Sendo os hieróglifos de origem egípcia e a escrita cuneiforme de origem mesopotâmica. De modo generalizado, dada a sua suma importância no desenvolvimento de ideias, o domínio da escrita e sua leitura, com o passar dos anos, ficou basicamente restritos às camadas sociais mais dominantes, como os sacerdotes religiosos e a nobreza. Aqueles que sabiam ler e escrever detinham o poder e as informações. A alfabetização só se difundiu entre as camadas menos significativas da população após a idade média.

## 1.2 Tales de Mileto

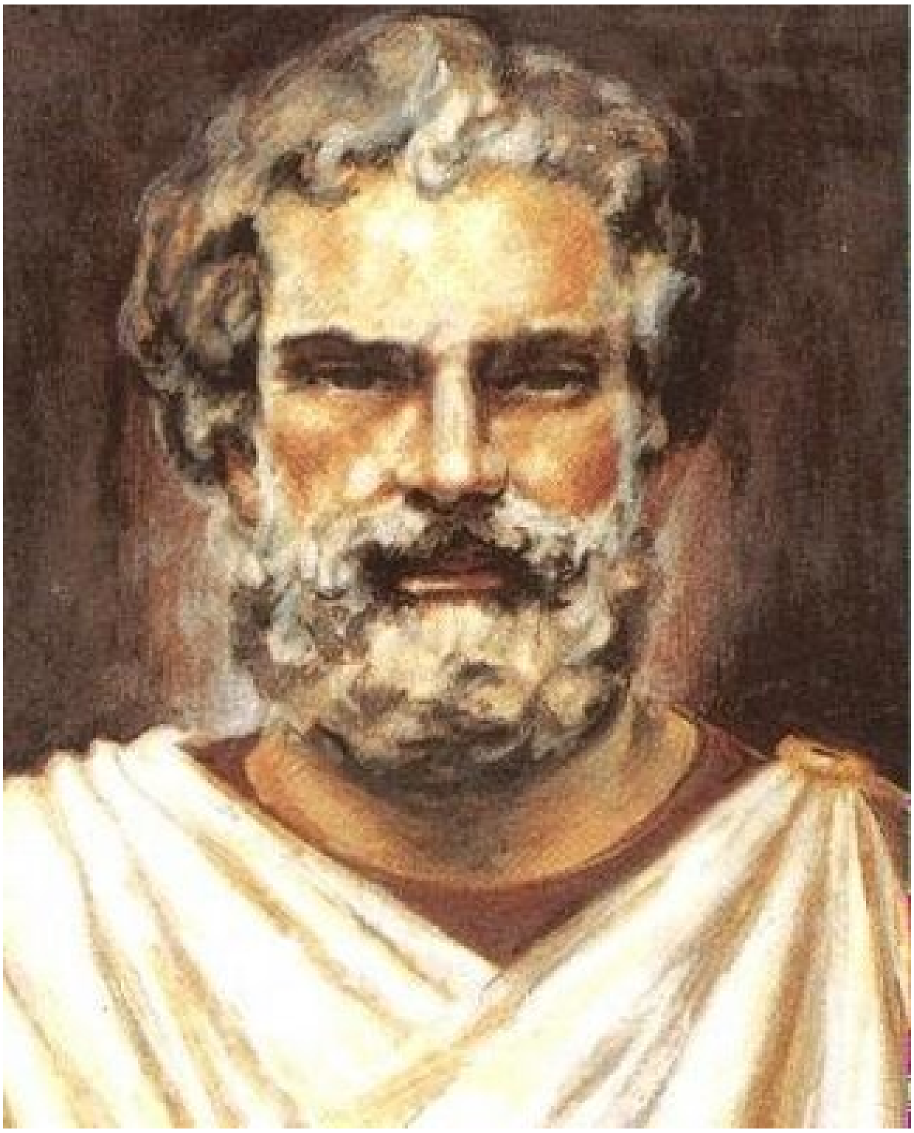


Figura 1.2.1: Possível rosto de Tales de Mileto

Sabemos que os relatos da História da Matemática, do período em que viveu Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente), são fragmentados e incompletos. Que foram escritos e contados por outros, séculos depois de sua existência. Por esse motivo, não temos certeza de que Tales é autor de todas as demonstrações e estudos a ele imputados.

De acordo com Willyans Maciel em [3], Tales teria sido o primeiro grande pensador da humanidade, de modo que, numa época em que muito se acreditava em deuses e as explicações dos fenômenos naturais eram feitas com base na mitologia, Tales fazia observações e dava explicações científicas.

> Tales de Mileto teria sido o primeiro filósofo da história da humanidade. Não o primeiro a utilizar o termo filósofo para referir-se a si mesmo(...) mas o primeiro a fazer jus ao título por sua forma de proceder, ao promover um afastamento da visão mitológica do mundo e buscar as causas primeiras, ou a causa primeira única, das coisas e fenômenos da natureza com base, exclusivamente, na razão e observação da própria natureza. (WILLYANS, Maciel)

Tales é considerado o primeiro filósofo e o primeiro dos sete sábios, e recebe o título de "primeiro matemático" verdadeiro, por ter estudado a Geometria de forma dedutiva. Viveu na cidade de Mileto, tinha grande interesse por Filosofia, Geometria e Matemática, mas sua atividade habitual era o comércio. Do seu interesse pela Astronomia, surgiu o relato de que ele previu um famoso eclipse solar, ocorrido em 28 de maio de 585 a.C. Outro fato (ou lenda) importante, foi quando protagonizou um dos episódios marcantes da história da geometria, calculou a altura da pirâmide de Quéops: medindo o comprimento da sombra do monumento e de um bastão, que colocara verticalmente na areia, comparando as medidas de triângulos semelhantes.

Tales foi saudado como o primeiro matemático verdadeiro, o primeiro dos Sete Sábios. Relatos ou lendas, dizem que ele demonstrou os seguintes teoremas:

- Um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.
- Um círculo é bissectado por um diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes.

Não existem documentos que provem que Tales tenha feito as demonstrações acima. Mas tais demonstrações são, historicamente, a Tales imputadas.

Segundo o livro Matemática Divertida e Curiosa [10], Tales morreu aos 90 anos de idade asxiado pela multidão, após sair de um espetáculo.

## 1.3 O livro didático no Brasil

No ano 1938, através do decreto lei 1006, datado de 30 de Dezembro, o então presidente da república, Getúlio Vargas, decretou de forma oficial e regulamentada, as normas de importação, produção e circulação de livros didáticos no Brasil. Naquela época, devido ao momento político-histórico, o livro era um instrumento da instrução política e ideológica, sendo que Estado determinava o uso desse material didático e as informações neles contidas. Somente nos anos 90 começou-se uma discussão crítica sobre o Ensino Fundamental no Brasil que culminou em uma revisão dos Livros Didáticos para esse nível de escolaridade.

Atualmente, temos instituído o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o qual estabelece, em seu artigo 2, a avaliação rotineira dos livros, que é feita pelo Ministério da

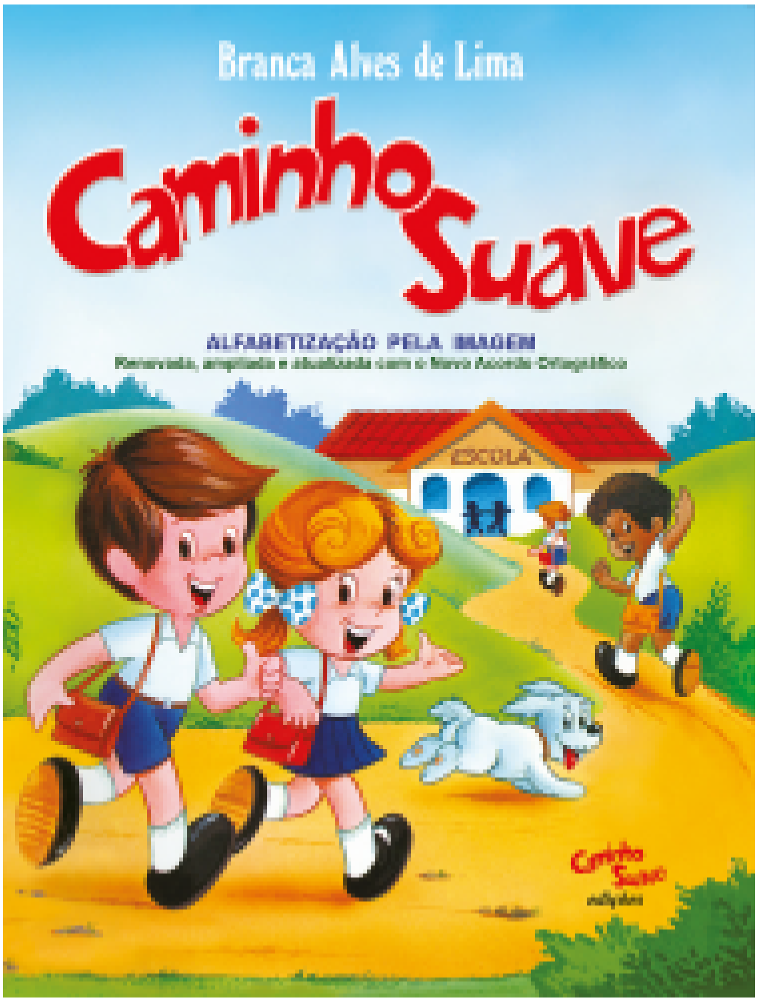



Figura 1.3.1: Capa de um livro didático da década de 90

Educação e Cultura (MEC). O MEC faz periódicas avaliações dos livros didáticos e de seu conteúdo, verificando se esses conteúdos estão de acordo com tendências pedagógicas atualizadas, pois a reforma curricular, a partir de 1991, exige que os novos livros correspondam às atuais exigências de uma Educação do século XXI, qual seja, o conhecimento, os valores, a capacidade de resolver problemas e aprender.

## 1.4 O programa nacional do livro didático

O programa iniciou-se, com outra denominação, em 1929. Desde então se passaram 87 anos, onde o programa foi aperfeiçoado e teve diferentes nomes e formas de execução. Atualmente, o PNLD é voltado à educação básica brasileira. O Programa tem por objetivo prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários. O PNLD é executado em ciclos trienais alternados. Assim, a cada ano o FNDE adquire e distribui livros para todos os alunos de determinada etapa de ensino e repõe e complementa os livros reutilizáveis para outras etapas.

São reutilizáveis os seguintes componentes: Matemática, Língua Portuguesa, História, Geografia, Ciências, Física, Química e Biologia. Os consumíveis são: Alfabetização Matemática, Letramento e Alfabetização, Inglês, Espanhol, Filosofia e Sociologia. Um edital especifica todos os critérios para inscrição das obras. Os títulos inscritos pelas editoras são avaliados pelo MEC, que elabora o Guia do Livro Didático, composto das resenhas de cada obra aprovada, que é disponibilizado às escolas participantes pelo FNDE. Cada escola escolhe democraticamente, dentre os livros constantes no referido Guia, aqueles que deseja utilizar, levando em consideração seu planejamento pedagógico. Para garantir o atendimento a todos os alunos, são distribuídas também versões acessíveis (áudio, Braille e MecDaisy) dos livros aprovados e escolhidos no âmbito do PNLD.

## 1.5 Os parâmetros curriculares nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são parâmetros elaborados pelo Ministério de Educação e Cultura, como uma proposta de reorientação curricular e para serem utilizados como referência nacional para o ensino. Seu principal objetivo é a padronização do ensino em todo o Brasil. Nos PCNs da Matemática do terceiro e quarto ciclos (sexto ao nono anos), os conteúdos estão organizados em quatro blocos de conhecimentos:

- Números e Operações (Aritmética e Álgebra);
- Espaço e Forma (Geometria);
- Grandezas e Medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria); da Informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade);

O Teorema de Tales, parte do objeto de nosso estudo neste trabalho, está mais centrado no bloco 2, Espaço e forma.

Os PCNs orientam o ensino da Geometria, priorizando a resolução de problemas, o desenvolvimento de princípios fundamentais, como proporcionalidade, semelhança, etc. Destacam ainda o uso progressivo da argumentação, como para que os alunos aprendam gradativamente a justificar os resultados encontrados. Ao desenvolver habilidades para argumentação, os alunos poderão desenvolver ainda as habilidades para demonstração matemática.

Em ato contínuo, os PCNs ainda indicam a utilização da História da Matemática, como auxiliar na compreensão de conceitos e na resolução de problemas.

Outro aspecto que merece destaque é a recomendação do uso de recursos tecnológicos, como calculadoras, computadores, tablets, etc. Tais indicações se justificam, devido ao fato de estarmos em uma era digital, tecnológica, em que o uso de recursos tecnológicos devem ser habitual e incentivados pelos educadores, vez que esta, a escola, está preparando o aluno para a vida, para o trabalho.

## 1.6 A lei de diretrizes e bases da educação e do livro didático

A lei de diretrizes e bases da educação, LDB 9394/96, em seu artigo 4, inciso VIII - faz menção aos programas de apoio ao material pedagógico:

> O dever do Estado com a educação escolar pública será efetivado mediante garantia de atendimento do educando no Ensino Fundamental, por meio de programas suplementares de material didático [...] (BRASIL, 1996, p. 3).

Baseado nesse trecho, fica visível a preocupação do Estado para com os educandos das escolas do Brasil. No trecho "por meio de programas suplementares de material didático..." observa-se que a LDB considera que o livro didático, obviamente, não é única fonte de conhecimento, não é o único material existente. Aliás, na era digital, seria absurdo tal consideração.

O livro didático se encontra longe de ser o elixir da sabedoria. Entretanto, mesmo existindo tantas novas tecnologias, da mídia, dos textos, áudios e vídeos digitais, o livro continua sendo um excelente recurso para o professor e imprescindível recurso para os alunos. Em outras palavras, ainda que essa ferramenta seja utilizado didática e corretamente em sala de aula, é necessário que se tenha consciência da necessidade e um trabalho diversificado. É necessário buscar em outras fontes, modos de complementar e enriquecer as informações. Informações essas, que juntas às informações do livros didáticos, seja de qual for a disciplina abordada, deve servir para auxiliar a construção da ética, e dos conhecimentos necessários ao convívio social.

# CAPÍTULO 2

## Análise do livro: A conquista da matemática

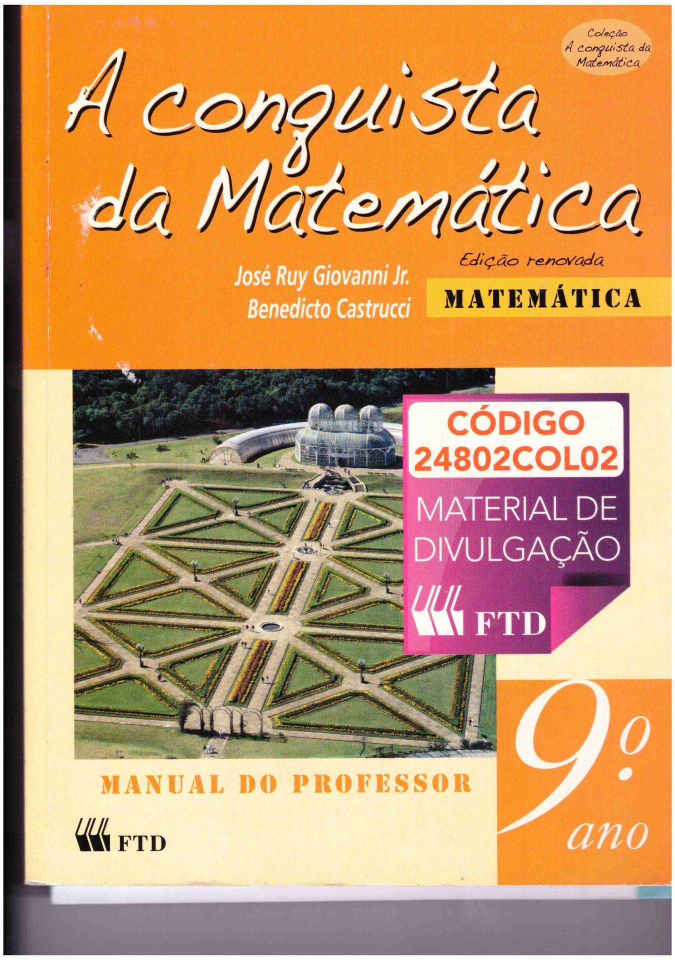



Figura 2.0.1: A conquista da matemática

Neste capítulo, veremos como o Teorema de Tales é apresentado no livro A conquista da matemática. Quais conteúdos são estudados antes da apresentação do teorema. Comentaremos as ilustrações usadas. Além de outras observações, comentamos a contextualização dos conteúdos, o encandeamento das ideias e do conteúdo programático. A capa do livro é a figura 2.0.1

## 2.1 Sobre o livro: A conquista da matemática

O livro escolar A conquista da matemática [1], cujos autores são José Ruy Giovanni Jr. e Benedito Castrucci (Falecido em 02 de janeiro de 1995), foi adotado em anos anteriores em diversas escolas do Brasil, e este ano ainda está adotado em escolas particulares. A editora não mudou a capa e nem o conteúdo nestes últimos seis anos. Não está participando do PNLD/2017 em virtude de não ter sido aprovado pelo MEC.

O livro apresenta 12 Unidades, subdivididos em 58 capítulos. Sendo que do primeiro até o terceiro capítulo (inclusive) apresenta "noções elementares de estatística."Do quarto até o Quadragésimo (inclusive) apresenta capítulos com assuntos relacionados a Álgebra. Só no quadragésimo primeiro capítulo, página 196, o livro apresenta conteúdos de geometria.

Observa-se que, entre os 58 capítulos, o livro apresenta os primeiros 40 capítulos, para só depois apresentar algo sobre geometria. Essa forma, qual seja apresentar 40 capítulos de conteúdos diversos e só depois apresentar geometria - pode atrapalhar o encadeamento lógico das ideias e das aprendizagens, por parte dos alunos. Ressaltamos ainda, que o autor não faz nenhum comentário sobre o motivo de os conteúdos terem sido encadeados desta forma. Os capítulos são subdivididos em sessões, onde são apresentados textos, quase sempre, contextualizados e em seguida, exercícios explorando o conteúdo abordado.

Antes da apresentação dos primeiros capítulos de Geometria, as aberturas das unidades trazem questões matemáticas com curiosidades, que estão ligadas a temas gerais ou correlatos e fazem menção aos conteúdos matemáticos que serão explorados.

- Na seção EXPLORANDO os autores explicam o conteúdo. São propostas atividades que preparam o aluno para o contato mais aprofundado com o conteúdo. (Aqui digo contato mais aprofundado, mas deixando evidente que este contato é aprofundado proporcionalmente à serie a que se propõe). As atividades desta seção exploram os conhecimentos prévios dos alunos, suas experiências pessoais e os conhecimentos já adquiridos em unidades anteriores.

- Após a explanação dos conteúdos, há a seção CHEGOU SUA VEZ! que traz atividades que podem ser trabalhadas individualmente ou em grupos, de forma oral e/ou escrita.

- Na seção EXERCÍCIOS, o livro apresenta atividades práticas, onde o aluno tem oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos para realizar cálculos e resolver situações problemas.

- Ainda há a seção BRASIL REAL. Esta seção apresenta um texto informativo, que trata de algum fato ocorrido no Brasil ou de algum fato curioso.

- Em seguida, apresenta mais exercícios, mais bem contextualizados e algumas perguntas abertas. Apresenta atividades que fazem a aproximação da matemática com diferentes áreas do conhecimento e com cotidiano dos alunos. Nesta sessão, os conhecimentos matemáticos prévios e os adquiridos neste capítulos são explorados e possibilitam aos alunos fixar melhor os conhecimentos adquiridos. Os exercícios fazem conexão com outras áreas do conhecimento e temas variados, a saber: cidadania, ciências, ecologia, esportes, história, Língua Portuguesa, etc.

- Os assuntos abordados na seção BRASIL REAL são fatos ocorridos no Brasil, onde se explora o assunto estudado, com textos, fotografias, gráficos, tabelas que contextualizam a seção.
- Logo após, há a seção denominada, TRATANDO A INFORMAÇÃO, onde são apresentados textos estatísticos, com exercícios contextualizados e, cuja resolução, se faz usando os conteúdos estudados nas sessões anteriores. Nesta seção, os alunos são envolvidos com atividades de leitura, interpretação e organização de dados e tabelas, bem como gráficos e afins tipo leitura de mapas e escala, por exemplo. Também há linguagem de computação (bem superficial).
- Há ainda seções chamadas DESAFIOS, EXERCÍCIOS, etc., onde são apresentados outros exercícios.

A partir da página 196, onde se inicia a parte de Geometria, o estudo é iniciado com a seção denominada EXPLORANDO, onde são colocados exercícios de introdução ao conteúdo.

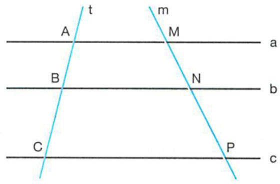
## 2.2 Como é feita a demonstração do teorema

O Teorema de Tales á apresentado apenas no capítulo 44, a partir da página 205. Tal teorema é apresentado de forma descontextualizada e seca. Na página, não há pictogramas e nenhum tipo de gravuras. Em seguida, são apresentados três exercícios resolvidos e posteriormente, seis exercícios explorando os conhecimentos já apresentados. As figuras 2.2.1 e 2.2.2 são fotocópias da apresentação do teorema no livro.

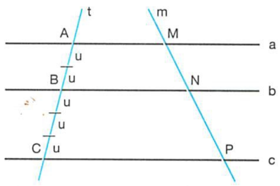
## 44 TEOREMA DE TALES

Vamos ver o que acontece quando os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre duas transversais não são congruentes entre si.

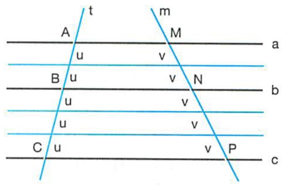
- Sejam as retas a // b // c, que determinam sobre a transversal *t* os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e sobre a transversal *m* os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$.




- Vamos tomar uma unidade *u* tal que AB = 2u e BC = 3u. Dividimos, assim, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em duas e três partes, respectivamente, de modo que os 5 segmentos obtidos sejam congruentes.




- Pelos pontos de divisão, traçamos retas paralelas às retas *a*, *b* e *c*. Pela propriedade vista no capítulo anterior, se os segmentos determinados em *t* são congruentes, então os segmentos determinados em *m* também são congruentes. Chamamos essas medidas de *v*.




Então:

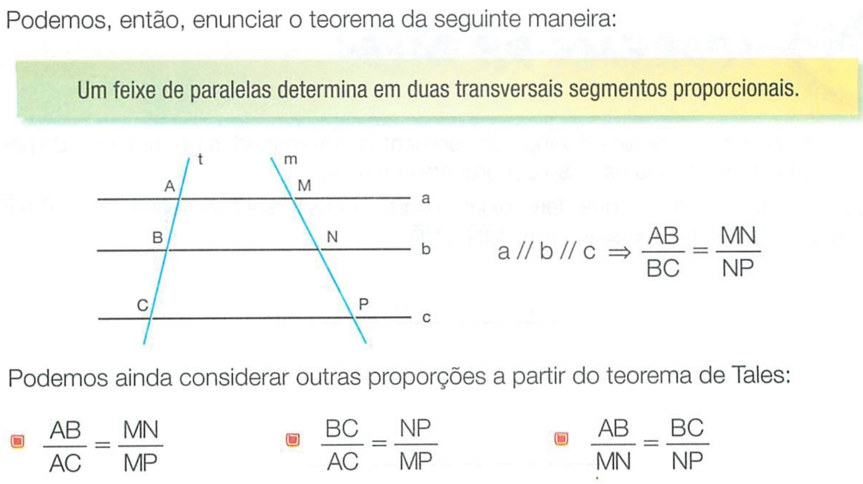
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2u}{3u} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{MN}{NP} = \dfrac{2v}{3v} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$$

, o que significa que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são proporcionais.

Essa relação é conhecida como **teorema de Tales**, em homenagem ao matemático grego, Tales, que a desenvolveu.

205

Figura 2.2.1: Apresentação do teorema no livro: A conquista da matemática


Podemos, então, enunciar o teorema da seguinte maneira:

**Um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.**



$$a \,//\, b \,//\, c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Podemos ainda considerar outras proporções a partir do teorema de Tales:

- $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$
- $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$
- $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$

Figura 2.2.2: Continuação da apresentação do teorema no livro: A conquista da matemática

Na seção 45 é apresentado o texto APLICAÇÃO DO TEOREMA DE TALES, com as subseções Teorema de Tales nos triângulos e Teorema da bissetriz interna de um triângulo. Seguem vários exercícios. No capítulo 46, é apresentado SEMELHANÇA, com as sessões já prescritas: Exercícios, Brasil real, Tratando a informação e Retomando o que aconteceu. Observemos, neste livro, que a demonstração do Teorema de Tales que é feita pelo autor, é válida apenas para alguns casos, de modo que foi feita uma demonstração incompleta, seguindo os seguintes passos:

- São divididos os segmentos das retas transversais em tamanhos quaisquer.
- Garante-se a proporcionalidade dos segmentos determinados pelas retas paralelas nas retas transversais.
- A ideia acima é generalizada para segmentos de tamanhos quaisquer. O autor do livro em análise, toma um segmento u arbitrário e divide os dois segmentos AB e BC em partes inteiras.

Vale ressaltar que, embora seja feito na demonstração, não podemos admitir que um segmento qualquer divide, em tamanhos inteiros, os dois segmentos, dados. Isto é, não podemos garantir a comensurabilidade dos dois segmentos AB e BC quaisquer.

Neste sentido e a respeito do livro em análise, vejamos o que diz o PNLD 2011:

> No entanto, há situações em que a prova apresentada é incompleta, o que ocorre, em particular, no Teorema de Tales, pois não é mencionado o caso geral em que os segmentos não são comensuráveis(Brasil, 2011, p.44)

Ainda observamos que para a demonstração deste teorema o autor usa de uma propriedade pré-definida e retas transversais. A definição de retas transversais foi dada no capitulo 43 e portanto, já foi vista pelos alunos. O conteúdo Congruência (também usado na demonstração) foi apresentado no livro do oitavo ano, da mesma coleção, na seção CONGRUÊNCIAS. No entanto, o modo incompleto em que o teorema é demonstrado faz com que compreensão do teorema fica parcialmente comprometida. Por este motivo, resta um pouco prejudicada a construção do conhecimento.

Observamos ainda, que após a demonstração do teorema, três exercícios são resolvidos. Sendo apresentado em seguida, os exercícios relacionados ao Teorema. É esperado, portanto, que com a demonstração e os exercícios resolvidos, o aluno seja capaz de resolver os exercícios apresentados. Dentre os exercícios apresentados, estão alguns exercícios contextualizados, que relacionam o Teorema de Tales com situações do cotidiano, facilitando a compreensão do teorema e percepção de onde, como e por quê utilizar o conteúdo aprendido.

De um modo generalizado, o livro apresenta figuras coloridas de paisagens e de locais históricos, textos bem explicados, desafios contextualizados, além de orientações ao professor no final do livro. Fatos esses que, acreditamos, despertam o interesse dos alunos, daqueles que tem o cognitivo mais voltados para a matemática.

# CAPÍTULO 3

# Análise do livro: Praticando matemática

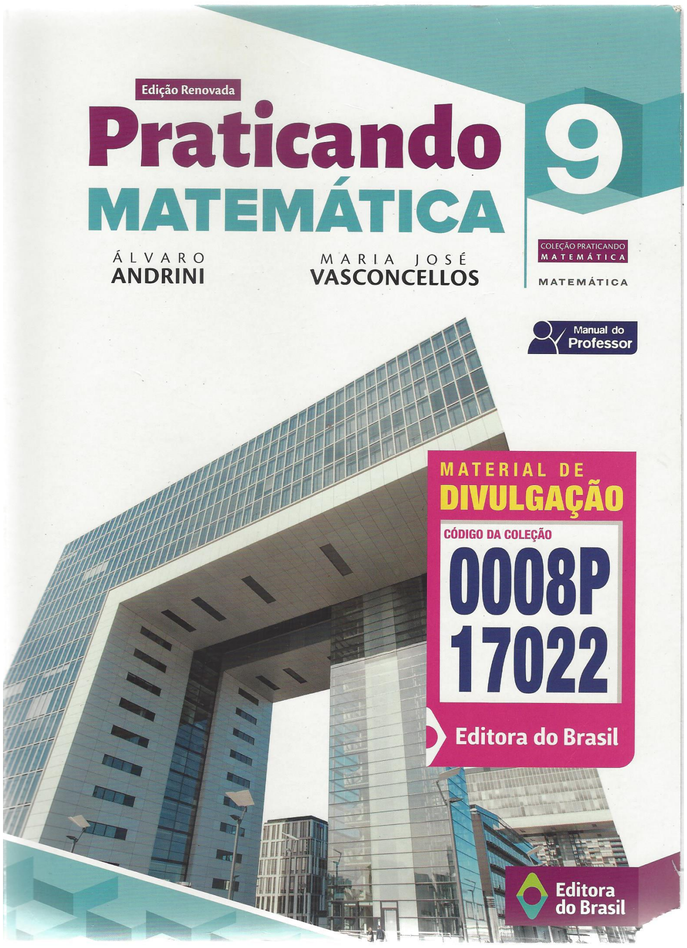



Figura 3.0.1: Capa do livro didático Praticando matemática

Neste capítulo, veremos como o Teorema de Tales é apresentado no livro Praticando Matemática. Quais conteúdos são estudados antes da apresentação do teorema. Comentaremos as ilustrações usadas. O encandeamento dos conteúdos. Observamos nível de dificuldade ao apresentar o teorema e o nível de dificuldade dos exercícios propostos, além de como é feita a contextualização.

## 3.1 Sobre o livro: Praticando matemática

As primeiras edições desta coleção datam da década de 80. De modo que muitos professores de hoje, quando cursavam o ensino básico, o faziam utilizando livros desta coleção.

Mais recentemente, muitos colégios brasileiros, nas edições anteriores do PNLD, escolheram o livro Praticando Matemática, de Álvaro Andrini e Maria Jose Vasconcellos, mostrando assim, que a coleção continua a ter uma boa aceitação entre os professores e alunos.

O livro em análise, Praticando Matemática, do nono ano do ensino fundamental, foi dividido em 10 unidades, das quais, as unidades 6, 7 e 8 tratam de geometria plana e a unidade 9, de geometria espacial. Isto é, as unidades relacionadas a geometria, são apresentadas nos últimos capítulos. Essa apresentação, embora habitual, pode trazer dificuldades para o professor e para o aluno, visto que, pode levar os professores a não ensinar os tópicos finais (geometria) ou a ensiná-los de maneira muito rápida, devido ao fim do ano letivo.

- Textos explicativos: Nestes tópicos, os autores apresentam o conteúdo, de forma contextualizada, muitas vezes utilizando um texto histórico, incluindo ilustrações, mapas, definições e algumas observações. Outras vezes, autores apresentam o conteúdo,através de um texto com temas modernos ou correlatos. Por exemplo, na página 102, onde os autores apresentam Funções e suas aplicações, vide figura 3.1.1, eles o fazem usando algo sempre visto no cotidiano do aluno; relação entre o gasto com combustível (gasolina) e o número de litros de combustível utilizados.Também neste mesmo tópico, os autores ilustram e mostram que a relação entre as gotas de vacina em uma criança está relacionada com o peso da criança. Preço de uma ligação, geralmente está relacionado ao tempo de duração da ligação, preço de carne no açougue é função da quantidade comprada e etc. Vejamos a figura 3.1.1 na página seguinte:


2. As funções e suas aplicações

Por que aprender funções?
Na ciência e nas mais variadas atividades humanas, as funções são usadas para descrever e estudar a relação entre grandezas.

O gasto com combustível é função do número de litros colocados no tanque do automóvel.

A dose de remédio dada a uma criança, muitas vezes, é função da massa da criança.

O preço de uma ligação telefônica interurbana frequentemente é função do tempo de conversação.

O juro pago por um empréstimo é calculado em função da quantia emprestada.

102

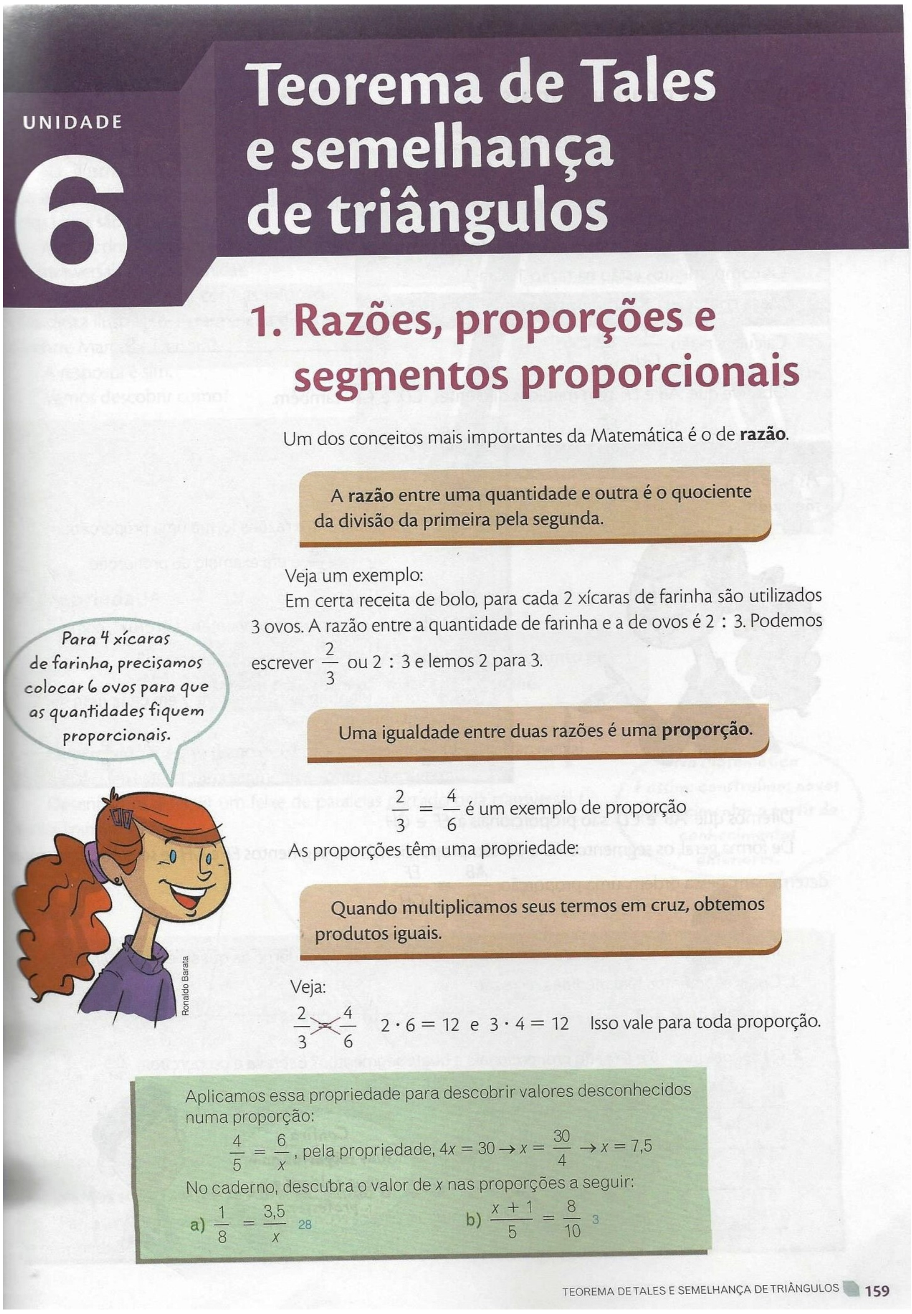
Figura 3.1.1: Página 102 do livro Praticando matemática

- Exercícios: Nestes tópicos, os autores apresentam exercícios, com grau de dificuldade variados. Contextualiza-os usando de mapas, gráficos, situações cotidianas, e usam questões de vestibulares. Após a primeira parte de exercícios, há o tópico REVISANDO, com muitas questões objetivas de vestibular. E questões com temas diversos, mas que, as respostas das questões serão calculadas usando os conteúdos estudados. Ainda neste tópico, há o Desafios onde os autores apresentam pegadinhas e questões, muitas vezes, cômicas.

- Auto avaliação: Por fim, no último tópico de cada unidade, os autores apresentam exercícios de auto avaliação, que envolvem todo o conteúdo estudado, com questões de vestibulares, olimpíadas e concursos, com maior grau de dificuldade e que exige mais dedicação do aluno.

## 3.2 Como é feita a demonstração do teorema

Na Unidade 6, é apresentado o Teorema de Tales e semelhança de triângulos. Para isso, em 6.1, o tema é introduzido com noções de razão, proporção e segmentos proporcionais, conforme figura 3.2.1.



UNIDADE 6

Teorema de Tales e semelhança de triângulos

1. Razões, proporções e segmentos proporcionais

Um dos conceitos mais importantes da Matemática é o de **razão**.

A **razão** entre uma quantidade e outra é o quociente da divisão da primeira pela segunda.

Veja um exemplo:

Em certa receita de bolo, para cada 2 xícaras de farinha são utilizados 3 ovos. A razão entre a quantidade de farinha e a de ovos é 2 : 3. Podemos escrever $\frac{2}{3}$ ou 2 : 3 e lemos 2 para 3.

Para 4 xícaras de farinha, precisamos colocar 6 ovos para que as quantidades fiquem proporcionais.

Uma igualdade entre duas razões é uma **proporção.**

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ é um exemplo de proporção

As proporções têm uma propriedade:

Quando multiplicamos seus termos em cruz, obtemos produtos iguais.

Veja:

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{6}$ $2 \cdot 6 = 12$ e $3 \cdot 4 = 12$ Isso vale para toda proporção.

Ronaldo Barata

Aplicamos essa propriedade para descobrir valores desconhecidos numa proporção:

$\frac{4}{5} = \frac{6}{x}$, pela propriedade, $4x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{4} \rightarrow x = 7{,}5$

No caderno, descubra o valor de $x$ nas proporções a seguir:

a) $\frac{1}{8} = \frac{3{,}5}{x}$ 28

b) $\frac{x+1}{5} = \frac{8}{10}$ 3

TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS 159

Figura 3.2.1: Página 102 do livro Praticando matemática

Em 6.2 o Teorema de Tales é apresentado, onde o mapa de algumas ruas representa três retas paralelas e duas outras ruas (retas) cortam o feixe de ruas paralelas. Então, é pedido ao leitor para determinar a distância entre duas pessoas (Marcos e Débora) que se encontram nos pontos de intersecção das retas transversais e as paralelas. Esta é uma forma interessante de se abordar o tema, pois os alunos vêem uma aplicação cotidiana e corriqueira do teorema. Em seguida, são apresentadas duas propriedades relacionadas ao feixe de paralelas. Vejamos como é apresentada a primeira propriedade: Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal. Esta propriedade é apresentada na página 161. Vide figura 3.2.2.

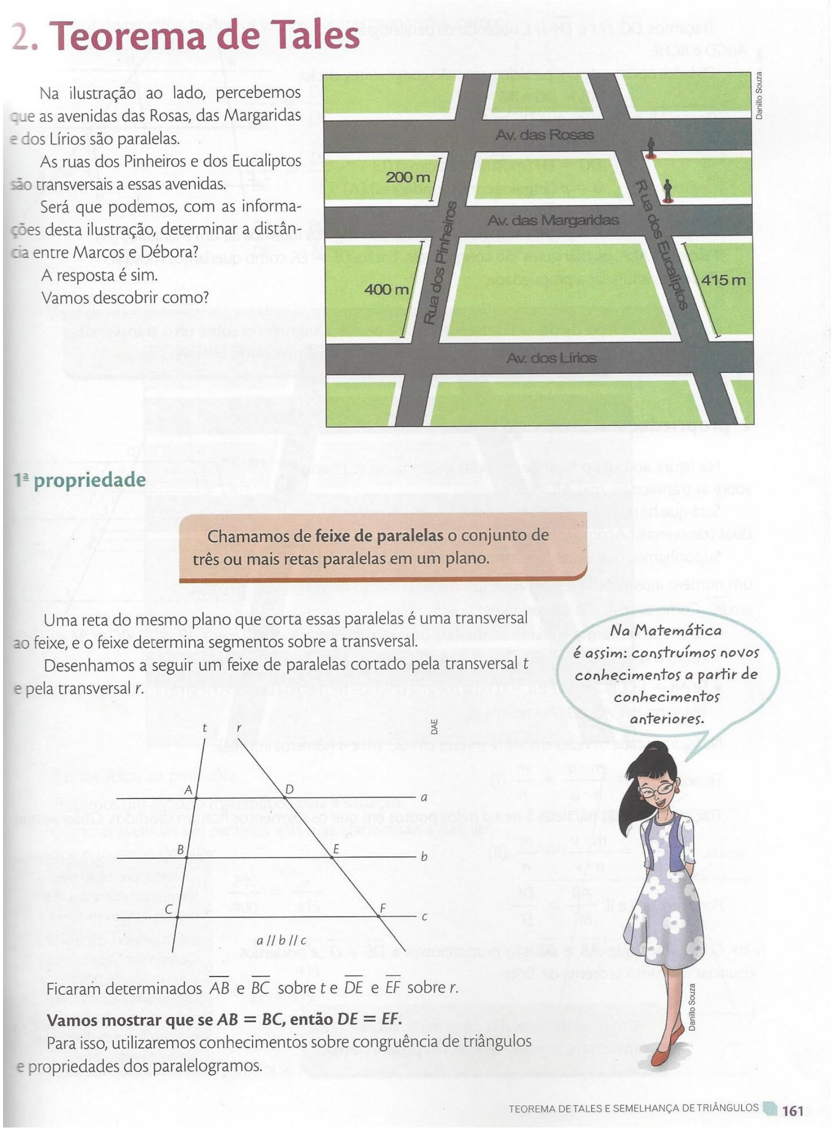
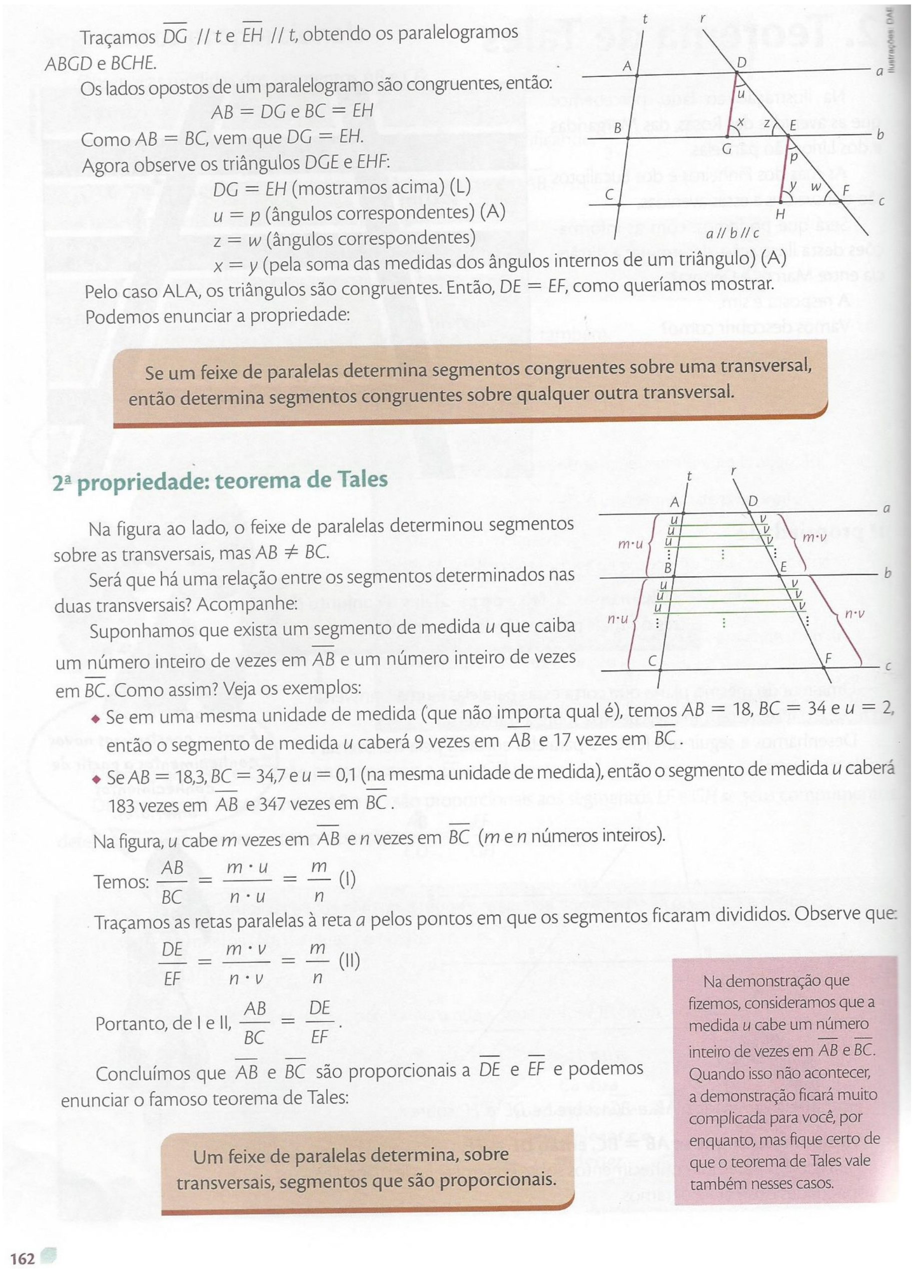



Figura 3.2.2: Apresentação de propriedade

Há uma observação significativa, na gravura em que o autor chama a atenção: Na demonstração que fizemos, consideramos que o segmento $u$ cabe um número inteiro de vezes em AB e BC. Quando isso não acontecer, a demonstração ficará muito complicada para você, por enquanto, mas fique certo que o teorema vale também nesses casos. Antes foi apresentada uma segunda propriedade, através da qual se enuncia o Teorema de Tales: Um feixe de paralelas determina sobre transversais, segmentos que são proporcionais. Vejamos como é apresentado o teorema, na página 162. Assim como no livro A conquista da matemática, a demonstração do teorema está incompleta, sendo demonstrada apenas a parte de segmentos comensuráveis.

Após a apresentação do Teorema de Tales, os autores apresentam Semelhança, Semelhança de triângulos e vários exercícios contextualizados, exercícios de vestibulares e concursos, em quantidade moderada. Há revisão, desafios e seguem até a auto avaliação. Apresenta ainda, na segunda coluna da página 180, finalizando o capítulo, um breve texto resumindo a possível trajetória da vida de Tales, além de um retrato de uma escultura de Tales.

Observa-se que, neste livro, há preocupação dos autores em preparar os alunos para o dia-a-dia. A apresentação de conteúdos envolvendo-os na sua aplicação diária não pode ter outro fim. Observa-se também, que há preocupação em preparar os alunos para vestibulares e concursos. Questões de vestibular contidas nos exercícios, já ajudam a preparar os alunos pra esta finalidade.



Traçamos $\overline{DG} \,//\, t$ e $\overline{EH} \,//\, t$, obtendo os paralelogramos $ABGD$ e $BCHE$.

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então:

$$AB = DG \text{ e } BC = EH$$

Como $AB = BC$, vem que $DG = EH$.

Agora observe os triângulos $DGE$ e $EHF$:

$DG = EH$ (mostramos acima) (L)

$u = p$ (ângulos correspondentes) (A)

$z = w$ (ângulos correspondentes)

$x = y$ (pela soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo) (A)

Pelo caso ALA, os triângulos são congruentes. Então, $DE = EF$, como queríamos mostrar.

Podemos enunciar a propriedade:

**Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.**



## 2ª propriedade: teorema de Tales

Na figura ao lado, o feixe de paralelas determinou segmentos sobre as transversais, mas $AB \neq BC$.

Será que há uma relação entre os segmentos determinados nas duas transversais? Acompanhe:

Suponhamos que exista um segmento de medida $u$ que caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{BC}$. Como assim? Veja os exemplos:

- Se em uma mesma unidade de medida (que não importa qual é), temos $AB = 18$, $BC = 34$ e $u = 2$, então o segmento de medida $u$ caberá 9 vezes em $\overline{AB}$ e 17 vezes em $\overline{BC}$.
- Se $AB = 18{,}3$, $BC = 34{,}7$ e $u = 0{,}1$ (na mesma unidade de medida), então o segmento de medida $u$ caberá 183 vezes em $\overline{AB}$ e 347 vezes em $\overline{BC}$.

Na figura, $u$ cabe $m$ vezes em $\overline{AB}$ e $n$ vezes em $\overline{BC}$ ($m$ e $n$ números inteiros).

Temos: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m \cdot u}{n \cdot u} = \dfrac{m}{n}$ (I)

Traçamos as retas paralelas à reta $a$ pelos pontos em que os segmentos ficaram divididos. Observe que:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{m \cdot v}{n \cdot v} = \frac{m}{n} \text{ (II)}$$

Portanto, de I e II, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Concluímos que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais a $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ e podemos enunciar o famoso teorema de Tales:

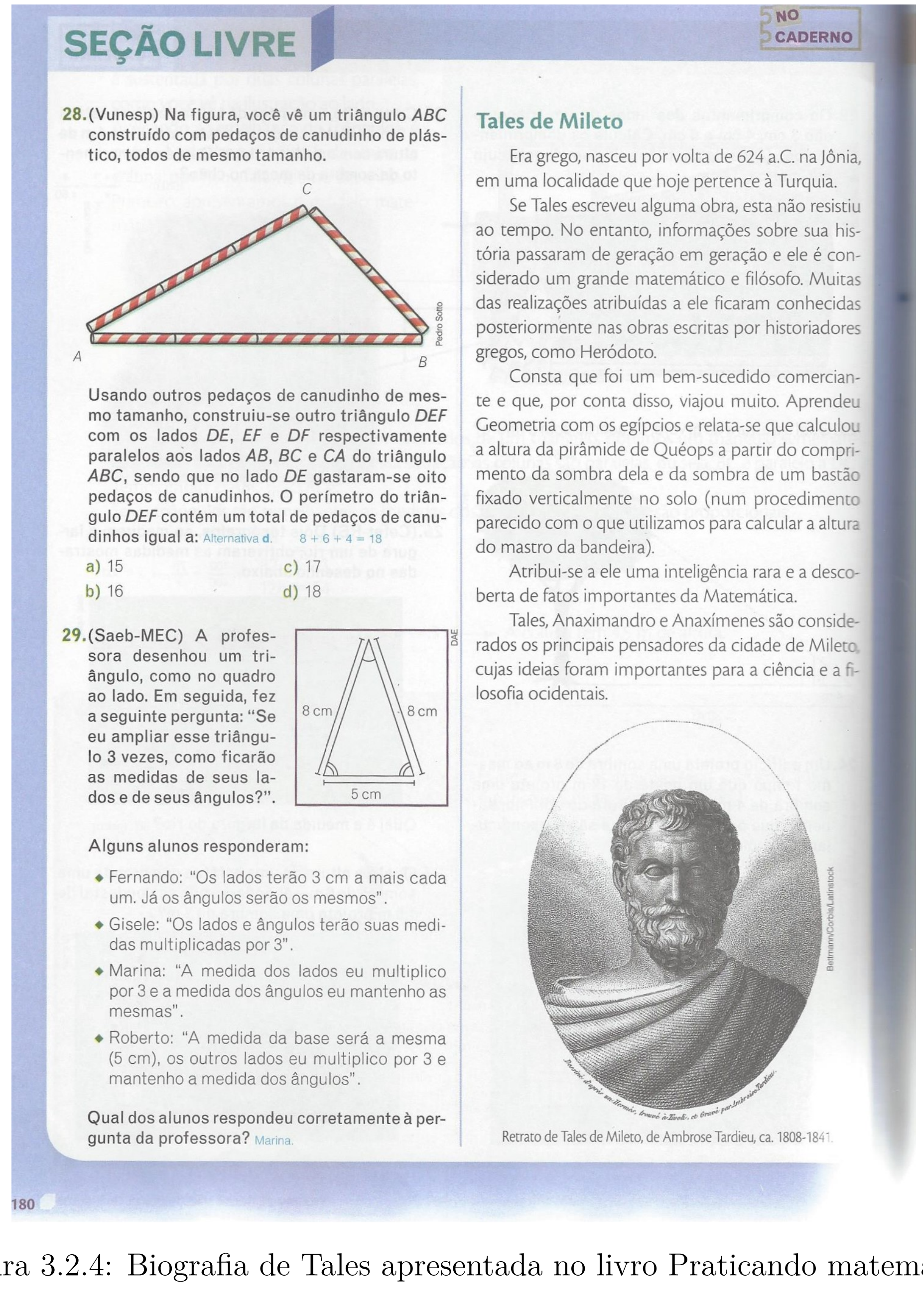
**Um feixe de paralelas determina, sobre transversais, segmentos que são proporcionais.**

Na demonstração que fizemos, consideramos que a medida $u$ cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Quando isso não acontecer, a demonstração ficará muito complicada para você, por enquanto, mas fique certo de que o teorema de Tales vale também nesses casos.



162

Figura 3.2.3: Demonstração incompleta do teorema



SEÇÃO LIVRE

NO CADERNO

**28.** (Vunesp) Na figura, você vê um triângulo *ABC* construído com pedaços de canudinho de plástico, todos de mesmo tamanho.



Usando outros pedaços de canudinho de mesmo tamanho, construiu-se outro triângulo *DEF* com os lados *DE*, *EF* e *DF* respectivamente paralelos aos lados *AB*, *BC* e *CA* do triângulo *ABC*, sendo que no lado *DE* gastaram-se oito pedaços de canudinhos. O perímetro do triângulo *DEF* contém um total de pedaços de canudinhos igual a: Alternativa d. $8 + 6 + 4 = 18$

a) 15
b) 16
c) 17
d) 18

**29.** (Saeb-MEC) A professora desenhou um triângulo, como no quadro ao lado. Em seguida, fez a seguinte pergunta: "Se eu ampliar esse triângulo 3 vezes, como ficarão as medidas de seus lados e de seus ângulos?".



Alguns alunos responderam:

- Fernando: "Os lados terão 3 cm a mais cada um. Já os ângulos serão os mesmos".
- Gisele: "Os lados e ângulos terão suas medidas multiplicadas por 3".
- Marina: "A medida dos lados eu multiplico por 3 e a medida dos ângulos eu mantenho as mesmas".
- Roberto: "A medida da base será a mesma (5 cm), os outros lados eu multiplico por 3 e mantenho a medida dos ângulos".

Qual dos alunos respondeu corretamente à pergunta da professora? Marina.

## Tales de Mileto

Era grego, nasceu por volta de 624 a.C. na Jônia, em uma localidade que hoje pertence à Turquia.

Se Tales escreveu alguma obra, esta não resistiu ao tempo. No entanto, informações sobre sua história passaram de geração em geração e ele é considerado um grande matemático e filósofo. Muitas das realizações atribuídas a ele ficaram conhecidas posteriormente nas obras escritas por historiadores gregos, como Heródoto.

Consta que foi um bem-sucedido comerciante e que, por conta disso, viajou muito. Aprendeu Geometria com os egípcios e relata-se que calculou a altura da pirâmide de Quéops a partir do comprimento da sombra dela e da sombra de um bastão fixado verticalmente no solo (num procedimento parecido com o que utilizamos para calcular a altura do mastro da bandeira).

Atribui-se a ele uma inteligência rara e a descoberta de fatos importantes da Matemática.

Tales, Anaximandro e Anaxímenes são considerados os principais pensadores da cidade de Mileto, cujas ideias foram importantes para a ciência e a filosofia ocidentais.



Retrato de Tales de Mileto, de Ambrose Tardieu, ca. 1808-1841.

180

Figura 3.2.4: Biografia de Tales apresentada no livro Praticando matemática

CAPÍTULO 4

# Análise do livro: Matemática na medida certa

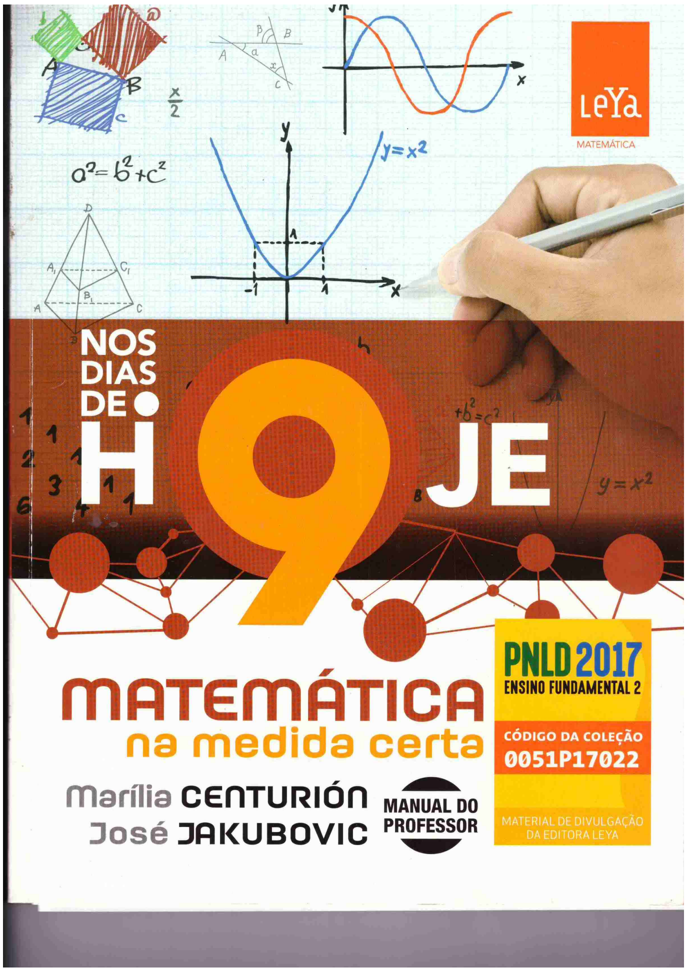



Figura 4.0.1: Capa do livro matemática na medida certa

Neste capítulo, veremos como o Teorema de Tales é apresentado no livro Matemática na medida certa. Quais conteúdos são estudados antes da apresentação do teorema. Também comentaremos as ilustrações usadas. Além de outras observações, comentamos a contextualização dos conteúdos, o encandeamento das ideias e do conteúdo programático.

## 4.1 Sobre o livro: Matemática na medida certa

Escolhemos fazer análise desse livro, devido ao histórico (do autor Jacubovic) de boa aceitação entre professores de todo o Brasil. Os autores Marília Centurión e José Jacubovic são considerados bons autores pela editora e por muitos professores. Embora esta seja a primeira edição do livro: Matemática nos dias de hoje na medida certa nono ano, os autores já tiveram outros livros didáticos de matemática recém-publicados. O livro em análise é volume 9 da coleção, sendo que cada volume apresenta 8 capítulos, assim estruturados:

- Abertura - A abertura de cada capítulo relaciona o conteúdo matemático a ser apresentado com suas aplicações ou com sua história. Muitas vezes, a abertura remete a temas modernos ou correlatos, como cidadania, saúde, meio ambiente, matemática financeira, ou ainda, com história da matemática.

- Conexões - A seção conexões apresenta, em todos os casos com ilustrações, gráficos, tabelas ou afins, situações em que o conhecimento matemático se relaciona com outras áreas do conhecimento. É um material repleto de informações, muito bem contextualizado e pronto para se desenvolver atividades interdisciplinares.

- Revendo conceitos e procedimentos - no final do capítulo, contendo exercícios e problemas de revisão abrangendo os conteúdos do capítulo em que se encontra e de capítulos ou volumes anteriores.

- A matemática tem história (conexão com História da Matemática) - aparece variadas vezes, em ocasiões nos quais a abordagem da história de um conceito ajuda a compreendê-lo melhor.

E há também as seções básicas:

- Texto teórico, onde os autores apresentam os conteúdos, geralmente de forma contextualizada e com conexão com outras áreas do conhecimento. Isto é, esta seção apresenta o tema matemático em estudo.

- Pense e responda (contendo exercícios e problemas), onde há exercícios básicos alguns contextualizados, outros operatórios - envolvendo a introdução do conteúdo estudado. O Pense e responda propõe exercícios básicos, introdutórios, apropriados para a sala de aula, visando o entendimento do Texto teórico. Em alguns casos, (no capítulo em que apresenta o Teorema de Tales, por exemplo) acrescenta problemas que exigem mais raciocínio e onde se aplica o conhecimento introduzido.

- Pensando em casa (exercícios e problemas), contendo atividades mais voltados para pesquisas a serem feitas em casa, tipo exercícios de revisão, entrevistas, pesquisas, análises de mapas e etc. às vezes tem um problema novo, que prepara a reflexão para o item seguinte;

- Ação. Nesta seção, descrita por seção extraordinária básica, os autores quebram a rotina habitual, propondo jogos, desafios, experimentos e trabalhos que visam sobretudo promover a atuação dos alunos, em geral, fazendo trabalhos em grupos. As atividades propostas nesta seção podem promover alguma agitação na sala de aula diferente de indisciplina mas os alunos adolescentes, em sua maioria, se interessam por essas atividades.

- Desafios e surpresas. Esta seção apresenta problemas não rotineiros, cuja resolução permite a fixação dos conhecimentos adquiridos. Incita o aluno a criar estratégias próprias para a resolução dos problemas propostos. Nesta seção também há desafios interessantes, quebra-cabeças, etc.

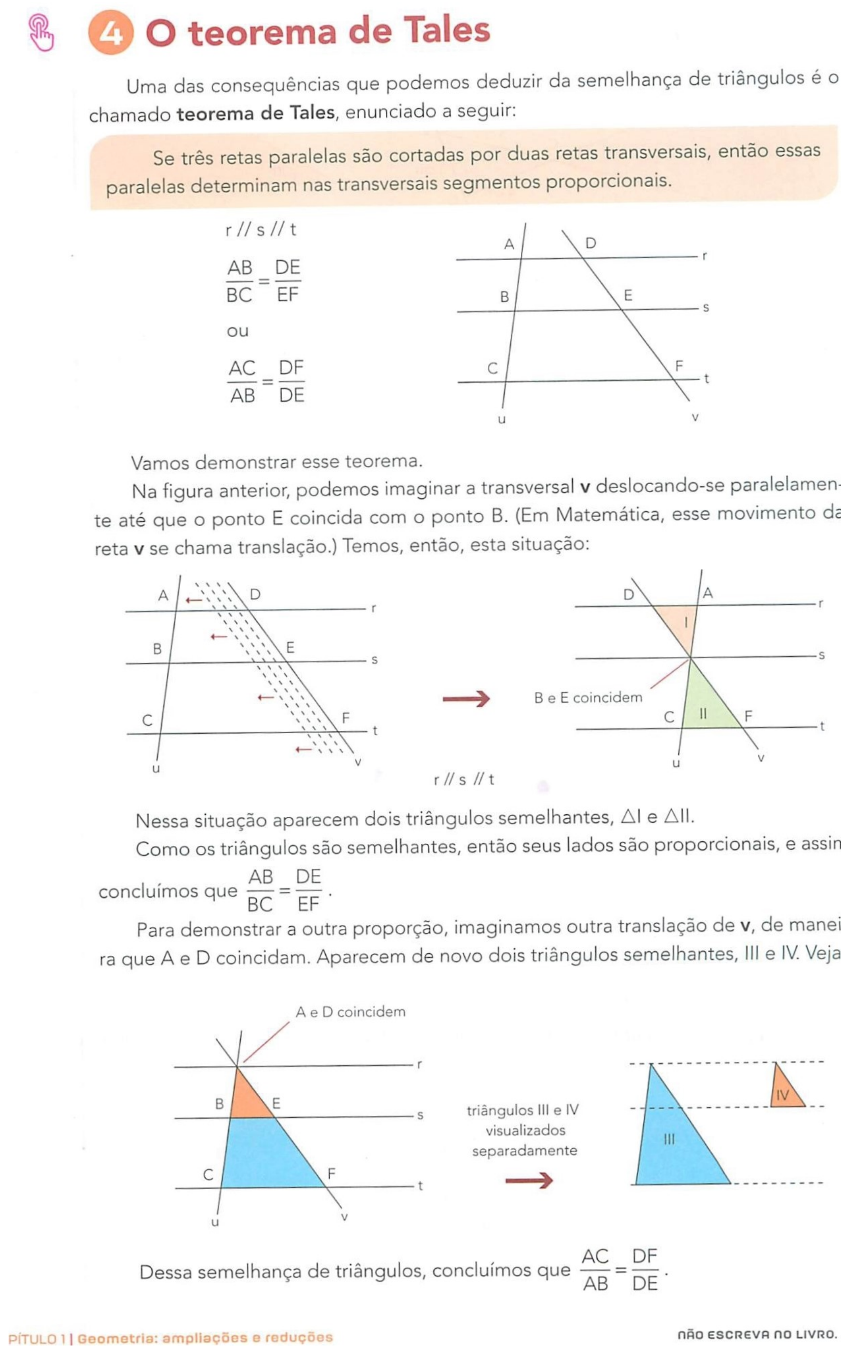
- Você Sabia que... Esta seção contém lembretes dos conteúdos estudados em volumes ou capítulos anteriores e contém curiosidades.

- Na seção A matemática tem história, temos um texto narrativo, contando o modo usado por Tales para calcular a altura de uma Pirâmide Egípcia, usando apenas um bastão de madeira.

Antes da apresentação do Teorema de Tales, que é feita já no primeiro capítulo, na página 24 é apresentado Semelhança de triângulos, onde são feitas as abordagens dos casos AA e o caso especial de semelhança. Antes da apresentação do teorema, há o seguinte trecho: Para dois polígonos serem semelhantes, eles precisam satisfazer as duas condições: terem ângulos respectivamente congruentes e lados respectivamente proporcionais. Embora tal afirmativa seja facilmente demonstrável e comumente encontrada em livros de ensino superior, os adeptos do livro em estudo encontra um problema, visto que até a leitura desse trecho, não há qualquer menção do que sejam segmentos congruentes ou de congruência de polígonos. O uso de um termo sem nenhuma menção anterior ou sem que os alunos tenham conhecimento de tal termo pode trazer dificuldades para o aluno, levando-o a confusões e desentendimento No entanto, no volume anterior, do oitavo ano, "Congruências"é apresentado aos alunos, ainda que de forma bem superficial.

## 4.2 Como é feita a demonstração do teorema

A demonstração é inadequada neste livro, onde é o teorema é demonstrado, usando uma semelhança de triângulos, que é consequência do Teorema de Tales. Há ilustração do feixe de paralelas, das transversais e da translação das retas.



**4 O teorema de Tales**

Uma das consequências que podemos deduzir da semelhança de triângulos é o chamado **teorema de Tales**, enunciado a seguir:

Se três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, então essas paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais.

r // s // t

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

ou

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

Vamos demonstrar esse teorema.

Na figura anterior, podemos imaginar a transversal **v** deslocando-se paralelamente até que o ponto E coincida com o ponto B. (Em Matemática, esse movimento da reta **v** se chama translação.) Temos, então, esta situação:

B e E coincidem

r // s // t

Nessa situação aparecem dois triângulos semelhantes, $\triangle$I e $\triangle$II.

Como os triângulos são semelhantes, então seus lados são proporcionais, e assim concluímos que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Para demonstrar a outra proporção, imaginamos outra translação de **v**, de maneira que A e D coincidam. Aparecem de novo dois triângulos semelhantes, III e IV. Veja

A e D coincidem

triângulos III e IV visualizados separadamente

Dessa semelhança de triângulos, concluímos que $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$.

PÍTULO 1 | Geometria: ampliações e reduções

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Figura 4.2.1: Demonstração do teorema de Tales no livro Matemática na medida certa

Em seguida, no tópico Usando o Teorema de Tales, como exemplo de exercícios e exemplificando a aplicação do teorema, usando a planta de dois lotes de terrenos, sendo determinadas as medidas de alguns dos lados,descobre-se a medida da frente dos lotes, conforme Figura 4.2.2

**Usando o teorema de Tales**

A planta abaixo mostra dois lotes de terrenos.



Para descobrir a medida da frente dos lotes 1 e 2, que dão para a Rua B, vamos usar o teorema de Tales.

$$\frac{x}{15} = \frac{42}{35} \rightarrow x = 18 \text{ e } y = 42 - x \rightarrow y = 24$$

Portanto: o lote 1 tem 18 m de frente e o lote 2 tem 24 m.

Figura 4.2.2: O Teorema de Tales no livro matemática na medida certa

Na seção "Pense e responda", há sete exercícios, sendo a maioria deles contextualizados, e alguns sem contextualização. No campo "Desafio e surpresas", há um exercícios de demonstração, em que para se fazer a demonstração solicitada é necessário utilizar o Teorema de Tales. O segundo exercício, é uma questão de vestibular. A terceira questão, não há necessidade de cálculo, apenas de observação e de conhecimento do teorema e ângulos.

Posteriormente, na seção "Pensando em casa", são propostos 24 exercícios, entre eles, exercícios de vestibular. Os exercícios são todos contextualizados e utilizam de ilustrações, plantas ou mapas. Usam de temas correlatos e do cotidiano para fazer conexão com o teorema. Há exercícios envolvendo, basicamente, Semelhança, Semelhança de triângulos e o Teorema de Tales. Na seção "Revendo Conceitos", há exercícios de revisão, onde se explora os conhecimentos adquiridos nos temas já estudados. Há dez questões. Sendo elas de vestibular, da OBMEP, OPM, ENEM.

# CAPÍTULO 5

## Uma sugestão para demonstração do teorema

Após analisarmos os livros didáticos, percebemos que alguns utilizam de semelhança de triângulos para fazer a demonstração do teorema, e há livros (no caso em análise: A conquista da matemática e Praticando matemática) que faz a demonstração usando a comensurabilidade de segmentos. O livro A conquista da matemática e o livro Praticando matemática apresentam a demonstração incompleta (não faz a demonstração para segmentos incomensuráveis). Embora a demonstração usando a comensurabilidade de segmentos seja correta, não é muito corriqueiro essa demonstração em livros didáticos.

Em tal demonstração, a parte de segmentos incomensuráveis, a depender do modo como é feita, pode ser incompreensível pela maioria dos alunos do ensino fundamental, devido a conhecimentos prévios que exige.

Apresentaremos aqui, uma demonstração do Teorema de Tales, baseado na Apostila da Graduação em Matemática da Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro - Cederj [2]. Escolhemos a demonstração feita em [2], pelo fato de ela ser fácil, correta e compreensível a alunos do nono ano. Mesmo para os alunos que não tem muita afinidade com a matemática. Tal demonstração requer conhecimentos de números irracionais, proporção, desigualdades e frações e por isso, só poderia ser apresentada do nono ano do Ensino Fundamental em diante. Primeiramente, vejamos as definições e o teorema seguintes:

**Definição 5.1.** Seja o feixe de retas paralelas $a, b, c$ e $d$. Dizemos que uma reta $r$ é *transversal ao feixe de retas*, se $r$ intersectar todas as retas do feixe.

**Definição 5.2.** Dizemos que os segmentos $AB$ e $CD$ são comensuráveis se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento $AB$ e um número inteiro de vezes no segmento $CD$.

**Teorema 5.3.** *Se um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então os segmentos congruentes de uma tem como correspondentes segmentos congruentes na outra.*

Dados a definição e o teorema acima, faremos uma sugestão da demonstração do Teorema de Tales, acessível a alunos do nono ano do ensino fundamental.

Cabe ressaltar, que a Tales seriam creditados vários teoremas e vários estudos. No entanto, pela tradição e pela importância do teorema descrito abaixo, esse é o teorema que denominamos Teorema de Tales;

**Teorema de Tales:** Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Demonstração: Considere $AB$ e $CD$ dois segmentos de uma transversal e $A'B'$ e $C'D'$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra transversal. Vamos provar que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

## 5.1 Demonstração para segmentos comensuráveis

PRIMEIRO CASO: $AB$ e $CD$ são comensuráveis, onde $AB$ e $CD$ denotam o segmento e as medidas dos segmentos $AB$ e $CD$.

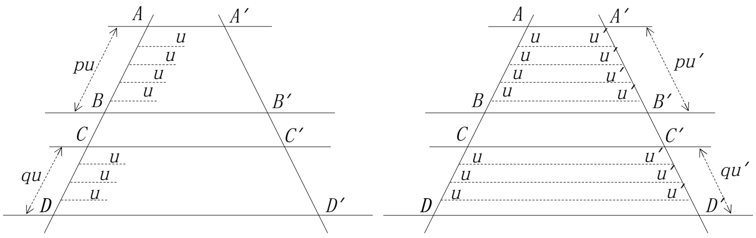



Figura 5.1.1: Figura retirada do módulo 1 de Geometria Básica do Cederj.

Observe que, pelo teorema 5.3, as paralelas pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD dividem os segmento A'B' e C'D' em segmentos iguais de comprimentos u'.

E como trata-se de segmentos comensuráveis, existe um segmento $u$ que é submútliplo de $AB$ e $CD$ , ou seja, existem $p$ e $q$ inteiros tais que $AB = pu$ e $CD = qu$, logo;

$\frac{AB}{CD} = \frac{pu}{qu} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$ (5.1)

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão $AB$ e $CD$ e aplicando o Teorema 1, vem:

A'B' = pu'$e$ C'D' = qu'$, temos$;

$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{pu'}{qu'} = \frac{p}{q}$ (5.2)

De 5.1 e 5.2, vem que;

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

## 5.2 Demonstração para segmentos incomensuráveis

SEGUNDO CASO: $AB$ e $CD$ são incomensuráveis:

Daí, não existe um segmento submúltiplo comum de $AB$ e $CD$. Conforme Figura 5.2.1, tomemos um segmento $u$ submúltiplo de $CD$, isto é,

$$CD = nu \tag{5.3}$$

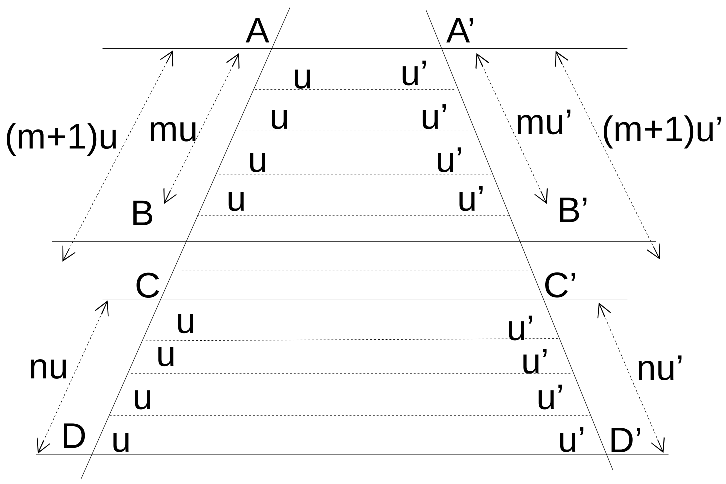



Figura 5.2.1: Segmentos incomensuráveis

Por serem $AB$ e $CD$ incomensuráveis, marcando necessariamente $u$ em $AB$, temos que para um certo número inteiro $m$ de vezes, acontece:

$$mu < AB < (m+1).u \tag{5.4}$$

Comparando 5.3 e 5.4;

$$\frac{mu}{nu} < \frac{AB}{nu} < \frac{(m+1).u}{nu} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n} \tag{5.5}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $AB$ e $CD$ e aplicando o *Teorema* 1, vem:

$$C'D' = nu'$$
$$mu' < A'B' < (m+1).u'.$$

Temos,

$$mu' < A'B' < (m+1).u' \Rightarrow \frac{mu'}{nu'} < \frac{A'B'}{nu'} < \frac{(m+1).u'}{nu'} \Rightarrow$$

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{(m+1)}{n} \tag{5.6}$$

Pelas relações 5.5 e 5.6, as razões $\frac{AB}{CD}$ e $\frac{A'B'}{C'D'}$ estão compreendidos entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$, cuja diferença é $\frac{1}{n}$.

Tomando valores cada vez maiores para $n$, temos;

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}}$$

Com isso, provamos o a validade do Teorema de Tales para o caso em que os segmentos determinados pelas retas paralelas nas retas transversais são incomensuráveis. É o queríamos demonstrar!

# CAPÍTULO 6

## Considerações finais

Nesse estudo, procuramos fazer um breve relato sobre a história da escrita e da leitura. Como a escrita e a leitura influenciaram o desenvolvimento e o crescimento da humanidade. Em seguida algumas considerações sobre a história do livro didático no Brasil. Procuramos ainda, relatar como são feitas as escolhas dos livros didáticos adotados nas escolas públicas. Constatamos que os livros didáticos estão sendo modernizados e seus conteúdos atendendo as exigências do MEC. Que as escolas, que participam do PNLD, podem escolher seus livros bem contextualizados e bem ilustrados, de tal forma que os livros analisados, todos os três, apresentam uma demonstração do Teorema de Tales.

Fazemos um breve relato sobre a possível história de Tales de Mileto. Mais adiante, fazemos uma análise de como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano do ensino fundamental. Analisamos, nos livros didáticos, os temas que são apresentados antes do Teorema e como é feita a demonstração, como são subdivididos os tópicos dos livros, seus exercícios e contextualização.

Em dois dos livros analisados, a demonstração do Teorema de Tales está incompleta, demonstrando resultado válido apenas para casos de segmentos comensuráveis. No terceiro livro, a demonstração está incorreta, visto que usa uma consequência do teorema, para demonstrá-lo.

Que os três livros analisados introduzem o estudo de demonstrações de resultados matemáticos, sejam eles teoremas ou propriedades, preparando o aluno para o estudo de demonstrações no ensino médio, de acordo com os PCNs, que dizem que os alunos devem desenvolver atividades de argumentação e raciocínio.

É também importante relatar que um estudo análogo a este, de como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos, foi realizado anteriormente em um trabalho de dissertação, mas foram analisados outros livros, já em desuso, evidenciando que o problema não é apenas dos livros mais modernos.

Realizamos ainda neste trabalho, a demonstração do teorema de Tales, usando segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis, de modo acessível a alunos do nono ano do ensino fundamental.

# Referências Bibliográficas


[1] GIOVANNI, José Ruy e CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**.Edição renovada. São Paulo-SP. FTD,2009.

[2] PESCO, D.U.;R.G.T. **Geometria Básica**.Rio de Janeiro-RJ: Fundaçao Cecierj- Consórcio Cederj, pp. 144 a 146, 2012.

[3] WILLYANS, Maciel.**Tales de Mileto**. Artigo publicado na internet, pode ser encontrado no endereço: http://www.infoescola.com/filosofia/tales-de-mileto

[4] ANDRINI, Alvaro e VASCONSELLOS, Maria José. **Praticando matemática**. Edição renovada. São Paulo-SP, Editora do Brasil, 2016.

[5] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. 1ł Edição. Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2013.

[6] MEC. **Parametros curriculares nacionais para o ensino fundamental: Matemática**. Brasília-DF, MEC, 1998.

[7] MORGADO, Augusto César e CARVALHO, Paulo César Pinto. **Matemática Discreta**. 1 łEdição. Rio de Janeiro - RJ, SBM, 2014.

[8] LOPES, Antônio José. **Matemática**. 1ł Edição. São Paulo-SP, Editora scipione, 2013.

[9] LECHAT, Leannes Rudiger. **Tutorial para uso do LaTex para escrita científica**. São Carlos-SP,Universidade de São Carlos, 2013.

[10] SOUZA, Prof. Julio Cesar de Mello e. **Matemática divertida e curiosa**. 15ł edição. Rio de Janeiro-RJ, Record, 2001.

[11] JAKUBOVIC, José; MARILIA, Centuriòn **Matemática na medida certa**. Edição renovada. São Paulo-SP, Editora Scipione, 2015.

[12] LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio - Vol.1/Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado** 10ł edição - Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2012

[13] MILIES, Francisco Cesar Polcino **Números: Uma introdução à matemática Francisco Cesar Polcino Milies, Sônia Pitta Coelho** 3ł edição. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

[14] LUFT, Celso Pedro. **Dicionário de língua portuguesa e brasileira** Porto Alegre-RS. Editora Globo, 1967.

[15] ALMEIDA, Nilbert Assis Duarte de. **Uma análise da apresentação do Teorema de Tales em livros didáticos do nono ano do ensino fundamental** Niterói-RJ, 2013.

[16] NICOLA, jose de nicola **Língua, literatura e redação** São Paulo-SP.Editora Scipione, 1993.

[17] TERRA, Ernani **Mini Gramática** 10ł edição. São Paulo-SP: Scipione, 2007.

[18] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar** 2ł edição. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2013.