UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ROBERTO LOSCHA FILHO

# FRAÇÃO: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

ILHÉUS - BA
2017

ROBERTO LOSCHA FILHO

# FRAÇÃO: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de concentração: Matemática Básica.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius A. T. Arakawa

ILHÉUS - BA
2017

L879 Loscha Filho, Roberto.
Fração: história, teoria e aplicações / Roberto Loscha Filho. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.
103f. : Il.

Orientador: Vinicius Augusto Takahashi Arakawa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e apêndice.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Frações. 3. Aprendizagem por atividades. 4. Números racionais. I. Título.

CDD 510.7

ROBERTO LOSCHA FILHO

# FRAÇÃO: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 09 de março de 2017.

**Prof. Dr. Vinícius A. T. Arakawa**

Orientador – UESC

Paulo H. Galão

**Prof. Ms. Paulo Henrique Galão**

UESC

**Prof. Ms. Roque da Silva Lyrio**

IFBA – Valença

ILHÉUS - BA

2017

*Este trabalho é dedicado à minha filha,*

*minha luz e vida.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus, por ter me dado a força, saúde e dedicação necessária para vencer mais essa etapa da minha vida.

À minha esposa Letícia, por seu companheirismo, incentivo e paciência, que foram fundamentais para minha vitória.

À minha filha Ester, por compreender minha ausência em casa durante as viagens.

À meus pais Kátia e Almério, pela força e fé inabalável em mim, sempre me incentivando.

À meu irmão Alexanndre, por sempre acreditar na minha capacidade e dedicação.

Aos amigos e colegas do Colégio Municipal Anísio Teixeira e Colégio Estadual Homero Pires, pela força e incentivo.

À Universidade Estadual de Santa Cruz, pela oportunidade de fazer o PROFMAT.

Aos meus amigos e companheiros do Curso de Mestrado em Matemática da UESC, pelas contribuições e incentivos.

À todos os professores do PROFMAT, pela paciência e dedicação que tiveram durante o curso, e em especial o meu orientador, Professor Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa, por sua dedicação, esforço e ensinamentos, sendo um excepcional exemplo de profissional e pessoa.

À SBM, por me proporcionar esta oportunidade de crescimento acadêmico.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço também a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a minha vitória.

A todos muito obrigado.

*"Se os números não são bonitos, eu não sei o que é bonito."*

*Paul Erdős*

# Resumo

A dificuldade crescente e a não assimilação do estudo das frações motivou a presente dissertação, onde apresentamos um breve histórico sobre as frações, abordando a consolidação e a formação de seu conceito. Destacamos também a construção do conjunto dos números racionais e o fortalecimento do aspecto algébrico no que tange às definições de números e operações. A análise e a discussão dos aspectos que dificultam a aprendizagem e as possíveis estratégias para reverter esse quadro. Com base nisso, o presente estudo possui enfoque qualitativo, com a aplicação de dois questionários, um a professores e outro a alunos, cujos dados e resultados apurados foram essenciais à construção deste trabalho. A proposta para o ensino das frações é por intermédio de uma oficina realizada em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, priorizando a ressignificação dos conteúdos tendo por base a resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis com a finalidade de colocar o aluno no papel de construtor do seu conhecimento.

**Palavras Chaves**: Fração; Números Racionais; Ensino aprendizagem; Oficina pedagógica.

# Abstract

The increasing difficulty and non-assimilation of the study of fractions motivated the present dissertation, where we present a brief history about the fractions, approaching the consolidation and the formation of its concept. We also emphasize the construction of the set of rational numbers and the strengthening of the algebraic aspect regarding the definitions of numbers and operations. The analysis and discussion of the aspects that make learning difficult and the possible strategies to revert these frameworks. Based on this, the present study has a qualitative approach, with the application of two questionnaires, one to teachers and the other to students, whose data and calculated results were essential the construction of this work. The proposal for the teaching of fractions is through a workshop held in a group of 8º years of Elementary School, prioritizing the resignification of content based on problem solving and the use of manipulative materials for the purpose of placing the student in the Builder of your knowledge.

**Keywords**: Fraction; Rational Numbers; Teaching learning; Pedagogical office.

# Lista de Tabelas

# Lista de Figuras

# Lista de Siglas

| | |
|---|---|
| *mdc* | Máximo Divisor Comum |
| *mmc* | Mínimo Múltiplo Comum |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| EF | Ensino Fundamental |
| EJA | Educação de Jovens e Adultos |
| EM | Ensino Médio |
| ES | Ensino Superior |
| PCNs | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática |
| UESC | Universidade Estadual de Santa Cruz |

# Sumário

# Introdução

A aprendizagem e o estudo das frações bem como o domínio de suas operações e propriedades não têm sido bem assimilados pelos alunos, criando uma lacuna perigosa no currículo escolar. A falta de uma boa abordagem no trabalho com frações afeta consideravelmente o entendimento do conceito de números e operações além de afetar outros conteúdos matemáticos.

Dessa forma, esse trabalho busca ressignificar o estudo das frações e reforça sua assimilação, buscando consolidar uma etapa fundamental da estrutura algébrica dos números. *A priori*, é necessário redefinir a forma de ensinar e aprender as definições dos números fracionários ao longo do Ensino Fundamental (EF) e consequentemente no Ensino Médio (EM). Para tanto, o corrente estudo busca formas de analisar e fomentar estratégias para erradicar essas carências.

O primeiro capítulo trata do aspecto histórico do surgimento das frações e a grande contribuição dos egípcios para a construção desse conceito. Falaremos do *Papiro de Rhind* e suas tabelas de registro, assim como o sistema de representação de fração unitária, as manipulações aritméticas e algébricas que estão registradas no papiro. Finalmente abordaremos como o conceito de fração se consolidou e difundiu ao redor do mundo até chegar aos dias atuais.

No segundo capítulo usaremos as propriedades algébricas do conjunto dos números inteiros para a construção do conjunto dos números racionais, abordando, dentre várias definições e teoremas, a propriedade fundamental das frações, a relação de equivalência, a definição das operações e o princípio de ordem. Em cada caso apresentaremos as devidas demonstrações necessárias para validar a formação do corpo dos racionais.

No terceiro capítulo abordaremos o ensino e aprendizagem das frações a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e de outros teóricos, falaremos da dificuldade no ensino desse importante tema e dos obstáculos que dificultam sua assimilação. Argumentaremos alternativas e estratégias para rever a aprendizagem das frações tendo como base a resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis.

No quarto capítulo mostraremos os dados obtidos na coleta de informações realizadas com os alunos do 6º ao 9º ano do EF e 1º ao 3º ano do EM para avaliar o grau de assimilação no estudo das frações no ambiente escolar da rede pública do município de Prado-BA. Discutiremos também o resultado de uma entrevista com os professores de matemática do município em que analisaremos a forma com que as frações são lecionadas e a opinião desses profissionais sobre a real situação do ensino dessa matéria.

No quinto capítulo mostraremos a sequência didática da oficina para ressignificar os conceitos e propriedades das frações, aplicada na turma do 8º ano do EF do Colégio Municipal Anísio Teixeira no município de Prado-BA. O objetivo deste capítulo é apresentar estratégias didáticas que tornem o ensino da fração mais atraente e acessível, com uso de material concreto e manipulável. Em cada atividade será comentado e analisado os acertos e erros dos alunos e as principais contribuições em cada encontro.

No sexto capítulo falaremos das considerações finais para o ensino e aprendizagem das frações, assim como, as conclusões levantadas nesses estudo. Comentaremos também, os resultados obtidos na aplicação da oficina didática e a importância da participação dos alunos.

# 1 Um Pouco de História sobre Frações

## 1.1 Primeiro documento Matemático

O surgimento das frações ocorre no próprio desenvolvimento da noção de número e sua associação com a atividade humana, na perspectiva dos problemas cotidianos, como, por exemplo, a necessidade de medir, contar e calcular impulsionou o homem a dominar e modificar a natureza ao seu redor. Para ROQUE [21], as fontes de pesquisa apontam que a matemática usada nas civilizações mais antigas estava associada sobretudo às necessidades administrativas, a quantificação e ao registro de bens que levaram ao desenvolvimento de sistemas de medidas que eram usados e aperfeiçoados.

Nesse contexto, as frações se originaram e a primeira referência de seu uso é atribuída aos egípcios, tendo como base a descoberta em 1858 do *Papiro de Rhind*, nome dado em homenagem ao escocês Alexander Henry Rhind[1] que adquiriu o papiro quando passava pela cidade egípcia de Luxor que ficava às margem do rio Nilo. O papiro foi escrito em *Hierático*, (escrita usada nos papiros e textos matemáticos), por volta de 1650 a.C, seu autor era um escriba chamado *Ahmes*, sendo por isso também conhecido como *Papiro de Ahmes*. Um ponto bastante curioso desse papiro é relatado por ALMEIDA e CORRÊIA [3], o material que compõe o papiro provém de um outro manuscrito ainda mais antigo produzido em alguma época entre 2000 a 1800 a.C, a pedido do rei Hyksos, que reinou no Egito em algum período entre 1788 e 1580 a.C.

Figura 1: *Papiro de Rhind.*
Fonte: [8].

Para diversos autores, entre eles ALMEIDA e CORRÊIA [3], EVES [9] e MOL [17], o *Papiro de Rhind* é um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, sendo considerado um rico manual que descreve

[1] Advogado, historiado, geólogo e arqueólogo escocês (1833-1863).

os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, o emprego da regra de falsa posição, determinação da área de um círculo e outras aplicações da matemática à situações práticas, tendo ao todo 85 problemas, medindo aproximadamente 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e distribuído em 14 folhas.

## 1.2 Sistema Numérico

De acordo com ROQUE [21], o sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3000 a.C, o número 1 era representado por uma barra vertical, e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pelo acréscimo de um número correspondente de barras. Em seguida, os números múltiplos de 10, formando assim um sistema decimal. O número 10 é uma alça; 100, uma espiral; 1 mil, a flor de lótus; 10mil, um dedo; 100 mil, um sapo; e 1 milhão, um deus com as mãos levantadas.

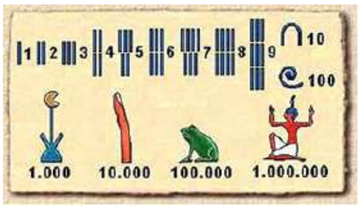



Figura 2: Sistema Decimal Egípcio.
Fonte: [13].

Para ler e escrever no sistema de numeração egípcio era demasiadamente simples: os números maiores vêm escritos na frente dos menores, e se há mais de uma linha de números, devemos começar de cima. Para escrever um número, basta dispor todos os símbolos seguindo tal convenção, e a soma dará o número desejado, observando que o sistema não é posicional, mas aditivo, assim o valor do número é obtido com a soma de todos os valores de todos os símbolos.

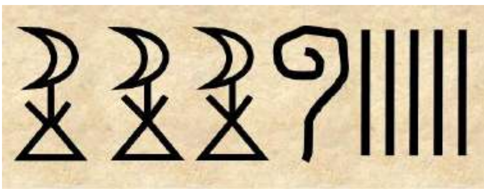


Figura 3: Número 3105 escrito no sistema egípcio.
Fonte: [2].

Pelo exemplo mostrado na figura 3, temos três flores de lótus, uma espiral e cinco barras verticais. Dessa forma o número que esses símbolos representam é 3105, pois $1000 + 1000 + 1000 + 100 + 5 = 3105$

Uma das consequências do sistema de numeração egípcio é a dependência do caráter aditivo. Assim, para representar quantidades muito grandes, seria necessário uma quantidade também grande de símbolos.

> Para escrever no sistema egípcio o número $10^{255}$, precisaríamos de $10^{249}$ deuses com as mãos levantadas. Isso porque um deus é $10^6$ e $\frac{10^{255}}{10^6} = 10^{249}$. Sendo assim, esse sistema não é adequado para representar números muito grandes, uma vez que o número final é obtido pela soma de todos os valores registrados. Obviamente, cada cultura produz o sistema mais conveniente para atender às suas necessidades, e o uso do sistema aditivo pode indicar que os egípcios não precisavam lidar com números muito grandes. (ROQUE [21], p. 57).

## 1.3 Surgimento das Frações

As frações egípcias se desenvolveram a partir da necessidade de medir quantidades não inteiras, em particular áreas e volumes. O fato crucial é a possibilidade dessas grandezas não apresentarem valores inteiros exatos quando mensurados. A ideia do todo e das partes (a metade de uma área agrícola ou a terça parte do volume de um recipiente) está associado a precisão da unidade de medida e a inevitabilidade de transformá-la em partes cada vez menores.

> Cerca de 3000 a.C no Egito, era realizado por matemáticos dos faraós, marcações de terras nas margens do rio Nilo para que os povos cultivassem e plantassem. Mas com o período de inundação tais demarcações eram desfeitas, havendo a necessidade de remarcar as áreas. Para marcar as terras eram utilizadas cordas como unidade de medida sendo os nós separando cada comprimento. No entanto, dependo dos lados dos terrenos nem sempre as medidas davam número inteiro de vezes, com isso surgiu a necessidade de se criar um novo tipo de unidade de medida, ou seja, um novo número. Surgem então, as primeiras noções de números fracionários e a utilização das frações. (MACHADO [15], p. 13).

Os egípcios usavam um conceito que equivale as frações unitárias da forma $\frac{1}{n}$, sendo $\frac{2}{3}$ a única fração com numerador diferente de 1 a ser considerada nos cálculos. Eram representadas na notação hieroglífica e utilizavam um sinal elíptico seguido do número inteiro correspondente. As únicas exceções eram para as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ que tinham notações especiais.


Figura 4: Frações Egípcias.
Fonte: ([9], p. 73).

Para ROQUE [21], o símbolo oval colocado acima do número não possui, porém, o mesmo sentido de "numerador". As frações egípcias não tinham numerador. O numerador indica quantas partes tomamos de uma subdivisão em um dado número de partes. Na designação egípcia, o símbolo oval não possui um sentido cardinal, mas ordinal. Ou seja, indica que, em uma distribuição em $n$ partes iguais, tomamos a n-ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em $n$ partes. É como se estivéssemos distribuindo algo por $n$ pessoas e $\frac{1}{n}$ é quanto cada uma irá ganhar, sendo um abuso de linguagem dizer que, na representação egípcia, as frações possuem numerador 1. Sendo mais adequado dizer que essas frações egípcias representam os inversos dos números naturais.

Segundo AGUIAR [1], os egípcios davam atenção prioritária às frações unitárias (frações com numerador igual a 1) e não operavam com frações diferentes, ou seja, da forma $\frac{n}{m}$, com $n > 1$. Para tanto, toda frações da forma $\frac{n}{m}$, com $n > 1$, era decomposta em soma de frações unitárias distintas. Para ilustrar esse fato a fração $\frac{2}{5}$, ficaria representada da seguinte forma: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Para tanto, na primeira parte do papiro aparece uma tabela de decomposição da forma $\frac{2}{p}$, sendo $p$ um número ímpar de 5 a 101, formando as frações: $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \cdots, \frac{2}{101}$, a partir de soma de frações unitárias distintas.

| $p$ | Frações unitárias | $p$ | Frações unitárias | $p$ | Frações unitárias |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 e 15 | 41 | 24, 246 e 328 | 77 | 44 e 308 |
| 7 | 4 e 28 | 43 | 42, 86, 129 e 301 | 79 | 60, 237, 316 e 790 |
| 9 | 6 e 18 | 45 | 30 e 90 | 81 | 54 e 162 |
| 11 | 6 e 66 | 47 | 30, 141 e 470 | 83 | 60, 332, 425 e 498 |
| 13 | 8, 52 e 104 | 49 | 28 e 196 | 85 | 51 e 255 |
| 15 | 10 e 30 | 51 | 34 e 102 | 87 | 58 e 174 |
| 17 | 12, 51 e 68 | 53 | 30, 318 e 795 | 89 | 60, 356, 534 e 890 |
| 19 | 12, 76 e 114 | 55 | 30 e 330 | 91 | 70 e 130 |
| 21 | 14 e 42 | 57 | 38 e 114 | 93 | 62 e 186 |
| 23 | 12 e 276 | 59 | 36, 236 e 531 | 95 | 60, 380 e 570 |
| 25 | 15 e 75 | 61 | 40, 244, 488 e 610 | 97 | 56, 679, 776 |
| 27 | 18 e 54 | 63 | 42, e 126 | 99 | 66 e 198 |
| 29 | 24, 58, 174 e 232 | 65 | 39 e 195 | 101 | 101, 202, 303 e 606 |
| 31 | 20, 124 e 155 | 67 | 40, 335 e 536 | | |
| 33 | 22 e 66 | 69 | 46 e 138 | | |
| 35 | 30 e 42 | 71 | 40, 568 e 710 | | |
| 37 | 24, 111 e 296 | 73 | 60, 219, 292 e 365 | | |
| 39 | 26 e 78 | 75 | 50 e 150 | | |

Tabela 1: Decomposição das frações do tipo $\frac{2}{p}$.

Fonte: ([1], p. 8).

Assim, usando os dados da tabela temos que a fração do tipo $\frac{2}{p}$ para $p = 13$ é por exemplo:

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

Não existe no *Papiro de Rhind* nenhuma indicação sobre o processo usado pelos egípcios para chegar a essas decomposições, existem várias conjecturas e processos que tentam mostrar como a tabela foi construída. De acordo com ALMEIDA e CORRÊIA [3], muitos dos registro de frações unitárias contidas no *Papiro de Rhind* podem ser decompostas da seguinte forma:

**Teorema 1.3.1.** *Seja $p$ um número ímpar maior que $2$ e sejam $a$ e $b$ divisores de $p$, tais que o produto $ab$ divida $p$. Então, a fração $\frac{2}{p}$ pode ser decomposta em duas frações unitárias distintas, $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, ou $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, se e somente se, $x = \frac{p}{a}\frac{(a+b)}{2}$ e $y = \frac{p}{b}\frac{(a+b)}{2}$.*

*Demonstração.* Considere as frações $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, onde $x$ e $y$ são dados como enunciado no teorema. Neste caso:

$$\frac{1}{\frac{p(a+b)}{2a}} + \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2b}} = \frac{2a}{p(a+b)} + \frac{2b}{p(a+b)} = \frac{2(a+b)}{p(a+b)} = \frac{2}{p}$$

Observando que, como $p$ é ímpar, seus divisores $a$ e $b$ também são ímpares , logo a soma $(a+b)$ é par, logo $\frac{(a+b)}{2}$ é um número natural.

Seja agora, $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ uma decomposição de $\frac{2}{p}$ em frações unitárias. temos então que $\frac{(x+y)}{xy} = \frac{2}{p}$ ou $2xy = p(x+y)$, como $p$ é ímpar temos que $(x+y)$ é par, logo existe um $k$ natural tal que $(x+y) = 2k$ e $xy = pk$. Tendo a soma e o produto desses dois números, podemos determiná-los através da equação do segundo grau $x^2 - 2kx + pk = 0$ cujas raízes são:

$$x = k \pm \sqrt{k^2 - pk}$$

Para que essas raízes sejam números naturais , a expressão $k^2 - pk = k(k-p)$ deverá satisfazer a condição de que os fatores sejam ambos quadrados ou ambos não quadrados:

1. $k$ e $(k-p)$ são, ambos quadrados. Então seja $k = u^2$ e $k - p = v^2$, de onde $p = u^2 - v^2$ ou $p = (u+v)(u-v)$. Portanto $a = (u+v)$ e $b = (u-v)$ são divisores de $p$, tais que $ab = p$. Como $u = \frac{(a+b)}{2}$, temos, nesse caso:

$$k = (\frac{a+b}{2})^2 \quad \text{e} \quad p = ab$$

2. $k$ não é quadrado e $(k-p)$ não é quadrado. dividindo-se $k$ e $(k-p)$ por $d = mdc[k,(k-p)]$, sejam $s$ e $t$ naturais, tais que $k = sd$ e $k-p = td$; como $k(k-p) = std^2$ é um quadrado, então $st$ também é; e como $s$ e $t$ são primos entre si, então $s = \frac{k}{d}$ e $t = \frac{(k-p)}{d}$ também são quadrados . Com isso temos:

$$\frac{k}{d} = (\frac{a+b}{2})^2 \quad \text{e} \quad \frac{p}{d} = ab$$

Em qualquer um dos casos, substituindo os valores de $k$ e $p$ determinados na expressão $x = k \pm \sqrt{k^2 - pk}$, teremos:

$$x = \frac{p}{a}(\frac{a+b}{2}) \quad \text{e} \quad y = \frac{p}{b}(\frac{a+b}{2})$$

Como queríamos demonstrar.

■

**Corolário 1.3.2.** *Se $p$ é um número primo, então a decomposição de $\frac{2}{p}$ em duas frações unitárias distintas é única e:*

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p+1)}{2}}$$

*Demonstração.* Como $p$ é primo, seus únicos divisores são $1$ e $p$. Portanto termos $a = 1$ e $b = p$. Substituindo em $\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2a}} + \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2b}}$ temos o resultado esperado. ■

Outra forma de encontrar frações unitárias bastante interessante e útil é relatado por EVES [9] através do Processo de *Sylvester*[2], no qual qualquer fração da forma $\frac{n}{m}$, com $m>n$ pode ser decomposta em soma de frações unitárias distintas:

1. Ache a maior fração unitária (com menor denominador) que seja menor que a fração dada.

2. Subtraia essa fração unitária da fração dada.

3. Se o resultado não for uma fração unitária ache a maior fração unitária menor que a diferença resultante.

4. Subtraia de novo, e continue o processo até ter com resultado da subtração uma fração unitária.

[2]James Joseph Sylvester, matemático e professor Inglês (1814-1857).

5. Para achar a maior fração unitária menor que uma dada fração, divida o denominador desta última pelo seu numerador e tome o sucessor do quociente como denominador da fração unitária procurada ( ou seja, dado a fração $\frac{a}{b}$ com $b>a$, o denominador da fração unitária procurada será um valor $k$ tal que $k$ seja o sucessor da parte inteira de $b \div a$).

6. O resultado procurado será a soma de todas as frações unitárias encontradas.

Para exemplificar o Processo de *Sylvester* seja a fração $\frac{11}{12}$:

Primeiro vamos determinar a maior fração unitária menor que $\frac{11}{12}$, pelo item 5 temos que $12 \div 11 \approx 1,09090$; dessa forma sua parte inteira é 1, logo seu sucessor é 2, portanto a fração unitária procurada é $\frac{1}{2}$, de fato, $\frac{11}{12} > \frac{1}{2}$.

Pelo item 2, temos: $\frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$, como $\frac{5}{12}$ não é uma fração unitária o processo continua.

Pelo item 3, temos que $12 \div 5 = 2,4$; dessa forma sua parte inteira é 2, logo seu sucessor é 3, portanto a fração unitária procurada é $\frac{1}{3}$, de fato,$\frac{5}{12} > \frac{1}{3}$.

Pelo item 4, temos: $\frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, como $\frac{1}{12}$ é uma fração unitária então o processo termina.

Portanto pelo item 6: $\frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$.

Outro registro de decomposição que aparece no *Papiro de Rhind* que merece destaque é a decomposição das frações do tipo $\frac{n}{10}$, com $n$ de $1$ a $9$.

| $\frac{n}{10}$ | Frações Unitárias | $\frac{n}{10}$ | Frações Unitárias | $\frac{n}{10}$ | Frações Unitárias |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ |
| $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{8}{10}$ | $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ |
| $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$ |

Tabela 2: Decomposição das frações do tipo $\frac{n}{10}$.
Fonte: ([1], p. 9).

No *Papiro de Rhind*, as várias tabelas presentes tinham a função de auxiliar os egípcios nos cálculos e facilitar as operações, o papiro ainda faz referência a tabela de divisão da medida *Hekat* (centésima parte), as tabelas de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ de frações unitárias e a tabela do olho de *Hórus*.[3]

[3]Deus dos Céus na Mitologia Egípcia

> É importante destacar que a maioria dos valores distribuídos em tabelas no papiro de Rhind é resultado das análises dos egípcios no momento em que resolviam parte de seus cálculos por meio de tentativas. Daí, como em determinadas ocasiões eles se deparavam com questões complexas e trabalhosas, anotavam os valores encontrados e organizava-os para posteriores consultas. (AGUIAR [1], p. 21).

## 1.4 Sistema de Operações

Para entender melhor como os egípcios trabalhavam com as frações e como as utilizavam se faz necessário observar como operavam seus cálculos. Segundo ROQUE [21], a soma e a subtração são consequência direta do sistema de numeração decimal, bastando apenas agrupar os símbolos, somar e fazer a devida simplificação, semelhante a soma de números que é feita hoje em dia.

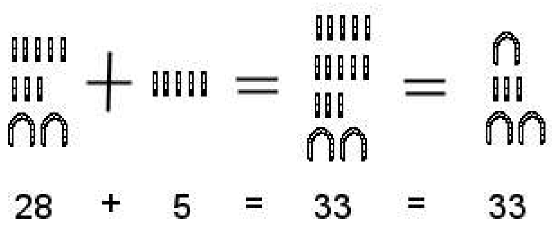



Figura 5: Adição Egípcia.
Fonte: [24].

AGUIAR [1] afirma que a multiplicação e a divisão egípcia se baseavam em duplicações sucessivas. Assim, para determinar a multiplicação ou divisão de dois números segue:

**Algoritmo da multiplicação:** sejam os naturais $x$ e $y$, considere o par $(1, y)$, duplica-se sucessivamente cada número desse par até que a duplicação seguinte do primeiro elemento exceda $x$ . Observando as duplicações formadas, combine os pares de duplicação de tal forma que a soma dos primeiros elementos dos pares escolhidos seja igual a $x$. A resposta procurada é a soma de todos os segundos elementos dos pares escolhidos.

Por exemplo, para multiplicar 14 por 15: pela ideia do algoritmo temos $x = 14$ e $y = 15$ considerando o par $(1, 15)$ temos as seguintes duplicações:

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| 4 | 60 |
| 8 | 120 |
| 16 | 240 |

Com os pares formados, procuramos uma combinação de valores que somando os primeiros elementos dos pares seja igual a $x$, no caso: $14 = 2 + 4 + 8$. A resposta da multiplicação será a soma dos segundos elementos desses pares escolhidos:

$$14 \times 15 = 30 + 60 + 120 = 210$$

**Algoritmo da divisão:** sejam os naturais $x$ e $y$, considere o par $(1, y)$, duplica-se sucessivamente cada número desse par até que a duplicação seguinte do primeiro elemento exceda $y$ . Observando os pares encontrados, escolha pares onde a soma dos segundos elementos seja igual a $x$. A resposta da divisão será a soma dos primeiros elementos dos pares escolhidos.

Considere a divisão, $210 \div 15$, pela ideia do algoritmo termo $x = 210$ e $y = 15$. Considerando o par $(1, 15)$ temos as seguintes duplicações:

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| 4 | 60 |
| 8 | 120 |
| 16 | 240 |

Com os pares formados, procuramos uma combinação de valores que somando os segundos elementos dos pares seja igual a $x$, no caso: $210 = 30 + 60 + 120$. A resposta da divisão será a soma dos primeiros elementos desses pares escolhidos:

$$210 \div 15 = 2 + 4 + 8 = 14$$

As operações de multiplicação e divisão de frações eram realizadas de modo análogo às operações correspondentes com números inteiros, a partir de sequências de duplicações e reduções a metade, assim por exemplo $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, bastando apenas dividir o denominador por $2$, e analogamente temos que $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$, bastando multiplicar o denominador por 2.

Uma particularidade interessante é o fato dos escribas perceberem que existem divisões cujo resultado não é exato, o que pode ser o fato crucial para a determinação de como os egípcios operavam com as frações unitárias e a necessidade de registro em papilos.

Para AGUIAR [1], a metodologia usada pelos egípcios para a divisão não exata, não seguia um algoritmo padrão devido a muitos dos resultados surgirem por meio de tentativas, fato talvez explicado pela dificuldade em duplicar frações com denominadores ímpares.

Quando o denominador for uma potência de $2$, temos o seguinte processo: seja $x \div y$ e considere o par $(1, y)$, onde $y$ é uma potência de $2$. Duplica-se sucessivamente cada número desse par até que a duplicação do segundo elemento do par não ultrapasse $x$, em seguida, reduza a metade esse par sucessivamente até que o segundo elemento do par se torne $1$. Observando os pares encontrados, escolha pares onde a soma dos segundos elementos seja igual a $x$. A resposta da divisão será a soma dos primeiros elementos dos pares escolhidos.

Seja $29 \div 8$, temos que $8$ é uma potência de $2$, pois, $8 = 2^3$, assim, considerando o par $(1, 8)$ temos:

| | |
|---|---|
| $1$ | $8$ |
| $2$ | $16$ |
| $1$ | $8$ |
| $\frac{1}{2}$ | $4$ |
| $\frac{1}{4}$ | $2$ |
| $\frac{1}{8}$ | $1$ |

Temos, observando os pares que $29 = 16 + 8 + 4 + 1$, logo o resultado da divisão $29 \div 8 = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

> A representação egípcia tornava particularmente difícil a duplicação de frações com denominador ímpar. Por exemplo $2 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$, Além de ser uma soma de frações com numerador 1, esse resultado não é único. O resultado das operações $2 \times \frac{1}{n}$ era disposto em uma tabela, e esse registro efetuava uma escolha dentre as possíveis representações. Dessa forma, a duplicação de frações de denominador ímpar, um cálculo "difícil", era realizada apenas uma vez, e sempre que se necessitasse do resultado recorria-se às tabelas. (ROQUE [21], p. 65).

## 1.5 As Frações pelo Mundo

Apesar dos primeiros registros do uso de frações ter ocorrido no Egito, outros povos também desenvolveram sua própria forma de representar as frações, curiosamente em todas elas a ideia central segue do princípio "parte de um todo".

Quase que paralelamente aos egípcios, os babilônios desenvolveram também sua própria forma de representar as frações. Eles trabalhavam com o sistema sexagesimal (base 60) e, ao contrário dos egípcios, usavam a mesma notação tanto para números inteiros quanto para os fracionários, bastante análogo a representação atual.

Outro aspecto interessante é o fato do sistema ser posicional, o que facilitava a representação de números grandes e sua forma de organizar as operações.

Os babilônios por sua vez representavam suas frações na forma $\dfrac{n}{60}$ e $\dfrac{n}{3600}$ e, assim como os egípcios, usavam tabelas (placas de argila em escrita cuneiforme) de números para efetuar os cálculos e trabalhavam com as operações.

Contudo o sistema de representação babilônio apresentava um inconvincente para representar suas frações. Segundo BERLINGHOFF e GOUVÊIA [4], os babilônios não utilizavam um símbolo para representar onde a parte fracionária começava, assim por exemplo, “$30$” na tabela cuneiforme poderia significar “$30$” ou poderia significar $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, dependendo apenas do contexto no qual o número estava inserido para determinar o seu valor.

A aritmética egípcia e babilônia foi absorvida pelos gregos e se espalhou pelo Mediterrâneo, as frações sexagesimais eram usadas comumente em trabalhos técnicos e amplamente usadas na astronomia para definir as medidas em graus, minutos e segundos.

Contudo o uso das frações na matemática do cotidiano tomou um rumo um pouco diferente:

> Na vida diária, entretanto, o povo da Grécia utilizava um sistema muito similar ao sistema egípcio de partes. De fato, a prática de se tratar valores fracionários como soma e produtos de frações unitárias dominou a aritmética de frações nos tempos da Grécia e da Roma e permaneceu até o começo da Idade Média. (BERLINGHOFF e GOUVÊIA [4], p. 88).

Os chineses por sua vez já entendiam as frações da forma $n \times \frac{1}{m}$, onde fixavam uma fração unitária como unidade e dispondo dela $n$ vezes, tornando assim as medições bem mais práticas. O livro *Jiuzhang suanshu*[4] (Os nove capítulos da arte matemática) mostra que a notação e as operações com frações são similares as usadas hoje.

Semelhanças a parte, aparentemente os chineses não trabalhavam com o conceito de fração imprópria (fração da forma $\frac{n}{m}$, com $n > m$). Para contornar esse problema, os chineses transformavam a fração imprópria na sua forma mista, numericamente temos por exemplo: $\frac{9}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Manuscritos Hindus, que datam ao século VII d.C, já faziam referência a notação moderna de fração, eles representavam um número sobre o outro com a diferença de não existir o traço entre eles. O costume Hindu de representar as frações se tornou comum na Europa alguns séculos depois, nesse período foi definido o termo numerador (“contador”- quanto) e denominador (“nomeador”- de que tamanho) pelos escritores da Idade Média.

O uso da barra para separar os números foi introduzido pelos árabes em algum momento do século XII e desde então apareceu na grande maioria dos escritos em latim, sendo omitido no surgimento da imprensa no final do século XV e início do século XVI por dificuldades na impressão e reaparecendo algumas décadas depois.

[4]Considerado um dos livros de matemática mais antigo da China, remonta ao período da Dinastia Zhou entre os séculos II e I a.C.

Com o desenvolvimento do comércio entre os séculos XV e XVI, surgiu o uso de frações com denominadores iguais a $100$ para se trabalhar a taxa de juros em centésimos e a partir daí começou a popularização do uso das frações decimais.

> Tais costumes persistiram nos negócios, reforçados nos Estados Unidos por um sistema monetário baseado em dólares e centavos (centésimos de dólares). Isso garantiu a continuação do uso das porcentagens como ramo especial da aritmética decimal. (BERLINGHOFF e GOUVÊIA [4], p. 91).

As frações decimais já eram conhecidas e usadas pelo Chineses e árabes bem antes dos europeus, contudo o uso dos decimais se popularizou na Europa principalmente com o livro *The Thenth*, de Simon Stevin[5] em 1585, que mostrou como escrever frações na forma de decimais, permitindo que as operações com as frações seguissem os mesmos algoritmos usado pelo números inteiros. Assim, questões como $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ eram tratados como sendo $0,75 + 0,4 = 1,15$.

A forma de representação decimal dos números foi sendo mais valorizada com o tempo pela facilidade na manipulação de operações como a soma e subtração de números, além de permitir uma comparação mais rápida do que a representação em frações. Em contrapartida, operações de multiplicação e divisão utilizando a forma fracionária era mais eficiente e dinâmica, evitando inclusive erros ou dificuldades com as dízimas.

Grandes cientistas como Johannes Kepler[6] e John Napier[7] abriram caminho para a aceitação geral da aritmética decimal, e à partir do incentivo desses cientistas e outros, na Idade Média, foi demarcada a consolidação da utilização das representações fracionárias e decimais dos números, que são utilizados até os dias atuais.

Apesar de não parecer, as frações estão presentes em nosso cotidiano de diversas formas: na econômica, pelo uso constante das porcentagens; na culinária, onde a quantidade de muitos ingredientes é definida por meios de frações e até mesmo no marcador de combustível de um automóvel. Todos esses aspectos enfatizam a necessidade do domínio das frações no ambiente escolar, sendo imprescindível que o aluno esteja cada vez mais apto no trabalho com as frações.

> [...] ao contrário do que muitos pensam, as frações estão presentes em muitas situações do nosso dia a dia e, se não compreendemos bem o seu significado, podemos comprometer a própria construção da escrita decimal dos números racionais. Além disso, em estágios posteriores da escolaridade, as frações são essenciais, como nos cálculos algébricos que surgem inevitavelmente em problemas de geometria ou de grandezas e medidas. (FREIRE [12], p. 108).

[5]Matemático, físico e engenheiro belga (1548 - 1620).
[6]Matemático e astrônomo alemão (1571 - 1630).
[7]Matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo escocês (1550 - 1617).

# 2 O Conjunto dos Números Racionais

Neste capítulo será abordado a construção do conjuntos dos números racionais e suas propriedade algébricas, em vista que tal construção está intrinsecamente relacionada ao conceito de fração e a noção de razão entre dois inteiros. Assim o estudo do conjunto dos número racionais se faz necessário pelo fato de fortalecer o entendimento das frações e de suas propriedades.

Para realizar a construção do conjunto dos números racionais usaremos como base o conhecimento do conjunto dos números inteiros suas definições e propriedades algébricas. Dessa forma para as definições, resultados e demonstrações, utilizaremos as referências: [10], [14] e [16].

## 2.1 Definição dos Números Racionais

Todo número que pode ser escrito como uma fração onde o seu numerador é um número inteiro e o seu denominador é um inteiro diferente de zero é um número racional, sendo representado por $\mathbb{Q}$ (que significa quociente). Para definir o referido conjunto usaremos o conceito de equivalência, como se segue:

Considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) |\ a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*\}$. Definimos a relação: $(a,b) \sim (c,d)$ quando $ad = bc$.

**Definição 2.1.1.** *A relação definida é de equivalência.*

*Demonstração.* Mostraremos que a relação é reflexiva, isto é, $(a,b) \sim (a,b)$. De fato, pois $ab = ba$. Vamos mostrar agora que a relação é simétrica, isto é, se $(a,b) \sim (c,d)$ então $(c,d) \sim (a,b)$. De fato se $(a,b) \sim (c,d)$ temos que $ad = bc$, mas, como os números inteiros são comutativos, temos que $cb = da$, o que significa que $(c,d) \sim (a,b)$. Quanto a propriedade transitiva devemos mostrar que se $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$ então $(a,b) \sim (e,f)$. De fato, multiplicando a equação $ad = bc$ por $(f)$ e a equação $cf = de$ por $(b)$, obtermos $adf = bcf$ e $bcf = bde$, de onde segue que $adf = bde$. Cancelando o fator $d \neq 0$, obtemos o que queríamos.

■

**Definição 2.1.2.** *Dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ (que se lê: $a$ sobre $b$) a classe de equivalência do par $(a,b)$ pela relação de equivalência.*

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (x,y) \sim (a,b)\}$$

**Propriedade 2.1.1.** *(Propriedade fundamental das frações) Se $(a,b)$ e $(c,d)$ são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.*

*Demonstração.* Temos, pelo teorema $A.0.1$, item (2) (anexo A):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc,$$

provando o resultado. ■

**Definição 2.1.3.** *Denotamos por $\mathbb{Q}$, e denominamos conjunto dos números racionais, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é:*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$$

## 2.2 Operações e Propriedades Algébricas nos Racionais

Definiremos agora as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, suas propriedades algébricas e mostrando que $\mathbb{Q}$ é um *corpo*. Definiremos também, com base nestas propriedades, a subtração e a divisão em $\mathbb{Q}$, além de outras definições e proposições que merecem destaque.

**Definição 2.2.1.** *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais , isto é , elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos as operações de adição e de multiplicação, respectivamente, por:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (2)$$

*Denotamos (2) também por $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$*

Observamos que as operações definidas em $\mathbb{Q}$ dependem das operações já conhecidas em $\mathbb{Z}$. Nas igualdades (1) e (2) acima, os sinais de $(+)$ e $(\cdot)$ no primeiro membro são as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{Q}$, respectivamente e o sinal de $(+)$ e $(\cdot)$ no segundo membro são as operações já conhecidas em $\mathbb{Z}$. No texto que segue, o contexto deixará claro qual operação estamos nos referindo.

Essas operações não dependem do representante da classe de equivalência do número racional.

**Propriedade 2.2.1.** *Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ (Frações equivalente), teremos:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} \quad (3) \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} \quad (4)$$

*Demonstração.* Se $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$, temos que mostrar que a soma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$ são iguais, ou seja que $(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$, isto é, $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$, ou, $(ab')(dd') + (bb')(cd') = (a'b)(dd') + (bb')(c'd)$, o que segue da hipótese, multiplicando a primeira equação por $dd'$ e a segunda por $bb'$ e somando-as. Analogamente, para o produto temos que mostrar que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ e $\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} = \frac{a'c'}{b'd'}$ são iguais, ou seja $a'c'bd = acb'd'$ ou seja $(a'b)(c'd) = (ab')(cd')$, que segue imediatamente da hipótese. ■

**Teorema 2.2.1.** *O conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações de adição e multiplicação definidas anteriormente é um corpo, isto é, existe um elemento neutro aditivo que é o $\frac{0}{1}$ e um elemento neutro multiplicativo que é o $\frac{1}{1}$. Para elementos arbitrários $r, s, t \in \mathbb{Q}$, vale as seguintes propriedades:*

1. *(Comutativa da soma) $r + s = s + r$;*
2. *(Associativa da soma) $(r + s) + t = r + (s + t)$;*
3. *(Elemento neutro da soma) $r + \frac{0}{1} = r$;*
4. *(Elemento simétrico da soma) Existe $r'$ tal que $r + r' = \frac{0}{1}$*
5. *(Comutatividade do produto) $rs = sr$;*
6. *(associatividade do produto) $(rs)t = r(st)$;*
7. *(Elemento neutro do produto) $r \cdot \frac{1}{1} = r$;*
8. *(Elemento inverso multiplicativo) Se $r \neq \frac{0}{1}$, existe $r''$ tal que $rr'' = \frac{1}{1}$;*
9. *(Distributiva da produto com relação a soma) $r(s + t) = rs + rt$.*

*Demonstração.* Para demonstrar (1), sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, onde $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Temos então:

$$r + s = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad s + r = \frac{cb + da}{db}$$

A igualdade $r + s = s + r$ segue da comutatividade da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Para demonstrar (2), sejam $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, onde $a, c, e \in \mathbb{Z}$ e $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$. Temos então:

$$(r + s) + t = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = (\frac{ad + bc}{bd}) + \frac{e}{f} = \frac{f(ad + bc) + e(bd)}{(bd)f}$$

$$r + (s + t) = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} + \frac{(cf + de)}{df} = \frac{a(df + b(cf + de))}{b(df)}$$

A igualdade segue da comutatividade da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Para demonstrar (3), seja $r = \frac{a}{b}$. Temos então:

$$r + \frac{0}{1} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a + 0}{b} = \frac{a}{b} = r.$$

O resultado segue dos elementos neutros aditivo e multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

Para demonstrar (4), seja $r = \frac{a}{b}$ e tomamos $r' = -r = (\frac{-a}{b})$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Segue que:

$$r + r' = r + (-r) = \frac{a}{b} + (\frac{-a}{b}) = \frac{ab + (-ab)}{bb} = \frac{ab - ab}{bb} = \frac{0}{bb} = 0 = \frac{0}{1}$$

O resultado segue pelo simétrico aditivo em $\mathbb{Z}$. Como não haverá perigo de confusão utilizaremos o símbolo $0$ tanto para o zero de $\mathbb{Z}$ como o zero de $\mathbb{Q}$, ([16]), assim $0 = \frac{0}{1}$

Para demonstrar (5), sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, onde $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Temos então:

$$rs = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$sr = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$$

A igualdade segue da comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Para demonstrar (6), sejam $r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, onde $a, c, e \in \mathbb{Z}$ e $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$. Temos então:

$$(rs)t = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = (\frac{ac}{bd}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{(ac)e}{(bd)f}$$

$$r(st) = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot (\frac{ce}{df}) = \frac{a(ce)}{b(df)}$$

A igualdade segue da comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Para demonstrar (7), seja $\frac{a}{b}$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Segue que:

$$r \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} = r$$

O resultado segue do elemento neutro multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

Para demonstrar (8), seja $r = \frac{a}{b}$, com $r \neq \frac{0}{1}$, tomemos $r'' = \frac{b}{a}$ onde $a \in \mathbb{Z}^*$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, dai Segue que:

$$rr'' = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1 = \frac{1}{1}$$

Como não haverá perigo de confusão utilizaremos o símbolo $1$ para denotar tanto o neutro multiplicativo de $\mathbb{Z}$ como o de $\mathbb{Q}$, ([16]), assim $1 = \frac{1}{1}$.

Para demonstrar (9), sejam $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, onde $a, c, e \in \mathbb{Z}$ e $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$. Temos então:

$$r(s+t) = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot (\frac{cf + de}{df}) = \frac{a(cf+de)}{b(df)}$$

.

$$rs + rt = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{acbf + aebd}{bdbf} = \frac{ab(cf + ed)}{b(dbf)} = \frac{a(cf+de)}{b(df)}$$

■

**Proposição 2.2.1.** *Unicidade do elemento neutro da adição.*

*Demonstração.* Suponha que exista outro elemento neutro, denotado por $e$ tal que $r + e = e + r = r$, com $r, e \in \mathbb{Q}$. Temos então que $\frac{0}{1} = \frac{0}{1} + e$, mas como $e$ também é neutro, então segue que $e = e + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + e$, logo $e = \frac{0}{1}$. Portanto $\mathbb{Q}$ possui um único elemento neutro denotado por $\frac{0}{1}$. Podemos também usar a notação equivalente $\frac{0}{m}$, com $m \in \mathbb{Z}^*$. ■

**Proposição 2.2.2.** *Unicidade do elemento neutro da multiplicação.*

*Demonstração.* Suponha que exista outro elemento neutro, denotado por $e'$ tal que $r \cdot e' = e' \cdot r = r$, com $r, e' \in \mathbb{Q}$. Temos então que $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot e'$, mas como $e'$ também é neutro, então segue que $e' = e' \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot e'$, logo $e' = \frac{1}{1}$. Portanto $\mathbb{Q}$ possui um único elemento neutro denotado por $\frac{1}{1}$. Podemos também usar a notação equivalente $\frac{m}{m}$, com $m \in \mathbb{Z}^*$. ■

**Proposição 2.2.3.** *Unicidade do simétrico aditivo.*

*Demonstração.* Suponha que exista outro elemento simétrico aditivo, ou seja, para $r \in \mathbb{Q}$, então existem $r'_1, r'_2 \in \mathbb{Q}$, tais que $r + r'_1 = 0$ e $r + r'_2 = 0$. Temos então, pela associatividade e a comutatividade da adição, juntamente com o fato de ($0 = \frac{0}{1}$) ser o elemento neutro, que:

$$r'_1 = r'_1 + 0 = r'_1 + (r + r'_2) = (r'_1 + r) + r'_2 = (r + r'_1) + r'_2 = 0 + r'_2 = r'_2$$

Portanto, o racional $r$ possui um único inverso aditivo, o qual será denotado por $-r$, segue que $r + (-r) = \frac{0}{1}$. ■

**Proposição 2.2.4.** *Unicidade do simétrico multiplicativo.*

*Demonstração.* Suponha que exista outro elemento simétrico multiplicativo, ou seja, para $r \in \mathbb{Q}, r \neq \frac{0}{1} = 0$, existem $r''_1, r''_2 \in \mathbb{Q}$, tais que $r \cdot r''_1 = \frac{1}{1}$ e $r \cdot r''_2 = \frac{1}{1}$. Temos então, pela associatividade e a comutatividade da multiplicação, juntamente com o fato de $(1 = \frac{1}{1})$ ser o elemento neutro, que:

$$r''_1 = r''_1 \cdot 1 = r''_1 \cdot (r \cdot r''_2) = (r''_1 \cdot r) \cdot r''_2 = (r \cdot r''_1) \cdot r''_2 = 1 \cdot r''_2 = r''_2 \cdot 1 = r''_2$$

Portanto, o racional $r$, com $r \neq \frac{0}{1}$, possui um único inverso multiplicativo, o qual será denotado por $r^{-1}$, segue que $r \cdot r^{-1} = \frac{1}{1}$. ■

**Definição 2.2.2.** *A subtração em $\mathbb{Q}$, denotada por $(-)$, é a operação definida da seguinte forma: se $r, s \in \mathbb{Q}$, então:*

$$s - r = s + (-r)$$

*Assim, a subtração $s - r$ é definida como a soma de $s$ com o simétrico de $r$.*

**Proposição 2.2.5.** *Se $r, s \in \mathbb{Q}$, então:*

1. $(-r)s = -rs = r(-s)$;
2. $(-r)(-s) = rs$.

*Demonstração.* Sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$:

Para (1) temos: $(-r)s = (-\frac{a}{b})\frac{c}{d} = -\frac{a}{b}\frac{c}{d} = -rs = -\frac{c}{d}\frac{a}{b} = (-\frac{c}{d})\frac{a}{b} = (-s)r = r(-s)$.

Para (2) temos:

$(-r)(-s) = (-\frac{a}{b})(-\frac{c}{d}) = -\frac{a}{b}(-\frac{c}{d}) = -(-\frac{a}{b})\frac{c}{d} = -(-\frac{ac}{bd}) = -(-(\frac{ac}{bd})) = \frac{ac}{bd} = rs$ ■

**Definição 2.2.3.** *Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ com $s \neq 0$. Temos que: $r \div s = r \cdot s^{-1}$.*

**Proposição 2.2.6.** *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então $\frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{a}{b}$.*

*Demonstração.* Pela definição anterior, $\frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. ■

**Proposição 2.2.7.** *Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, com $\frac{c}{d} \neq \frac{0}{1}$ então $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.*

*Demonstração.* Temos que: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. ■

Uma outra notação para $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ é $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, muito usual em textos elementares de matemática.

**Proposição 2.2.8.** *(Cancelamento aditivo e multiplicativo) Sejam $r, s, t \in \mathbb{Q}$. Então vale a relação abaixo:*

1. $s + r = t + r \Leftrightarrow t = r$
2. *Para* $r \neq \frac{0}{1}$; $sr = tr \Leftrightarrow s = t$

*Demonstração.* Para (1), sejam $r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} s + r = t + r \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{e}{f} + \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{cb + ad}{bd} = \frac{be + af}{bf} \\ &\Leftrightarrow \quad bf(cd + ad) = bd(be + af) \Leftrightarrow bfcb + bfad = bdbe + bdaf \\ &\Leftrightarrow \quad b(fcb + fad) = b(dbe + daf) \Leftrightarrow fcb + fad = dbe + daf \\ &\Leftrightarrow \quad fcb = dbe \Leftrightarrow fc = de \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow s = t. \end{aligned}$$

Para (2) sejam $r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$ e $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} sr = tr \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{ca}{db} = \frac{ea}{fb} \Leftrightarrow (ca)(fb) = (ea)(db) \\ &\Leftrightarrow \quad cf = ed \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow s = t \end{aligned}$$

■

Outra forma de demonstrar a Proposição 2.2.8 é somar o simétrico aditivo de $r$ a ambos os membros em (1) e, analogamente em (2), multiplicar pelo simétrico multiplicativo de $r$.

**Proposição 2.2.9.** *Para $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que:* $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = -(\frac{-a}{-b})$.

*Demonstração.* Para $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, usando as propriedades dos inteiros temos que $(-a)(-b) = ab = -(a)(-b) = -(-a)(b)$, provando assim a proposição. ■

## 2.3 Relação de Ordem no Conjunto do Números Racional

Definiremos agora as relação de $>$, $\geq$, $<$, e $\leq$ entre frações, abordando suas propriedades e principais resultados.

**Definição 2.3.1.** *Sejam* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *números racionais com* $b, d > 0$. *Escrevemos* $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ *quando* $ad \leq bc$ *e dizemos que* $\frac{a}{b}$ *é menor do que ou igual a* $\frac{c}{d}$.

**Teorema 2.3.1.** *A relação* $\leq$, *está bem definida e é uma relação de ordem em* $\mathbb{Q}$.

*Demonstração.* Vamos mostrar que a relação é bem definida: Sejam $\frac{a}{b'}, \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d}$ e $\frac{c'}{d'} \in \mathbb{Q}$ e $b, b', d, d' > 0$. Seja $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, isto é $ab' = ba'$. Temos que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc$, e, como $b' > 0$, obtermos $ab'd \leq bcb'$. Daí, pela igualdade $ab' = ba'$ temos que $ba'd \leq bcb'$ de onde temos que $a'd \leq cb'$, ou seja, $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d}$. Do mesmo modo, como: $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow cd' = c'd$, $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow a'd \leq cb' \Rightarrow a'dd' \leq cb'd' \Rightarrow a'dd' \leq c'db' \Rightarrow a'd' \leq c'd' \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

Logo temos: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$ portanto $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

1. Reflexiva: se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, temos que $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, pois $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$;

2. Simétrica: Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, temos que $ad \leq bc$ e $cb \leq ad$, pela tricotomia em $\mathbb{Z}$, temos $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

3. Transitiva: se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, com $b, d, f > 0$ e $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, temos $ad \leq bc$ e $cf \leq ed$. Multiplicando $f$ na primeira desigualdade e $b$ na segunda desigualdade, obtemos $adf \leq bcf$ e $bcf \leq edb$. Pela transitividade em $\mathbb{Z}$ temos $adf \leq bed \Rightarrow af \leq be \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$

∎

**Proposição 2.3.1.** *Se* $r, s, t \in \mathbb{Q}$, *são válidos os itens seguintes:*

1. $r \leq s \Leftrightarrow r + t \leq s + t$;

2. *se* $r \leq s$ *e* $t \geq 0$ *então* $rt \leq st$;

3. *se* $r \leq s$ *e* $t \leq 0$ *então* $rt \geq st$;

*Demonstração.* Sejam $r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, com $b, d, f > 0$.

Para (1) temos:

$$\begin{aligned} r \leq s \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad &\Leftrightarrow \quad da \leq bc \Leftrightarrow daf \leq bcf \Leftrightarrow daf + dbe \leq bcf + dbe \\ &\Leftrightarrow \quad d(af + be) \leq b(cf + de) \Leftrightarrow df(af + be) \leq bf(cf + de) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{af + bc}{bf} \leq \frac{cf + de}{df} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \Leftrightarrow r + t \leq s + t. \end{aligned}$$

Para (2) temos que $t = \frac{e}{f}$ e $t \geq \frac{0}{1}$ logo $\frac{e}{f} \geq \frac{0}{1} \Rightarrow e \geq 0$.

$$\begin{aligned} r \leq s \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad &\Rightarrow \quad ad \leq cb \Rightarrow aedf \leq cebf \\ &\Rightarrow \quad \frac{ae}{bf} \leq \frac{ce}{df} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{e}{f} \leq \frac{c}{d}\frac{e}{f} \Rightarrow rt \leq st. \end{aligned}$$

Para (3) temos que $t = \frac{e}{f}$ e $t \leq \frac{0}{1}$ logo $\frac{e}{f} \leq \frac{0}{1} \Rightarrow e \leq 0$.

$$\begin{aligned} r \leq s \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad &\Rightarrow \quad ad \leq cb \Rightarrow adf \leq cbf \\ &\Rightarrow \quad aedf \geq cebf \quad (e \leq 0) \\ &\Rightarrow \quad \frac{ae}{bf} \geq \frac{ce}{df} \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{e}{f} \geq \frac{c}{d}\frac{e}{f} \Rightarrow rt \geq st. \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.3.2.** *(Tricotomia em $\mathbb{Q}$). Dados $r, s \in \mathbb{Q}$, uma, e apenas uma, das situações seguintes ocorre: $r = s$, ou $r < s$, ou $s < r$.*

*Demonstração.* sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$ com $b, d > 0$. Pela tricotomia em $\mathbb{Z}$, ou $ad = bc$, caso em que $r = s$, ou $ad < bc$, caso em que $r < s$, ou $bc < ad$, caso em que ocorre $s < r$. Além disso, só uma delas pode ocorrer ■

O conhecimento algébrico da formação e construção do conjunto dos números racionais é muito importante para o próprio entendimento do conceito e uso das frações, tanto para docentes, discentes ou mesmo pessoas interessadas.

Nesta perspectiva será disponibilizada na parte de anexos outras propriedades muito relevantes e igualmente importantes do conjunto dos números racionais: como enumerabilidade, corpo, corpo arquimediano e imersão.

Apesar desses tópicos não serem trabalhado no EF ou mesmo no EM, seu conhecimento é muito pertinente, sendo um ótimo material de consulta para professores, permitindo inclusive trabalhar de forma mais simples e didática questões com a origem matemática dos números racionais e as aplicações das suas propriedades, podendo ser usado também para responder questionamentos de alunos cujo o foco fuja dos conteúdos do EF e EM.

Com base nesse fato, esses tópicos também são muito pertinentes para os alunos do Ensino Superior (ES), sendo uma ótima fonte de pesquisa para as estruturas algébricas e analíticas do conjunto dos números racionais e os aspectos referentes às suas demonstrações.

# 3 Fundamentação Teórica

## 3.1 O Estudo das Frações

A matemática se desenvolveu ao longo dos tempos através da necessidade de resolver problemas, buscando a construção de respostas tanto de ordem prática quanto teórica. Sua aprendizagem e transmissão se difundiu igualmente no decorrer da história do homem se tornando um elo inerente e indissociável da própria característica humana.

A busca pela assimilação do conhecimento matemático tem seu ápice em nossa era moderna, se tornando um poderoso recurso para compreensão das mudanças e transformações ao nosso redor. Neste sentido, os PCNs [6] têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate sobre o ensino e promover o devido referencial norteador para o desenvolvimento do conhecimento matemático na ótica cidadã, focando as relações sociais, culturais e o mundo do trabalho

Neste pressuposto, o ensino de matemática emerge como ferramenta para a compreensão de diversos aspectos do mundo (o espaço, as formas, as grandezas, os números, as operações,...), na perspectiva de instigar a curiosidade, o espírito investigativo e promover a capacidade para análise e resolução de situações problema.

Nesta vertente, de acordo com os PCNs [6], o estudo das frações está atrelado ao conceito de número e operações sendo considerado um assunto de carácter básico de suma importância onde seu ensino começa nos anos iniciais do EF se estendendo e aprofundando progressivamente até o final desse ciclo (4º ao 9º ano).

Nos anos finais do EF, o aluno deve reconhecer as diferentes representações dos números racionais, fazer cálculos com frações, abordar e interpretar situações-problemas. Assim, RABELO [20] cita a matriz de referência de matemática para o EF e seus respectivos descritores:

- Identificar e localizar os números racionais na reta numérica.
- Reconhecer as diferentes representações de um número racional: frações (próprias, impróprias e aparentes), números decimais finitos, números decimais infinitos (periódicos) e utilização das porcentagens.
- Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
- Identificar frações equivalentes.
- Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais.

- Resolver problemas com números decimais.
- Resolver problemas que envolvam porcentagem.
- Resolver problemas que envolvam variações proporcionais, diretas ou inversas entre as grandezas.

Os descritores expressam, segundo RABELO [20], os saberes mais significativos no processo de aprendizagem adquiridos pelos alunos, mostrando os pontos cruciais a serem alcançados. De fato, o ponto culminante é saber se o aluno realmente domina o conteúdo lecionado, suas aplicações e o relacionando diretamente com outras temáticas.

## 3.2 Dificuldades no Ensino de Fração

O ensino de matemática normalmente é tido como difícil e acessível apenas a uns poucos “iluminados”. Paralelamente a isso, o estudo das frações não escapa a essa realidade. A construção dos números racionais está intrinsecamente ligada ao conceito de fração, sendo inclusive considerado uma temática de difícil assimilação para os alunos.

Para os PCNs [6], uma explicação possível para as dificuldades encontradas seria o fato da aprendizagem dos números racionais gerarem uma ruptura das ideias construídas a partir da noção de número natural. Dessa forma os alunos acabam encontrando algumas dificuldades:

- A comparação entre racionais: $3 > 2$, contudo parece contraditório afirmar que $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.
- Cada número racional pode ser representado de diferentes formas: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ...$
- A ideia de sucessor e antecessor não é definida nos racionais.
- Perceber que entre dois racionais quaisquer sempre é possível encontrar outro.
- Perceber que os naturais são insuficientes para resolver determinadas situações problemas.

Ainda segundo os PCNs [6], quando os alunos são apresentados ao conceito de frações e começam a definir suas operações, normalmente associam elas como sendo um conjunto de dois Números naturais separados por um traço e assim utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos de números naturais com as frações.

O próprio conceito de fração não é trabalhado corretamente, sendo apresentado de forma descontextualizada, puramente abstrata e sem significado concreto para o aluno gerando assim um deficit conceitual com graves consequências. Dessa forma, o ensino das frações se limita apenas a reprodução de notações, nomenclaturas e classificações sem significado para o aluno.

> De que serve, por exemplo, o aluno saber diferenciar e nomear frações próprias e impróprias, homogêneas e heterogêneas, ou frações decimais e não decimais? Tais classificações costumam ser úteis apenas para a enunciação de regras e a separação de procedimentos em casos a serem decorados. Os conceitos acabam não sendo focalizados como um todo. (FREIRE [12], p. 115).

Paralelamente ao problema conceitual, temos que grande parte dos estudantes apresentam extrema dificuldade em realizar cálculos e operações com frações, particularmente os alunos dos anos finais do EF. Consequência da não assimilação e generalização das regras operatórias de forma mecânica e sem contextualização.

Outro ponto que merece grande destaque é o próprio estudo das frações no ambiente escolar. A noção de fração é apresentada aos alunos no 4º ano, reforçada no 5º ano e aprofundada em sua totalidade no 6º ano do EF, e depois são esquecidas ou desprezadas nos anos subsequentes, deixando o aluno com quase nenhum contato com as frações. A partir daí, os alunos "esquecem" como manusear e operar as frações.

No desenvolvimento de outros conteúdos no ensino de matemática, os professores, durante a elaboração dos planos e atividades que serão trabalhados em sala, excluem o cálculo com frações, preferindo a formatação dos problemas apenas para valores inteiros.

Um dado que não pode ser desconsiderado, são os alunos que já trazem consigo as dificuldades ou ausência de aprendizado, principalmente no 4º ano e 5º ano do EF. A principal relevância desse ponto levantado é que essas dificuldades não são superadas e se perpetuam ao longo de toda a vida escolar.

O mesmo cenário é visto no EM, alunos com pouco domínio no estudo das frações, professores reclamando da falta de domínio nos assuntos da matemática básica aprendida no EF, que compromete o desenvolvimento dos novos conteúdos.

NOVAK [18] considera que a divisão e multiplicação de frações estão entre os conteúdos simples mais "esquecidos" no EM pelos alunos e faz os seguintes apontamentos:

- O fato do professor não perceber que o aluno não compreendeu direito o conteúdo por considerá-lo óbvio, e assim deixando de intervir no momento oportuno.

- A constatação de que a maioria dos alunos não tem interesse em estudar e não tomam a iniciativa para reverem os conteúdos que apresentam dificuldade, especialmente os considerados como básicos.

## 3.3 Estratégias para a Aprendizagem

A constante necessidade em reforçar e consolidar o conteúdo matemático aprendido tem sido um dos grandes desafios da atualidade. A própria constatação de que boa parte dos alunos avançam ao longo da vida escolar acumulando deficiências e fracassos é preocupante.

O conhecimento matemático passou a ser apenas fragmentos disjuntos e emaranhados de saber, formando um mosaico confuso e sem nenhuma conexão, gerando frustração, desinteresse e antipatia pela disciplina. Particularmente, no estudo das frações essa realidade é mais cruel. Alunos sem base conceitual, com graves deficiências nas operações e sem qualquer preparo para a resolução de problemas.

Para superar essas dificuldades, acreditamos que é crucial desenvolver e formar uma base conceitual sólida, permitindo transcender o significado e apropriar o conceito de forma clara, permitindo a interconexão com os demais conceitos. Para FREIRE [12], o conceito de fração está atrelado a mais de um tipo de aplicação, e deve ser apresentado gradativamente em atividades diversificadas com ampliação dos tipos de problemas. Assim se destaca a importância de ver:

- As frações como parte-todo de grandezas contínuas.
- As frações como parte-todo de grandezas discretas.
- As frações como razão de grandezas discretas.
- As frações como razão de grandezas contínuas.
- As frações como resultado de uma divisão e como número.

Ainda de acordo com FREIRE [12], o estudo das frações deve garantir que os alunos tenham a oportunidade de explorar a divisão, tanto no sentido de repartir quanto no sentido de medida, explorando os significados das operações e o cálculo por processos operatórios espontâneos e por algoritmos formais.

Uma das maneiras de promover essa exploração de significados é através da resolução de problemas, assim o conhecimento matemático ganha significado quando provocamos situações desafiadoras, desenvolvendo estratégias e buscando a resolução.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim

> os alunos terão a oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da matemática, do mundo em geral e desenvolver a autoconfiança . (PCNs [6], p. 40).

No ensino de matemática os problemas são imprescindíveis, pois possibilitam ao aluno refletir e pensar por si próprio, permitindo o exercício do raciocínio logico, formulação de estratégias e o aprofundamento de técnicas e conceitos. A abordagem correta da resolução de problemas em sala de aula encoraja o aluno a questionar o problema e, em consequência, sua própria resposta, criando um ambiente propício para formulação de hipótese, conjecturas e generalizações.

> A opção pelo foco na resolução de problemas está relacionada com o fato de essa metodologia possibilitar o estabelecimentos de relações, o desenvolvimento de capacidades de argumentação, a validação de métodos e processos, além de estimular formas de raciocínio que incluem dedução, indução, inferência e julgamento. (RABELO [20], p. 14).

Dentre todas as vantagens do uso da resolução de problemas, acreditamos que a principal é o fato do aluno se tornar agente de sua própria aprendizagem, criando suas próprias estratégias e métodos. Para tanto é importante criar a cultura da resolução de problemas, desenvolver o espírito investigativo e promover a devida orientação das etapas e argumentos para os alunos. Neste sentido, Polya [18] identificou quatro etapas para resolução de problemas:

- **Compreensão do problema**: Entendimento do enunciado permitindo ao aluno identificar a incógnita, os dados, as condições, a necessidade de construir um figura ou outra estrutura.
- **Inversão de Estratégia**: Encontrar conexões entre os dados e a incógnita, estabelecendo um plano de ação, buscando ligações com problemas auxiliares, exercícios, teoremas, fórmulas, casos particulares, conhecimentos prévios ou outras estruturas que possam ajudar. Construindo assim uma estratégia que facilite e permita o desenvolvimento da solução.
- **Execução**: Colocar em prática o que foi definido anteriormente em busca da solução. Caso a estratégia adotada não produza frutos é necessário rever os dados e definir uma nova abordagem.
- **Revisão**: Verificar a solução encontrada e os argumentos usados permitindo a reflexão dos passos adotados e a validade da resposta.

Com o problema resolvido e sua solução encontrada chegamos ao ápice, ponto mais importante do processo de resolução de problemas, onde, com o devido estudo e aprofundamento, podemos aperfeiçoar e melhorar a compreensão da solução.

> Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA [19], p. 10).

Outro ponto que merece destaque e que deve ser trabalhado junto com a resolução de problemas no estudo das frações é o uso de materiais concretos. Dentre os diversos matérias existentes no mercado, destacamos o material dourado [5] e a escala de Cuisenaire [15].

- **Material dourado:** criado por Maria Montessori[8], constituído por cubinhos, barras, placas e um cubo "grande" de madeira. Cada peça apresenta os seguintes valores: 1 cubinho representa 1 unidade; 1 barra equivale a 10 cubinhos; 1 placa equivale a 10 barras ou 100 cubinhos e o cubo "grande" equivale a 10 placas ou 100 barras ou 1000 cubinhos.

Figura 6: Material dourado.
Fonte: Próprio autor.

- **Escala de Cuisenaire:** criado por Georges Cuisinaire Hottelet[9], sendo constituído por 10 barras de madeira em forma de prisma com medidas proporcionais de 1 a 10 sendo cada barra de uma cor.

Figura 7: Escala de Cuisenaire.
Fonte: Próprio autor.

[8]Médica, educadora e pedagoga italiana (1870 - 1952).
[9]Professor de aritmética belga (1891 - 1980).

Estes materiais são muito valorizados pelos professores por seu caráter motivador e pela necessidade crescente de se ensinar matemática à partir do concreto, propiciando assim uma assimilação mais clara de conceitos e propriedades.

Contudo, a introdução desses materiais nas aulas deve ser feita de forma cuidadosa, ponderada e avaliando a real necessidade de seu uso. Para FIORENTINI e MIORIM [11], os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano, pois a simples introdução deles no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem.

Na realidade, a aprendizagem dos conceitos e propriedades matemáticas causada pelo uso de materiais não reside em sua estrutura física ou em sua manipulação, mas na reflexão, análise e elaboração de estratégias impostas sobre a ação manipulativa fazendo o aluno reconhecer relações que o leve a pensar, analisar e agir.

> Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um aprender mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um “aprender” que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (FIORENTINA e MIORIM [11], p. 10).

Assim, o uso de material concreto pode ajudar na aprendizagem, mas que seja introduzido de forma correta, onde situações de resolução de problemas implique na utilização desses objetos, evitando assim que a resolução de problemas e o uso de material manipulado percam sua eficácia.

Por conseguinte, devemos evitar que resolução de problemas se resuma a um simples exercício de fixação com uma abordagem primária e sem qualquer relevância concreta. Assim como o uso de materiais, sem a contextualização adequada acabará não sendo proveitoso.

# 4 Situação Atual da Assimilação do Conceito de Frações com Alunos do EF e EM da Rede Pública de Prado - BA

Neste capítulo, mostraremos os resultados de uma pesquisa realizada com alunos e professores da rede pública de Prado, com o objetivo de verificar o grau de assimilação no estudo das frações. Discutiremos também, com base nos resultados, como anda a real situação do ensino das frações.

Para tanto, a pesquisa foi realizada em dois momentos: o primeiro, com uma pesquisa diagnóstico com os alunos para verificar o grau de conhecimento deles; o segundo, uma entrevista com os professores de matemática para discutir os resultados.

## 4.1 Alunos

A pesquisa diagnóstico foi formada por 5 questões (ver apêndice A) e teve como objetivo explicitar o nível de conhecimento no estudo de frações e o nível de domínio dos alunos com relação ao conceito, representação, nomenclatura e operação. Para tanto foram entrevistados 400 alunos da rede pública do município de Prado - BA, tendo sua aplicação na primeira quinzena de setembro de 2016.

No EF foram 260 alunos pesquisados do Colégio Municipal Anísio Teixeira, sendo escolhidas duas turmas de cada ano, (6º ao 9º ano e Educação de Jovens e Adultos (EJA)), totalizando 10 turmas pesquisadas.

No EM foram 140 alunos pesquisados do Colégio Estadual Homero Pires sendo escolhidas duas turmas de cada ano (1º ao 3º ano), totalizando 6 turmas entrevistadas.

As questões propostas foram escolhidas de forma a terem um nível fácil de assimilação e resolução, permitindo assim que todos os alunos pudessem, independente do ano que se encontravam (6º ano do EF ao 3º ano do EM), responderem o questionário com total tranquilidade.

As Tabelas 3, 4 e 5 mostradas a seguir apresentam, respectivamente, o quantitativo e percentual de acertos no resultado da pesquisa aplicadas aos alunos do EF e EM:

| Turmas do EF | 6º ano A | 6º ano B | 7º ano A | 7º ano D | 8º ano A |
|---|---|---|---|---|---|
| Total de alunos | 28 | 24 | 25 | 23 | 30 |
| Acerto: 1ª Questão | 27 | 24 | 25 | 23 | 30 |
| Acerto: 2ª Questão | 20 | 19 | 24 | 22 | 25 |
| Acerto: 3ª Questão | 28 | 24 | 25 | 23 | 28 |
| Acerto: 4ª Questão (a) | 10 | 06 | 00 | 02 | 00 |
| Acerto: 4ª Questão (b) | 10 | 01 | 00 | 02 | 00 |
| Acerto: 4ª Questão (c) | 10 | 07 | 13 | 15 | 09 |
| Acerto: 4ª Questão (d) | 11 | 10 | 13 | 19 | 05 |
| Acerto: 5ª Questão | 19 | 17 | 02 | 00 | 00 |
| Todas as Questões | 04 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| Turmas do EF | 8º ano B | 9º ano A | 9º ano B | EJA (1) 6º/7º | EJA (2) 8º/9º |
| Total de alunos | 29 | 25 | 24 | 20 | 32 |
| Acerto: 1ª Questão | 28 | 25 | 23 | 20 | 30 |
| Acerto: 2ª Questão | 19 | 15 | 17 | 20 | 19 |
| Acerto: 3ª Questão | 23 | 25 | 23 | 19 | 28 |
| Acerto: 4ª Questão (a) | 02 | 02 | 00 | 01 | 00 |
| Acerto: 4ª Questão (b) | 01 | 01 | 00 | 01 | 00 |
| Acerto: 4ª Questão (c) | 12 | 17 | 07 | 09 | 14 |
| Acerto: 4ª Questão (d) | 13 | 18 | 11 | 06 | 14 |
| Acerto: 5ª Questão | 02 | 12 | 03 | 01 | 01 |
| Todas as Questões | 01 | 00 | 00 | 00 | 00 |

Tabela 3: Quantitativo de acertos no EF.
Fonte: Próprio autor.

Com base nos dados fornecidos pela tabela 3, temos os seguintes percentuais para os acertos feitos pelos alunos do EF:

| | Total | Acertos (%) |
|---|---|---|
| Total de alunos | 260 | |
| Acerto: 1ª Questão | 255 | $\approx 98,07$ |
| Acerto: 2ª Questão | 200 | $\approx 76,92$ |
| Acerto: 3ª Questão | 246 | $\approx 94,61$ |
| Acerto: 4ª Questão (a) | 23 | $\approx 08,84$ |
| Acerto: 4ª Questão (b) | 16 | $\approx 06,15$ |
| Acerto: 4ª Questão (c) | 113 | $\approx 43,46$ |
| Acerto: 4ª Questão (d) | 120 | $\approx 46,15$ |
| Acerto: 5ª Questão | 57 | $\approx 21,92$ |
| Todas as Questões | 05 | $\approx 01,92$ |

Tabela 4: Percentuais de acertos no EF.
Fonte: Próprio autor.

| Turmas do EM | 1º ano A | 1º ano H | 2º ano D | 2º ano E | 3º ano B | 3º ano E | Total | Acertos (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Total de alunos | 25 | 20 | 29 | 25 | 20 | 21 | 140 | |
| Acerto: 1ª Questão | 25 | 20 | 25 | 23 | 16 | 21 | 130 | $\approx 92,85$ |
| Acerto: 2ª Questão | 25 | 05 | 11 | 14 | 10 | 12 | 77 | $55,00$ |
| Acerto: 3ª Questão | 25 | 11 | 27 | 22 | 15 | 21 | 121 | $\approx 86,42$ |
| Acerto: 4ª Questão (a) | 19 | 00 | 01 | 00 | 00 | 00 | 20 | $\approx 14,28$ |
| Acerto: 4ª Questão (b) | 09 | 00 | 01 | 00 | 00 | 00 | 10 | $\approx 07,14$ |
| Acerto: 4ª Questão (c) | 18 | 08 | 21 | 10 | 07 | 07 | 71 | $\approx 50,71$ |
| Acerto: 4ª Questão (d) | 09 | 08 | 19 | 18 | 08 | 08 | 70 | $50,00$ |
| Acerto: 5ª Questão | 19 | 00 | 03 | 06 | 02 | 05 | 35 | $25,00$ |
| Todas as Questões | 05 | 00 | 01 | 00 | 00 | 00 | 06 | $\approx 04,28$ |

Tabela 5: Quantitativo e percentual de acertos no EM.
Fonte: Próprio autor.

O resultado da pesquisa aponta que boa parte dos alunos tem uma boa noção no aspecto de representação e nomenclatura de frações, mas não em sua plenitude. Encontramos ainda algumas representações que mostram um abismo conceitual, alunos que demonstraram não saber a definição, ou a representação ou o conceito de fração, como mostram as Figuras 8 e 9.

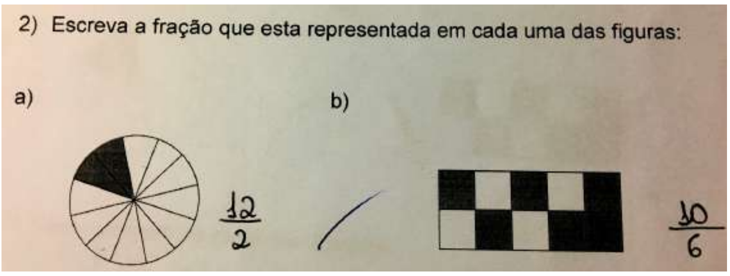



Figura 8: Resolução da 2ª questão do diagnóstico - Aluno do 8º ano do EF.
Fonte: Próprio autor.

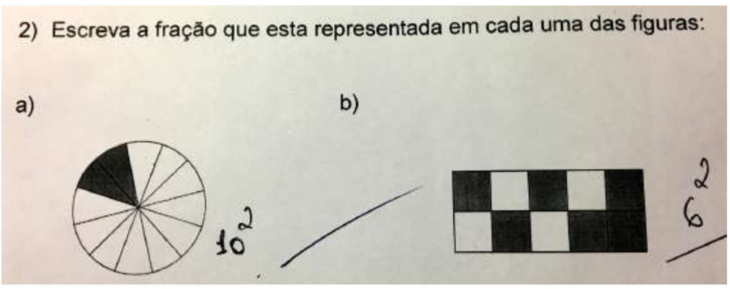



Figura 9: Resolução da 2ª questão do diagnóstico - Aluno do 3º ano do EM.
Fonte: Próprio aluno.

Em contrapartida é extremamente preocupante o resultado obtido nas operações básicas, tanto no EF como no EM, mostrando que os alunos não têm o devido conhecimento para as operações com fração. Assim, as operações de soma e subtração de fração tiveram os piores resultados nos dois ciclos.

Dos diversos erros cometidos nas operações com frações, um resultado chamou a atenção, que chamaremos "de erro $\frac{2}{5}$" para a soma e "erro $\frac{5}{5}$" para a subtração.

$$(a)\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5} \qquad\qquad (b)\quad \frac{6}{10}-\frac{1}{5}=\frac{6-1}{10-5}=\frac{5}{5}$$

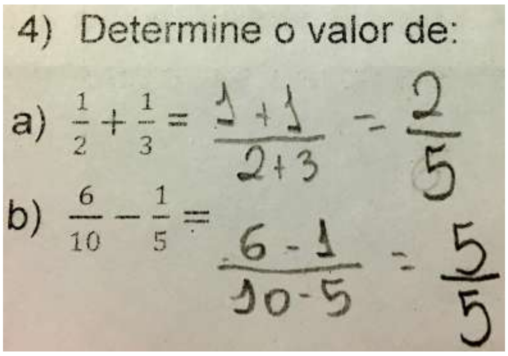



Figura 10: Resolução da 4ª questão do diagnóstico - Aluno do 9º ano do EF.
Fonte: Próprio autor.

| Turmas do EF | 6º ano A | 6º ano B | 7º ano A | 7º ano D | 8º ano A |
|---|---|---|---|---|---|
| Total de alunos | 28 | 24 | 25 | 23 | 30 |
| Erro $2/5$ | 08 | 05 | 20 | 06 | 18 |
| Erro $5/5$ | 08 | 06 | 19 | 04 | 15 |
| Alunos do EF | 8º ano B | 9º ano A | 9º ano B | EJA (1) 6º/7º | EJA (2) 7º/8º |
| Total de alunos | 29 | 25 | 24 | 20 | 32 |
| Erro $2/5$ | 19 | 16 | 14 | 12 | 20 |
| Erro $5/5$ | 15 | 16 | 14 | 07 | 19 |

Tabela 6: Quantitativo de erros no EF.
Fonte: Próprio autor.

Com base nos dados fornecidos pela tabela 6, temos os seguintes percentuais para os "erros" $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{5}$ cometidos pelos alunos do EF:

| | Total | Erros (%) |
|---|---|---|
| Total de alunos | 260 | |
| Erro $2/5$ | 138 | $\approx 53,07$ |
| Erro $5/5$ | 123 | $\approx 47,30$ |

Tabela 7: Percentuais de erros no EF.
Fonte: Próprio autor.

| Turmas do EM | 1º ano A | 1º ano H | 2º ano D | 2º ano E | 3º ano B | 3º ano E | Total | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Total de alunos | 25 | 20 | 29 | 25 | 20 | 21 | 140 | |
| Erro $2/5$ | 03 | 09 | 21 | 12 | 11 | 17 | 73 | $\approx 52,14$ |
| Erro $5/5$ | 04 | 09 | 17 | 10 | 10 | 12 | 62 | $\approx 44,28$ |

Tabela 8: Quantitativo e percentual de erros no EM.
Fonte: Próprio autor.

Da mesma forma, a resolução da situação problema tem a mesma problemática, alunos com dificuldade na interpretação, no reconhecimento de dados, erros conceituais, como identificadas nas Figuras 11 e 12.

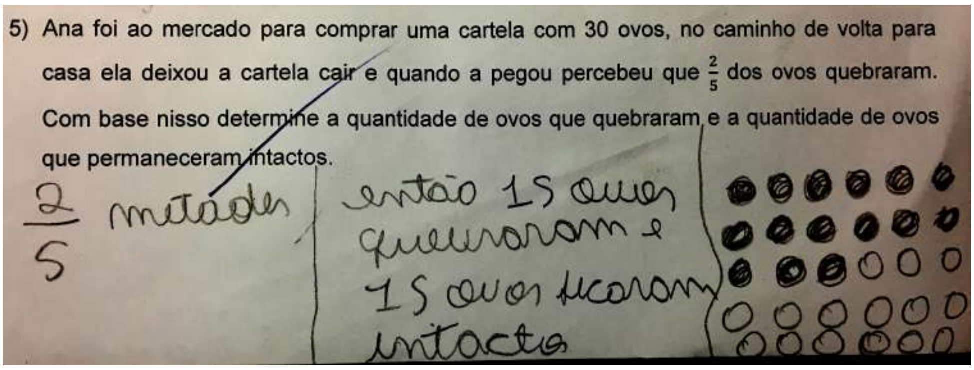



Figura 11: Resolução da 5ª questão do diagnóstico - Aluno do 8º ano do EF.
Fonte: Próprio autor.

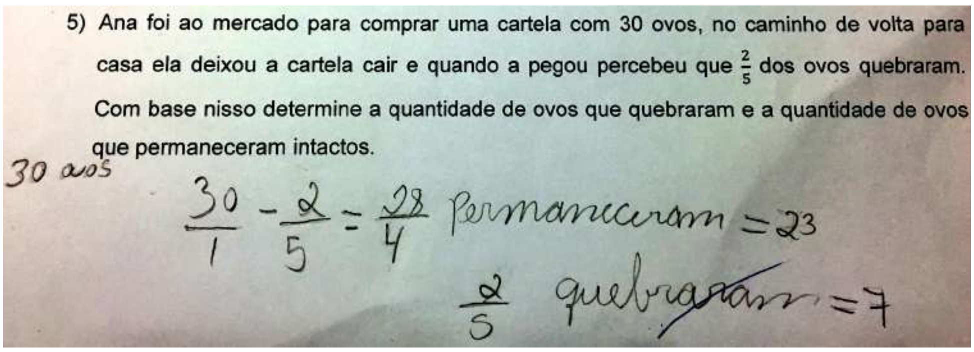



Figura 12: Resolução da 5ª questão do diagnóstico - Aluno do 1º ano do EM.
Fonte: Próprio autor.

Na comparação dos resultados de rendimento entre as turma, analisando os percentuais de acerto ao longo dos anos, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, num escala progressiva de aprendizagem ano a ano, percebemos que a situação do nível de conhecimento e manipulação com as frações foi piorando ou não evoluiu com o passar dos anos escolares, conforme mostra a tabela 9 e o gráfico da figura 13:

| Turmas | 6º ano A e B | 7º ano A e D | 8º ano A e B | 9º ano A e B | EJA (1) e (2) | 1º ano A e H | 2º ano D e E | 3º ano B e E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 98,07% | 100% | 98,30% | 97,95% | 96,15% | 100% | 88,88% | 90,24% |
| 2ª Questão | 75,00% | 95,83% | 74,57% | 65,30% | 75,00% | 66,66% | 46,29% | 53,65% |
| 3ª Questão | 100% | 100% | 86,44% | 97,95% | 90,38% | 80,00% | 90,74% | 87,80% |
| 4ª Questão (a) | 30,70% | 4,16% | 3,38% | 4,08% | 1,92% | 42,22% | 1,85% | 0,00% |
| 4ª Questão (b) | 21,15% | 4,16% | 1,69% | 2,04% | 1,92% | 20,00% | 1,85% | 0,00% |
| 4ª Questão (c) | 32,69% | 58,33% | 35,59% | 48,97% | 44,23% | 57,77% | 57,40% | 34,14% |
| 4ª Questão (d) | 40,31% | 66,66% | 30,50% | 59,18% | 38,46% | 37,77% | 68,51% | 39,02% |
| 5ª Questão | 69,23% | 4,16% | 3,38% | 30,61% | 3,84% | 42,22% | 16,66% | 17,07% |

Tabela 9: Comparativo entre os percentuais de acertos entre as turmas ano a ano.
Fonte: Próprio autor.

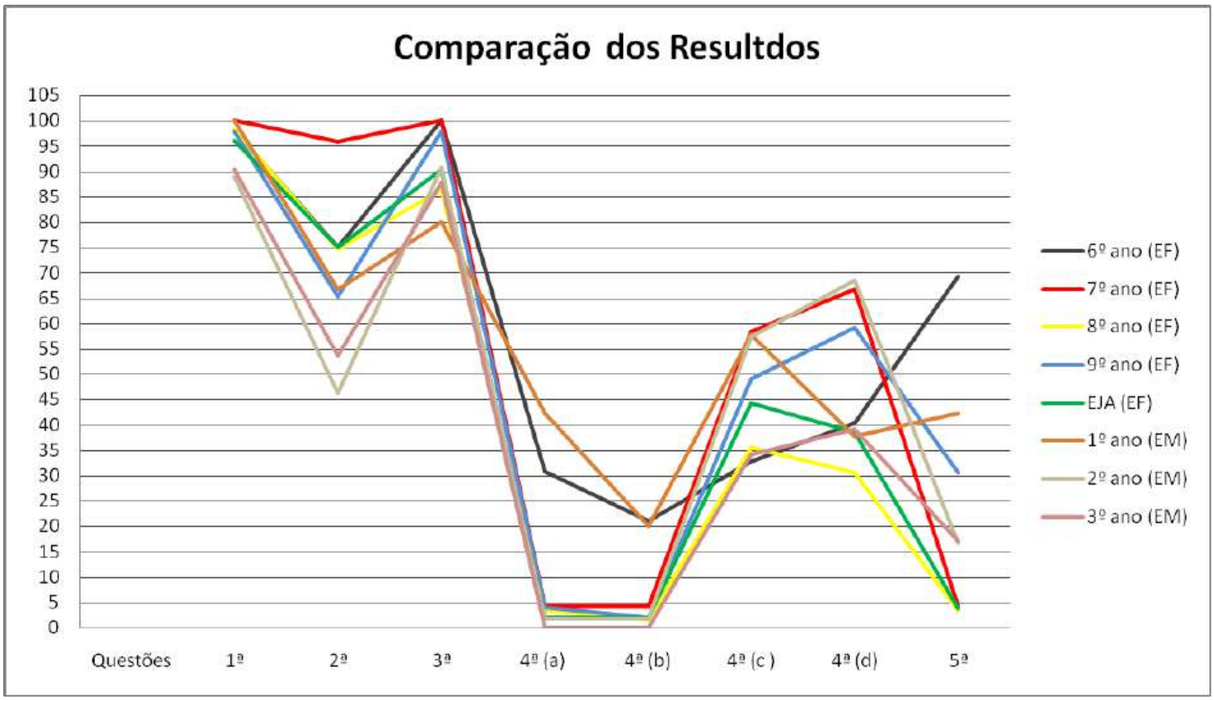



Figura 13: Gráfico de comparação entre os percentuais de acertos entre as turmas ano a ano.
Fonte: Próprio autor.

Tais resultados vem comprovar que o conhecimento e a manipulação de fração não tem progredido ao longo dos anos escolares, chegando inclusive a piorar quando observamos o rendimento das turmas em seus ciclos finais. Acreditamos, que tais resultados são reflexo do abandono “inconsciente” e progressivo do uso das frações como notação numérica ao longo do curso escolar e a pela continuidade das dificuldades que envolvem as operações com frações.

E finalmente temos que apenas uma quantidade ínfima de alunos conseguiram acertar as cinco questões, de um universo de 400 alunos (EF e EM) apenas 11 alunos acertaram corretamente, correspondendo a $2,75\%$ do total, esse valor mostra um nível considerado medíocre em vista do grau de dificuldade da atividade em comparação à base de conhecimento dos entrevistados.

## 4.2 Professores

Com base nos dados da pesquisa dos alunos, foi realizada uma entrevista com 12 professores de matemática que atuam no EF (8 professores do Colégio Municipal Anísio Teixeira) e EM (4 professores do Colégio Estadual Homero Pires) na forma de um questionário com 5 perguntas (ver apêndice B).

Inicialmente, algumas informações sobre os entrevistados: quanto ao tempo de serviço, temos uma média de 18 anos de atuação na licenciatura (sendo que o mais “novo” do grupo leciona há 6 anos e o mais “velho” leciona há 34 anos); com relação a titulação, apenas um dos professores não possui licenciatura em matemática, $25\%$ deles apresentam uma segunda graduação em pedagogia e metade possui alguma especialização na área de matemática.

O gráfico abaixo mostra a opinião dos professores com relação ao conhecimento dos alunos sobre as frações:

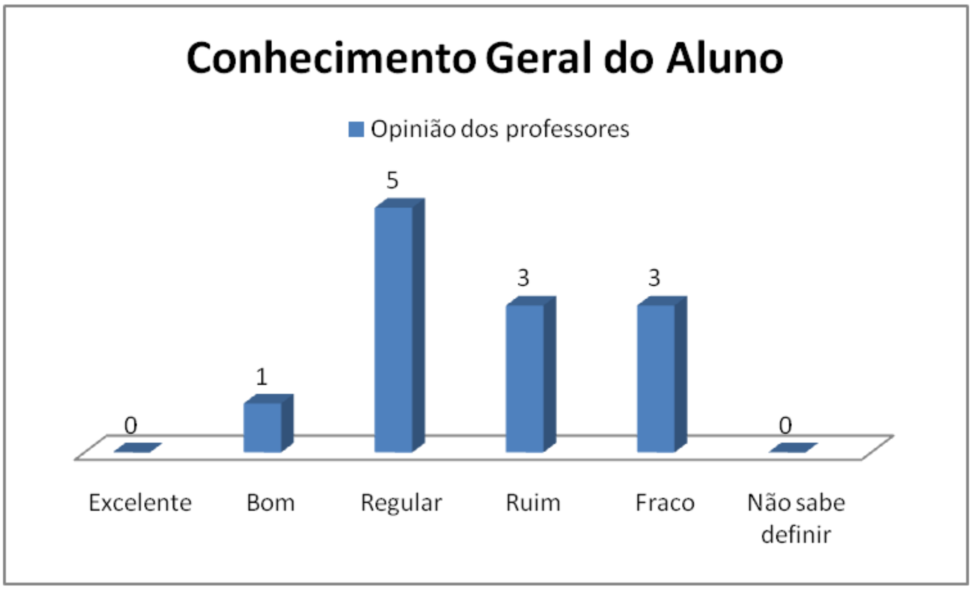



Figura 14: Gráfico do conhecimento dos alunos.
Fonte: Próprio autor.

O gráfico abaixo mostra a opinião dos professores quanto a assimilação do estudo das frações:

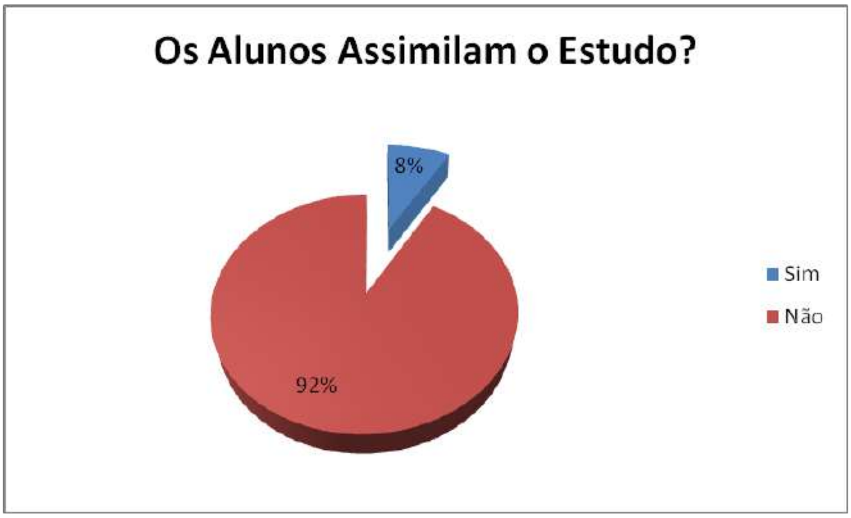



Figura 15: Gráfico da assimilação dos alunos.
Fonte: Próprio autor.

O gráfico abaixo mostra se os professores usam as frações na abordagem de outros conteúdos:

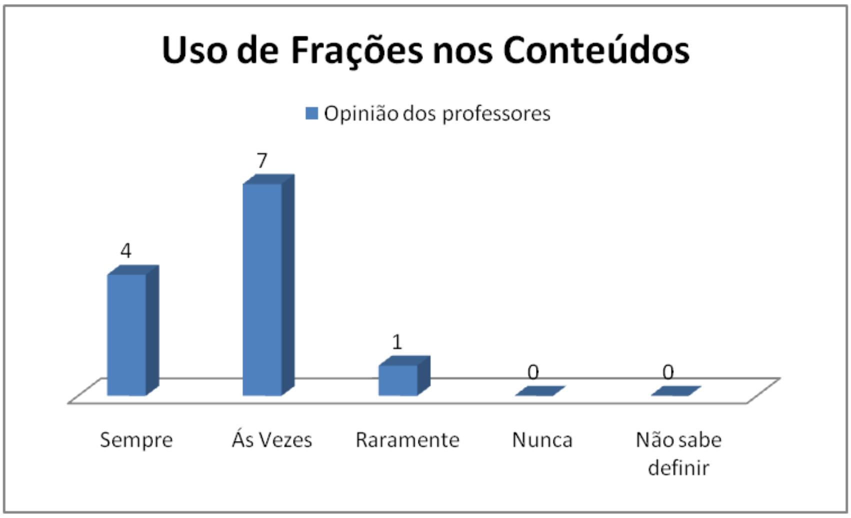



Figura 16: Gráfico do uso das frações em outros conteúdos.
Fonte: Próprio autor.

A quarta questão aborda os motivos do estudo das frações não ser bem assimilado e os pontos destacados foram:

- Falta de base dos alunos oriundos do EF (1º ao 5º).
- Ensino abstrato das frações e sem a devida contextualização.
- Falta de interesse e estudo dos alunos.
- Pouco contato dos alunos com as frações - falta de um trabalho contínuo durante a trajetória escolar.

Na última questão, os professores são questionados sobre as possíveis estratégias para a mudança das dificuldades no estudo das frações e os pontos mais destacados foram:

- Proporcionar o uso de materiais concretos nas aulas.
- Melhorar a formação em matemática dos professores do EF (1º ao 5º).
- Promover o uso de situações mais concretas e vinculadas ao cotidiano do aluno.
- Trabalhar as frações de forma mais contínua, em todos os conteúdos.

Com todos os dados coletados, fica evidente a necessidade de uma intervenção urgente na forma de se trabalhar o ensino das frações, tanto na prática e abordagem do professor como na forma que o estudante vê e estuda o conteúdo.

# 5 Sequência Didática

Nesse capítulo, descreveremos uma sequência didática na forma de oficina que foi aplicada na turma do 8º ano A do EF do Colégio Municipal Anísio Teixeira no município de Prado. Abordaremos os aspectos práticos e metodológicos do estudo das frações e usaremos de atividades propostas (ver Apêndices) para as discussões. Mostraremos também os acertos e erros dos alunos e as principais contribuições em cada encontro.

## 5.1 A Oficina

As atividades que seguem têm como objetivo tornar o estudo de fração mais dinâmico, prazeroso e, acima de tudo, ressignificar o conteúdo para os alunos. Com base nisso a oficina busca estimular o raciocínio dos alunos através da observação, manipulação e experimentação, focando nas ações e reflexões do aluno priorizando o fazer pensar.

A turma selecionada para aplicação da oficina foi a do 8º ano A do EF do Colégio Municipal Anísio Teixeira, com 30 alunos e a escolha se fez mediante ao resultado da pesquisa diagnóstico, que foi alarmantemente negativo:

| 8º ano A | Acertos | Percentual (%) |
|---|---|---|
| Acerto: 1ª Questão | 30 | $100,00$ |
| Acerto: 2ª Questão | 25 | $\approx 83,30$ |
| Acerto: 3ª Questão | 28 | $\approx 93,30$ |
| Acerto: 4ª Questão (a) | 0 | $0,00$ |
| Acerto: 4ª Questão (b) | 0 | $0,00$ |
| Acerto: 4ª Questão (c) | 09 | $30,00$ |
| Acerto: 4ª Questão (d) | 05 | $16,65$ |
| Acerto: 5ª Questão | 0 | $0,00$ |
| Todas as Questões | 0 | $0,00$ |
| Erro 2/5 | 18 | $60,00$ |
| Erro 5/5 | 15 | $50,00$ |

Tabela 10: Quantitativo de acertos do 8º ano A.
Fonte: Próprio autor.

Diante das respostas obtidas dos alunos entrevistados percebemos que eles conseguiram trabalhar a representação e nomenclatura de frações, mas à partir daí, o resultado foi desastroso, onde se identificou a dificuldade extrema nas operações básicas e na resolução da situação problema.

De fato, nenhum acerto na soma e subtração de frações, rendimento baixíssimo na divisão e produto, sem falar que na resolução da situação problema, novamente nenhum acerto. Para agravar ainda mais esse cenário tivemos um alto índice de “erros” $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{5}$, o que justifica a necessidade de intervenção na turma.

Figura 17: Registro da Aplicação da Pesquisa Diagnóstico no 8º ano A.
Fonte: Próprio autor.

A aplicação da oficina ocorreu em 7 encontros com duração de 1 hora e meia cada, na própria escola, durante as aulas de matemática, uma vez por semana no período de 17 de outubro à 30 de novembro de 2016. Para a elaboração das atividades, construção dos objetivos e demais aspectos utilizaremos as referências: [22] e [7]. Durante a aplicação da oficina trabalharemos com os seguintes conteúdos:

- Conceito das frações;
- Fração com parte de um todo;
- Representação geométrica de fração;
- Comparação entre frações;
- Simplificação e equivalência de frações;
- Soma, subtração, multiplicação e divisão de frações;
- Resolução de problemas;
- Representação percentual e decimal.

Para maximizar o estudo e a aplicação das atividades, os alunos foram divididos em 6 grupos com 5 alunos cada e a composição dos grupos obedeceu a ordem alfabética da lista de chamada. A divisão dos alunos em grupos favorece a aprendizagem, ativa a criatividade e em grande parte das vezes produz resultados melhores do que o trabalho individual, pois integra em caráter complementar as habilidades e experiências de cada um.

## 5.2 Encontro 1

**Objetivo**

- Compreender e conceituar as frações;
- Realizar a escrita e a leitura das frações.
- Definir fração como parte de um todo.
- Identificar e representar geometricamente as frações.

**Materiais usados**

Quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Questionar os alunos sobre o que eles sabem ou lembram do conceito de frações;
- **2º Momento:** Cada grupo irá definir o conceito de fração e socializar com os demais grupos;
- **3º Momento:** Cada grupo de alunos fará a representação geométrica, escrita e leitura de frações.

**Relatório da atividade**

A discussão do conceito de frações foi bem produtiva, os 6 grupos mostram que têm uma boa base intuitiva sobre frações, a parte conceitual apresentada pelo alunos mostrou um conhecimento apenas básico da ideia de fração. Cada grupo colocou no quadro o resultado da discussão feita no grupo, como mostra a figura 18:

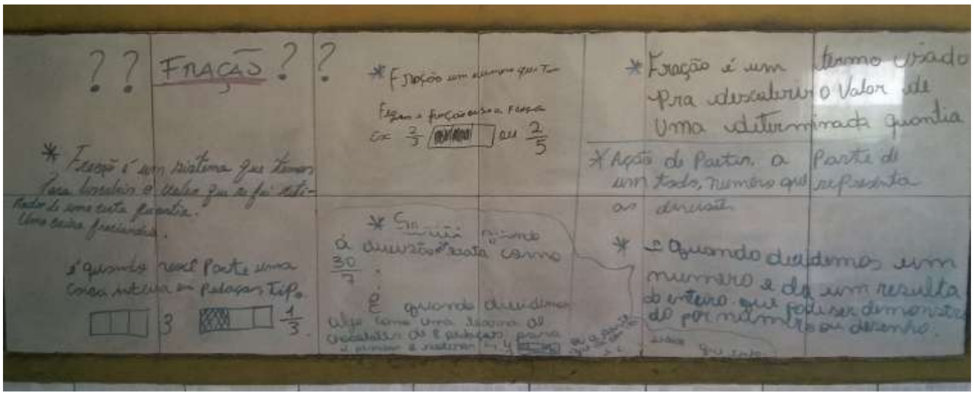



Figura 18: Registro da aplicação da atividade 1.
Fonte: Próprio autor.

- Grupo 1: “Fração é um termo usado para descobrir o valor de uma determinada quantia. É uma representação de uma divisão”.
- Grupo 2: “Ação de partir, a parte de todo, número que representa as divisões”.
- Grupo 3: “Serve quando a divisão não é exata como $\frac{30}{7}$. É quando dividimos algo como uma barra de chocolate de 8 pedaços para duas pessoas”.
- Grupo 4: “É quando dividimos um número e dá resultado inteiro e pode ser representado por número e desenho”.
- Grupo 5: “É um número que tem figuras e porções, ou seja, a fração. Ex $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{5}$”.
- Grupo 6: “Fração é um sistema que temos de descobrir o valor que se foi retirado de uma certa quantia. Uma coisa fracionaria é quando você parte uma coisa inteira em pedaços”.

A nomenclatura e representação parecem plenamente dominadas pelos grupos, com exceção de uma aluna que apresentou dificuldade de representação geométrica no grupo 3, mas foi sanada em discussão com os colegas do grupo.

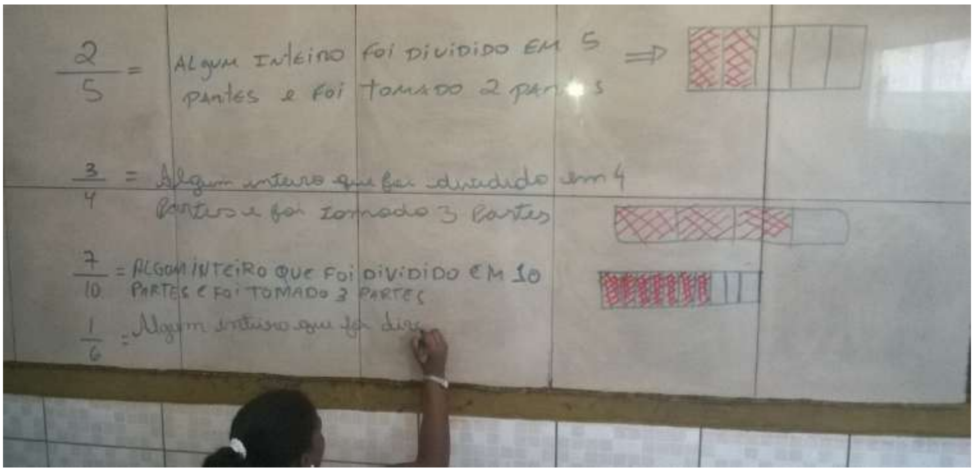



Figura 19: Registro da atividade 1 - Aluna do grupo 3.
Fonte: Próprio autor.

## 5.3 Encontro 2

**Objetivo**

- Compreender a fração como parte de um todo;
- Interpretar e calcular a parte de um todo;

- Resolver situações problema envolvendo partes de um todo.

**Materiais usados**

Material dourado [5], quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Representação das parte de um todo usando os blocos do material dourado [5];
- **2º Momento:** Resolução de situações problemas usando o material dourado [5];
- **3º Momento:** Discussão e socialização do problema dos 35 camelos de Malba Tahan, [23].

**Relatório da atividade**

O uso do material dourado [5] trouxe algo novo na representação de partes de um todo, a maior parte dos alunos não conheciam o aparato. O fato de manipular e poder verificar o resultados de frações de pequenas quantidade de inteiros possibilitou ampliar a noção de "dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador". Dessa forma, o trabalho com o material trouxe uma maior segurança no trato com frações.

Figura 20: Uso do material dourado pelos alunos.
Fonte: Próprio autor.

A lista de atividades 2 (ver apêndice D) não trouxe grandes problemas na resolução das 5 primeiras questões, os grupos (1, 2, 4 e 5) conseguiram bom desenvolvimento e resolvem muito bem as questões propostas, o grupo 6 não resolveu a quarta questão e o grupo 3 errou a quinta questão. Ao analisar o erro do grupo 3 foi detectado falta de atenção e erro nas operações.

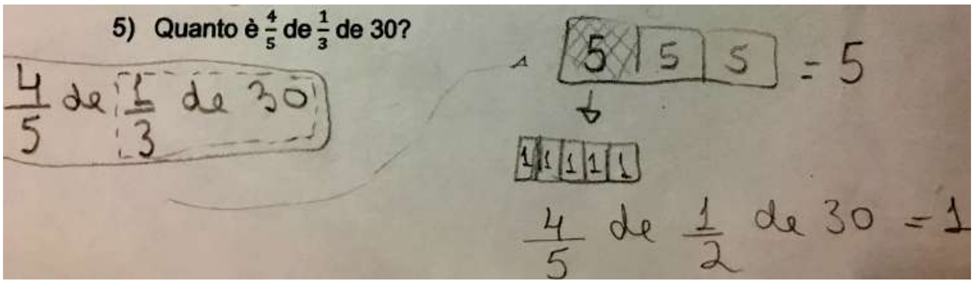



Figura 21: 5ª Questão, atividade 2 - Grupo 3.
Fonte: Próprio autor.

O desafio dos 35 camelos foi o ponto alto do dia, os alunos não conheciam a obra de Malba Tahan, tampouco o problema, e ficaram maravilhados com a situação. A atividade provocou e testou a imaginação deles, durante as tentativas de resolução eles diziam que não tinha jeito, até que o grupo 2 gritou “conseguimos,” o que provocou um pouco de rivalidade e uma injeção de ânimo fazendo os demais grupos se concentrarem mais para encontrar a solução.

Ao final da atividade apenas metade dos grupos haviam conseguido revolver o problemas dos 35 camelos, os outros 3 grupos conseguiram entender e checar os dados contudo, faltou talvez um pouco mais de tempo para perceberem a necessidade do acréscimo do camelo e consequentemente enxergar que $36$ é múltiplo de $2, 3$ e $9$. Segue na figura abaixo a resolução do grupo 2:

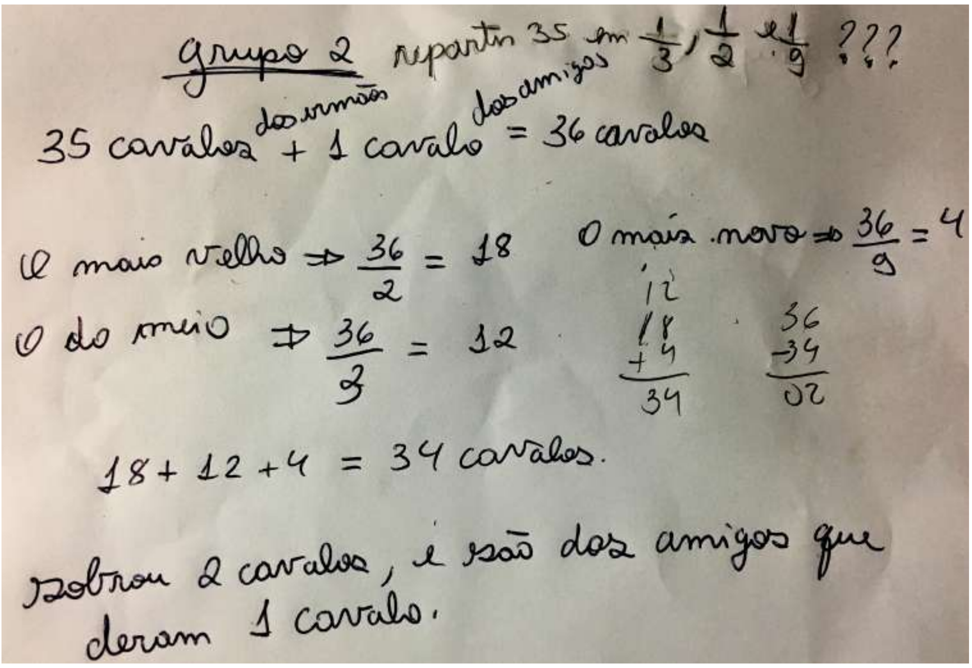



Figura 22: Resolução do problema dos 35 camelos - Grupo 2.
Fonte: Próprio autor.

## 5.4 Encontro 3

**Objetivo**

- Identificar frações equivalentes;
- Reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador;
- Comparar duas ou mais fração.

**Materiais usados**

Quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Os alunos irão realizar a comparação entre as frações e definir a relação de maior ou menor;
- **2º Momento:** Construção do conceito de equivalência entre frações pelos alunos.

**Relatório da atividade**

Começamos a atividade questionado os alunos qual fração teria o maior valor, se $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, justificando a escolha. Prontamente a sala se dividiu em dois grupos, os que achavam que era $\frac{1}{3}$ o maior valor e os que achavam que era $\frac{1}{2}$. O primeiro obstáculo foi que inicialmente nenhum dos grupos conseguia definir uma justificativa para a escolha.

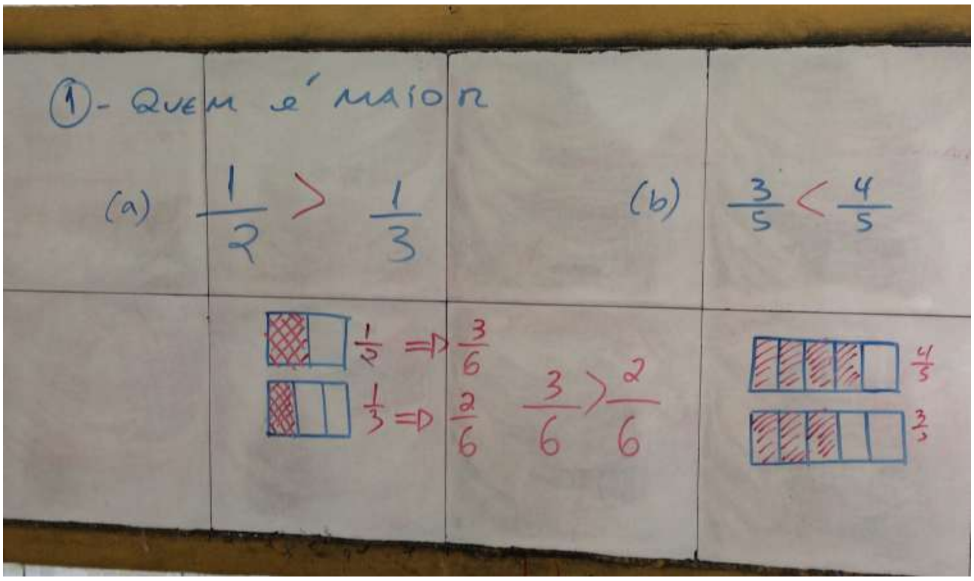



Figura 23: Definição de maior ou menor.
Fonte: Próprio autor.

Um aluno do grupo 5 afirmou que $\frac{1}{3}$ era maior que $\frac{1}{2}$ porque $3$ era maior que $2$ e após alguns minutos de debates foi solicitado que os grupos representassem geometricamente as duas frações. Quando os alunos viram que a “parte colorida” de $\frac{1}{2}$ é maior que a “parte colorida” de $\frac{1}{3}$ se convenceram que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Aproveitando que os alunos estavam convencidos com o fato de que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ foi proposta outra situação: “Qual fração é maior $\frac{80}{90}$ ou $\frac{21}{20}$?” Quase imediatamente todos os grupos responderam $\frac{80}{90}$ e a maioria dos alunos justificaram pelo fato de $80 > 21$ e $90 > 20$. Novamente foi necessário intervir e pedir que pensassem um pouco antes de resolver. Apesar disso, apenas um dos grupos percebeu que $\frac{21}{20}$ é uma fração impropria, portanto com valor maior que $1$.

Como a representação geométrica é pouco viável neste caso, foi introduzido o conceito de equivalência entre as frações para reduzi-las ao mesmo denominador e identificar qual fração é maior. Novamente tivemos, até se revisar o conceito, nenhum dos grupos se lembravam como achar uma fração equivalente.

Com a revisão do conceito de fração equivalente foi definido também o termo fração irredutível, e foi proposto para que eles resolvessem a atividade 3 (ver Apêndice E). A atividade transcorreu de forma tranquila e não ocorrendo mais questionamentos, durante a correção foi verificado que todos os grupos acertaram todas as questões.

## 5.5 Encontro 4

**Objetivo**

- Compreender a adição de números fracionários;
- Interpretar o significado do $mmc$.

**Materiais usados**

Escala de Cuisenaire [15], quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Utilização da escala de Cuisenaire [15] para auxiliar a interpretação da soma de números fracionários;
- **2º Momento:** Discussão com os alunos sobre uso do $mmc$;
- **3º Momento:** Resolução de uma lista de exercícios de adição e subtrações de frações.

**Relatório da atividade**

Começamos a atividade pedindo que os alunos determinem a soma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ao contrário do resultado da pesquisa, a maior parte dos alunos ficou pensando como somar as duas frações, já que eles sabiam que o resultado não era $\frac{2}{5}$. Após algumas tentativas dos grupos em resolver, um dos alunos do grupo 2 deu uma sugestão: “Podemos representá-las geometricamente?” Para instigá-los foi respondido que eles poderiam tentar. Esbarramos assim no primeiro obstáculo: como somar os pedaços das representações geométricas se eles tem tamanhos diferentes? Em pouco tempo os alunos do grupo 5 responderam: “Podemos usar as frações equivalentes”.

Com essa fala todos os grupos começaram a trabalhar e rapidamente todos chegaram a $\frac{5}{6}$, usando à representação geométrica. Para reforçar esse fato os alunos foram apresentados à escala de Cuisenaire [15] para realmente convencer da necessidade do uso das frações equivalentes na adição de frações.

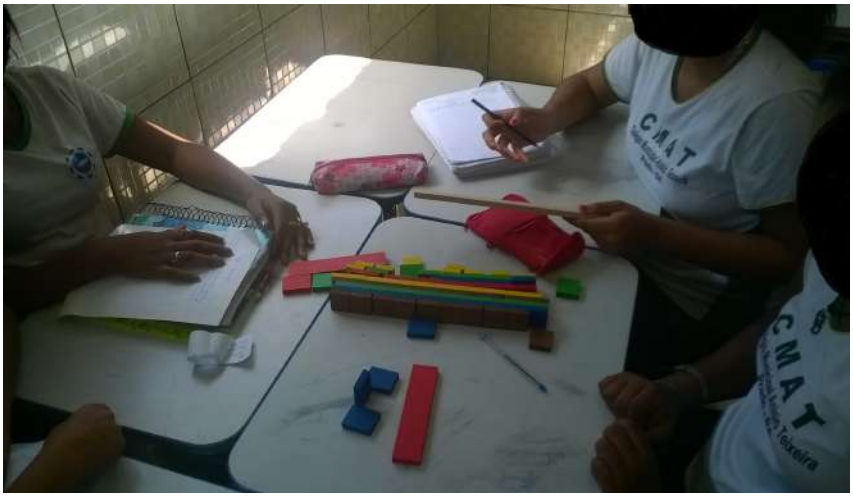


Figura 24: Uso da Escala de Cuisenaire pelos alunos.
Fonte: Próprio autor.

Cada grupo recebeu um kit e todas as operações tiveram o suporte deste material e, da mesma forma que ocorreu com o material dourado [5], os alunos ficaram maravilhados em ver a adição de frações de uma forma mais concreta.

Com relação ao $mmc$, todos os alunos conheciam e até tinham habilidade em encontrar o $mmc$ de dois números, contudo eles não sabiam o porquê de ser calculado, então foi aberta uma discussão onde revisamos como é feito o calculo do e sua importância.

Para finalizar, foi dado aos alunos o algoritmo para a adição e subtração de frações de forma direta: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, alguns alunos disseram que conheciam essa forma e alguns disseram que não se lembravam.

Durante algumas exemplificações, os grupos se animaram e acharam mais fácil, pelo fato de não precisarem, necessariamente, calcular o $mmc$. Após isso, houve a necessidade de intervir e falar da necessidade de conhecer as duas formas de se trabalhar com as frações.

Em seguida, foi pedido que os grupos trabalhassem com a lista de atividade 4, (ver Apêndice F), onde todos os grupos tiveram um ótimo desempenho com apenas alguns erros pontuais por falta de atenção ou erro nas somas. A tabela 11 mostrada a seguir apresenta o rendimento dos grupos na atividade.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| 2ª Questão | 100% | 100% | 50% | 100% | 50% | 25% |
| 3ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |

Tabela 11: Rendimento dos grupos na atividade 4.
Fonte: Próprio autor.

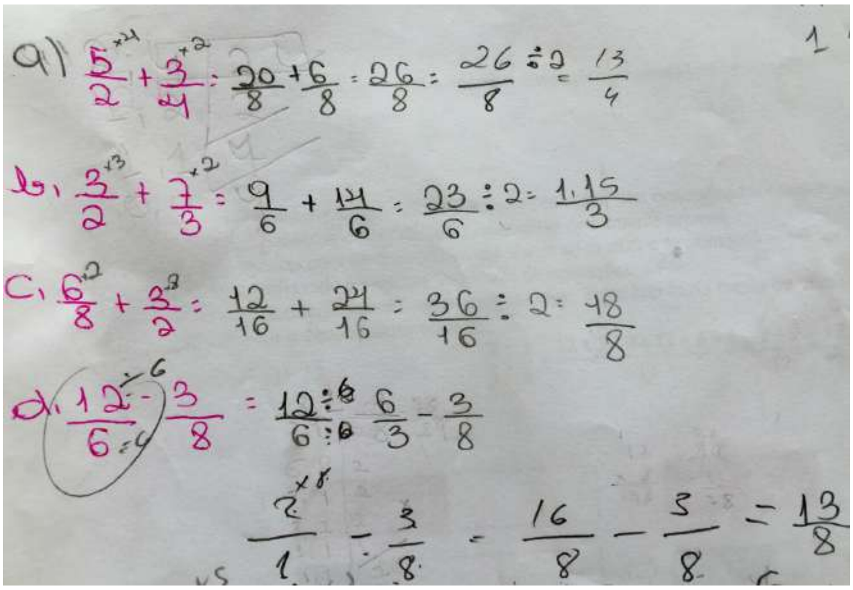


Figura 25: Soma e subtração de frações - Grupo 1.
Fonte: Próprio autor.

## 5.6 Encontro 5

### Objetivo

- Compreender a multiplicação de números fracionários;
- Interpretar geometricamente a multiplicação de números fracionários;
- Relacionar a divisão de fração com a noção de inverso multiplicativo.

**Materiais usados**

Quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Abordagem do algoritmo da multiplicação e construção da representação geométrica pelos alunos;
- **2º Momento:** Discurso da noção de inverso multiplicativo e aplicação na divisão de frações;
- **3º Momento:** Resolução de uma lista de exercícios.

**Relatório da atividade**

A abordagem da multiplicação foi bem recebida pelos alunos, sendo considerada por eles como a parte mais fácil. Esse fato pode ser explicado pela semelhança entre a multiplicação inteira e fracionária: numerador multiplica numerador e denominador multiplica denominador.

A representação geométrica da multiplicação (Apêndice G) das frações foi recebida com surpresa e rapidamente assimilada pelos grupos.

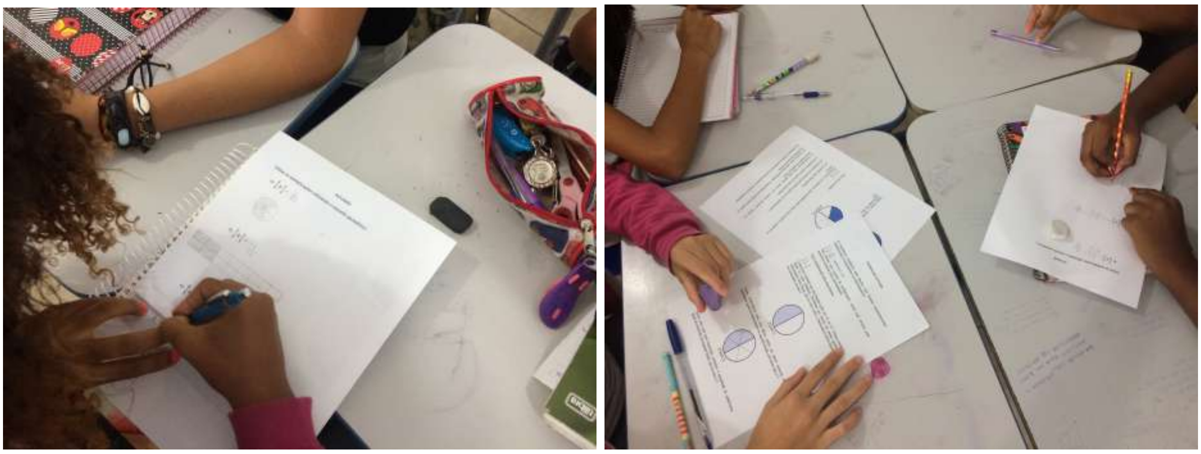


Figura 26: Representação geométrica do produto entre frações - Alunos do grupo 4.
Fonte: Próprio autor.

Com relação a divisão, a maioria dos alunos usava o mesmo algoritmo da multiplicação: numerador divide numerador e denominador divide denominador. Com base nessa informação, os alunos foram questionados sobre o que ocorreria se a divisão assim feita não fosse exata. Para espanto geral, nenhum aluno conseguiu definir essa relação.

Para piorar a situação, ao serem questionados sobre inversos multiplicativos, apenas dois alunos disseram que já ouviram falar, mas não sabiam definir. Assim, foi necessário explicar tal conceito. Inicialmente foi um tanto difícil para os alunos encontrarem o inverso multiplicativo de um dado número diferente de zero.

Superada essa situação, um dos alunos do grupo 6 questionou o que os inversos teriam a ver com a multiplicação, e ao explicar para os grupos que dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso do segundo número, gerou um grandes desconforto entre eles, sendo necessário argumentar e apresentar exemplos para que eles conseguissem compreender o processo de divisão.

Assim, sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $b \neq 0$, temos que:

$$a \div b \longrightarrow \frac{a}{b} \longrightarrow \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} \longrightarrow \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b}$$

Dessa forma, com a construção do algoritmo da divisão, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, os aluno ficaram mais confortáveis para trabalhar o restante das atividades propostas (ver Apêndice G). A tabela 12 mostrada a seguir apresenta o rendimento dos grupos na atividade.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| 2ª Questão | 100% | 100% | 75% | 100% | 100% | 75% |
| 3ª Questão | 100% | 100% | 0% | 100% | 100% | 100% |

Tabela 12: Rendimento dos grupos na atividade 5.
Fonte: Próprio autor.

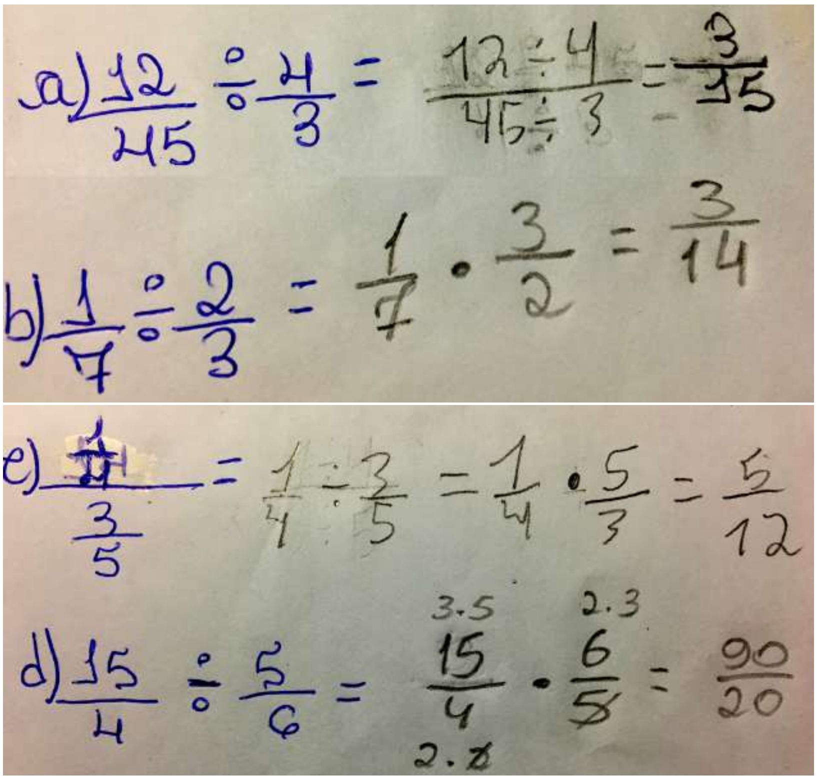



Figura 27: Divisão de frações - Grupo 6.
Fonte: Próprio autor.

## 5.7 Encontro 6

**Objetivo**

- Compreender a relação entre números fracionários e decimais;
- Interpretar a transformação de decimais em frações;
- Relacionar as frações no cálculo de porcentagens.

**Materiais usados**

Quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, calculadora, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Abordagem e discussão da relação entre decimais e frações;
- **2º Momento:** Uso prático das frações no cálculo de porcentagens numa abordagem com resolução de problemas;
- **3º Momento:** Resolução de uma lista de exercícios.

**Relatório da atividade**

No final do encontro anterior, foi pedido aos grupos que entregassem uma pesquisa sobre a relação entre números decimais e números fracionários e como fazer a transformação de número decimal em fração.

Todos os grupos fizeram o que foi combinado e o encontro começou com a abordagem de como conseguir encontrar a fração correspondente a um número decimal. Todos os grupos responderam positivamente a pergunta, afirmando que basta escrever o número sem a vírgula como numerador e, como denominador o algarismo $1$ seguido de zeros iguais ao número de casas decimais depois da vírgula.

Após algumas exemplificações, os alunos foram questionados: “E se o decimal for uma dízima periódica ou um número infinto não periódico?” Depois dessa provocação os alunos ficaram sem reação, não conseguiam desenvolver o que foi pedido, foi necessário intervir mais uma vez e definir o conceito de dízima periódica. O mais impressionante é que alguns alunos disseram que não tinham visto nada sobre essa temática, enquanto outros afirmavam que já estudaram, mas não sabiam como representar a fração. Após algumas exemplificações os alunos tentaram trabalhar com os decimais periódicos, mas a atividade não fluiu de forma satisfatória, tendo que intervir diversas vezes para sanar as dúvidas.

No segundo momento, o uso da porcentagem foi bem recebido pelos alunos e seu desenvolvimento foi mais fluído, uma vez que, segundo os alunos, eles tinham acabado de estudar esse tema nas aulas de matemática. Dessa forma, o debate e a discussão de suas aplicações foram bem ricas e o restante da atividade foi bem trabalhado pelos grupos (ver Apêndice H). A tabela 13 mostrada a seguir apresenta o rendimento dos grupos na atividade.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 100% | 50% | 75% | 75% | 50% | 25% |
| 2ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 75% |
| 3ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |

Tabela 13: Rendimento dos grupos na atividade 6.
Fonte: Próprio autor.

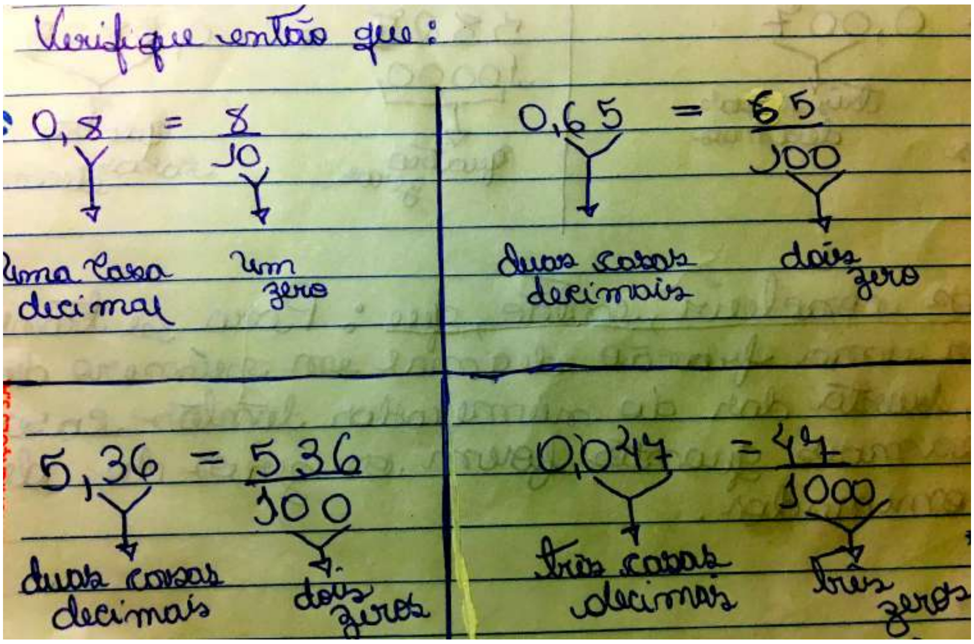



Figura 28: Transformação de decimal em fração - Grupo 5.
Fonte: Próprio autor.

## 5.8 Encontro 7

**Objetivo**

- Avaliar o rendimentos dos alunos na oficina.

**Materiais usados**

Quadro branco, piloto para quadro branco, papel A4 para anotações, calculadora, lápis e borracha.

**Metodologia**

- **1º Momento:** Resolução de uma lista de exercícios pelos grupos de alunos;
- **2º Momento:** Discussão e socialização entre os grupos dos resultados encontrados.

**Relatório da atividade**

No último encontro, foi solicitados que os alunos fizessem uma lista composta por 4 questões (ver Apêndice I). A aplicação da atividade foi tranquila e após o término, a atividade foi corrigida e os resultados discutido com os alunos.

Figura 29: Aplicação da atividade 7.
Fonte: Próprio autor.

Todos os grupos conseguiram resolver todas as atividades da lista sem grandes dificuldades, apenas o grupo 3 errou a quarta questão, erro esse cometido por falta de atenção e falha na multiplicação.

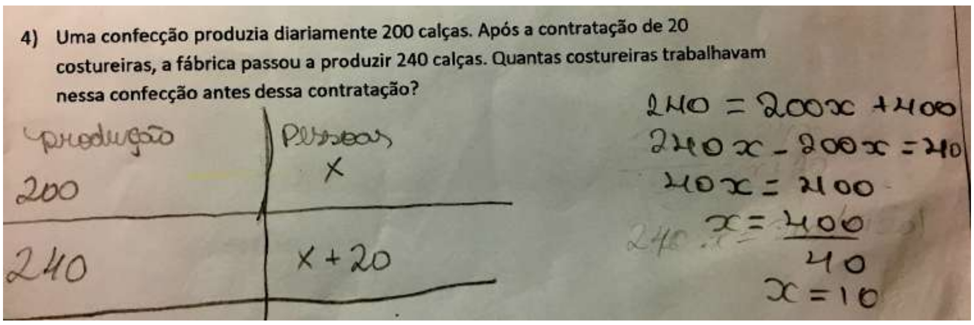



Figura 30: Resolução da questão 4 - Atividade 7 - Grupo 3.
Fonte: Próprio autor.

Após a discussão, foi informado aos alunos que a oficina tinha chegado a sua última aula e os alunos ficaram um pouco tristes pela fato do término, chegando inclusive a perguntar quando teríamos outra oficina.

Esta experiência contribuiu para melhorar o aprendizado dos alunos participantes da oficina com respeito ao conhecimentos de frações. O resultado da atividade final mostra uma evolução do quadro inicial. A tabela 14 mostrada a seguir apresenta o rendimento dos grupos na atividade.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| 2ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| 3ª Questão | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| 4ª Questão | 100% | 100% | 00% | 100% | 100% | 100% |

Tabela 14: Rendimento dos grupos na atividade 7.
Fonte: Próprio autor.

Na atividade foi trabalhado o conceito de equação fracionária, abordando os aspectos de manipulação algébrica, partes de um todo e razão na forma de resolução de problemas, na perspectiva que os grupo buscassem suas próprias estratégias sem intervenção do professor.

Contudo o ponto mais importante para atingir esse objetivo foi o notório entusiasmo, interesse, participação e alegria geral dos alunos na realização das atividades propostas a cada encontro.

# 6 Considerações Finais

A necessidade de se desenvolver uma proposta para o ensino das frações na educação básica se consolida, na mesma medida da expectativa de reforçar e minimizar a defasagem deste conteúdo, que se arrasta e acumula desde o anos inicias até o final do percurso escolar do aluno.

Com base nos dados da pesquisa e análise dos resultados dos alunos e professores, chegamos à conclusão de que o estudo das frações está aquém do ideal, pois estamos formando alunos com pouca ou nenhuma base conceitual, que pecam nas definições mais simples e que não conseguem operacionar os cálculos.

Com efeito, esse trabalho teve como objetivo mostrar a realidade do ensino das frações, bem como os aspectos algébricos e pedagógicos que cercam o seu aprendizado, culminando na sequência didática da oficina, com foco principal na ressignificação dos saberes e habilidades.

A realização da oficina proporcionou o resgate das definições e conceitos elementares das frações aos alunos, desmistificando dificuldades, fortalecendo o ensino aprendizagem e possibilitando ao educando avançar de forma concreta seu conhecimento matemático.

Para tanto, é vital relatar o compromisso, empenho e interesse de todos os alunos durante a realização da oficina, possibilitando assim a criação de um ambiente alegre e divertido durante a aplicação de cada atividade. Esse fato é responsável direto pelos resultados alcançados e pelo grande êxito dos alunos na superação dos obstáculos e na ressignificação do saber.

Assim, esperamos que este trabalho possa contribuir de forma positiva tanto para professores, discentes e pessoas interessadas, tendo como foco primordial a erradicação das dificuldades que cercam essa parte fundamental do estudos dos número e operações.

# Referências


[1] AGUIAR, R. H. *A Matemática Descrita no Papiro de Rhind*. Monografia ( Curso de Licenciatura em Matemática). Universidade Católica de Brasília, Brasília- DF, 2012.

[2] ALCARAZ, I. Como os sistemas numericos evoluiram. http://cienciadegaragem.blogspot.com.br/2014/12/como-os-sistemas-numericos-evoluiram-ao.html, 2016. Acesso: 17 de Janeiro de 2017.

[3] ALMEIDA, A. C.; CORRÊA, F. O papiro de rhind e as frações unitárias. In *Explorando o Ensino - Matemática*, vol. 1. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília - DF, 2004, pp. 61 – 67.

[4] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos Tempos - Um guia fácil e prático para professores e entusiastas*, 2 ed. Blucher, São Paulo - SP, 2010.

[5] BOCK, F. S. *Adição e subtração com o material dourado*. Monografia ( Curso de Licenciatura em Matemática). Instituto Superior de Educação do Vale do Juruena, Juina - MT, 2010.

[6] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Ministério da Educação Fundamental, Secretária de Educação Básica, Brasília - DF, 1998.

[7] CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIV, J. *Matemática: teoria e contexto, 6º ano*, 1 ed. Saraiva, São Paulo - SP, 20012.

[8] COWIE, P. J. Imagem do papiro de rhind. https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus#/media/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg, 2006. Acesso: 17 de Janeiro de 2017.

[9] EVES, H. *Introdução a História da Matemática*. Unicamp, Campinas - SP, 2004.

[10] FERREIRA, J. *A Construção dos números*, 3 ed. SBM - Coleção textos Universitários; 09, Rio de Janeiro - RJ, 2013.

[11] FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim da SBEM-SP 4*, 7 (1990).

[12] FREIRE, M. C. Números e operações. In *Explorando o Ensino - Matemática*, vol. 17. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília - DF, 2010, pp. 97 – 134.

[13] GARAGEM, C. D. Imagem do sistema decimal egípcio. http://cienciadegaragem.blogspot.com.br/2014/12/como-os-sistemas-numericos-evoluiram-ao.html, 2015. Acesso: 12 de Janeiro de 2017.

[14] LIMA, E. L. *Análise Real: funções de uma variável*, 11 ed., vol. 1. IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2011.

[15] MACHADO, J. F. T. *A Compreensão do conceito e operações básicas envolvendo frações com a utilização da escala Cuisinaire*. Monografia ( Curso de Matemática). Faculdade Pará de Minas, Pará de Minas - MG, 2013.

[16] MILIS, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números - Uma introdução a matemática*, 3 ed. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2003.

[17] MOL, R. S. *Introdução a história da matemática*. CAED-UFMG, Belo Horizonte - MG, 2013.

[18] NOVAK, C. A bola de neve vinda da matemática básica. In *Revista Cálculo - Matemática para todos*, vol. 45 - ano 4 - outubro. Editora Segmento, São Paulo - SP, 2014, pp. 22 – 30, Depoimento concedido a Fernada Lima.

[19] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*, 2 ed. Interciência, Rio de Janeiro - RJ, 1995.

[20] RABELO, M. *Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.* SBM - Coleção PROFMAT; 10, Rio de Janeiro - RJ, 2013.

[21] ROQUE, T. *História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Jorge Zahar, Rio de Janeiro - RJ, 2012.

[22] SILVEIRA, E.; MARQUES, C. *Matemática: compreensão e prática, 6º ano*, 2 ed. Moderna, São Paulo - SP, 20013.

[23] TAHAN, M. *O homem que calculava*, 55 ed. Record, Rio de Janeiro - RJ, 2001.

[24] VICKI, V. Calculando com os egipcíos. http://www.numaboa.com.br/escolinha/matematica/240-calculando-com-os-egipcios, 2016. Acesso: 17 de Janeiro de 2017.

# Apêndice A

Questionário de Sondagem do Aluno.

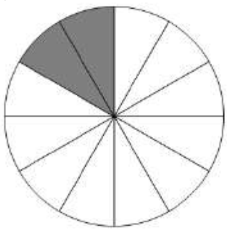
1) Represente geometricamente (através de figuras) as seguintes frações:

a) $\frac{2}{5}$

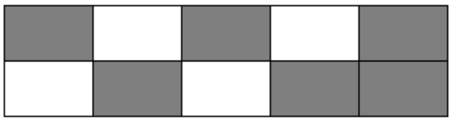
b) $\frac{4}{8}$

2) Escreva a fração que representada em cada uma das figuras:

a)



b)



3) Como se lêem as seguintes frações:

a) $\frac{3}{4} =$

b) $\frac{2}{3} =$

4) Determine o valor de:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

c) $\frac{4}{8} \times \frac{2}{6} =$

b) $\frac{6}{10} - \frac{1}{5} =$

d) $\frac{4}{6} \div \frac{1}{6} =$

5) Ana foi ao mercado para comprar uma cartela com $30$ ovos, no caminho de volta para casa ela deixou a cartela cair e quando a pegou percebeu que $\frac{2}{5}$ dos ovos quebraram. Com base nisso determine a quantidade de ovos que quebraram e a quantidade de ovos que permaneceram intactos.

# Apêndice B

Questionário do Professor.

Nome:______________________________Instituição:_____________________________.
Quanto tempo atua como professor de matemática: _________________________anos.
Graduado em Matemática: ( ) Sim ( ) Não
Graduação em outra área: ( ) Sim ( ) Não Qual:____________________.
Possui Especialização: ( ) Sim ( ) Não Qual:____________________.

1) Com relação ao conhecimento geral dos alunos com relação as frações você considera:
( ) Excelente ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Fraco ( ) Não sei definir

2) Em sua opinião o estudo de frações é bem assimilado pelo aluno:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei definir

3) Na abordagem de outros conteúdos programados você propõem situações que envolvam o uso de frações:
( ) Sempre ( ) Às vezes ( ) Raramente ( ) Nunca ( ) Não sei definir

A pergunta $4$ e $5$ será respondida apenas se você assinalou NÃO na questão $2$:

4) Na sua opinião porque o estudo das frações não é bem assimilado pelos alunos:

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

5) Quais estratégias podem ser adotadas para a mudança desse quadro:

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

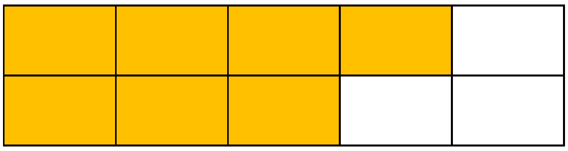
# Apêndice C

Frações

De modo prático a fração representa partes ou pedaços de um todo, assim, dois números inteiros escritos na forma $\dfrac{numerador}{denominador}$ formam uma fração.

- **denominador:** indica em quantas partes o todo está dividido;
- **Numerador:** indica quantas dessas partes devem ser consideradas.

Assim temos a fração $\dfrac{7}{10}$, representada geometricamente:



Leitura das Frações

As frações com denominadores menores que $10$ e as com denominadores $10$, $100$, $1000$, $10000$, ... têm nomes especiais.

| Denominador | Nome de cada parte | Denominador | Nome de cada parte |
|---|---|---|---|
| 2 | meio | 8 | oitavo |
| 3 | terço | 9 | nono |
| 4 | quarto | 10 | décimo |
| 5 | quinto | 100 | centésimo |
| 6 | sexto | 1000 | milésimo |
| 7 | sétimo | 10000 | décimo de milésimo |

Em uma fração, primeiro leia o numerador e, depois, o nome de cada parte. Assim temos por exemplo que: $\dfrac{3}{7}$ = três sétimos.

Nas frações com denominadores maiores que $10$, mas diferente de $100$, $1000$, $10000$, etc., leia o numerador, depois o denominador e, finalmente, a palavra **avos**. Assim por exemplo: $\dfrac{4}{11}$ = quatro onze avos.

Atividade 1

grupo:_________

Em conjunto com seus colegas elabore:

1) Conceito ou definição de fração.

2) Represente geometricamente as frações:

a) $\frac{2}{5} =$

b) $\frac{3}{4} =$

c) $\frac{7}{10} =$

d) $\frac{1}{6} =$

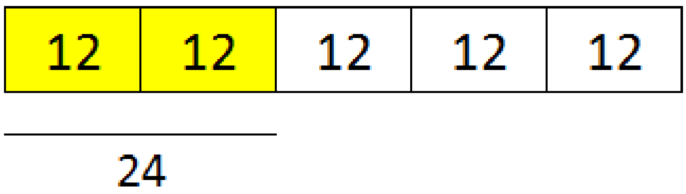
3) Com relação as frações da questão anterior: Faça leitura e escreva por extenso e depois determine o seu numerador e denominador:

# Apêndice D

Partes de um Todo

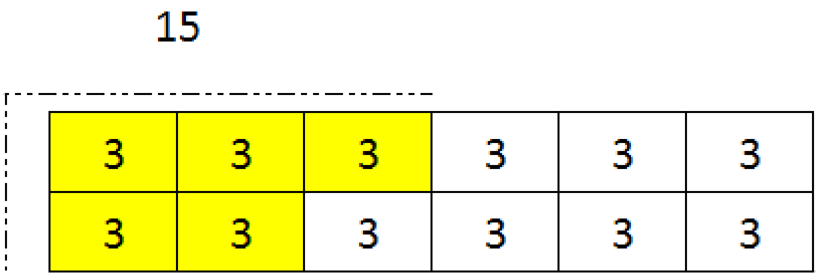
Para calcular o valor que uma fração representa de um todo, primeiro determinamos o valor da divisão desse número pelo denominador da fração, ou seja, dividindo o referido número em partes iguais de acordo com o denominado. Segundo, determinamos quantas partes serão tomadas, para isso, basta multiplicar o resultado da divisão pelo numerador da fração.

Primeiro, dividiremos $60$ em $5$ partes iguais, obtendo o resultado $12$, dessa forma cada uma das partes vale $12$. Como o numerador é $2$, tomamos duas partes, assim, temos $12 \cdot 2 = 24$. Portanto, $\frac{2}{5}$ de $60 = 12$.




Exemplo: Em uma prova de ciclismo, dos $36$ participantes que largaram $\frac{5}{12}$ deles não completaram a prova. Quantos ciclista desistiram?

Primeiro, dividiremos $36$ em $12$ partes iguais, obtendo o resultado $3$, dessa forma cada grupo de ciclista terá $3$ participantes. Como o numerador é $5$ temos $5 \cdot 3 = 15$.




Portanto, desistiram 15 ciclistas.

Atividade 2

grupo:________

Represente as situações por meio de diagramas e tente determinar o seu valor:

1) Qual o valor de $\frac{3}{5}$ de 10?

2) Qual o valor de $\frac{1}{8}$ de 40?

3) Ana tem $60$ bombons e vai repartir seus bombons da seguinte forma: $\frac{4}{6}$ vão ficar com ela e o restante com seu irmão Pedro. Determine a quantidade de bombons que cada um ficou?

4) Usando os dados da situação anterior, imagine que o irmão de Ana comeu $\frac{2}{5}$ dos bombons que ganhou, deu $2$ bombons para seu amigo Juca e guardou o restante, desse restante comeu a metade no dia seguinte:

a) Quantos bombons Pedro ficou após dar $2$ bombons para seu amigo?

b) Essa quantidade representa qual fração dos bombons de Ana?

c) Após comer a metade dos bombons, quantos sobraram?

d) Essa quantidade representa qual fração dos bombons de Ana?

5) Quanto é $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 30?

Desafio da Partilha dos 35 camelos:

Malba tahan escreveu muitos livros contando histórias de matemática. A que vamos contar é uma delas, extraída do livro ”O homem que calculava”:

Beremiz Samir, o homem que calculava, e seu amigo Hank-Tade-Maiá viajavam em um único camelo, quando encontraram 3 homens discutindo calorosamente. Eram três irmãos que tinham recebido 35 camelos como herança. Por determinação do pai, o mais velho deveria ficar com a metade dos camelos, o filho do meio ficaria com um terço dos camelos e o mais novo com a nona parte.

“Não nos entendemos, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas?” Perguntou o irmão mais velho..., mas para espanto de todos, Beremiz conseguiu resolver o problema com justiça e ainda saiu no lucro com a reposta encontrada. Como você acha que ele resolveu este problema?

# Apêndice E

Comparação entre Frações

Como definir a relação de maior e menor entre duas frações, como por exemplo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$?

1ª forma: Represente geometricamente as duas frações, de forma que o inteiro usado tenha as mesmas dimensões:

2ª forma: Podemos também reduzir as duas frações ao mesmo denominador, bastando multiplicar o numerador e o denominador de cada fração pelo denominador da outra, assim $\frac{1^{\times 3}}{2_{\times 3}} = \frac{3}{6}$ e $\frac{1^{\times 2}}{3_{\times 2}} = \frac{2}{6}$

Assim temos que $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$ logo $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Quando multiplicamos uma fração por um fator $k \neq 0$, encontramos uma fração equivalente: $\frac{1^{\times 2}}{2_{\times 2}} = \frac{2^{\times 2}}{4_{\times 2}} = \frac{4^{\times 2}}{8_{\times 2}} = \frac{8^{\times 2}}{16_{\times 2}} = \frac{16^{\times 3}}{32_{\times 3}} = \frac{48^{\times 3}}{96_{\times 3}} = ...$

Também podemos dividir uma fração por um fator $k'$, com$k' \neq 0$ até que numerador e denominador não tenha mais fatores em comum (primos entre si), chegando na fração irredutível:

$... = \frac{48^{\div 3}}{96_{\div 3}} = \frac{16^{\div 2}}{32_{\div 2}} = \frac{8^{\div 2}}{16_{\div 2}} = \frac{4^{\div 2}}{8_{\div 2}} = \frac{2^{\div 2}}{4_{\div 2}} = \frac{1}{2}.$

Atividade 3

grupo:_________

1) Dadas as frações abaixo, use >, < ou =:

a) $\frac{3}{7}$ ------ $\frac{4}{7}$

b) $\frac{5}{7}$ ------ $\frac{3}{4}$

c) $\frac{6}{5}$ ------ $\frac{98}{100}$

d) $\frac{8}{32}$ ------ $\frac{2}{4}$

2) Encontre uma fração equivalente:

a) $\frac{2}{5} =$

b) $\frac{3}{4} =$

c) $\frac{7}{10} =$

d) $\frac{1}{6} =$

3) Encontre a fração irredutível de:

a) $\frac{12}{30} =$

b) $\frac{30}{40} =$

c) $\frac{75}{100} =$

d) $\frac{10}{16} =$

# Apêndice F

Mínimo Múltiplo Comum ($mmc$)

O mínimo múltiplo comum de dois números naturais é o menor múltiplo comum, diferente de zero, desses números.

Uma forma prática para determinar o $m.m.c$ de dois ou mais números, é pela decomposição de todos os números em fatores primos ao mesmo tempo.

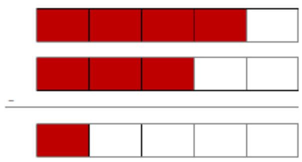
Assim por exemplo:

Determinar o $mmc(6, 8, 20)$:

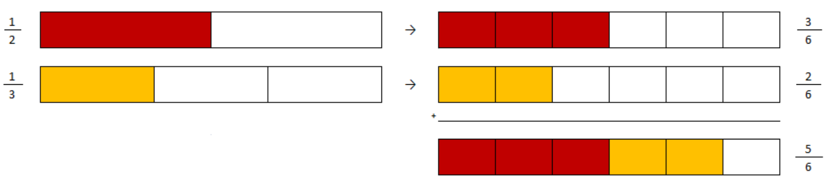
$$\begin{array}{r|l} 6,\ 8,\ 20 & 2 \\ 3,\ 4,\ 10 & 2 \\ 3,\ 2,\ 5 & 2 \\ 3,\ 1,\ 5 & 3 \\ 1,\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1,\ 1 & = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120, \text{ logo } mmc(6, 8, 20) = 120 \end{array}$$

Adição e Subtração

1º caso: Com denominadores iguais: Basta somar ou diminuir os numeradores e repetir o denominador comum, assim por exemplo: $\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{4-3}{5} = \dfrac{1}{5}$



2º caso: Com denominadores diferentes: Devemos reduzir essas frações ao mesmo denominador comum, obtendo frações equivalentes as frações dadas e depois somamos ou subtraímos essas novas frações: assim por exemplo temos que: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$




Podemos usar também a notação: $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$, assim $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \dfrac{3+2}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Atividade 4

grupo:_________

1) Calcule as adições e subtrações das frações homogêneas abaixo:

a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} =$

b) $\frac{4}{5} + \frac{2}{5} =$

c) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} =$

d) $\frac{17}{3} - \frac{2}{3} =$

2) Calcule as adições e subtrações das frações heterogêneas abaixo:

a) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} =$

b) $\frac{3}{2} + \frac{7}{3} =$

c) $\frac{6}{8} + \frac{3}{2} =$

d) $\frac{12}{6} - \frac{3}{8} =$

3) Um médico, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 2 em 2 horas, remédio B, de 3 em 3 horas e remédio C, de 6 em 6 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 8 horas da manhã, qual será o próximo horário de ingestão dos mesmos?

# Apêndice G

Multiplicação de Fração

Para multiplicar duas frações, fazemos automaticamente, a multiplicação entre os numeradores e os denominadores: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, com $b, d \neq 0$

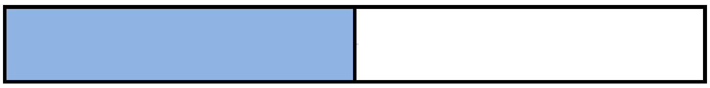
Assim temos que $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6}$.

Para representar geometricamente o produto de duas frações, seguimos o seguinte algoritmo:

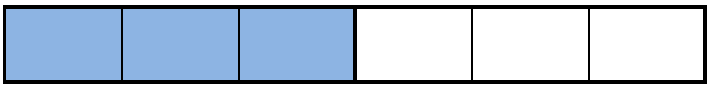
1. Escolhemos uma das frações;
2. Representamos geometricamente a fração escolhida;
3. Subdividimos cada uma das partes da representação geométrica da fração escolhida em partes menores iguais ao denominador da segunda fração;
4. Tomamos, para cada parte hachurada (colorida) da primeira fração, a quantidade de subdivisões iguais ao numerador da segunda fração;
5. O resultado do produto terá com numerador, o valor encontrado em (4) e como denominador, a quantidade total de subdivisões feitas em (3).

Para exemplificar seja o produto de, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$:

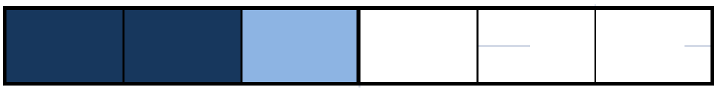
Para começar escolhemos uma das frações, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$; seja então a fração $\frac{1}{2}$; faremos então sua representação geométrica:



Agora subdividimos cada uma dessas parte em partes menores em quantidade iguais ao denominador da segunda fração, no caso $3$:



Agora, para cada parte colorida, tomamos a quantidade de subdivisões iguais ao numerador da segunda fração, no caso $2$:



Portanto, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$.

Divisão de Fração

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $b, d \neq 0$ definimos que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Dessa forma para dividir uma fração por outra, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração:

Assim sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $b \neq 0$, temos que $a \div b \longrightarrow \frac{a}{b} \longrightarrow \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} \longrightarrow \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b}$.

Para exemplificar, seja $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$:

temos que o inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$, logo o resultado da divisão será:

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Atividade 5

grupo:_________

1) Efetue as multiplicação utilizando o conceito geométrico:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} =$

c) $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} =$

2) Efetue as divisões de frações abaixo:

a) $\frac{12}{45} \div \frac{4}{3} =$

b) $\frac{1}{7} \div \frac{2}{3} =$

c) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} =$

d) $\frac{15}{4} \div \frac{5}{6} =$

3) Pedro preparou um suco de frutas da seguinte forma: misturou $\frac{3}{4}$ de litro de suco de acerola com $\frac{3}{4}$ de litro de suco de laranja. Adicionou mais $\frac{3}{4}$ de litro de leite condensado e $\frac{1}{4}$ de litro de suco de limão. bateu tudo no liquidificador e serviu em dez taças. Que fração do litro caberá, no máximo, em cada taça?

# Apêndice H

Decimais em fração

Na transformação de decimais em frações, há basicamente duas possibilidades: o número decimal é finito, ou infinito (dízimas periódicas). Lembrando que as dízimas não periódicas, são os chamados números irracionais, e não podem ser representados na forma de frações.

Decimais Finitos.

Para transformar decimais finitos em fração, basta contar quantas casas para a direita a vírgula deverá andar para que o número deixe de ser decimal, esse número será o numerador. O denominador da fração será $10^n$, onde $n$ é a quantidade de casas decimais percorridas pela vírgula. Por exemplo:

- $0,4 = \frac{4}{10}$; a vírgula percorreu uma casa, logo o numerador é 4, e o denominador $10^1 = 10$.
- $2,45 = \frac{245}{100}$; a vírgula percorreu duas casas, logo o numerador é 245, e o denominador $10^2 = 100$.

Dízimas Periódicas

Dízima periódica é um número que quando escrito no sistema decimal apresenta uma série infinita de algarismos decimais que, a partir de um certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição e chamados de período. Por exemplo: $4,2323232323...$

Seja a dízima periódica simples, (o período aparece imediatamente após a vírgula), $0,44444...$ por exemplo:

Fazendo $x = 0,44444...$ (1), como repete apena um algarismo multiplicamos apenas $10$, assim temos $10x = 4,4444...$ (2), agora subtraímos (2) e (1):

$$\begin{array}{rcll} 10x & = & 4,4444... & (2) \\ 1x & = & 0,4444... & (1) \\ \hline 9x & = & 4 & \\ x & = & \frac{4}{9} & \end{array}$$

Seja a dízima periódica composta, ( há um ou mais algarismos entre a vírgula e o período, que não entram em sua composição), $1,4232323...$ por exemplo:

Fazendo $x = 1,4232323...$ (1), como temos um algarismo que não compõem o período, multiplicamos por $10$, assim temos $10x = 14,232323...$ (2), agora multiplicamos

(2) por $100$, pois repetem dois algarismos, assim temos $1000x = 1423,2323...$ (3), subtraímos (3) e (2) conseguimos eliminar o período:

$$\begin{array}{rcll} 1000x & = & 1423,2323... & (3) \\ 10x & = & 14,2323... & (2) \\ \hline 990x & = & 1409 & \\ x & = & \dfrac{1409}{990} & \end{array}$$

Porcentagem

A ideia da porcentagem é representar uma porção de um todo dividido em 100 partes, e usamos o simbolo $\%$ (por cento ). Assim:

- $10\%$ é $10$ partes de um total de $100$, logo, $\dfrac{10}{100}$.
- $57\%$ é $57$ partes de um total de $100$, logo, $\dfrac{57}{100}$.

A porcentagem é amplamente utilizada na matemática comercial e em situações práticas do cotidiano, lembrando que a porcentagem nunca aparece isolada, ou seja, sempre calculamos a porcentagem em relação a algum valor:

- $30\%$ de $60 = \dfrac{30}{100}$ de $60 = \dfrac{30 \cdot 60}{100} = \dfrac{1800}{100} = 18.$
- $2\%$ de $2500 = \dfrac{2}{100}$ de $2500 = \dfrac{2 \cdot 2500}{100} = \dfrac{5000}{100} = 50.$

Exemplo: O salário de Roberval era de $R\$960,00$. Ele ganhou um aumento de $20\%$. Determine o valor do novo salário de Roberval?

Resolução: Vamos determinar o valor de $20\%$ de 960,00, assim temos:

$$\frac{20}{100} \cdot 960 = \frac{20 \cdot 960}{100} = \frac{19200}{100} = 192.$$

Assim temos que o aumento do salário foi de $192$, logo o novo salário é $960 + 192 = 1152$.

Portanto o novo salário de Roberval é de $R\$1152,00$

Atividade 6

grupo:_________

1) Determine a fração geratriz dos decimais abaixo:

a) $0,55555... =$ b) $12,676767... =$

c) $2,3151515... =$ d) $1,67777... =$

2) Qual o valor de:

a) $10\%$ de $40 =$ b) $75\%$ de $150 =$

c) $50\%$ de $140 =$ d) $5\%$ de $150 =$

3) Em uma peixaria a câmara frigorífica não funcionou corretamente e ocorreu uma perda de 65% do estoque de camarão. Sabendo que na peixaria tinha 650 quilos de camarão determine a quantidade de camarão que não foi perdida.

# Apêndice I

Atividade 7

grupo:_________

1) Resolva a equação fracionaria, sendo $x \neq 0$:

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

2) Resolva a equação abaixo:

$$2x + \frac{1}{5} - \frac{x}{10} = \frac{1}{2} + \frac{8}{5}$$

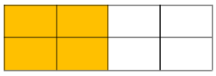
3) Em certo país, os trabalhadores recebem dois salários mínimos em dezembro: o salário normal e o $13^{\underline{o}}$ salário. Se a pessoa trabalhou os 12 meses do ano, os dois salários serão iguais. Se a pessoa trabalhou uma fração do ano, o $13^{\underline{o}}$ salário corresponderá a essa fração do salário normal. Se o salário normal de uma pessoa é de $516$ reais e ela trabalhou 7 meses nesse ano, quanto ela vai receber de $13^{\underline{o}}$ salário?

4) Uma confecção produzia diariamente 200 calças. Após a contratação de 20 costureiras, a fábrica passou a produzir 240 calças. Quantas costureiras trabalhavam nessa confecção antes dessa contratação.

# Apêndice J

## Soluções das Atividades

### Questionário de Sondagem do Aluno

1. a)  b) 

2. a) $\frac{2}{12}$ b) $\frac{6}{10}$

3. a) três quartos. b) dois terços.

4. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

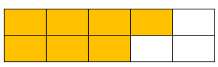
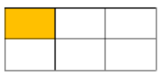
   b) $\frac{6}{10} - \frac{1}{5} = \frac{6 \cdot 5 - 1 \cdot 10}{10 \cdot 5} = \frac{30 - 10}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

   c) $\frac{4}{8} - \frac{2}{6} = \frac{4 \cdot 2}{8 \cdot 6} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ d) $\frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{1} = \frac{24}{6} = 4$

5. Como quebraram $\frac{2}{5}$ dos $30$ ovos temos, $\frac{2}{5}$ de $30 = \frac{2}{5} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 30}{5} = \frac{60}{5} = 12$ Portanto temos que 12 ovos foram quebrados, e assim, restando 18 ovos intactos.

### Atividade 1

1. As frações são números que expressam valores que representam partes de um todo e são representadas como quociente de dois números inteiros; usamos a notação: $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$.

2. a)  b)  c)  d) 

3. a) Dois quintos; numerador igual a 2 e denominador igual a 5.

   b) Três quartos; numerador igual a 3 e denominador igual a 4.

   c) Sete décimos; numerador igual a 7 e denominador igual a 10.

   d) Um sexto; numerador igual a 1 e denominador igual a 6.

**Atividade 2**

1. $\frac{3}{5}$ de $10 = \frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{3 \cdot 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

2. $\frac{1}{8}$ de $40 = \frac{1}{8} \cdot 40 = \frac{1 \cdot 40}{8} = \frac{40}{8} = 5$

3. Ana tem 60 bombons, vamos determinar $\frac{4}{6}$ de $60$, logo temos: $\frac{4}{6} \cdot 60 = 40$. Portanto, Ana ficou com $40$ bombons e Pedro com $20$.

4. Pedro comeu $\frac{2}{5}$ de $20$, então temos: $\frac{2}{5} \cdot 20 = 8$. Portanto, Pedro comeu $8$ bombons e restaram $12$.

   a) Como tinha $12$ bombons e deu $2$ bombons para seu amigo, restaram $10$ bombons. b) $\frac{10}{40}$ c) Como tinha $10$ bombons, a metade é $5$. d) $\frac{5}{40}$

5. Primeiro, determinamos $\frac{1}{3}$ de $30$, assim temos: $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$, agora calculamos $\frac{4}{5}$ de $10$, logo temos: $\frac{4}{5} \cdot 10 = 8$. Portanto, $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de $30 = 8$.

**Desafio dos camelos:**

O total de $35$ camelos, de acordo com o enunciado da história, deve ser repartido, pelos três herdeiros, do seguinte modo: metade para o mais velho, um terço para o filho do meio e a nona parte para o filho mais novo. Fazendo dessa forma termos que, o filho mais velho fica com $17 + \frac{1}{2}$, o filho do meio fica com $11 + \frac{2}{3}$ e o filho mais novo fica com $3 + \frac{8}{9}$.

Observe que: $(17 + \frac{1}{2}) + (11 + \frac{2}{3}) + (3 + \frac{8}{9}) = 33 + \frac{1}{18}$, tendo uma sobra de $1$ camelo mais $\frac{17}{18}$.

Note que a fração $\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$, que é justamente as partes que faltam para completar as frações, assim ficaria, $\frac{1}{2}$ para o filho mais velho, passando a receber 18 camelos; $\frac{1}{3}$ para o filho do meio, passando a receber 12 camelos; $\frac{1}{9}$ para o filho mais novo, passando a receber 4 camelos. Tendo assim: $18 + 12 + 4 = 34$ camelos, sobrando 1 camelo.

Dessa forma houve um erro no testamento, pois, a metade de um todo, mais a terça parte desse todo, mais um nono desse todo, não é igual ao todo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, ficando uma sobra de $\frac{1}{18}$ da herança.

Para fazer esse aumento para cada herdeiro, acrescentou-se $1$ camelo, ficando 36 camelos, assim, $\frac{1}{2}$ de $36 = 18$; $\frac{1}{3}$ de $36 = 12$ e $\frac{1}{9}$ de $36 = 4$, logo foram repartidos apenas $\frac{17}{18}$ da herança, que é igual a $34$ e sobrando $\frac{1}{18}$ da herança, que é igual a $2$.

Todos os herdeiros ficaram satisfeitos, pois, receberam mais do que o previsto pela partilha inicial. Mas, $18 + 12 + 4 = 34$, sobrando 2 camelos, sendo devolvido o camelo de amigo de Beremiz. O camelo restante ficou com próprio Beremiz, a título de prêmio por ter resolvido o problema da partilha da herança.

**Atividade 3**

1. a) $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$, de fato $\frac{20}{28} < \frac{21}{28}$ c) $\frac{6}{5} > \frac{98}{100}$, de fato $\frac{120}{100} > \frac{98}{100}$

   d) $\frac{8}{32} > \frac{2}{4}$, de fato $\frac{1}{4} < \frac{2}{4}$

2. Basta multiplicar o numerador e denominador por um fator inteiro $k$, com $k > 0$, tendo assim uma infinidade de frações com a mesma equivalência das frações dadas.

   a) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = ...$ b) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = ...$ c) $\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = ...$

   d) $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = ...$

3. Basta dividir o numerador e denominador por um fator inteiro $k$, com $k \neq 0$ até que numerador e denominador não tenha mais fatores em comum (primos entre si), chegando na fração irredutível.

   a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

## Atividade 4

1. a) $\frac{6}{3} = 2$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{15}{3} = 5$

2. a) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{20 + 6}{8} = \frac{26}{8}$ b) $\frac{3}{2} + \frac{7}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 7}{2 \cdot 3} = \frac{9 + 14}{6} = \frac{23}{6}$

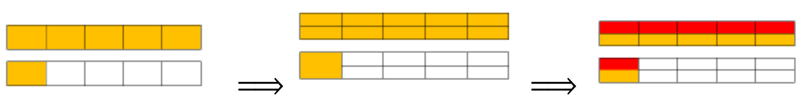
   c) $\frac{6}{8} + \frac{3}{2} = \frac{6 \cdot 2 + 8 \cdot 3}{2 \cdot 8} = \frac{12 + 24}{16} = \frac{36}{16}$ d) $\frac{12}{6} - \frac{3}{8} = \frac{2}{1} - \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8 - 1 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{16 - 3}{8} = \frac{13}{8}$

3. Basta definir o $m.m.c$ dos números dados, assim o $m.m.c(2, 3, 6) = 6$. Portanto, de $6$ em $6$ horas os três remédios serão ingeridos juntos. Assim, o próximo horário será às 14 horas.

## Atividade 5

1. a) Para $\frac{3}{5}$ temos:  $\frac{3}{10}$

   b) Para $\frac{2}{5}$ temos:  $\frac{4}{15}$

   c) Para $\frac{6}{5}$ temos:  $\frac{6}{10}$

   d) Para $\frac{3}{4}$ temos:  $\frac{3}{8}$

2. a) $\frac{12}{45} \div \frac{4}{3} = \frac{12}{45} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$

c) $\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$ d) $\frac{15}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{2}$

3. Vamos somar as quantidades de ingrediente, logo temos: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$, logo temos $\frac{10}{4}$ de litro, dividindo igualmente em $10$ taças temos: $\frac{10}{4} \div 10 = \frac{1}{4}$. Portanto, as taças devem ter capacidade para $\frac{1}{4}$ de litro de suco.

## Atividade 6

1. a) Fazendo $x = 0,55555...$ (1), como repete apena um algarismo multiplicamos apenas $10$, assim temos $10x = 5,5555...$ (2), agora subtraímos (2) e (1):

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 5,5555... \quad (2) \\ 1x & = & 0,5555... \quad (1) \\ \hline 9x & = & 5 \\ x & = & \frac{5}{9} \end{array}$$

b) Fazendo $x = 12,676767...$ (1), como repete dois algarismo multiplicamos por $100$, assim temos $100x = 1267,6767...$ (2), agora subtraímos (2) e (1):

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 1267,6767... \quad (2) \\ 1x & = & 12,6767... \quad (1) \\ \hline 99x & = & 1255 \\ x & = & \frac{1255}{99} \end{array}$$

c) Fazendo $x = 2,3151515...$ (1), como temos um algarismo que não compõem o período, multiplicamos por $10$, assim temos $10x = 23,151515...$ (2), agora multiplicamos (2) por $100$, pois repetem dois algarismos, assim temos $1000x = 2315,1515...$ (3), subtraímos (3) e (2) conseguimos eliminar o período:

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 2315,1515... \quad (3) \\ 10x & = & 23,1515... \quad (2) \\ \hline 990x & = & 2292 \\ x & = & \frac{2292}{990} \end{array}$$

d) Fazendo $x = 1,67777...$ (1), como temos um algarismo que não compõem o período, multiplicamos por $10$, assim temos $10x = 16,7777...$ (2), agora multiplicamos (2) por $10$, pois repetem um algarismo, assim temos $100x = 167,777...$ (3), subtraímos (3) e (2) conseguimos eliminar o período:

$$\begin{array}{rcll} 100x & = & 167,777... & (3) \\ 10x & = & \ \ 16,777... & (2) \\ \hline 90x & = & 151 & \\ x & = & \dfrac{151}{90} & \end{array}$$

2. a) $\dfrac{10}{100} \cdot 40 = 4$ b) $\dfrac{75}{100} \cdot 150 = 11,25$ c) $\dfrac{50}{100} \cdot 140 = 70$ d) $\dfrac{5}{100} \cdot 150 = 7,5$

3. Temos que calcular então $35\%$ do total do estoque para determinar a quantidade de camarão que não foi perdida, assim temos: $35\%$ de $650 = \dfrac{35}{100} \cdot 650 = 227,5$. Portanto, $227,5$ quilos de não perderam.

## Atividade 7

1.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{5} & = & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{60 + 8x}{20x} & = & \dfrac{15x}{20x} \\ 60 + 8x & = & 15x \\ x & = & \dfrac{60}{7} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} 2x + \dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{10} & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{8}{5} \\ \dfrac{20x + 2 - x}{10} & = & \dfrac{5 + 16}{10} \\ 19x & = & 19 \\ x & = & 1 \end{array}$$

3. Temos que o funcionário trabalhou 7 meses, então ele irá receber $\frac{7}{12}$ do 13 º salário, assim temos: $\frac{7}{12} \cdot 516 = 301$. Portanto, o salário pago para o 13º salário será de 301 reais.

4. Seja $x$ a quantidade de pessoas que trabalham na confecção, temos então a razão: $\frac{200}{x} = \frac{240}{x+20}$, daí:

$$\begin{aligned} \frac{200}{x} &= \frac{240}{x+20} \\ 200 \cdot (x+20) &= 240x \\ 200x + 4000 &= 240x \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Portanto, trabalhavam $100$ costureiras na confecção antes da contratação.

# A Relação de Equivalência

Neste tópico, discutiremos o conceito de relação de equivalência, usaremos como base o conhecimento da estrutura e propriedades básicas de conjuntos. Assim para as definições, resultados e demonstrações seguintes utilizaremos as referências: [10], [14] e [16].

**Definição A.0.1.** *Seja $A$ um conjunto qualquer. Definimos o produto cartesiano de $A$ por $A$, denotado por $A \times A$, como o conjunto de todos os pares ordenados compostos por elementos de A.*

$$A \times A = \{(a, b) |\ a, b \in A\}.$$

**Definição A.0.2.** *Uma relação binária $R$ num conjunto $A$ é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, isto é, $R \subset A \times A$.*

**Definição A.0.3.** *Seja $A$ um conjunto e seja $R$ uma relação entre pares de elementos de $A$. Dizemos que $R$ é uma relação de equivalência em $A$ se as seguintes propriedades são verificadas quaisquer que sejam $a, b$ e $c \in A$.*

1. *Reflexiva: $aRa$, para todo $a \in A$;*

2. *Simétrica: Se $aRb$ então $bRa$;*

3. *Transitiva: Se $aRb$ e $bRc$ então $aRc$.*

**Exemplo A.0.1.** *Seja $A$ um conjunto. Temos que $A \times A = \{(x, y) |\ x, y \in A\}$ é uma relação de equivalência em $A$. De fato,*

1. *Reflexiva: seja $a \in A$, claramente $(a, a) \in A \times A$, portanto, $aRa$, para todo $a \in A$;*

2. *Simétrica: sejam $a, b \in A$ e $aRb$, ou seja, $(a, b) \in A \times A$. Como $a, b \in A$, é imediato que $(b, a) \in A \times A$, logo, $bRa$;*

3. *Transitiva: sejam $a, b, c \in A$, $aRb$ e $bRc$, ou seja, $(a, b), (b, c) \in A \times A$, como $a, c \in A$, $(a, c) \in A \times A$, ou seja, $aRc$.*

**Exemplo A.0.2.** *$R = \{(a,a) | \ x \in A\}$ é uma relação de equivalência em $A$. Esta relação se chama igualdade em $A$ (ou identidade de $A$), e se denota por "=". Como $(a,a) \in R$ para todo $a \in A$, temos que $a = a, \forall a \in A$. Esta relação é de equivalência em $A$. De fato,*

1. *Reflexiva: seja $a \in A$, como $(a,a) \in R$, logo $a = a$;*

2. *Simétrica: se $a, b \in A$ e $(a,b) \in R$, temos que existe $x \in A$ tal que $(a,b) = (x,x)$, assim temos que $a = b$. Como $(x,x) = (a,b) \in R$ e $a = b$, então $(x,x) = (b,a) \in R$;*

3. *Transitiva: se $a,b,c \in A$, $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, pelo item anterior, temos que $a = b$ e $b = c$, portanto, $a = c$. Assim, $(a,c) \in R$.*

**Exemplo A.0.3.** *Qualquer relação de equivalência em $A$ está compreendida entre os dois exemplos anteriores, ou seja, "=" $\subset R \subset A \times A$. De fato, seja $A$ um conjunto e $R$ uma relação de equivalência qualquer sobre $A$. É imediato que $R \subset A \times A$, por definição de relação. Temos que "=" $= \{(a,a) | \ a \in A\}$. Tomemos $(a,a) \in$ "=" para um $a \in A$ qualquer. Temos que $(a,a) \in R$, pela propriedade reflexiva, segue que para todo $a \in A$ que $aRa$. Dessa forma "=" $\subset R$. Portanto "=" $\subset R \subset A \times A$.*

**Definição A.0.4.** *Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$ e $a \in A$ um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto $\bar{a} = \{x \in A | \ xRa\}$ chama-se classe de equivalência de $a$ pela relação $R$ e representa os elementos de $A$ que se relacionam com $a$.*

**Teorema A.0.1.** *Seja $R$ uma relação de equivalência em um conjunto $A$ e $a, b$ elementos quaisquer de $A$, então:*

1. *$a \in \bar{a}$;*

2. *$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow aRb$;*

3. *$\bar{a} \neq \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.*

4. *$\displaystyle\bigcup_{a \in A} \bar{a} = A$*

*Demonstração.* Para (1) temos que $\bar{a} = \{x \in A | \ xRa\}$. Como $R$ é uma relação de equivalência, $aRa$, logo $a \in \bar{a}$;

Para (2):

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\bar{a} = \bar{b}$, onde $\bar{a} = \{x \in A | \ xRa\}$ e $\bar{b} = \{y \in A | \ yRb\}$. Seja $a \in \bar{a}$, de onde segue que, $a \in \bar{b}$, pois por hipótese $\bar{a} = \bar{b}$, logo pela definição de $\bar{b}$, $aRb$;

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $aRb$. Devemos mostrar que $\bar{a} = \bar{b}$, ou seja, $\bar{a} \subset \bar{b}$ e $\bar{b} \subset \bar{a}$. Assim, seja $a \in \bar{a}$, por hipótese, $aRb$, temos que $a \in \bar{b}$, logo, $\bar{a} \subset \bar{b}$. Analogamente, para

$b \in \bar{b}$ temos por hipótese que $aRb$ e como $R$ é uma relação de equivalência, temos que $bRa$ e portanto $b \in \bar{a}$, logo, $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Para (3):

($\Rightarrow$) Seja $\bar{a} \neq \bar{b}$, com $\bar{a} = \{x \in A |\ xRa\}$ e $\bar{b} = \{y \in A |\ yRb\}$. Suponhamos que exista $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$, ou seja, $c \in \bar{a}$ e $c \in \bar{b}$. Sendo assim, $cRa$ e $cRb$, garante que $aRb$. Pelo item (2) deste teorema, concluímos que $\bar{a} = \bar{b}$, contradizendo a hipótese. Portanto, $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Seja $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$. Suponhamos que $\bar{a} = \bar{b}$, pelo item (2) deste teorema temos que $aRb$, ou seja, $a \in \bar{b}$. É imediato que $a \in \bar{a}$, sendo assim, $a$ está em $\bar{a}$ e em $\bar{b}$, o que contradiz a hipótese de que $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$. Portanto, $\bar{a} \neq \bar{b}$.

Para (4): vamos provar que $\bigcup_{a \in A} \bar{a} = A$. De fato, temos primeiramente que $\bar{a} \subset A$, $\forall a \in A$ e daí segue que $\bigcup_{a \in A} \bar{a} \subset A$. Reciprocamente temos que $a \in \bar{a}$, $\forall a \in A$ e portanto segue que $A \subset \bigcup_{a \in A} \bar{a}$. Como $\bigcup_{a \in A} \bar{a} \subset A$ e $A \subset \bigcup_{a \in A} \bar{a}$, temos que $\bigcup_{a \in A} \bar{a} = A$.

■

# B Enumerabilidade nos Racionais

Neste tópico, discutiremos alguns aspectos de grande relevância do conjunto dos números racionais: enumerabilidade, imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, densidade, corpo arquimediano e outro propriedades importantes. Tratando-se de uma material de apoio para pesquisa e estudo de docentes, discentes e pessoas interessadas. Assim para as definições, resultados e demonstrações seguintes utilizaremos as referências: [10], [14] e [16].

Definiremos agora a função imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$:

**Teorema B.0.1.** *A função $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $i(n) = \dfrac{n}{1}$ é injetora. Além disso, ela preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$:*

1. $i(m+n) = i(m) + i(n)$
2. $i(mn) = i(m)i(n)$
3. *Se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$.*

*Demonstração.* Provaremos que $f$ é injetora. Se $i(m) = i(n)$, temos que $\dfrac{m}{1} = \dfrac{n}{1}$, isto é $m \cdot 1 = n \cdot 1$, logo $m = n$, portanto $i(m) = i(n) \Longrightarrow m = n$, dessa forma $i$ é injetora.

Para (1) temos que: $i(m+n) = \dfrac{m+n}{1} = \dfrac{1 \cdot m + n \cdot 1}{1 \cdot 1} = \dfrac{m}{1} + \dfrac{n}{1} = i(m) + i(n)$;

Para (2) temos que: $i(mn) = \dfrac{mn}{1} = \dfrac{m \cdot n}{1 \cdot 1} = \dfrac{m}{1}\dfrac{n}{1} = i(m)i(n)$;

Para (3) temos que: $m \leq n \Longrightarrow m \cdot 1 \leq n \cdot 1 \Longrightarrow \dfrac{m}{1} \leq \dfrac{n}{1} \Longrightarrow i(m) \leq i(n)$. ■

**Proposição B.0.1.** *Admitindo a identificação de $\mathbb{Z}$ com $i(\mathbb{Z})$, para $r, s$ racionais arbitrários, valem:*

1. *Se $rs = 0$, então $s = 0$ ou $r = 0$;*
2. *Se $r > 0$ e $s > 0$, então $rs > 0$;*
3. *Se $r > 0$ e $s < 0$, então $rs < 0$;*
4. *Se $r < 0$ e $s < 0$, então $rs > 0$;*
5. *Se $r > 0$, então $r^{-1} > 0$;*
6. *Se $r < s$, então $r < (r+s) \cdot 2^{-1} < s$.*

*Demonstração.* Sejam $r = \dfrac{a}{b}$ e $s = \dfrac{c}{d}$, e com $b, d > 0$:

Para (1) suponhamos $\dfrac{c}{d} \neq 0$, ou seja, $c \neq 0$; temos então que $\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} = 0 \Longrightarrow ac = 0 \Longrightarrow a = 0$, portanto $\dfrac{a}{b} = 0$. Analogamente supondo $\dfrac{a}{b} \neq 0$, concluirmos que $\dfrac{c}{d} = 0$.

Para (2) como $\dfrac{a}{b} > 0 \Longrightarrow a > 0$ e $\dfrac{c}{d} > 0 \Longrightarrow c > 0$ então temos que $ac > 0$, logo $\dfrac{ac}{bd} > 0 \Longrightarrow rs > 0$.

Para (3) como $\dfrac{a}{b} > 0 \Longrightarrow a > 0$ e $\dfrac{c}{d} < 0 \Longrightarrow c < 0$ então temos que $ac < 0$, logo $\dfrac{ac}{bd} < 0 \Longrightarrow rs < 0$.

Para (4) como $\dfrac{a}{b} < 0 \Longrightarrow a < 0$ e $\dfrac{c}{d} < 0 \Longrightarrow c < 0$ então temos que $ac > 0$, logo $\dfrac{ac}{bd} > 0 \Longrightarrow rs > 0$.

Para (5) como $\dfrac{a}{b} > 0 \Longrightarrow a > 0$ e temos que $b > 0$, logo $\dfrac{b}{a} > 0 \Longrightarrow r^{-1} > 0$.

Para (6) se $r < s$. temos que, $2r < r + s$ e $r + s < 2s$, comparando as desigualdades temos que $2r < r + s < 2s$, multiplicando por $2^{-1}$ temos $2r \cdot 2^{-1} < (r + s) \cdot 2^{-1} < 2s \cdot 2^{-1} \Longrightarrow 2 \cdot 2^{-1} \cdot r < (r + s) \cdot 2^{-1} < 2 \cdot 2^{-1} \cdot s \Longrightarrow 1 \cdot r < (r + s) \cdot 2^{-1} < 1 \cdot s \Longrightarrow r < (r + s) \cdot 2^{-1} < s$. ■

Temos então que o conjunto $i(\mathbb{Z}) = \{\dfrac{m}{1} |\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$. Essa imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, mostra que $\mathbb{Q}$ é infinito, ja que $\mathbb{Z}$, contém uma cópia de $\mathbb{N}$. Para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável segue:

**Definição B.0.1.** *Um conjunto $X$ diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Neste caso, $f$ chama-se uma enumeração dos elementos de $X$. Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n, ...$ tem-se então $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$*

**Teorema B.0.2.** *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

*Demonstração.* Se $x$ é finito, nada há para demonstrar. Caso contrário, enumeramos os elementos de $X$ pondo $x_1$ = menor elemento de $X$, e supondo definidos $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$, escrevemos $A_n = X - \{x_1, ..., x_n\}$. Observando que $A_n \neq \emptyset$, pois $X$ é infinitos, definimos $x_{n+1}$ = menor elemento de $A_n$. Então $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $x \in X$ diferente de todos os $x_n$, teríamos $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $x$ seria um número natural maior do que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, ..., x_n, ...\}$, dessa forma, o conjunto infinito $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ estaria limitado ao valor de $x$, o que é um absurdo. ■

**Corolário B.0.3.** *Seja $f : X \longrightarrow Y$ injetiva. Se $Y$ é enumerável então $X$ também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

*Demonstração.* Com efeito, basta considerar o caso em que existe uma bijeção $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{N}$. Então $\varphi \circ f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção de $X$ sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$, o qual é enumerado pelo teorema 2.3.4 . No caso particular de $X \subset Y$, tomamos $f : X \longrightarrow Y$ igual à aplicação de inclusão. ■

**Corolário B.0.4.** *Seja $f : X \longrightarrow Y$ sobrejetiva. Se $X$ é enumerável então $Y$ também é.*

*Demonstração.* Com efeito, para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue-se dai que $g$ é injetiva. Pelo corolário anterior, $Y$ é enumerável. ■

**Corolário B.0.5.** *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

*Demonstração.* Com efeito, se $X$ e $Y$ são enumeráveis então existem sobrejeções $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow Y$, logo $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetora. Portanto, basta mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso, considere a aplicação $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $\psi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, $\psi$ é injetiva. Segue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. ■

**Corolário B.0.6.** *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é enumerável:*

*Demonstração.* De fato, considere o conjunto $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, temos que $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, e como, $\mathbb{Z}$ é enumerável, temos que $\mathbb{Z}^*$ também é enumerável. Segue do corolário anterior que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Defina agora a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$, dada por $f(m, n) = \dfrac{m}{n}$. Como $f$ é sobrejetiva, temos pelos corolários anteriores que $\mathbb{Q}$ é enumerável ■

**Teorema B.0.7.** *Todo número racional positivo $\dfrac{a}{b}(a, b > 0)$, pode ser escrito, de modo único, como uma fração irredutível, isto é, na forma $\dfrac{m}{n}$, onde $m$ e $n$ são primos entre si, ou seja, não possuem fatores primos em comum.*

*Demonstração.* Seja $km$ uma decomposição de $a$ e $kn$ uma decomposição de $b$, onde $k$ é o produto de todos os fatores primos comuns de $a$ e $b$. Sendo assim, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{km}{kn}$, daí, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$, onde $m$ e $n$ são primos entre si, portanto, $\dfrac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Seja $\dfrac{m'}{n'}$ uma fração irredutível igual a $\dfrac{m}{n}$, logo $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{m}{n} \Longrightarrow m'n = mn'$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, $m'$ deve conter os fatores primos de $m$ e vice-versa e $n'$ deve conter os fatores primos de $n$ e vice-versa (de fato, $m'$ e $n'$ são primos entre si, da mesma forma com $m$ e $n$). Portanto, $m' = m$ e $n' = n$. ■

**Teorema B.0.8.** *($\mathbb{Q}$ não é bem ordenado) Existem em $\mathbb{Q}$, subconjuntos não vazios, limitados inferiormente que não possuem mínimo.*

*Demonstração.* Seja o conjunto $X = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ |2^{-1} < \frac{a}{b}\}$. Como $X$ é limitado inferiormente por $2^{-1}$ e $X \neq \emptyset$, pois $1 \in X$. Suponhamos que $X$ possua um elemento mínimo, digamos $\frac{c}{d}$, dessa forma temos que $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ para todo $\frac{a}{b} \in X$. Como $2^{-1}$ é limitante inferior de $X$, temos que, $2^{-1} < \frac{c}{d}$, usando o item (6) da proposição 2.3.2 segue:

$$2^{-1} < \frac{c}{d} \Longrightarrow 2^{-1} < (2^{-1} + \frac{c}{d}) \cdot 2^{-1} < \frac{c}{d}$$

Assim temos que $(2^{-1} + \frac{c}{d}) \cdot 2^{-1} \in X$ e $(2^{-1} + \frac{c}{d}) \cdot 2^{-1} < \frac{c}{d}$, o que contradiz a minimalidade de $\frac{c}{d}$. Portanto, $X$ não possui elementos mínimos. ∎

Apesar de $\mathbb{Q}$ não ser bem ordenado como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ possui todas as propriedades aritméticas de $\mathbb{Z}$, além da propriedade de que todo elemento não nulo possui inverso. Na linguagem algébrica, qualquer conjunto munido de duas operações, denotadas usualmente por "+"e "·", com propriedades aritméticas análogas às de $\mathbb{Q}$, chama-se *corpo*. Se, além disso, um corpo estiver munido de uma relação de ordem compatível com suas operações aritméticas, ele é chamado de *corpo ordenado*. Assim $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

**Teorema B.0.9.** *$\mathbb{Q}$ não possui elemento máximo e nem mínimo.*

*Demonstração.* Suponha que exista um elemento máximo em $\mathbb{Q}$, digamos $m_x = \frac{m}{n}$, isto é, $\frac{a}{b} \leq \frac{m}{n}$ para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Temos que $\frac{m}{n} + 1 = \frac{m+n}{n} \in \mathbb{Q}$, além disso, $\frac{m}{n} < \frac{m+n}{n}$, o que contradiz o fato de $\frac{m}{n}$ ser o elemento máximo. Portanto $\mathbb{Q}$ não possui elemento máximo. De forma análoga obtemos que $\mathbb{Q}$ não possui elemento mínimo. ∎

**Definição B.0.2.** *Seja $K$ um corpo ordenado. Dizemos que $K$ é arquimediano se, dados $a, b \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;*

**Teorema B.0.10.** *Com base na definição anterior:*

1. *O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ não é limitado superiormente;*
2. *O ínfimo do conjunto $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ é igual a $0$;*
3. *$\mathbb{Q}$ é um corpo arquimediano.*

*Demonstração.* Para (1) suponha que exista $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $b > 0$ (por convenção), temos que $a, b \in \mathbb{Z}_+^*$, assim temos que $a, b \in \mathbb{N}^*$. Dessa forma, $b > 1$ e, assim, $a > \frac{a}{b}$. Se $a > \frac{a}{b}$, como $a \in \mathbb{N}^*$, encontramos uma contradição com o fato de que $\frac{a}{b}$ é um limitante superior de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$. Se $a = \frac{a}{b}$, então $a + 1 > a = \frac{a}{b}$ e, como $a \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$, encontramos um contradição com o fato de que $\frac{a}{b}$ é um limitante superior de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$. Logo, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$.

Para (2) temos claramente que $0$ é um cota inferior de $X$. Basta então provar que nenhum $c > 0$ é cota inferior de $X$. Dado $c > 0$, existe, pelo item (1), um número natural $n > \frac{1}{c}$, dai, $\frac{1}{n} < c$.

Para (3), dados $a, b \in \mathbb{Q}$, usando o item (1) para obter $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \frac{b}{a}$. Então, $n \cdot a > b$. ■