



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

HAROLDO DE OLIVEIRA E SILVA

**O ENSINO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM AUXÍLIO
DO SUPERLOGO 3.0**

BELÉM – PARÁ
2017

HAROLDO DE OLIVEIRA E SILVA

**O ENSINO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM AUXÍLIO
DO SUPERLOGO 3.0**

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida.

BELÉM – PARÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central - UFPA

Silva, Haroldo Oliveira e

O ensino de sólidos de revolução com auxílio do SuperLOGO 3.0 / Haroldo Oliveira e Silva. — 2017.

Orientador : Arthur da Costa Almeida

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2017.

1. Sólidos – Estudo e ensino. 2. LOGO (Linguagem de programação de computador). I. Título.

CDD - 23. ed. 516.23

HAROLDO DE OLIVEIRA E SILVA

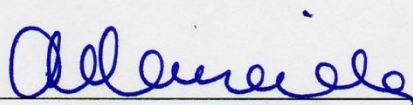
**O ENSINO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM
AUXILIO DO SUPERLOGO 3.0**

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará. Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida.

Data da apresentação: 10 de março de 2017

Resultado: APROVADO

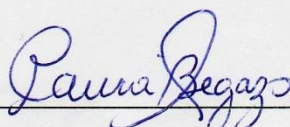
Banca Examinadora



Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida – PRESIDENTE/ORIENTADOR
PROFMAT/ICEN/UFPA



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo - MEMBRO
PROFMAT/PPGME/ICEN /UFPA



Profa. Dra. Tânia Madeleine Begazo Valdivia
FACULDADE DE MATEMÁTICA/ICEN /UFPA - MEMBRO

À minha mãe e meus filhos pelo
apoio e incentivo nos momentos
mais difíceis dessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela sabedoria a mim concedida e por me fazer acreditar que posso ser uma pessoa melhor e, assim, fazer parte da construção de um mundo mais humano.

A Nossa Senhora de Nazaré pelas graças alcançadas em dois momentos determinantes para que eu continuasse firme na concretização desse sonho: o excelente resultado obtido na prova de acesso 2015 e a aprovação do primeiro exame de qualificação em 2016, além de iluminar todos os passos dados nessa caminhada.

Aos meus colegas “profmatianos - UFPA 2015” pelo apoio, pelo incentivo e pelos momentos de união na busca do nosso objetivo.

A minha querida mãe Maria da Conceição de Oliveira e Silva que com sua dedicação sempre me incentivou e não me deixou desistir da busca dos meus objetivos.

Aos meus irmãos, em especial a minha irmã Elizabeth de Cássia de Oliveira Souza por ter me acolhido em sua residência e, com muito orgulho, dentro das suas possibilidades, ter me dado apoio em tudo para que eu chegasse até o final dessa difícil caminhada.

As minhas filhas Liandra Santos Silva e Lorrany de Cássia de Souza e Silva por serem minhas inspirações para que eu continue na busca de conhecimento.

Ao meu filho João Heitor Silva e Silva tão pequeno, mas, que trouxe bastante alegria para minha família me incentivando cada vez mais a estar do seu lado para que um dia se torne, não apenas um mestre, mas, um doutor, e quem sabe em matemática.

A diretora da 8ª URE, Norma Coeli Almeida Moura e, a diretora da Escola Estadual de Ensino Médio Lameira Bittencourt, Ana Cristina de Oliveira Rosa pela tolerância e compreensão nos dias em que precisei me ausentar da escola e por reconhecerem a importância da minha qualificação, me incentivando no meu crescimento profissional.

A coordenação do PROFMAT – UFPA que esteve conosco, ao longo desses dois anos, sempre disposta a nos atender no que estava dentro de responsabilidade e competência.

A todos os professores que estiveram conosco nessa luta nos passando um pouco de suas experiências contribuindo de forma significativa para aprimoramento do nosso trabalho como docente em especial ao Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida pela orientação na elaboração desse TCC.

“A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços”

Immanuel Kant

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo elaborar uma proposta de intervenção metodológica para resgatar o conceito de sólido de revolução, conceito matemático raramente abordado em sala de aula e, através deste conceito, fazer com que o aluno compreenda como são gerados estes sólidos e como se estabelecem as relações matemáticas entre suas medidas, além de buscar um avanço no raciocínio lógico-dedutivo e uma percepção mais significativa de espaço. Assim, com a finalidade de despertar a curiosidade, o interesse, a capacidade de elaborar conceitos, a investigação, enfim, o pensar e o saber matemático, foram elaboradas atividades que visam, gradativamente, a construção dos sólidos de revolução através do *software SuperLogo 3.0*. Através desta proposta de ensino, espera-se que os alunos desenvolvam habilidades e competências para melhor compreensão de como são gerados os sólidos de revolução, o que são, como se dão as relações entre suas medidas e como calcular suas áreas e seus volumes.

Palavras-Chave: Sólido de Revolução. Construção. Compreensão.

ABSTRACT

The project objective is to elaborate a proposal of methodological intervention to rescue the concept of Solid of Revolution, mathematical concept rarely approached in the classroom and, through this concept, make the student understand how these solids are generated and how the Mathematical relations among their measures, as well as to seek an advance in logical-deductive reasoning and a more significant perception of space. Thus, in order to stimulate curiosity, interest, ability to elaborate concepts, research, thinking and mathematical knowledge, activities have been elaborated that gradually aim the construction of the solids of revolution through the software SuperLogo 3.0. Through this teaching proposal, students are expected to develop skills and competences for a better understanding of how the solids of revolution are generated, what they are, how the relationships between their measures are, and how to calculate their areas and volumes.

Keywords: Solid Revolution. Construction. Understanding.

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

Fotografia 1: (a) Copo Cilíndrico	(b) Vaso no formato Tronco de Cone.....	16	
Figura 1:			
(a) Rotação do Retângulo	(b) Cilindro de Revolução	(c) Superfície	16
Figura 2: Volume do Cilindro		17	
Figura 3:			
(a) Rotação do Triângulo Retângulo	(b) Cone de Revolução	(c) Superfície.....	18
Figura 4: Volume do Cone		19	
Figura 5:			
(a) Rotação do Trapézio Retângulo	(b) Tronco de Cone de Revolução	(c) Superfície.....	20
Figura 6: Área Lateral do Tronco de Cone		20	
Figura 7: Rotação do Semicírculo		(b) Esfera	22
Figura 8: Volume da Esfera.....		23	
Figura 9: Área da Esfera.....		24	
Figura 10: Tela do SuperLogo 3.0.....		25	
Quadro 1: Lista de Comandos Básicos do SuperLogo 3.0.....		26	
Quadro 2: Lista de Operações e Algumas Funções Matemáticas do SuperLogo 3.0.....		27	
Figura 11: Janela de Comandos so SuperLogo 3.0		28	
Figura 12: Menu de Procedimentos.....		28	
Figura 13: Comando Tracejar.....		29	
Figura 14: Retângulo		29	
Figura 15: Hexágono Regular.....		30	
Figura 16: Octógono Regular		30	
Figura 17: Triângulo Retângulo		31	
Figura 18: Triângulo Retângulo		31	
Figura 19: Trapézio Retângulo		32	
Figura 20: Trapézio Retângulo		32	
Figura 21: Circunferência.....		33	
Figura 22: Arco de Circunferência		33	
Figura 23: Círculo.....		34	
Figura 24: Semicírculo		34	

Figura 25: Retângulo de altura 250 e base 150.	35
Figura 26: Sequencia de retângulos com rotação de 60°	35
Figura 27: Cilindro de revolução de altura 250 e raio 150.....	36
Figura 28: Cilindro de revolução de altura 250 e raio 150 com contorno nas bases.....	36
Figura 29: Triângulo retângulo de altura 250 e base 150.....	37
Figura 30: Sequencia de triângulos retângulos com rotação de 45°	37
Figura 31: Cone de revolução de altura 250 e raio 150.....	38
Figura 32: Cone de revolução de altura 250 e raio 150 com contorno na base.....	38
Figura 33: Trapézio retângulo de altura 250, raio maior 220 e raio menor 80.....	39
Figura 34: Sequencia de trapézios de altura 250, raio maior 220 e raio menor 80 com rotação de 72°	39
Figura 35: Tronco de cone de revolução de altura 250, raio maior 200 e raio menor 80 ...	40
Figura 36: Tronco de cone de revolução de altura 250, raio maior 200 e raio menor 80, com contorno nas bases.	40
Figura 37: Semicírculo de raio 200.	41
Figura 38: Sequência de semicírculos de raio 200 com rotação de 36°	41
Figura 39: Esfera de raio 200.	42
Figura 40: Esfera de raio 200 com equador.....	42
Figura 41: Anticlepsidra de raio 150 e altura 300	43
Figura 42: Sólido composto por um hemisfério de raio 150 e um cilindro de altura e raio 150	43
Figura 43: Superfície planificada de um cilindro de altura 150 e raio 75	44
Figura 44: Superfície planificada de um tronco de cone de altura 100, raio maior 100 e raio menor 35.....	44
Figura 45: Procedimento cilindro :h :b – Professor1	45
Figura 46: Procedimento cone :r :h – Professor2	47
Figura 47: Procedimento troncoCone :baseInferio :baseSuperior :altura :n – Professor3	48
Figura 48: Construção de um tronco de pirâmide por aproximação de troncos de pirâmides regulares.....	49
Figura 49: Procedimento esfera :r – Professor 4	51
Quadro 3: Lista de cores do SuperLogo 3.0	56
Figura 50: Construção de um cilindro de revolução de altura 200 e raio 100 e eixo Oy	57
Figura 51: Planificação de um cilindro de revolução de altura 150 e raio 70	58

Figura 52: Construção de um cone de revolução de altura 250 e raio 150 e eixo Oz	59
Figura 53: Planificação de um cone de revolução de altura 250 e raio 85	60
Figura 54: Tronco de cone de altura 200, raio maior 180, raio menor 75 e eixo Oz.....	61
Figura 55: Planificação de um tronco de cone de revolução altura 120, raio maior 95 e raio menor 50	62
Figura 56: Esfera de raio 150	63
Figura 57: Secção feita a uma distância 90 do centro de uma esfera de raio 180	63
Figura 58: Anticlepsidra de altura 300 e raio 150	64
Figura 59: Secção transversal feita a uma distância 75 do centro de uma anticlepsidra de altura 300 e raio 150	64
Figura 60: Sólido composto por um hemisfério de raio 150 e um cilindro de altura e raio 150	65
Figura 61: Sólido de Revolução	67
Figura 62: Esfera	68

LISTA DE SIGLAS

NIED	Núcleo de Informática Educativa
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROINFO	Programa Nacional de Tecnologia Educacional

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	15
2.1. Cilindro de Revolução	17
2.1.1. Áreas e volume.....	18
2.2. Cone de Revolução	18
2.2.1. Áreas e volume.....	18
2.3. Tronco de Cone de Revolução.....	19
2.3.1. Áreas e volume.....	20
2.4. Esfera	22
2.4.1. Volume.....	22
2.4.2. Área	24
3. TUTORIAL SUPERLOGO.....	25
3.1. Interface do SuperLogo 3.0	25
3.2. Comandos Básicos.....	26
3.3. Algumas Operações e Funções Matemáticas.....	27
3.4. Procedimentos.....	28
3.4.1. Construção do Retângulo	29
3.3.2. Construção de Polígonos Regulares.....	30
3.4.3. Construção do Triângulo Retângulo	31
3.4.4. Construção do Trapézio Retângulo	32
3.4.5. Construção da Circunferência e Arcos de circunferência	33
4. CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM AUXÍLIO DO SUPERLOGO 3D.....	25
4.1. Atividade 1: Construção do Cilindro	35
4.2. Atividade 2: Construção do Cone.....	37
4.3. Atividade 3: Construção do Tronco de Cone.....	39
4.4. Atividade 4: Construção da Esfera	41
4.5. Atividade 3: Análise dos resultados obtidos na oficina.....	45

5. CONCLUSÃO.....	553
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
APÊNDICE	56

1. INTRODUÇÃO

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacional de Matemática (PCN) o estudo de Geometria deve possibilitar ao aluno ver, analisar e compreender as formas presentes no espaço em que vive, fazendo a conexão entre o mundo sensível e a estrutura no mundo geométrico, desenvolvendo o raciocínio ao lidar com entes como pontos, linhas, superfícies e volumes. Assim, de acordo com os PCN de 1997, passa-se do mundo sensível ao mundo geométrico,

[...] multiplicando suas experiências sobre os objetos do espaço em que vive [...] a construir uma rede de conhecimentos relativos à localização, à orientação, que lhe permitirá penetrar no domínio da representação dos objetos e, assim, distanciar-se do espaço sensorial ou físico.

É o aspecto experimental que colocará em relação esses dois espaços: o sensível e o geométrico. De um lado, a experimentação permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos reais para raciocinar sobre representações mentais. (BRASIL, 1997, p.81-82).

Dessa forma, nós professores de Matemática necessitamos de ferramentas que venham estabelecer a conexão entre o mundo que vivemos e o mundo geométrico, através da construção das figuras planas e espaciais, facilitando, dessa forma, a visualização, a compreensão e, também, o estabelecimento das relações entre os elementos os entes geométricos.

O LOGO¹ é uma linguagem de alto nível que possibilita a utilização do computador como uma ferramenta pedagógica para a realização de ações, como comandar um robô ou criar desenhos. Seymour Papert denominou a construção do conhecimento mediada pelo uso da informática de construcionismo, para quem,

LOGO é, ao mesmo tempo, uma LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO de alto nível, uma METODOLOGIA DE ENSINO e uma FILOSOFIA EDUCACIONAL que propõe o uso do computador como ferramenta no processo educacional, permitindo que as pessoas dominem conceitos mais profundos de matemática, Ciências, Linguagem e em muitas outras áreas do conhecimento. (Papert, 1985).

No Brasil, a linguagem LOGO foi traduzida para a língua portuguesa pelo Núcleo de Informática Educativa (NIED) da Universidade de Campinas (UNICAMP), em São Paulo e disponibilizada para download gratuito na versão SuperLogo 3.0 no ano 2000 e será utilizado neste trabalho para o Ensino de Sólidos de Revolução, tanto na construção quanto para estabelecer as relações entre suas medidas. Para tanto tenho como objetivo geral, no

¹ LOGO: Desenvolvida pelo grupo de Inteligência Artificial do MIT coordenado por Seymour Papert e Marvin Minsky em 1967.

desenvolvimento desse trabalho, elaborar uma proposta metodológica para o ensino de sólidos de revolução com auxílio do Superlogo 3.0 e como objetivos específicos, definir Sólidos de Revolução, elaborar um tutorial do Superlogo com os comandos básicos para a construção de figuras planas, desenvolver atividades para gerar sólidos de revolução com o auxílio do Superlogo 3.0 e realizar oficinas para apresentação da proposta metodológica.

No decorrer das atividades desenvolvidas no exercício do magistério como professor de Matemática tenho observado as dificuldades dos alunos quanto à compreensão de como são gerados os sólidos de revolução e, conseqüentemente, como se dão as relações entre suas medidas. Dessa forma, se faz necessária a utilização de métodos inovadores que possam contribuir de forma significativa para o ensino de geometria e que permita a construção e a visualização de tais sólidos.

O avanço da tecnologia tem tornado a informática uma ferramenta importante para o desenvolvimento das diversas profissões e, também, do conhecimento matemático. Portanto, como a conexão entre a educação e a informática é um caminho sem volta, é fundamental que o professor utilize a tecnologia disponível para integrar-se a essas mudanças a fim de despertar nos alunos, não apenas a busca, mas, também, a construção do conhecimento. Pois corroboramos que

O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as. (MEC, 1997, p.3)

Essa justificativa, apresentada pelo PROINFO², se coaduna com o modo de pensar de D'Ambrósio, para quem:

Os computadores e a informática estão mudando as sociedades de nosso tempo. Assim como a máquina a vapor iniciou a primeira revolução industrial, o computador está iniciando o que é frequentemente chamada a segunda revolução industrial. A primeira revolução foi acompanhada pelo desenvolvimento das ciências físicas; deve-se esperar que novas ciências relacionadas com a informática acompanhassem a segunda. As expectativas, assim, são imensas: novas necessidades, novas ciências, novas tecnologias, novas qualificações, a eliminação de trabalhos repetitivos ou árduos e, certamente, novos desafios sociais a serem encontrados (...) a matemática não escapa desse movimento (...) a influência de computadores e informática em Matemática, em seu ensino". (D'AMBRÓSIO apud SILVA, 1986)

² O ProInfo, inicialmente denominado de Programa Nacional de Informática na Educação, foi criado pelo Ministério da Educação, através da Portaria nº 522 em 09/04/1997, com a finalidade de promover o uso da tecnologia como ferramenta de enriquecimento pedagógico no ensino público fundamental e médio. A partir de 12 de dezembro de 2007, mediante a criação do Decreto nº 6.300, o ProInfo passou a ser Programa Nacional de Tecnologia Educacional, tendo como principal objetivo promover o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas redes públicas de educação básica.

O Superlogo é um software que possibilita ao professor a mediação da construção de conhecimentos geométricos e das demais ciências e, assim, estabelece de fato essa relação, já que utiliza uma linguagem de fácil compreensão, pois seus comandos foram traduzidos para o português, possibilitando a construção de figuras geométricas planas, de forma simples e objetiva.

Para tanto, segundo o MEC:

Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 35)

Motta (2008) investigou e analisou as interações do aluno com o SuperLogo e com o professor no processo ensino-aprendizagem de geometria através da construção de figuras planas para alunos do sétimo ano do ensino básico, segundo a visão construtivista de Papert, porém, em seu trabalho, não se propôs a fazer a mesma análise na construção de figuras no espaço tridimensional.

Tudo isso me levou a elaborar uma proposta de intervenção metodológica para o ensino de geometria, utilizando o SuperLogo 3.0 como ferramenta pedagógica para a construção de figuras em 3D, em especial a construção e compreensão dos sólidos de revolução.

Na primeira etapa do desenvolvimento deste trabalho será feito um levantamento bibliográfico com a intenção de descobrir e apresentar referências bibliográficas que tratam da utilização da informática no ensino de geometria com auxílio da linguagem logo e de outros softwares que intermediam a construção das figuras geométricas e, também, a definição e construção dos sólidos de revolução segundo *Gelson Iezzi e Jackson Ribeiro*.

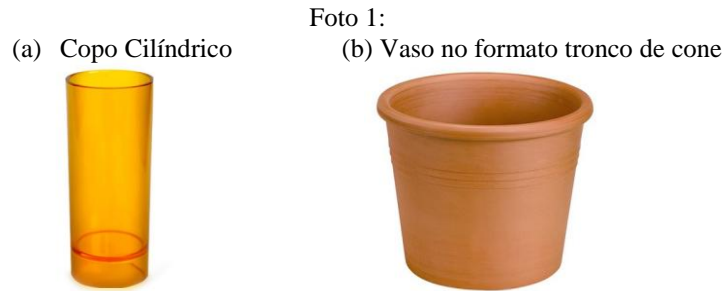
Na segunda etapa, será feito uma análise dos comandos básicos do software SuperLogo 3.0 que facilitam a construção de figuras planas e espaciais para elaboração de um tutorial.

Finalizando, será desenvolvido uma proposta de intervenção metodológica para o ensino dos sólidos de revolução através do SuperLogo 3.0 onde serão elaboradas atividades que auxiliem na busca e na construção de conhecimentos geométricos para posterior apresentação aos professores de Matemática da Escola Estadual de Ensino Médio Lameira Bittencourt situada no município de Castanhal-Pa.

2. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

O movimento de rotação completa de uma figura invariável em torno de um eixo é denominado de *revolução*. Por sua vez, os sólidos que se formam a partir desses movimentos são denominados *sólidos de revolução*.

Estes sólidos são figuras espaciais que se encontram representados em diversos objetos do nosso dia-a-dia.

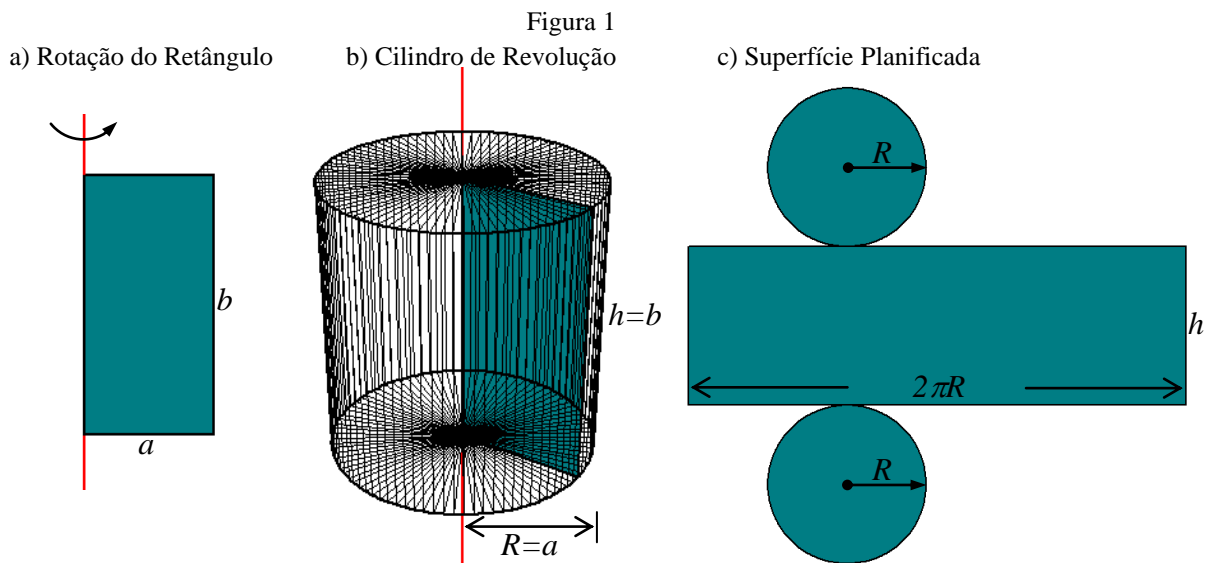


Fonte: <https://www.google.com.br/search>

A seguir, serão analisados individualmente os sólidos de revolução que constam no conteúdo programático de geometria espacial do ensino médio, o cilindro, o cone, o tronco de cone e a esfera.

2.1. CILINDRO DE REVOLUÇÃO

O cilindro circular reto, também conhecido como cilindro de revolução, é gerado pela revolução de um retângulo por um de seus lados. Assim, o movimento de revolução de um retângulo de dimensões a e b com eixo de rotação contendo o lado b (figura 1), gera um cilindro de revolução de altura $h=b$ e raio $R=a$ (figura 2), cujo desenvolvimento no plano corresponde a dois círculos de raio R e um retângulo de dimensões $2\pi R$ e h (figura 3).



Fonte: O autor

2.1.1. ÁREAS E VOLUME

a) Área da Base

A base do cilindro de revolução é um círculo de raio R , portanto: $A_B = \pi R^2$

b) Área Lateral

É a área de um retângulo de dimensões $2\pi R$ e h , portanto: $A_L = 2\pi R h$

c) Área Total

É a soma da área lateral com a área das bases, assim, temos:

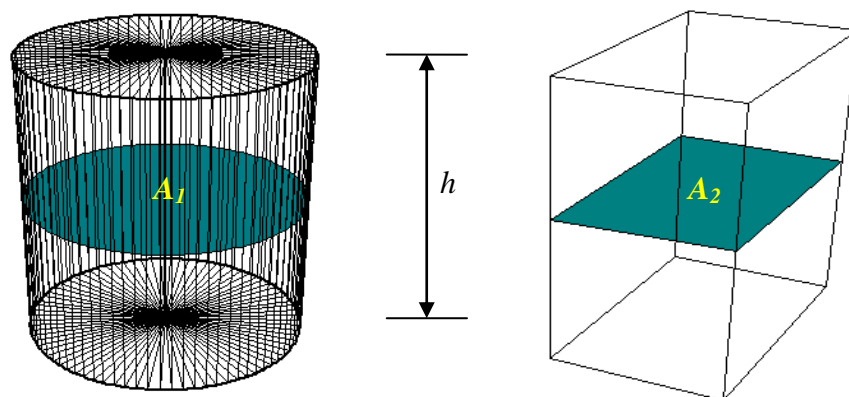
$$A_T = A_L + 2A_B \Leftrightarrow A_T = 2\pi R h + 2\pi R^2 \Leftrightarrow A_T = 2\pi R(h + R)$$

d) Volume

Em um cilindro, toda seção paralela à base é congruente à base. Desta forma, tome um cilindro de altura h e base de área A_B contida em um plano horizontal. Considere agora um prisma qualquer de altura h e base de área A_B contida no mesmo plano horizontal da base do cilindro. Se outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2 , então $A_1 = A_B = A_2$ (fig. 4). Pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que os dois sólidos tem o mesmo volume. Logo, o volume do cilindro também é o produto da área da base pela altura. Assim, temos:

$$V = A_B \cdot h \Leftrightarrow V = \pi R^2 h$$

Figura 2: Volume do Cilindro

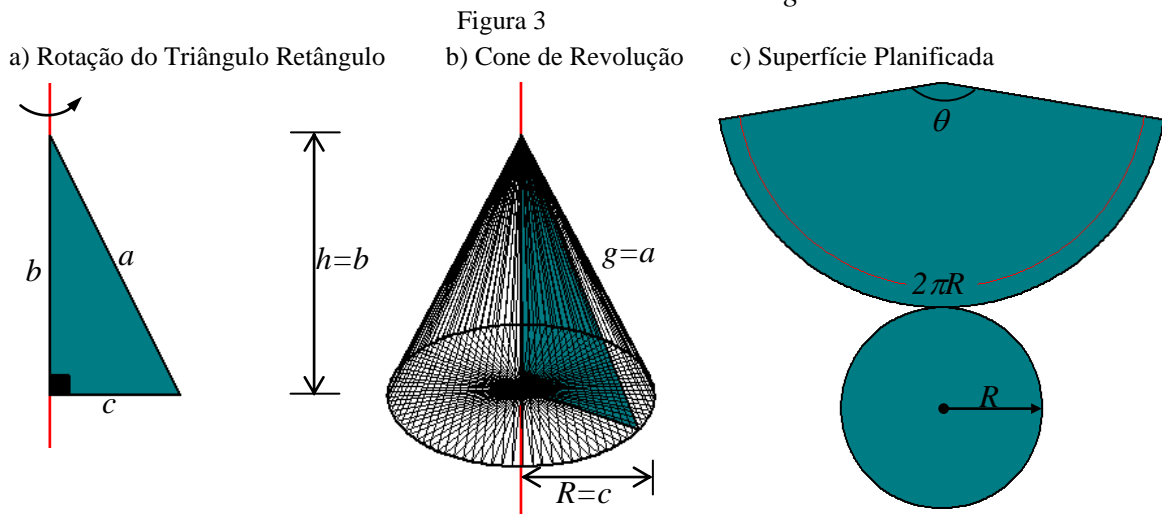


Fonte: O autor

2.2. CONE DE REVOLUÇÃO

O cone circular reto, também conhecido como cone de revolução, é gerado pela revolução de um triângulo retângulo por um de seus catetos. Assim, o movimento de revolução de um triângulo retângulo de catetos b e c , e hipotenusa a , com eixo de rotação contendo o cateto b (figura 5), gera um cone de revolução de altura $h=b$, raio $R=c$ e geratriz $g=a$ (figura 6), cujo desenvolvimento no plano corresponde a um círculo de raio R e um setor circular de raio g e ângulo central, em radianos, dado por $\theta = \frac{2\pi R}{g}$ (fig. 7).

circular de raio g e ângulo central, em radianos, dado por $\theta = \frac{2\pi R}{g}$ (fig. 7).



2.2.1. ÁREAS E VOLUME

a) Área da Base

A base do cone de revolução é um círculo de raio R , portanto: $A_B = \pi R^2$

b) Área Lateral

É a área de um setor circular de raio g e ângulo central $\theta = \frac{2\pi R}{g}$, em radianos,

$$\text{portanto: } A_L = \frac{1}{2} \theta g^2 \Leftrightarrow A_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi R}{g} \cdot g^2 \Leftrightarrow A_L = \pi R g$$

c) Área Total

É a soma da área lateral com a área da base, assim, temos:

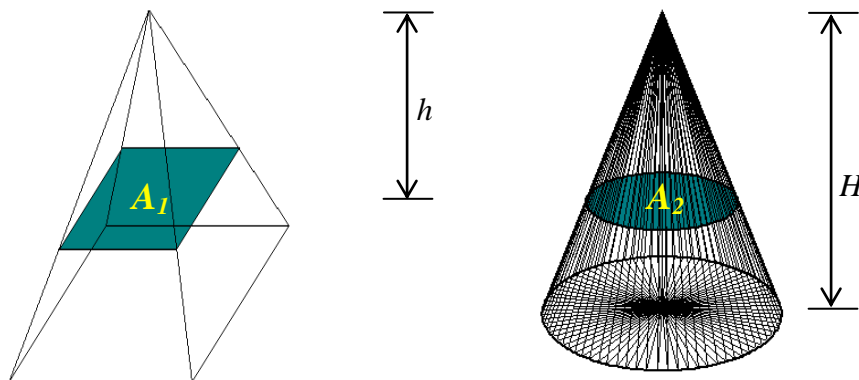
$$A_T = A_L + A_B \Leftrightarrow A_T = \pi R g + \pi R^2 \Leftrightarrow A_T = \pi R (g + R)$$

d) Volume

Da mesma forma que se estabelece a relação entre um prisma e um cilindro podemos estabelecer a relação entre uma pirâmide e um cone. Assim, para determinar o volume do cone basta seguir o mesmo raciocínio que se utiliza para se obter o volume da pirâmide.

Seja uma pirâmide tem altura H e base de área A_B contida em um plano horizontal. Considere um cone de altura H e base de área A_B contido nesse mesmo plano.

Figura 4: Volume do Cone



Fonte: O autor

Se outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2 , então:

$$\frac{A_1}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A_B} \Leftrightarrow A_1 = A_2$$

O Princípio de Cavalieri garante que os dois sólidos tem o mesmo volume e, portanto, conclui-se que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Portanto, um cone de revolução de raio da base R e altura h tem volume dado por:

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

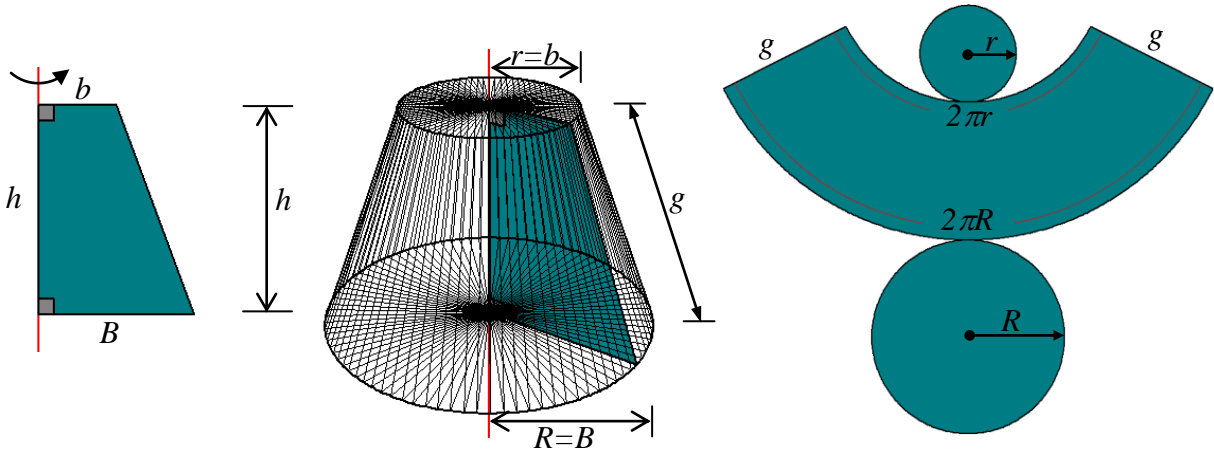
2.3. TRONCO DE CONE DE REVOLUÇÃO

O tronco de cone de revolução é um sólido que se obtém através de um corte feito por um plano paralelamente à base de um cone de revolução e pode ser gerado, também, pela revolução de um trapézio retângulo pelo lado perpendicular às suas bases. Assim, o movimento de revolução de um trapézio retângulo de base maior B , base menor b e altura h ,

com eixo de rotação contendo o lado perpendicular à B e à b , gera um tronco de cone de revolução com raio da base maior $R=B$, raio da base menor $r=b$, altura h e geratriz $g = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

Figura 5

a) Rotação do Trapézio Retângulo b) Tronco de Cone de Revolução c) Superfície Planificada



Fonte: O autor

2.3.1. ÁREAS E VOLUME

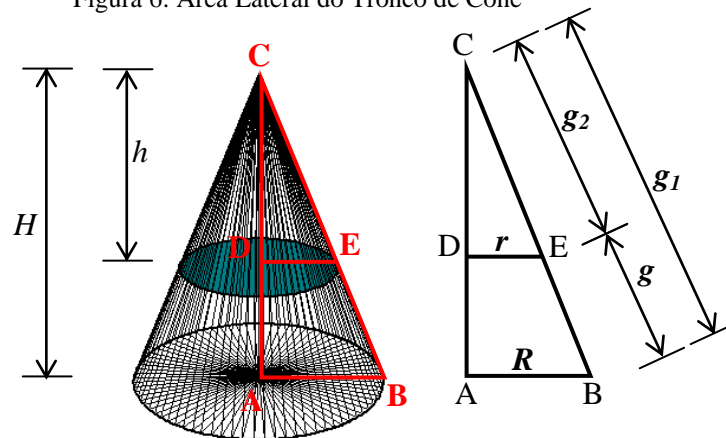
a) Áreas das Bases

As bases de um tronco de cone de revolução são dois círculos de raios R e r , portanto, temos: $A_b = \pi R^2$ e $A_t = \pi r^2$

b) Área Lateral

Para determinar a área lateral do tronco de cone vamos recorrer à semelhança de sólidos, já que cortando-se um cone por um plano paralelo à sua base, obtemos cone semelhante ao inicial e um tronco de cone.

Figura 6: Área Lateral do Tronco de Cone



Fonte: O autor

Observe que o corte feito em cone de altura H , raio da base R e geratriz g_1 , da Figura 7 por um plano paralelo à base à uma distância h de seu vértice, resulta em um cone de altura h , raio da base r e geratriz g_2 , e um tronco de cone de altura $H-h$, raio da base maior R , raio da base menor r e geratriz g .

$$\text{Assim, temos: } \triangle DEC \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{g_2}{g_1} \Leftrightarrow rg_1 = Rg_2 \quad (1)$$

$$\text{Mas, } g = g_1 - g_2 \Leftrightarrow g_2 = g_1 - g \quad (2).$$

$$\text{Substituindo (2) em (1), temos: } r(g_1 - g) = Rg_2 \Leftrightarrow g_1 = \frac{Rg}{R-r} \quad (3)$$

$$\text{Analogamente, } g_2 = \frac{rg}{R-r} \quad (4)$$

Agora, a área lateral do tronco de cone é igual à área lateral do cone inicial subtraindo a área do cone obtido a partir do corte, isto é:

$$A_L = \pi Rg_1 - \pi rg_2 \quad (5)$$

Substituindo (3) e (4) em (5), temos:

$$A_L = \pi R \cdot \frac{Rg}{R-r} - \pi r \cdot \frac{rg}{R-r} \Leftrightarrow A_L = \pi g \left(\frac{R^2 - r^2}{R-r} \right) \Leftrightarrow A_L = \pi (R-r)g$$

c) Volume

Através da semelhança dos triângulos ABC e DEC utilizada no item anterior, temos:

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{h}{H-h} = \frac{r}{R-r}$$

Mas, $H-h = h_T$ (altura do tronco de cone). Assim,

$$\frac{h}{h_T} = \frac{r}{R-r} \Leftrightarrow h = \frac{rh_T}{R-r} \quad (6)$$

O volume do tronco de cone é dado pela diferença entre o volume do cone inicial e o cone obtido após o corte, portanto:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi R^2 (h_T + h)}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} [R^2 h_T + h(R^2 - r^2)] \quad (7)$$

Substituindo (6) em (7), temos:

$$V = \frac{\pi}{3} \left[R^2 h_T + \left(\frac{r h_T}{R-r} \right) (R^2 - r^2) \right]$$

$$V = \frac{\pi h_T}{3} \left[R^2 + \left(\frac{r}{R-r} \right) (R+r)(R-r) \right]$$

$$V = \frac{\pi h_T}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

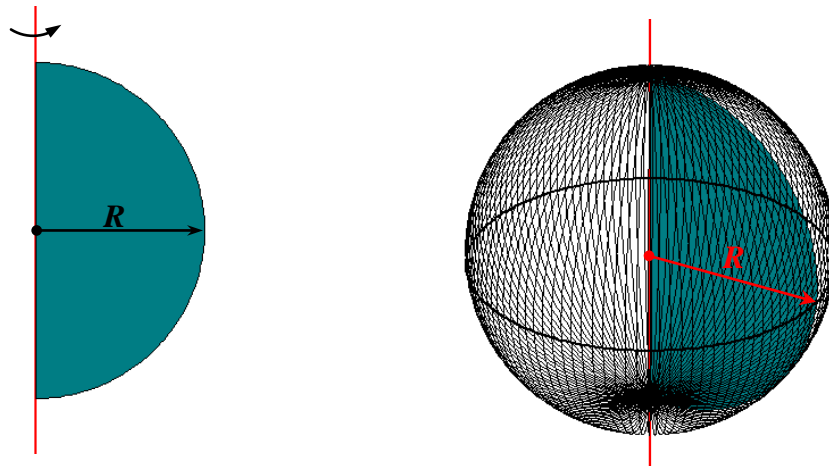
2.4. ESFERA

Uma esfera de raio R é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo também de raio R em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Figura 7:

a) Rotação de um Semicírculo

b) Esfera gerada

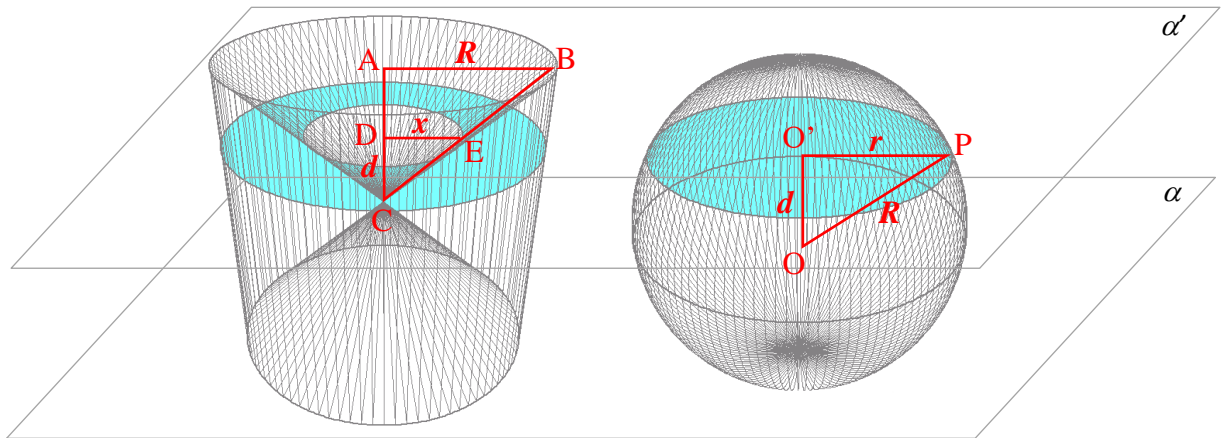


Fonte: O autor

2.4.1. VOLUME

Considere um cilindro equilátero de raio R e, conseqüentemente, altura $2R$. Inscreva no cilindro dois cones com altura R e tendo por base as bases do cilindro; então, o vértice dos cones coincide com o centro do quadrado (secção meridiana do cilindro). Por fim, seja S o sólido formado pela porção do cilindro exterior aos dois cones (anticlepsidra).

Figura 8: Volume da Esfera



Fonte: O autor

Seja α o plano que contém uma das bases do cilindro e, considere a esfera de centro O e raio R , tangente a α e situada, em relação a α , no mesmo semi-espaço do cilindro .

Seja α' um plano paralelo a α , contido no mesmo semi-espaço, em relação a α , que o cilindro e a esfera, e situado a uma distância d do ponto O , com $d < R$. Como o cilindro tem altura igual ao diâmetro da esfera, segue que a α' secciona S segundo uma coroa circular de raios R e $x=d$, pois os triângulos DEC e ABC são semelhantes e, consequentemente, $\frac{x}{R} = \frac{d}{R}$, enquanto secciona a esfera em um círculo de centro O' e raio $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Logo, as áreas de tais seções são sempre iguais, de forma que pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e a esfera tem volumes iguais.

Agora, o volume do sólido S (anticlepsidra) é a diferença entre os volumes do cilindro e da união dos dois cones de vértice C (clepsidra). Daí,

$$V_{ESFERA} = V_{CILINDRO} - 2.V_{CONE}$$

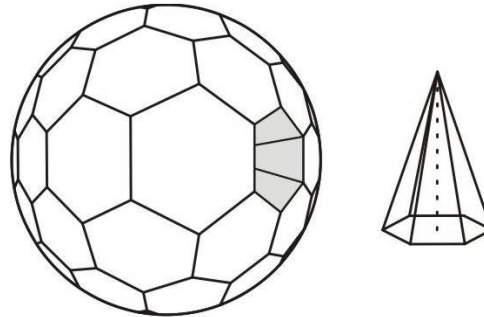
$$V_{ESFERA} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{\pi R^2 \cdot R}{3}$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

2.4.2. ÁREA

Para determinar a área da superfície esférica basta decompor a esfera em uma infinidade de pirâmides cujas bases compõem essa superfície e cujos vértices coincidam com o centro da esfera.

Figura 9: Área da Esfera



Origem: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/area-da-superficie-esferica-partir-de.html>

Desta forma, a superfície da esfera é dividida em n polígonos e a área dessa superfície é dada por:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \quad (1)$$

Já o volume da esfera é dado pela soma dos volumes das n pirâmides, portanto:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

$$V = \frac{A_1 h}{3} + \frac{A_2 h}{3} + \frac{A_3 h}{3} + \dots + \frac{A_n h}{3}$$

$$V = \frac{h}{3} (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) e considerando que quanto maior for o número de pirâmides mais as alturas se aproximam do raio da esfera, isto é $h=R$, temos:

$$V = \frac{R}{3} \cdot A$$

Mas, o volume da esfera é dado por $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, logo,

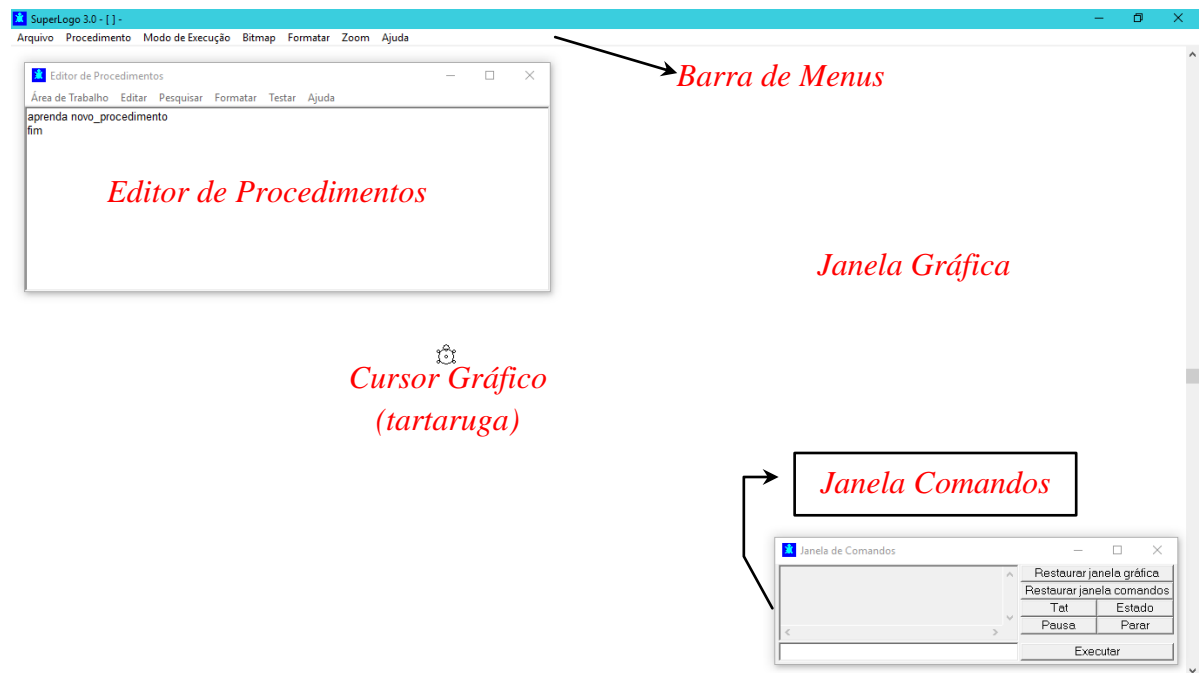
$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{R}{3} \cdot A \Leftrightarrow A = 4\pi R^2$$

3. TUTORIAL SUPERLOGO 3.0

3.1. INTERFACE DO SUPERLOGO

O SuperLogo 3.0 é constituído, basicamente, por três janelas: A principal que é a *Janela Gráfica*, a *Janela de Comandos* e o *Editor de Procedimentos*.

Figura 10: Tela do SuperLogo 3.0



Fonte: O autor

- Janela Gráfica: Onde aparecem os desenhos.
- Janela de Comandos: Onde digitamos comandos para a *tartaruga* (cursor gráfico) construir desenhos, sempre que o mesmo for simples. Nesta janela, os botões de comando são extremamente necessários. Vejamos suas funções:
 - ✓ Restaurar janela gráfica: apaga todos os registros da janela gráfica.
 - ✓ Restaurar janela comandos: apaga os comandos digitados na janela de comandos.
 - ✓ Tat: apaga a janela gráfica
 - ✓ Estado: mostra informações sobre a posição do cursor gráfico.
 - ✓ Parar: interrompe a execução de um procedimento.
 - ✓ Pausa: interrompe temporariamente a execução de um procedimento.
 - ✓ Executar: executa o comando digitado na linha de comandos.
- Editor de Procedimentos: Permite criar novos comandos para a construção de desenhos mais complexos através de algoritmos denominados *procedimentos*.

3.2. COMANDOS BÁSICOS

Quadro 1: Lista de Comandos do SuperLogo 3.0

Comando	Abreviatura	Função
parafrente	pf	Desloca o cursor gráfico para frente de acordo com o número de passos digitado
paratrás	pt	Desloca o cursor gráfico para trás de acordo com o número de passos digitado
paradireita	pd	Gira o cursor gráfico para direita de acordo com ângulo digitado em graus
paraesquerda	pe	Gira o cursor gráfico para esquerda de acordo com ângulo digitado em graus
usenada	un	Deslocamento sem registro gráfico
useboracha	ub	Apaga registro gráfico
uselápis	ul	Deslocamento com registro gráfico
paracentro	pc	Retorna a posição (0,0)
arco	-	Desenha um arco com ângulo e raio digitados
circunferência	-	Desenha uma circunferência com raio digitado
repita	-	Repete n vezes um comando digitado
espere	-	Provoca uma pausa antes de executar o próximo comando
mudecp	-	Muda a cor de preenchimento
pinte	-	Pinta a região em que a Tati está inserida
mudecl	-	Muda cor do lápis
mudeel	-	Muda espessura do lápis
rotule	-	Escreve caracteres na tela gráfica
logo2d	-	Instrui o cursor gráfico a entrar no modo bidimensional
logo3d	-	Instrui o cursor gráfico a entrar no modo perspectiva (tridimensional)
rolepd	-	Rola o cursor gráfico para direita de acordo com o ângulo especificado em graus (é necessário o modo 3d)
rolepe	-	Rola o cursor gráfico para esquerda de acordo com o ângulo especificado em graus (é necessário o modo 3d)
cabeceiepf	-	Inclina o cursor gráfico para baixo de acordo com o ângulo especificado em graus (é necessário o modo 3d)
cabeceiept	-	Inclina o cursor gráfico para baixo de acordo com o ângulo especificado em graus (é necessário o modo 3d)
desapareçatat	dt	Torna invisível o cursor gráfico
Apareçatat	at	Torna visível o cursor gráfico

Fonte: Menu de Ajuda do SuperLogo 3.0

3.3. ALGUMAS OPERAÇÕES E FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Quadro 2: Lista de Funções Matemáticas do SuperLogo 3.0

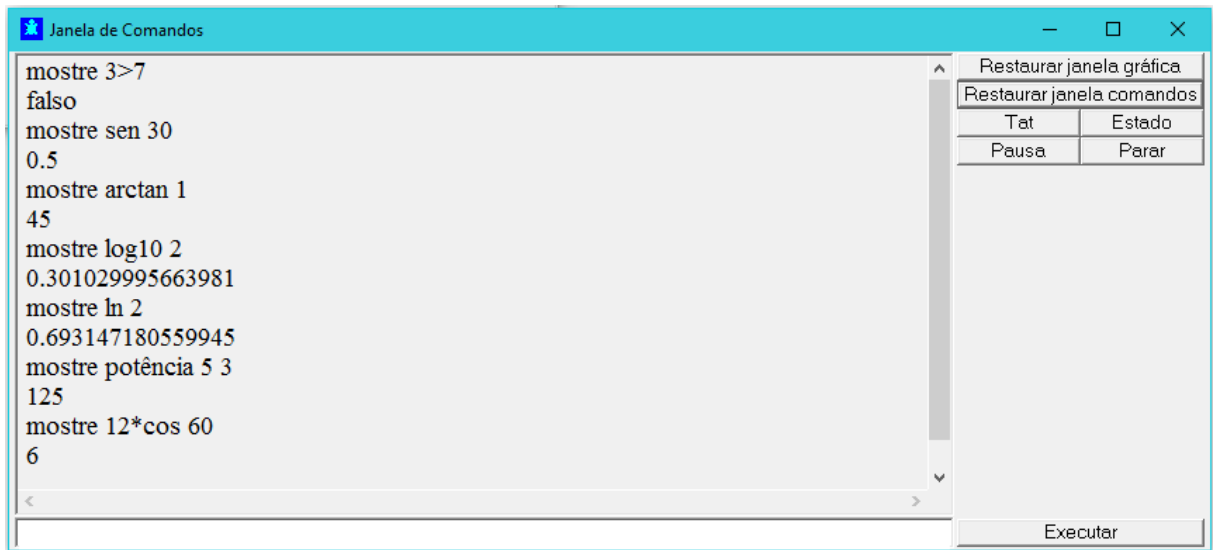
Operação/Função Matemática	Símbolo	Função
soma	+	Retorna a soma de dois ou mais números
diferença	-	Retorna a diferença de entre dois números
produto	*	Retorna o produto de dois ou mais números
quociente	/	Retorna o quociente entre dois números
sãoiguais	=	Retorna verd (verdadeiro) se as entradas forem iguais, caso contrário retorna falso
émaior	>	Retorna verd (verdadeiro) se o primeiro número for maior que o segundo
émenor	<	Retorna verd (verdadeiro) se o primeiro número for maior que o segundo
potência		Retorna um número (base) elevado à potência de um segundo número (expoente)
raizq		Retorna a raiz quadrada de um número
sen		Retorna o seno de um ângulo em graus
cos		Retorna o cosseno de um ângulo em graus
tan		Retorna a tangente de um ângulo em graus
arcsen		Retorna o ângulo, em graus, cujo seno é o valor de entrada
arccos		Retorna o ângulo, em graus, cujo cosseno é o valor de entrada
arctan		Retorna o ângulo, em graus, cuja tangente é o valor de entrada
log10		Retorna o logaritmo decimal de um número
ln		Retorna o logaritmo natural de um número
Atribua "x		Atribui o valor de entrada à variável x

Fonte: Menu de Ajuda do SuperLogo 3.0

Na janela de comandos estas operações e funções matemáticas devem ser precedidas do comando *mostre* para que seja mostrado na janela de comando o resultado da operação ou o valor função desejada.

Vejamos alguns exemplos:

Figura 11: Janela de Comandos

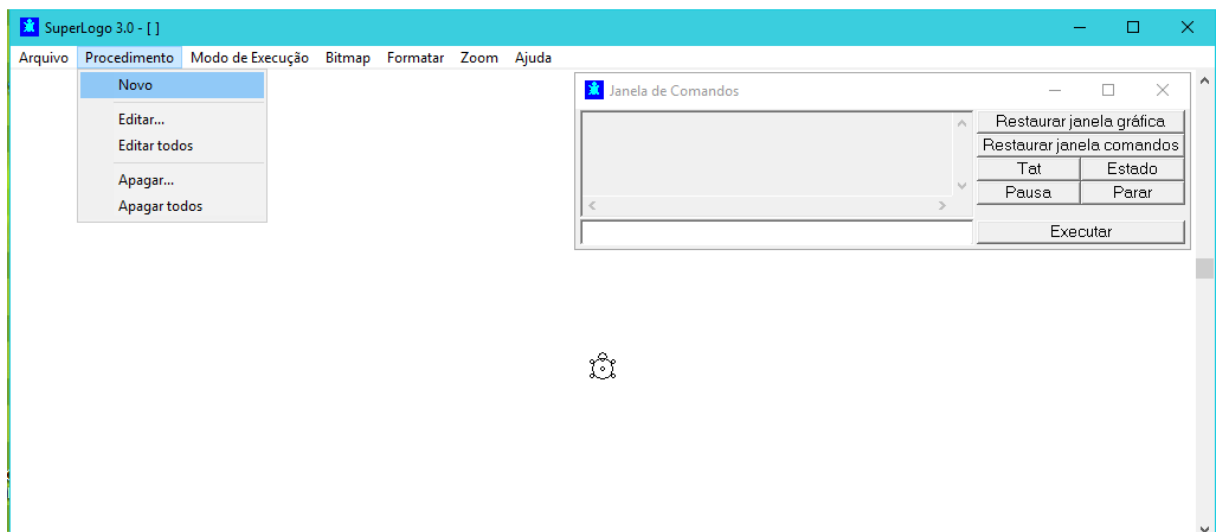


Fonte: O autor

3.4. PROCEDIMENTOS

O SuperLogo 3.0 permite que, a partir dos comandos básicos, novos comando sejam acrescentados para simplificarem a construção de figuras e desenhos mais complexos, através de *procedimentos* (algoritmos). Para isso, no menu *Procedimento* basta selecionar a opção *novo*.

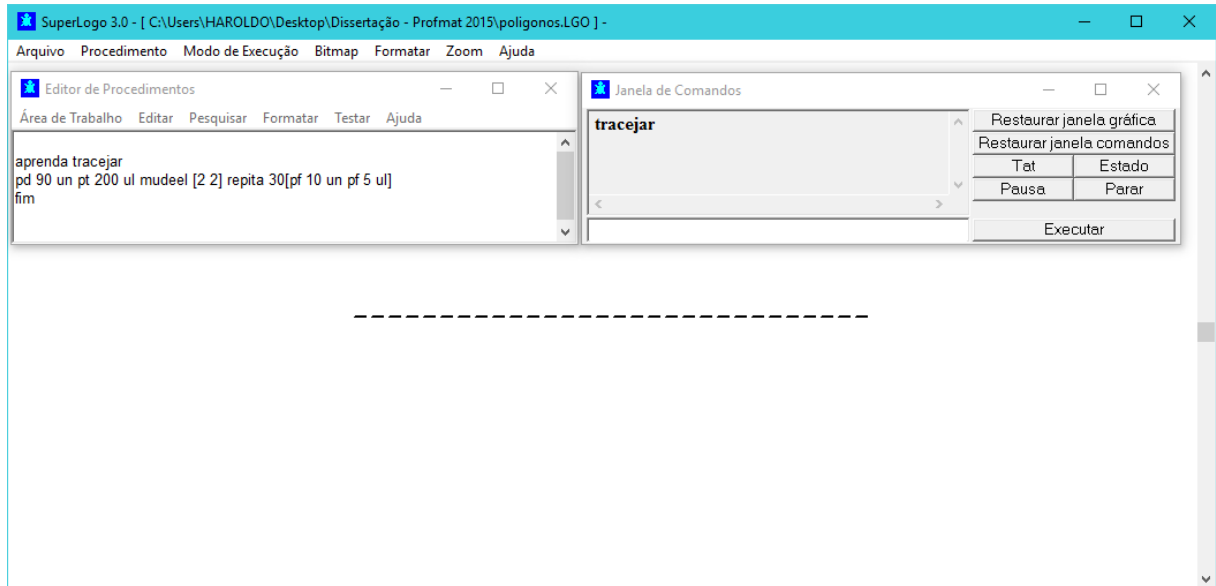
Figura 12: Menu Procedimento



Fonte: O autor

A partir daí, basta digitar as linhas de comando do novo procedimento que dará origem a um novo comando. Por exemplo, para desenhar uma linha horizontal tracejada podemos criar o comando *tracejar*.

Figura 13: Comando Tracejar

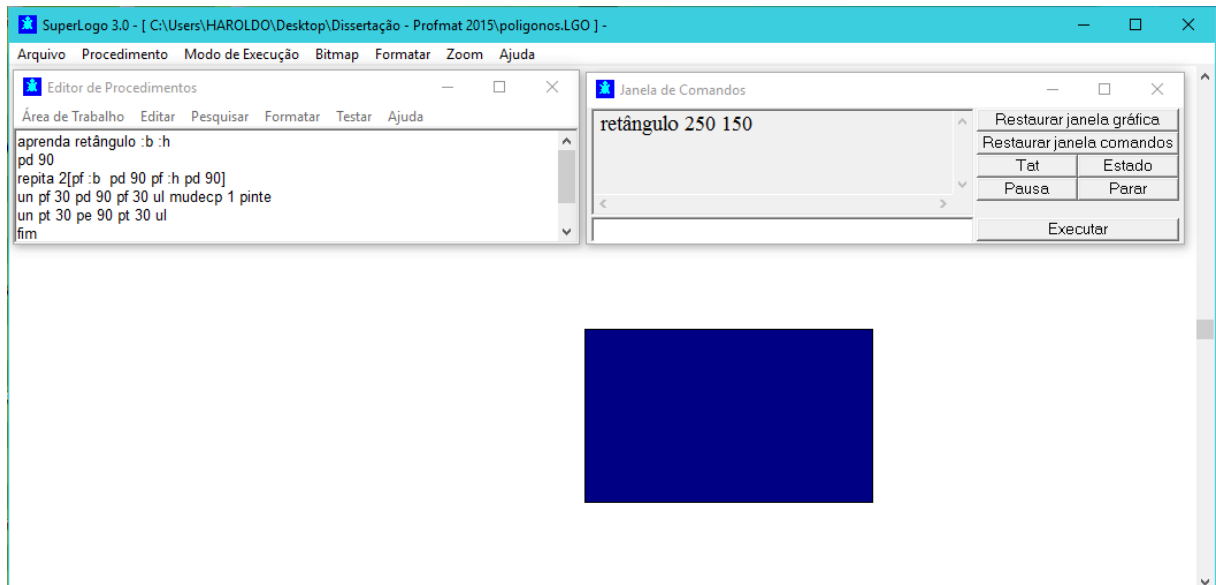


Fonte: O autor

3.4.1. Construção do Retângulo

Para desenhar um retângulo de base b e altura h , podemos criar o comando *retângulo :b :h*.

Figura 14: Construção de um retângulo



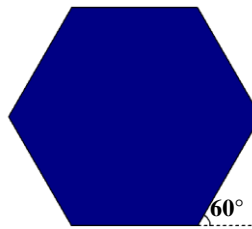
Fonte: O autor

No exemplo temos um retângulo de base 250 e altura 150, que são, respectivamente os valores de entrada.

3.4.2. Construção de Polígonos Regulares

Para a construção de polígonos regulares de n lados é válido recordar que a medida de cada ângulo externo é dado por $a_e = \frac{360^\circ}{n}$, pois, na construção dos mesmos utilizando o SuperLogo 3.0, para traçar dois lados adjacentes o giro dado pelo cursor gráfico (*tartaruga*) corresponde ao ângulo externo do polígono. Por exemplo, para o hexágono regular o giro é de 60° .

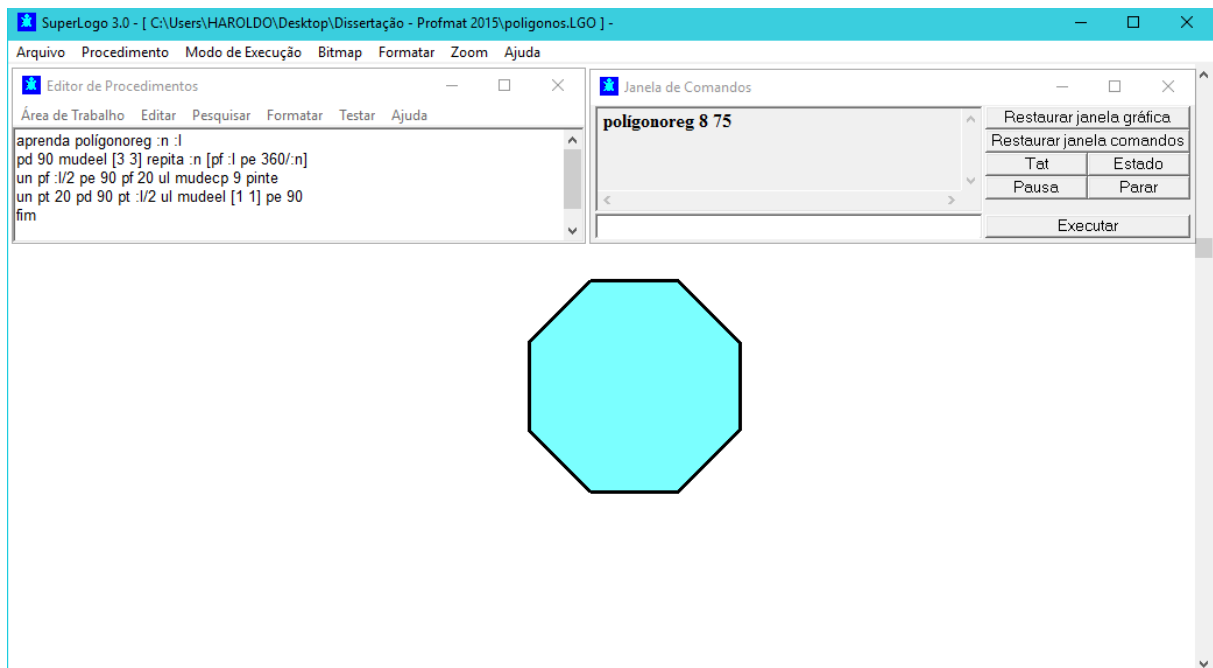
Figura 15: Hexágono regular



Fonte: O autor

Para construir polígonos regulares de n lados e cada lado com medida l podemos criar o comando *poligonoreg :n :l* através do procedimento a seguir.

Figura 16: Octógono Regular



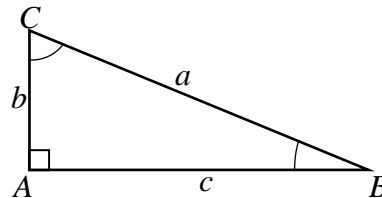
Fonte: O autor

No exemplo foi construído um octógono regular com lado medindo 75. Note que os valores de entrada foram $n=8$ e $l=75$.

3.4.3. Construção de Triângulos Retângulos

Considere o triângulo retângulo ABC , retângulo em A , com catetos $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$, indicado na figura a seguir.

Figura 17: Triângulo Retângulo



Fonte: O autor

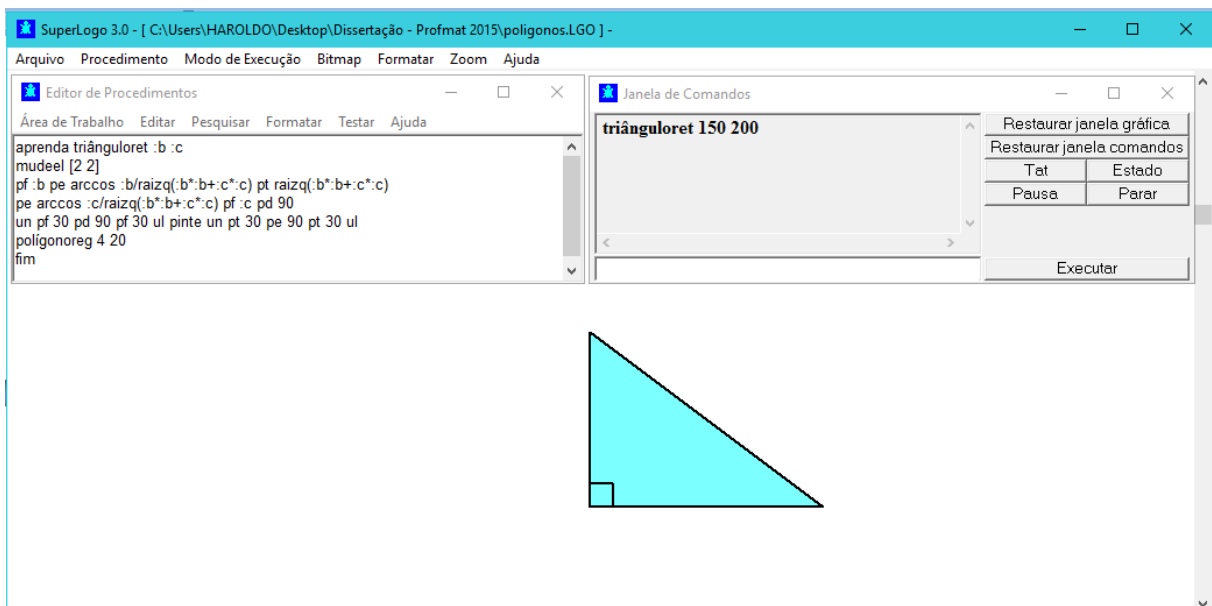
Sabe-se que:

$$i) \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$ii) \quad \hat{B} = \arccos\left(\frac{c}{a}\right) = \arcsen\left(\frac{b}{a}\right) \text{ e } \hat{C} = \arccos\left(\frac{b}{a}\right) = \arcsen\left(\frac{c}{a}\right)$$

Assim, para construir um triângulo retângulo de catetos b e c podemos criar o comando *trianguloret :b :c*.

Figura 18: Triângulo Retângulo



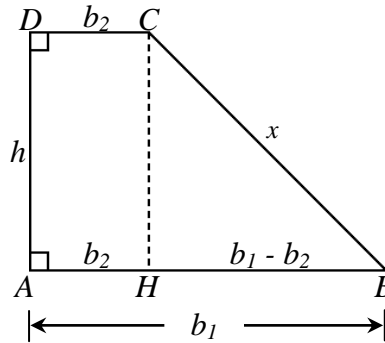
Fonte: O autor

No exemplo, um triângulo retângulo de catetos $b=150$ e $c=200$, que foram as respectivas entradas.

3.4.4. Construção de Trapézios Retângulos

Considere o trapézio retângulo $ABCD$, de altura $\overline{AD} = h$, bases $\overline{AB} = b_1$ e $\overline{CD} = b_2$ e, lado oblíquo $\overline{BC} = x$, como indicado na figura a seguir.

Figura 19: Trapézio Retângulo



Fonte: O autor

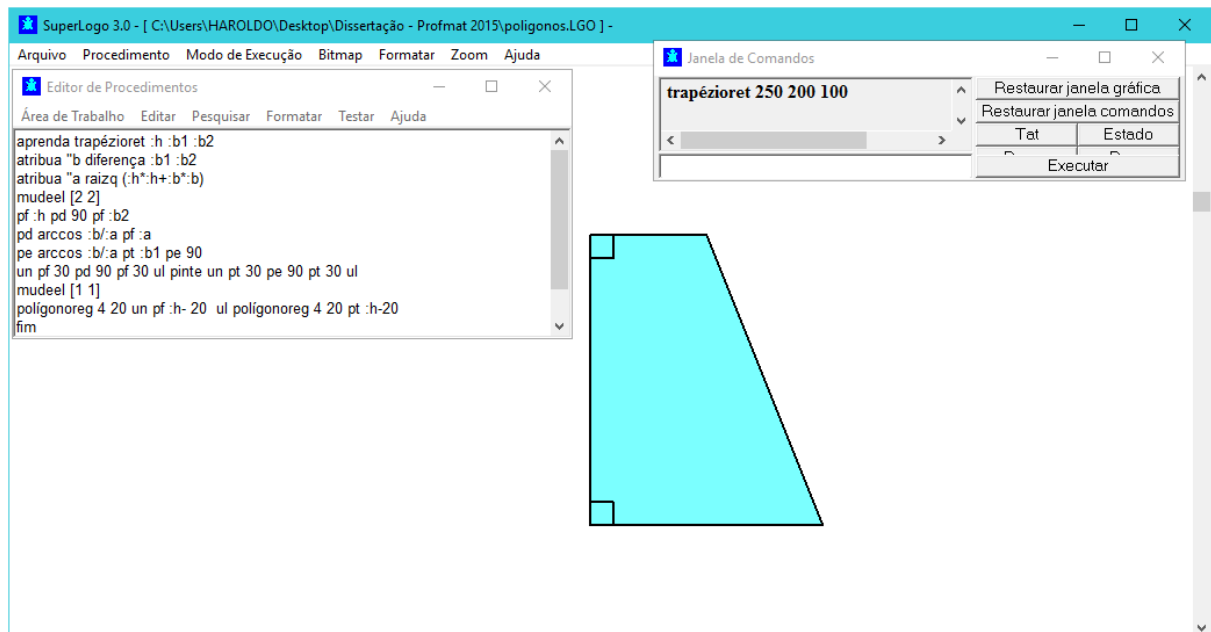
Sabe-se que:

$$i) \quad x = \sqrt{h^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$ii) \quad \widehat{HBC} = \arccos\left(\frac{b_1 - b_2}{x}\right) = \arcsen\left(\frac{h}{x}\right) \text{ e } \widehat{HCB} = \arccos\left(\frac{h}{x}\right) = \arcsen\left(\frac{b_1 - b_2}{x}\right)$$

Assim podemos construir um trapézio retângulo de altura h e bases b_1 e b_2 podemos criar o comando *trapézio*ret : h : b_1 : b_2 .

Figura 20: Trapézio Retângulo



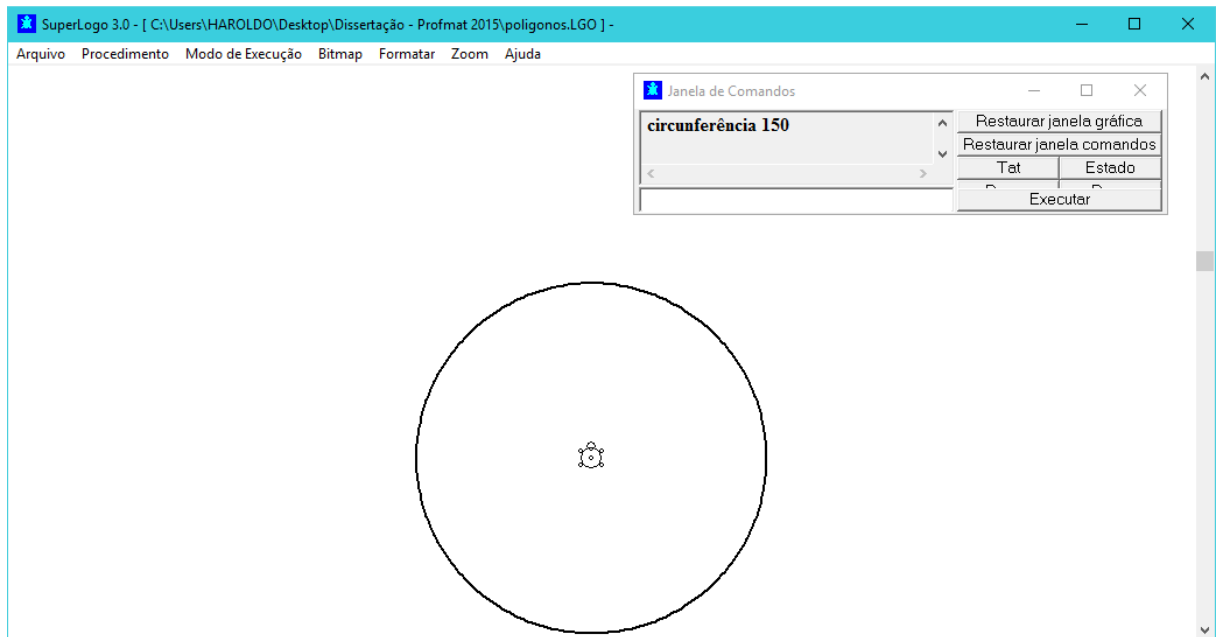
Fonte: O autor

No exemplo, foi construído um trapézio retângulo com entradas $h=250$ (altura), $b_1=200$ (base maior) e base menor $b_2=100$ (base menor).

3.4.5. Construção de Circunferências e Arcos de Circunferência

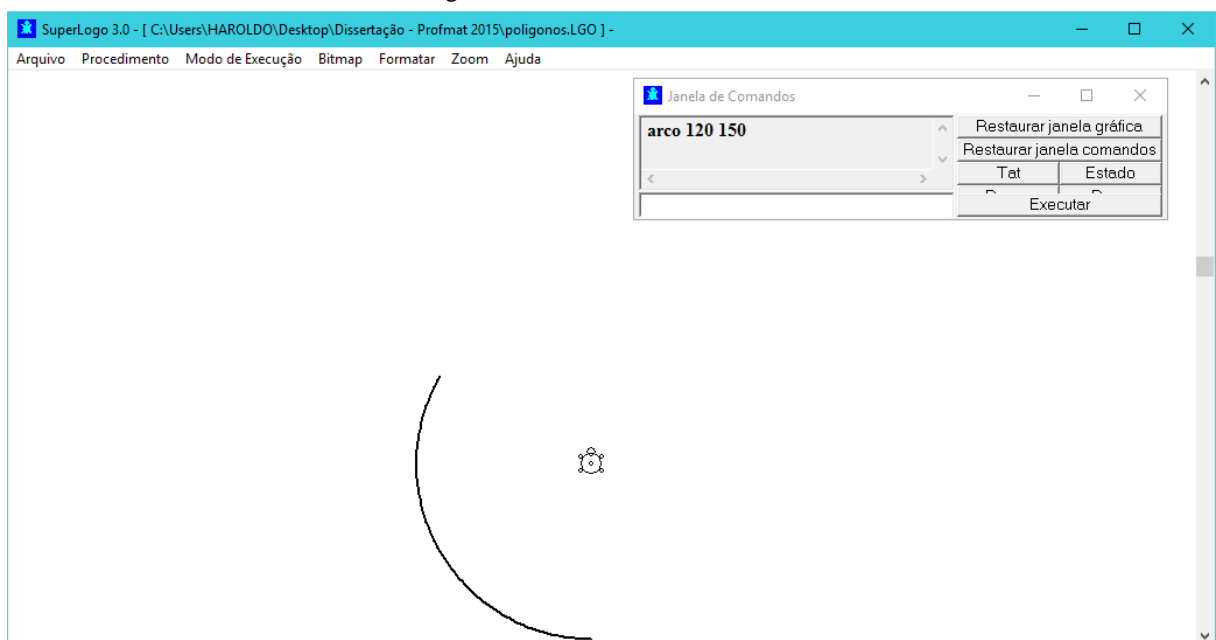
O SuperLogo 3.0 já possui os comandos básicos - *circunferência :r* para a construção de circunferências de raio r e de *arco :ângulo :r* para construção de arcos de circunferência equivalente a um ângulo central \hat{a} e raio r . Vejamos:

Figura 21: Circunferência de raio 150



Fonte: O autor

Figura 22: Arco de 120° e raio 150

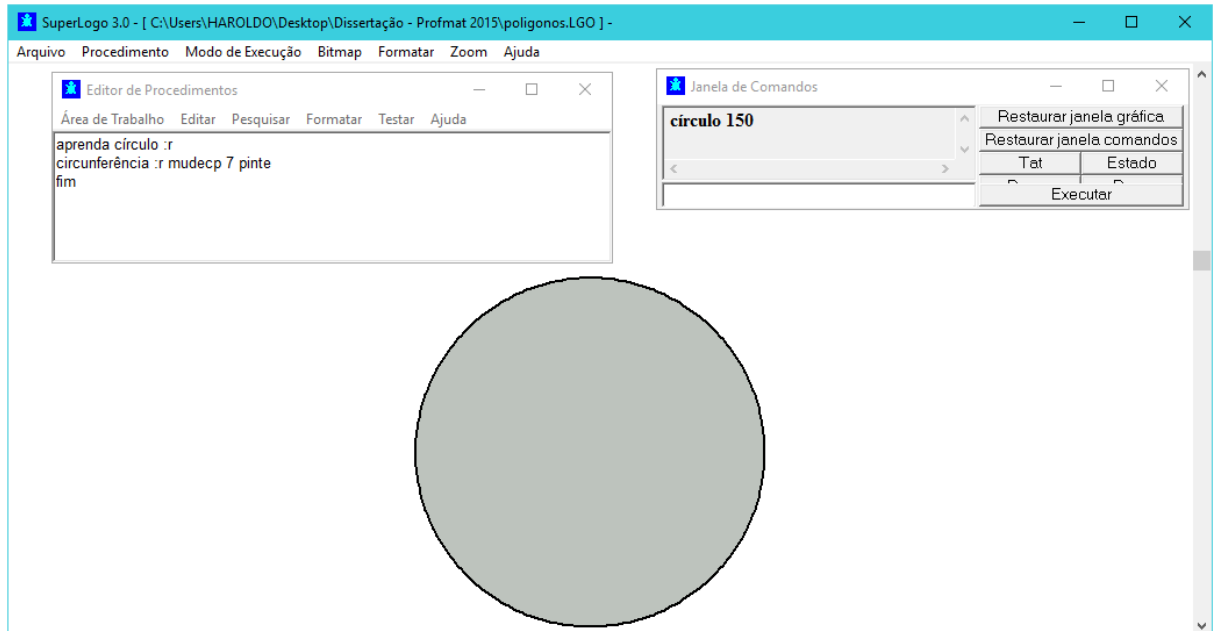


Fonte: O autor

Note que o arco de 120° e raio 150 foi traçado no sentido horário com origem a 270° da origem do ciclo trigonométrico.

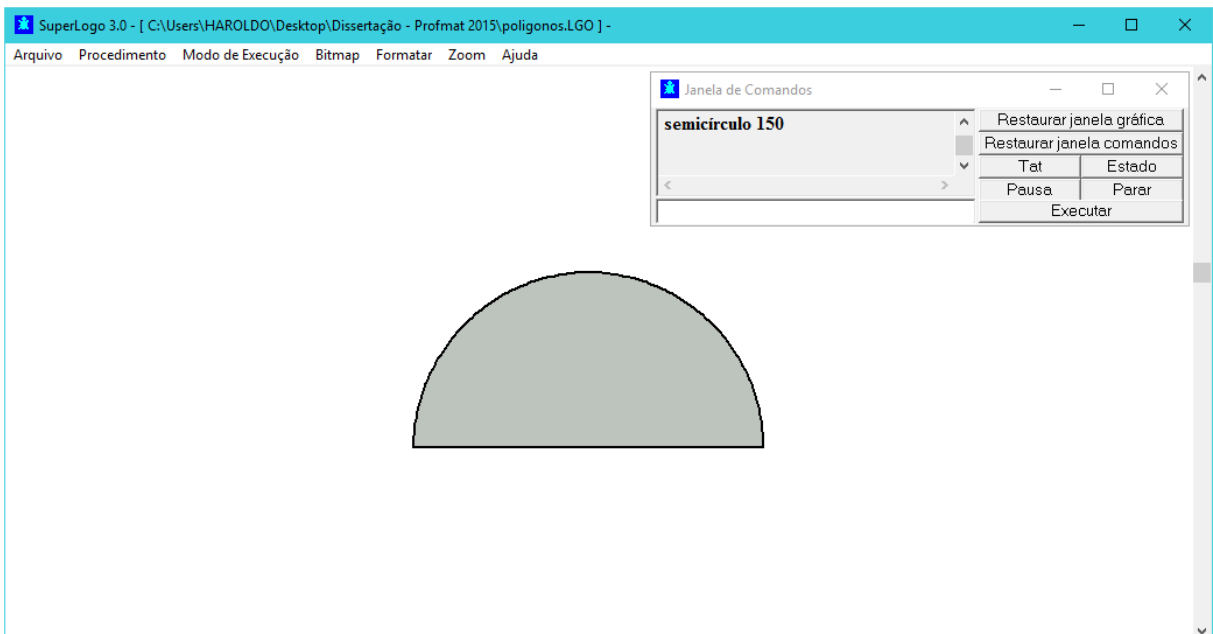
Como um círculo de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos P tais que a distância $\overline{OP} \leq r$, para construí-lo utilizando o SuperLogo 3.0 basta construir uma *circunferência* de raio r e pintar a região interna. Veja o procedimento a seguir:

Figura 23: Círculo



Fonte: O autor

Figura 24: Arco de 120° e raio 150



Fonte: O autor

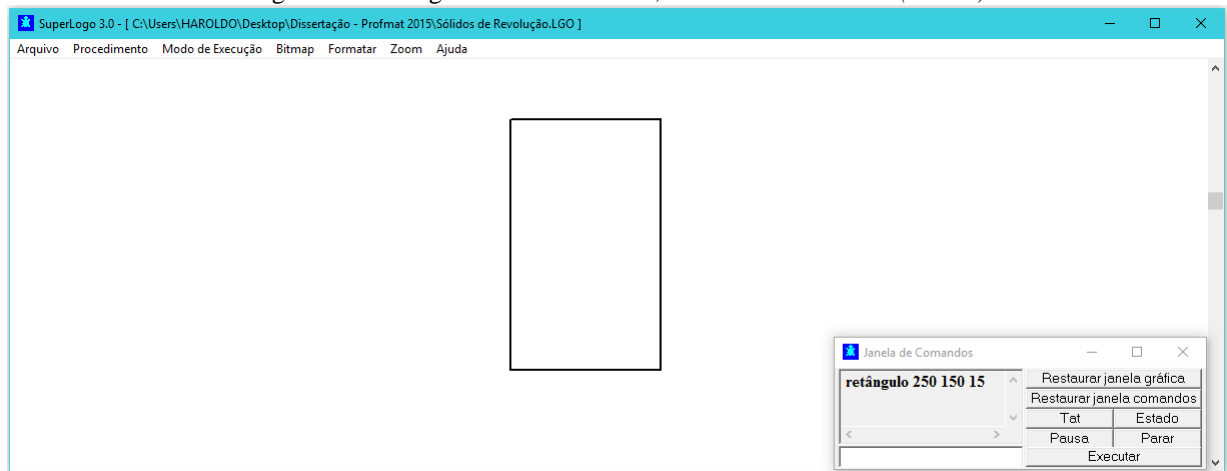
4. CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ATRAVÉS DO SOFTWARE SUPERLOGO 3.0

Neste capítulo será apresentada uma proposta de intervenção metodológica para a construção de sólidos de revolução, especificamente, cilindro, cone, tronco de cone e esfera, assim como para estabelecer a relação entre as dimensões desses sólidos e as dimensões da superfície plana utilizada para gerá-los, através de simulações utilizando o SuperLogo 3.0.

4.1. ATIVIDADE 1: Construção do Cilindro.

1º passo: Elaborar, no SuperLogo 3.0 um procedimento para construção de um retângulo de altura h e base b , quaisquer.

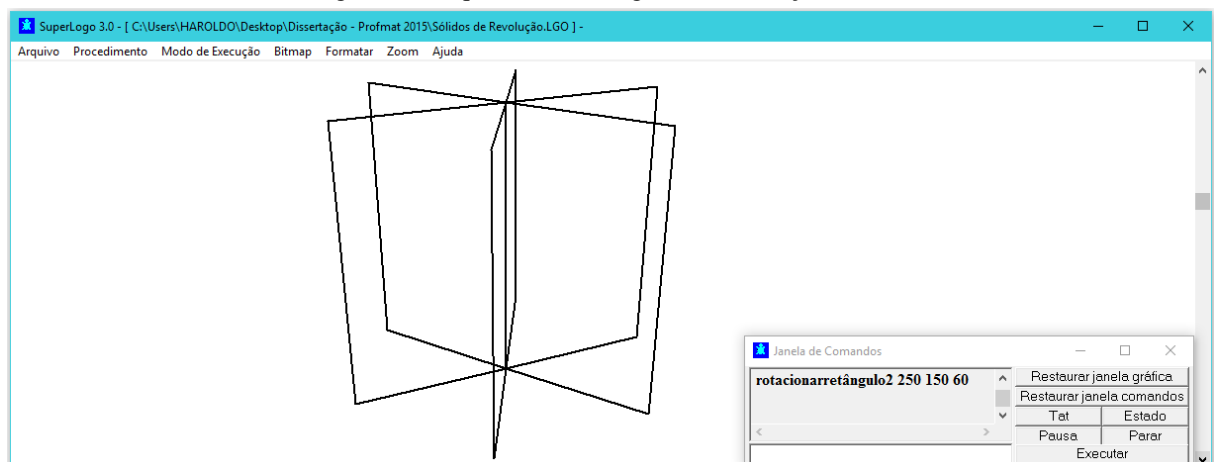
Figura 25: Retângulo de altura $h=250$, base $b=150$ e branco (cor 15)



Fonte: O autor

2º passo: Elaborar um procedimento para construção de uma sequência de retângulos com rotação de 60° em 60° e, em seguida, de 30° em 30° .

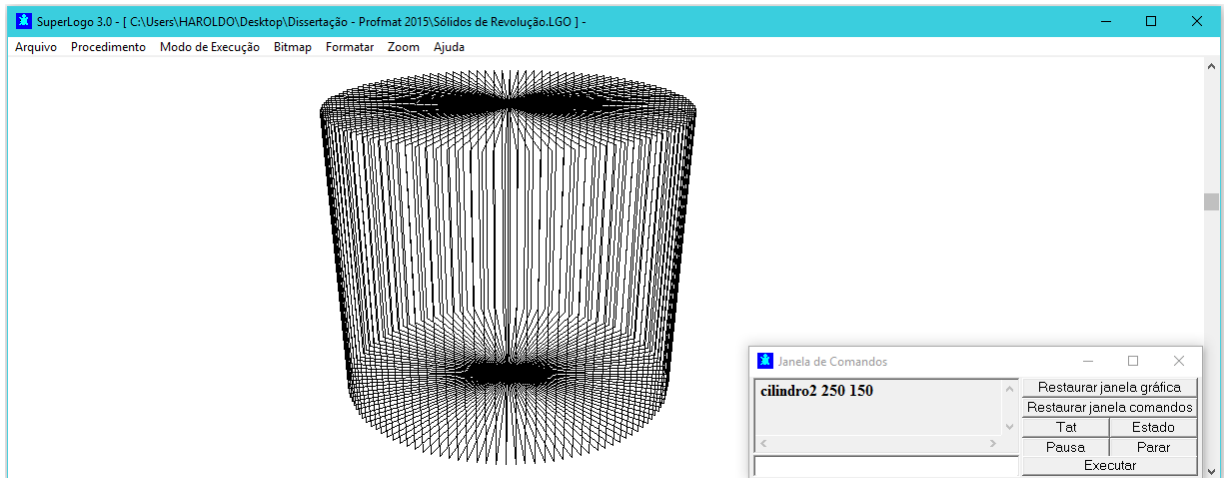
Figura 26: Sequência de retângulos com rotação de 60°



Fonte: O autor

3º passo: Elaborar um procedimento gerar um cilindro de altura h e raio r .

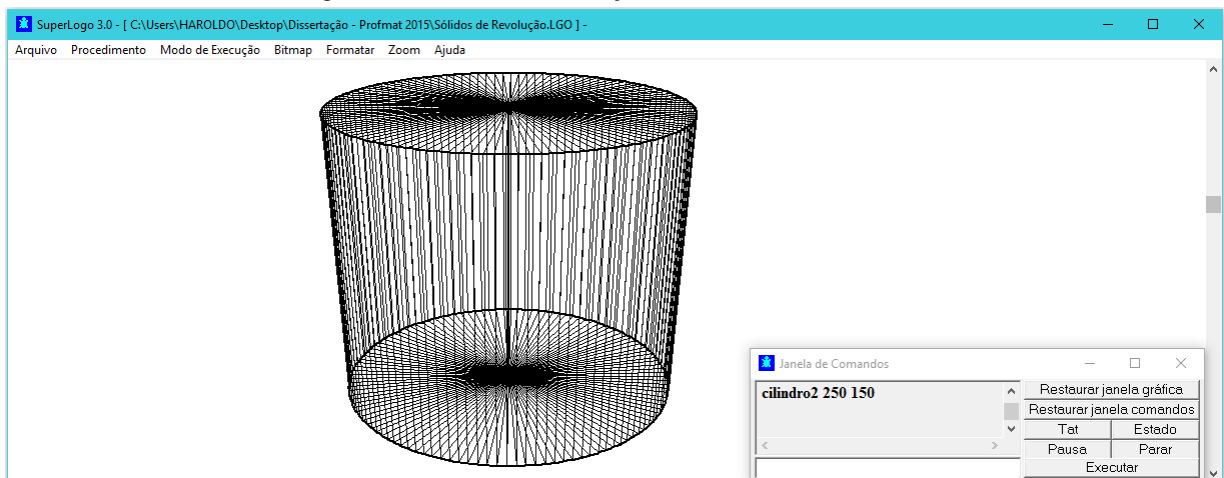
Figura 27: Cilindro de revolução de altura $h=250$ e raio $r=150$



Fonte: O autor

4º passo: Complementar o procedimento anterior para fazer o contorno das bases do cilindro.

Figura 28: Cilindro de revolução com o contorno das bases



Fonte: O autor

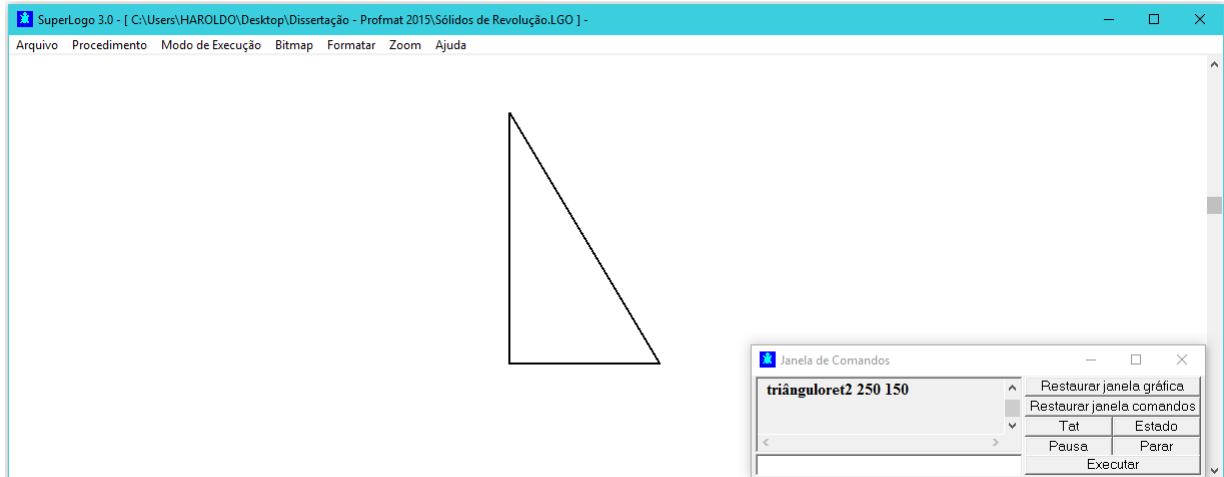
5º passo: Neste passo aluno deve mostrar seu nível de compreensão respondendo as questões abaixo.

- O que é um cilindro de revolução?
- Qual a relação entre as dimensões do cilindro e as dimensões do retângulo utilizado para gerá-lo?

4.2. ATIVIDADE 2: Construção do cone.

1º passo: Elaborar, no SuperLogo 3.0 um procedimento para construção de um triângulo retângulo de catetos b e c , quaisquer.

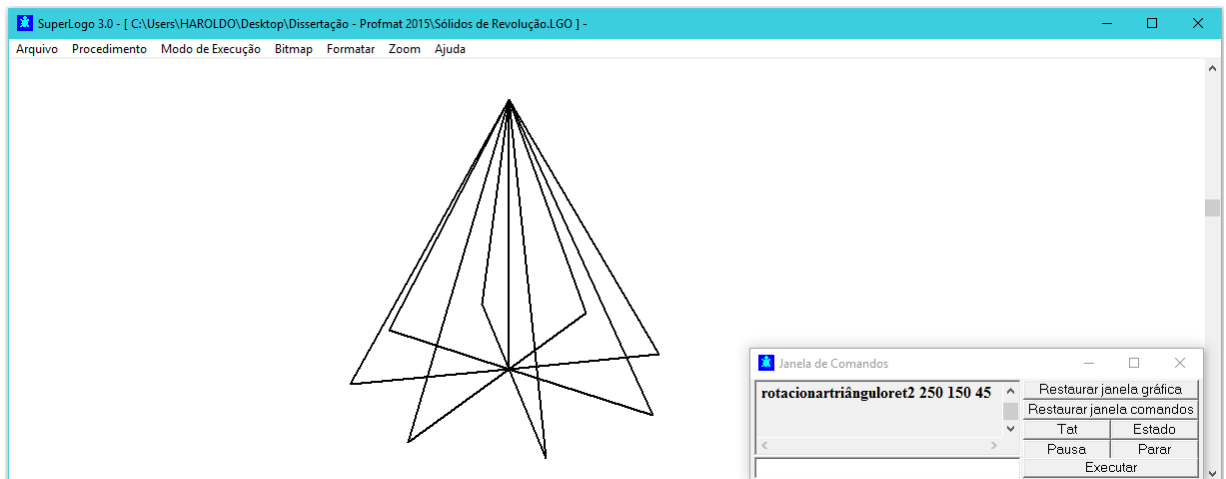
Figura 29: Triângulo retângulo de catetos 250 e 150



Fonte: O autor

2º passo: Elaborar um procedimento para construção de uma sequência de triângulos retângulos com rotação de 45° em 45° e, em seguida de $22,5^\circ$ em $22,5^\circ$.

Figura 30: Sequência de triângulos retângulos com rotação de 45°

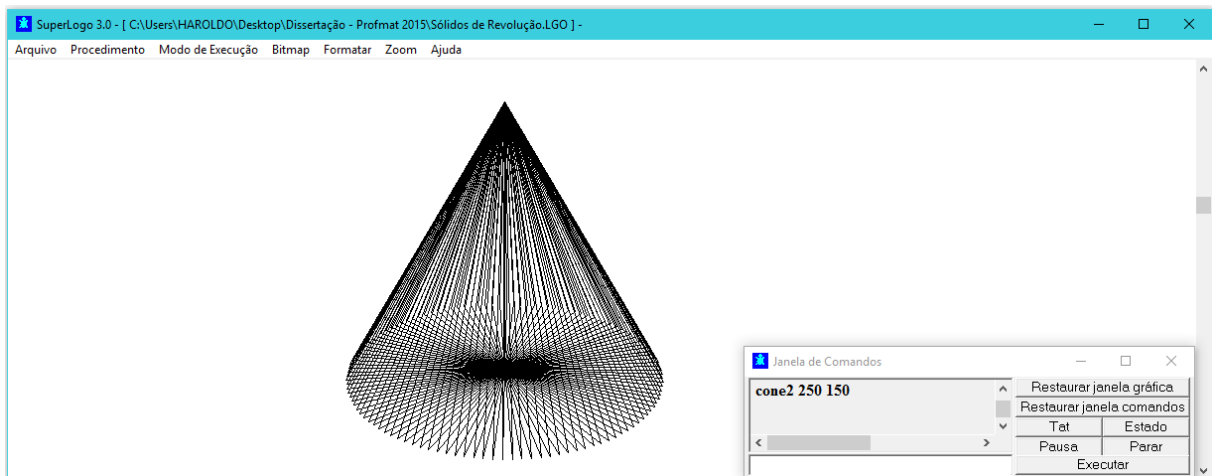


Fonte: O autor

Nestes passos é importante ressaltar que são utilizados o teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

3º passo: Elaborar um procedimento gerar um cilindro de altura h e raio r .

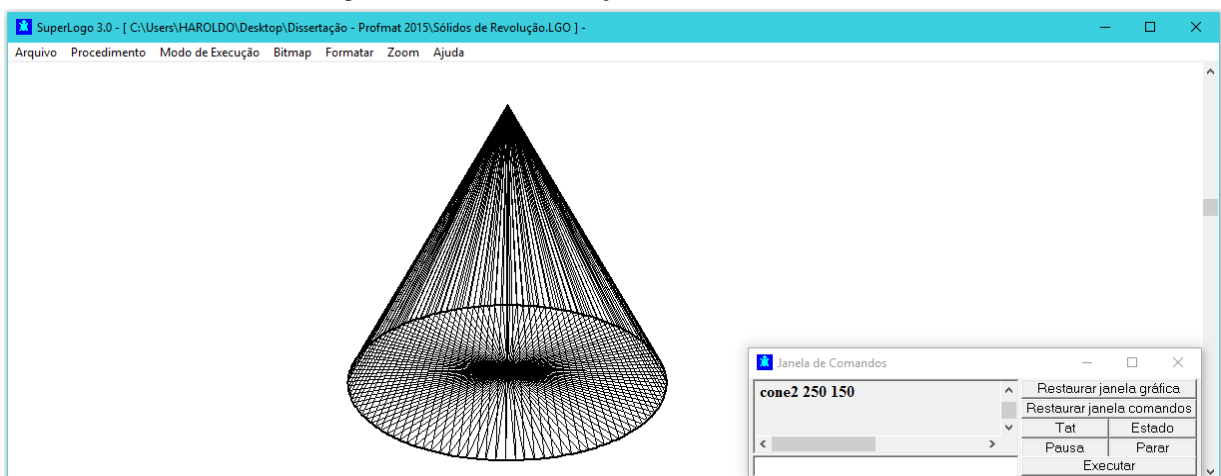
Figura 31: Cone de revolução de altura $h=250$ e raio $r=150$



Fonte: O autor

4º passo: Complementar o procedimento anterior para fazer o contorno da base do cone.

Figura 32: Cone de revolução com o contorno da base



Fonte: O autor

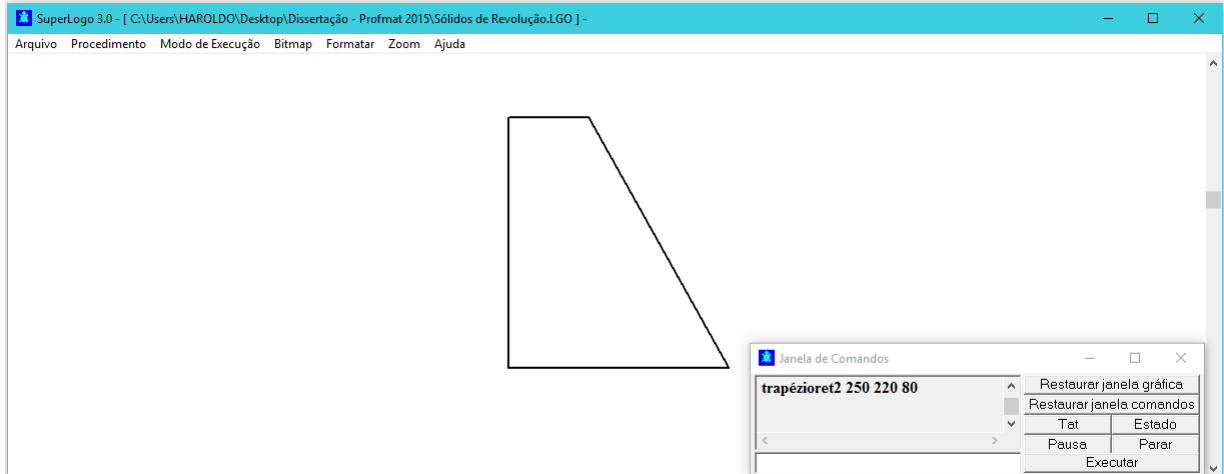
5º passo: Neste passo aluno deve mostrar seu nível de compreensão respondendo as questões abaixo.

- O que é um cone de revolução?
- Qual é a relação entre as dimensões do cone e as dimensões do triângulo retângulo utilizado para gerá-lo?

4.3. ATIVIDADE 3: Construção do tronco de cone.

1º passo: Elaborar, no SuperLogo 3.0 um procedimento para construção de um trapézio retângulo de altura h , raio maior r_1 e raio menor r_2 , quaisquer.

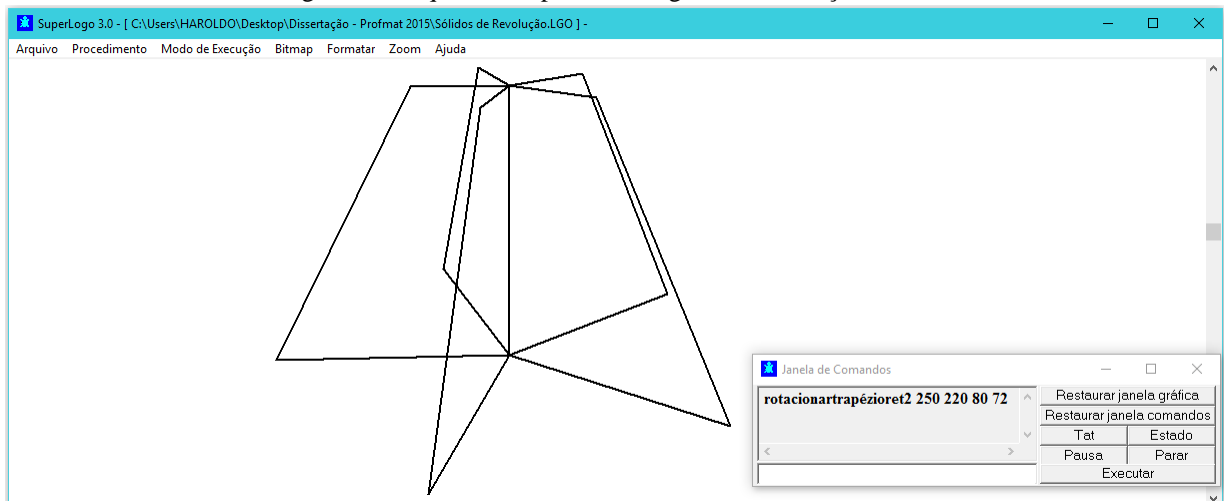
Figura 33: Trapézio retângulo de altura $h=250$, raio maior $R=220$ e raio menor $r=80$



Fonte: O autor

2º passo: Elaborar um procedimento para construção de uma sequência de trapézios retângulos com rotação de 72° em 72° e, em seguida, de 36° em 36° .

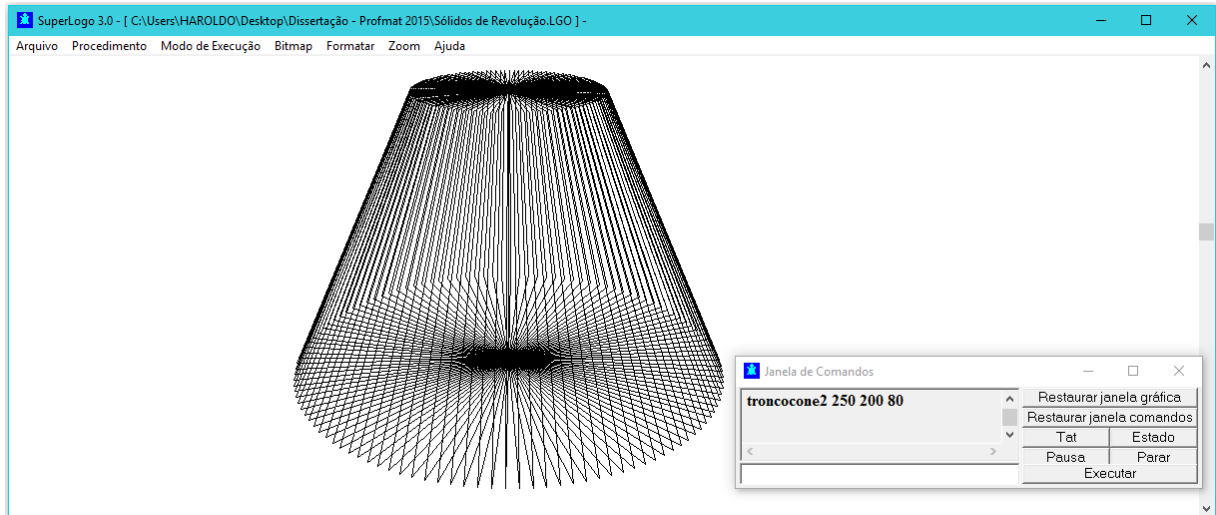
Figura 34: Sequência trapézios retângulos com rotação de 72° .



Fonte: O autor

3º passo: Elaborar um procedimento gerar um tronco de cone com altura h , raio maior r_1 e raio menor r_2 , quaisquer.

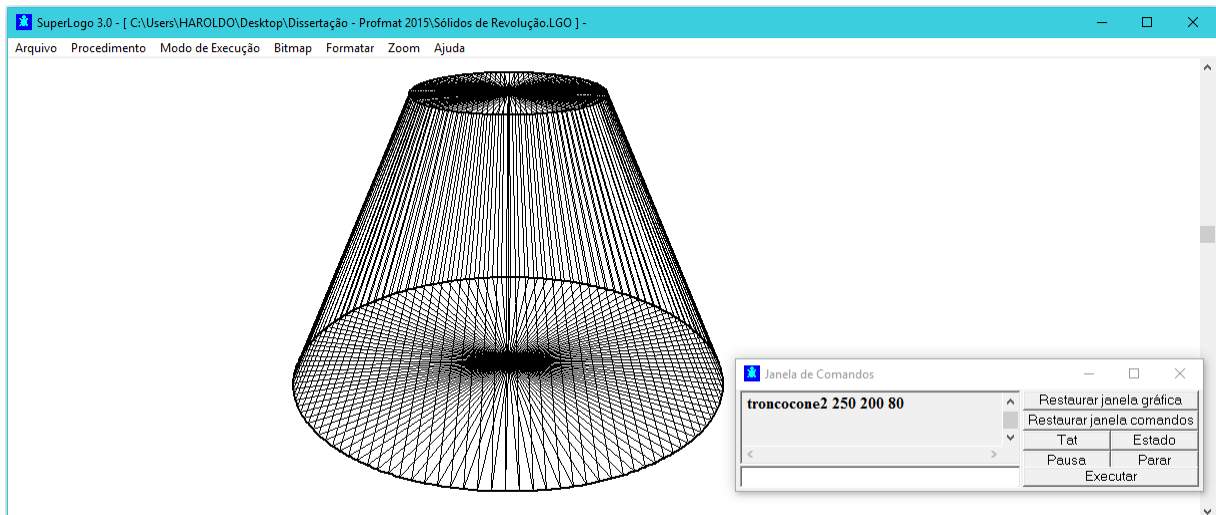
Figura 35: Tronco cone de revolução de altura $h=250$ e raio maior $r_1=200$ e raio menor $r_2=80$



Fonte: O autor

4º passo: Complementar o procedimento anterior para fazer o contorno das bases do tronco de cone.

Figura 36: Tronco cone com o contorno das bases



Fonte: O autor

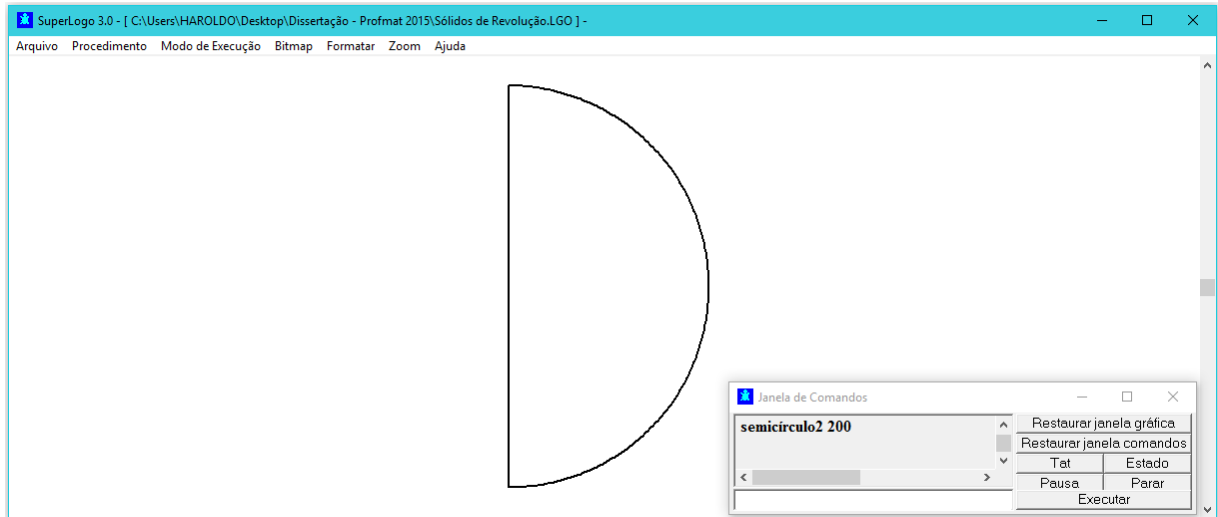
5º passo: Neste passo aluno deve mostrar seu nível de compreensão respondendo as questões abaixo.

- O que é um tronco de cone de revolução?
- Qual é a relação entre as dimensões do tronco de cone e as dimensões do trapézio retângulo utilizado para gerá-lo?

4.4. ATIVIDADE 4: Construção da esfera.

1º passo: Elaborar um procedimento para construção de um semicírculo de raio r qualquer.

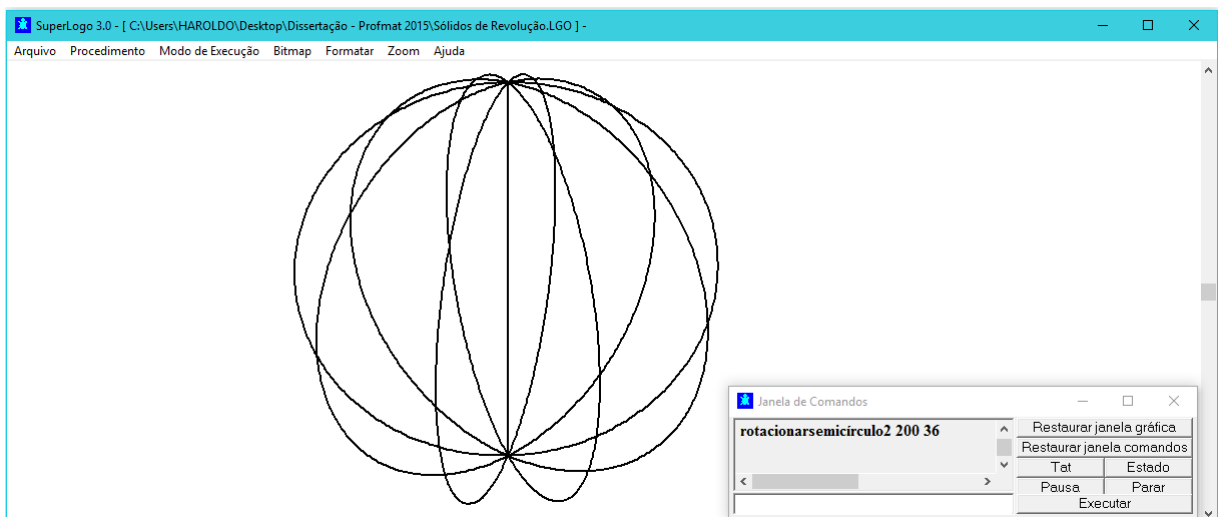
Figura 37: Semicírculo de raio 200



Fonte: O autor

2º passo: Elaborar um procedimento para construção de uma sequência de semicírculos com rotação de 36° em 36° e, em seguida, de 18° em 18° .

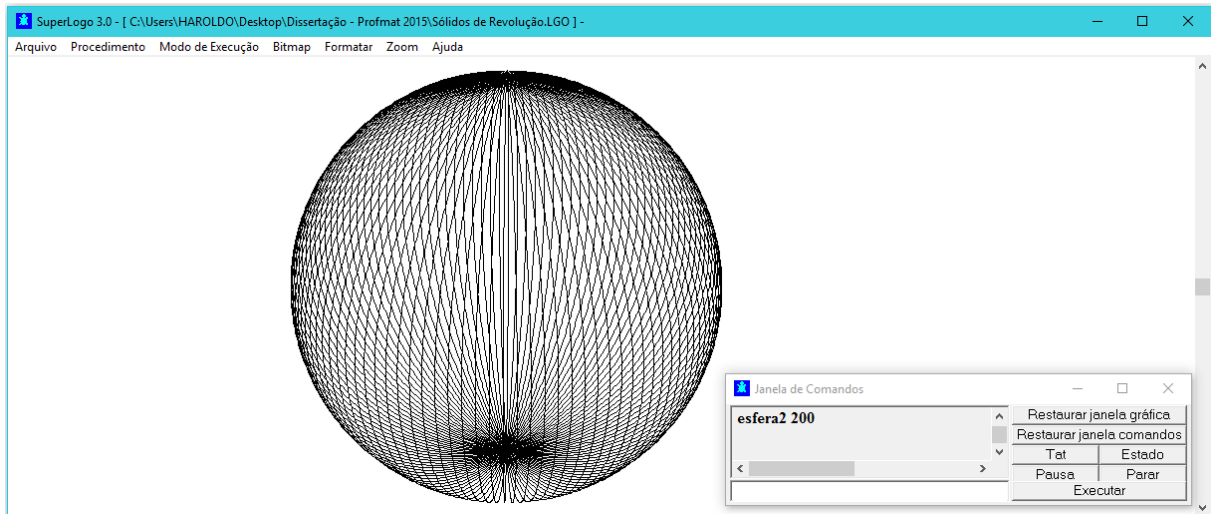
Figura 38: Sequencia de semicírculo de raio 200 com rotação de 36°



Fonte: O autor

3º passo: Elaborar um procedimento gerar uma esfera de raio r , qualquer.

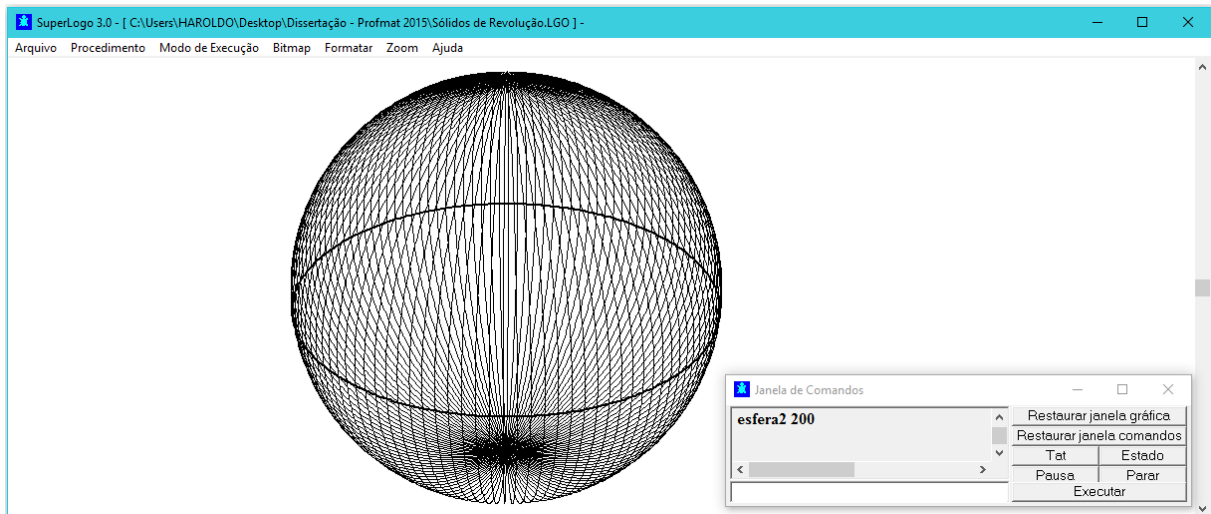
Figura 39: Esfera de raio 200



Fonte: O autor

4º passo: Complementar o procedimento anterior para traçar o equador da esfera.

Figura 40: Esfera de raio 200 com equador



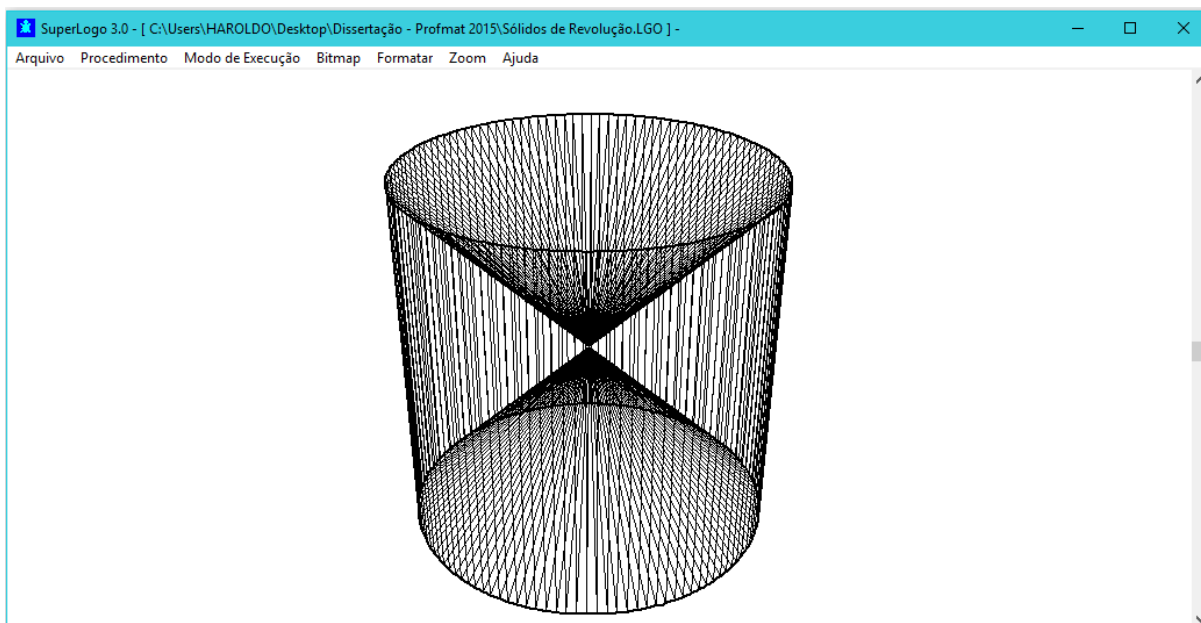
Fonte: O autor

5º passo: Neste passo aluno deve mostrar seu nível de compreensão respondendo as questões abaixo.

- A esfera é um sólido de revolução?
- Qual é a relação entre o raio da esfera e o raio do semicírculo utilizado para gerá-la?

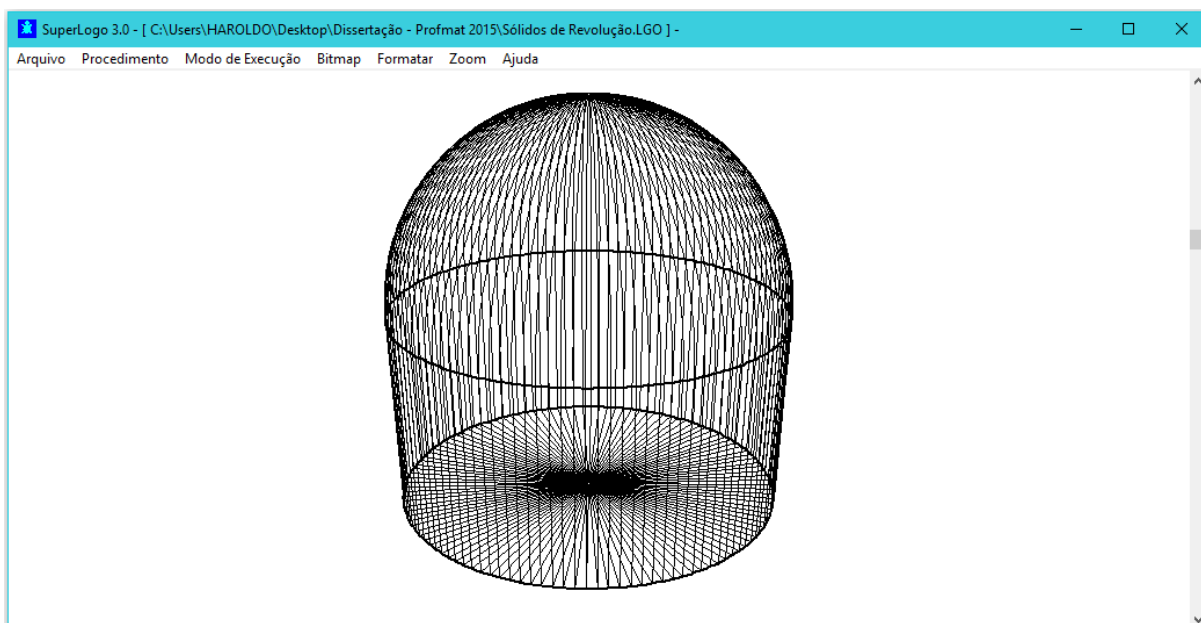
Ao final da execução das atividades anteriores é válido sugerir ao professor e aos alunos que desenvolvam procedimentos para construção de sólidos de revolução gerados por superfícies planas mais complexas, simular o movimento de revolução de figuras planas e, também, procedimentos para gerar a superfície planificada do cilindro, cone e tronco de cone. Vejamos alguns exemplos:

Figura 41: Anticlepsidra de raio 150 e altura 300



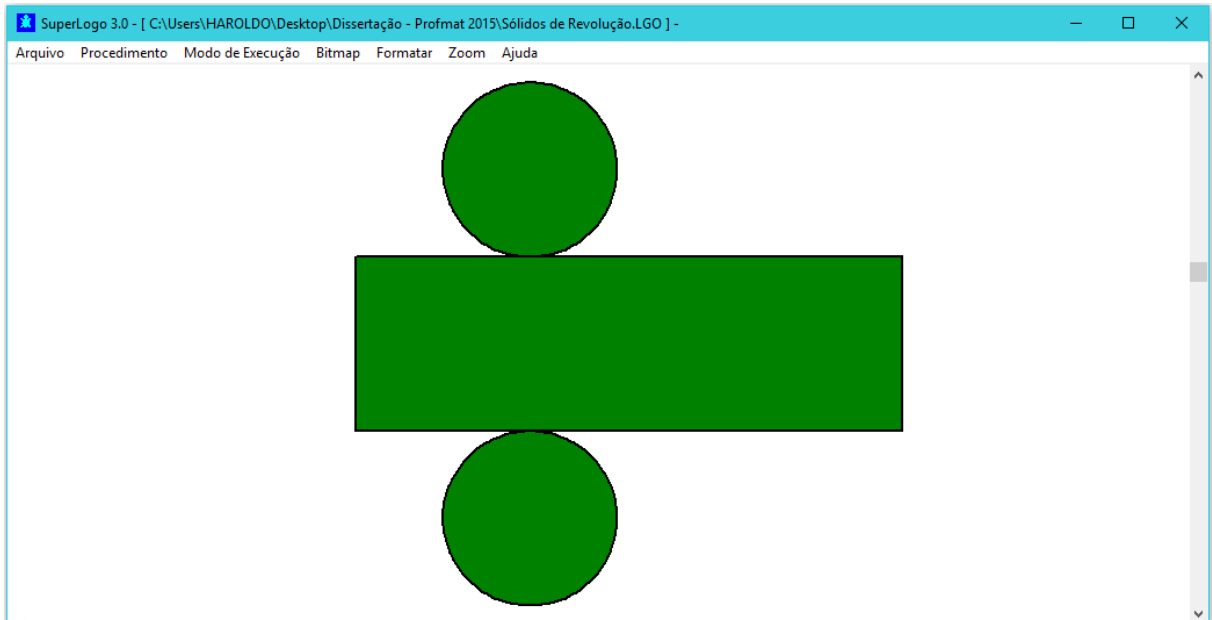
Fonte: O autor

Figura 42: Sólido composto por um hemisfério de raio 150 e um cilindro de altura e raio 150



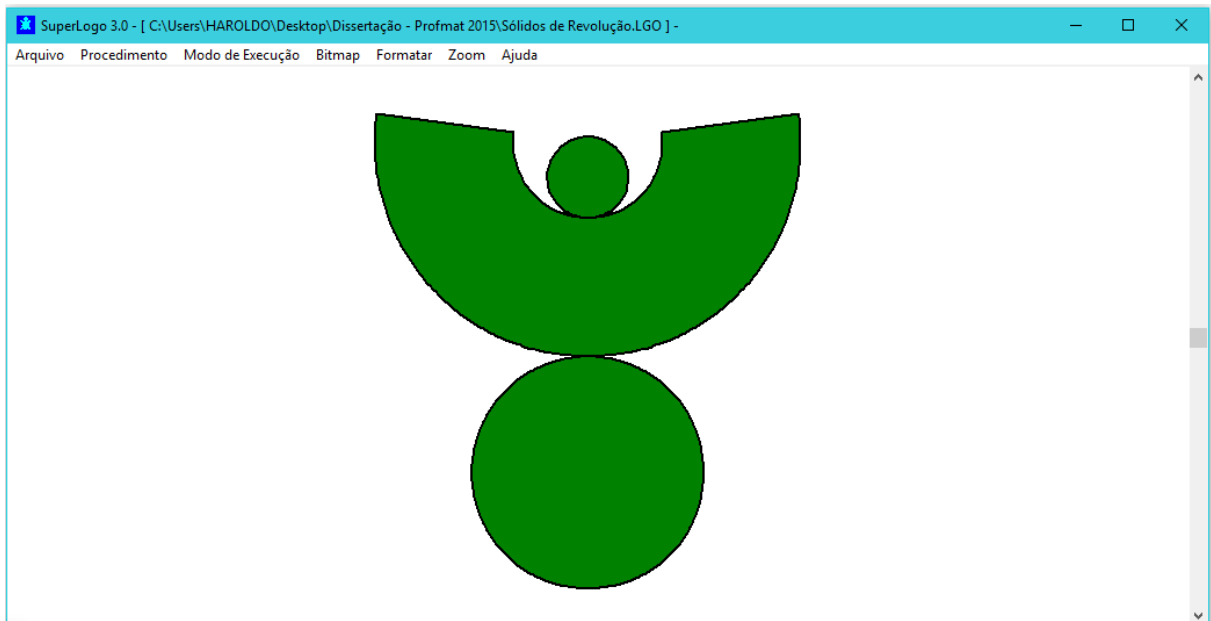
Fonte: O autor

Figura 43: Superfície planificada de um cilindro de altura 150 e raio 75.



Fonte: O autor

Figura 44: Superfície planificada de um tronco de cone de altura 100 e raios 100 e 35, respectivamente.



Fonte: O autor

4.5. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NA OFICINA

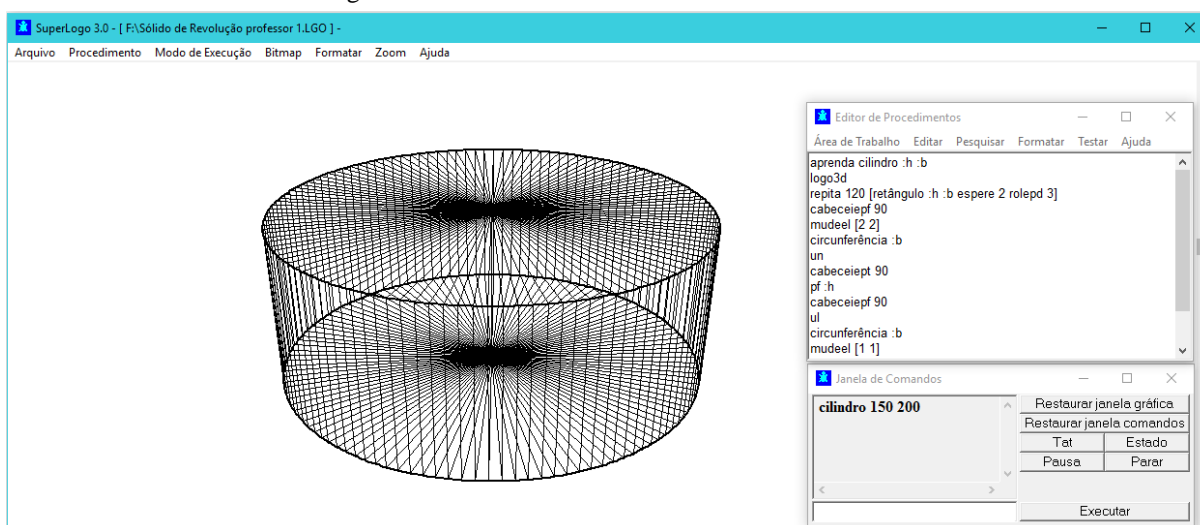
Nos dias 16 e 17 de fevereiro do corrente ano foi realizada, na sala de informática da Escola Estadual de Ensino Médio Lameira Bittencourt, uma oficina sobre *Ensino de sólidos de revolução com auxílio do SuperLogo 3.0* com carga horária de 8 h, para a equipe de professores de matemática desta instituição.

No primeiro dia, com duração de 4 h, foram explorados os comandos básicos, as operações e as funções matemáticas utilizadas da construção de figuras geométricas planas e, a partir destas, a elaboração de procedimentos para construção de retângulos, triângulos, polígonos regulares, circunferências e arcos de circunferência.

No segundo dia, também com duração de 4h, foram aplicadas as atividades propostas nesse capítulo com a finalidade de simular a construção do cilindro, do cone, do tronco de cone e da esfera, sendo uma atividade para cada professor. Ao final da realização da atividade foi aplicado um questionário sobre o uso da informática como ferramenta pedagógica no ensino de matemática e sobre a viabilidade, dificuldades, expectativas e contribuições para o desenvolvimento das atividades docentes quanto à utilização do SuperLogo 3.0 e que contribuíssem com sugestões para o aprimoramento da proposta metodológica.

O *professor 1* desenvolveu um procedimento para a construção do cilindro de revolução, proposto na *atividade 1*, apresentando o seguinte resultado:

Figura 45: Procedimento *cilindro :h :b* – Professor 1.



Fonte: O autor

Note que dentro do procedimento *cilindro* $:h :b$ o professor 1 utilizou o procedimento *retângulo* $:h :b$, previamente elaborado.

Quanto ao questionário respondeu:

“O uso da informática se faz presente no dia a dia das pessoas, facilitando as suas vidas em quase todas as áreas. No campo da educação não deve ser diferente, a informática deve ser usada para potencializar a aprendizagem uma vez que os objetos educativos, páginas da internet e os mais variados aplicativos existentes no mercado tem despertado um maior interesse do aluno pelo estudo, uma vez que ele pode aprender de uma forma intuitiva e no ritmo e aprofundamento que desejar. Para o ensino da matemática utilizando a informática temos a dispor muitas ferramentas que podem contribuir com a aprendizagem, onde podemos citar os programas de matemática dinâmica, dentre eles o Geogebra que possui recursos de geometria, álgebra e cálculo. Existem também uma infinidade de Jogos educativos matemáticos e grandes portais da internet que oferecem ferramentas em vários formatos, como é o caso do portal do professor.”

“Sobre a sua viabilidade podemos dizer que é um programa gratuito, disponível na internet, de fácil instalação, ou seja, está acessível a todos que possuam uma versão do Windows instalada em sua máquina.”

“Como qualquer software, antes de utilizá-lo plenamente temos que conhecê-lo. Mas essa dificuldade inicial é superada facilmente quando temos um orientador para nos fornecer exemplos de como utilizar seus comandos e procedimentos. Em seguida o esforço vai aumentando dependendo do tipo de construção que você vai pretendendo realizar, o que considero natural em qualquer processo de aprendizagem.”

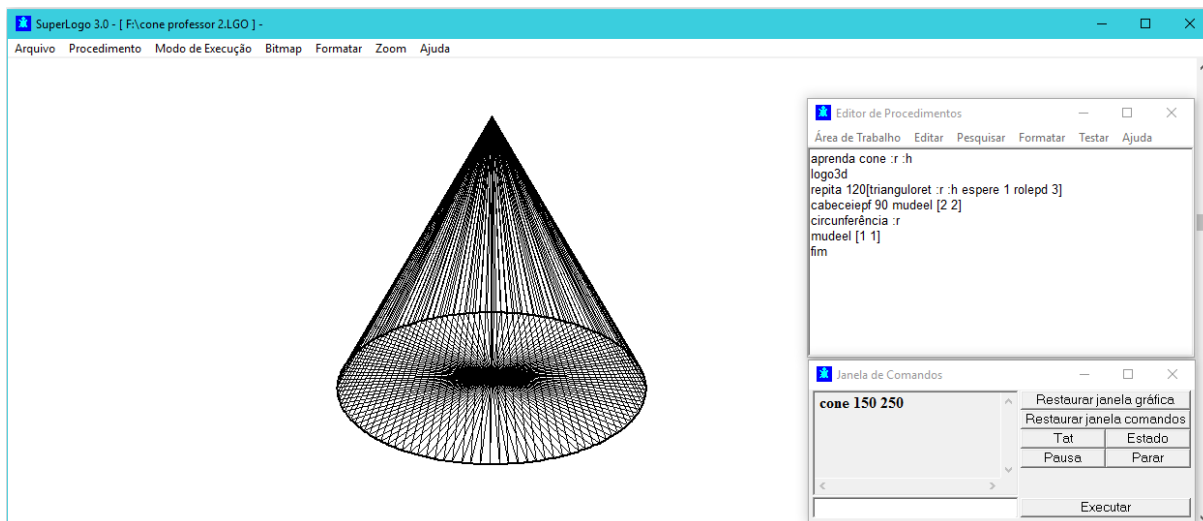
“O Software superou as minhas expectativas, pois faz extrapolar aquela aula tradicional de geometria onde o professor mostra ao aluno o traçado de uma figura geométrica, e depois espera que o estudante faça uma cópia da mesma em seu caderno. Apesar de considerar que o professor tem que iniciar a aula da forma tradicional, em um segundo momento, agora com a utilização de um software, o aluno terá a possibilidade de mostrar que realmente entendeu o processo de construção das figuras geométricas.”

“A função primordial do ensino é fazer com que o aluno aprenda. E para que isto ocorra, o professor precisa de ferramentas que despertem o interesse do aluno e que proporcionem o protagonismo dele com relação a sua própria aprendizagem. Então vejo no SuperLogo 3.0 uma porta aberta neste sentido da aprendizagem ativa, além disso, o software permite que o aluno possa ainda ir mas longe do que foi delimitado pelo professor, como também permite ao estudante descobrir diferentes e surpreendentes possibilidades de construções.”

“Uma sugestão é que após o professor ensinar os comandos e procedimentos do Software para todos os alunos, distribua outros procedimentos para que eles desenvolvam autonomamente até atingirem certa segurança na utilização do programa. Após esta etapa o professor propõe uma construção inédita e fica observando quais os alunos que tenham mais facilidade no desenvolvimento da tarefa. Em seguida, convoca-os para monitorar os que tenham maiores dificuldades.”

O professor 2 desenvolveu o procedimento para construção do cone de revolução, *proposto na atividade2*, apresentando o seguinte resultado:

Figura 46: Procedimento *cone :r :h* – Professor 2.



Fonte: O autor

Note que dentro do procedimento *cone :r :h* o professor 2 utilizou o procedimento *trianguloret :r :h*, previamente elaborado.

Quanto ao questionário respondeu:

“A informática e uma ferramenta de relevante importância no ensino da matemática, principalmente para esclarecer dúvidas que os alunos encontram sobre determinado assunto. A informática faz com que os alunos sintam a necessidade de alguns conteúdos que eles sempre perguntam para que serve e através dela podemos mostrar de forma mais prática e em que podemos utilizar.”

“É um programa de fácil acesso com isso a facilidade para a sua utilização.”

“No início sim, um pouco de dificuldade, mas com o uso do mesmo foi se esclarecendo.”

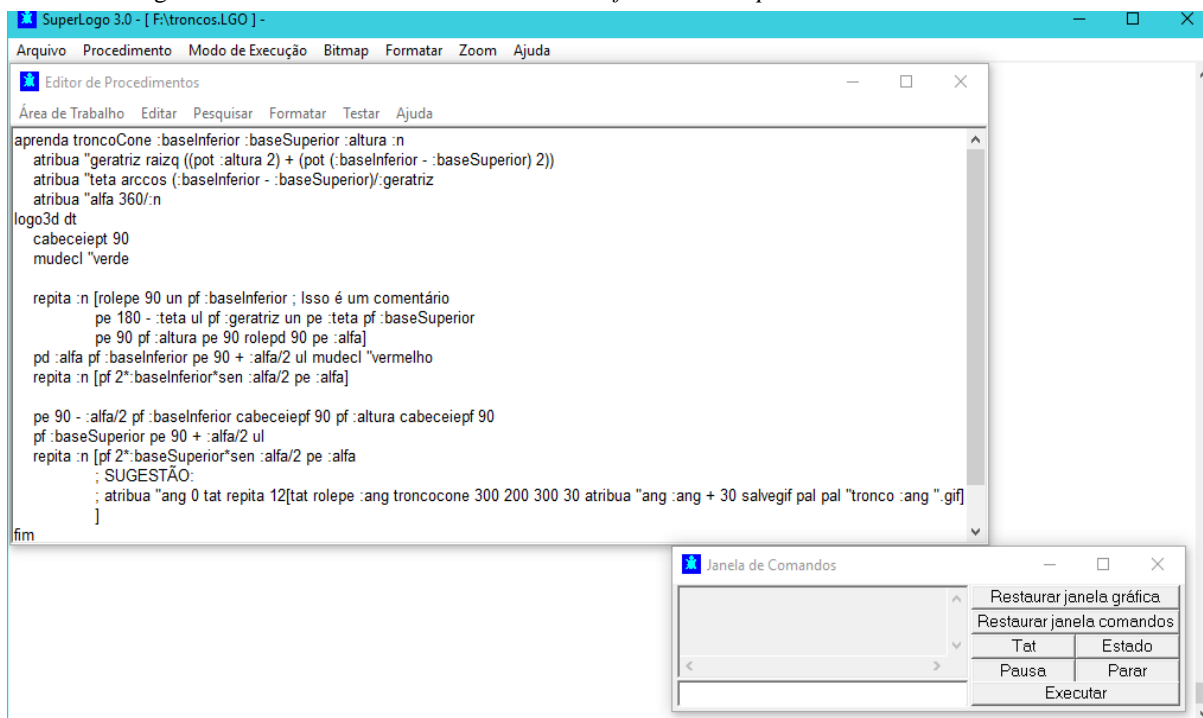
“Que será de relevante importância e que ajudará bastante nas aulas de matemática, especificamente, geometria.”

“Irá contribuir bastante facilitando o aprendizado dos alunos nas aulas principalmente na geometria.”

“Oficinas para contribuir no uso nas escolas principalmente da rede pública.”

O *professor 3* desenvolveu um procedimento para construção do tronco cone de revolução, proposto na *atividade 3*, apresentando o seguinte resultado:

Figura 47: Procedimento *troncoCone :baseInferio :baseSuperior :altura :n* – Professor 3



Fonte: O autor

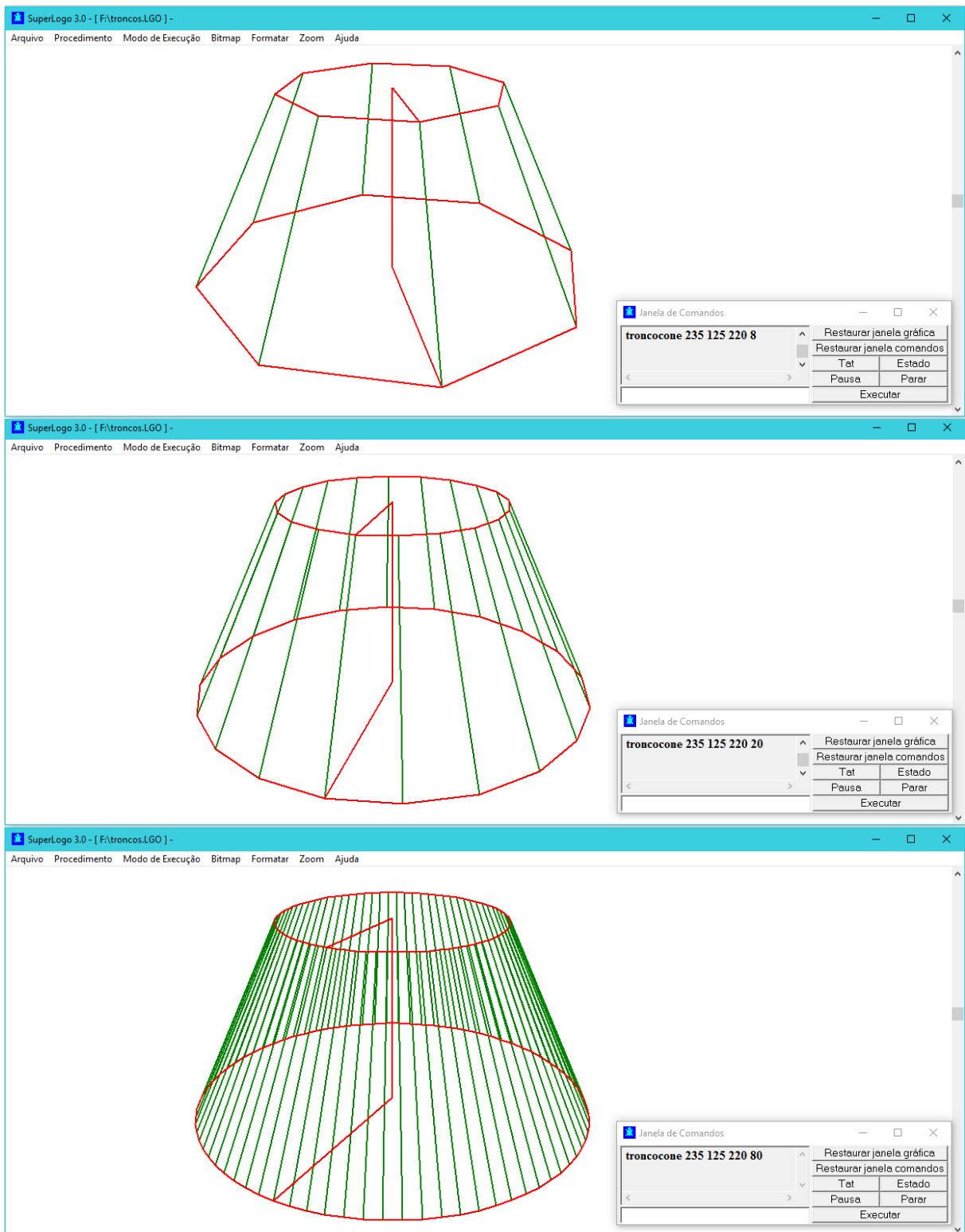
Este procedimento evidenciou a potencialidade do Superlogo 3.0, pois, diferentemente dos demais, este professor, que demonstrou conhecimento prévio do software SuperLogo 3.0 e vasta experiência em programação, construiu um tronco de cone por aproximação a partir de sucessivas construções de um tronco de pirâmide regular aumentado, progressivamente, o número de lados dos polígonos das bases.

Como demonstração gerou um tronco de pirâmide regular que possui como bases dois octógonos regulares, em seguida, outro tronco de pirâmide regular cujas bases são dois icoságonos regulares e, por fim, um tronco de pirâmide regular cujas bases são polígonos regulares com 80 lados cada.

Note que neste caso não utilizou, necessariamente, o movimento de revolução de um trapézio retângulo para gerar um tronco de cone como sugerido pela *atividade 3*.

Observe nas ilustrações a seguir:

Figura 48: Construção de um tronco de cone por aproximação com troncos de pirâmides regulares



Fonte: O autor

Com relação ao questionário respondeu:

“O computador agiliza as demonstrações e provas. É bem mais barato usar seus ambientes simulados do que um laboratório físico de geometria, por exemplo. É também mais fácil consultar publicações em meio digital.”

“O SuperLogo 3.0 é pouco exigente de recursos de hardware, funcionando muito bem nos computadores de antigamente. Outra característica importante é a sua tradução para o português, o que o torna ainda mais intuitivo para os nossos estudantes. Isso viabilizaria a sua instalação em larga escala em computadores escolares, se não fosse a incompatibilidade do sistema operacional. O SuperLogo é um programa para Windows, e nas escolas a maioria dos computadores é Linux. Existem outros dialetos Logo, mas não foram traduzidos para o português.”

“A bibliografia é escassa. A ajuda do SuperLogo não está mais legível nas versões mais recentes do Windows, o que torna limitada a sua exploração.”

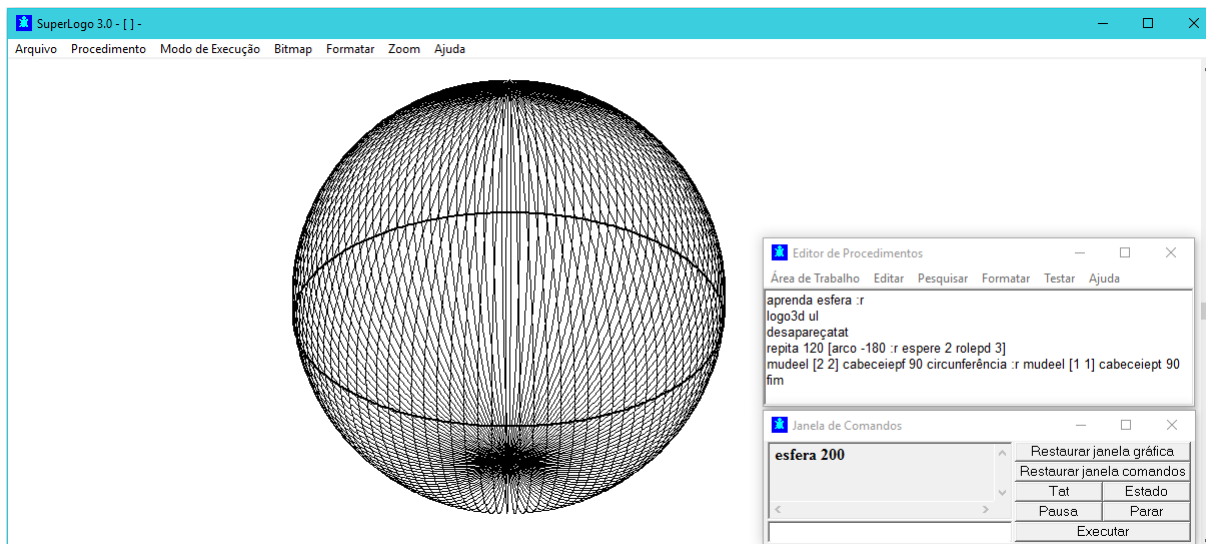
“Que mais pessoas possam conhecer e se interessar pelo programa, e que o SuperLogo possa contribuir mais para a melhoria do ensino não só da geometria, como de outros campos da matemática.”

“Despertar nos alunos o interesse pela matemática, e melhorar o seu rendimento nesta matéria.”

“Oficinas mais regulares de SuperLogo para professores de matemática. Pode não ser presencial, mas é importante que todos os participantes exponham feedback de suas atividades. Poderíamos criar uma comunidade de usuários.”

O *professor 4* desenvolveu o procedimento para construção da esfera, proposto na *atividade 4*, apresentando o seguinte resultado:

Figura 49: Procedimento *esfera :r* – Professor 4



Fonte: O autor

Com relação ao questionário respondeu:

“Para que haja aprendizado significativo, nós professores, temos que utilizar métodos que despertem, nos alunos, um interesse maior pelos temas discutidos em sala de aula, principalmente nas disciplinas que lhes causam maiores dificuldades, entre as quais a matemática. Como a informática tem se tornado acessível ao longo de sua evolução e, de certa forma, é um atrativo a mais para aluno, considero importante sua utilização como ferramenta pedagógica para o ensino da matemática uma vez que a partir da interação com o computador o aluno pode aprofundar seus conhecimentos e despertar em si a sua criatividade.”

“Não conhecia o SuperLogo 3.0, mas a sua utilização, desde a instalação até a construção dos sólidos de revolução, observei que, por ser gratuito, por não exigir muito da máquina e, também por ter seus comandos traduzidos para o português, considero totalmente viável a sua utilização como recurso para o ensino de geometria e de outras disciplinas.”

“Como não conhecia o software e não tenho habilidades em programação tive dificuldades em estruturar a sequencia lógica na construção das figuras, pois, não estava habituado com os comandos, visto que o menu de ajuda não está disponível em versões atuais do windows, dificuldades estas que foram reduzidas à medida que desenvolvia as atividades.”

“Que essa metodologia seja aplicada em sala de aula, isto é, que façamos chegar esse projeto até a principal peça do processo ensino e aprendizagem: os alunos, e que nos ajude de fato a melhorar o nosso trabalho.”

“Que consigamos despertar maior interesse por parte dos alunos com relação ao ensino de matemática, especialmente, o ensino de geometria que carece de um algo a mais para que o aluno se sinta estimulado a criar, a buscar e a produzir conhecimentos em níveis cada vez mais profundos.”

“Fica como sugestão a realização de oficinas periódicas no sentido de explorar e aprofundar os recursos do SuperLogo 3.0 através de outras atividades como, por exemplo, construção de gráfico e outros sólidos geométricos.”

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, um dos temas de debates entre matemáticos e educadores matemáticos, tem sido a busca por métodos inovadores que venham contribuir para o aprimoramento das práticas e dos recursos pedagógicos que sejam capazes de despertar a criatividade e o interesse dos alunos na construção de conhecimento, visando aprofundar e aplicar conceitos matemáticos na solução de problemas do cotidiano, contribuindo assim, para um aprendizado humanista e mais significativo.

A evolução da informática e, conseqüentemente, dos pacotes numéricos e geométricos, tem tornado o processo ensino e aprendizagem um processo mais dinâmico e interativo, pois, através do desenvolvimento de simulações para construções geométricas e construção de gráficos, tem possibilitado que os resultados obtidos a partir da aplicação de conhecimentos matemáticos, sejam testados e experimentados.

Neste sentido, o presente trabalho apresenta uma proposta de intervenção metodológica para o ensino de geometria espacial através do software SuperLogo 3.0 como ferramenta pedagógica para o ensino e aprendizagem de conceitos e das relações entre as medidas dos sólidos de revolução, oferecendo recursos para visualização da construção do cilindro, do cone, do tronco de cone, da esfera e de outros sólidos de revolução mais complexos, possibilitando, também, a realização do cálculo de áreas e volumes desses sólidos, além de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e de habilidades e competências em matemática e em programação.

Esta proposta foi apresentada aos professores de matemática da escola Estadual de Ensino Médio Lameira Bittencourt, situada no município de Castanhal, estado do Pará, tendo a participação efetiva dos mesmos no desenvolvimento das atividades propostas e na discussão, através de um questionário, quanto a utilização da informática como ferramenta pedagógica para o ensino de matemática e na utilização do SuperLogo 3.0 na construção de sólidos de revolução, pois, trata-se de um software cujos comandos são de fácil compreensão e utilização, tendo como sugestão principal a realização constante de oficinas, sendo estas, extensivas aos alunos, no sentido de aprimorar o ensino e a aprendizagem de matemática neste estabelecimento de ensino.

Espera-se, portanto, que este trabalho provoque novas reflexões quanto à utilização de métodos inovadores e desperte maior interesse das partes envolvidas no processo ensino e aprendizagem, não apenas na busca, mas, também, no aperfeiçoamento e na aplicação de ferramentas que venham contribuir para uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Marcelo da Silva. **Geometria Espacial: construção de poliedros e prismas no SuperLogo**. Castanhal, PA, UFPA, 2004.

AYRES JR, Frank; MEDELSON, Elliot. Teoria e problemas de cálculo. **Coleção Schaum: 4ª. ed.** Porto Alegre: Bookman, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Fundamental** Brasília. MEC, 1997.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI Carlos. Geometria Espacial. **Fundamentos da Matemática Elementar: 9ª. ed.** São Paulo: Atual, 2004.

LOGO. **Projeto LOGO**. Disponível em <http://projetologo.webs.com/slogo.html>. Acessado em 04/11/2016.

LOGO. **Manual LOGO**. Disponível: <https://pt.scribd.com/document/176481925/Manual-Logo-3-0>. Acessado em 04/11/2016.

MADEIRA, Lilian de Lima. **Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo**. Juiz de Fora, MG, UFJF, 2014.

MOTTA, Marcelo Souza. **Contribuições do superlogo ao ensino de geometria do sétimo ano da educação básica**. Belo Horizonte, MG, PUC, 2008.


PATERLINI, R. R. **Os “Teoremas” de Cavalieri**. Extensão de artigo publicado na Revista do Professor de Matemática. n.72. 2010. p.43-47. Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_cavalieri.pdf. Acesso em 20/03/2017.

RIBEIRO. Jackson. **Ciência, Linguagem e Tecnologia**. 1ª. ed. São Paulo: Scipione, 2011.

SILVA, Luzia de Oliveira da. **Estudo de sólidos geométricos com o auxílio do software wingeom: uma proposta pedagógica**. Dourados, MS, UFGD, 2014.

APÊNDICE A – Lista de Cores do SuperLogo 3.0

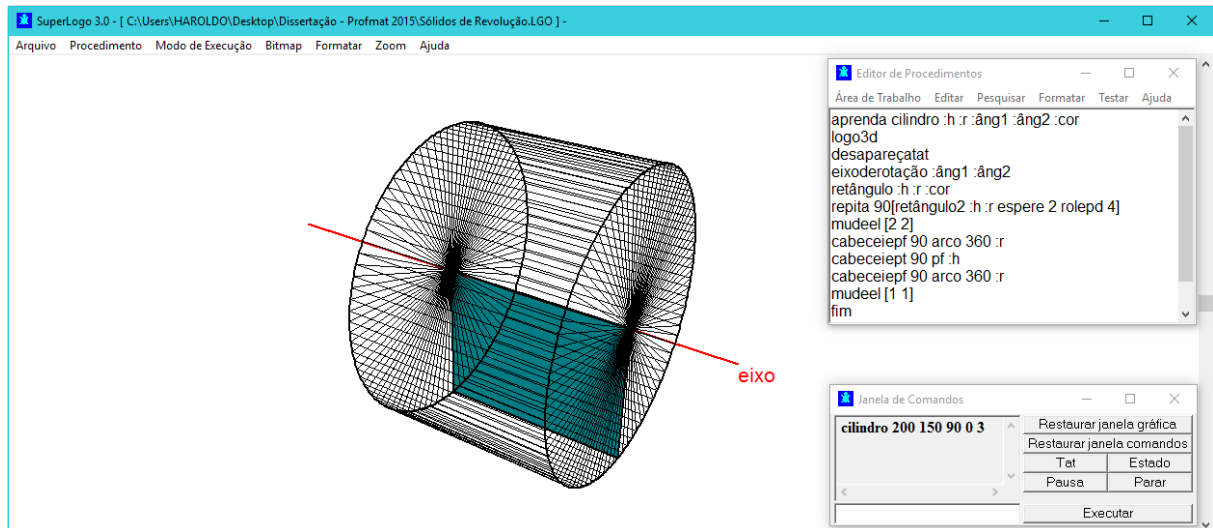
Quadro 3 – Lista de cores do SuperLogo 3.0

Nº	Cor	
0	Preto	
1	Azul	
2	Verde	
3	Ciano	
4	Vermelho	
5	Roxo	
6	Marrom	
7	Cinza Claro	
8	Cinza Escuro	
9	Verde Água	
10	Verde Claro	
11	Ciano Claro	
12	Vermelho Escuro	
13	Rosa Choque	
14	Amarelo	
15	Branco	

Fonte: O autor

APÊNDICE B – Procedimento *cilindro :h :r :âng1 :âng2 :cor*

Figura 50: Construção do cilindro de revolução de altura 200 e raio 100 e eixo Oy

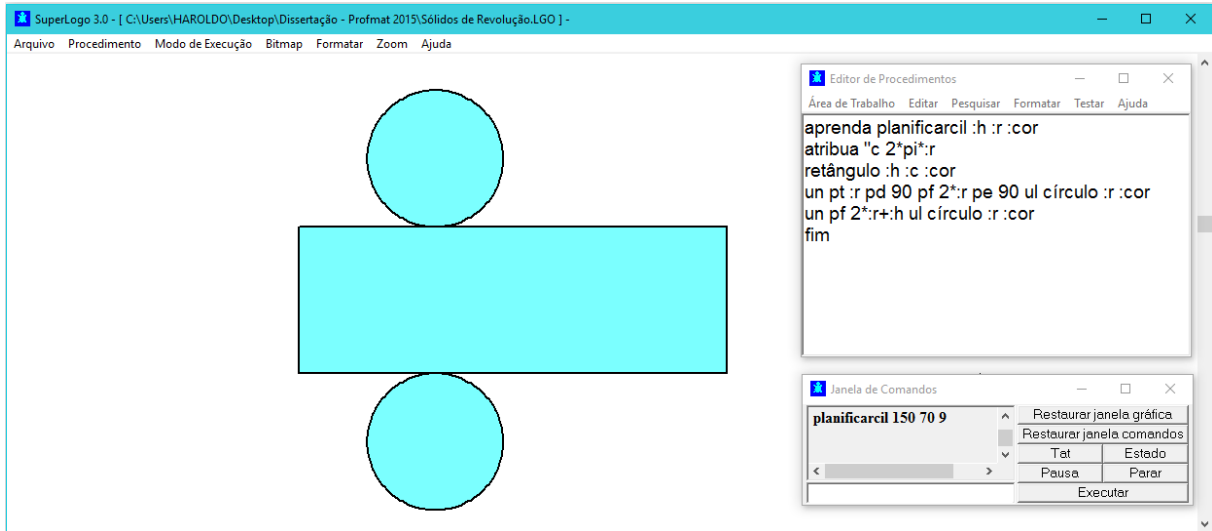


Fonte: O autor

Note que neste procedimento foram utilizados três procedimentos previamente desenvolvidos: *eixoderotação :âng1 :âng2*, para posicionar o eixo de rotação, *retângulo :h :r :cor*, para preencher um retângulo de base r e altura h com a cor previamente escolhida e outro, *retângulo2 :h :r* para construir um retângulo de base r e altura h sem preenchimento.

APÊNDICE C – Procedimento *planificarcil :h :r :cor*

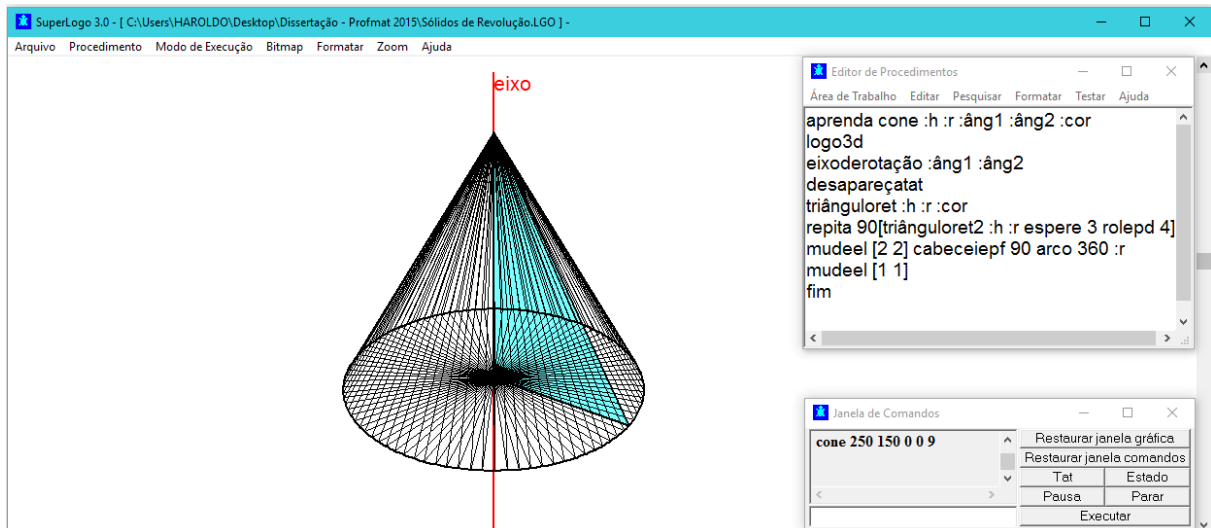
Figura 51: Planificação de um cilindro de revolução de altura 150 e raio 70



Fonte: O autor

APÊNDICE D – Procedimento *cone :h :r :âng1 :âng2 :cor*

Figura 52: Construção do cone de revolução de altura 250 e raio 150 e eixo Oz

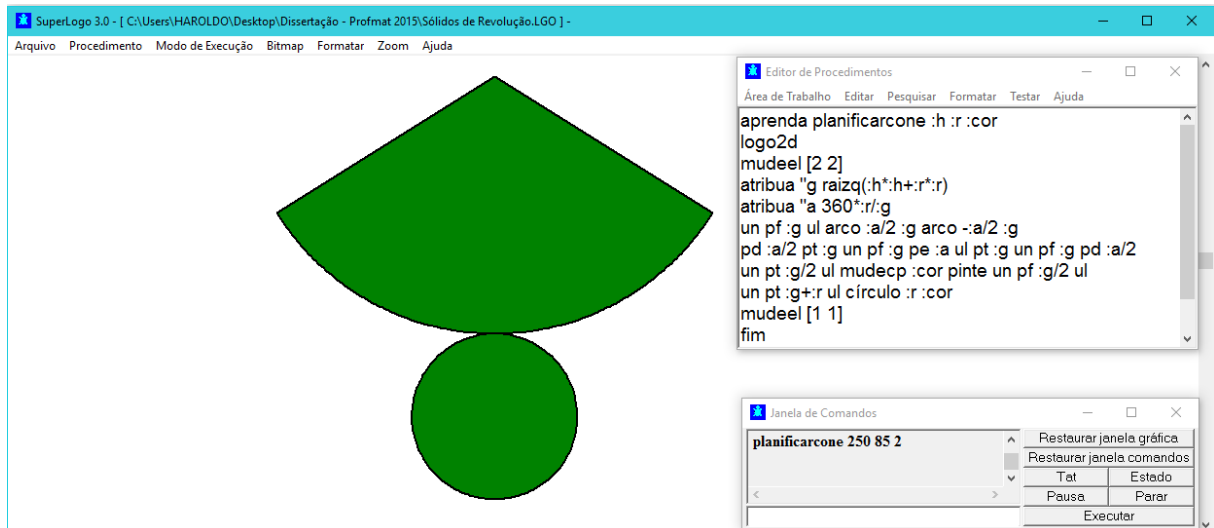


Fonte: O autor

Note que neste procedimento foram utilizados três procedimentos previamente desenvolvidos: *eixoderotação :âng1 :âng2*, para posicionar o eixo de rotação, *triânguloret :h :r :cor*, para preencher um triângulo retângulo catetos h e r com a cor previamente escolhida e outro, *triânguloret2 :h :r* para construir um triângulo retângulo catetos h e r sem preenchimento.

APÊNDICE E – Procedimento *planificarcone :h :r :cor*

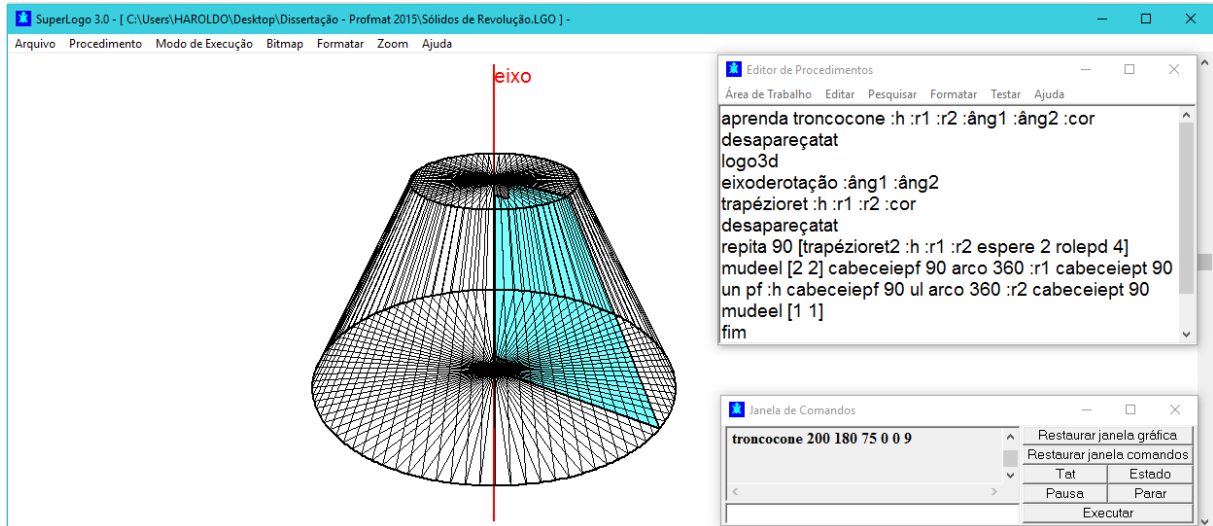
Figura 53: Planificação de um cone de revolução de altura 250 e raio 85



Fonte: O autor

APÊNDICE F – Procedimento *troncocone :h :r1 :r2 :âng1 :âng2 :cor*

Figura 54: Tronco de cone de altura 200 e raios maior e menor 180 e 75, respectivamente, e eixo Oz.

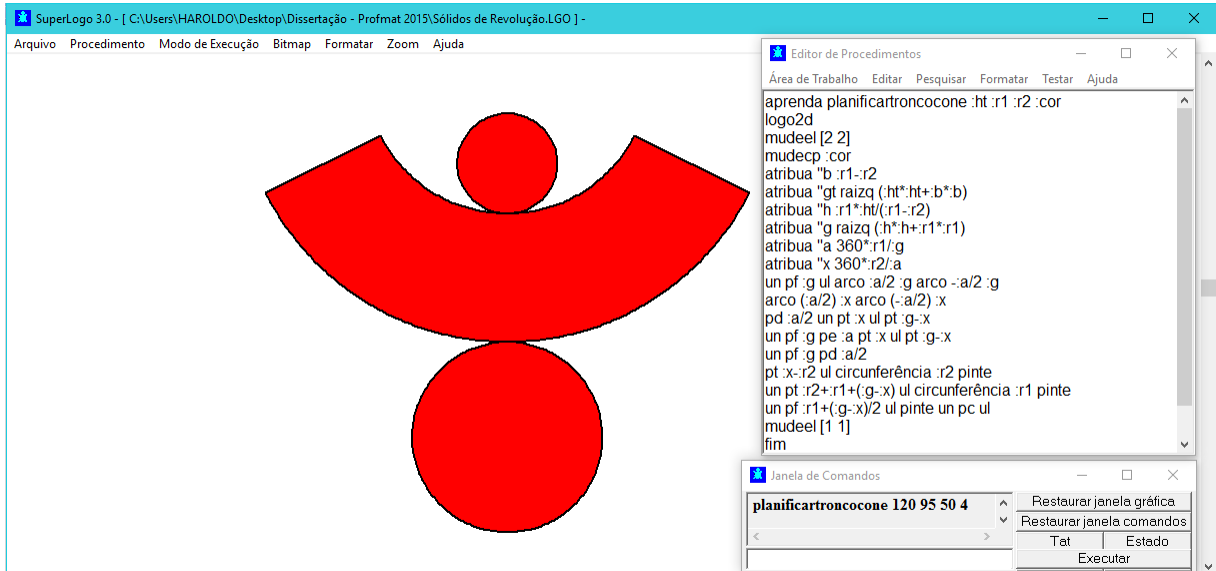


Fonte: O autor

Note que neste procedimento foram utilizados três procedimentos previamente desenvolvidos: *eixoderotação :âng1 :âng2*, para posicionar o eixo de rotação, *trapézio:ret :h :r1 :r2 :cor*, para preencher um trapézio retângulo de altura h e raios $r1$ e $r2$ com a cor previamente escolhida e outro, *trapézio:ret2 :h :r1 :r2*, construir um trapézio retângulo de altura h e raios $r1$ e $r2$, sem preenchimento.

APÊNDICE G – Procedimento *planificartroncocone :ht :r1 :r2 :cor*

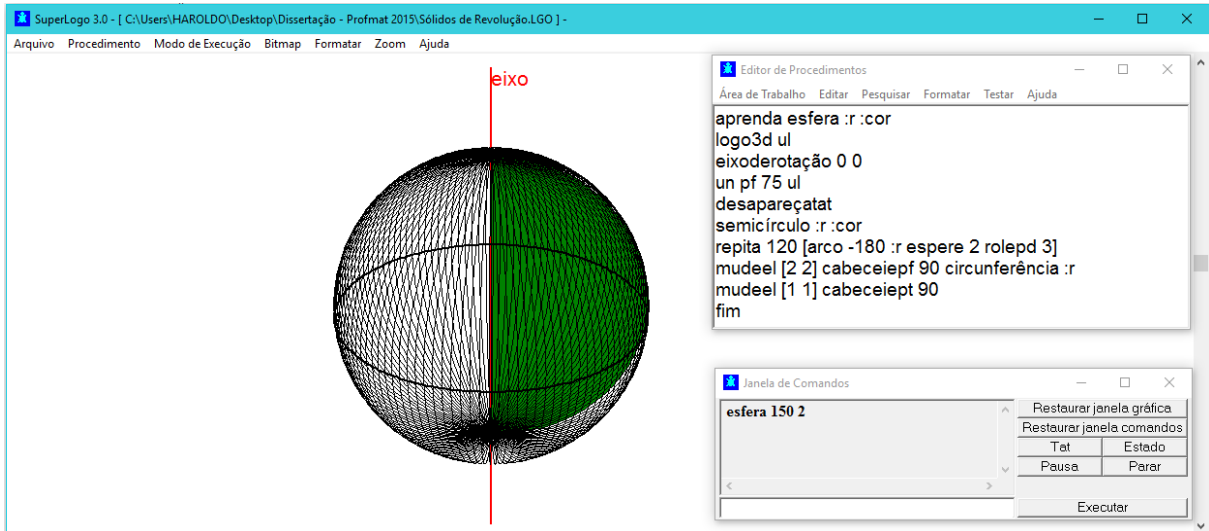
Figura 55: Planificação de um tronco de cone de altura 120 e raios 95 e 50.



Fonte: O autor

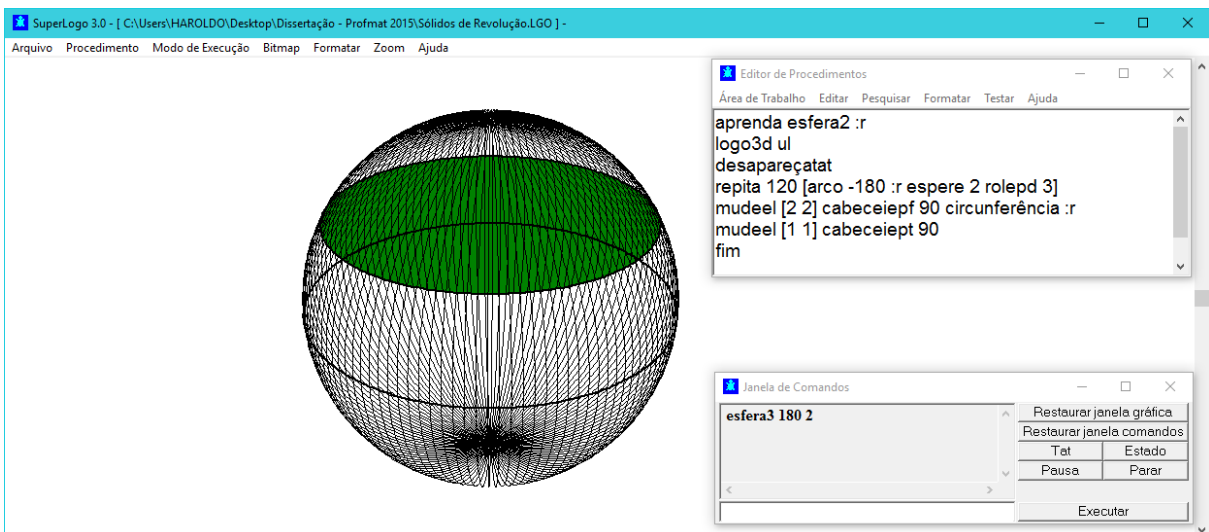
APÊNDICE H – Procedimento *esfera :r :cor*

Figura 56: Esfera de raio 150.



Fonte: O autor

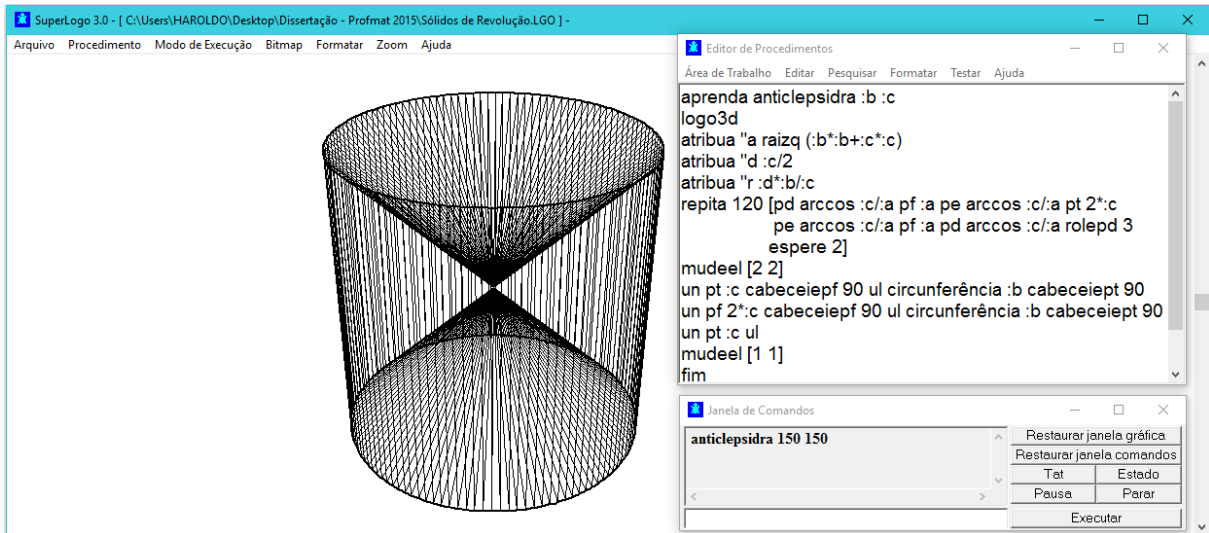
Figura 57: Secção feita a uma distância 90 do centro de uma esfera de raio 180.



Fonte: O autor

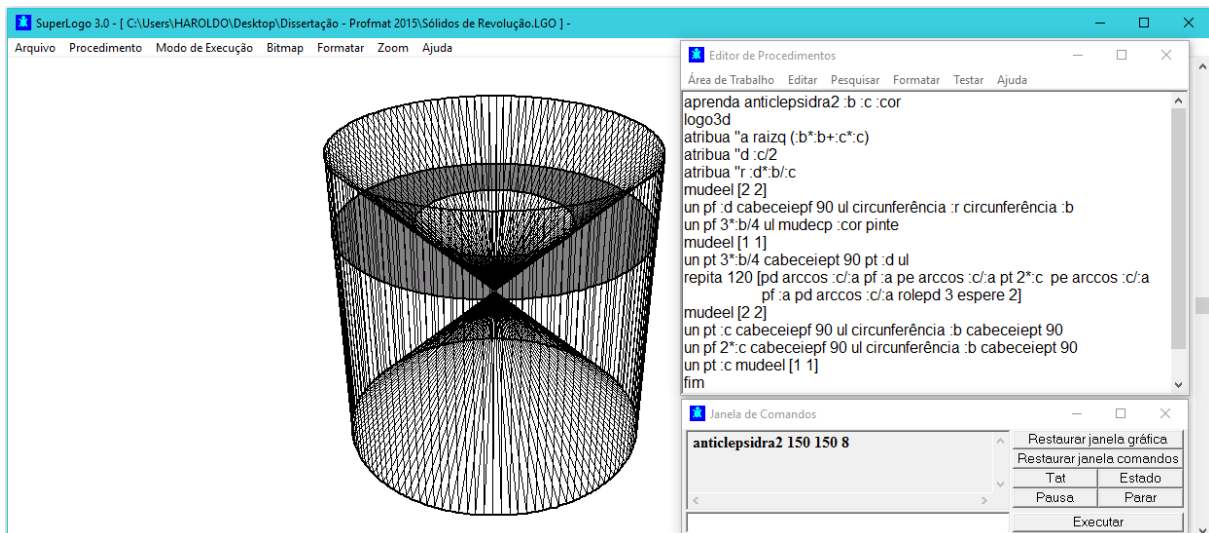
APÊNDICE I – Procedimento *anticlepsidra :b :c*

Figura 58: Anticlepsidra de altura 300 e raio 150.



Fonte: O autor

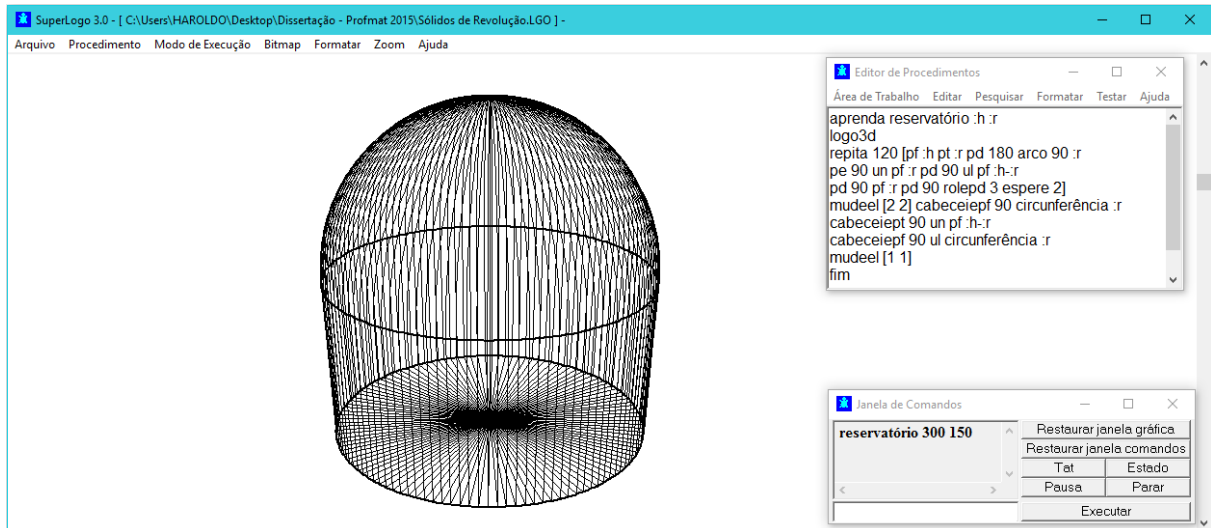
Figura 59: Secção transversal feita em uma anticlepsidra de altura 300 e raio 150



Fonte: O autor

APÊNDICE J – Procedimento *reservatório :h :r*

Figura 60: Sólido composto de um hemisfério de raio 150 e um cilindro de altura e raio 150



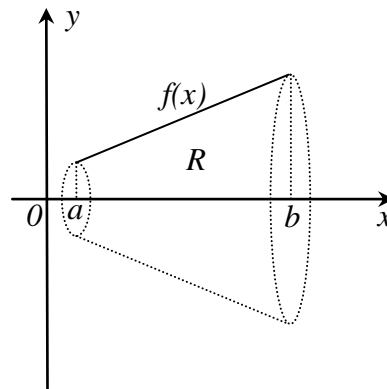
Fonte: O autor

APÊNDICE L – Sólido de Revolução: Volume

Um *sólido de revolução* é obtido pela rotação de uma região plana em torno de uma reta que não corta a região. A reta em torno da qual a região gira chama-se *eixo de revolução*.

Seja f uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Considere a região R sob o gráfico de f , e entre $x = a$ e $x = b$. Se R gira em torno do eixo x , o sólido resultante é um sólido de revolução.

Figura 61: Sólido de Revolução



Fonte: O autor

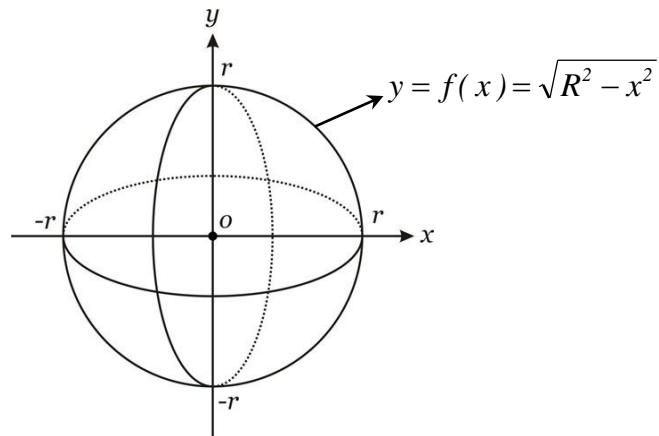
O volume deste sólido é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (\text{fórmula do disco})$$

APÊNDICE M – Volume da Esfera

A esfera é um sólido de revolução que se obtém pela rotação de um semicírculo em torno do eixo que contém o diâmetro.

Figura 62: Esfera



Fonte: O autor

Assim, temos que o volume da esfera é dado por:

$$V = \pi \int_{-R}^R [\sqrt{R^2 - x^2}]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx$$

$$V = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left[\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right] = \pi \left[2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right]$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

APÊNDICE N – Superfície de Revolução: Área

Se um arco de curva é girado em torno de uma reta que não corta o arco, então a superfície resultante é chamada *superfície de revolução*. Por *área da superfície* desta superfície, entenderemos a área da superfície externa.

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) , tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Então a área A da superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x é dado pela fórmula:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Assim, sendo $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (veja figura 62) a função que determina uma semicircunferência c de raio R com centro na origem, temos que a área da superfície esférica gerada pela rotação dessa curva em torno do eixo é dada por:

$$A = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right]^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx$$

$$A = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 2\pi R [R - (-R)] = 2\pi R \cdot 2R$$

$$A = 4\pi R^2$$

APÊNDICE O – O Princípio de Cavalieri como Teorema

O Princípio de Cavalieri, conforme enunciado para estudantes do Ensino Médio, na busca por demonstrar os volumes de alguns sólidos, não se preocupa em definir condições sobre fronteiras das regiões e dos sólidos. No entanto, para sua demonstração formal, é utilizada a teoria da integração de funções reais e, desta forma, é necessário definir essas condições.

De acordo com PATERLINI , o Princípio de Cavalieri pode ser enunciado e demonstrado como teorema conforme segue abaixo.

- **Princípio de Cavalieri** para volumes Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$ e seja P um sólido finito delimitado por, $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$ seja P_t a intersecção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$ seja Q_t a intersecção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = ka(Q_t)$ para todo t , onde a representa a área das secções planas. Então $v(P) = kv(Q)$, onde v representa o volume dos sólidos.

Da teoria da integração de funções reais, temos:

$$v(P) = \iiint_P dx dy dz$$

$$v(P) = \int_0^c \left[\iint_{P_z} dx dy \right] dz$$

$$v(P) = \int_0^c a(P_z) dz = \int_0^c ka(Q_z) dz = k \int_0^c a(Q_z) dz$$

....

$$v(P) = kv(Q)$$

o que demonstra a afirmação.