UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PROPOSTA DE ABORDAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Autor: Thiago Mattos de Carvalho
Orientadora: Nedir do Espírito Santo

Rio de Janeiro - RJ
Março de 2017

THIAGO MATTOS DE CARVALHO

PROPOSTA DE ABORDAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Trabalho de conclusão de curso Pós– Graduação scrcto sensu de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Nedir do espirito Santo

RIO DE JANEIRO / RJ
2017

CIP - Catalogação na Publicação

C331p

Carvalho, Thiago Mattos de
PROPOSTA DE ABORDAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II / Thiago Mattos de Carvalho. -- Rio de Janeiro, 2017.
64 f.

Orientador: NEDIR ESPIRITO SANTO.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2017.

1. LOGARITMO. 2. ENSINO DE MATEMÁTICA. 3. ABORDAGEM NO NONO ANO. I. ESPIRITO SANTO, NEDIR, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

PROPOSTA DE ABORDAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Thiago Mattos de Carvalho

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Nedir do Espirito Santo

Prof.° Dra. Nedir do Espírito Santo
(Orientador/ Presidente da Banca Examinadora)

MMLeal

Prof.° Dra. Marisa Beatriz Bezerra Leal
Instituto de Matemática- UFRJ

Profº. Dra. Maria Aguieiras Alvarez de Freitas
Instituto de Matemática – UFRJ

Wanderley de Moura

Prof.° Dr. Wanderley Moura Rezende
Instittuto de Matemática – UFF

Rio de Janeiro
Março de 2017

RESUMO

Esta dissertação aborda a introdução do conceito de Logaritmo no nono ano do Ensino Fundamental visando facilitar o processo de ensino-aprendizagem deste conceito no primeiro ano do Ensino Médio. Primeiramente, abordamos um pouco da história do surgimento do Logaritmo e, em seguida, realizamos uma análise da abordagem desse tema em alguns livros didáticos atuais. Posteriormente, fundamentamos nossa proposta da introdução do conceito de Logaritmo logo após o aprendizado da Potenciação, como uma simples operação reversa desta, considerando as devidas restrições em termos do conjunto numérico de sua aplicação. Para avaliar a proposta, foi realizada experiência em sala de aula, numa turma de nono ano, que apresentamos neste trabalho. Para finalizar, visando à formação docente, apresentamos um pouco do contexto histórico e conceitual do Logaritmo de números negativos.

PALAVRAS CHAVE: logaritmos, ensino, aprendizagem.

ABSTRACT

This dissertation addresses the introduction of the concept of Logarithm in the ninth year of Elementary School, intending to facilitate the teaching and learning process of this concept in the first year of High School. At first, we have taken a concise look at the history of the rise of Logarithm, and then we conducted an analysis of the approach to this topic in some current textbooks. Therefore, we based our proposal of the introduction of Logarithm concept short after the learning of the Potentiation, as a simple reverse operation of this one, considering the expected restrictions in terms of the numerical set of its application. In order to assess the proposal, a classroom experience was carried out in a ninth grade class, which we present in this study. Lastly, aiming at teacher training, we present some of the historical and conceptual contexts of the Logarithm of negative numbers.

KEYWORDS: logarithms, teaching, learning.

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Logaritmo faz parte do conteúdo que deve ser ensinado no 1° ano do Ensino Médio e na maioria das vezes seu ensino se baseia em decorar propriedades e em longas e tediosa resoluções de equações e inequações indo contra as orientações do PCN(Parâmetros Curriculares Nacional).

De acordo com o PCN (2000) temos

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (PCNs, 2000).

O objetivo principal deste trabalho é a apresentação da proposta de *antecipação* do aprendizado de Logaritmo para o 9° ano do Ensino Fundamental II bem como o relato de sua aplicação, de forma experimental, proporcionando aos alunos manipulação com o conceito em um subconjunto dos números reais. A proposta visa contribuir para o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo no Ensino Médio e facilitar o trabalho do professor nesse nível de ensino.

Este trabalho utilizou como referencial teórico, Caraça (1989), entre outros, mas esse em especial. Caraça coloca uma informação importante, e sobre ela iremos debater essa proposta, que seria relacionar as operações matemáticas como *diretas* e *inversas* da seguinte forma: *adição* tem como operação inversa a *subtração*, *multiplicação* tendo como inversa a *divisão* e a *potenciação* tendo como inversa a *radiciação* e *logaritmação*.

Esse é o ponto que iremos abordar, a possibilidade do ensino de Logaritmos no 9° ano logo após o ensino de Potenciação e antes do ensino de radiciação.

O trabalho está apresentado em quatro capítulos.

No Capítulo 1, falamos sobre o início e descoberta de Logaritmo. Abordando os precursores Napier e Briggs e os motivos reais para a criação de tal ferramenta, sobre a questão da *prostaférese,* que era utilizado antes do Logaritmo para podermos transformar a multiplicação em soma e a divisão em subtração. Também discorremos sobre o conceito de *características* e *mantissas* que ajudavam, antigamente, através de uma tábua logarítmica, a descobrirmos o logaritmo de alguns valores, e o porquê de não utilizamos esse conceito nos dias de hoje.

Neste capítulo também abordamos sobre uma possível questão que pode ser levantada pelo aluno em sala de aula, e que o professor precisa estar preparado para uma resposta, ainda que superficial para o aluno, devido a utilização de recursos que o aluno provavelmente ainda não os tem. No entanto o professor deve ter ferramentas para responder a seguinte pregunta: *Professor, existe logaritmo de número negativo?* Neste capítulo fazemos uma análise mais técnica sobre a construção o conceito de logaritmo de números negativos. Inicialmente é feito um levantamento histórico sobre o assunto, desde o surgimento e as “discussões” de Leibniz e Bernoulli sobre o assunto, e a participação decisiva de Euler para resolver esse problema.

No Capítulo 2, fazemos uma breve avaliação de como é abordado o conceito de Logaritmo em três livros didáticos muito utilizados nos dias de hoje, aplicações, a questão da interdisciplinaridade, a quantidade de exercícios e tipos de exercícios cobrados em cada um deles.

No Capítulo3 abordamos a fundamentação da nossa proposta, seu planejamento, sua execução e avaliação, por meio de experimento realizado com alunos do 9°. Mostramos, basicamente que o Logaritmo pode ser ensinado, usando o universo dos números Racionais, no 9° ano do Ensino Fundamental, apoiado na ideia de que o Logaritmo nada mais é que uma possível operação inversa da Potenciação, assim como o é a Radiciação.

I. UM POUCO DE HISTÓRIA

O surgimento de logaritmo na história da Matemática não tem uma data bem definida, porém data-se do fim do século XVI e século XVII os principais avanços sobre esse tema.

Um dos principais estudiosos sobre logaritmos foi John Napier (1550- 1617). Napier era um escocês de família rica que viveu boa parte de sua vida no castelo de sua família. Um dos grandes motivadores para a pesquisa de Napier era o fato de conseguir simplificar alguns cálculos matemáticos relacionados as necessidades da Astronomia e navegação.

Já existia anteriormente a ideia de logaritmo uma forma de transformar multiplicações e divisões em soma e subtração, utilizando conceitos trigonométricos. Meio esse denominado *prostaférese*, que foi usado e demonstrado através de alguns cálculos que envolviam medidas referentes a Astronomia, feitas por Johannes Werner(1468- 1528), que também ficaram conhecidas como Fórmulas de Werner.

Apesar de acreditarmos que Napier já conhecia o método *prostaférese* a abordagem de Napier estava relacionada à questão das progressões. De acordo com Eves (2004):

> Sabemos que Napier estava inteirado do método da prostaférese, e é possível que se tivesse deixado influenciar por este método. Mas a abordagem de Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente da prostaférese, e se baseia na utilização das progressões aritméticas e geométricas.

A relação que Napier usou entre as Progressões eram conhecidas como Relação de Stifel. Vejamos como funcionava:

2	4	8	16	32	64	128	256	PG
1	2	3	4	5	6	7	8	PA

Ele observou que, o produto entre dois termos da primeira linha estava diretamente ligado à soma dos dois termos correspondente da segunda linha.

Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos para usar o conceito de interpolação para preencher as lacunas, Napier utilizou um número $N= 1 - 1/10^7 = 0,9999999$. Usava-se 7 casas decimais que na época era a quantidade de casas utilizadas nas tabelas trigonométricas e facilitaria seus cálculos.

Uma demonstração geométrica sobre a utilização de logaritmos para Napier foi a utilização de um segmento de reta denominado AB e uma semirreta DE, de origem D, conforme a figura abaixo. Suponha dois pontos C e F que se colocam em movimento a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual a distância CB e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como logaritmo de CB. Isto é, pondo DF=y e CB= x, (EVES, 2004)

$$x = \text{Nap} \log y$$

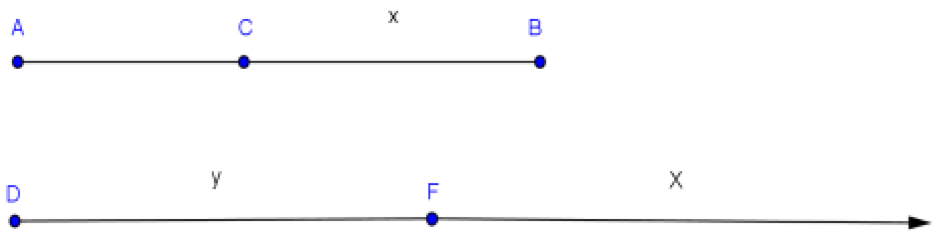


Figura 1

Podemos observar facilmente a relação existente entre uma PG e uma PA pela figura acima. Enquanto x decresce em PG, o valor de y cresce em PA. Essa relação mostra o principio fundamental de logaritmo.

As informações sobre a *prostaférese* passaram a circular com uma grande velocidade pela Europa e visto isso Napier se encorajou a lançar seu primeiro livro em 1614, chamado " Uma Descrição da Maravilhosa regra dos Logaritmos". Após essa publicação Napier fica fascinado pela riqueza do assunto, porém esbarra na falta de clareza para expressar o logaritmo de 1 em qualquer base. Então ele recebe uma visita de Henry Briggs, em sua casa. Segundo Eves (2004):

> Foi basicamente durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns (EVES, 2005, pág. 345).

Henry Briggs era um matemático inglês, também formado em Medicina que se viu encantado, em 1592, pela questão da Navegação e Astronomia, conhecendo esses assuntos, passou a auxiliar um matemático e cartógrafo chamado Edward Wright. Através de um amigo recebeu uma cópia do livro "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio" escrito por Napier, onde este introduzia a ideia de logaritmo.

A invenção de logaritmos não se deve a um único homem, porém é real que o primeiro trabalho publicado sobre logaritmo tenha sido de Napier, mas existiam outras ideias surgindo sobre o assunto lá mesmo na Europa. Na Suíça, mais ou menos ao mesmo tempo, Jost Burgi, já tinha ideias semelhantes a Napier. Algumas pequenas diferenças eram percebidas entre o trabalho publicado por Napier e Burgi, uma delas era o valor utilizado como partida. Enquanto Napier partia de $1 - 10^{-7}$, Burgi usava um número um pouco maior que um , $1 + 10^{+4}$. Então podemos observar pequenas diferenças entre eles, algo sobre valores de partidas e terminologia, porém com resultados finais e aplicações iniciais (PA e PG) bem comuns.

Então com a invenção de Napier em mãos coube a outros matemáticos espalharem a informação por toda Europa. De acordo com Laplace, a invenção dos logaritmos fez diminuir o trabalho e dobrar a vida dos astrônomos (EVES, 2004, pág. 346).

1.1 Característica e mantissa

Conforme vimos anteriormente Napier teve naquele momento histórico um bom companheiro de estudo chamado Briggs. Napier chamou sua descoberta de " Números Artificiais" em seguida mudou para a palavra *logaritmo* que significa " número de razão". Briggs mais adiante resolveu introduzir novos nomes aos logaritmos,

> Briggs introduziu a palavra *mantissa* que é um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente "adição" ou " contrapeso" e que, no século XVI , passou a significar " apêndice". O termo *característica* também foi sugerido por Briggs e foi usado por Valcq. As primerias tábuas de logaritmos vinham impressas tanto a característica e a mantissa. (EVES 2005)

As características e mantissas eram muitos utilizadas, pois norteavam valores para logaritmos existentes em algumas tábuas de logaritmos. Com o surgimento das calculadoras científicas o aprendizado sobre característica e mantissa foi deixado de lado, inclusive nos livros didáticos atuais.

Esses conceitos deveriam ser mais trabalhados em sala de aula juntamente a parte histórica de logaritmo, mostrando assim a importância do surgimento de tal ferramenta matemática. Para todos os efeitos o professor precisa saber e comentar com os alunos a existência das tábuas de logaritmo e a utilização das características e mantissas como instrumento de cálculos matemáticos. Assim como sempre será interessante e pertinente o professor utilizar da história Matemática para a introdução de conceitos, como por exemplo, a existência do ábaco romano e das frações unitárias. Essas descobertas matemáticas podem aguçar a curiosidade do aluno e facilitar o processo de ensino-aprendizagem.

Sabemos que todo número escrito no sistema decimal pode também ser representado com $a \times 10^n$ com a entre 1 e 10, podendo ser igual a 1, e n número inteiro. Portanto, pode-se utilizar:

$$x = a . 10^n$$

aplicando o logaritmo na base decimal, obtemos

$$\log x= \log a + \log 10^n$$

Podemos também escrever usando as propriedades de logaritmo

$$\log x = \log a + n$$

De acordo com Elon(2009),

> Sabemos que $1\leq a < 10$. Portanto log a é um número compreendido entre 0 e 1(podendo ser igual a zero) e n inteiro, então: $\log x= \log a + n$ com $0\leq \log a< 1$. Nessas condições log a= mantissa do log x e n= característica de log x.

A *mantissa* é sempre um número compreendido entre 0 e 1, podendo ser zero mas nunca igual a 1. Outra observação importante é que a mantissa nunca é negativa. Sobre a *característica* de log x podemos afirmar que esse número pode ser qualquer inteiro.

Usando a tabela do Anexo, podemos perceber por exemplo,

$$\log 127= \log 1{,}27 \times 10^2$$

$$\log 127= \log 1{,}27 + 2$$

Perceba que se esse logaritmos fosse ,

$$\log 0{,}00127= \log 1{,}27 \times 10^{-3}$$

$$\log 0{,}00127= \log 1{,}27 - 3$$

A *mantissa* nos dois casos seria a mesma o que realmente mudaria seria a *característica* do número.

Algumas regras são interessantes de serem apresentadas aos alunos para que estes tenham ao menos uma noção dos valores dos logaritmos que estão calculando, mesmo utilizando calculadora. Isso é interessante fazer com o aluno em sala deixando o mesmo utilizar a calculadora para fazer o cálculo, e mostrar que a *característica* de um logaritmo tem relação direta com a quantidade de algarismos (quando $x > 1$) ou a quantidade de zeros (quando $0 < x < 1$).

Se $x > 1$, temos que a *característica* é a quantidade de algarismos que antecedem a vírgula subtraído uma unidade.

Log 234 = 2,.... (pois 234 tem 3 algarismos, 3 - 1 = 2)

Log 1253,4= 3,..(pois 1253,4 tem 4 algarismos que antecedem a vírgula, 4-1= 3)

Se $0< x < 1$, temos que a *característica* é o simétrico da quantidade de zeros que antecedem o primeiro algarismo diferente de zero.

Log 0,00123= -3,.... (3 zeros antes do 1)

Log 0,000056 = -5,...(5 zeros antes do 5)

Elon (2009) diz,

> A existência das calculadoras eletrônicas fez deste capítulo uma página da História, passada a qual as funções logarítmicas têm sua importância matemática reconhecida pelas propriedades intrínsecas de que gozam, não como mero instrumento de cálculo aritmético.

Conforme podemos observar as calculadoras eletrônicas, introduzidas na segunda metade de 1960, criaram um certo conforto nos alunos, fazendo com que os mesmos simplesmente aceitem aqueles valores indicados sem ao menos contestá-los do “por que?”. Cabe ao professor aguçar no aluno a curiosidade do porquê tantas propriedades e valores informados automaticamente pelas calculadoras.

Para finalizar, visando à formação docente, apresentamos um pouco do contexto histórico e conceitual do logaritmo de números negativos.

1.2- **Logaritmo de números negativos**

Aqui discorremos sobre algumas questões que podem surgir no processo de ensino- aprendizagem de logaritmo.

Quando trabalhamos o conteúdo é natural definir-se o seu campo de existência somente para números reais positivos, isto porque, em geral, o introduzimos como operação inversa da exponencial, definida no campo real e com imagem positiva. Podemos observar em alguns livros didáticos de Ensino Médio as seguintes definições:

> Sendo *a* e *b* números reais **positivos** com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de *b* na base *a* o expoente que se deve dar à base *a* de modo que a potência obtida seja igual a *b*. (IEZZI, 1998)

Isso não quer dizer que um professor durante sua aula, não se depare com um questionamento do tipo: “ Professor existe Logaritmo de número negativo?” ou “ Como se faz o Logaritmo de um número negativo?”. Sabemos que, de acordo com o PCN o conteúdo Função Logarítmica é dado no 1° ano do Ensino Médio, onde os alunos ainda não tem o conhecimento do Conjunto dos Números Complexos, porém acho pertinente o professor ter um conhecimento de um pouco da História, considerando sua função de motivador de seus alunos para a Matemática e explicar ao aluno que existe sim, em que momento foi determinado, e o quanto foi discutido por grandes matemáticos da época.

Neste capítulo apresentamos alguns elementos básicos sobre o tema e um pouco da História.

Na primeira metade do século XVIII, Bernoulli aceitava a ideia de número real para logaritmo de número negativo, e para isso usava amplamente o seguinte argumento (LIMA, 1991):

$$\text{Se } (-x)^2 = x^2, \text{ então}$$
$$\ln(-x)^2 = \ln x^2,$$
$$2\ln(-x) = 2\ln x,$$
$$\ln(-x) = \ln x, \text{ para qualquer } x>0.$$

Observemos que esse tipo de raciocínio pode surgir em sala de aula por qualquer aluno, após o aprendizado de propriedades de logaritmo e surgirá, naturalmente a pergunta:

Existe logaritmo de números reais negativos?

Essa dúvida foi discutida inicialmente por Bernoulli e Leibniz sem muito êxito, porém exaustivamente.

Eles estudaram esta situação na primeira metade do século XVIII. Seguiu-se uma longa controvérsia epistolar (em torno de 1712), onde cada um dos dois alinhavam argumentos em favor do seu ponto de vista, assumindo posições mais e mais radicais, sem chegarem a nenhum acordo.

De acordo com CARVALHO(2015):

> Leibniz era de opinião que um número negativo não tinha logaritmo real porque toda potência de expoente real de um número positivo *a*, é um número positivo; isto é $a^x = y > 0$, onde $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Bernoulli afirmava que números negativos têm logaritmo real, e ainda, que log(-x) = log x.

Leibniz utilizava dos seguintes argumentos:

Em uma função logarítmica definida por $g(y) = log_a\, y$, onde $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sendo g a inversa da função exponencial, então: $x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$, assim

$$\boldsymbol{a^{\log_a y} = y,}$$

por definição.

Para que a afirmativa de Bernoulli estivesse correta, era necessário obter uma função φ contínua e monótona, de forma que $\varphi(a) = 1$ e $\varphi(x.y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ conforme as propriedades de logaritmos, ou seja , em g. Observemos que φ também não estaria definida em zero, pois tomando-se $\varphi(x) = log\, x$, com x > 0, obtém-se das propriedades de logaritmos reais $\varphi(x.0) = \varphi(x) + \varphi(0)$, isto é, $\varphi(0) = \varphi(x) + \varphi(0)$. Logo, $\varphi(x) = 0$, para todo x > 0. Isso contradiz a condição de $\varphi(a)=1$. Além disso, por Bernoulli $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Daí, φ definida por $\varphi: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ e $\varphi(x) = \log|x|$. Como log 1= 0, então 0 = log 1= $\varphi(1) = \varphi((-1).(-1)) = \varphi(-1) + \varphi(-1) = 2\,\varphi(-1)$, logo, $\varphi(-1)=0$.

Assim, $\varphi(-y) = \varphi((-1).(y)) = \varphi(-1) + \varphi(y) = \varphi(y) = \log y = \log|-y|$, para todo y, isto evidencia a teoria de Bernoulli, mas a igualdade $a^{\log_a x} =$ x, não mais valeria, passaria a $a^{\log_a x} = |\, x\,|$, pois

$$a^{\log_a x} = w \;\Rightarrow log_a\left(a^{\log_a x}\right) = log_a w \Rightarrow log_a x = log_a w \Rightarrow w = -x \text{ ou } w = x$$

Porém foi Euler, em 1749, que escreveu um trabalho denominado *Da controvérsia entre os Senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logaritmos dos números negativos e imaginários.* Neste trabalho Euler apresenta a teoria de logaritmos que temos até hoje e ainda conseguiu conciliar os pontos de vista de Leibniz e Bernoulli. Ele mostrou usando como ferramentas as funções trigonométricas e números complexos, que um único número real negativo possui uma infinidade de logaritmos e nenhum desses logaritmos seriam reais.

Podemos perceber que a necessidade de resolver o problema referente a resolução de logaritmos de números negativos , faz com que Euler utilize de um novo conjunto numérico, o conjunto do números Complexos.

De acordo com BOYER(1974) a teoria sobre logaritmos negativos deveria ser de fácil compreensão, visto que eles já tinham conhecimento da fórmula $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)$ mesmo antes de Euler enunciá-la.

Antes de Euler demonstrar a solução para logaritmos de números negativos Leibniz e Bernoulli viviam a discussão sobre as possibilidades (ou impossibilidades) dos cálculos desses logaritmos.

Podíamos perceber que as duas ideias para logaritmos de números negativos deixavam pontos em abertos. Com isto,

> Euler percebeu que a regra que, Leibniz deveria ser geral, já que a generalidade da álgebra, segundo ele, era um fator fundamental para legitimidade da análise algébrica. Euler dizia ainda que o cálculo lida com variáveis gerais, logo, era necessário que a regra fosse válida para qualquer valor de x, fosse ele positivo, negativo ou imaginário. (ROQUE, 2012)

Para provar a existência de logaritmos de números negativos Euler partiu do princípio de que o número *e* é a base para todos os logaritmos e exponenciais, a fim de facilitar a demonstração da teoria.

Euler mostrou a partir da fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, válida para qualquer ângulo (fórmula que era muito conhecida na época porém ainda não claramente enunciada), fazendo a substituição de $\theta = \pi$, teríamos:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi,$$

$$e^{i\pi} = -1,$$

$$\ln(-1) = i\pi$$

mostrava portanto que o logaritmos de um número negativo era um número imaginário puro e não um número real.

Euler contribuiu consideravelmente com muitos artigos e livros publicados na época, um desses considerado um tratado chamado *Introductio in Analysin Infinitorum*, tratado este publicado em dois volumes que foi definido como como livro chave para o desenvolvimento da matemática. Euler demonstrou nesse livro diversas notações em destaque: f(x) para funções, *e* para a base dos logaritmos naturais, $\sum$ para somatório, i para a $\sqrt{-1}$. Porém uma das contribuições mais importantes vem a ser a respeito da fórmula que leva seu nome: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, que, para $x = \pi$ resulta em $e^{i\pi} + 1 = 0$. Euler era um matemático que utilizava substituições improváveis que desafiaram muitos matemáticos na época e alguns até hoje. Utilizaremos de um desses raciocínios de Euler para mostrar o desenvolvimento dessa fórmula.

Com o objetivo de tornar o texto auto suficiente para o leitor, colocamos algumas propriedade que podem ser vistas em LIMA(2009) .

Conforme sabemos *e* é o limite da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ quando n tende ao infinito, isto é, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Utilizando do Binômio de Newton e podemos rescrever cada termo desta sequência da seguinte forma:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{(n-1)}}+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

Rearranjando as parcelas obtemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Vemos que a sequência é crescente e que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} < 3,$$

em que, a última desigualdade foi obtida pela soma dos termos de PG. De fato, é mostrado em (LIMA, p. 93) que *e* também pode ser dado por

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

No século XVII, já eram conhecidas as expressões em séries, em torno de 0 de e^x, *sen x* e *cos x,* devido a importante contribuição de Taylor nos estudos de séries infinitas. Existe muita discussão sobre o real crédito a respeito desse desenvolvimento das séries mas ficou definido ser dado a Taylor. Seu primeiro relatório sobre esse Teorema foi escrito através de uma carta para John Machin em 1712. Nele Taylor conta que sua descoberta foi feita após uma “dica” de Machin sobre a “ utilização da série de Sir Isaac Newton para resolver o problema de Kepler” e sobre o “ método do Dr. Halley para se achar as raízes” de equações polinomiais.

Ele usou sua fórmula para expandir funções em séries e para resolver equações diferenciais, mas não conseguiu prever o real papel dela na matemática. Colin Maclaurin, em 1717, notou um caso especial da série de Taylor, que hoje é conhecido como *Série de Maclaurin*. E a partir disto surgem os desenvolvimentos em séries para a representação de *sen x* e *cos x*, que foram utilizados por Euler, conforme podemos observar abaixo

$$senx \; = \; (x \; - \; \frac{x^3}{3!} \; + \; \frac{x^5}{5!} \; - \; \frac{x^7}{7!} \; + \ldots + (-1)n \; \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \; + \ldots)$$

$$cosx \; = \; (1 \; - \; \frac{x^2}{2!} \; + \; \frac{x^4}{4!} \; - \; \frac{x^6}{6!} \; + \ldots + (-1)n \; \frac{(x)^{2n}}{2n!} \; + \ldots)$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

O desenvolvimento em série de e^x para *x* real, leva a uma grande ideia de Euler sobre o possível desenvolvimento de e^z , com $z= x + iy$ número complexo, definindo

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Utilizando de uma substituição para, $z= iy$, ou seja, imaginário puro, temos

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots$$

Pela propriedade de potências de i, podemos reescrever e^{ix} como:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{(x)^2}{2!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{(x)^{2n}}{2n!} + (-1)^n \frac{(ix)^{2n+1}}{2n+1!} + \ldots$$

Separando parte real da parte imaginária temos:

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{2n!} + \ldots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{(ix)^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$e^{iy} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots) + i (y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots)$$

Logo $e^{iy} = cosy + i\, seny$. Esta é a ***fórmula de Euler.*** E, para z= x + iy arbitrário, define

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ ou seja, $e^z = e^x . (cosy + iseny)$.

A seguir ilustramos as imagens de alguns subconjuntos por e^z e em seguida alguns ramos de logaritmo:

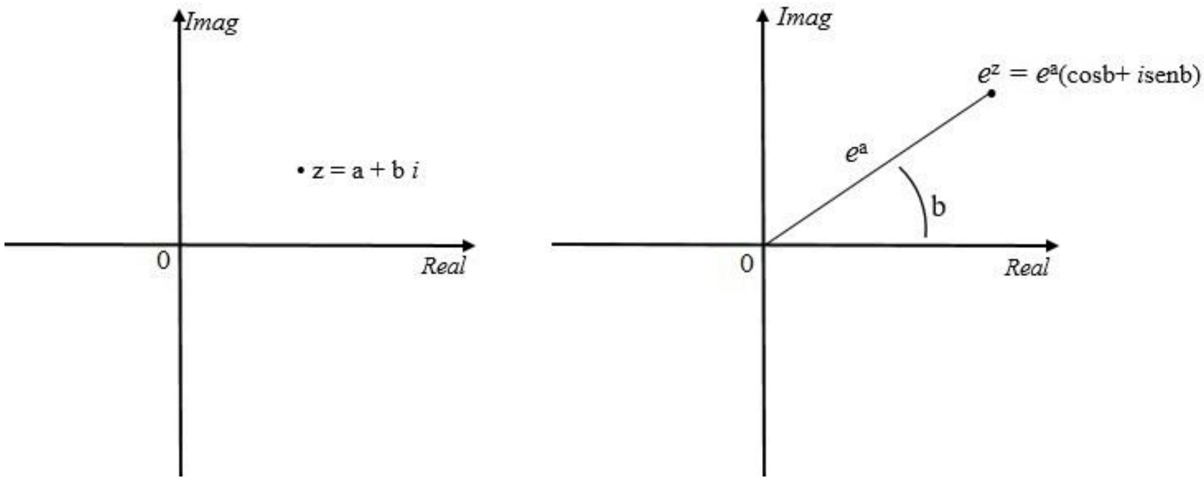


Figura 2: Imagem de z = a +bi na exponencial e^z.

Na Figura 1 ilustramos a imagem do complexo z = a + bi: que será o complexo de módulo e^a e argumento b.

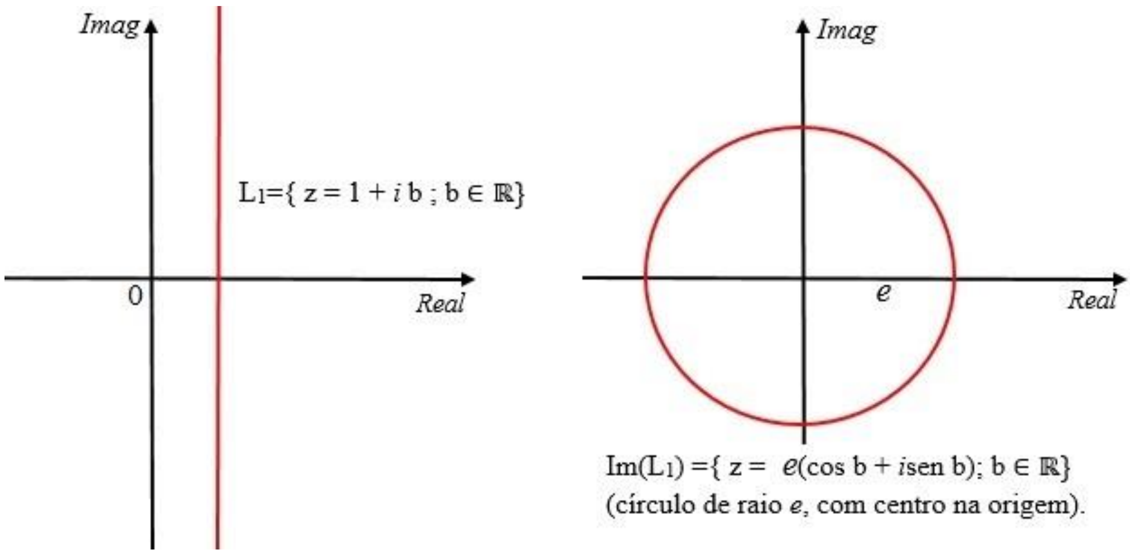


Figura 3: Imagem de reta vertical na exponencial e^z..

Na Figura 2 mostramos que as retas perpendiculares ao eixo real são levadas em círculos que dão infinitas voltas sobre si mesmo. Logo, e^z não é injetora.

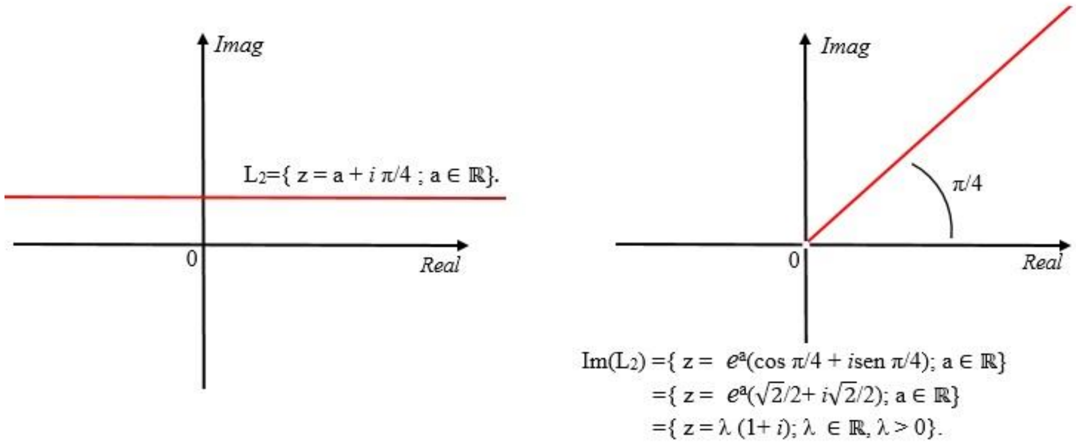


Figura 4: Imagem de reta paralela ao eixo real na exponencial e^z..

Na Figura 3, mostramos que a imagem de uma reta paralela ao eixo real é uma semirreta que parte da origem, sem esse ponto.

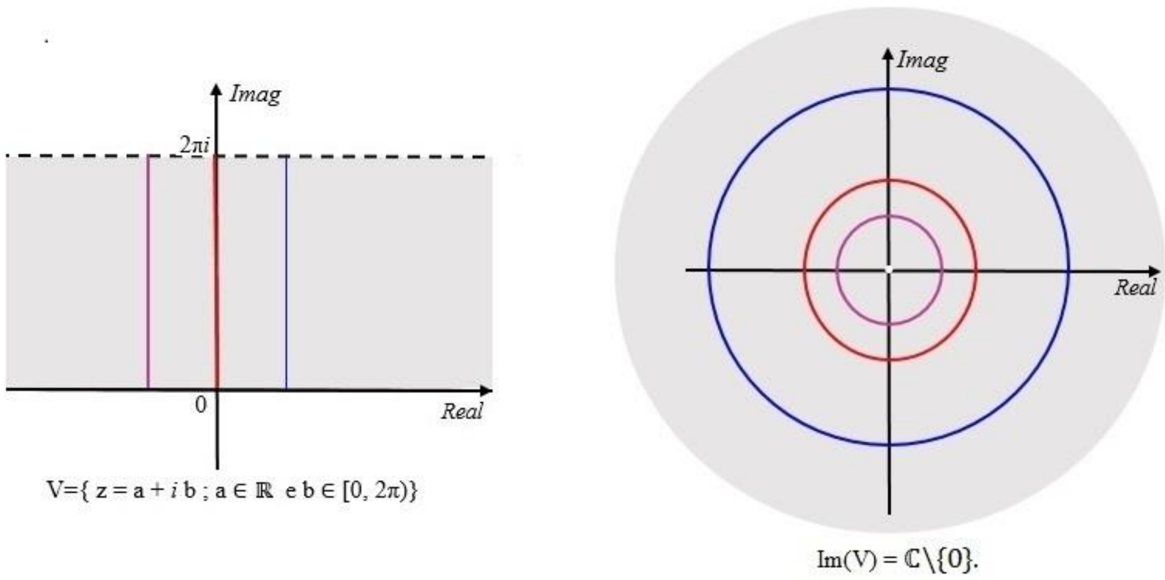


Figura 5: Imagem de uma faixa do plano em que o eixo real está no seu bordo por e^z.

Na Figura 3 ilustramos que a faixa do plano limitada pelo eixo real e pela reta que lhe paralela, passando por 2πi , não contendo esta, é levada em todo o plano. De fato, cada faixa obtida da translação desta de z = kπi tem para imagem todo o plano.

Observemos que a região considerada na Figura 4 não é aberta, elemento importante para estudo, por exemplo, de continuidade. No entanto, se consideramos a região aberta, obtemos para imagem o plano, exceto o semieixo real não positivo (Veja figura 5)

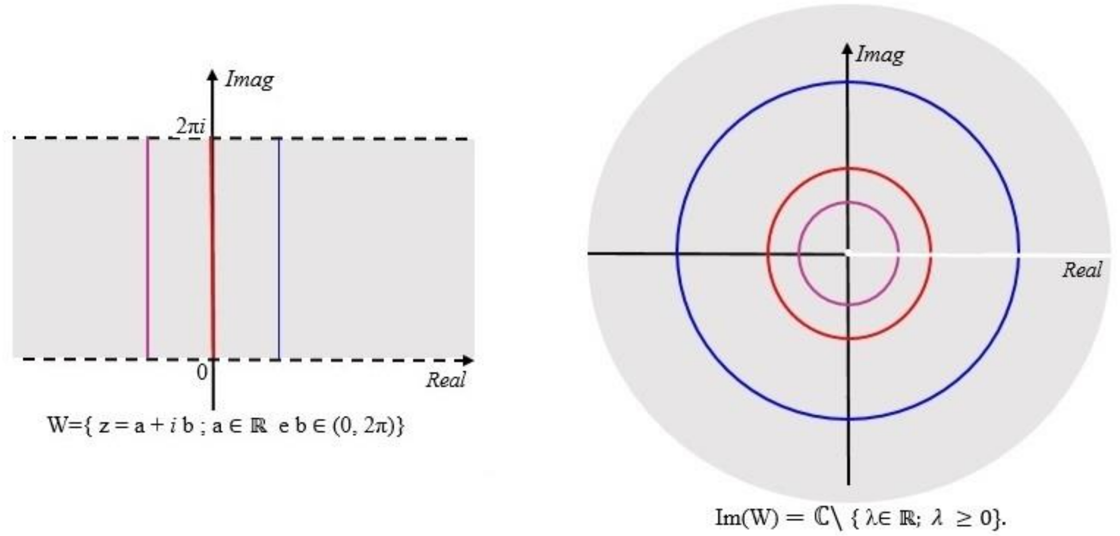


Figura 6: Imagem de uma faixa do plano cuja imagem pela exponencial e^z. omite o semi-eixo real não negativo.

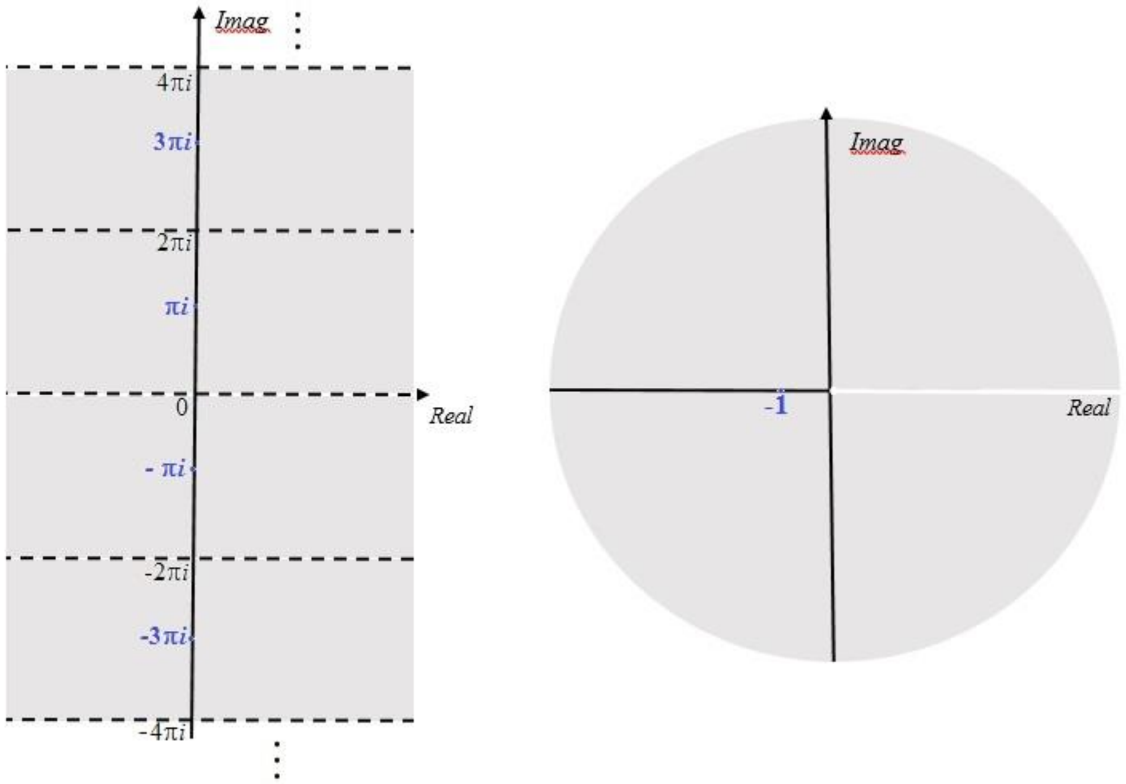


Figura 7: Exemplos de complexos com imagem igual a -1, em azul.

Na Figura 6 ilustramos a família de faixas em que a imagem de cada coincide com a imagem de W e, em azul, damos exemplos de complexos com imagem igual a -1, pela exponencial.

Como o eixo real positivo está excluído, esta região não é uma boa escolha. Lembrando o que Caraça chama de Princípio da Extensão, O homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA- 1989)

O rendimento a que Caraça se refere é relativo à relação das generalizações com proposições da teoria já conhecida e também estas resultarem de casos particulares da extensão definida. Nesse sentido, descartamos a região ilustrada na Figura 4 e consideramos a região

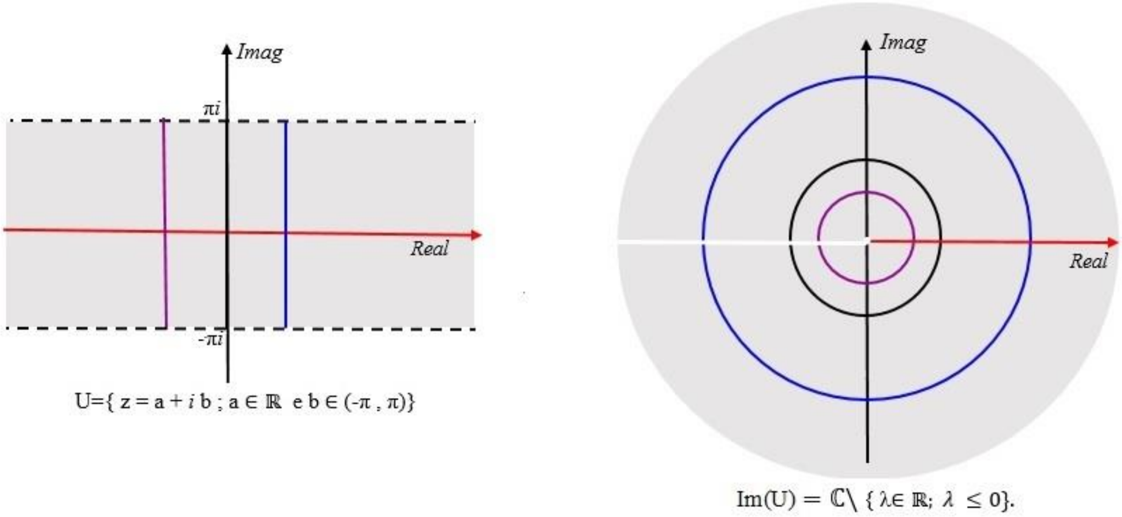


Figura 8:. Imagem de uma faixa do plano cuja imagem pela exponencial e^z. omite o semi-eixo real não positivo.

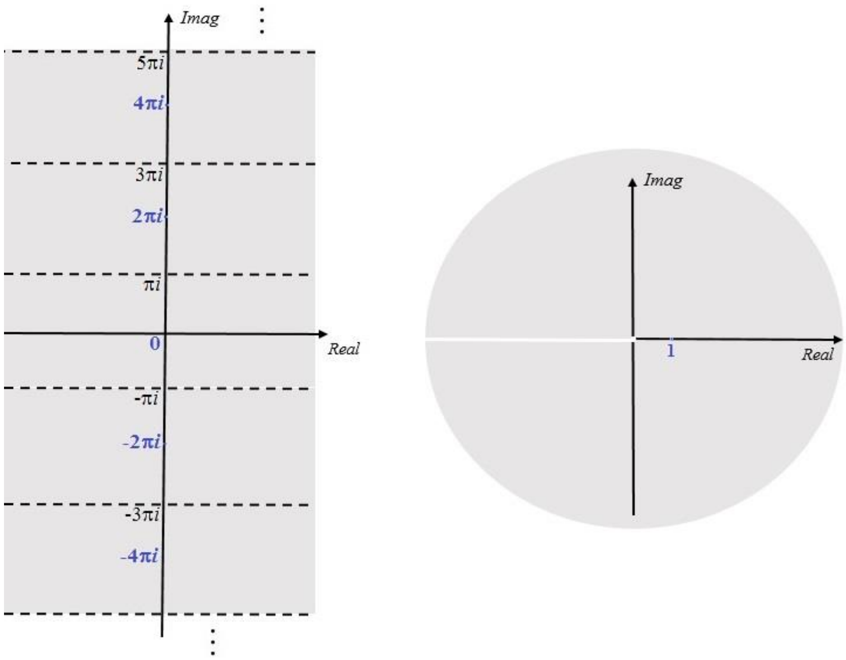


Figura 9: Exemplos de complexos com imagem igual a 1, em azul.

Na Figura 8 ilustramos a família de faixas em que a imagem de cada uma coincide com a imagem de U e, em azul, damos exemplos de complexos com imagem igual a 1, pela exponencial.

Euler definiu então o logaritmo de um número complexo $w \neq 0$ como o número complexo z tal que $e^z = w$.

Se $z = a + bi$ e $w = r(\cos\theta + i sen\theta) = re^{i\theta} = e^a(\cos b + i sen b)$ é a forma polar do número complexo w. Logo,

$\log w = \ln r + i\theta$ $(= \ln e^a + ib = a + bi = z)$.

Observemos que se consideramos $z' = a + (b + 2k\pi)i$, que corresponde a outra faixa de restrição da exponencial, temos $e^{z'} = e^a(\cos(b+2k\pi) + i sen(b+2k\pi)) = w$= está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2π, e como r = |w|, temos

$$\log w = \log|w| + (2k\pi + \theta)i = \ln r + (2k\pi + \theta)i.$$

Isto mostra que o logaritmo de um número complexo pode ter uma infinidade de valores.

Para que seja função devemos fazer a uma escolha de faixa que são chamados ramos do logaritmo. A escolha ilustrada na Figura 7 é denominada *ramo principal* (Figura 9). Além disso, para r real positivo, temos $r = r(\cos 0 + i sen 0)$. Logo, $\log r = \ln r$.

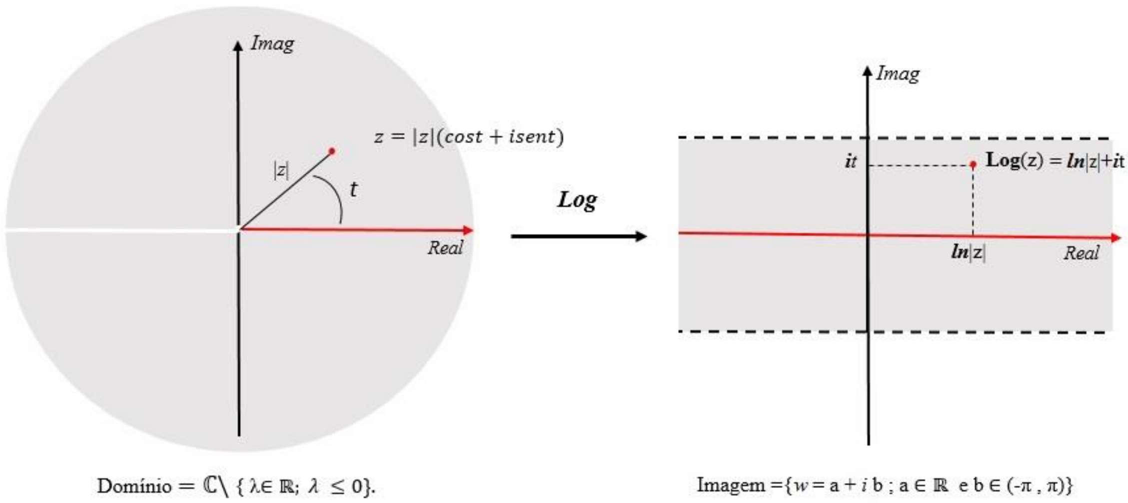


Figura 10: Ramo principal do logaritmo.

No caso de logaritmo de número negativo, devemos considerar a região ilustrada na Figura 5 em que a imagem pela exponencial contém o eixo real negativo. Com isto tomamos outro ramo para definição do logaritmo em que o semieixo real negativo é levado na reta paralela ao eixo real e que passa por πi, pois todos os reais negativos têm argumento π, se convencionarmos os argumentos no sentido anti-horário (Figura 10).

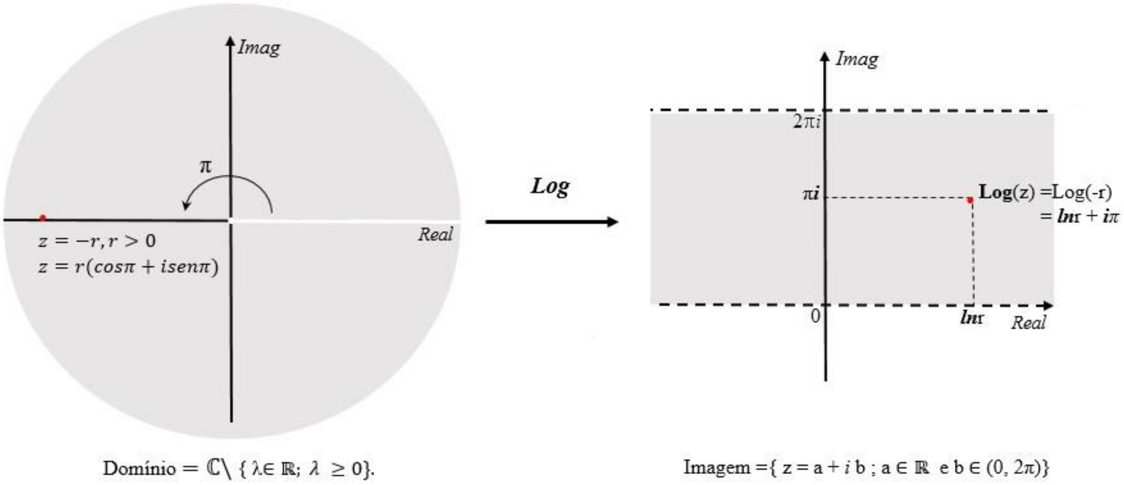


Figura 11: Ramo para logaritmo de números negativos

Observemos que se considerarmos os argumentos no sentido horário, então o argumento dos reais negativos será – π e obteremos para imagem dos reais negativos a reta paralela ao eixo real passando por – πi. Isto significa que, mesmo com a escolha de um ramo, é necessário que estabeleçamos como serão considerados os argumentos para que não haja dúvidas quanto a imagem de cada elemento.

Podemos então fechar esse capítulo com um trecho do famoso trabalho de Euler, “ *Da controvérsia entre os Senhores Leibniz e Bernoulli sobre logaritmos dos números negativos e imaginários”*:

> Vemos, portanto, que é essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade de logaritmos e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si mas também de todos os logaritmos dos demais números.

II. OS LOGARITMOS E OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Este capítulo mostra como o tópico Logaritmo está inserido em alguns livros didáticos brasileiros de grande abrangência. Esta análise foi feita em três livros de 1° série de Ensino Médio, todos de acordo com as normas e obrigações técnicas referentes ao PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). O objetivo é verificar se o conteúdo segue como norteador do cumprimento das obrigações oficias e as tendências da Educação Matemática.

2.1 .O início do ensino de logaritmo nos livros didáticos brasileiro.

Um dos referenciais sobre a pesquisa de abordagem do conteúdo nos livros didáticos de matemática será André Chervel (1990), este um dos principais teóricos no campo das disciplinas escolares. Os livros didáticos são fontes relevantes para que possamos verificar quais caminhos uma determinada disciplina seguiu.

Para Chervel (1990) os conteúdos sofrem transformações e as disciplinas tem como objetivo " colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa." Para ele essas finalidades são de duas formas: finalidades de objetivo e finalidades reais. As finalidades de objetivo são estabelecidas pela legislação, enquanto as finalidades reais, são as escolares, aquelas pelas quais a escola ensina.

Dessa forma ele escreve:

> A distinção entre finalidades reais e finalidades de objetivos é uma necessidade imperiosa para o historiador da disciplina. Tem de ter consciência de que uma estipulação oficial, num decreto ou numa circular, visa mais frequentemente, mesmo se ela é espressada em termos positivos, corrigir um estado de coisas, modificar ou suprimir certas práticas, do que sancionar oficialmente um realidade. (1990, p.190)

Sabemos bem que o ensino de logaritmo nos dias de hoje, trazem uma abordagem pautada nos termos algébricos e vinculadas diretamente ao fato de ser " a inversa da exponencial".

Em fins do século XIX, período pós proclamação da República, no governo de Marechal Manoel Deodoro da Fonseca, ocorreu uma reforma educacional. Esta Reforma ficou conhecida por Reforma Benjamin Constant- o *Regulamento da Instrucção Primária e Secundária do Districto Federal*. Nessa reforma, ocorre a inserção de disciplinas científicas, preservando-se o Latim e o Grego, com a exclusão da Retórica e da Filosofia. Uma outra grande novidade seria, pela primeira vez, o ensino das progressões e logaritmos, para a 1° classe da escola primária de 2° grau.

De acordo com o decreto deve ensinar entre outros conteúdos: “ noções de progressões por deferência e por quociente. Theoria elementar dos logarithmos e o uso das taboas. Exercícios variados.”

O primeiro livro de matemática em nível médio (escola primária de 2° grau) foi o livro *Curso Elementar de Matemática- Arithmetica*. Livro esse que foi escrito pelos irmãos Reis no final do século XIX, provavelmente após a Reforma educacional. Um dos irmãos era Aarão Leal de Carvalho Reis, como professor exerceu docência em diversas instituições particulares e na Inspetoria-Geral de Instrução Pública do Rio de Janeiro, ocupou também alguns cargos públicos e uma das suas grandes contribuições foi no planejamento e construção da Cidade de Belo Horizonte. O outro irmão era Lucano Leal de Carvalho Reis, professor de Matemática Elementar e oficial da Contadoria Geral da Guerra, é mencionado como um dos vultos da estatística no Brasil. De acordo com os irmãos o objetivo principal do livro era preparar os estudantes para o ingresso no Ensino Superior e aos alunos das Escolas Naval e Normal.

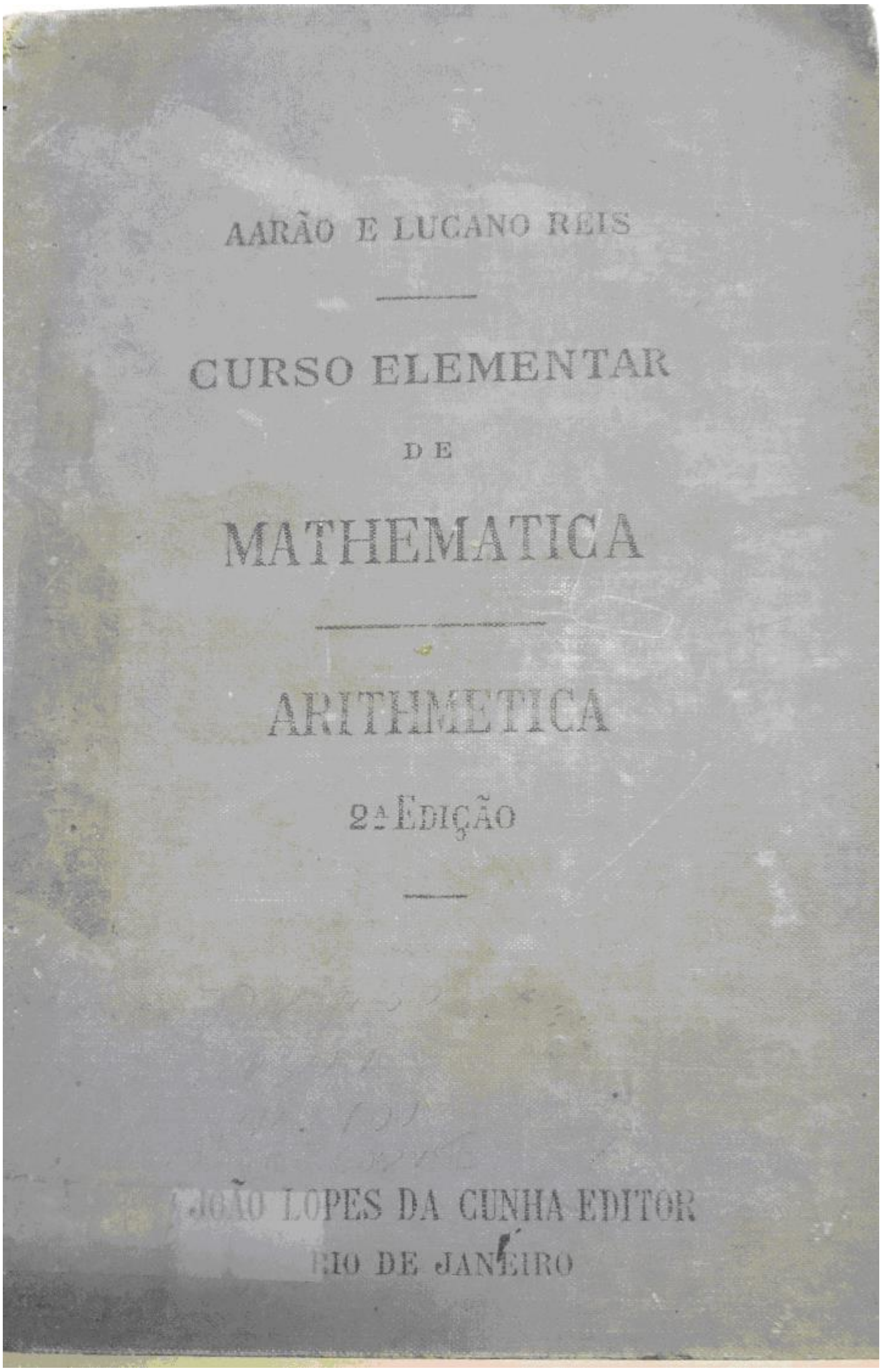


Figura 12: Capa do Livro Curso Elementar de Mathematica de 1891

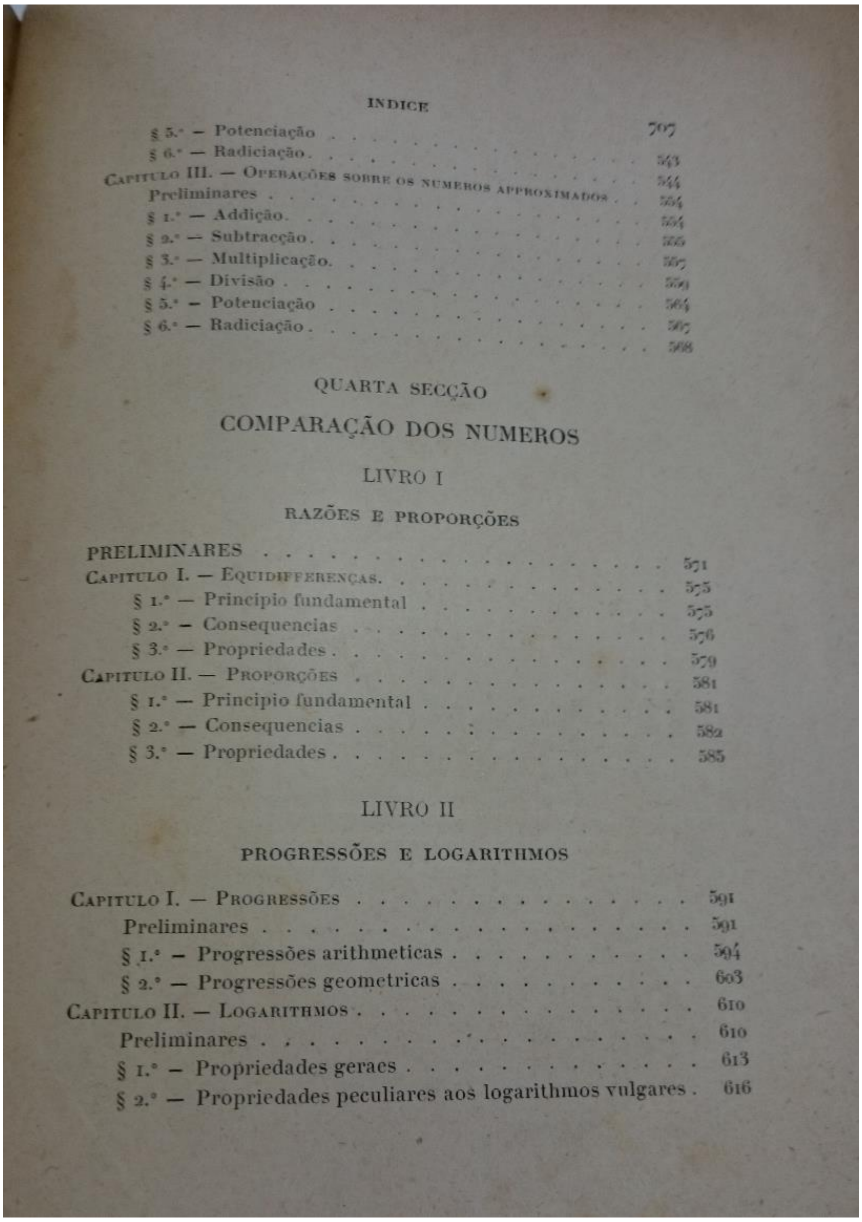

INDICE 707

Figura 13: Sumário do Livro Curso Elementar de Mathematica de 1891

Os conteúdos Progressão Aritmética e Geométrica, dispostos exatamente antes do capítulo de logaritmos, deixam claro que a ideia dos autores era exatamente construir o conceito de logaritmo partindo de uma análise de comportamento de séries de progressão geométrica e aritmética, tal como foi pensada inicialmente, fazendo uma associação dos termos dessas progressões; isto mostra conexão com uma tradição histórica, o que mostra a grande valorização ao conceito de História das Ciências.

2.2 . Os logaritmos e os livros didáticos atuais

De acordo com os PCN’s (1998) , a abordagem dos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas com aplicabilidade no cotidiano do aluno poderá se configurar como um método eficaz para que os alunos se apropriem dos conceitos e propriedades inerentes aos conteúdos desta ciência.

Então cabe aos livros didáticos de matemática apresentar logaritmos, com seus conceitos, propriedades e gráficos através da resolução de problemas que envolvam aplicações práticas e relacionadas com outras ciências como a física, química, a biologia e outras. Como o professor deve se basear no livro didático, a qualidade na qual é escrito afetará diretamente na apresentação que o professor fará em sala com os alunos.

Algumas propostas curriculares para o ensino da matemática foram pautadas em documento oficiais. Um desses documentos é o PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), esse programa passou a exigir das universidades públicas uma avaliação dos livros didáticos indicados para o ensino básico.

> ...
> um livro didático deve oferecer informações e explicações sobre o conhecimento matemático que interfere e sofre interferência da prática sociais do mundo contemporâneo e do passado. Também deve conter uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno e que ofereça atividades que incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem e a interagir com seus colegas. Além disso, o livro precisa assumir função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o docente. (BRASIL, 2008, PAG9)

Para Pais (2002), os livros materializam e socializam o conhecimento oriundo do âmbito da pesquisa científica para o universo escolar. Nestas transformações é incluída a concepção do autor em relação a matemática e o seu ensino, tendo como referencial a sua formação, sua experiência, as tendências da educação matemática, as sugestões do PCN de matemática e do PNLD.

Os livros analisados serão os seguintes:

- **LIVRO 1-** volume 1, **Matemática:** Contexto & Aplicações, DANTE, L.R. Ed.Ática
- **LIVRO 2-** volume 1, **Matemática**: Ciência e Aplicações, IEZZI, Gelson. Ed. Saraiva
- **LIVRO 3-** volume 1, **Matemática:** Ensino Médio, SMOLLE, K.S. Ed. Saraiva

No **Livro 1**, podemos observar a abordagem sobre logaritmo feita em 34 páginas, no capítulo 8, logo após os conceitos de função exponencial. Inicialmente temos uma abordagem histórica sobre o surgimento de logaritmos falando sobre Napier e Briggs. É feito também um comentário sobre a aplicação de logaritmo na escala Richter. Na parte relacionada à definição, o autor utiliza de um problema sobre crescimento populacional na América Latina, mostrando o caráter interdisciplinar do logaritmo. O autor desenvolve uma equação exponencial, na qual, aparecem bases distintas, mostrando que só é possível a solução utilizando-se logaritmo.

CAPÍTULO 8

LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Na Antiguidade, os babilônios foram os que mais se interessaram pela Astronomia e durante séculos enfrentaram problemas com os cálculos, que eram muito trabalhosos.

Foi somente no início do século XVII que surgiram as primeiras tábuas de logaritmos, inventadas independentemente por Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617). Logo depois, Henry Briggs (1561-1631) aperfeiçoou essas tábuas, apresentando os logaritmos decimais.

A principal contribuição dos logaritmos para facilitar os cálculos foi a de transformar as operações de multiplicação em adição e as de divisão em subtração, ao estudar as propriedades operatórias:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Essas descobertas aumentaram muito a capacidade de cálculo dos que estavam envolvidos em Astronomia e Navegação.

Em 1638 um matemático inglês chamado William Oughtred inventou a régua de cálculo com base na tábua de logaritmos criada por Napier. Esse foi um passo em direção à calculadora e à construção dos computadores.

Uma importante aplicação dos logaritmos é a escala Richter, na área da sismologia, que fornece as magnitudes dos terremotos. Desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, é uma escala logarítmica. No início, a escala Richter era graduada de 1 a 9, já que terremotos mais fortes não eram comuns na Califórnia (local onde Richter e Gutenberg faziam seus estudos). Mas teoricamente não existe limite para essa medida. A magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas de tipo **P** (primárias, mais rápidas) e **S** (secundárias, mais lentas) a 100 km do epicentro. A fórmula utilizada é $M_L = \log A - \log A_0$, sendo log a abreviação de logaritmo, A a amplitude máxima medida no sismógrafo e A_0 uma amplitude de referência.

Calculadora antiga criada por John Napier, também conhecido como Neper.

258

Figura 14: Capítulo de Logaritmo do Livro Matemática: Contextos & Aplicações(**Livro 1)**

O restante do conteúdo e as propriedades são apresentadas numa perspectiva lógico-dedutiva sendo apresentado em termos algébricos formais, incluindo exemplos resolvidos para os alunos. Após a apresentação de tais propriedades o ator aborda o tema com alguns exercícios usando conceito de biologia e química, que são resolvidos como exemplo, e depois com alguns exercícios a cargo do aluno.

A função logarítmica é feita através de pura construção de gráfico, sem nenhuma abordagem interdisciplinar do assunto. Logo em seguida vêm as Equações e Inequações logarítmicas que seguem o mesmo conceito da função logarítmica, usando a ideia de lógico-dedutiva.

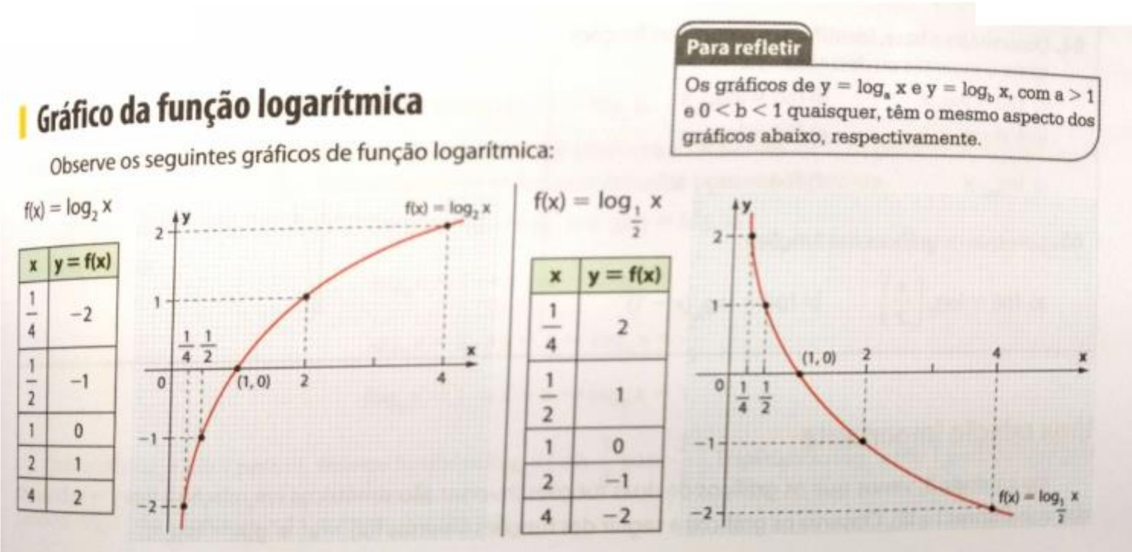


Figura 15: Abordagem de função logarítmica no **Livro 1**

No **Livro 2**, o conteúdo é apresentado em 28 páginas, também no capítulo 8. O autor introduz o conceito a partir de um problema de desvalorização de um caminhão, chegando até uma equação exponencial de bases distintas, mostrando que a solução só será possível por meio de logaritmos.

Função logarítmica 8

Logaritmos

Um caminhão custa hoje R\$ 100 000,00 e sofre uma desvalorização de 10% por ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R\$ 20 000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- após 1 ano de uso:
  90% de R\$ 100 000,00, ou seja, R\$ 90 000,00
- após 2 anos de uso:
  90% de R\$ 90 000,00, ou seja, R\$ 81 000,00
- após 3 anos de uso:
  90% de R\$ 81 000,00, ou seja, R\$ 72 900,00

e assim por diante.

No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

$$100\,000; \quad (0,9)\cdot 100\,000; \quad (0,9)^2\cdot 100\,000; \quad (0,9)^3\cdot 100\,000; \quad \ldots; \quad (0,9)^x\cdot 100\,000$$

em que x indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita, devemos resolver a equação $(0,9)^x \cdot 100\,000 = 20\,000$, ou seja, $(0,9)^x = 0,2$, que é uma equação exponencial.

No estudo de equações exponenciais, feito no capítulo anterior, só tratamos de situações em que podíamos reduzir as potências à mesma base. Quando temos de resolver uma equação como $(0,9)^x = 0,2$, não conseguimos reduzir todas as potências à mesma base. Para enfrentar esse e outros tipos de problemas, vamos estudar agora os logaritmos.

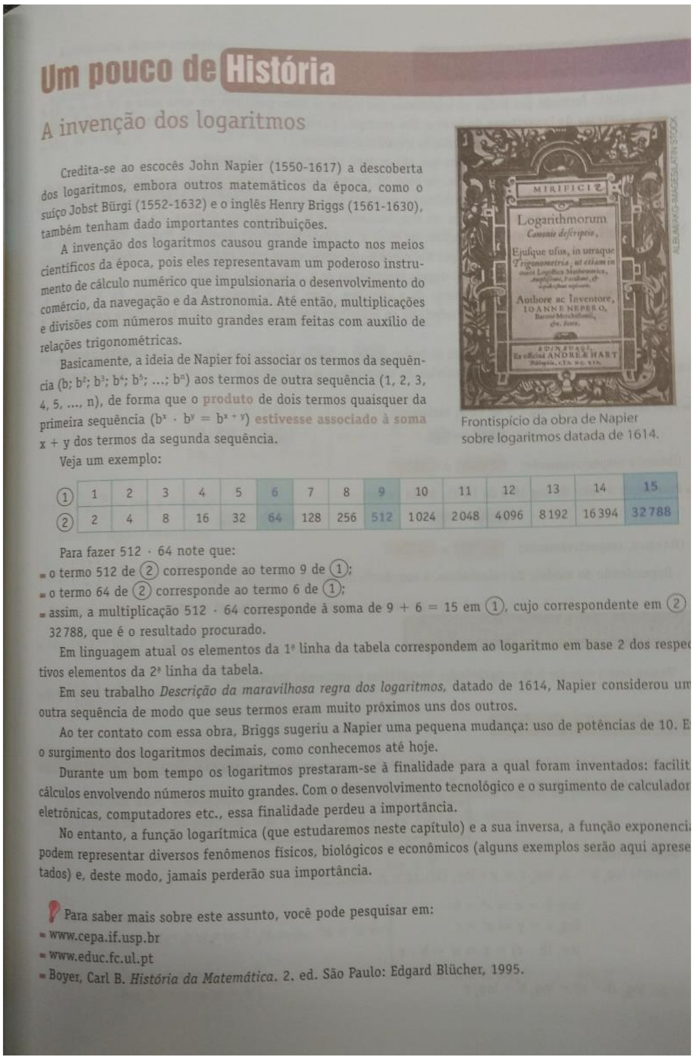
Definição

Sendo a e b números reais e positivos com $a \neq 1$ chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Figura 16: Introdução do capítulo 8(Função logarítmica) referente ao livro Matemática: Ciências e Aplicações (**Livro 2**)

Após esse início é colocado um pouco de história dos logaritmos, no qual o autor fala sobre Briggs, Napier e Burgi. Mostra também a relação inicial de que o logaritmo estaria vinculado a uma relação entre progressão aritmética e geométrica.



Um pouco de História

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência (b; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o **produto** de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) **estivesse associado à soma** $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Frontispício da obra de Napier sobre logaritmos datada de 1614.

Veja um exemplo:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para fazer $512 \cdot 64$ note que:

- o termo 512 de 2 corresponde ao termo 9 de 1;
- o termo 64 de 2 corresponde ao termo 6 de 1;
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em 1, cujo correspondente em 2 32788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respec tivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*, datado de 1614, Napier considerou um outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. E o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilit cálculos envolvendo números muito grandes. Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculador eletrônicas, computadores etc., essa finalidade perdeu a importância.

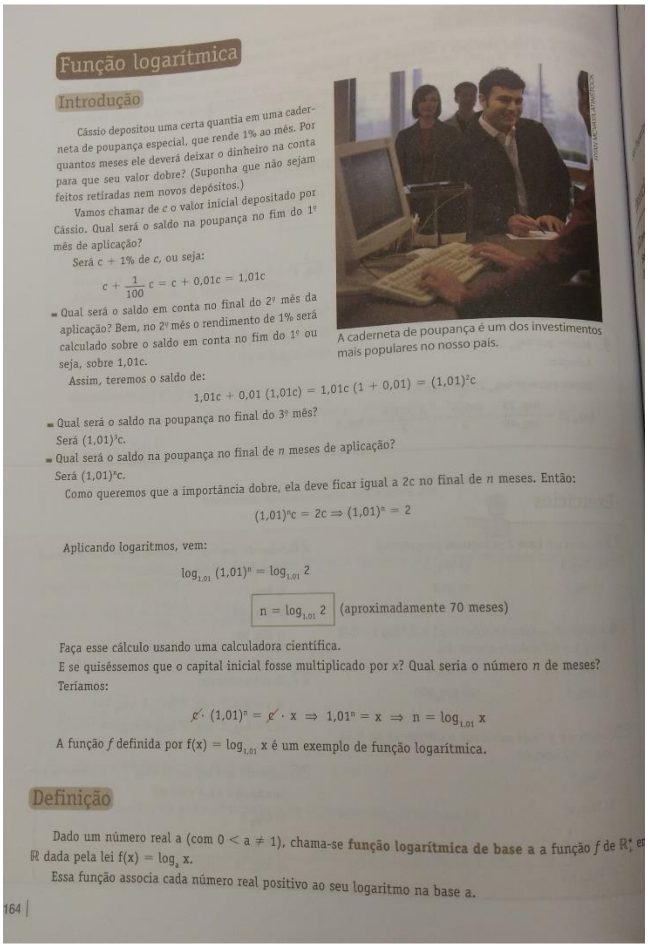
No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponenci podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui aprese tados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.

Para saber mais sobre este assunto, você pode pesquisar em:

- www.cepa.if.usp.br
- www.educ.fc.ul.pt
- Boyer, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.

Figura 17: Abordagem histórica sobre logaritmo no **Livro 2**

As demais propriedades assim como no **Livro 1** foram demonstradas através de uma perspectiva lógico-dedutiva. Apenas um exercício é resolvido mostrando a importância interdisciplinar do tema, questão essa que envolvia um conhecimento de química. Em função, a apresentação é feita a partir de um problema de rendimento de capital, porém, não é apresentado um gráfico que relacione tais variáveis.



Função logarítmica

Introdução

Cássio depositou uma certa quantia em uma caderneta de poupança especial, que rende 1% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre? (Suponha que não sejam feitos retiradas nem novos depósitos.)

Vamos chamar de *c* o valor inicial depositado por Cássio. Qual será o saldo na poupança no fim do 1º mês de aplicação?

Será c + 1% de *c*, ou seja:

$$c + \frac{1}{100}c = c + 0{,}01c = 1{,}01c$$

- Qual será o saldo em conta no final do 2º mês da aplicação? Bem, no 2º mês o rendimento de 1% será calculado sobre o saldo em conta no fim do 1º ou seja, sobre 1,01c.

Assim, teremos o saldo de:

$$1{,}01c + 0{,}01\,(1{,}01c) = 1{,}01c\,(1 + 0{,}01) = (1{,}01)^2c$$

- Qual será o saldo na poupança no final do 3º mês?
  Será $(1{,}01)^3c$.
- Qual será o saldo na poupança no final de *n* meses de aplicação?
  Será $(1{,}01)^nc$.

Como queremos que a importância dobre, ela deve ficar igual a 2c no final de *n* meses. Então:

$$(1{,}01)^nc = 2c \Rightarrow (1{,}01)^n = 2$$

Aplicando logaritmos, vem:

$$\log_{1{,}01}(1{,}01)^n = \log_{1{,}01} 2$$

$$\boxed{n = \log_{1{,}01} 2} \text{ (aproximadamente 70 meses)}$$

Faça esse cálculo usando uma calculadora científica.

E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por *x*? Qual seria o número *n* de meses?

Teríamos:

$$\cancel{c} \cdot (1{,}01)^n = \cancel{c} \cdot x \Rightarrow 1{,}01^n = x \Rightarrow n = \log_{1{,}01} x$$

A função *f* definida por $f(x) = \log_{1{,}01} x$ é um exemplo de função logarítmica.

A caderneta de poupança é um dos investimentos mais populares no nosso país.

Definição

Dado um número real a (com $0 < a \neq 1$), chama-se **função logarítmica de base a** a função *f* de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

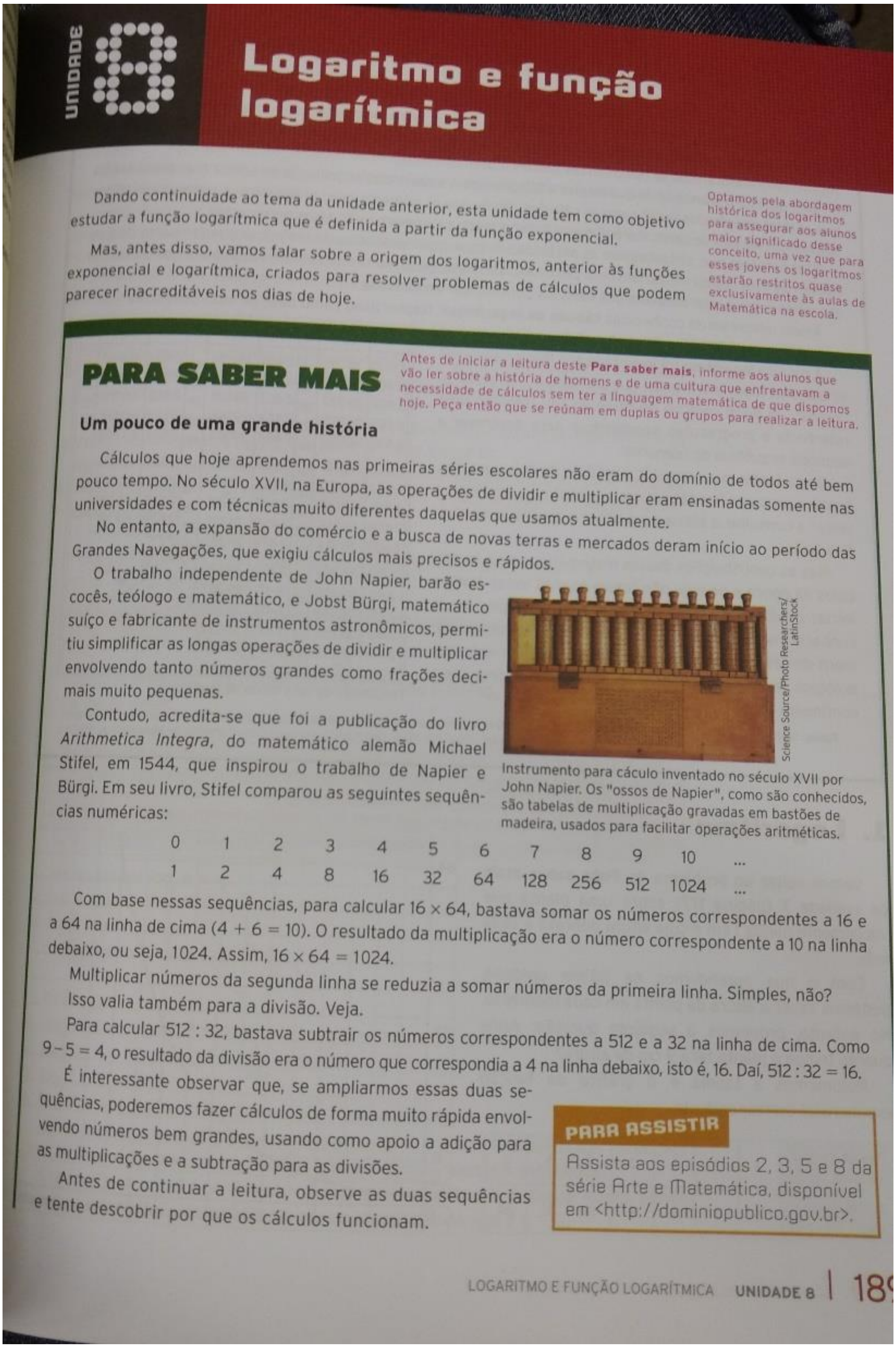
Essa função associa cada número real positivo ao seu logaritmo na base a.

164

Figura 18: Exemplo de matemática financeira com abordagem de função logarítmica, **Livro 2**.

Em equações e inequações logarítmicas são apresentados alguns problemas correlacionados a outros assuntos, um sobre nível de ruído e um sobre a questão da Escala Richter.

No **Livro 3,** o assunto é abordado em 18 páginas, também no capítulo 8. Inicialmente os autores se utilizam da história de logaritmo para introduzir a ideia de logaritmo. Falam sobre Napier e Burgi, como foi construída a tábua de logaritmos, o conceito inicial de Napier com a relação entre as Progressões Aritmética e Geométrica.


UNIDADE 8

Logaritmo e função logarítmica

Dando continuidade ao tema da unidade anterior, esta unidade tem como objetivo estudar a função logarítmica que é definida a partir da função exponencial.

Mas, antes disso, vamos falar sobre a origem dos logaritmos, anterior às funções exponencial e logarítmica, criados para resolver problemas de cálculos que podem parecer inacreditáveis nos dias de hoje.

Optamos pela abordagem histórica dos logaritmos para assegurar aos alunos maior significado desse conceito, uma vez que para esses jovens os logaritmos estarão restritos quase exclusivamente às aulas de Matemática na escola.

PARA SABER MAIS

Antes de iniciar a leitura deste **Para saber mais**, informe aos alunos que vão ler sobre a história de homens e de uma cultura que enfrentavam a necessidade de cálculos sem ter a linguagem matemática de que dispomos hoje. Peça então que se reúnam em duplas ou grupos para realizar a leitura.

Um pouco de uma grande história

Cálculos que hoje aprendemos nas primeiras séries escolares não eram do domínio de todos até bem pouco tempo. No século XVII, na Europa, as operações de dividir e multiplicar eram ensinadas somente nas universidades e com técnicas muito diferentes daquelas que usamos atualmente.

No entanto, a expansão do comércio e a busca de novas terras e mercados deram início ao período das Grandes Navegações, que exigiu cálculos mais precisos e rápidos.

O trabalho independente de John Napier, barão escocês, teólogo e matemático, e Jobst Bürgi, matemático suíço e fabricante de instrumentos astronômicos, permitiu simplificar as longas operações de dividir e multiplicar envolvendo tanto números grandes como frações decimais muito pequenas.

Science Source/Photo Researchers/ LatinStock

Instrumento para cáculo inventado no século XVII por John Napier. Os "ossos de Napier", como são conhecidos, são tabelas de multiplicação gravadas em bastões de madeira, usados para facilitar operações aritméticas.

Contudo, acredita-se que foi a publicação do livro *Arithmetica Integra*, do matemático alemão Michael Stifel, em 1544, que inspirou o trabalho de Napier e Bürgi. Em seu livro, Stifel comparou as seguintes sequências numéricas:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

Com base nessas sequências, para calcular 16×64, bastava somar os números correspondentes a 16 e a 64 na linha de cima ($4 + 6 = 10$). O resultado da multiplicação era o número correspondente a 10 na linha debaixo, ou seja, 1024. Assim, $16 \times 64 = 1024$.

Multiplicar números da segunda linha se reduzia a somar números da primeira linha. Simples, não? Isso valia também para a divisão. Veja.

Para calcular $512 : 32$, bastava subtrair os números correspondentes a 512 e a 32 na linha de cima. Como $9 - 5 = 4$, o resultado da divisão era o número que correspondia a 4 na linha debaixo, isto é, 16. Daí, $512 : 32 = 16$.

É interessante observar que, se ampliarmos essas duas sequências, poderemos fazer cálculos de forma muito rápida envolvendo números bem grandes, usando como apoio a adição para as multiplicações e a subtração para as divisões.

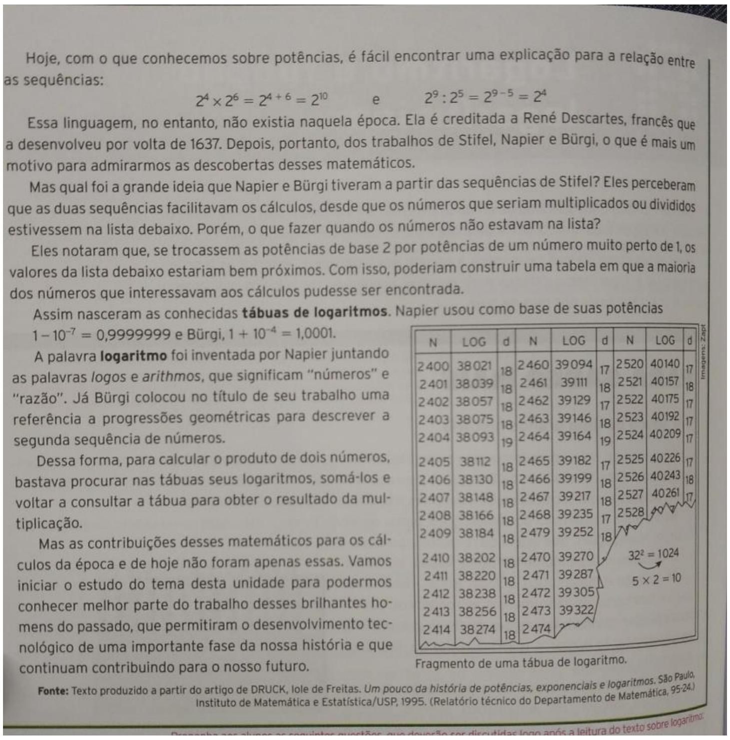
Antes de continuar a leitura, observe as duas sequências e tente descobrir por que os cálculos funcionam.

PARA ASSISTIR

Assista aos episódios 2, 3, 5 e 8 da série Arte e Matemática, disponível em <http://dominiopublico.gov.br>.

LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA UNIDADE 8 | 18

Figura 19



Hoje, com o que conhecemos sobre potências, é fácil encontrar uma explicação para a relação entre as sequências:

$$2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} \quad \text{e} \quad 2^9 : 2^5 = 2^{9-5} = 2^4$$

Essa linguagem, no entanto, não existia naquela época. Ela é creditada a René Descartes, francês que a desenvolveu por volta de 1637. Depois, portanto, dos trabalhos de Stifel, Napier e Bürgi, o que é mais um motivo para admirarmos as descobertas desses matemáticos.

Mas qual foi a grande ideia que Napier e Bürgi tiveram a partir das sequências de Stifel? Eles perceberam que as duas sequências facilitavam os cálculos, desde que os números que seriam multiplicados ou divididos estivessem na lista debaixo. Porém, o que fazer quando os números não estavam na lista?

Eles notaram que, se trocassem as potências de base 2 por potências de um número muito perto de 1, os valores da lista debaixo estariam bem próximos. Com isso, poderiam construir uma tabela em que a maioria dos números que interessavam aos cálculos pudesse ser encontrada.

Assim nasceram as conhecidas **tábuas de logaritmos**. Napier usou como base de suas potências $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ e Bürgi, $1 + 10^{-4} = 1{,}0001$.

A palavra **logaritmo** foi inventada por Napier juntando as palavras *logos* e *arithmos*, que significam "números" e "razão". Já Bürgi colocou no título de seu trabalho uma referência a progressões geométricas para descrever a segunda sequência de números.

Dessa forma, para calcular o produto de dois números, bastava procurar nas tábuas seus logaritmos, somá-los e voltar a consultar a tábua para obter o resultado da multiplicação.

Mas as contribuições desses matemáticos para os cálculos da época e de hoje não foram apenas essas. Vamos iniciar o estudo do tema desta unidade para podermos conhecer melhor parte do trabalho desses brilhantes homens do passado, que permitiram o desenvolvimento tecnológico de uma importante fase da nossa história e que continuam contribuindo para o nosso futuro.

N	LOG	d	N	LOG	d	N	LOG	d
2400	38021	18	2460	39094	17	2520	40140	17
2401	38039	18	2461	39111	18	2521	40157	18
2402	38057	18	2462	39129	17	2522	40175	17
2403	38075	18	2463	39146	18	2523	40192	17
2404	38093	19	2464	39164	19	2524	40209	17
2405	38112	18	2465	39182	17	2525	40226	17
2406	38130	18	2466	39199	18	2526	40243	18
2407	38148	18	2467	39217	18	2527	40261	17
2408	38166	18	2468	39235	17	2528		
2409	38184	18	2479	39252	18			
2410	38202	18	2470	39270				
2411	38220	18	2471	39287				
2412	38238	18	2472	39305				
2413	38256	18	2473	39322				
2414	38274	18	2474					

$32^2 = 1024$

$5 \times 2 = 10$

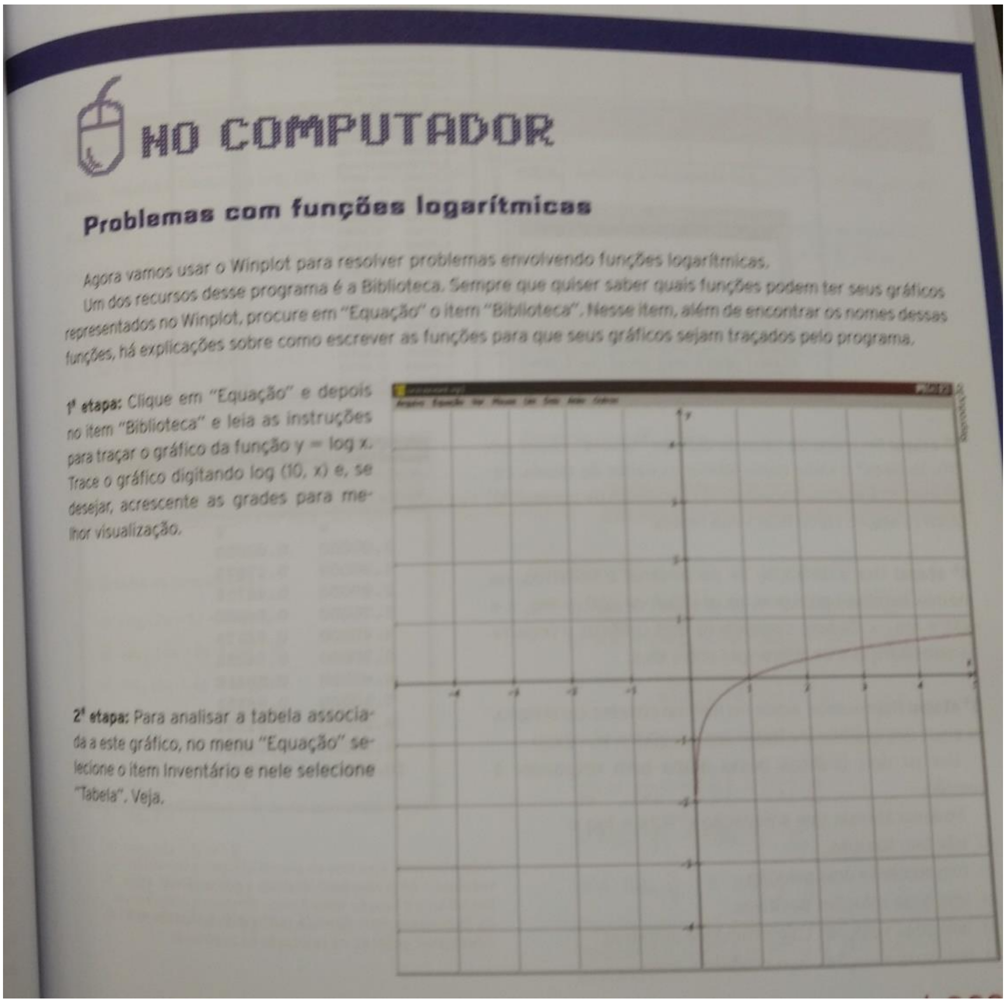
Imagens: Zapt

Fragmento de uma tábua de logaritmo.

Fonte: Texto produzido a partir do artigo de DRUCK, Iole de Freitas. *Um pouco da história de potências, exponenciais e logaritmos*. São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística/USP, 1995. (Relatório técnico do Departamento de Matemática, 95-24.)

Figura 20: Abordagem histórica sobre o conceito e surgimento de logaritmo, no livro Matemática: Ensino Médio (**Livro 3**)

O conceito de logaritmo é apresentado a partir de um exercício anterior no capítulo referente a exponenciais, onde ele monta uma função que representa o crescimento de uma planta, e assim como os demais, buscam mostrar uma equação exponencial que envolva bases distintas. As propriedades, novamente, são demonstradas a partir de uma perspectiva lógico-dedutiva, assim como nos livros anteriores e de forma até mais sucinta. Até então poucos exemplos do cotidiano dos alunos foram abordados. Funções logarítmicas são explicadas a partir da construção de um gráfico, sem nenhuma aplicação prática sobre o assunto. Mostram a função logarítmica sendo feita pelo computador com o programa *Winplot*, ensinando o passo a passo. Inequações e equações logarítmicas são ensinadas a partir de exemplos algébricos.


NO COMPUTADOR

Problemas com funções logarítmicas

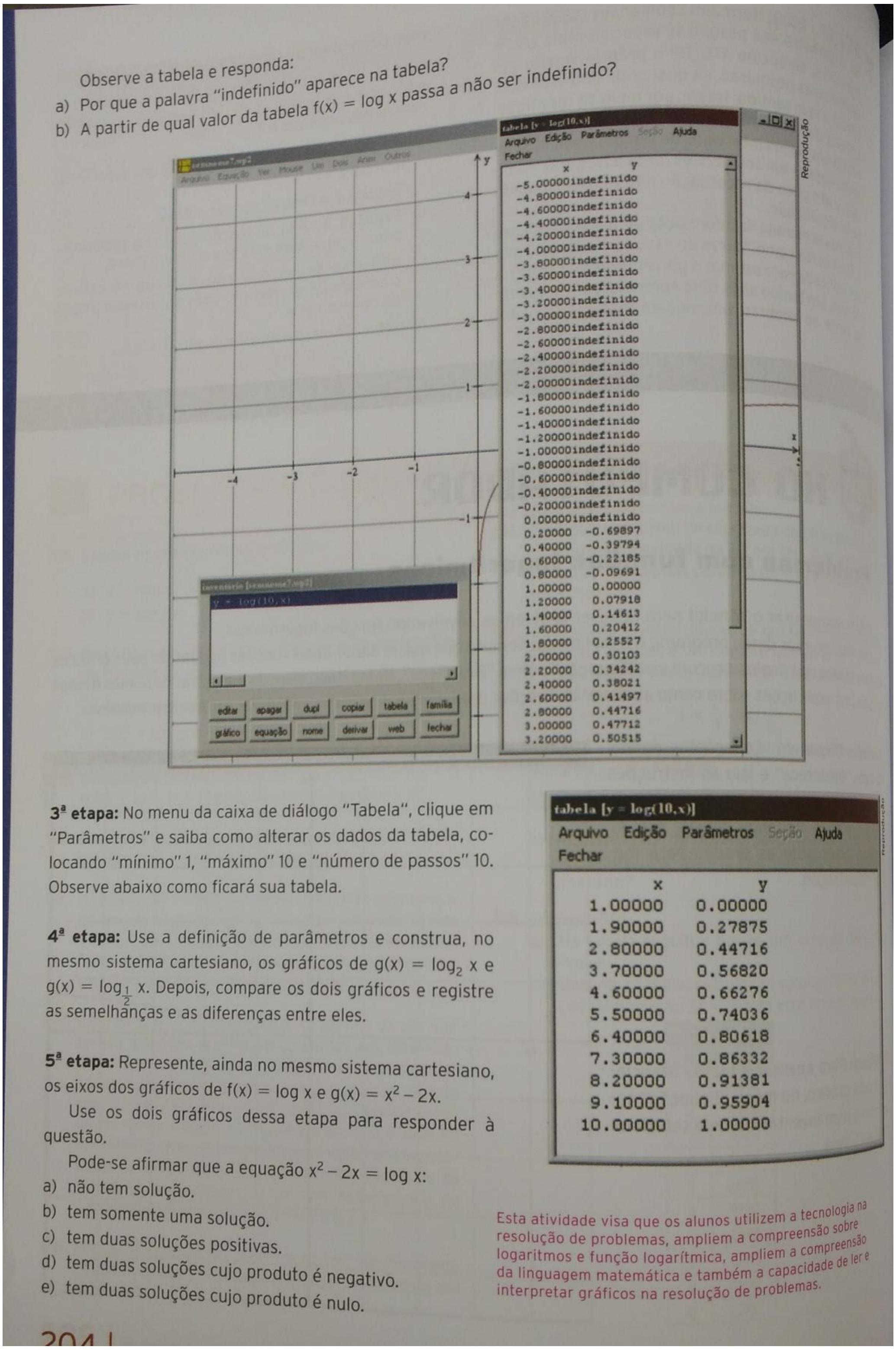
Agora vamos usar o Winplot para resolver problemas envolvendo funções logarítmicas.

Um dos recursos desse programa é a Biblioteca. Sempre que quiser saber quais funções podem ter seus gráficos representados no Winplot, procure em "Equação" o item "Biblioteca". Nesse item, além de encontrar os nomes dessas funções, há explicações sobre como escrever as funções para que seus gráficos sejam traçados pelo programa.

1ª etapa: Clique em "Equação" e depois no item "Biblioteca" e leia as instruções para traçar o gráfico da função y = log x. Trace o gráfico digitando log (10, x) e, se desejar, acrescente as grades para melhor visualização.

2ª etapa: Para analisar a tabela associada a este gráfico, no menu "Equação" selecione o item Inventário e nele selecione "Tabela". Veja.

Figura 21



Observe a tabela e responda:

a) Por que a palavra "indefinido" aparece na tabela?

b) A partir de qual valor da tabela $f(x) = \log x$ passa a não ser indefinido?

tabela [y = log(10,x)]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda

Fechar

x	y
-5.00000	indefinido
-4.80000	indefinido
-4.60000	indefinido
-4.40000	indefinido
-4.20000	indefinido
-4.00000	indefinido
-3.80000	indefinido
-3.60000	indefinido
-3.40000	indefinido
-3.20000	indefinido
-3.00000	indefinido
-2.80000	indefinido
-2.60000	indefinido
-2.40000	indefinido
-2.20000	indefinido
-2.00000	indefinido
-1.80000	indefinido
-1.60000	indefinido
-1.40000	indefinido
-1.20000	indefinido
-1.00000	indefinido
-0.80000	indefinido
-0.60000	indefinido
-0.40000	indefinido
-0.20000	indefinido
0.00000	indefinido
0.20000	-0.69897
0.40000	-0.39794
0.60000	-0.22185
0.80000	-0.09691
1.00000	0.00000
1.20000	0.07918
1.40000	0.14613
1.60000	0.20412
1.80000	0.25527
2.00000	0.30103
2.20000	0.34242
2.40000	0.38021
2.60000	0.41497
2.80000	0.44716
3.00000	0.47712
3.20000	0.50515

3ª etapa: No menu da caixa de diálogo "Tabela", clique em "Parâmetros" e saiba como alterar os dados da tabela, colocando "mínimo" 1, "máximo" 10 e "número de passos" 10. Observe abaixo como ficará sua tabela.

tabela [y = log(10,x)]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda

Fechar

x	y
1.00000	0.00000
1.90000	0.27875
2.80000	0.44716
3.70000	0.56820
4.60000	0.66276
5.50000	0.74036
6.40000	0.80618
7.30000	0.86332
8.20000	0.91381
9.10000	0.95904
10.00000	1.00000

4ª etapa: Use a definição de parâmetros e construa, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos de $g(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Depois, compare os dois gráficos e registre as semelhanças e as diferenças entre eles.

5ª etapa: Represente, ainda no mesmo sistema cartesiano, os eixos dos gráficos de $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^2 - 2x$.

Use os dois gráficos dessa etapa para responder à questão.

Pode-se afirmar que a equação $x^2 - 2x = \log x$:

a) não tem solução.

b) tem somente uma solução.

c) tem duas soluções positivas.

d) tem duas soluções cujo produto é negativo.

e) tem duas soluções cujo produto é nulo.

Esta atividade visa que os alunos utilizem a tecnologia na resolução de problemas, ampliem a compreensão sobre logaritmos e função logarítmica, ampliem a compreensão da linguagem matemática e também a capacidade de ler e interpretar gráficos na resolução de problemas.

204 |

Figura 22: Demonstração com o Winplot sobre gráficos de função logarítmica no **Livro 3**

No fim do capítulo os autores colocam uma discussão sobre a aplicabilidade de logaritmo e os abalos sísmicos.

2.3 . Conclusão sobre a análise dos livros consultados.

Na análise dos três livros ficou clara a opção de apresentação da demonstração de propriedades e funções, para depois mostrar as aplicações, quando o caminho mais interessante para o aluno deveria ser o inverso. Apresentar um problema relacionado ao seu cotidiano e a partir deste demonstrar as propriedades, o conceito de função logarítmica, equações e inequações.

É preciso conceber o papel de resolução de problemas como princípio norteador da aprendizagem matemática e que isto pode possibilitar a abordagens de diversos conteúdos em sala de aula, construindo assim um ensino atualizado e de acordo com as tendências da educação matemática.

Mostrar para os alunos o surgimento e o momento em que o tema foi criado, ou seja, em que situação, para que e como foi desenvolvido esse assunto. Isso pode ser um elemento motivador para o aluno. Devemos deixar claro que a resolução de problemas é muito importante para o aprendizado na matemática, porém a resolução de grande parte deles requer, além de conceitos, conhecimento de propriedades.

III. INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo abordamos a importância em introduzir o conceito de Logaritmo no 9° ano (último ano do Ensino Fundamental II), no propósito de facilitar o aprendizado deste conteúdo no 1° ano do Ensino Médio. Para avaliação, mostramos o resultado de experimento feito com uma turma de 9° ano, com 23 alunos, na faixa etária de 14 a 15 anos, do Colégio Bahiense Campo Grande, escola privada da Zona Oeste do Rio de Janeiro.

3.1 . Fundamentação

O propósito deste experimento é ensinar o conceito de Logaritmo, ainda que no universo dos Racionais, facilitando o entendimento do aluno sobre o assunto no 1° ano, quando este vai aprender Funções Logarítmicas.

De acordo com Caraça (1989) temos

> O homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências.

Conforme, podemos observar o aluno tende a aprender as operações baseadas em uma sequência lógica e crescente em relação aos conjuntos estudados. Por exemplo, inicialmente ele aprende a operar dentro do conjunto do números naturais, para em seguida começar a aprender a operar com os números inteiros, aprende o conceito inicial de Frações (ainda no Ensino Fundamental I), inclusive com operações, para em seguida já no Ensino Fundamental II aprender a operar com as frações, já com o conhecimento dos números inteiros, e aprende assim o conjunto dos números racionais.

Com as funções seguimos o mesmo raciocínio, quando inicialmente trabalhamos com as relações, restringindo o domínio a conjuntos de fácil compreensão do aluno, para em seguida podermos introduzir o conceito e as restrições referentes a funções.

A ideia principal das atividades que propomos é introduzir o conceito de logaritmo, sendo calculado num subconjunto de racionais restrito: o conjunto dos racionais positivos que são resultados de potências da base considerada. Julgamos isto suficiente para abordagem pela primeira vez.

De acordo com os PCN o conteúdo programático do 9° ano em Álgebra deve ter inicialmente o ensino de Potenciação. Utilizaremos como padrão de pesquisa o conteúdo programático utilizado no colégio onde foi feita o experimento.

No programa do colégio, o conteúdo relacionado a Potenciação é o Capítulo 1. A proposta é que o conceito seja introduzido exatamente entre o capítulo 1 e 2, visto que após o capítulo 1, o aluno terá o conhecimento de todas as possíveis operações com potências de expoentes Racionais, que será o universo trabalhado.

De acordo com Caraça, existem as *quatro operações fundamentais:* **adição, subtração, multiplicação e divisão**. A estas iremos juntar "mais três que se lhes ligam imediatamente; são a **potenciação, a radiciação e a logaritmação**".

Estas operações podem se dividir conforme o quadro abaixo

GRAUS	DIRETAS	INVERSAS
1°	**ADIÇÃO**	**SUBTRAÇÃO**
2°	**MULTIPLICAÇÃO**	**DIVISÃO**
3°	**POTENCIAÇÃO**	**RADICIAÇÃO** **LOGARITMAÇÃO**

De acordo com Caraça a operação inversa da potenciação em que são dados a potência e o expoente, e se determina a base é a *radiciação*, que já é ensinada no 9° ano logo em seguida do capítulo relacionado a potenciação; e aquela pela qual são dados a potência e a base, e se determina o expoente chama-se *logaritmo*.

Logo a proposta é válida para que se ensine também o conceito de Logaritmo como simples operação inversa da Potenciação, assim como é ensinada a Radiciação. É fato saber que operações inversas apresentam casos de impossibilidades que serão cada vez mais reduzidas de acordo com a aplicação do *Princípio de Extensão*, para isso criam-se outros campos numéricos. Deixaremos claro para eles que iremos trabalhar até o conjunto dos racionais e que na próxima série isso será analisado em um campo numérico mais extenso (Conjunto dos Reais).

3.2 Planejamento das atividades

O conteúdo foi apresentado em três aulas. Na primeira foram realizadas atividades para introdução do conceito, elaboração de exercícios dando ênfase ao universo que trabalharíamos, os racionais, e apresentamos um pouco de história para motivar os alunos para a próxima aula.

Aula 1.

O primeiro passo foi induzir o aluno a fazer o raciocínio inverso. Para tal, fizemos perguntas, oralmente, formuladas de formas diferentes, mas solicitando o mesmo tipo de resposta: o expoente. Exemplos de formulação de sentenças.

Considerando a base 3, qual é o expoente para que a potência seja igual a 9? (1)

Qual é o expoente para obter o número 9, considerando a base 3? (2)

O objetivo é que os percebam que, para responder às perguntas, eles necessitam realizar potenciações, de acordo com a base dada.

A seguir solicitamos aos alunos que resolvam um conjunto de exercícios de solicitação do expoente:

Exercício 1. Determine x, em cada item.

a) $3^x = 81 \rightarrow x = ...$
b) $5^x = 625 \rightarrow x = ...$
c) $2^x = 256 \rightarrow x = ...$

O segundo passo foi introduzir o termo *logaritmo*.

Nota sobre o desenvolvimento: Observemos que, embora as perguntas (1) e (2) resultem na mesma resposta, a formulação (2) se adequa melhor à introdução da nomenclatura, pois, inicia perguntando pelo expoente, que é o logaritmo, e também facilita a substituição da expressão “o expoente para obter o número 9” em (2) por *logaritmo de 9*.

Colocamos a sentença no quadro branco e introduzimos o termo

Qual é $\boxed{\text{o expoente para obter o número 9}}$, considerando a base 3?

Qual é $\boxed{\text{o } \textit{logaritmo} \text{ de 9}}$, considerando a base 3

Ou, de forma mais simples,

Qual é **o logaritmo de 9 na base 3?**

Passo 3. Introduzimos a simbologia para a expressão **logaritmo de 9 na base 3**:

$$\boldsymbol{\log_3 9}$$

Como a resposta é 2, escrevemos a sentença matemática em símbolos:

$$\boldsymbol{\log_3 9 = 2.}$$

Continuamos a aula com a prática, primeiramente solicitando aos alunos que escrevam cada valor de x obtido como o logaritmo de um número e em qual base, obtendo a sentença matemática do tipo mostrado.

Seguimos com exercícios com maior grau de dificuldade e finalizamos a aula com elementos da história.

Aula 2.

A aula 2 teve como principal objetivo mostrar as principais propriedades do Logaritmo, e assim poder mostrar o objetivo de sua criação, por Napier, que seria facilitar as multiplicações, transformando-as em soma e as divisões em subtrações. As propriedades não foram provadas. Apenas mostramos alguns exemplos para os alunos observarem que elas são satisfeitas.

Nesta aula mostramos alguns exemplos da relação entre Logaritmo e outras áreas do conhecimento. Exploramos também a prática.

3.3. Execução

PLANO DA AULA 1

<table>
<tr><td colspan="2">PROFESSOR: THIAGO MATTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">COLÉGIO BAHIENSE CAMPO GRANDE</td></tr>
<tr><td>DISCIPLINA: MATEMÁTICA</td><td>CONTEÚDO: LOGARITMO</td></tr>
<tr><td colspan="2">ASSUNTO: LOGARITMOS APLICADOS NUM SUBCONJUNTO DOS RACIONAIS POSITIVOS</td></tr>
<tr><td>PÚBLICO ALVO: 9° ANO</td><td>DURAÇÃO: 2 TEMPOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO: Apresentar o conceito de logaritmo ao aluno, para que o mesmo possa ter uma maior facilidade no aprendizado no 1° ano do Ensino Médio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">RECURSO: DATA SHOW, QUADRO E CANETAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">METODOLOGIA.
Realização de dinâmica de pergunta e resposta exigindo apenas o conhecimento consolidado de potenciação.
Utilização da lousa para introdução de nomenclatura e simbologia matemática.
Realização de exercícios em grupo.
Abordagem de um pouco da história sobre logaritmos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESENVOLVIMENTO
Parte 1. Realização de atividades orais e práticas para desenvolver no aluno o raciocínio inverso da potenciação. Introdução do conceito, nomenclatura e simbologia matemática. Dividida em três passos: atividades orais e práticas para determinação de expoentes (Exercício 1), introdução do conceito com nomenclatura e simbologia.

Parte 2. Prática orientada
Exercício 2. Escrever cada valor de x obtido no Exercício 1 como o logaritmo de um valor e em qual base, utilizando a simbologia apresentada.
a) $\log \quad = ...$
b) $\log \quad = ...$
c) $\log \quad = ...$</td></tr>
</table>

Realizamos cada item em conjunto com os alunos e, ao finalizá-lo, esperamos que o aluno tenha assimilado a correspondência:

$3^2 = 9$ é equivalente a $\log_3 9=2$.

No exercício que segue aumentamos o grau de dificuldade, pois há resultados que envolvem frações ou números negativos.

Exercício 3. Determine os logaritmos:

a) $\log_5 125=$ .....
b) $\log_{10} 100000=$ .....
c) $\log_{10} 0{,}0001=$ ....
d) $\log_4 2 =$ ......
e) $\log_5 (1/5) =$ ......
f) $\log_{36} 6 =$ ......
g) $\log_2 1 =$ ......
h) $\log_{10} 1 =$ ......

A orientação é para que o aluno recorra sempre à potenciação, e encontre potências de bases iguais. Por exemplo, no item c)

$10^x = 0{,}0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$.

Já no item d), ao escrever a igualdade $4^x = 2$, o aluno pode sentir um pouco mais de dificuldade e há dois caminhos: escrever 2 como potência de 4 ($2=4^{1/2}$) ou escrever quatro como potência de 2 e trabalhar o primeiro membro obtendo $2x=1$ e, consequentemente, $x=1/2$.

Na realização dos exercícios 2 e 3 reforçamos as relações

$\log_{10} 0{,}0001= -4$, se, e somente se, $10^{-4} = 0{,}0001$.

$\log_5 1/5 = -1$, se, e somente se, $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

$\log_{36} 6 = ½$, se, e somente se, $36^{1/2} = 6$.

Com as explicações dadas passamos alguns exercícios para os alunos resolverem.

1- Determine o valor de x nas equações abaixo:

a) $2^x = 64$
b) $3^x = 27$
c) $2^x = 1/8$

d) $7^x = 343$

e) $10^x = 0{,}0000001$

f) $27^x = 3$

g) $4^x = 32$

2- Determine o valor dos Logaritmos abaixo:

$\log_4 16 =$

$\log_3 243 =$

$\log_{10} 0{,}001 =$

$\log_{25} 5$ -

Parte 3.

Até o século XVII, cálculos envolvendo multiplicações ou divisões eram bastante incômodos, não só na Astronomia, mas em toda ciência que tratasse de medidas. O escocês John Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, preocupou-se seriamente em simplificar esses cálculos e, após vinte anos de pesquisas, publicou, em 1614, o resultado de seus estudos, apresentado ao mundo a Teoria dos Logaritmos. O princípio básico dos logaritmos é: Transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração, pois adicionar ou subtrair números é normalmente mais rápido que multiplicá-los ou dividi-los. Veremos isto na próxima aula.

AVALIAÇÃO: Com esta aula pude observar que os alunos conseguiram assimilar diretamente a questão de logaritmo com exponencial, o que realmente era o nosso objetivo, mostrando assim que o aprendizado deste conceito não será tão complicado quanto parecia ser antes. Os alunos tiveram uma maior dificuldade nos logaritmos com resultados em frações, mas para um primeiro contato realmente foi proveitosa e válida esta aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

DANTE, Luiz R., Matemática no Ensino Médio, Volume Único, Ed. Ática,2009.

IEZZI, Gelson, Fundamentos da Matemática Elementar, Vol. 2, Atual Editora, 1998.

PLANO DE AULA 2

PROFESSOR: THIAGO MATTOS
COLÉGIO BAHIENSE CAMPO GRANDE

DISCIPLINA: MATEMÁTICA	**CONTEÚDO**: LOGARITMO
ASSUNTO: LOGARITMOS EM SUBCONJUNTO DOS RACIONAIS POSITIVOS	
PÚBLICO ALVO: 9° ANO	**DURAÇÃO**: 2 TEMPOS
OBJETIVO: Apresentar as principais propriedades de Logaritmo e algumas possíveis aplicações no cotidiano.	
RECURSO: DATA SHOW, QUADRO E CANETAS	

METODOLOGIA.

Utilização de apresentação em slide para revisão e fixação do conteúdo visto na aula anterior e apresentação das propriedades de logaritmos.

Argumentações expositivas no quadro branco.

DESENVOLVIMENTO

Parte 1. Apresentação de slide (apresentado no final deste plano) com as propriedades.

1- $\log a.b$= $\log a$ + $\log b$

2- $\log a/b$= $\log a$ - $\log b$

3- $\log a^n$= n . $\log a$,

e comentários. Abordamos apenas as ideias das propriedades 1 e 3, pois necessitaríamos de mais ferramentas para item 2.

Também não chamamos a atenção para o universo numérico, pois estamos trabalhando de forma muito restrita, em que o logaritmo é aplicado apenas em números racionais positivos que sejam potências racionais das bases utilizadas.

Parte 2. Exemplos e prática de manipulação das propriedades.

Exercício. Sabendo que $\log a$= x e que $\log b$= y, calcule:

a) $\log a.b$

b) $\log a/b$

c) $\log a^3$

d) $\log(a^4.b)$

Parte 3. Comentários motivadores para o Ensino Médio

No Ensino médio veremos algumas aplicações de Logaritmo na medição de terremotos, a famosa Escala Richter, cálculo de pH em substância, na matemática financeira, em cálculo de juros, e outros.

Terremotos (Escala Richter) - I= 2/3 $\log_{10} \frac{E}{E_0}$ onde:

I - Índice da escala Richter (variando de 0 a 9); **E - Energia liberada pelo Terremoto;** **E_0 - 7 x 10^{-3} KW/h.** **Cálculo de pH: -$\log_{10}[H^+]$, onde:** **[H^+]- concentração de Hidrogênio na substância.** **,** **Matemática Financeira- Juros compostos** **M= $C(1 + i)^t$, onde** **M- montante; C- Capital; i- taxa; t- tempo**
AVALIAÇÃO: Os alunos apresentaram uma certa dificuldade em assimilar as propriedades. Resolvendo alguns exemplos no quadro eles conseguiram caminhar melhor no aprendizado, chegando assim ao ponto que eu desejava para a turma. Acredito que essas duas aulas ajudarão muito no ano seguinte quando os alunos aprenderão o conceito de Logaritmo vinculado a Função, definido nos reis positivos.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS: DANTE, Luiz R., Matemática no Ensino Médio, Volume Único, Ed. Ática,2009. IEZZI, Gelson, Fundamentos da Matemática Elementar, Vol. 2, Atual Editora, 1998.

Esta aula foi, de fato, dividida em duas aulas, realizadas em dias diferentes, cada uma delas composta de dois tempos seguidos de 50 minutos.

Alguns exemplos de aplicações de Logaritmo no cotidiano busquei na internet para facilitar a visualização dos alunos.

A aula foi dada no início do ano letivo, uma grande vantagem em relação à forma que é ensinada hoje em dia. Uma das grandes reclamações, tanto dos alunos, quanto dos professores é o momento que o conteúdo Função Logarítmica é dado na 1° série do Ensino Médio. Normalmente esse conteúdo é dado como último capítulo do conteúdo de Álgebra, momento no qual os alunos já estão muito cansados e os professores na maioria das vezes correndo para tentar fechar o conteúdo programático do ano letivo.

Para resolver esse problema, uma possível solução seria introduzir um conceito no 9° ano como foi feito nesse experimento.

A seguir mostramos, e fazemos os comentários pertinentes a cada um dos slides utilizados em sala.

Figura 23: Slide 1

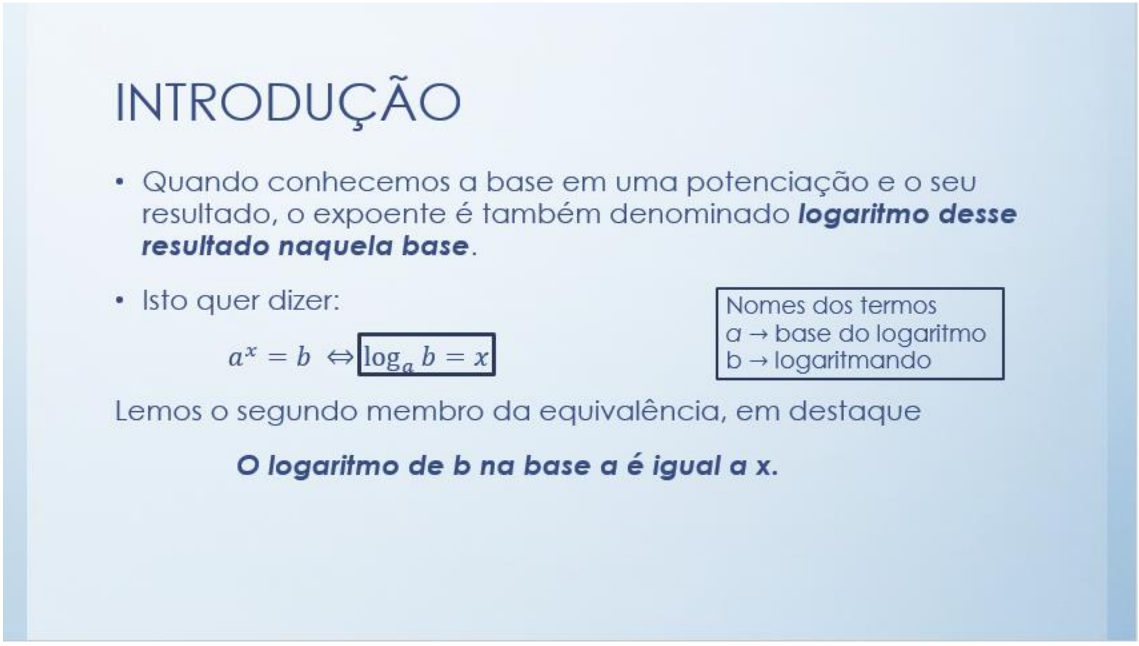


Figura 24: Slide 2

Nesse *slide 2*, dei continuidade à revisão de forma expositiva, no quadro, do conceito fundamental de Logaritmo, ou seja, a relação principal do Logaritmo com o expoente de uma equação exponencial.

Figura 25: Slide 3

No *slide 3* pedi para que os alunos através de fatoração chegassem ao resultado de cada uma das expressões. Os alunos tiveram uma certa facilidade.

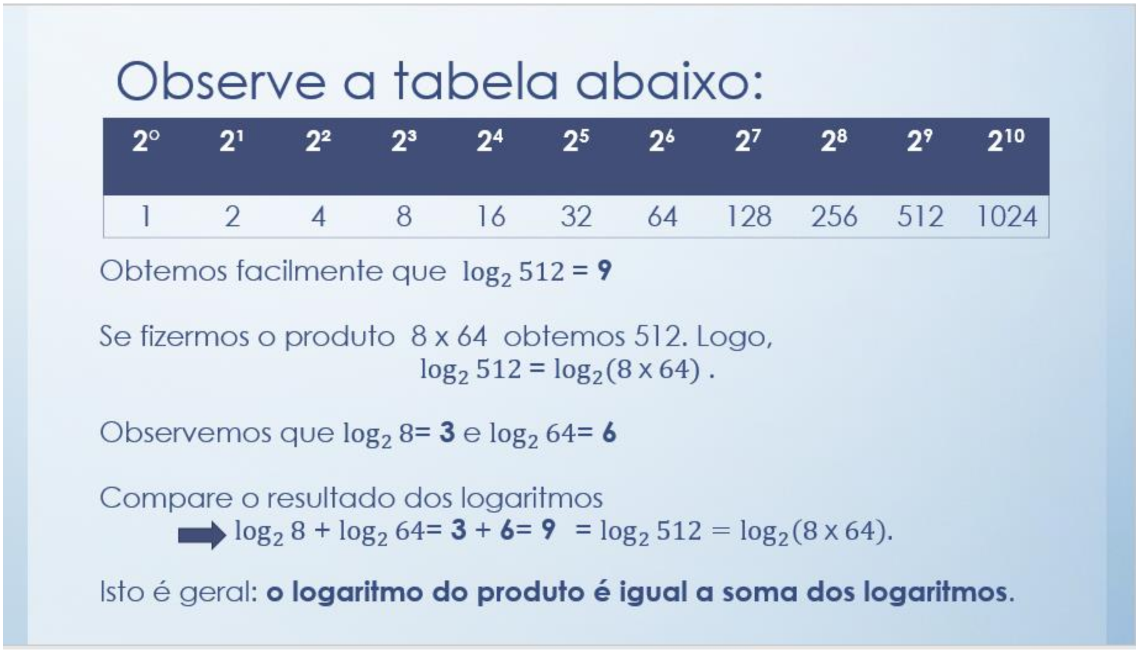


Figura 26: Slide 4

O *slide 4* foi exibido para ilustrar a propriedade da partição do logaritmo de produto em soma de logaritmos. Esse slide levou um certo tempo para que eles realmente assimilassem a ideia de multiplicação em Logaritmos. Pedi para que eles tentassem, em dupla, chegar ao log 512 utilizando outras combinações de Logaritmos, isso os ajudou na compreensão do que eu queria mostrar.

Então, após discussões, fiz outro exemplo.

Podemos escrever 512 como o produto de 32 por 16.

Então

$$\log_2 512 = \log_2(32 \times 16)$$

Como $\log_2 32 = 5$ e $\log_2 16 = 4$, da propriedade obtemos

$\log_2 512 = \log_2 32 + \log_2 16 = 5 + 4 = 9$.

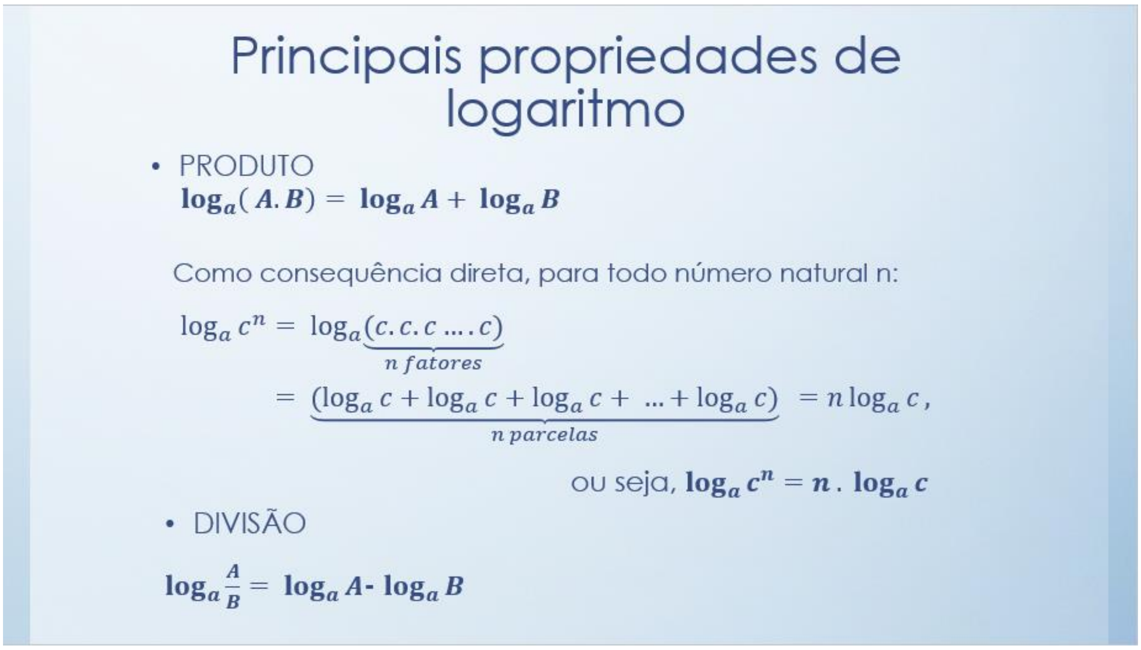


Figura 27: Slide 5

No *slide 5* são apresentadas as propriedades.

Percebi que com um pouco mais de tempo e restringindo n ao conjunto dos inteiros, essas propriedades podem ser vistas no 9° ano, mas, mesmo com restrições, foi proveitoso pois observei entendimento do que estava sendo proposto.

Então mostrei para os alunos o que podíamos fazer a partir de dados da tabela anterior, utilizando a propriedade do produto e da potência.

Observem que podemos, a partir da tabela anterior, calcular, por exemplo:

$$\log_2 524.288 = \log_2(1024 \times 512) = \log_2 1024 + \log_2 512 = 10 + 9 = 19.$$

$$\log_2 134.217.728 = \log_2(512^3) = 3\log_2 512 = 3 \times 9 = 27.$$

Fizemos então o comentário para os alunos. Conforme podemos observar foi o principal objetivo de Napier, quando este começou a utilizar os conceitos de Logaritmo, transformar possíveis multiplicações em somas, ou divisões em subtrações.

Este tipo de artificio foi extremamente útil nas contas relacionadas à Astronomia, por exemplo, que é outra história e não veremos aqui.

Durante as discussões sobre os exercícios aconteceu a pergunta que já esperávamos, " *professor, e se não for possível igualar as bases?"*, nesse momento indiquei que esse tipo de solução ficaria para ser ensinado no 1° ano, onde o valor do logaritmo, embora exista, não é facilmente determinado. Tomamos, por exemplo $\log_2 5$.

Pelo estudado $x = \log_2 5 \Leftrightarrow 2^x = 5$.

Então fizemos alguns experimentos com potência de base 2 para o aluno visualizar como são obtidas aproximações:

1) $2^2 = 4$ e $2^3 = 9$. Então x está entre 2 e 3.
2) Testemos valores mais próximos e tomamos os expoentes 5/3 e 5/2.

   Temos $2^{5/3} = \sqrt[3]{32} < 5$ e $2^{5/2} = \sqrt{32} > 5$.

   Logo, x está entre 5/3 e 5/2.

Explicamos que, atualmente, os cálculos para aproximações são feitos com calculadoras, mas que, já era conhecida uma tabela de logaritmos no século XVII, construída por Briggs.

Ao fim desta aula, foram feitos alguns exemplos no quadro e retiradas algumas dúvidas sobre o assunto. Com isto pedi para que eles fizessem uma lista de exercícios que será apresentada no anexo a seguir.

3.4 Avaliação

Como fechamento do experimento passei aos alunos alguns exercícios referentes às aulas dadas sobre Logaritmo. O rendimento no todo foi bem positivo e, apesar de alguns erros naturais dos alunos, pude perceber que o conteúdo foi assimilado com êxito e será bem proveitoso para os alunos na 1° série do Ensino Médio. A seguir os exercícios que fecharam a nossa aula.

TESTE DE LOGARITMOS

01- Determine os valores dos logaritmos abaixo:

a) $\mathbf{\log_5 125 =}$

b) $\mathbf{\log_3 243 =}$

c) $\mathbf{\log_2 256 =}$

d) $\mathbf{\log_6 216 =}$

02- Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ calcule em função de *a* e *b* os valores dos logaritmos abaixo:

a) $\mathbf{\log 6 =}$

b) $\mathbf{\log 24 =}$

03- Resolva as equações abaixo:

a) $\mathbf{3^x = 27}$

b) $\mathbf{8^x = 256}$

c) $\mathbf{2^x = \sqrt[7]{2^5}}$

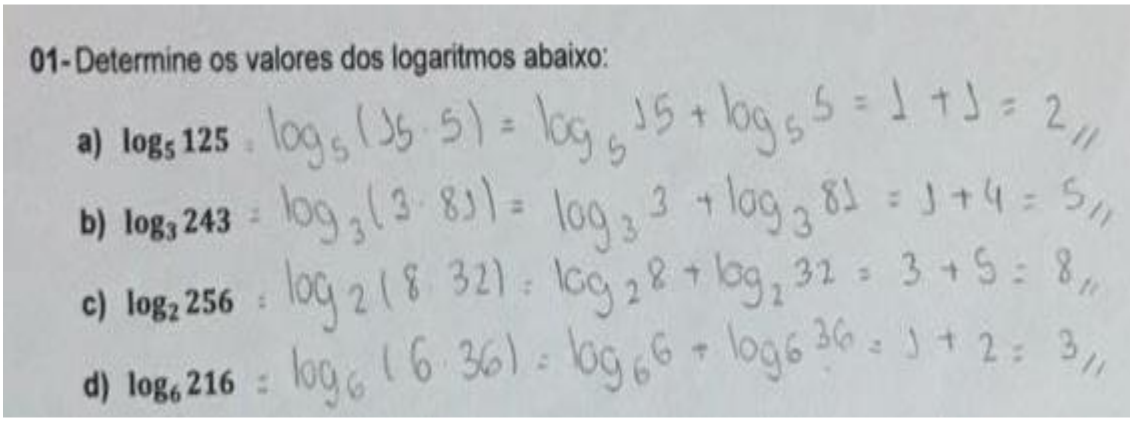
04- Uma colônia de bactérias dobra seu tamanho a cada 1 hora. Sabendo que na primeira hora a quantidade era de 1000 bactérias, determine:

a) a quantidade de bactérias passadas 5 primeiras horas.

b) a quantidade de bactérias passadas as 8 primeiras horas.

c) Após quantas horas a quantidade de bactérias atinge o valor de 2048000 bactérias?

Com este Teste pude observar, pelas respostas, que no **exercício 1** a maioria dos alunos utilizou a simples fatoração para chegar ao resultado final. Alguns utilizaram da propriedade da multiplicação para obter a resposta, talvez por ter sido o conteúdo mais recente para eles (Aula 2). A resolução abaixo é um exemplo


01- Determine os valores dos logaritmos abaixo:

a) $\log_5 125$ $= \log_5(15 \cdot 5) = \log_5 15 + \log_5 5 = 1 + 1 = 2$

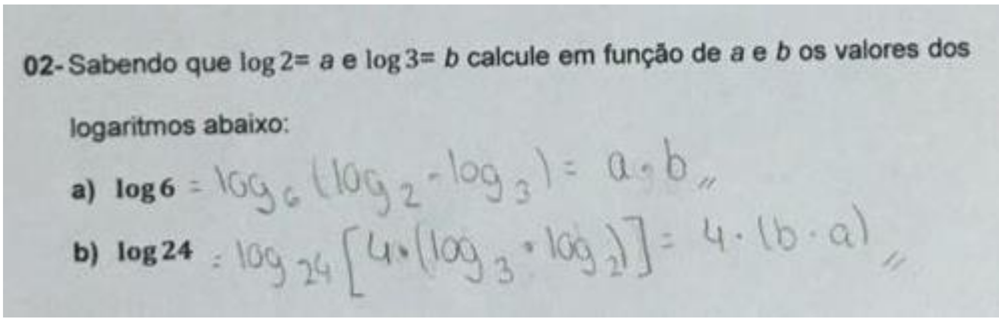
b) $\log_3 243$ $= \log_3(3 \cdot 81) = \log_3 3 + \log_3 81 = 1 + 4 = 5$

c) $\log_2 256$ $= \log_2(8 \cdot 32) = \log_2 8 + \log_2 32 = 3 + 5 = 8$

d) $\log_6 216$ $= \log_6(6 \cdot 36) = \log_6 6 + \log_6 36 = 1 + 2 = 3$

Figura 28: Resolução de um aluno na questão 1 do teste aplicado no experimento

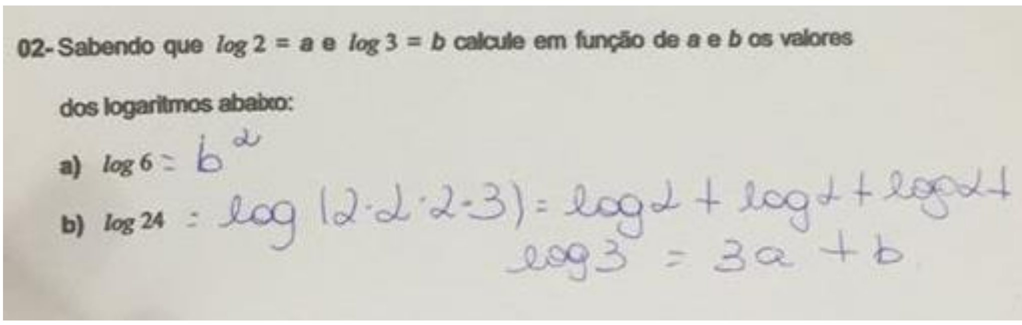
No **exercício 2**, alguns erros sobre a questão de propriedades, mas num todo os erros estavam mais caracterizados pela falta de atenção comum aos alunos. Por exemplo


02- Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ calcule em função de a e b os valores dos logaritmos abaixo:

a) $\log 6$ $= \log_6(\log_2 \cdot \log_3) = a \cdot b$

b) $\log 24$ $= \log_{24}[4 \cdot (\log_3 \cdot \log_2)] = 4 \cdot (b \cdot a)$

Figura 29: Resolução de um aluno na questão 2


02- Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ calcule em função de a e b os valores dos logaritmos abaixo:

a) $\log 6$ $= b^2$

b) $\log 24$ $= \log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3 = 3a + b$

Figura 30: Outra resolução na questão 2

No **exercício 3** o índice de erros foi bem pequeno e quando apareceram, foi mais por falta de atenção durante a fatoração dos números. Ficou claro neste exercício a busca dos alunos por igualar as bases das potências. Por exemplo,

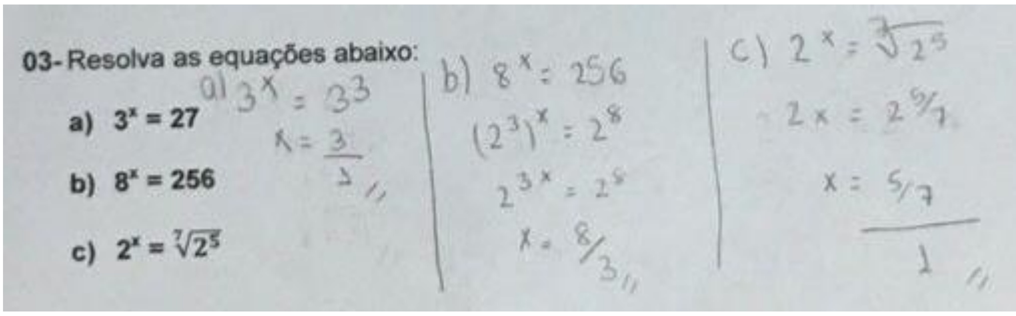


Figura 31: Resolução da questão 3 de um aluno

O **exercício 4** teve o de maior índice de erros da Lista, talvez pela dificuldade, já existente e muito comentada, de interpretação de enunciados. Um item curioso foi o **c)** onde boa parte da turma tentou resolver de forma linear, ou seja, usando regra de três. Por exemplo,

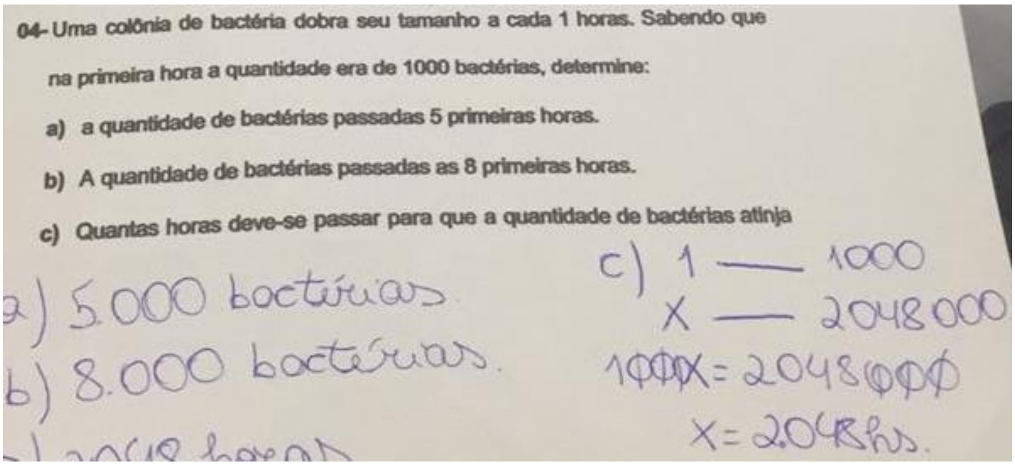


Figura 32 : Resolução da questão 4 de um aluno

Mas em uma análise ampla da Lista de exercício o rendimento da turma foi proveitoso, mostrando que podemos ter uma boa solução para o ensino de Logaritmo, se ensinarmos o conceito de Logaritmo no 9° ano do Ensino Fundamental II.

Queremos deixar claro para os leitores, que ensinar Logaritmo no 9° ano, não é acelerar o processo de aprendizado, na verdade é mostrar, nessa etapa de ensino, que a operação inversa da Potenciação não é somente a radiciação, mas também a Logaritmação.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho colocamos em prática um possível caminho que podemos tomar a fim de facilitar o aprendizado dos alunos no 1° ano do Ensino Médio do tema Logaritmo. Devemos mostrar aos alunos a importância real de um assunto que muitas das vezes é ensinado sem motivação pedagógica alguma, transmitindo a tarefa que o PCN tenta mudar a todo custo, que seria o aprendizado por simples repetição e decoreba de fórmulas e propriedades.

Mostramos neste trabalho a importância histórica que o Logaritmo teve na civilização da época, facilitando contas extremamente desgastantes e transformando complexas multiplicações e divisões em simples somas e subtrações. Mostrar aos alunos o quanto esse conteúdo é importante em diversos assuntos que eles nem imaginavam, por exemplo, a questão da meia-vida, a Escala Richter, pH de substâncias e outros assuntos do nosso cotidiano. Isso vai de encontro ao que pede o PCN

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (PCNs, 2000).

O objetivo central do trabalho é mostrar que o ensino de Logaritmo pode ser feito no 9° ano ainda que com ressalva a respeito do conjunto universo, porém explicando o conceito deste conteúdo, facilitando assim o trabalho do docente no 1° ano. Logaritmo pode ser ensinado como operação inversa da Potenciação, assim como a Radiciação; logo não tem motivo para não comentarmos sobre esse tópico no 9° ano.

Foi feito também um experimento com alunos do 9° ano, no qual lhes mostramos o conceito de Logaritmo utilizando um universo restrito, apresentando também algumas propriedades importantes. Tivemos um resultado bastante proveitoso e que com certeza irá ajudar ao docente do 1° ano no ensino de Logaritmo.

Neste trabalho também comentamos sobre um ponto que o docente precisa estar preparado para responder, que é a questão do Logaritmo de um Número Negativo. Escrevemos de forma simples sobre a história deste item e desenvolvemos a partir do conceito e conhecimento de números Complexos, as possibilidades (infinitas) para resposta do Logaritmo de um número negativo.

Fizemos também um levantamento de como está sendo abordado o assunto Logaritmos nos principais livros didáticos brasileiros, analisando entre uma série de fatores, a questão da aplicabilidade de logaritmo no cotidiano, que pode estimular o discente no aprendizado de um conteúdo.

Esperamos que estas notas sejam úteis para quem as ler e, no caso de professor da Educação Básica ou futuro professor, que também realize a experiência corrigindo as possíveis falhas nossas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. 1974. **História da Matemática.** Editora Edgard Blucher. Tradução Elza Gomide.

CARAÇA, Bento de Jesus. 1989. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Editora Livraria Sá da Costa. Lisboa- Portugal.

CARVALHO, Carlos Ronaldo Cardozo. 2012. **O Uso do Logaritmo no Campo dos Complexos.** Dissertação de Mestrado. UFAM

CHERVEL, André. **Histórias das disciplinas escolares:** reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria & Educação,n.2. Porto Alegre: Pannonica, 1990.

EULER, Leonhard. **Introduction à L´analyse infinitesimal**, Tome I. Traduite du latim au français por J.B. Labey 1796.

IEZZI, Gelson. 1998. **Fundamentos da Matemática Elementar, vol.2.** 7° ed. Atual Editora.

LIMA, Elon Lages. 1991. **Logaritmos**. Rio de janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

LIMA, Elon Lages. 2009. **Curso de Análise Vol.1** Projeto Euclides. Editora IMPA.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PCN- BRASIL- MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio- parte IIICiências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias Brasília:MEC, 2000.

ROQUE, Tatiana. 2013. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Editora Zahar.

ANEXO 1: Tabela de Logaritmos na base decimal

TABELA DE MANTISSAS										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

TABELA DE MANTISSAS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996