

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL (PROFMAT)

EXPLORANDO NOÇÕES ELEMENTARES DO
CÁLCULO EM SALA DE AULA, A PARTIR DE
SUAS APLICAÇÕES E SOB UMA PERSPECTIVA
HISTÓRICA.

por

GUSTAVO DE SOUZA BREVES LIMA

Orientador: Nei Carlos Dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

2017

**Explorando Noções Elementares do Cálculo em Sala de Aula, a
Partir de Suas Aplicações e Sob Uma Perspectiva Histórica.**

por

Gustavo de Souza Breves Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de
Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional
em Matemática.

Orientador: Professor Nei Carlos Dos Santos Rocha.

CIP - Catalogação na Publicação

L732e Lima, Gustavo de Souza Breves
Explorando Noções Elementares do Cálculo em Sala
de Aula, a Partir de Suas Aplicações e Sob Uma
Perspectiva Histórica / Gustavo de Souza Breves
Lima. -- Rio de Janeiro, 2017.
176 f.

Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2017.

1. Cálculo. 2. Limite . 3. Derivada. 4.
Integral. 5. Ensino Médio. I. Rocha, Nei Carlos dos
Santos, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**EXPLORANDO NOÇÕES ELEMENTARES DO CÁLCULO EM SALA DE
AULA, A PARTIR DE SUAS APLICAÇÕES E SOB UMA PERSPECTIVA
HISTÓRICA.**

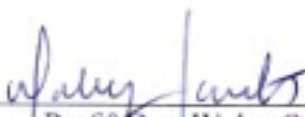
Gustavo de Souza Breves Lima

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:



Prof.º Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
(Orientador/ Presidente da Banca Examinadora)



Prof.ª Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática- UFRJ



Prof.ª Dra. Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas
Instituto de Matemática – UFRJ



Prof.º Dr. Wanderley Moura Rezende
Instituto de Matemática – UFF

Rio de Janeiro
Março de 2017

Dedicatória

Aos meus pais e demais familiares.

Agradecimentos

Um agradecimento muito mais que especial, ao meu professor e orientador Nei Rocha, pelo incentivo e dedicação durante todas nossas reuniões. Agradeço também a meus pais e minha família pelo incentivo, a meus colegas do PROFMAT e professores do IM-UFRJ que contribuíram no meu crescimento e amadurecimento durante todo o curso. E por fim à minha amável noiva que sempre me apoiou e sempre acreditou na minha capacidade.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal inserir, no Ensino Médio, as primeiras ideias do Cálculo Diferencial e Integral de forma construtiva e intuitiva, concernentes aos conceitos de limites de função, limites de sequências, de taxa de variação média, variação instantânea e o cálculo de áreas sob o gráfico de uma curva. Para facilitar o entendimento da ideia de integral foi usado o software Geogebra como recurso computacional. Dessa forma, o estudante pode ampliar sua visão na aproximação do cálculo de áreas, trazendo diversos benefícios que não seriam possíveis usando somente ferramentas estáticas. O desenvolvimento desse material se inicia com a realização de uma pesquisa histórica sintética sobre a evolução do estudo de limite, derivada e integral no século XVII e durante os anos iniciais do estudo do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil e seus desdobramentos até os dias atuais. As atividades aqui propostas destinam-se a alunos do Ensino Médio e foram aplicadas numa turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Através das observações das aulas ministradas e análise das atividades, entendemos que noções introdutórias do Cálculo podem ser plenamente discutidas e aplicadas aos estudantes no Ensino Médio, reduzindo assim o impacto sofrido pelos alunos num primeiro contato com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos universitários.

Palavras Chaves: Cálculo, Limite, Derivada, Integral, Ensino Médio.

Abstract

This work aims to discuss the treatment of the first intuitive ideas of the Differential and Integral Calculus in High School. Especially the ideas of limits of functions and sequences, mean variation rate, instantaneous variation and the calculation of the area under a curve. In order to enhance the student's understanding of integrals, we made use of the software Geogebra as a computer resource. By doing that, the students can broaden their perception on the approximation of area calculation, which brings more benefits than those brought by static tools. Our approach of the theme starts with a historical research on the evolution of the study of limits, derivatives and integrals in the 17th Century, as well as in the first years of their treatment in Brazil and their development up to the present days. The activities proposed here were thought to High School students and were applied to a second year class in a state High School. Through the observation and analysis of those activities, we were convinced that the treatment of the introductory notions of Calculus is not only feasible but helpful to reduce the impact the students suffer when in contact with Calculus at the University for the first time.

Keywords: Calculus, Limit, Derivative, Integrals, High school.

Conteúdo

Introdução	1
1 O Cálculo no Século XVII	7
1.1 O Princípio de Cavalieri (1598-1647)	8
1.2 A geometria Analítica: René Descartes (1596-1650)	16
1.3 O príncipe dos amadores: Pierre de Fermat (1601-1665)	22
1.4 A contribuição inglesa: John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677)	28
1.5 Isaac Newton (1643-1727)	34
1.6 Gottfrid Leibniz (1646-1716)	40
2 O Ensino do Cálculo no Brasil	48
2.1 Bases do ensino do Cálculo: As obras de Lacroix	52
2.2 O ensino na Academia Real Militar e as primeiras Escolas Politécnicas .	59
2.3 O rigor da Análise Matemática nos anos iniciais da República	67
2.4 A criação de uma disciplina inicial de Cálculo	74
3 Noções Elementares do Cálculo no Ensino Médio	81
3.1 O infinito e os infinitesimais	87
3.2 Taxa de variação: O problema da variabilidade	111

3.3	Uma ideia intuitiva por aproximação de áreas	133
3.4	Análise de resultados	144
	Conclusão	154
	Bibliografia	158
	Anexos	166

Lista de Figuras

Figura 1.1: Cavalieri 1	08
Figura 1.2: Cavalieri 2	09
Figura 1.3: Sólidos cortados por um plano	11
Figura 1.4: Triângulo	12
Figura 1.5: Semelhança de Triângulos	13
Figura 1.6: Régua e compasso	18
Figura 1.7: Raiz quadrada	19
Figura 1.8: Tangente de Descartes	20
Figura 1.9: Tangente de Fermat	26
Figura 1.10: Triângulo dividido em infinitos paralelogramos	28
Figura 1.11: Triângulo de Barrow	32
Figura 1.12: Quadratura	36
Figura 1.13: Triângulo Harmônico	42
Figura 1.14: Quadratura por Leibniz	43
Figura 1.15: Triângulo Característico	44
Figura 1.16: Diferenciais por Leibniz	46
Figura 2.1: Obras de Lacroix	53
Figura 3.1: Sequência 1	95

Figura 3.2: Sequência 2	96
Figura 3.3: Limite	99
Figura 3.4: Análise do limite	100
Figura 3.5: Função 1	101
Figura 3.6: Função 2	102
Figura 3.7: Função 3	103
Figura 3.8: Distância percorrida pela flecha	107
Figura 3.9: Divisões do quadrado	109
Figura 3.10: Somas parciais	110
Figura 3.11: Trajetória	116
Figura 3.12: Taxa de variação média	117
Figura 3.13: Taxa de variação	117
Figura 3.14: Tangente 1	118
Figura 3.15: Tangente 2	119
Figura 3.16: Reta secante	122
Figura 3.17: Variação instantânea	122
Figura 3.18: Derivada em relação a função constante	124
Figura 3.19: Funções	129
Figura 3.20: Função $f(x) = x^3$	130
Figura 3.21: Variação	130
Figura 3.22: Derivada não existe(1)	131
Figura 3.23: Derivada não existe(2)	132
Figura 3.24: Reservatórios	135
Figura 3.25: Representação gráfica	135

Figura 3.26: Evolução gráfica	136
Figura 3.27: Áreas	138
Figura 3.28: Área sob o gráfico num intervalo dado	138
Figura 3.29: Interface do Geogebra	140
Figura 3.30: Soma de Reimann superior	141
Figura 3.31: Soma de Reimann inferior	142
Figura 3.32: Soma por excesso e por falta	142
Figura 3.33: Aproximação maior da área procurada	143
Figura 3.34: Subdivisão em n faixas	144
Figura 3.35: Subintervalos	145
Figura 3.36: Distância percorrida	145
Figura 3.37: Velocidade do carro freando	146
Figura 3.38: Aproximação por falta e excesso	147
Figura 3.39: Atividade 1.1	151
Figura 3.40: Atividade 1.2	152
Figura 3.41: Atividade 1.3	153
Figura 3.42: Atividade 1.4	154
Figura 3.43: Atividade 2.1	155
Figura 3.44: Atividade 2.2	156
Figura 3.45: Atividade 2.3	157
Figura 3.46: Atividade 2.4	158
Figura 3.47: Atividade 3.1	158
Figura 3.48: Atividade 3.2	159
Figura 3.49: Atividade 3.3	160

Lista de Tabelas

Tabela 1: Aproximação pela esquerda ($x < 2$)	98
Tabela 2: Aproximação pela direita ($x > 2$)	98
Tabela 3: Aproximação pela esquerda ($x < 1$)	99
Tabela 4: Aproximação pela direita ($x > 2$)	99
Tabela 5: Aproximação pela esquerda ($x < 1$)	101
Tabela 6: Aproximação pela direita ($x > 1$)	101
Tabela 7: Aproximação pela esquerda ($x < 1$)	102
Tabela 8: Aproximação pela direita ($x > 1$)	102
Tabela 9: Valores de x crescendo ilimitadamente	103
Tabela 10: Valores de x decrescendo ilimitadamente	103
Tabela 11: Aproximação pela direita ($x > 3$)	111
Tabela 12: Aproximação pela esquerda ($x < 3$)	112
Tabela 13: Valores de x decrescendo.	112
Tabela 14: Valores de x crescendo	112
Tabela 15: Velocidade Média.	120
Tabela 16: Taxa de Variação	131
Tabela 17: Velocidade Média de Pedro	136
Tabela 18: Cinemática	145

Tabela 19: Aproximação por falta.	147
Tabela 20: Aproximação por excesso	147
Tabela 21: Área dos retângulos	148

Introdução

Pretendemos, no presente trabalho, analisar e discorrer sobre alguns conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Durante minha formação no Ensino Superior sempre tive interesse pelas disciplinas de Cálculo, suscitado pelos excelentes professores que as ministraram. Contudo, na época, estava mais interessado em aspectos históricos ligados a esses conhecimentos. No decorrer do Mestrado Profissionalizante em Matemática (Profmat), cursando a disciplina de Cálculo, percebi que muitos dos meus colegas professores apresentavam dificuldades na compreensão do conteúdo, algo similar ao que presenciei na época da graduação do curso de Licenciatura em Matemática junto aos meus colegas de classe. A partir dessa reflexão me ocorreu a ideia de buscar, tanto por meio de fatos históricos do ensino do Cálculo, quanto pela análise dos obstáculos epistemológicos dessa disciplina, como mitigar as dificuldades encontradas pelos alunos e pelos próprios professores que frequentavam o curso comigo. Eis, portanto, a motivação norteadora dessa dissertação.

O presente trabalho tem a seguinte proposta e estrutura:

Inicialmente, procuraremos evidenciar as motivações históricas que contribuíram para a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, trazendo assim uma breve retrospectiva de acontecimentos e teorias matemáticas de diversos pesquisadores da época.

Voltamo-nos também para os fatos relacionados aos estudos do Cálculo no Brasil,

desde o momento em que essa disciplina foi introduzida no currículo brasileiro até os dias atuais, e pontuamos alguns dos principais problemas que desencadearam o estudo dessa teoria.

Vamos observar com a leitura do início do trabalho que o século XVII trouxe grandes avanços para a matemática. Sendo que a maior realização matemática do período foi a invenção do Cálculo Diferencial e Integral, ou Cálculo Infinitesimal, na segunda metade do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de maneira independente.

Os primeiros problemas da história do Cálculo estavam relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Como veremos posteriormente, o desenvolvimento do Cálculo se deu em ordem inversa àquela que se costuma estudar, já que os estudos envolvendo o Cálculo Integral antecederam aos do Cálculo Diferencial. Problemas como o cálculo de certas áreas, volumes e comprimentos, ou seja a ideia de integração, estiveram relacionados a processos somatórios. Já a diferenciação, criada mais tarde, resultou de problemas de tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos.

Trataremos também, no primeiro capítulo, das teorias e dos trabalhos mais importantes de diversos matemáticos que contribuíram para o surgimento do Cálculo no século XVII, desde as ideias de Arquimedes (A.C.287-A. C.212) e Eudoxo (A.C.408-A. C.355) no seu método de exaustão, passando por Cavalieri (1598-1647) e seu método dos indivisíveis, seguido pelos trabalhos de René Descartes (1596-1650) em sua Geometria Analítica e Pierre de Fermat (1601-1665) com um método para obter máximos e mínimos de funções e uma maneira particular para o traçado de tangentes a curvas. Posteriormente, na Inglaterra, nos meados do século XVII, veremos surgir o trabalho de dois matemáticos predecessores imediatos aos trabalhos de Isaac Newton: John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Finalmente encerraremos nossa análise histórica europeia com os

trabalhos dos grandes criadores do Cálculo: Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716).

Dando sequência à dissertação faremos um breve tratamento histórico sobre os fatos relacionados aos estudos do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil, desde o momento em que essa disciplina foi introduzida no currículo brasileiro até os dias atuais. No curso superior de Licenciatura no Brasil pouco se abordam tópicos referentes à história da matemática do nosso país. Com essa breve exposição histórica do tratamento do Cálculo em nosso país, esperamos contribuir para uma reflexão sobre estratégias futuras para o aprimoramento do ensino e aprendizagem dessa disciplina fundamental da Ciência.

Finalmente, nos concentraremos a estudar de que forma seria possível aproximar o aluno de Ensino Médio, por meio do tratamento ainda incipiente das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Nossa intenção nesse capítulo é introduzir, de forma intuitiva e operacional, as noções de limites, derivadas e integrais, sem, no entanto, dar ênfase à formalização desses objetos, de seara mais específica do Ensino Superior.

Muitos professores, principalmente os de Ensino Superior, concordam que muitas dificuldades do aluno no estudo do Cálculo na faculdade seriam minimizadas, se ideias subjacentes dessa disciplina fossem trabalhadas no Ensino Médio. Imbuídos de uma visão epistemológica, iremos também inicialmente problematizar o porquê do não envolvimento dos conceitos do Cálculo no tópicos matemáticos do Ensino Médio, procurando responder a perguntas do tipo: É possível o estudo do Cálculo no Ensino Médio? Os conteúdos referentes a limites, derivadas e integrais são assuntos relevantes a um aluno do Ensino Médio? Seriam esses tópicos impróprios e de difícil compreensão para os alunos desse segmento da educação, devendo então ficarem restritos ao Ensino Superior? Possuem os alunos maturidade matemática para serem apresentados a esses conceitos? Como os

livros didáticos tratam o assunto? Quais as vantagens e as desvantagens, se é que existem, de ensinar o Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio?

No meu entender, é possível o estudo do Cálculo no Ensino Médio, não ficando esses tópicos restritos somente a alunos de cursos superiores ou de cursos militares. De fato entendo que os alunos do Ensino Médio não possuem maturidade para entenderem o Cálculo como é visto nos cursos superiores, mas acredito na possibilidade de integração dos seus conceitos com os tópicos estudados no segundo grau.

Como iremos abordar no decorrer da dissertação, alguns livros já possuem essa integralização com os conteúdos do Ensino Médio, porém vejo essa integralização de maneira um pouco superficial. Em muitos livros, somente ao final de alguns capítulos são feitas essas associações.

Vendo o mundo globalizado que vivemos hoje, enxergo muitas vantagens no ensino do Cálculo no Ensino Médio, desde que não sejam dados de maneira similiar ao Ensino Superior, o que acarretaria no meu ver um afugentamento ainda maior por parte dos alunos do Ensino Básico a disciplina matemática.

Embora não pretendamos dar uma resposta definitiva a essas perguntas, estamos convencidos de que as ideias presentes no estudo do Cálculo não são de difícil assimilação. Ao contrário, são passíveis de serem compreendidas pelos estudantes da Escola Básica, desde que estejam inseridas em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade.

A abordagem proposta aqui é refletir sobre conceitos que já se encontram no currículo do Ensino Médio e aliar a esse ensino as concepções primeiras do Cálculo. Vários conteúdos existentes se prestam a isso, como o estudo de funções do primeiro e segundo grau, de sequências numéricas, dando ênfase nas progressões aritmética e geométrica e também no cálculo de áreas de figuras geométricas usuais, de forma a trabalhar uma

intuição para o cálculo de áreas de figuras mais complicadas, a serem trabalhadas inicialmente com o uso do software GeoGebra, já que este permite criar objetos manipuláveis, potencializando, assim, os processos de aprendizado do conteúdo, ao contrário de ilustrações feitas no quadro negro.

Inicialmente foi proposta uma análise da ideia dos conceitos de infinito e infinitésimo, para, em seguida, a partir da exploração de diversos exemplos, analisarmos o comportamento de uma função de acordo com as possíveis variações em valores de seu domínio, introduzindo, assim, a noção intuitiva de limite. No que diz respeito ao conteúdo de derivada, trabalhamos o conhecimento de velocidade média e velocidade instântanea, aliando-o ao estudo de reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado ponto, por meio da análise e interpretação do coeficiente angular dessa reta. Para o Cálculo Integral foi trazida a proposta da área abaixo do gráfico de uma função positiva, limitada pelo eixo das abscissas e por retas verticais com o auxílio do software de geometria dinâmica.

Dentro desses assuntos, apresentamos algumas atividades separadas por itens, que foram elaboradas visando à construção de forma intuitiva de conceitos de áreas do Cálculo e posteriormente aplicadas a um grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do Estado do Rio de Janeiro. As atividades propostas objetivaram a construção do conhecimento por parte do aluno. Antes das atividade serem aplicadas, foram feitas análises dos resultados esperados com essas aplicações e do que se esperava de como os alunos procederiam nas atividades propostas. Nossa proposta, nesse capítulo, é essencialmente pôr em prática as reflexões dos capítulos anteriores, por meio atividades concernentes tanto ao conteúdo de diferenciação e de integração, esperando que, após essas atividades, o aluno tenha um ganho maior de bagagem matemática, de maneira

a melhor apreciar a importância dessa bela ciência como ferramenta para resolução de problemas os mais diversos de seus possíveis estudos futuros ou na sua vida profissional.

Capítulo 1

O Cálculo no Século XVII

Nas seções a seguir trataremos das descobertas de diversos matemáticos que contribuíram de alguma forma para a construção do pensamento do Cálculo Infinitesimal e também dos responsáveis de forma mais direta para a criação e formalização de toda teoria.

Como sabemos, o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal que conhecemos hoje se deve à motivação de vários problemas na época relacionados a cálculo de áreas de figuras planas, volumes de sólidos, traçados de tangentes a curvas e também se destaca o estudo de máximos e mínimos de funções.

Na Grécia antiga, a pesquisa sobre o cálculo de áreas de figuras planas já era estudada por filósofos matemáticos como Eudoxo (A.C.408-A.C.355) e Arquimedes (A.C.287-A.C.212). Suas teorias baseavam-se na subdivisão de uma grandeza infinitamente, conhecida como Método de Exaustão, sendo desenvolvido de maneira mais significativa por Arquimedes chegando a postular muitos resultados próximos ou até mesmo equivalentes à teoria de muitas integrais de hoje.

1.1 O Princípio de Cavalieri (1598-1647)

Nos primeiros anos do século XVII, manuscritos traduzidos dos trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa fazendo com que matemáticos daquele continente estudassem tais teorias. Um dos matemáticos europeus que contribuíram para o estudo da teoria de cálculo de áreas e de volumes foi Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Influenciado pelos trabalhos, cujas raízes remontam a Arquimedes, ele utilizou seu método dos “indivisíveis”, publicado no seu tratado *Geometria Indivisibilibus* em 1635.

Nascido na cidade de Milão na Itália, Francesco Cavalieri (como fora batizado) passou sua infância e iniciou seus estudos em sua cidade natal. Em 1615 participou da ordem religiosa dos jesuítas de Milão assumindo o nome de Bonaventura Cavalieri. No ano seguinte esteve na cidade de Pisa, onde estudou filosofia e teologia, conhecendo um padre beneditino que o introduziu no estudo da Geometria. Mais tarde esse mesmo padre será o responsável pela ligação entre Cavalieri e o cientista Galileu Galilei (1564-1642).

Cavalieri permaneceu em Pisa por mais quatro anos, se tornando um estudioso de matemática orientado por Galilei. Em 1620 retorna à cidade de Milão e assume o posto de diácono do cardeal. Entre os anos de 1620 a 1623 surgem as primeiras ideias do que foi conhecido por Método dos Indivisíveis, tendo Galileu como seu principal mentor, que o ajudou e o encorajou nessa nova teoria. Em sua obra intitulada por *Geometria Indivibilibus Continuorum Nova* (Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos), publicada inicialmente em 1635, Cavalieri desenvolve as ideias de Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei sobre quantidades infinitamente pequenas, sendo esses físicos-matemáticos os primeiros a trabalharem nessa teoria.

Na sua obra, Bonaventura Cavalieri tinha como concepção dos indivisíveis a ideia que um plano era constituído de um número infinito de retas paralelas e um sólido deveria ser constituído de um número infinito de planos paralelos. Tendo isso como base, Bonaventura Cavalieri afirma que “se duas figuras planas podem ser reduzidas entre linhas retas paralelas de tal forma que tenham secções verticais idênticas, então as figuras têm a mesma área”.

A ilustração a seguir exemplifica duas figuras planas entre retas paralelas que correspondem à teoria de Cavalieri.

Se as retas r e s são paralelas e se para toda a reta paralela a r os segmentos AA' , CC' , EE' e GG' são iguais aos correspondentes BB' , DD' , FF' e $HH' + II'$, então as duas figuras possuem a mesma área.

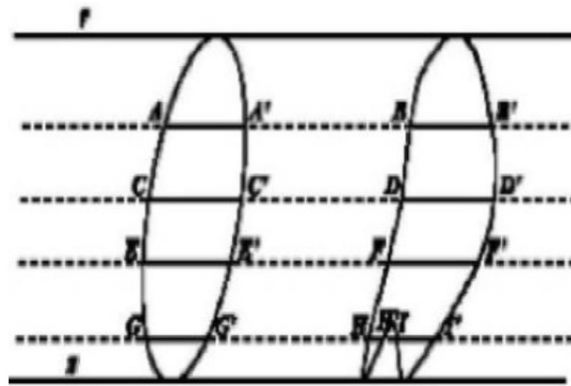


Figura 1.1. Cavalieri 1 (Fonte: Curso Foco, 1998).

Usando a mesma teoria para o cálculo de volumes, Cavalieri descreve que se considerarmos dois sólidos que possuem a mesma altura e seccionarmos estes a uma mesma altura, se as secções possuírem sempre a mesma área, concluímos que o volume destes sólidos são iguais.

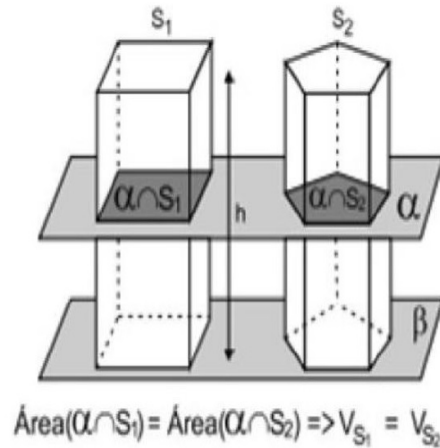


Figura 1.2. Cavalieri 2 (Fonte: O Baricentro da Mente).

Em Eves (2008), podemos observar que a Teoria dos Indivisíveis de Cavalieri se resume a dois pilares:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas é paralela a uma reta dada e determina nas porções segmentos de reta cuja a razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles é paralelo a um plano dado e determina nos sólidos secções cuja a razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

No intuito de descrever melhor como Cavalieri trabalhava em seu método vamos ilustrar o Princípio de Cavalieri em dois casos: o primeiro no intuito de achar a área de uma elipse de semi eixos a e b e em seguida o volume de uma esfera de raio r .

Considere a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

E a circunferência:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

,

onde a é o raio da circunferência, referida no mesmo sistema de coordenadas retangulares.

Agora reescreveremos a equação da elipse em função de y .

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Após isso faremos o mesmo procedimento com a equação da circunferência.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Vemos então que a razão entre as duas coordenadas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é $\frac{b}{a}$.

Logo pelo Princípio de Cavalieri concluímos que:

$$\text{Área da elipse} = \frac{b}{a} \times \text{Área do círculo}$$

ou

$$\text{Área da elipse} = \frac{b}{a} \times (\pi a^2) = \pi ab.$$

Agora iremos determinar o volume de uma esfera de raio r usando o princípio de Cavalieri. Considere uma esfera de raio r e ao seu lado um sólido geométrico gerado a partir de um cilindro equilátero onde subtraímos dois cones opostos pelo vértice cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Damos o nome de Anticlepsidra a esse sólido.

Coloca-se a esfera e a anticilindro num mesmo plano α . Secciona-se ambos os sólidos com um plano β paralelo ao plano α a uma altura h dos vértices dos cones.

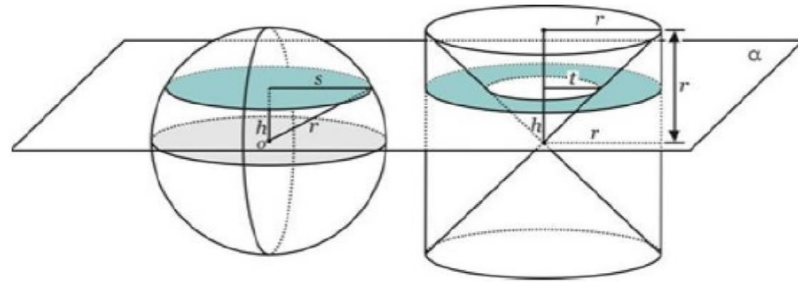


Figura 1.3. Sólidos cortados por um plano (Fonte: O Baricentro da Mente)

Esse plano β secciona a esfera gerando um círculo de raio s e uma coroa circular na anticilindro.

Vamos demonstrar que ambas as seções tem áreas iguais a $\pi(r^2 - h^2)$. Da esfera, podemos destacar o triângulo retângulo ABC, utilizar o Teorema de Pitágoras para escrever o raio s em função de r e h .

$$s^2 = r^2 - h^2$$

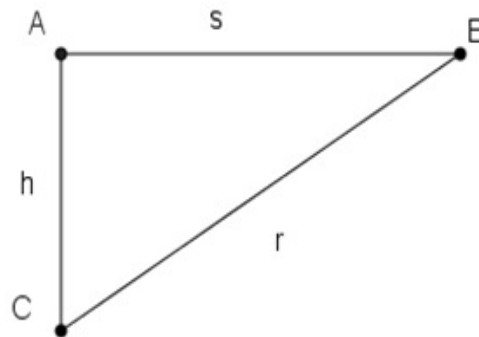


Figura 1.4. Triângulo 1 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

A área da secção circular será dada por:

$$A = \pi s^2$$

Substituindo, obtemos:

$$A = \pi(r^2 - h^2).$$

Falta mostrarmos que a área da coroa circular é igual à área da secção circular. Da anticlipsisidra destacamos um triângulo retângulo $A'B'C'$.

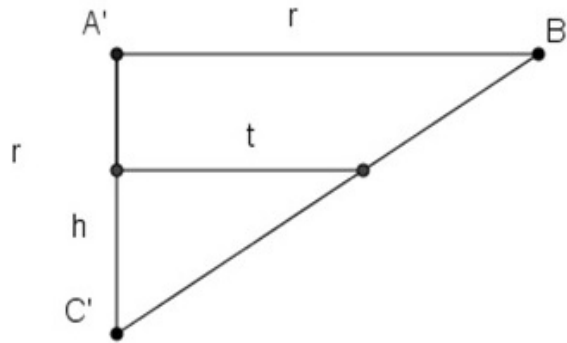


Figura 1.5: Semelhança de Triângulos (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Pelo caso de semelhança de triângulos retângulos (ângulo agudo comum) temos que:

$$\frac{r}{h} = \frac{r}{t}$$

Logo,

$$t = h$$

A área da coroa será dada pela diferença entre a área do círculo de raio r e o círculo de raio t :

$$A = \pi r^2 - \pi t^2$$

Substituindo, obtemos:

$$A = \pi(r^2 - h^2)$$

Com isso provamos que as áreas das secções geradas pelo plano β nos sólidos são iguais. Segue-se, então, pelo Princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm volumes iguais. Logo o volume V da esfera é igual ao volume V da anticlépsidra:

Volume da esfera = Volume do cilindro $- 2 \times$ Volume do cone,

$$\text{Volume da esfera} = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r$$

Logo,

$$\text{Volume de esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Vale ressaltar que Cavalieri tratava o conceito de indivisíveis de maneira puramente geométrica em seus trabalhos. O Método de Cavalieri foi considerado na época não só como um método útil na busca de novos resultados, como também válido para demonstrações de alguns teoremas.

Segundo Eves (2008), compreender o que Cavalieri entendia por indivisível é demasiadamente difícil e complicado. Tudo indica, segundo ele, que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Com isso, uma porção plana seria formada de uma infinidade de cordas paralelas e um sólido seria formado de uma infinidade de secções planas paralelas.

Cavalieri e seu método foram duramente criticados por não apresentarem um rigor matemático exigido por estudiosos da época, o que o motivou, anos mais tarde em

1647, a publicar sua obra intitulada *Exercitationes Geometricae Sex* (Seis Exercícios Geométricos). Nela, Cavalieri preocupou-se em dar mais clareza e rigor a suas definições e teorias, o que a tornou uma das obras mais importantes para estudos matemáticos da época.

A publicação das obras de Cavalieri foram referência para matemáticos de toda Europa em seus estudos. Entre as quais podemos citar: *Directorium Generale, Uranometricum* (Bolonha, 1632) , *Centuria di varri problemi* (Bolonha, 1639), *Nuova pratica astrologica* (Bolonha, 1639), *Trigonometria plana et sphaerica, linearis et logarithmica* (Bolonha, 1643).

Os princípios de Cavalieri contribuíram e muito para o cálculo de áreas e volumes no século XVII. Segundo Eves (2008) “os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o Cálculo Integral moderno”. Muitos outros matemáticos usaram os métodos dos indivisíveis no curso de seus trabalhos e chegaram a resultados equivalentes ao Cálculo moderno.

1.2 A geometria Analítica: René Descartes (1596-1650)

Além dos problemas relacionados com o cálculo de áreas e volumes, isto é relacionados com que hoje estudamos na teoria do Cálculo Integral, outros problemas ajudaram a desenvolver o estudo do Cálculo, como o traçado de tangentes a curvas e o estudo de máximo e mínimo de funções que correspondem ao que e hoje estudamos no Cálculo Diferencial.

A ideia de traçar tangentes a curvas já tinha sido realizada pelos gregos, porém eles não possuíam um conhecimento preciso sobre tal assunto, além de conhecerem poucas curvas. A pesquisa nesse campo teve mais desenvolvimento nos anos iniciais do século XVII, com os trabalhos de René Descartes(1596-1650), um dos responsáveis por esses avanços.

O século XVII foi sem dúvida um dos mais importantes para a Matemática. A Europa do século XVII encontrava-se em uma nova configuração, quando várias nações tinham o interesse em ampliar seus poderes no continente por meio da conquista de novos mercados e territórios. Nesse período amadureceram as propostas culturais surgidas durante o Renascimento na França no século XV. Logo o eixo das novas descobertas e do conhecimento matemático, que outrora se encontrava na Itália, deslocou-se para a França. Com isso, a França tornou-se o centro do desenvolvimento científico e cultural da época.

Na França estava surgindo uma transformação no conceito de como a Geometria poderia ser estudada. Mais precisamente surgia a ideia da representação de figuras

geométricas, tais como pontos, retas, círculos, por números e equações, de modo que os problemas geométricos pudessem ser resolvidos com o auxílio do Cálculo, e da mesma forma, também pudessem traduzir operações algébricas em linguagem geométrica.

René Descartes(1596-1650) foi um filósofo, físico e matemático Francês nascido em 1596 na cidade de La Haye em Touraine na França. Possuidor de uma personalidade marcante e um senso de reflexão aguçado, não aceitava sem pensar e refletir sobre os ensinamentos recebidos, sempre indagando a origem das ideias e argumentos.

Com isso enumerou quatro regras, com o objetivo de sempre buscar a simplicidade em seus métodos.

1. Não aceitar nada como verdadeiro a não ser que lhe fosse apresentadas provas e clareza.
2. Dividir cada uma das dificuldades nas suas partes mais simples, de modo a facilitar a sua resposta.
3. Conduzir o raciocínio por ordem, começando pelo mais simples e acabando no mais complicado.
4. Fazer enumerações tão completas e gerais a ponto de não ficar nada por dizer.

Em 1628 após um discurso em Paris sobre sua filosofia, Descartes conhece o Cardeal Pierre de Bérulle (1575-1629), que muito impressionado com seu discurso, o aconselhou que se dedicasse a desenvolver o seu próprio sistema filosófico. Assim, as primeiras obras de Descartes foram dedicadas ao campo da Filosofia, dentre as quais podemos citar: *Regulae ad directionem ingenii* (Regras para a Direção do Espírito), publicado somente após sua morte e também dois tratados: *Traité de l'Homme* (Tratado do Homem) e *Traité de la Lumière* (Tratado da Luz).

Em 1637, voltado ao campo da Matemática e da Física, publica o *Discours de la Méthode* (Discurso do Método), acompanhado de três apêndices intitulados *La Dioptrique*, *Les Météores* e *Géométrie*. Descartes dedica o apêndice *Dioptrique* à Óptica, e lança as três leis fundamentais da reflexão e da refração da luz. No apêndice *Les Météores*, dedicado ao estudo de meteoros, explicou vários fenômenos atmosféricos.

No apêndice *Géométrie*, dedicado à Geometria, Descartes afirma que os problemas geométricos devem ser traduzidos em linguagem algébrica para que se possa penetrar nas relações que existem entre os objetos do universo. A obra fora dividida em três livros, sendo os dois primeiros dedicados à Geometria e o último dedicado a uma análise da Álgebra.

O objetivo de Descartes era utilizar na Geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética. Na abertura do primeiro livro da Geometria, Descartes refere-se a construções simples com régua e compasso. No exemplo abaixo, tomando-se AB como unidade, o segmento BE é o produto dos segmentos BD e BC obtidos ligando-se os pontos A e C e desenhando-se DE paralela a AC .

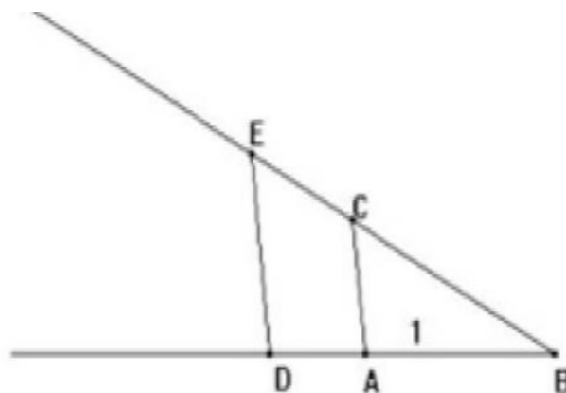


Figura 1.6: Régua e Compasso (Fonte: Roque, 2007).

Uma consequência deste procedimento é que o produto dos segmentos BD e BC pode ser visto como um segmento BE , o que não podia acontecer na Geometria Euclidiana,

onde o produto de dois segmentos devia ser visto, necessariamente, como um retângulo.

Para extrair a raiz quadrada, ele posiciona em linha reta o segmento unitário FG e o segmento GH de medida K . Determina a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento FH . Em seguida, constrói o triângulo retângulo, levantando uma altura a partir do ponto G até I , ponto que está sobre a circunferência do círculo construído, e usando a relação

$$GI^2 = GH \times FG = GH \times 1 = GH,$$

obtém a raiz quadrada.

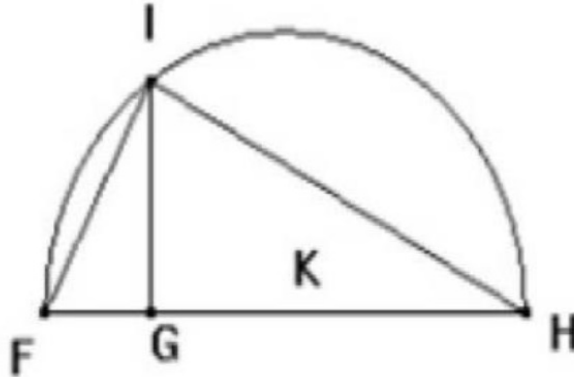


Figura 1.7: Raiz Quadrada (Fonte: Roque, 2007).

Descartes interpreta o símbolo a^2 como o comprimento de um segmento e não como área, como era tradição naquela época, e assim faz para as outras potências a^3 , a^4 , a^5 , etc.

Escreve $a + b$ para a soma de dois segmentos de comprimentos a e b , $a - b$ para a diferença, ab para o produto, a/b para o quociente, $\sqrt{a^2 + b^2}$ para a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ e $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ para a raiz cúbica de $a^3 - b^3 + ab^2$ onde o C significa cúbica.

Outras novidades da obra geométrica de Descartes foram a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas, ou seja, com duas quantidades

desconhecidas (chamadas mais tarde de variáveis). E também a introdução de uma nova linguagem para análise algébrica, empregando as letras do começo do alfabeto para denotar quantidades conhecidas, e aquelas do final do alfabeto para denotar quantidades desconhecidas. Vale ressaltar que o sistema empregado por Descartes não era necessariamente um sistema de eixos ortogonais, pois para cada problema, devia ser escolhido o sistema mais conveniente.

Descartes também se dedicou ao estudo de retas tangentes a curvas, onde aplicou seu método primeiramente a elipses, afirmando que a reta tangente a uma curva era a posição limite da reta secante, ideia essa seguida por matemáticos no século XVIII.

Vamos descrever uma das formas encontradas por Descartes para traçar tangentes a curvas. Considere a curva C , descrita por $f(x, y) = 0$, e M um ponto qualquer sobre C onde pretendemos traçar a tangente. Consideremos, como curva auxiliar, a circunferência de centro N e raio NM que corta C no ponto M_1 conforme indicado, onde $AP = x$, $PM = y$, $MN = s$, $AN = v$.

Esse método consiste basicamente em encontrar a posição de N quando o segmento MN é normal a C no ponto M . Se a posição de N for aproximada, então a circunferência com mesmo centro cortará num outro ponto M_1 , próximo a M , que Descartes obriga a coincidir com M usando um processo posteriormente denominado por método dos coeficientes indeterminados.

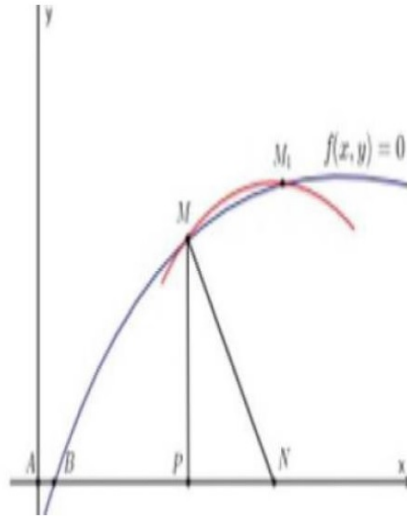


Figura 1.8: Tangente de Descartes (Fonte: Figueiredo, Aguiar, 2013).

De acordo com a figura, a equação da circunferência deslocada é equacionada por:

$$s^2 = y^2 + (x - v)^2,$$

que pode ser reescrita como:

$$y = s^2 - v^2 + 2vx - x^2,$$

Logo, a curva assume, no ponto $M(x, y)$, a seguinte forma:

$$f(x, s^2 - v^2 + 2vx - x^2) = 0$$

O método de Descartes força a equação a ter uma raiz de multiplicidade dois para obter um único ponto de interseção que garantirá a reta normal no ponto M .

Em 1641 Descartes publicou *Meditationes de Prima Philosophia* (Meditações de Filosofia Primeira) na qual explicaria melhor a filosofia usada no discurso do seu método. Em 1647 recebeu da corte francesa uma pensão em honra às suas descobertas e no dia 11 de fevereiro de 1650 o pai da filosofia moderna faleceu vítima de pneumonia.

1.3 O príncipe dos amadores: Pierre de Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601 na cidade de Beaumont de Lomages na França. Por ser filho de um rico mercador e também cônsul da cidade, Fermat teve uma educação privilegiada. Primeiramente frequentou o mosteiro Franciscano de Grandselve, onde demonstrou grande interesse pelo estudo de línguas estrangeiras, literatura clássica, ciência e matemática. Futuramente estudou nas universidades de Toulouse e Orleans, sendo esta onde se formou em Direito em 1631.

Por influência da família, Fermat seguiu a carreira como funcionário público, tornando-se um magistrado muito conceituado. Em 1631 foi nomeado “conseiller au Parlement” de Toulouse, isto é conselheiro do Rei no parlamento, posição esta de grande importância, já que possuía a função de intermediário entre Paris (Coroa) e suas províncias. Ou seja, se um cidadão da província quisesse tratar sobre qualquer assunto com o Rei, primeiramente ele deveria comunicar a Fermat e este decidiria se era ou não importante o Rei dar atenção àquele requerimento. E não só isso, Fermat também era responsável por tomar providências para que decretos reais fossem implementados nas províncias.

Fermat teve uma ascensão muito rápida no funcionalismo público, logo se tornou membro da elite local e com isso passou a poder usar o título de Marquês de Fermat como parte de seu nome. Uma das causas dessa ascensão repentina se deu devido a uma grande praga que assolava toda Europa no século XVII, já que funcionários que sobreviviam à praga acabaram sendo promovidos a cargos acima dos seus, que estavam vagos de funcionários que sucumbiam a doença. O próprio Fermat esteve também muito

doente, a ponto de seu amigo Bernard Medon chegar anunciar sua morte, porém se retificou em seguida utilizando uma carta como meio de reparar o engano cometido.

Sua relação com a Matemática sempre foi tida como um hobby praticado nas horas vagas, dedicando-se a ela toda a sua energia. Era visto como um estudioso amador de muito talento, sendo considerado pelo matemático escocês Eric Temple Bell como o “Príncipe dos Amadores.”

Vale ressaltar que no início do século XVII, a matemática não era um assunto muito respeitado, e com isso o matemático não tinha muito prestígio e era em sua maioria obrigado a custear seus próprios estudos. Poucas universidades possuíam cadeiras para o estudo da Matemática. Logo, podemos dizer que a maior parte dos matemáticos desse período era de forma geral composta por amadores.

Em relação às suas descobertas no campo da Matemática, Fermat tratava-as de forma para satisfazer puramente ao seu prazer, sem se preocupar com publicações de seus resultados e tampouco o reconhecimento destes. As demonstrações de seus teoremas em nenhuma hipótese eram reveladas, desafiando matemáticos da época a encontrarem eles próprios as provas de seus teoremas. Tais atitudes de Fermat tinham de certa forma seu caráter prático, já que, com a não publicação das demonstrações de seus resultados, excluía a possibilidade de ser criticado em seus trabalhos.

Embora a Matemática tenha sido tratada como um passatempo por Fermat, as suas contribuições foram de tal importância para a Matemática no século XVII, que Simon Laplace afirma que “Fermat foi o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial”. Porém, como não se interessava em publicar suas descobertas, muitos dos seus trabalhos que diziam respeito ao Cálculo só foram publicados vinte anos depois.

Em 1629 escreveu um pequeno tratado intitulado *Methodus ad Disquirendam Maxi-*

mam et Minimum, no qual tratava dos métodos de resolução de problemas de máximos e mínimos. Contudo, em seu trabalho não era encontrada nenhuma demonstração rigorosa de seus métodos.

Em seu método Fermat usava uma simbologia com vogais e consoantes, ambas maiúsculas, com significado de representar variáveis e constantes respectivamente. Na utilização de seu método, Fermat primeiramente observou que trabalhando na equação da curva os valores de a e $a + e$, sendo e um incremento infinitesimal, estes são particularmente iguais quando a é um máximo ou mínimo.

Para encontrar as abscissas dos pontos, Fermat procedeu da seguinte maneira: Primeiro igualando a e $a + e$ (a ele não importava que isso não fosse verdade); em seguida dividindo cada termo por e e por fim fazendo $e = 0$ eliminando assim todos os termos contendo e . Assim a equação resultante se anula para um ou vários valores da variável a e estes valores correspondem a máximos ou mínimos.

Como exemplificação do método de Fermat, Eves (2008) mostra como ele resolveu o seguinte problema: Dividir um número em duas partes de tal forma que seu produto seja máximo. Vamos denotar por N o valor conhecido e por A o valor desconhecido.

Logo teremos que

$$A(N - A) = AN - A^2$$

Para achar o valor máximo usamos

$$(A + e)N - (A + e)^2$$

e desenvolvendo chegamos a

$$AN + eN - A^2 - 2Ae - e^2$$

Igualando as expressões temos

$$AN - A^2 = AN + eN - A^2 - 2Ae - e^2$$

Simplificando a expressão temos

$$eN - 2Ae - e^2 = 0$$

Dividindo por e

$$N - 2A - e = 0$$

Fazendo $e = 0$

$$N - 2A = 0$$

Finalmente encontramos o máximo quando

$$A = \frac{N}{2}$$

E assim o valor máximo é

$$\frac{N}{2} \left(N - \frac{N}{2} \right) = \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} = \frac{N^2}{4}.$$

O método de Fermat não prova realmente se o valor obtido para A maximiza a equação em A , pois apenas determina os chamados pontos críticos de uma função, ou

seja, os valores de A para os quais a derivada de $f(A)$ se anula, condição essa necessária mas não suficiente para ser máximo ou mínimo de uma função.

Continuando a aplicação de seus métodos, Fermat observou que poderia usar as ideias de seus trabalhos envolvendo máximos e mínimos para encontrar a tangente em um ponto numa determinada curva. Em Eves (2008), podemos perceber que o método de Fermat consistia em encontrar a subtangente em relação ao ponto de tangência. Essa subtangente era definida como sendo o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a interseção da tangente com esse eixo.

Para exemplificar o método usado por Fermat para encontrar a reta tangente usaremos a simbologia dos dias de hoje, devido a uma não padronização dos eixos coordenados na época, podendo assim causar alguma confusão na ideia proposta.

Então o método de Fermat se aplicava da seguinte maneira: Seja P um ponto pertencente à curva com coordenadas (a, b) em que devemos encontrar a tangente. Então um ponto vizinho da curva com coordenadas $(a + e; f(a + e))$ estará tão perto da tangente que podemos pensar nele como estando aproximadamente sobre a curva. Vamos chamar esse ponto de P' . Agora seja T o ponto de interseção do eixo x com a tangente à curva e os pontos Q e Q' , respectivamente, as projeções dos pontos P e P' no eixo x .

Considerando os triângulos TPQ e $TP'Q'$ como praticamente semelhantes e o segmento $TQ = c$ como a subtangente, Fermat estabeleceu a seguinte proporção

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a + e)}{c + e}$$

Multiplicando cruzadamente, cancelando os termos semelhantes e usando a ideia do seu trabalho para encontrar máximos e mínimos de funções (dividir tudo por e e finalmente tomar $e = 0$), chegamos a

$$b(c + e) = cf(a + e)$$

$$be = cf(a + e) - bc$$

$$c = \frac{be}{f(a + e) - b}$$

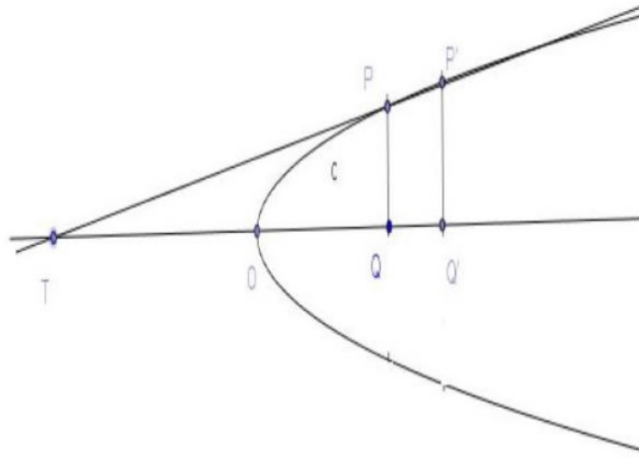


Figura 1.9: Tangente de Fermat (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Logo a subtangente c é dada por

$$c = \frac{b}{\frac{f(a+e)-b}{e}}$$

Fermat não explicou satisfatoriamente seu método, simplesmente disse que este era semelhante ao método para encontrar máximos e mínimos. Posteriormente, Fermat foi desafiado por Descartes a usar seu método para encontrar a tangente a curva

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

,

chamada de *folium* de Descartes. Fermat resolveu tal desafio, o que fez com que Descartes finalmente aceitasse seu método.

1.4 A contribuição inglesa: John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677)

Os outros dois matemáticos que contribuíram de maneira significativa para a criação do Cálculo foram os ingleses John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Wallis começou seus estudos na cidade de Ashford, localizada no condado de Kent, na Inglaterra.

Devido a uma peste que assolava a região, mudou-se para a cidade de Dover. Por algumas escolas na época não considerarem que o saber matemático fosse importante, Wallis não teve um contato satisfatório com a matemática. Durante um feriado de Natal no ano de 1631, mexendo nos pertences de seu irmão mais velho, Wallis encontra um livro de álgebra e fica intrigado com a simbologia ali usada.

Anos depois foi para Cambridge com o desejo de estudar Matemática. Acabou estudando teologia e se formando padre em 1640. Já em 1642, uma guerra civil entre parlamentares e monarquistas dividia a Inglaterra. Parlamentares, querendo decodificar mensagens interceptadas dos inimigos, pediram a Wallis que as decifrassem. Wallis obteve sucesso em decodificá-las, tornando-se assim de grande ajuda aos parlamentares, dando-lhe fama e dinheiro.

Como seus contemporâneos, Wallis considerava que as figuras planas eram compostas por um número infinito de linhas sendo essas linhas paralelogramos de largura infinitesimal.

Wallis imaginava um triângulo composto com um número infinito de paralelogramos

muito estreitos. Considerando a altura do triângulo como A e partindo da ideia de que esse triângulo será dividido em infinitos paralelogramos, teremos que a altura de cada paralelogramo será igual a $\frac{A}{\infty}$.

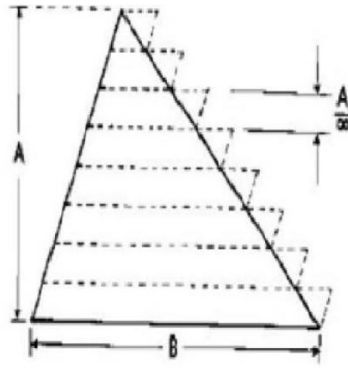


Figura 1.10: Triângulo Dividido em Infinitos Paralelogramos (Fonte: Boyer, 1992).

Wallis tratava a área do primeiro paralelogramo sendo zero, o segundo paralelogramo sendo $1 \cdot \frac{A}{\infty}$, o terceiro $2 \cdot \frac{A}{\infty}$ e assim sucessivamente até $B \cdot \frac{A}{\infty}$, sendo B a base do triângulo. E assim percebeu que somando a área dos seus paralelogramos teria a área total do triângulo.

$$0 + \frac{A}{\infty} + \dots + \frac{A}{\infty} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot B$$

Wallis foi o primeiro matemático a usar o símbolo de infinito em seus trabalhos. Ele operava infinitos em somas, diferenças, divisões entre outras. Como exemplo, temos:

$$\infty + 1 = \infty, \quad \infty - 1 = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{\infty} \times \infty = 1.$$

Em muitos de seus trabalhos Wallis transformava situações envolvendo figuras geométricas para cálculos de progressões aritméticas. Além disso, muito dos seus trabalhos estavam ligados à obra dos indivisíveis de Cavalieri.

No ano de 1656 publica sua obra *Arithmetica infinitorum*, que possuía ideias estendidas dos métodos usados por Descartes e Cavalieri. Em sua obra tratou, entre outros assuntos, da quadratura de curvas da forma $y = k \cdot x^n$, não somente para casos de n inteiro positivo, mas também fracionários e inteiros negativos.

Através de manipulações de sequências, expôs de maneira sistemática e generalizada o cálculo de quadratura de quaisquer curvas representadas por $y = (1 - x^{\frac{1}{p}})^q$ com p e q valores inteiros, com maior interesse na quadratura do círculo de equação $y = (1 - x^{\frac{1}{2}})^2$ com $p = q = \frac{1}{2}$.

Sua ideia foi encontrar a quadratura de curvas onde q era um valor inteiro e p fixado como 2. Assim ele obteve uma sequência com esses resultados e seu objetivo era encontrar a lei que a regia, pois através disso conseguiria completar seu objetivo: a interpolação dessa lei para $q = \frac{1}{2}$.

Wallis recebeu várias críticas de matemáticos da época, entre eles Fermat, que afirmava que muitos dos resultados ali publicados já tinham sido descobertos por ele, algo inconsistente já que Fermat não publicava seus trabalhos. Uma segunda crítica de Fermat foi por ter escolhido trabalhar com símbolos algébricos ao invés de métodos tradicionais de Arquimedes. Wallis respondeu ressaltando que sua intenção não foi simplesmente obter resultados e sim, demonstrar os métodos pelos quais eles poderiam ser encontrados.

Mesmo a matemática de Wallis sendo criticada de forma avassaladora, seus resultados ajudaram e muito no desenvolvimento do Cálculo. Podemos citar, por exemplo, questões envolvendo quadraturas, para as quais o trabalho de Wallis certamente teve repercussões importantes. Em 1668 Nicolaus Mercator (1620-1687) encontrou a quadratura da hipérbole, como a equação

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e somando os termos individuais por métodos de sequências de Wallis para obter

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

A forte influência nos trabalhos de Newton para anos mais tarde criar o Cálculo Diferencial serviu como reivindicação da validação dos seus métodos para com os outros matemáticos que tanto o criticaram.

Já seu compatriota Isaac Barrow teve uma educação diferenciada e impecável. Teve seus primeiros estudos numa escola localizada em Charterhouse. Seu pai, com o intuito de oferecer a Isaac uma atenção extra dos professores, pagava em dobro pela educação do filho. Anos depois foi para Felstead. Porém, infelizmente nesse período seu pai sofrerá uma grande perda financeira, e se vê obrigado a diminuir seus gastos com Isaac. Graças ao diretor da escola que percebeu o grande potencial de Barrow, Isaac permanece na escola.

Devido à sua aplicação em Felstead, Isaac Barrow aos quatorze anos foi admitido no Trinity College, onde quatro anos mais tarde, em 1648, graduou-se. Um anos depois ganhou uma bolsa de pesquisa no próprio Trinity College. Então procedeu a uma espécie de “Grand Tour” pela França, Itália, Alemanha e Holanda.

Retornando à Inglaterra tornou-se o primeiro Lucasian Professor da instituição, ocupando esta cadeira por cinco anos. Nesse período escreveu sua obra *Lectiones Mathematicae*, e publicada somente em 1683, na qual tratava de aspectos filosóficos da matemática, sem peso considerável na construção do Cálculo.

Barrow foi um escritor muito profícuo e grande parte de suas obras pode ser encontrada na biblioteca da Universidade de Cambridge. Entre suas obras mais importantes estão: *Euclid's Elements* (1655), *Euclid's Data* (1657), *Lectiones Opticorum Phenomenon* (1669), *Lectiones Opticae et Geometricae* (1669) e *Lectiones Mathematicae* (1683).

A sua obra mais importante publicada foi *Lectiones Opticae et Geometricae*, onde verifica-se um importante trabalho sobre tangentes com o uso do que ele chama de “triângulo diferencial” ou “triângulo de Barrow”, conseguindo determinar tangentes a curvas. Em Eves (2008), seu método é descrito da seguinte maneira: Suponha que pretendamos obter a tangente à curva abaixo no ponto P .

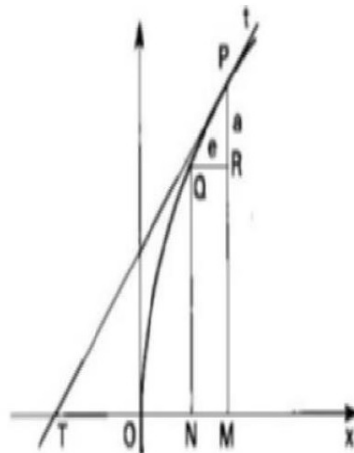


Figura 1.11: Triângulo de Barrow (Fonte: O Cálculo).

Seja um ponto Q da curva vizinho de P , e T ponto de interseção da reta tangente com o eixo x , e os pontos N e M as projeções dos pontos P e Q sobre o eixo x .

Barrow argumentava que os triângulos PTM e PQR são praticamente semelhantes. Logo poderíamos escrever

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$$

Agora façamos $QP = e$ e $RP = a$. Logo, se as coordenadas de P são (x, y) , as de Q serão $(x - e, y - a)$. Em seguida Barrow substituía esses valores na equação da curva e depois desprezava os quadrados e potências superiores tanto de e como de a , encontrando assim a razão $\frac{e}{a}$.

Como

$$OT = OM - TM;$$

e de

$$OT = OM - MP \left(\frac{QR}{RP} \right),$$

temos que

$$OT = x - y \left(\frac{e}{a} \right),$$

e a tangente está determinada.

Barrow também aplicou seu método de construir tangentes às curvas:

$$x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2 \text{ (Curva Kappa), } \quad x^3 + y^3 = rxy \text{ (Folium de Descartes),}$$

$$y = (r - x) \frac{\tan \pi x}{2r} \text{ (Quadratriz) e } \quad y = r \cdot \frac{\tan \pi x}{2} \text{ (Tangenoide).}$$

Também foi o primeiro a perceber que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra (geometricamente). Diz-se no prefácio do livro de Lições a Óptica e Geometria escrito por Barrow, que Newton revisou e corrigiu algumas de suas ideias, acrescentando matéria de sua autoria, principalmente as partes que lidou com a óptica.

Em seus trabalhos sobre cônicas Barrow dá provas bastante longas de que as equações

$$my + xy = \frac{mx^2}{b}, \quad my - xy = \frac{mx^2}{b}, \quad yx + gx - my = \frac{mx^2}{r}, \quad -yx + gx - my = \frac{mx^2}{r}$$

representam hipérbolas.

Com base nesses resultados, podemos perceber o quanto Barrow estava perto do Cálculo Diferencial que seria criado anos mais tarde por Newton e Leibniz.

1.5 Isaac Newton (1643-1727)

Isaac Newton nasceu na Inglaterra, mais precisamente na aldeia de Woolsthorpe no ano de 1642. Quando pequeno, frequentou escolas locais que não possuíam qualquer destaque no meio escolar. Nessa época se mostrava interessado em criar aparelhos mecânicos. No ano de 1661, aos dezoito anos de idade, Newton ingressou no Trinity College em Cambridge. Lá conduziu seus estudos de forma tranquila e discreta.

Recebeu pouco estímulos dos professores, com exceção de Barrow, que na época era “*Lucasian Professor*” na instituição. Estudou as obras de diversos matemáticos. No seu primeiro ano, comprou e estudou um exemplar de Euclides, a *Geometria a Renato Des Cartes* de Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète, e o que talvez tenha sido o mais importante de todos para ele, *Arithmetica Infinitorum* de Wallis.

Durante os anos de 1665 e 1666, a universidade foi obrigada a fechar as portas devido a uma peste que assolava toda Europa. Esse fato fez com que Newton voltasse para sua cidade natal e vivesse o período mais produtivo de sua carreira, tendo descoberto vários resultados ligados à mecânica, à óptica e à matemática, dentre os quais podemos citar o Teorema Binomial, as Séries Infinitas e o Método dos Fluxos. Em 1667 retorna ao Trinity College, dedicando-se aos estudos no campo da óptica.

No ano de 1669 assume o lugar de Barrow como “*Lucasian Professor*”, permanecendo assim por mais 18 anos como docente na universidade. As atividades docentes durante o período de 1673 a 1683 se concentraram no campo da Álgebra. Em 1679, usando uma nova medida para o raio da terra ele verificou sua lei da gravitação estabelecendo uma compatibilidade com as leis do movimento planetário de Kepler. Porém Newton não comunicou a ninguém essas descobertas. Somente no ano de 1684 a comunidade matemática ficou inteirada. O responsável por tal fato reverberar no meio acadêmico foi Edmond Halley (1656 -1742), que, ao procurar Newton para discutir o movimento elíptico dos planetas, o convenceu de publicar suas descobertas. Em 1687, encorajado por Halley que custeara todo material editorial, publica sua obra intitulada por *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* com grande repercussão na Europa.

Em relação ao seu Teorema Binomial, descoberto em duas cartas trocadas entre Newton e H. Oldenburg (1615-1677), secretário da Royal Society, Newton descreve seu teorema do binômio generalizado expresso na forma:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot AQ + \frac{m-n}{2n} \cdot BQ + \frac{m-2n}{3n} \cdot CQ + \dots$$

onde, segundo o autor Howard Eves (2008), “o elemento A representa o primeiro termo (ou seja, $P^{\frac{m}{n}}$), B representa o segundo (a saber, $\frac{m}{n} \cdot AQ$), C representa o terceiro e assim por diante”. De acordo com Boyer (1974), “Newton nunca publicou seu teorema binomial muito menos o provou”. Porém, as séries infinitas foram indispensáveis para Newton no desenvolvimento da quadratura de curvas. Mediante a expansão em série ele foi capaz de calcular a integral de expressões que envolviam raízes, integrando-as termo-a-termo.

Ao longo de sua abordagem ao Cálculo, Newton utilizou em sua primeira obra aquilo

que pode se designar de Método dos Infinitésimos. Nessa monografia intitulada *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*, Newton formulara um método sistemático de diferenciação muito parecido ao de seu mentor Isaac Barrow.

Teve então a idéia de aplicar a álgebra aos estudos na solução de problemas geométricos, principalmente os oriundos de equações que representam áreas curvilíneas. Dentre os problemas tratados por Newton estão a determinação da quadratura de uma curva e do comprimento de uma curva, usando uma série infinita de termos.

Segundo Boyer (1974), “Newton substituía o a de Barrow pela notação $q.o$, e o e de Barrow por $p.o$ ”. Expresso por o a ideia de um infinitésimo aumento em x , chamando de “o momento de x ” e $p.o$ e $q.o$ pequenos incrementos. Mais tarde Newton abandona seu p e q usando o somente em pequenas variações sofridas pela variável independente. Em *De Analysi* podemos encontrar também que através de seus métodos Newton provara que a área sob a curva $y = a \cdot x^{\frac{m}{n}}$ é dada por :

$$\frac{n \cdot a \cdot x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$$

Com isso Newton admite a possibilidade de oferecer uma solução para o problema da quadratura da curva pela simples manipulação simbólica fornecendo vários exemplos.

Em Calazans (2009), podemos perceber que um deles é para uma curva AD cuja equação ele sugere ser $x^2 = y$. Ao reescrever a equação de maneira mais desenvolvida (ou seja, $1 \cdot x^{\frac{2}{1}} = y$), pode-se aplicar a relação encontrada, tomando $a = 1$, $m = 2$ e $n = 1$.

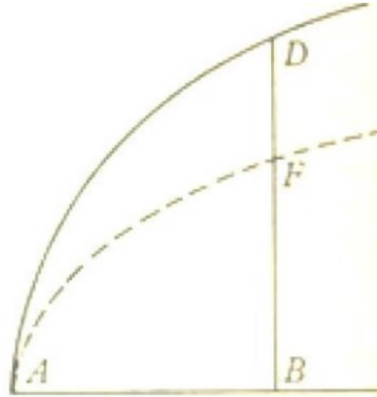


Figura 1.12: Quadratura (Fonte: Calazans, 2008).

Assim, substituindo os valores da constante e dos índices na expressão

$$\left[\frac{na}{m+n} \right] \cdot x^{\frac{(m+n)}{n}}$$

e obtém -se

$$\left[\frac{1 \times 1}{2+1} \right] \cdot x^{\frac{(2+1)}{1}}$$

Ao realizar todas as operações, obtém-se como solução o valor da área da curva ABD , ou seja: $ABD = \frac{x^3}{3}$. Também mostrou que se y for composto de vários termos, então a área também será composta pelas áreas resultantes de cada termo em questão, isto é, a área desejada é tomada pela resultante da área de cada termo, com base na expressão encontrada, aplicada separadamente. Em termos modernos, a integral indefinida de uma soma de funções é a soma das integrais das funções separadas. A lógica das teorias de Newton não possui clareza, característica admitida por ele próprio na sua obra, na qual descreve o seu método como “laconicamente explicado e não claramente demonstrado”.

Na sua obra *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* Newton, apresenta uma nova abordagem conhecida por método dos fluxos ou das fluxões, escrito em 1671 e publicado anos mais tarde em 1736. Nesse seu trabalho Newton argumentava que toda

curva era gerada pelo contínuo movimento de um ponto no tempo. Com isso a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser quantidades variáveis. Sendo assim ele explicita que suas variáveis quantitativas são geradas pelo movimento denominando-as fluxo e fluente. Portanto, a uma quantidade variável (quantidade que flui com o tempo) ela dava o nome de fluente e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo, visto como a taxa de variação do fluente.

Através desses objetos Newton introduziu dois tipos de problemas: Encontrar a fluxão associada a fluentes dados, o que corresponderia ao Cálculo Diferencial; e o outro problema se refere ao inverso da questão anterior, considerando a relação entre os fluentes e seus fluxos, buscando encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes, o que corresponderia ao processo de integração.

Logo, esse método trabalhava tanto a diferenciação quanto a integração. Eves (2008) em seu livro explica que Newton considerou dois tipos de problemas:

- No primeiro, dada uma equação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma equação envolvendo estes fluentes e seus fluxos; isso é equivalente à diferenciação.
- No segundo, dada uma equação entre alguns fluentes e seus fluxos, pretende-se achar uma equação envolvendo apenas os fluentes. Trata-se do problema inverso, equivalente a resolver uma equação diferencial.

Em Boyer (1974), percebemos que sua notação atribuía a simbologia \dot{x} e \dot{y} para os fluxos e x e y para os fluentes, sendo o fluxo de \dot{x} era \ddot{x} , e assim sucessivamente. Como dito anteriormente, em sua obra *De Analysis*, Newton introduziu também um conceito chamado por ele de momento de um fluente. Se o for um intervalo infinitamente pequeno

de tempo, então $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ são os incrementos indefinidamente pequenos em x e y ou os momentos de x e y .

Newton afirmou que podemos desprezar os termos multiplicados por potências de o iguais ou maiores que dois e obtendo assim uma equação envolvendo x e y (coordenadas) e seus fluxos \dot{x} e \dot{y} . Para exemplificar tal ideia, Eves (2008), em seu livro, dá o seguinte exemplo: Vamos considerar a curva cúbica $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Substituindo x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$, obtemos

$$(x^3 + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - ax^2 - 2ax(\dot{x}o) - a(\dot{x}o)^2 + axy + ay(\dot{x}o) + a(\dot{x}o \cdot \dot{y}o) + ax(\dot{y}o) - y^3 - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3) = 0$$

Desprezando os termos com potências iguais e superiores a dois e dividindo por o os termos restantes, chegamos:

$$3x^2(\dot{x}) - 2ax(\dot{x}) + ay(\dot{x}) + ax(\dot{y}) - 3y^2(\dot{y}) = 0$$

Anos mais tarde Newton justificou em notas por que em seu método desprezava tais potências de o , por meio de várias aplicações de seu método de fluxos para encontrar máximos e mínimos de curvas, tangentes a curvas e em muitos cálculos de quadraturas.

Em 1692 Newton representou a Universidade no Parlamento. Três anos depois sofre uma grave doença causadora de um certo distúrbio mental. Em 1696 foi indicado inspetor da Casa da Moeda e anos mais tarde em 1703 eleito presidente da Royal Society. Newton foi um dos cientistas mais respeitados da história científica, recebendo o título de “Sir” da Rainha da Inglaterra. Ele faleceu em Londres, no dia 20 de março de 1727.

1.6 Gottfrid Leibniz (1646-1716)

Leibniz, filho de jurista, nasceu em Leipzig na Alemanha. Foi criado praticamente pela mãe, pois seu pai morre quando ainda tinha seis anos de idade. Ingressou na escola aos sete anos e por ser um autodidata desde criança, aprendeu com facilidade latim e grego por conta própria. Passou a frequentar a biblioteca do seu falecido pai, e lá empreendeu várias leituras de poetas, oradores, juristas, filósofos, matemáticos, historiadores e teólogos.

Leibniz frequentou a universidade dos 14 aos 21 anos, inicialmente na Universidade de Leipzig (1661-1666), porém recebeu o título de Doutor em direito pela Universidade de Altdorf, já que a Universidade de Leipzig o considerava jovem demais para a titulação.

Pode nos parecer que ele tenha entrado na Universidade excepcionalmente jovem, mas é justo dizer que, apesar de realmente jovem, havia outros na mesma faixa etária.

As primeiras publicações de Leibniz, além de sua tese de doutorado, abordavam temas políticos e jurídicos e um novo método para o ensino e aprendizagem da jurisprudência: *Nova methodus discendae docendaeque jurisprudentiae*.

Mais tarde por quase quarenta anos, exerceu o papel de diplomata junto à corte de Hannover, tendo uma das suas primeiras missões diplomáticas em Paris. Durante esse período em Paris, Leibniz conheceu o matemático Christiaan Huygens (1629-1695), que na época morava em Paris e tornou-se seu orientador nos estudos em matemática e física.

Um ano depois de sua chegada a Paris, Leibniz foi enviado em uma missão diplomática a Londres onde conheceu Henry Oldenburg (1618-1677), diplomata alemão e secretário da Royal Society. Em suas conversas com Oldenburg, Leibniz teve a oportunidade de mostrar uma novidade: sua máquina de calcular, apresentada dias depois ao corpo do-

cente da Royal Society.

Em sua nova máquina de calcular Leibniz expandiu a capacidade de somar da máquina de Pascal. Ela realizava operações de multiplicação, executando repetidas operações de soma. Assim, para calcular a operação doze vezes seis, sua máquina somava seis vezes o número doze, fato este que despertou a atenção de ilustres membros da Royal Society.

Com isso, em abril de 1673, pouco depois de retornar a Paris, Leibniz foi eleito membro da instituição.

Uma das mais surpreendentes sugestões de Leibniz, ideia que lhe custou significativa dedicação, centrava-se no desenvolvimento de uma linguagem lógica, definida como “*Característica Universal.*”

Segundo ele, a viabilidade para a construção de uma linguagem universal decorre do fato de que todo conhecimento se sustenta em um número finito de conceitos básicos ou ideias simples que podem ser identificados e hierarquicamente estruturados. Durante sua vida, Leibniz persegue o objetivo de criar uma linguagem universal que comunique perfeitamente o pensamento e assim permita o conhecimento de todas as coisas.

Em 1676 Leibniz visitou novamente Londres, trazendo consigo sua máquina de calcular. Foi durante esses anos, entre suas duas visitas a Londres, que seu Cálculo Diferencial começou a ter uma forma. Em uma de suas conversas, Huygens propôs a Leibniz que resolvesse o problema de somar a série cujos termos são os valores recíprocos dos números triangulares. Então Huygens pediu que Leibniz calculasse:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r \cdot (r + 1)}.$$

Isto é, Leibniz deveria encontrar a soma dos inversos dos números triangulares, o que se traduz em

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{r \cdot (r+1)}.$$

Para realizar esse cálculo, Leibniz fez uso de seqüências de diferenças, conceito que já havia estudado em função de motivações de outros trabalhos. Em outras palavras, isso significa que Leibniz descobriu que uma seqüência cujos termos podem ser escritos como diferenças pode ser facilmente somada.

Leibniz notou que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r \cdot (r+1)} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r+1} \right),$$

concluindo

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r+1} \right) = 2.$$

Leibniz realizou várias deduções sobre adição de seqüências semelhantes juntando-as ao triângulo harmônico.

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$..
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$...	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$...		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$...			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$...				
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{42}$...					
$\frac{1}{7}$...						

Figura 1.13: Triângulo Harmônico (Fonte: ebah).

Cada termo (que não esteja na primeira linha) é a diferença de dois termos, logo acima dele e à direita. Além disso, cada termo é a soma de todos os termos na linha abaixo dele

e à direita. A partir do estudo das seqüências de diferenças, Leibniz concluiu que somar seqüências e tomar as suas seqüências de diferenças são operações mutuamente inversas em certo sentido.

Após ter aplicado essas ideias em inúmeras séries diferentes, Leibniz aplicou-as também à Geometria. De acordo com Leibniz, o problema da quadratura poderia ser estudado como seus antecessores o fizeram. Ele considerava que as ordenadas de comprimentos y_1, y_2, y_3, \dots , equidistantes uma das outras tinham como mesmo valor igual a 1. Ao fazer o somatório das respectivas ordenadas, teríamos um valor aproximado da área abaixo da curva. E se tomarmos as diferenças consecutivas das ordenadas, teríamos valores aproximados da declividade das tangentes.

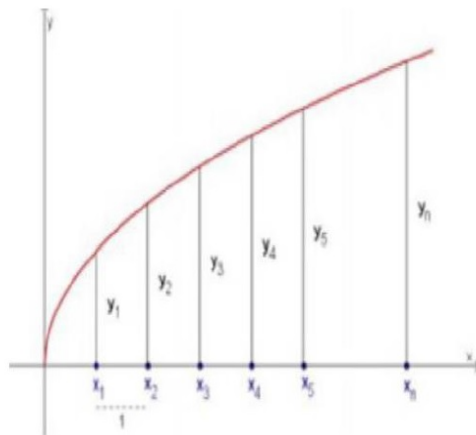


Figura 1.14: Quadratura por Leibniz (Fonte: Dantas, 2013).

Ele observou que, para distâncias cada vez menores entre as ordenadas, melhor seria a aproximação tanto para o cálculo da área quanto para a declividade da tangente.

Segundo Baron (1985) “Leibniz percebeu uma analogia entre o cálculo de diferenças finitas e somas, por um lado, e a determinação de áreas e de tangentes pelo outro”. A adição das seqüências correspondia à quadratura de curvas e tomar as diferenças correspondia à determinação das tangentes. A relação inversa entre tomar somas e diferenças

sugeriu a Leibniz que as determinações de áreas e de tangentes também são operações inversas.

Após aprofundar seus estudos sobre séries infinitas, Leibniz encontrou notações de Pascal nas quais aplicava o que Leibniz chamou de triângulo característico; ou também conhecido triângulo de Pascal, aos círculos. Na figura abaixo o triângulo CC_1D é chamado de triângulo característico. Leibniz procurou, com êxito, estender a aplicação a curvas diversas.

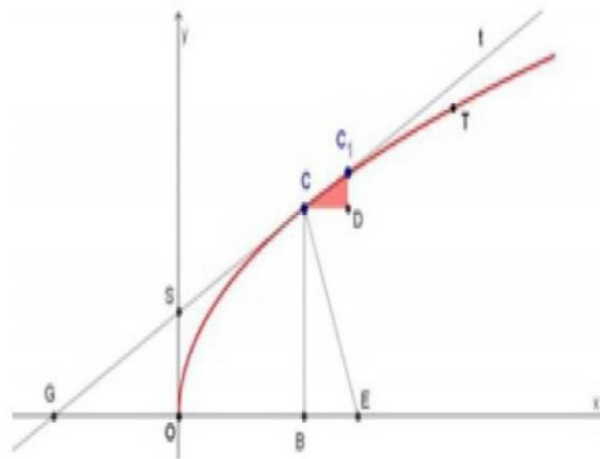


Figura 1.15: Triângulo Característico (Fonte: Dantas, 2013).

Através do triângulo característico, Leibniz desenvolveu uma regra geral, a qual denominou transmutação, que consiste em uma regra que permite transformar uma curva dada em outra curva, obtida a partir das tangentes da curva dada em que estão. A curva encontrada era mais simples que a curva dada, em um processo que reduz a área da curva dada à área de outra curva.

Muito mais preocupado com a simbologia que Newton, Leibniz observou que seus estudo só seriam de alguma forma mais inteligíveis se fosse adotada uma simbologia conveniente. Em seus manuscritos Leibniz empregou as letras *omn.*, uma abreviação de “omnia” que em latim significa “tudo” ou “total” e a letra *l* significava o nosso dy . Assim *omn.l* queria dizer em nossa notação $\int dy = y$ e *omn.yl* = $\frac{y^2}{2}$ significava $\int ydy = \frac{y^2}{2}$.

Logo, para indicar a área de uma curva cuja ordenada é y , o simbolismo adotado é “ $omn.y$ ” e os parênteses utilizados atualmente para separar termos são representados por um segmento de reta acima das incógnitas em questão, ou seja, $\overline{omn.y}$. O símbolo \bar{N} representa a igualdade e “ $ult.$ ” significa último termo da sequência tal que $ult.s$ é o último termo da sequência s .

Em 1684 Leibniz publica detalhes de seu Cálculo Diferencial em sua obra *Nova Methodus pro Maximis et Minimis item que tangentibus, qua nec irrationales quantitates morantur* no *Acta Eruditorum*, um jornal estabelecido em Leipzig apenas há dois anos. Nessa obra, utilizando os infinitésimos como “instrumentos úteis”, introduz, sob a notação dx , a noção de diferencial para designar uma “quantidade infinitamente pequena”, associada a uma variável x .

O trabalho continha a já familiar notação “ d ”, as regras para o cálculo das derivadas de potências, produtos e quocientes como

$$d(xy) = xdy + ydx \quad (\text{derivada do produto})$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad (\text{derivada do quociente})$$

$$dx^n = nx^{n-1}$$

As diferenciais são, na verdade, tratadas como segmentos, dos quais são obtidos os quocientes diferenciais $\frac{dy}{dx}$. A “diferencial” e o “quociente diferencial” de Leibniz correspondem, respectivamente, ao “momento” e as “fluxões” de Newton.

Para Leibniz, a diferencial de uma variável y é a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y .

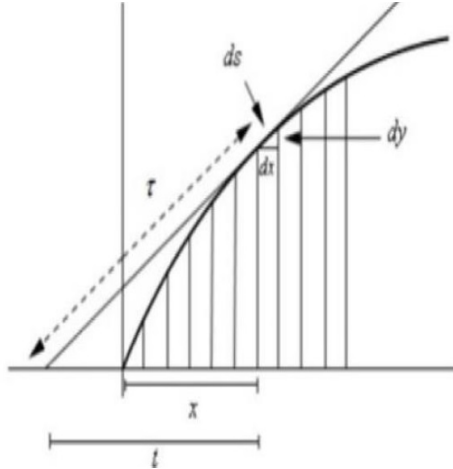


Figura 1.16: Diferenciais por Leibniz (Fonte: Alves, 2014).

As ordenadas estão situadas infinitamente próximas; dy é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y e dx é a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas x ; portanto, dx é a distância entre duas ordenadas y consecutivas.

Assim, ele afirma que a respeito das diferenciais serem infinitamente pequenas que produtos de diferenciais podem ser desprezados com respeito às próprias diferenciais:

$$adx + dydx = adx$$

Leibniz começa a escrever simples relações de quadraturas como um caso especial de método de inverso das tangentes com o novo simbolismo, formulando outras das regras de diferenciação.

Pouco tempo depois, Leibniz percebe em seus estudos que existia uma diferença entre escrever $omn.xy$ com, $omn.x$ multiplicado por $omn.y$. Em sua obra *Recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, Leibniz sistematiza o Cálculo Integral adotando então o símbolo \int cujo significado é soma no lugar de $omn.$ (com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis) e usou $\int \int$ também no lugar de $omn.omn.$

Newton, sabendo dos resultados de Leibniz, escreve uma carta afirmando sua crença

de que Leibniz havia roubado seus resultados.

Enfurecido, Newton apelou à Royal Society, instituição londrina da qual os dois eram membros, além de utilizar-se de métodos duvidosos para forjar acusações de plágio contra Leibniz. O sistema de notações do cálculo infinitesimal de Leibniz, considerado superior ao de Newton, se tornaria o preferido pelos matemáticos continentais, e seria disseminado por todo o mundo e adotado até os dias atuais.

Além do Cálculo, Leibniz contribuiu para outras áreas da Matemática. É ele quem generaliza o teorema do binômio para expansões do tipo $(x + y + z)^n$ e faz a primeira referência aos determinantes no mundo ocidental.

Capítulo 2

O Ensino do Cálculo no Brasil

Para buscarmos as raízes de como a erudição do Cálculo foi introduzida nos estudos em território nacional, não podemos deixar de mencionar em algumas palavras como o ensino da matemática começou no Brasil.

O ensino da matemática no Brasil começou com os jesuítas, os primeiros criadores de escolas no território nativo. O primeiro grupo de padres jesuítas chegou ao Brasil no ano de 1549, com a frota de Thomé de Souza (1503 - 1579), primeiro governador geral do Brasil. Esses jesuítas, liderados pelo padre Manuel da Nóbrega (1517 - 1570) foram responsáveis pela criação da primeira escola primária na cidade de Salvador em 15 de abril de 1549, onde se ensinava basicamente a ler, a escrever e a contar.

O primeiro-mestre escola (professor) do Brasil foi o Jesuíta Vicente Rijo Rodrigues (1528 -1600). No ano seguinte em 1550 chega a São Vicente, em São Paulo, o padre jesuíta Leonardo Nunes (1490 - 1554), responsável pela criação da segunda escola primária do Brasil, estabelecida em um pavilhão de taipa (técnica construtiva vernacular à base de argila e cascalho). No que se diz respeito ao ensino da matemática nas escolas elementares, este abrangia a escrita de números no sistema decimal e ao trabalho com as

quatro operações.

O ensino dos jesuítas foi se propagando, com a fundação de outras escolas elementares (em Porto Seguro, Ilhéus, São Vicente, Espírito Santo) iniciando assim um período de quase duzentos anos de escolas inicianas (nome dado as primeiras escolas da época), as quais constituíam as únicas escolas no Brasil, frequentadas primeiramente apenas por meninos brancos já que recusavam candidatos de origem mestiça e indígena.

Porém, o quantitativo de inicianos (padres jesuítas) no Brasil não era suficiente para atender a demanda das escolas fundadas. Com essa nova realidade da época, muitos alunos que se destacavam em suas escolas eram mandados para metrópole (Portugal) para se formarem professores e retornarem com intuito de atender essa nova demanda de escolas. No entanto essa medida não foi suficiente, sendo necessárias instalações para a formação de professores no Brasil.

Logo fundaram-se colégios em diversas partes do Brasil: Espírito Santo, São Paulo, Bahia, Pernambuco, Rio de Janeiro entre outras. Nos colégios a instrução era de nível secundário, sendo priorizadas as disciplinas de caráter clássica humanista, com pouco espaço para o aprendizado da matemática, esta ensinada com mais destaque nas escolas de artes e filosofia.

A proposta de ensino priorizava o estudo de latim, gramáticas e matérias humanistas, que seguiam as diretrizes de ensino do *Ratio atque Institutio Studiourum Societatis Jesu*, documento elaborado em 1599. Por esta certidão ficavam decididos as normas e as regras para a organização dos diversos colégios das Companhias de Jesus. No que se diz respeito às técnicas de ensino dadas (*Ratio Studiorum*), percebe-se um estudo tradicionalista baseado na repetição e na disciplina em aula.

Em 1572 foi fundado pelos inicianos o Colégio das Artes, localizado na cidade de Sal-

vador na Bahia. O curso tinha a duração de três anos e lá era ensinada a matemática mais avançada, entre outros assuntos, tais como lógica, física, metafísica e ética, conferindo aos alunos após o término do curso o título de Mestre em Artes.

Em 1573 os jesuítas fundaram um Colégio na cidade do Rio de Janeiro, no qual posteriormente foi criado um curso de artes. No que diz respeito à matemática ensinada no Colégio das Artes, a ênfase inicial era dada tópicos da aritmética. Posteriormente eram estudados os conteúdos de Geometria, Trigonometria, Equações Algébricas, Razão, Proporção e Juros. No ano de 1578 foram concedidos os primeiros graus em Mestres das Artes. Cabe salientar que havia classes de matemática (particulares) dirigidas por leigos como o caso do escrivão Francisco Lopes que ensina aritmética no estado do Rio de Janeiro.

Dos dezessete colégios criados pelos jesuítas no Brasil sabe-se que em apenas oito funcionavam cursos de artes. Foi fundada também no ano de 1757, no colégio de Salvador, na Bahia, a Faculdade de Matemática. Vale salientar que o objetivo desses colégios era a formação voltada para a ordem jesuítica. Porém, alguns de seus frequentadores não entraram para a ordem.

No ano de 1759, o primeiro ministro de Portugal, Sebastião José de Carvalho e Melo, conhecido também como o marquês de Pombal, ordenou a expulsão dos jesuítas de todas as colônias. Como esses padres eram responsáveis por quase todas as instituições de ensino no país, restaram poucas escolas, que eram ministradas por outras ordens religiosas como os franciscanos, carmelitas, beneditinos e instituições militares. A ordem franciscana elaborou um projeto de faculdade, na qual se estudariam: hebraico, grego, filosofia, teologia dogmática, teologia moral e teologia exegética, etc. Porém, a matemática não foi incluída nesses currículos e tal faculdade não foi fundada.

Em 1772, o Marquês de Pombal criou as “aulas régias”, aulas essas isoladas, como matérias avulsas. Nelas destacam-se primeiramente o estudo da gramática, do latim, o grego e a filosofia e num segundo plano as disciplinas do currículo matemático, como: aritmética, geometria e álgebra. Sabe-se que nestas aulas de caráter matemático a frequência era pouca e o corpo docente era muito pequeno e difícil de arranjar novos professores.

No período colonial, além das aulas avulsas, existiam também seminários e colégios de outras instituições religiosas, professores particulares e liceus que eram estabelecimentos de ensino secundário que ofereciam uma formação generalista em ciências e humanidades, preparando o aluno para o curso superior. Durante vários anos Portugal não reconhecera os graus concedidos pelos estabelecimentos jesuítas no Brasil. Em 1789 o reino português conferiu legalidade aos cursos realizados no Brasil, fato esse que eximiu os discentes de prestarem um novo curso.

Nos séculos XVII e XVIII vários matemáticos jesuítas estiveram no Brasil. Podemos citar Inácio Staford (1599-1642), autor de livros como os *Elementos Matemáticos e Teoremas Matemáticos*, impressos em Lisboa em 1636; Filipe Burel (1659-1709) que fora professor de Matemática na Universidade de Coimbra e estivera também no Rio Grande do Norte; e Diogo Soares (1684-1748) que ensinara Filosofia e Humanidades, durante quatro anos, na Universidade de Évora.

No Colégio Romano, em Roma, havia jesuítas mais atualizados com o desenvolvimento científico da época do que seus colegas que vieram para o Brasil (relembramos o julgamento de Galileu Galilei (1564- 1642)). Dentre os jesuítas mais atualizados podemos citar Christoph Clavius (1537-1612), conhecido como o Euclides do século XVI e autor da obra *Euclidis elementorum*, publicada em 1574; e Gregório de Saint-Vincent

(1584-1667) que em virtude de seus trabalhos matemáticos recebera elogios por parte de G. W. Leibniz. A ele fora atribuída, por G.W. Leibniz e J. Wallis, a autoria do teorema: $\log x = \int \frac{dx}{x}$. Sabemos também que G. de Saint-Vincent dera importantes contribuições para a teoria dos logaritmos. Por exemplo, ele demonstrara em sua obra *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni Antverpiae* 1647 relações envolvendo área sob segmento hiperbólico com logaritmos.

Claro que havia um abismo entre os iniciados aqui no Brasil entre os séculos XVII e XVIII e seus contemporâneos, como Fermat, Leibniz, Euler entre outros. Contudo, tinham seu valor na história, já que possuíam gabarito para lecionar em universidades portuguesas.

2.1 Bases do ensino do Cálculo: As obras de Lacroix

Mais precisamente em 30 de novembro de 1807, tropas napoleônicas ameaçaram e posteriormente invadiram o território português, lideradas por Napoleon Bonaparte (1769-1821). Devido a esse fato, a corte real portuguesa fugirá para o Brasil em 29 de novembro de 1807, um dia antes das tropas napoleônicas entrarem em território português.

Com a chegada de D. João VI ao Brasil, várias mudanças surgiram ligadas à educação e à cultura. Muitas instituições culturais e educacionais foram implantadas, como podemos destacar a Academia Real Militar (1810), Academia Real de Marinha (1808), destinadas a formar engenheiros e a criação da Escola Real de Ciências (1816) entre outras.

Estas mudanças ocasionaram pela primeira vez no Brasil, no curso *Mathematico*,

sediado na academia Real Militar, a disciplina de cálculo diferencial e integral, não especificamente com esse título. Todo conteúdo ali ensinado baseava-se nas obras do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Lacroix era professor da Escola Politécnica de Paris, e se tornou o principal autor de livros texto de sua época, destacando-se suas duas obras principais no que diz respeito ao cálculo: *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, e *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*.



Figura 2.1: As Obras de Lacroix (Fonte: Arantes, 2009).

A tradução da obra de Lacroix para o português ficou encarregada ao professor Francisco Cordeiro da Silva Torres de Souza Melo e Alvim (1775-1856), graduado pela Academia Real dos guardas-marinhas de Lisboa (sargento do corpo de engenheiros) e se tornou o primeiro livro de Cálculo, em língua portuguesa, a ser adotado para o ensino da Matemática superior no Brasil. Na tradução do livro, Francisco Cordeiro preocupou-se com a originalidade da obra. Trabalhou baseado na obra francesa, possuindo as mesmas simbologias e igual estrutura na composição do texto, inclusive na numeração dos parágrafos, desenvolvimento teórico ou algorítmico matemático.

O *Traité du Calcul Différentiel et du Cacul Integral* foi organizado em 3 volumes, com mais de 1800 páginas, sendo uma verdadeira enciclopédia de Cálculo. O primeiro volume

(Tomo I) - *Calcul Différentiel* se inicia com um prefácio e uma introdução, que ocupam 158 páginas, seguidos de 5 grandes capítulos. O segundo (Tomo II) - *Calcul Integral* - abrange 10 capítulos. O terceiro volume (Tomo III) - *Des differences et des séries* - distribui-se em oito capítulos. A obra *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* fora dividida em dois volumes, um destinado ao cálculo diferencial de 489 páginas e um segundo sobre o Cálculo Integral de 503 páginas (ARANTES, 2009).

No que diz respeito à matemática ali fundamentada, Lacroix considera que a ideia de função é o berço para o entendimento do conceito do Cálculo. Porém suas definições para esta são muito confusas e de pouco entendimento. Lacroix define função como uma relação entre quantidades, variáveis dependentes de outras variáveis, sem tocar na característica unívoca das variáveis dependentes, não apresentando assim uma definição satisfatória. Isso é perfeitamente compreensível já que somente em meados do século XIX Lejune Dirichlet (1805-1859) estabelece uma definição mais ampla para o termo (ARANTES, 2009).

Já para se referir ao conceito de derivada, Lacroix seguiu as ideias de Leibniz e utilizou o termo *coeficiente diferencial*, apresentando os conceitos de *diferença* e *diferencial*. Vale ressaltar que, no que diz respeito ao conceito de limite, percebemos total ausência de capítulos referentes a esse tema, feito apenas uma referência na apresentação do conceito de derivada. A palavra limite transparece somente na retórica das explicações, sem qualquer simbologia própria, a fim de significar algo para o qual o quociente tendia, à medida que o acréscimo ou a quantidade h diminuía, tão pequena quanto se quisesse.

De acordo com Lima (2013), Lacroix considera a função $u = ax^3$ e em seguida faz um acréscimo de $x + h$ na variável x obtendo $u' = a(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)$. Finalmente considera a diferença entre u e u' e, após encontrar tal resultado, divide tal diferença por

h . Com isso ele obtém a seguinte expressão:

$$\frac{u' - u}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2$$

Percebendo então que uma das parcelas não depende de h , enquanto as outras parcelas são afetadas por esse valor, Lacroix afirma que se essa quantidade for diminuindo, o resultado se aproximará de $3ax^2$ e não lhe será igual senão supondo $h = 0$ e de maneira que teremos $3ax^2$ como o **limite** da relação $\frac{u'-u}{h}$.

Ele nomeia o termo $3ax^2h$ de *diferencial*, designando-o por du , e afirma que, para passar daí para o limite buscado, será necessário dividir por h e finalmente obter

$$\frac{du}{h} = 3ax^2.$$

A escolha deste primeiro termo $3ax^2h$ é explicada em seguida, por ser a parte mais considerável da diferença (maior grandeza) à medida que h diminui. Neste ponto, Lacroix adiciona nota de rodapé dizendo ser este o princípio de Leibniz na fundação do cálculo, tomando as diferenciais como diferenças infinitamente pequenas (ARANTES, 2009).

Assim Lacroix escreve em lugar de h o sinal dx , justificando tal escolha para conservar a uniformidade da relação. Com isto ele escreve

$$du = 3ax^2dx$$

e em seguida

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2.$$

Ele nomeia a primeira expressão como sendo a diferencial de u ou de ax^3 e a segunda que exprime a relação das mudanças simultâneas da função e da variável como

coeficiente diferencial. Assim conclui Lacroix afirmando que “o coeficiente diferencial” de uma função será obtido dividindo a diferencial da função pela diferencial da variável e reciprocamente obtém-se o diferencial multiplicando o coeficiente diferencial pela diferencial da variável.

Lacroix também se utilizava da ferramenta de associar transformações de várias funções em séries, tratando tanto das algébricas como as não algébricas e em seguida encontrava seu diferencial, como, por exemplo, a utilização da Série de Taylor como meio de se calcular a diferencial de uma função u de variável x (ARANTES, 2009).

No que diz respeito ao conceito de integral, Lacroix exemplifica nos seus estudos, integrações de diversas funções: integração de funções algébricas, racionais e irracionais; integração de funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas. E métodos para as mesmas como a integração por método de aproximações, integração por séries e até mesmo a integração de algumas equações diferenciais. Porém com adição de uma grande parte dedicada às aplicações para cálculo de áreas (quadraturas), volumes, superfícies e comprimentos de arcos (ARANTES, 2009).

Em Lima (2013), percebemos que nas primeiras páginas, apresenta tal conteúdo como sendo o inverso da derivada, afirmando que integrar é “remontar” os diferenciais das funções derivadas. De fato, Lacroix afirma que se tome o coeficiente diferencial de primeira ordem de uma função de x

$$\frac{d\gamma}{dx} = X$$

isto é

$$d\gamma = X \cdot dx$$

A função procurada é aquela cuja o diferencial é $X \cdot dx$, e isto é indicado por

$$\gamma = \int X \cdot dx$$

A característica f é a inversa da característica d , de maneira que

$$\int du = u$$

e

$$d \int X \cdot dx = X \cdot dx$$

Contudo Lacroix faz uma ressalva. Ele explica que seria muito descuido se afirmássemos numa primeira impressão que as composições dos coeficientes diferenciais das funções procuradas são dadas imediatamente pelas variáveis independentes. Após essa definição, Lacroix aborda várias técnicas de integração com mais de cem páginas descrevendo-as (LIMA, 2013).

Após muitas explicações ele aborda a seguinte expressão:

$$\int X \cdot dx = f(x) + C.$$

Significando C uma constante arbitrária e $f(x)$ a função procurada. Com isso ele supõe um valor $x = a$ para qual a expressão acima se anula e afirma que

$$f(a) + C = 0$$

Então

$$C = -f(a)$$

e conclui que

$$\int X \cdot dx = f(x) - f(a).$$

Assim, Lacroix afirma que a $\int X \cdot dx$ resulta da diferença entre a variável x assumir um outro valor qualquer e o valor assumido quando $x = a$. Para explicar melhor Lacroix usa um outro valor $x = b$ e afirma que se temos, por exemplo

$$\int_a^b X \cdot dx = f(b) - f(a).$$

Então o valor $x = a$ é a origem da integral e o valor $x = b$ é o valor final, isto é o ponto onde devemos parar, completando a integral. Após isso, afirma que os valores $x = a$ e $x = b$ são os limites de integração e que quando esses limites são conhecidos a integral é chamada de definida, denotada pela expressão

$$\int_a^b X \cdot dx.$$

Ressalta também quando não conhecidos os limites de integração a integral é classificada ou nomeada como integral indefinida. Sem citar o nome do Teorema Fundamental do Cálculo, Lacroix explica que, para encontrar o valor da integral definida, basta que encontremos a função $f(x)$ e calculemos os valores de $f(a)$ e $f(b)$ e com isso façamos a diferença entre esses valores, ou seja,

$$\int_a^b X \cdot dx = f(b) - f(a).$$

A ideia de integral também é associada a transformações de várias funções em séries.

Por exemplo, ele considera a $\int \frac{x^m dx}{x^n + a^n}$ como a série

$$\frac{1}{x^n + a^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{a^n}{x^{2n}} + \frac{a^{2n}}{x^{3n}} -$$

multiplicada por x^m , e posteriormente após discute um caso particular da integral para valores de $m = 0, n = 2, a = 1$ (Arantes, 2009).

$$\int \frac{dx}{1 + x^2}$$

Já a ideia de integral como sendo a área abaixo de uma curva só é citada mais de cem páginas depois do início da abordagem da definição de integrais. Lá ele analisa a área procurada como uma soma de áreas de retângulos abaixo da curva. Observa-se que a abordagem feita ao conceito de integral por Lacroix em sua obra é extremamente voltada a técnicas de integração e também encontramos uma atenção especial do autor à integração por séries, em que nenhum momento o conceito de integral é formalizado.

2.2 O ensino na Academia Real Militar e as primeiras Escolas Politécnicas

Na academia Real Militar com raízes em Portugal, já que era uma derivação da Real Academia de Artilharia Fortificação de Portugal, era estabelecido um curso regular de ciências exatas e de outras ciências que tivessem práticas militares. O ensino na Academia era ministrado em três anos, sendo ensinados matemática, desenho, física, navegações e

artilharias.

Segundo Brito (2007), dentre os cursos oferecidos na Academia destaca-se o de Matemática com duração de quatro anos e posteriormente um curso militar que durava três anos. Ressalta-se que nem todos os alunos eram obrigados a completar os sete anos de curso já que somente alunos do curso de engenharia e artilharia eram obrigados a cursar totalmente. A ementa do curso era dividida da seguinte forma:

- 1º ano: Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho;
- 2º ano: Álgebra, Geometria, Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva e Desenho;
- 3º ano: Mecânica, Balística e Desenho;
- 4º ano: Trigonometria Esférica, Física, Astronomia, Geodésia, Geografia Geral e Desenho;
- 5º ano: Tática, Estratégia, Castrametração (arte de assentar equipamentos), Fortificação de Companhia e Reconhecimento de Terreno e Química;
- 6º ano: Fortificação Regular e Irregular, Ataque e Defesa de Práticas, Mineralogia e Desenho;
- 7º ano: Artilharia, Minas e História Natural.

A primeira composição do corpo docente do curso básico de Matemática eram militares graduados, geralmente com formação em Portugal, na Universidade de Coimbra ou na Academia Real. Podemos citar o professor Francisco Cordeiro da Silva Torres (1775-1856), o qual anos mais tarde fora, como já dissemos anteriormente responsável pela

primeira tentativa de redigir um livro-texto de Cálculo no Brasil, intitulado “Elementos do Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral Segundo o sistema de Lacroix, para uso da Escola Militar”. Porém, pelo fato de o autor ainda se encontrar muito apegado aos métodos e definições de Lacroix, sua obra não representava qualquer alteração no modo como o Cálculo vinha sendo ensinado no país.

O ensino no Brasil espelhava-se em grande parte na França, mais precisamente na École Polytechnique de Paris criada em 1794, servindo como base ensino implantado.

Uma quantidade de livros trazidos para o Brasil com a frota portuguesa passou a incorporar a biblioteca da Academia Militar, com mais de 1000 volumes, em sua maioria franceses. Dentre estes, livros de Trigonometria esférica e plana, Geometria, Cálculo diferencial e Integral, Álgebra, Análise Infinitesimal.

Vale ressaltar que anos depois em 2 de dezembro de 1837 foi criado o Colégio Pedro II, sendo o responsável pela sua criação o Ministro do Império, Bernardo Pereira Vasconcelos.

O objetivo era reerguer o ensino público (secundário) do império nos moldes da grandeza dos colégios franceses. O Colégio Pedro II tornou-se a instituição modelo para o ensino secundário no Brasil. Alunos de outras províncias tinham que ir ao Rio de Janeiro para realizar seus exames, que lá eram centralizados. Posteriormente, uma lei autorizou a aplicação desses exames nas próprias províncias.

Fundamentalmente o público desse ensino era constituído pela elite econômica masculina do país, que se preparava para ocupar cargos político-administrativos ou para ingressar nos cursos superiores. As mulheres eram geralmente educadas para as atividades do lar e podiam frequentar as escolas normais (para formação de professores) e cursos profissionalizantes. Na década de 1880, algumas mulheres passaram a estudar no Colégio Pedro II. Dois anos depois da Proclamação da República que aconteceria em

1885, a primeira mulher recebeu o diploma de médica no Rio de Janeiro, sendo a única presença feminina na turma.

A finalidade social do Colégio Pedro II, estava diretamente ligada ao ensino das elites e assim seus professores eram selecionados de forma mais rigorosa, com os exames orais em acréscimo às provas escritas, aumentando assim as exigências quanto à admissão aos cargos do magistério secundário. Na primeira matriz curricular do Colégio foram lecionadas matérias distribuídas em oito séries. Estudavam-se grego, latim, alemão, inglês, francês, geografia, história, retórica e poética, filosofia, matemática, ciências físicas e naturais, desenho figurativo e música. A matemática ali ensinada estava presente em todas as oito séries de ensino.

Mais tarde, em 1890, o primeiro ministro Benjamin Constant baixou um decreto, sob o número 891, em que determinava uma reforma eliminando as disciplinas tradicionais, como o latim e o grego e a inclusão do ensino de Matemática abstrata e do estudo do Cálculo Diferencial e Integral no terceiro ano.

Em virtude das mudanças sociais e políticas ocorridas àquela época no país, as classes influentes perceberam a necessidade de serem formados novos engenheiros civis já que a Escola Militar não estava abastecendo com eficiência a quantidade de engenheiros civis que o momento do Brasil necessitava.

Logo o Imperador se viu obrigado a reformular todo ensino ali aplicado e através de decretos deu origem à criação de um curso superior próprio de engenharia de caráter civil, separado de instituições militares. Esse primeiro ambiente de forma mais civil recebeu o nome de Escola Central e futuramente de Escola Politécnica, caracterizada por uma instituição para ensino exclusivo de engenharia e subordinada a um ministro civil da época (Dr. Inácio da Cunha Galvão). Os moldes seguidos pelas primeiras escolas

politécnicas no Brasil espelharam-se em instituições estrangeiras como Eidgenössische Technische Hochschule de Zurique e a École Polytechnique de Paris.

A Escola Politécnica de São Paulo , por exemplo, tomava como referência o livro *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, que trata o Cálculo na concepção de Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727) dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite. A cadeira de Cálculo na instituição paulista tinha como coordenadores dois professores: Urbano de Vasconcellos (1864-1901), que lecionou de 1895 a 1901 e Rodolfo Baptista de San Thiago (1870-1933), que ficou à frente desta disciplina de 1901 até 1932.

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral era ministrada segundo a seguinte sequência de tópicos:

1. Funções
2. Método de Exaustão
3. Método de Leibniz
4. Método de Newton
5. Método de Lagrange
6. Cálculo Diferencial
7. Aplicações analíticas e geométricas do Cálculo Diferencial
8. Cálculo Integral
9. Métodos de Integração
10. Integrais definidas

11. Aplicações geométricas do Cálculo Integral

Na introdução do curso, o conceito de função era apresentado como uma expressão analítica em que quantidades conhecidas são combinadas com outras que têm valores determinados, ao passo que as primeiras podem ter valores quaisquer. O conceito de limite era mencionado como limite de uma quantidade variável e não como limite de uma função.

No curso sempre eram feitos exemplos geométricos para ilustrar tais significados como, por exemplo, um polígono dado inscrito numa circunferência cujo número de lados era sempre duplicado. Assim o perímetro do polígono aproximava-se para o perímetro da circunferência, sendo o perímetro da circunferência o limite do perímetro do polígono.

Na próxima etapa do curso era abordado o método de exaustão utilizado por Arquimedes. Lá se explicavam as ideias por trás dos métodos usados por ele, fazendo a utilização de uma notação adequada à época e não usando termos atuais.

No que se diz respeito ao conceito de derivada, o ensino diferenciava-se das instituições militares por não somente se preocupar com a mecanização do conteúdo, mas também com os conceitos teóricos que a envolviam, deduzindo e manipulando fórmulas. Eram explicados os métodos de Leibniz, Newton e Lagrange com o intuito de definir o conceito de derivada por cada um deles.

Podemos perceber em Lima(2013), que para o traçado de tangentes, com base em Leibniz, era considerado um ponto de uma curva dada. Mais precisamente um ponto $M(x, y)$ pertence a curva $y = f(x)$. Em seguida era tomado um ponto $M'(x + dx, y + dy)$, sendo infinitamente próximo do ponto M . Com isto era obtida a seguinte relação:

$$Y - y = \frac{y + dy - y}{x + dx - x}(X - x),$$

, isto é,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Esta última representava a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $M(x, y)$.

Quanto às ideias relacionadas a Newton, a reta tangente era considerada como o limite de todas as retas secantes. Supondo um ponto $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ infinitamente próximo ao ponto $M(x, y)$ de uma curva dada, o coeficiente angular era obtido através da reta secante que passava por M e M' a seguinte relação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta.$$

Ou seja, o coeficiente angular da reta secante, onde β representava o ângulo da inclinação da reta que passa M e M' . Logo desta maneira era concebida a ideia da reta tangente a M , através da noção de limite da reta secante com a expressão:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha,$$

este tomado como o ângulo de inclinação da reta tangente em M .

Os métodos de Langrange não eram tratados no livro de Sonnet. Porém, alguns professores valorizavam seu trabalho nas aulas ministradas.

A teoria partia da fórmula de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + p \cdot h + q \cdot \frac{h^2}{2!} + r \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots$$

onde h representa um acréscimo dado a x . Ele constrói então um método analítico para o cálculo intitulado método de Cálculo das Funções Derivadas, e o processo de eliminar essas quantidades era chamado de Cálculo das Funções Primitivas, introduzindo a simbologia por $p = f'(x)$, $q = f''(x)$, $r = f'''(x)$... (LIMA, 2013).

Vale ressaltar que foi Lagrange o responsável pela introdução da notação $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ usadas nos dias de hoje para derivadas de funções. Após tratar dos três métodos, era feita uma análise para mostrar que eles convergiam para a mesma ideia

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

e só após isso o conceito de derivada era apresentado de maneira mais formalizada e definida como o limite da relação do acréscimo da função para o da variável, quando este último tende a zero.

Na proposta do curso destinado a integrais tínhamos como Integral a ideia de área da região sob o gráfico de uma função $y = f(x)$ limitada entre valores a e b da variável x .

Todo intervalo era dividido em n partes iguais sendo considerados retângulos inscritos e circunscritos à curva. Logo o limite das somas das áreas dos retângulos determinavam a integral.

No curso não era citado e associado o Teorema Fundamental do Cálculo à expressão

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tal expressão apenas era justificada pelos professores como uma diferença de áreas.

2.3 O rigor da Análise Matemática nos anos iniciais da República

No final da década de 1880, a monarquia brasileira estava numa situação de crise, pois representava uma forma de governo que não correspondia mais às mudanças sociais em processo. Fazia-se necessário a implantação de uma nova forma de governo, que fosse capaz de fazer o país progredir e avançar nas questões políticas, econômicas e sociais.

A classe média (funcionários públicos, profissionais liberais, jornalistas, estudantes, artistas, comerciantes) estava crescendo nos grandes centros urbanos e desejava mais liberdade e maior participação nos assuntos políticos do país. Identificada com os ideais republicanos, esta classe social passou a apoiar o fim do império.

Havia falta de apoio dos proprietários rurais a permanência da monarquia, principalmente dos cafeicultores, que desejavam obter maior poder político, já que tinham grande poder econômico. Diante das pressões citadas, da falta de apoio popular e das constantes críticas que partiam de vários setores sociais, o imperador e seu governo encontravam-se enfraquecidos e frágeis.

No dia 15 de novembro de 1889, o Marechal Deodoro da Fonseca, com o apoio dos republicanos, demitiu o Conselho de Ministros e seu presidente. Na noite deste mesmo dia, o Marechal assinou o manifesto proclamando a República no Brasil e instalando um governo provisório.

A proclamação da República se deu num momento em que 85% da população era analfabeta. Benjamin Constant (1836-1891), primeiro ministro de Correios e Telégrafos, foi o responsável por uma reforma do ensino, em 1890, que ficou conhecida pelo seu nome.

Em seus ideais buscava romper com a tradição humanista e literária do ensino se-

cundário pela adoção de um currículo que privilegiava as disciplinas científicas e matemáticas.

Naquele período, muitos estudantes, sem realizar um curso regular, faziam os chamados exames preparatórios para o ingresso nos cursos superiores, entre os quais figuravam os das disciplinas matemáticas: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria.

Em 1908, realizou-se em Roma o IV Congresso Internacional de Matemática, presidido pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925). Nesse congresso estabeleceu-se como meta proceder um estudo sobre o ensino secundário da Matemática em vários países, entre os quais estava o Brasil. Com isso as primeiras propostas para a modernização do ensino eram: promover a unificação dos conteúdos matemáticos abordados na escola em uma única disciplina, enfatizar as aplicações práticas da Matemática e introduzir o ensino do Cálculo Diferencial e Integral no nível secundário.

Na leitura de Gomes (2012), percebemos que no Brasil, o maior adepto a essas mudanças foi o professor de Matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo (1890-1950), que liderou a proposição de uma transformação drástica nos projetos de ensino da instituição. A característica mais evidente dessa proposta era a unificação das antigas disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, que eram ensinadas por docentes distintos e faziam uso de livros diferentes, em uma nova disciplina chamada Matemática.

A proposta também enfatizava a necessidade de se ter sempre em vista, no ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno, e insistia em que sua atividade fosse constante, de modo que o estudante fosse “um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos”. Além disso, salientava-se que o ensino deveria partir da intuição; como por exemplo, o estudo das demonstrações formais, que no entender precisava ser precedido de atividades de experimentação e construção.

Ao conceito de função foi atribuído o papel de “ideia central do ensino”, sendo apresentada primeiro intuitivamente, e desenvolvida gradativamente ao longo das séries.

Em Gomes (2012), é visto que na quinta série, estabelecia-se o ensino das noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral. Uma outra corrente de professores defendiam o ensino das humanidades clássicas, e especialmente do latim, considerando que a nova proposta rebaixava o ensino. Entre eles estava o professor do Pedro II, Almeida Lisboa, que, em muitos artigos publicados em jornais da época, atacava frontalmente o professor Euclides Roxo.

No que diz respeito à educação superior nos anos iniciais da República, foram criadas várias faculdades no país. A primeira instituição de ensino superior brasileira com o nome de universidade foi a Universidade de Manaus, surgida em 1909, no auge da exploração da borracha. A primeira universidade duradoura foi a do Rio de Janeiro, estabelecida em 1920, pela reunião das faculdades de Medicina, Direito e Engenharia já existentes.

Vale destacar que, no Rio de Janeiro, ocorreu a criação da Universidade do Distrito Federal, em 1935, e extinta quatro anos mais tarde em 1939 para dar lugar à Universidade do Brasil. Nesse mesmo ano, criou-se a Faculdade Nacional de Filosofia, na qual, bacharelando-se primeiramente em Matemática e, posteriormente, cursando Didática, o estudante poderia obter o diploma de licenciado em Matemática.

Em 1911 foi promulgada a Lei Orgânica do Ensino Superior e do Ensino Fundamental da República, como Lei Rivadávia, que permitia a criação de instituições de Ensino Superior pertencentes à iniciativa privada. Dessa lei surgiram várias Instituições de Ensino Superior, dentre elas podemos citar a Universidade de São Paulo, Universidade do Estado de São Paulo e Universidade do Paraná, dentre outras. Dessas instituições mencionadas apenas a Universidade de São Paulo levou a sério suas pretensões. Todavia,

estas instituições de ensino superior não sobreviveram por muito tempo.

A Universidade de São Paulo foi a primeira a ser concretizada no Brasil, criada por um decreto oficial do governo do Estado de São Paulo em 25 de janeiro de 1934. A universidade de São Paulo foi baseada no liberalismo, que estava em oposição com o modelo proposto pelas instituições cariocas.

A Universidade de São Paulo, primeira universidade do país, pode ser considerada o mais importante marco na história da ciência e educação no Brasil. Em sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras passou a funcionar o primeiro curso de graduação em Matemática do Brasil. Nela buscou-se fundar uma instituição que seguisse os mesmos moldes das conceituadas universidades europeias e, para que tal objetivo fosse atingido, diversos pesquisadores estrangeiros, principalmente de origem italiana, foram contratados para futuramente encorajar o desenvolvimento de um espírito universitário dentre os estudantes do país.

Dentre eles podemos o italiano Luigi Fantappiè, que trouxe para o Brasil o modelo de ensino presente nos cursos de Matemática da Itália e de diversos outros países europeus, no qual não havia no currículo uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral.

Antes de vir para o Brasil, Fantappiè foi catedrático de Análise Matemática na Universidade de Bologna e diretor do Instituto Matemático Salvatore Pincherle. Na época, Fantappiè estava interessado em estudar a parte da Análise Matemática conhecida por Funcionais Analíticos.

Em sua filosofia de ensino, combatia o que ele chamava de “ensino enciclopédico”, o qual definia por ser o ensino ligado à instrução de conhecimentos isolados, fórmulas e regras a serem decoradas que nada contribuía para a formação da personalidade do indivíduo. Fantappiè reformulou os programas da cadeira de Cálculo Infinitesimal e de

Geometria que eram ministrados na Escola Politécnica e na Universidade de São Paulo.

Ele iniciou o curso de Cálculo com os números reais, apresentando aos seus alunos, por exemplo, a definição de corpo, corpo ordenado e terminando o curso com estudo das Equações Diferenciais.

Os conceitos fundamentais deste ramo do conhecimento eram trabalhados diretamente em uma disciplina chamada Análise Matemática, ministrada, desde o primeiro ano do Ensino Superior, com alto nível de rigor simbólico-formal e sem enfatizar, em momento algum, a manipulação de procedimentos de cálculo de limites, derivadas e integrais.

Ao introduzir o ensino da Análise Matemática, Fantappiè foi o responsável por uma mudança de objetivos com os quais o Cálculo passou a ser trabalhado nas instituições de Ensino Superior do país.

Fantappiè enfatizou o ensino de Matemática baseado em ideais formalistas, adotando a obra *Lezioni di Analisi* (1933) de Francesco Severi (1879-1961), o qual foi professor de Fantappiè em Roma na Itália. Posteriormente o curso de Fantappiè foi redigido, na forma de apostilas, por seu assistente Omar Catunda (1906-1986).

Em suas apostilas podem ser encontrados os seguintes tópicos estudados: Cálculo Combinatório, Determinantes, Equações Lineares, Teoria dos Números Reais, Potências e Logaritmos dos números reais, Números Complexos, Conjuntos Lineares, Funções e Limites no campo real, Derivadas e Diferencial das funções de uma variável e Integrais das funções de uma variável.

O livro de Severi (1933), eram usadas aplicações de ϵ e δ nas demonstrações dos tópicos estudados. Vale lembrar que, tradicionalmente, atribui-se o início do processo de aritmetização da análise a Augustin Louis Cauchy (1789-1857) através de sua obra *Cours d'analyse* (1821), que apresentou uma definição de limite predominantemente aritmética

e a definição, notação dos epsilons e deltas ao matemático Karl Weierstrass (1815-1897).

No que diz respeito ao conceito de função, Fantappiè a define associada a números de um conjunto C , chamado de campo de definição, com um ou mais valores de uma outra quantidade, mostrando assim uma identificação da noção de número com a noção de quantidade. O tratamento ao conceito de limite que ministrava em suas aulas estava associado primeiramente a termos de origem topológica. No que diz respeito à derivada, vale lembrar que, nos cursos da Escola Politécnica, era tratada sob o ponto de vista dos métodos de Leibniz, Newton e Lagrange. Porém, Fantappiè optava por não abordar estes três métodos, considerando o método de Newton o mais apropriado. Ele justifica tal escolha posteriormente com descrições das diferenças principais entre os métodos de Newton e de Leibniz.

Com relação ao conceito de integral, Fantappiè estabeleceu uma relação entre integral e área de uma região abaixo de uma curva, definida por uma função monótona e limitada $y = f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Tratou de explicar primeiramente o conceito de integral relacionado à admissão de um extremo superior e extremo inferior de um intervalo, isto é, limitado superiormente e limitado inferiormente, associado a somatórios relativos a todas as divisões possíveis do intervalo considerando tanto a soma superior quanto inferior da função. Posteriormente busca a interpretação geométrica deste resultado, através de divisões de um intervalo de extremos a e b associados a retângulos inscritos e circunscritos, levantados nos pontos de divisões do intervalo por retas paralelas ao eixo OY .

Assim afirma que que é evidente a relação entre a integral e área se supusermos conhecido o conceito de área de uma figura plana.

A principal preocupação de Fantappiè foi introduzir, no país, o rigor simbólico-formal no ensino da Análise, propor uma abordagem baseada na organização weierstrassiana do

conteúdo em questão. Diferente de como o Cálculo era tratado nas Escolas Militares e Politécnicas, o curso de Análise Matemática dava ênfase à formalização do conteúdo trabalhado, apresentado sempre com um elevado nível de rigor, e acompanhado das demonstrações de todos os resultados. As técnicas de cálculo perderam quase que completamente espaço, e o objetivo da disciplina passou a ser fornecer aos estudantes uma sólida conceitualização dos elementos matemáticos estudados. O curso de Análise Matemática trazido ao Brasil por Fantappiè introduziu no país o rigor simbólico-formal no ensino do Cálculo.

Ele também ministrou cursos sobre assuntos até então não conhecidos pelos alunos brasileiros, como por exemplo: Funções Analíticas, Teoria dos Grupos Contínuos, Teoria dos Números, Álgebra entre outros. Criou o Seminário Físico e Matemático que atraiu a atenção dos estudantes, iniciou a formação de uma biblioteca de matemática na USP e iniciou também a compra de coleções de revistas sobre matemática. Podemos afirmar que Fantappiè estabeleceu um novo modelo, um padrão que mudou definitivamente o rumo do ensino de tal conteúdo no país.

Vale ressaltar que engenheiros da Escola Politécnica consideravam que matemáticos não deveriam ensinar alunos do curso de engenharia. Para eles o ensino da matemática tinha que ser ensinado por professores formados em engenharia, já que não viam utilidade no ensino de matemática baseado em seus fundamentos, apresentado com rigor do ponto de vista lógico, sem preocupações com aplicações imediatas. Isso fez com que alguns conselheiros da Escola Politécnica não aceitassem Fantappiè, defendendo que o ensino de matemática para engenharia deveria ser ministrado por engenheiros.

2.4 A criação de uma disciplina inicial de Cálculo

Fantappiè ficou no Brasil de 1934 a 1939, quando voltou para a Itália e foi substituído, na cátedra de Análise Matemática, por Omar Catunda (1906-1986). Catunda, professor e educador brasileiro era filho de cearenses. Obteve o primeiro lugar no exame para admissão na escola politécnica de São Paulo em 1925. Em 1930 formou-se em engenheiro e em 1933 candidatou-se à cátedra de Geometria analítica e Cálculo Diferencial e Integral, porém não obteve êxito. Contudo foi contratado como assistente por Fantappiè, e sob sua orientação, iniciou estudos sobre a Teoria dos Funcionais Analíticos. O papel como assistente de Fantappiè era dar aulas de exercícios e, frequentemente, ministrar as aulas teóricas no curso do primeiro ano.

Entre 1938 e 1939, realiza estudos de pós-graduação na Universidade de Roma, sobre esse tema. Dessa viagem resulta seu trabalho *Un teorema sugl'insiemi che si riconnette alla teoria dei funzionali analitici*. De volta ao Brasil, é nomeado, interinamente, professor responsável pela cadeira de Análise Matemática e Superior, substituindo Fantappiè que, como dissemos, voltara para a Itália. As aulas ministradas por Catunda, ainda seguiam aquele modelo proposto por Fantappiè, o que, de certa forma, já era esperado, uma vez que, ao assumir as aulas deste conteúdo, Catunda ainda estava muito envolvido com o estilo de condução do curso adotado pelo matemático italiano.

Inicialmente no curso de Análise ministrado por Catunda foram utilizadas apostilas mimeografadas, mais tarde publicadas em primeira edição na forma de livro em sete volumes. Seu livro conhecido como Curso de Análise Matemática, foi um dos primeiros livros sobre o assunto publicados no Brasil, tendo boa aceitação e foi largamente difundido no território nacional, principalmente durante os anos 50 e 60 do século XX. Existem, no

livro de Catunda, muitas definições análogas às que foram dadas por Fantappiè. Contudo observa-se que houve alterações na redação, embora fossem mantidas as mesmas bases teóricas.

Em seu livro, Catunda utiliza-se da linguagem de conjuntos (fundamentada por Cantor) para explicar o conceito de funções. Portanto, em sua obra não são mais utilizadas as noções de variáveis ou de expressões analíticas introduzidas por matemáticos como Cauchy e Euler. Na introdução do conceito de limite em seu livro, Catunda apresenta inicialmente uma história do conceito matemático de limite, trazendo referências às definições de Cauchy. Na sua primeira formalização do conceito de limite, Catunda o descreve da seguinte maneira: “pode-se definir o limite de uma função $y = f(x)$ qualquer, definida em um campo C com ponto de acumulação a da seguinte maneira: dizemos que $f(x)$ tem limite b , ou que $f(x)$ tende a b para x tendendo a a se, quando x varia aproximando-se de a , o valor de y torna-se cada vez mais próximo de b .”

Segundo Catunda, “a noção um pouco vaga de proximidade, ou de aproximação, pode-se tornar mais rigorosa e mais geral quando se usa a noção de vizinhança”. Assim, somente após apresentar limite de uma forma que ele chamou de intuitiva, definiu limite formalmente: “A função $y = f(x)$ tem limite b para x tendendo a a se a cada vizinhança β de b corresponde uma vizinhança α de a , tal que para todo ponto $x \neq a$ do campo C , pertence à vizinhança α , o valor de y esta na vizinhança β ”. Em sua bordagem Catunda também define o conceito de limite a funções no campo real com valores reais, considerando as vizinhanças dos pontos estudados em questão. Na sequência, Catunda demonstra uma série de teoremas sobre limites justificando que os teoremas “servem de base para o cálculo de limites”.

No que diz respeito à continuidade, apresenta uma explicação não muito formal:

“pode-se dizer, de maneira pouco rigorosa, que uma função é contínua quando para pequenas variações da variável independente, ela também sofre pequenas variações”. No entanto, ele define mais adiante a continuidade de acordo com os padrões modernos estabelecidos por Weierstrass na segunda metade do XIX, com o uso de ϵ e δ .

Para tratar do conceito de derivada ele considera duas abordagens: a primeira segue as teorias matemáticas mais rigorosas envolvendo conceitos de vizinhança em torno de um ponto x_o e com o uso de incrementos $\Delta x = x - x_o$ e $\Delta y = y - y_o$, definindo assim o que ele chamou de “razão incremental” de $f(x)$ no ponto x_o o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

A segunda abordagem envolve conceitos estritamente geométricos da interpretação da derivada em que, a partir do desenho da curva da equação $y = f(x)$, ilustra geometricamente a definição algébrica de derivada, como a tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da reta tangente num ponto dado pertencente à curva. Após essas definições, Catunda demonstra as regras de derivação, afirmando que os teoremas sobre essas regras são baseados nos teoremas sobre limites. E ao final descreve, dentre outras coisas, que a noção de derivada não tem só aplicação na física e na mecânica, mas também em ciências como a biologia, a sociologia e a psicologia.

Catunda buscava conciliar sempre que possível aquilo que entendia como “rigor” com aquilo que chamava de “intuição”. Para tanto, considerava que as teorias ensinadas se tornariam intuitivas se elas fossem trabalhadas inicialmente recorrendo a exemplos mais palpáveis ou a desenhos, recorrendo-se sempre que possível à “intuição geométrica” antes de apresentar um determinado assunto de forma “rigorosa”.

No início da década de 1950, a professora Elza Furtado Gomide, a qual era assistente

do professor Catunda, estava ministrando aulas teóricas de Análise Matemática quando ao final de uma de suas aulas fez um momento de reflexão com relação ao ensino da Análise Matemática para estudantes que acabaram de iniciar o curso de Matemática. Elza Gomide questionava se era mesmo adequado ensinar diretamente Análise Matemática aos alunos que ingressavam na Universidade.

Elza Furtado Gomide possuía raízes em uma família de professores, e aos onze anos de idade já falava inglês e francês, o que mostra que desde criança foi bastante incentivada a estudar. Sua formação até os 11 anos de idade aconteceu em casa por meio de seus pais.

Concluiu seu curso ginásial no colégio D. Pedro em São Paulo, no qual seu pai era professor de Matemática. Seu pai por perceber os talentos de Gomide para a matemática sempre a acompanhou como professor de suas turmas, procurando sempre aperfeiçoar o talento concebido a ela.

Em 1942, Gomide ingressou no curso de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo graduando-se no ano de 1944. Paralelamente, cursou também o bacharelado em Matemática na mesma instituição e ao final de 1945 obteve o grau de bacharel em Matemática. Devido ao seu excelente desempenho na graduação, foi convidada pelo professor Omar Catunda para ser professora assistente de Análise Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Vale ressaltar que Elza Gomide teve excelente desempenho na graduação. Anos mais tarde em 1950 defendeu sua tese de doutorado, tornando-se a primeira mulher a obter o título de doutora em Matemática por uma instituição brasileira.

Na opinião de Elza, os alunos ingressantes deveriam cursar num primeiro momento uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, na qual os conceitos fundamentais fossem trabalhados de forma mais manipulativa para, posteriormente, na disciplina de Análise,

serem revistos em uma abordagem mais crítica. Com isso adotava um livro intitulado *A Course of Pure Mathematics* do autor G.H.Hardy (1908), que segundo ela “entrava mais diretamente no Cálculo, sendo os conceitos que a Análise propunha deveriam vir depois, como acontece hoje em dia”.

Segundo Lima (2013), podemos perceber que sua teoria era apoiada em sua própria experiência como aluna do curso. Ao ingressar na Universidade, primeiramente estudou a disciplina de Análise, na ocasião ministrada pelo professor Catunda. Um dos tópicos estudados foi a construção dos números reais via noção de cortes de Dedekind, conteúdo este não compreendido pela grande maioria dos alunos, devido ao fato ,segundo ela, de muitos ainda não possuírem a maturidade matemática necessária para compreender refinamentos teóricos envolvidos naquela cons-trução (LIMA, 2013).

Durante o curso na graduação Elza percebeu que, ao chegar às ideias de diferenciação e integração, os alunos começavam a gostar mais dos conceitos ali aprendidos, que, segundo ela, se justificava pelas situações que davam maiores possibilidades aos alunos de manipularem os conceitos que estavam sendo estudados. Logo, quando professora, passou a defender que, para compreender a teoria que era abordada na disciplina de Análise, o estudante inicialmente deveria passar por um curso no qual os conceitos lhes fossem apresentados com um nível de rigor adequado à sua maturidade matemática.

De que adiantaria um curso com um nível de rigor tão alto quanto aquele adotado, para um aluno que acabara de ingressar na universidade, sem desenvolvimento matemático suficiente para aproveitá-lo integralmente? Podemos perceber que em Lima (2013), Gomide propõe a substituição de um modelo teoricista por outro tecnicista, isto é, de uma disciplina na qual a ênfase estava na apresentação detalhada da teoria e de suas justificativas, para outra em que o foco estivesse nos procedimentos algorítmicos.

Segundo Elza, Catunda lhe deu total liberdade para a modificação da sequência de como eram ensinados o Cálculo e a Análise. Para Elza, Catunda foi importantíssimo no papel de mentor pois pouquíssimos professores davam aos assistentes a liberalidade e o encorajamento que ele proporcionava.

Então, a partir dessas reflexões houve um redirecionamento na maneira como a disciplina seria trabalhada. A abordagem que começou a ser buscada foi de uma disciplina que adotasse um nível de rigor moderado. Devido a isso a intuição do estudante passou a ser mais valorizada, principalmente a intuição geométrica, e iniciou-se a busca por uma abordagem que fosse menos abstrata, porém nem por isso não rigorosa. O primeiro fruto colhido dessas mudanças ocorreu no ano de 1964 com a renomeação da cátedra de Análise Matemática da USP, que passou a se chamar Cálculo Infinitesimal.

Assim outras universidades refletiram na forma de como o Cálculo passou a ser ensinado. Com isso buscaram também incorporar nos seus currículos o Cálculo, com um nível de rigor e de formalismo mais adequado para se trabalhar em uma disciplina destinada aos alunos ingressantes.

Nesse período de transição entre os dois modelos ensinados, muitos professores estavam mais preocupados didaticamente em possibilitar a seus estudantes uma compreensão mais efetiva do ensino do Cálculo, na maioria das vezes rigoroso e formal. Essa concepção deve-se às mudanças ocorridas no perfil dos ingressantes nas universidades.

Até, pelo menos, o final da década de 1960, os estudantes universitários assumiam uma postura mais passiva e não tinham o hábito de questionar. Consequentemente, não cobravam de seus professores condições para que pudessem ter um aprendizado mais significativo. Mas, a partir do início da década de 1970, começou-se a observar uma mudança de postura e de perfil por parte dos universitários.

Professores foram obrigados a buscar outras ferramentas diferentes das usuais. Em São Paulo, por exemplo, houve a implantação de uma metodologia de ensino baseada em roteiros de estudo e trabalhos em grupos. A ideia era de promover uma mudança de um modelo de ensino baseado na “transmissão” de conhecimentos, por parte dos professores, para outro no qual os mesmos fossem construídos pelos estudantes.

Porém grande parte das questões trabalhadas nos roteiros não fornecia bases para que o estudante pudesse perceber em quais contextos aquilo que estava sendo estudado poderia ser aplicado. As atividades propostas privilegiavam os aspectos formais dos conceitos abordados, ao invés de explorarem os aspectos cognitivos dos tópicos estudados.

Alguns docentes da época, defensores do rigor simbólico-formal que era uma das características principais deste curso desde a implantação da Análise Matemática na Universidade, questionavam se o Curso de Cálculo não ficaria muito menos rigoroso do que deveria ser. Até porque mesmo com as mudanças muitos dos alunos continuavam apresentando um rendimento abaixo do esperado na disciplina de Cálculo. Vale ressaltar que isto não era a opinião da grande maioria de docentes da época, não havendo um consenso quanto ao respeito de como o Cálculo deveria ser ensinado.

Assim, o rigor com o qual o conteúdo foi trabalhado variava de acordo com concepções do docente responsável por ministrar aquele conteúdo naquele momento. Para alguns a disciplina de Cálculo era conduzida com níveis de rigor mais altos que somente encontrados nos cursos de Análise e para outros passou a ser conduzida de maneira bastante semelhante à maioria dos cursos de Cálculo ministrados atualmente.

Capítulo 3

Noções Elementares do Cálculo no Ensino Médio

Questionamentos feitos no que se diz respeito ao ensino e aprendizagem de tópicos da Matemática são tratados com muita frequência em congressos e fóruns, com a presença de diversos profissionais de Educação Matemática, numa abordagem temática que busca reflexões sobre as dificuldades e as possibilidades de ações interventivas das pessoas envolvidas com a tarefa educativa, na tentativa de buscar caminhos que ampliem a qualidade do processo ensino aprendizagem da disciplina Matemática.

Grande parte dos alunos queixa-se de não encontrar sentido ou aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula, ou seja, que demonstrem contextualização com a vida cotidiana. Esse fato desencadeia várias consequências, entre as quais podemos apontar a dificuldade na compreensão de diversos conceitos matemáticos que necessitam de conhecimentos anteriores, situação que pode ser comparada a uma fileira de dominós, pois de fato qualquer descuido no espaçamento dos mesmos quando derrubados, causa uma interrupção em todo o processo.

Devido a essa queixa por parte dos alunos, trazemos o seguinte questionamento: Por que o Cálculo Diferencial e Integral não faz parte do currículo do ensino da Matemática no Ensino Médio? Sabemos que o Cálculo Diferencial e Integral é uma das ferramentas matemáticas mais aplicáveis. Porém, o seu ensino tem se restringido a cursos de Educação Superior e cursos preparatórios para Escolas Militares. Com isto perguntas derivadas desse questionamento surgem cada vez mais em foruns de Educação Matemática.

Será que conteúdos como limites, derivadas e integrais não são assuntos apropriados a um aluno do Ensino Médio? Serão esses tópicos impróprios e de difícil compreensão para trabalharmos com os alunos nesse segmento da educação, devendo então ficar restritos ao Ensino Superior? Será que os alunos possuem maturidade matemática suficiente para serem apresentados a esses conceitos?

Se considerarmos o Cálculo Diferencial e Integral com todo seu rigor, certamente eles não terão maturidade suficiente para trabalharem com tais conceitos, visto que tais conteúdos como demonstrações, teoremas e definições são repletos de detalhes que exigem conhecimentos específicos que ainda não são do domínio de um estudante nessa fase de estudo. Porém, o Cálculo, desde que apresentado de modo conveniente como parte integrante e fundamental para a construção das ideias matemáticas, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos, além de ser responsável pela própria formação do cidadão.

A atual conjectura econômica mundial baseia-se no desenvolvimento do conhecimento científico-tecnológico, principalmente das ciências naturais e exatas. O estudo do Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual. Nossos alunos estão inseridos hoje numa realidade diferente de anos atrás; com isto necessitam de novos conteúdos para serem

trabalhados no Ensino Médio.

Sabemos que o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado em conformidade aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). As orientações curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008) preconizam que os alunos concluintes do Ensino Médio saibam: usar Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Analisando tais exigências, podemos perceber que o ensino do Cálculo Diferencial e Integral está em total sintonia com as orientações curriculares. Então porque não preparar os alunos no Ensino Médio, com estratégias que tornem mais amplo o aprendizado dos conteúdos?

Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio auxilia na compreensão de muitas propriedades, entre elas a derivada uma função, ferramenta indispensável para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade, aceleração e posição, bem como os estudos do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), que ficariam muito facilitados no ensino aprendizagem por parte do aluno.

Um outro exemplo de como o Cálculo se inserido no Ensino Médio ajudaria a desenvolver conhecimentos de modo mais natural seria no estudo de funções. Através de seus conceitos seria possível aprender uma gama enorme de características que são de alguma maneira maquiadas no ensino de funções. No Ensino Médio ocupa-se praticamente todo o primeiro ano com formalismos da teoria dos conjuntos, definições de funções injetoras,

bijetoras e sobrejetoras, deixando de lado pontos muito interessantes que se pode apresentar aos alunos: a aplicação de cada função, a visualização do comportamento de cada gráfico, entre outros aspectos.

O professor Geraldo Ávila afirma que “trazer esses conhecimentos do Cálculo ao aluno traria um poder enorme aos estudantes no estudo do tópico de funções”. Segundo ele, “no ensino de funções, se gasta muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura com poucos resultados práticos. Seria mais proveitoso utilizar esse tempo com o ensino das noções básicas do Cálculo e de suas aplicações. Dessa forma, o ensino das funções seria feito de forma contextualizada e integrada, de acordo com a proposta dos PCN’s”.

Como vimos nos capítulos anteriores, no Brasil o Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo das escolas secundárias, mas o modo como era ensinado não podia dar certo, pois era tão somente uma antecipação do modo como era ensinado na faculdade, com excesso de formalismo ou pelo engessamento dos currículos das graduações que não estão em consonância com as etapas anteriores de ensino da Educação Básica.

Até hoje, no Brasil e no mundo, quase todas as tentativas de ensinar Cálculo na Escola Básica falharam. Tais fracassos não deveriam nos surpreender, explica o professor da Universidade de São Paulo, Nilson José Machado em entrevista a uma revista eletrônica.

Na opinião de Nilson, “esse fracasso se deve a essas tentativas não passarem de uma antecipação do modo como o Cálculo é ensinado na universidade e o problema é que nem na universidade o curso de introdução ao Cálculo funciona bem. Como poderia funcionar bem no Ensino Médio?”

Para ele existe uma contradição que deve ser solucionada. Se na faculdade o aluno vai mal no curso de Cálculo, como poderá ir bem num curso de introdução ao Cálculo no Ensino Médio, quando ele sabe menos? No entender de Nilson, o melhor jeito de corrigir

esse problema é justamente no Ensino Médio, onde o estudante conheceria as ideias mais importantes do Cálculo por meio tão somente de funções simples, especialmente as funções polinomiais. Habituar-se as principais ideias do Cálculo no contexto escolar atual e sabendo empregá-las no estudo de funções polinomiais, o estudante está pronto para se sair bem num curso universitário de introdução ao Cálculo.

Porém, atualmente esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados por muitos professores sob o pretexto dos programas de Matemática serem muito extensos e não comportarem a inclusão do Cálculo, justificativa esta vista por Ávila (1996), como um pensamento equivocado, pois, por exemplo, introduzir o conceito de derivada no Ensino Médio não torna o programa relativo a funções mais longo, como pode parecer a princípio; ao contrário, iria trazer um entendimento com mais clareza do que já é ensinado.

Na opinião do matemático, o grande empecilho se deve ao fato da mal estruturação dos programas do Ensino Médio. Para ele, os professores insistem em exercer programas longos, com conteúdo fragmentados e sem significados. Em sua opinião, aproveitar o tempo com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações seria mais proveitoso.

Ao invés de fazer uma menção à falta de base do estudante, quando em processos futuros de estudos de Cálculo forem necessários, devemos estabelecer conceitos básicos e necessários para se aprender as noções básicas do Cálculo. Atualmente, no Brasil, poucas escolas de Ensino Médio incluem os conceitos de limite, derivada ou integral no currículo, ao contrário de outros países. É mais comum encontrarmos uma abordagem significativa do Cálculo Diferencial e Integral em cursos voltados à aprovação em concursos, principalmente militares.

Somos da opinião de que é um erro grave descartar o Cálculo no Ensino Médio, pois se está deixando de lado uma componente relevante para a formação do aluno, no contexto

do ensino atual, que contribui, de maneira expressiva, para o resgate do conhecimento no campo da matemática e suas ramificações.

Pela análise de alguns livros de Matemática no Brasil voltados para o Ensino Médio percebe-se que diversas obras já procuram abordar uma iniciação ao Cálculo Diferencial, porém apresentam algumas carências. Entre os autores que abordam conceitos de Cálculo Diferencial e Integral em suas obras podemos citar como exemplo as obras de Paiva (2004) e Dante (2007), que iniciam com a definição de derivada de uma função em um ponto e de Bianchini e Paccola (2004), que têm como parte integrante do seu livro didático do terceiro ano do Ensino Médio as noções de limite e derivada. Em seu prefácio justificam a inclusão desse estudo à quantidade de aplicações que estes conteúdos têm na atualidade.

Um outro valor benéfico se deve ao fato de que a inserção do Cálculo no Ensino Médio (para que o aluno entre em contato com a disciplina mais cedo) seja um facilitador de transição para o Ensino Superior diminuindo grande taxa de evasão dos cursos superiores, em razão fundamental pelo Cálculo. Trazer atividades que envolvam as ideias intuitivas de limites, que explorem a questão da variabilidade e o cálculo da área de regiões delimitadas por curvas, representadas por funções, podem se mostrar nesse sentido bons caminhos para o trabalho significativo da matemática no Ensino Médio.

Além disso, proporcionar aos estudantes a utilização de recursos gráficos pode contribuir para um melhor entendimento desses tópicos, auxiliando a promover a autonomia dos estudantes. É importante salientar que inserir o Cálculo no Ensino Médio não é tarefa fácil, isso porque o entendimento de novas simbologias é complicado para boa parte dos alunos.

Trabalhar os conceitos do Cálculo no Ensino Médio, tal como se encontram organizados no Ensino Superior, não resolveria o problema; mas ao contrário, faria somente com

que este fosse antecipado. Deve então haver uma proposta de incentivo aos alunos, procurando métodos que facilitem o entendimento da disciplina. Assim ensinar Matemática em qual nível que for sem levar em conta as ideias básicas do Cálculo será sempre um ensino realizado com lacunas, brechas.

Com isso optamos em nossa metodologia de ensino a construção de conceitos através da resolução de problemas. Ao nosso ver isto proporciona ao aluno uma oportunidade de pensar por si mesmo, construindo estratégias e argumentações para a resolução e ainda relacionar diferentes conhecimentos na busca pela solução de um problema. Logo, nossa proposta o ensino está centrada no aluno, é ele quem constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, posteriormente formalizados pelo professor.

3.1 O infinito e os infinitesimais

No Ensino Médio e por que não dizer no Ensino Fundamental, percebemos uma camuflagem dos problemas e ideias básicas do Cálculo. Conteúdos que fazem parte de uma interligação de significados com o Cálculo são muitas das vezes tratados de maneira oculta ou até mesmo ignorados no Ensino Básico da Matemática e, o professor, em muitos casos, é o principal responsável por essas atitudes.

Podemos citar como exemplos: as transformações das dízimas periódicas em frações, muitas das vezes é tratada como uma regra da aritmética; o tratamento da área de um círculo como apenas uma fórmula geométrica; a soma infinita de uma progressão geométrica de razão q ($0 < |q| < 1$) dada por uma fórmula algébrica; o tratamento dado de maneira superficial ao conceito de funções. São estudados exemplos de funções crescentes mas não se analisa o quanto essas funções crescem, discussão da dualidade entre

o discreto e o contínuo são ignorados no processo de construção dos números irracionais. Isto anos mais tarde no Ensino Superior gerará muitas das dificuldades em trabalhar com esses devidos conceitos que de certa forma já deveriam estar de maneira básica já trabalhada com os alunos.

Entretanto, muitos desses tópicos ligados ao Cálculo possuem de maneira impregnada a ideia de infinito, a qual muitos dos nossos alunos no Ensino Médio têm dificuldades de trabalhar.

É sabido que o infinito é um dos ingredientes fundamentais para a construção da ponte entre o discreto e o contínuo. Em Rezende (2013), é visto que todo número pode ser encarado como uma quantidade finita de uma soma discreta infinita. Na ideia da integral definida e da derivada, ao aproximarmos uma curva por uma linha poligonal ou a área de uma região plana pela área de uma região poligonal, estamos trabalhando com processos *ad infinitum* e são esses processos que constroem e caracterizam as ideias e as operações básicas do Cálculo (REZENDE, 2013).

Em minhas diversas aulas no Ensino Médio, muito frequentemente pergunto aos alunos as ideias que eles tem de infinito na Matemática. Muitas são as frases que são ditas: O infinito é algo que não tem fim, é um número muito grande e portanto não pode ser contado ou até o infinito é um número que não existe. Em seguida baseado nas respostas dadas por eles faço o seguinte questionamento: se o infinito pode ser encarado como algo que não tem fim será que ele tem um começo ,isto é, um início? Muitos deles afirmam que tem começo, com destaque para o número zero responsável pelo início de tudo. Com isto faço o seguinte questionamento de caráter simplório: Os números inteiros então não estão inseridos na ideia de infinito? Alguns alunos concordam que o zero não pode representar esse papel. E com isso causo uma perplexidade muito grande aos

alunos pois não conseguem construir respostas com alto grau de completude para meus questionamentos.

Historicamente podemos afirmar que o infinito sempre foi um tema controverso que afetou a mente humana. A sua aceitação como objeto de estudo na Matemática não foi pacífica, algo ainda muito recente, apesar da longa história que lhe está associada.

Na Grécia antiga já se discutia sobre ideias do conceito de infinito sendo Zenão de Eléia um filósofo grego um dos primeiros a usar a ideia de Infinito. Para mostrar aos seus adversários no que consistia a unidade ou repouso do ser, evidenciando que o movimento ou pluralidade é impossível, Zenão inventou os paradoxos (para = contra; doxa = opinião), que permitiam a ele refutar as teses apresentadas como meras opiniões, vias do não ser, características das confusões causadas pela percepção humana. Um dos exemplos clássicos dos paradoxos de Zenão é o da corrida entre Aquiles (o herói mais veloz da mitologia grega) e a tartaruga. Segundo Zenão, numa disputa entre os dois, se fosse dada uma pequena vantagem à tartaruga, Aquiles jamais a alcançaria. Isso porque se o espaço é divisível ao infinito, Aquiles sempre deveria passar por um ponto dividido entre o infinito e o ponto de partida, ou seja, o espaço será sempre dividido pela metade, impossibilitando o movimento. Isso significa que em tempo finito, jamais alguém poderá percorrer uma distância infinita. De fato imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1 km. Quando o atleta chegar na metade do caminho, ainda faltará 0,5 km para chegar ao seu destino. Quando ele percorrer a metade dessa metade do caminho, ainda faltará 0,25 km e quando percorrer a metade dessa distância ainda faltará 0,125 km e assim, sucessivamente. Afirma Zenão que a série é interminável e haverá sempre alguma distância, por menor que seja, entre dois competidores.

Observe que a distância que separa ambos se tornará tão próxima de zero quanto

ele quiser. Para isso teremos que repetir deslocamentos acima descritos um número suficientemente grande de vezes. O paradoxo de Zenão só se sustentava por não levar em conta o fator tempo, ao somar sucessivamente as distâncias percorridas,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$$

Alguns filósofos pensam que Zenão estava rebatendo a ideia de que o espaço e o tempo eram infinitamente divisíveis, que seu objetivo ao descrever uma situação absurda em que Aquiles tem de transpor uma série de distâncias que ficam progressivamente mais curtas era mostrar que o espaço não podia ser dividido dessa maneira. Contudo Zenão não afirma que Aquiles seria capaz de alcançar a tartaruga num tempo finito. Ele sabia perfeitamente que isso aconteceria, de fato o que afirma a impossibilidade de que Aquiles efetuasse um número infinito de atos. Um outra situação bem curiosa é conhecida como paradoxo do Hotel de Hilbert.

Considere um hotel com infinitos quartos numerados pelos números naturais. Certa noite, o hotel está com todos os quartos ocupados com um hóspede. Normalmente, seria impossível o hotel hospedar mais um hóspede. Porém chega um novo hóspede e o recepcionista que o recebe informa que é capaz de lhe arrumar um quarto.

Ele pede que o hóspede do quarto um vá para o quarto dois, o hóspede do quarto dois vá para o quarto três, e assim por diante, ou seja o hóspede do quarto n vai para o quarto $n + 1$. Mais tarde chega um ônibus com infinitos hóspedes para se acomodarem no hotel. O recepcionista sem nenhuma dúvida os recebe e informa que é capaz de achar quartos para todos.

Pede para que cada hóspede do quarto n vá para o quarto $2n + 1$. Desse modo apenas os quartos de números ímpares estariam ocupados, deixando os quartos de número par

desocupados para os novos hóspedes.

Isso dá um resultado importante e não intuitivo, a situação todo quarto está ocupado e nenhum novo hóspede pode ser acomodado não são equivalentes quando existe um número infinito de quartos. O paradoxo ainda pode ser estendido para infinitos ônibus com infinitos passageiros.

As propriedades de coleções de objetos infinitos são bastante diferentes daquelas das coleções de objetos finitos. Em um hotel com um número finito de quartos, o número de quartos com numeração ímpar é claramente menor que o número total de quartos (desde que haja mais de um quarto). Entretanto, no Hotel de Hilbert, a quantidade de quartos com numeração ímpar é igual ao número total de quartos.

Como vimos no primeiro capítulo, ideias como essas por mais simplórias que fossem fizeram matemáticos séculos mais tarde trabalharem com conceitos de indivisíveis e posteriormente infinitésimos.

Em minhas aulas com o objetivo de conhecer as primeiras ideias que os alunos têm sobre a palavra infinitésimo costumo fazer a seguinte pergunta: Vocês já ouviram falar sobre infinitésimos? Vocês lembram de alguma palavra, frase ou figura que esteja relacionada com infinitésimo? Perante isto, os alunos apresentaram as seguintes ideias: “Ouvi relacionado a dízimas onde tem sempre números se repetindo ou não onde você sempre vai colocando um número até o infinito.”

Outros dizem que já viram essa palavra associada a tipos de figuras (fractais). Porém não sabem explicar de maneira clara o que estão querendo dizer. Outros que possuem familiares, com algum grau de estudo com Cálculo, trazem na outra aula respostas como pontos infinitamente pequenos ou, até mesmo, como um número infinitamente próximo de zero. Vale ressaltar que nem sempre respostas como essas surgem de maneira imediata,

sendo a resposta relacionada a dízimas a mais mencionada.

Como meu objetivo na aula não é introduzir a teoria formal de limites e sim dar ferramentas para que se um dia alguns deles se defrontarem com Cálculo no Ensino Superior não tenham tantas dificuldades, dou a seguinte definição de infinitésimo aos alunos: infinitésimo é um número, indefinidamente pequeno. Poderíamos também conforme Bell (1992), considerá-lo “como a menor parte na qual se poderia fracionar um continuum - como, por exemplo, a linha reta”.

Com essa definição consigo esclarecer muitas dúvidas pertinentes. Entretanto, muitos entendem o conceito, mas acham difícil imaginar tal situação ou dizem que é difícil definir um padrão para infinitésimo, e difícil de imaginar. Explico-lhes então que por menor que, eu pegue um número real, sempre posso pegar outro menor, a metade, por exemplo. Sempre dá para diminuir, se nós imaginarmos um número bem pequeno, 0,0000...1 sempre dá para colocar um número, com uma casa decimal a mais que ele vai ser menor ainda.

Em algumas aulas quando estou por algum motivo recordando o conceitos de dízimas periódicas, faço o seguinte questionamento aos alunos: O que podemos dizer se compararmos a dízima periódica 0,999... em relação ao número 1. É menor? É igual?

Muitos respondem que são muito próximos ou que 0,999... é um pouquinho menor e até mesmo que se arredondar 0,999... fica igual a 1.

Contudo nenhum aluno por enquanto foi capaz de sinalizar que a resposta correta que seria $0,999... = 1$, isto é, que 0,999... e 1 representam o mesmo número.

Mas na verdade onde queremos chegar é representar a dízima periódica de outra maneira, como uma soma de infinitos termos, que em geral são representadas por uma progressão geométrica de razão entre 0 e 1.

Por exemplo a dízima 0,4444... pode ser vista como a seguinte soma:

$$S = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots$$

representando a soma de termos de uma sequência (progressão geométrica) de razão é igual a 0,1. Para dar continuidade a essa explicação iremos resgatar a fórmula da soma finita dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1.$$

Espera-se que o professor, quando trabalhar com o aluno progressões aritmética e geométricas, faça uma demonstração de como as fórmulas são obtidas. Na minha opinião é essencial tal demonstração para que o aluno simplesmente não as decore e sim entenda todo o artifício que foi usado por trás da demonstração.

Logo podemos obtê-la da seguinte forma: Seja S_n a soma de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ finita.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1}$$

Multiplicando ambos membros da equação por q tem-se que :

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + \dots + a_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \dots + a_1q^n$$

Subtraindo a primeira equação da segunda temos:

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 = a_1(q^n - 1)$$

Logo

$$S_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1)$$

E assim chegamos a

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

Assim, a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q é dada em função do primeiro termo, da razão e do número de termos. Em particular nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de zero para n suficientemente grande (FERREIRA, 2014).

Com isto teremos que quando n tende a infinito a soma S_n converge para:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q},$$

para valores $0 < |q| < 1$.

Voltando à dízima periódica 0,9999... e a escrevendo como no exemplo temos que

$$0,9999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$$

Observe que essa soma representa o somatório dos termos de uma Progressão Geométrica infinita cuja razão é dada por 0,1. Logo sua soma pode ser obtida pelo processo anterior:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,9}{1 - 0,1} = 1.$$

Isto é, o limite da soma parcial dos termos da Progressão Geométrica infinita em questão é igual a 1 quando tomamos n tendendo para o infinito (FERREIRA, 2014).

Ou seja, a medida que mais termos da sequência são acrescentadas às somas parciais, mais próximo de 1 estaremos. Para trazermos o conceito de limite aplicado a sequências podemos nos valer dos conhecimentos dos alunos com relação às Progressões Geométricas.

Intuitivamente, dizer que o número real L é limite da sequência (a_n) significa afirmar que, à medida que o índice n cresce, os termos a_n tornam-se e se mantém tão próximo de L quanto se deseje. Sequências em que é possível encontrar esse valor L são conhecidas como sequências convergentes. Observe que para sequências n deve ser um valor inteiro (valores discretos), enquanto que para função está definida em um intervalo contínuo.

Observemos a sequência $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ com n pertencendo ao conjunto dos naturais com exclusão do zero. Tal sequência pode ser explicitada da seguinte forma:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Observemos que a medida que n cresce indefinidamente (tendendo ao infinito), o termo $a_n = \frac{1}{n}$ tende a zero, isto é, seu limite quando n vai para valores cada vez maiores (infinito) a sequência está indo pra zero.

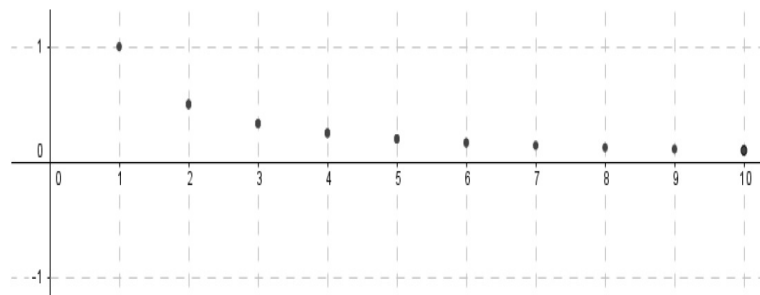


Figura 3.1: Sequência 1 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Voltando ao paradoxo de Aquiles e a tartaruga, a experiência fictícia de Zenão gera a infinidade de números:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

que correspondem aos pontos da imagem da função, $x: N \rightarrow R$ definida por

$$x(n) = \frac{1}{2^n}$$

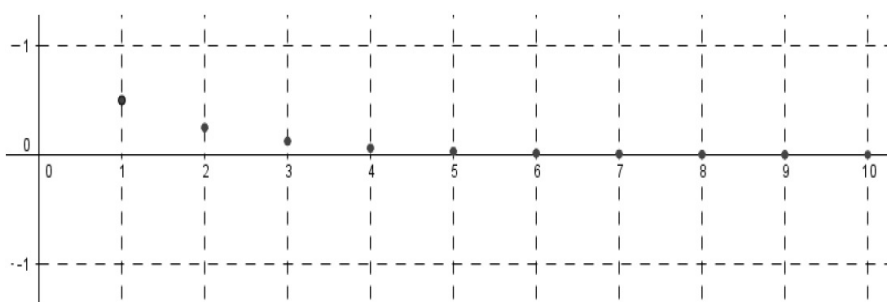


Figura 3.2: Sequência 2 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Um fato interessante pode ser mostrado através da sequência anterior. O aluno deve perceber sem muitas dificuldades que à medida que n cresce, os termos da sequência decrescem. O que na verdade eles irão observar é que ao se escolher quaisquer dois números naturais $m > n$, os respectivos termos x_n e x_m da sequência satisfarão a desigualdade $x_m < x_n$, isto é sequência é decrescente com todos os seus termos positivos.

Agora se pedirmos aos alunos que imaginem um intervalo de centro zero e raio muito pequeno, por exemplo: $(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$. Vemos que :

$$\frac{1}{2^{30}} = \frac{1}{1.073.741.824} < \frac{1}{10^9} < \frac{1}{2^{29}} = \frac{1}{536.780.912}$$

e com isso percebemos que $\frac{1}{2^{30}} \in (-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$.

Na verdade, como para todo $n \geq 30$ temos que $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{30}}$, teremos que para todo $n \geq 30$, $\frac{1}{2^n} \in (-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$. A conclusão é que a partir de um certo valor de n , a saber,

$n = 30$, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $\left(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9}\right)$.

É de bom tom agora que o professor peça aos alunos que façam essa mesma análise com raios de medidas diferentes (de preferência menores) e cheguem à intuição de que o que foi afirmado acima não é só restrito ao intervalo $\left(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9}\right)$. Não importando o quão pequeno ele seja, sempre existirá, para essa escolha de raio, um inteiro positivo n_0 a partir do qual todos os termos da sequência pertencerão ao intervalo. Nesse sentido entendemos que os termos da sequência se aproximam de zero quando n cresce.

Em relação ao conceito de limite aplicado a funções, a idéia é construída apoiada a análises comportamentais de fácil entendimento e captada de forma intuitiva pelo aluno. Através de alguns exemplos mais aplicados e simplórios podemos introduzir suas ideias. Por exemplo, imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente devido ao aquecimento que é submetida. Se x é o comprimento do lado, a área da placa é dada por $A = x^2$. Podemos observar sem nenhuma dificuldade que quanto mais x se aproxima (avizinha) de 3, a área se aproxima (tende) a 9. O que estamos querendo dizer é que quando x se aproxima de 3, x^2 se aproxima de 9.

Para a construção do conceito de limite de uma função é feito inicialmente o estudo do comportamento de uma função $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio. Por exemplo, seja: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Observe primeiramente que $x = 2$ não pertence domínio da função, isto é não está definida quando $x = 2$ (FERREIRA, 2014).

Feito isso observe as tabelas abaixo:

x	0	0,5	1	1,5	1,7	1,99	1,999
$f(x)$	2	2,5	3	3,5	3,7	3,99	3,999

Tabela 1: Aproximação pela esquerda ($x < 2$)

x	4	3,5	3	2,5	2,3	2,01	2,001
$f(x)$	6	5,5	5	4,5	4,3	4,01	4,001

Tabela 2: Aproximação pela direita: ($x > 2$)

Os cálculos feitos acima correspondem ao estudos dos valores assumidos pela função f por valores próximos de 2, tomando esses valores tanto à esquerda quanto à direita de 2.

Com isto podemos ver que, ao aproximarmos cada vez mais de 2 a função aproxima-se de 4, isto é quanto mais x se aproxima de 2, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ se aproxima de 4. O número 4 é chamado limite de $f(x)$ quando x está próximo de 2.

A ideia que queremos passar aqui ao aluno é que quando os valores de x são tomados cada vez mais próximos de a esperamos que os valores de $f(x)$ fiquem mais próximos de um valor L muito bem definido. Escrita de uma maneira informal, o que estamos querendo dizer que para qualquer função $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de $x = a$, se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L , para todos os valores suficientemente próximos de a , dizemos que f tem limite L quando x tende para a .

Devemos chamar atenção dos nossos alunos para a situação em que a função esteja definida em a e limite da $f(x)$ por valores próximos de a seja diferente de $f(a)$. Por exemplo, seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1; \\ 5 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Temos que para valores próximos de 1 pela esquerda e para valores próximos de 1 pela direita:

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$f(x)$	2	2,8	2,98	2,998	2,9998

Tabela 3: Aproximação pela esquerda: ($x < 1$)

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,001
$f(x)$	4	3,2	3,02	3,002	3,002

Tabela 4: Aproximação pela direita: ($x > 1$)

Com isto podemos ver que aproximarmos cada vez mais de 1 a função aproxima-se de 3, mas $f(1) = 5$, o que mostra que limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é diferente de $f(1)$. (Iezzi, 2005)

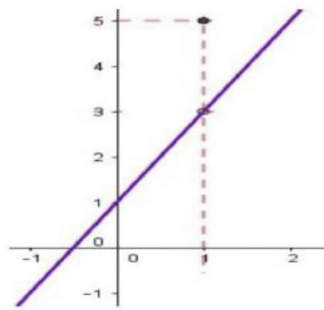


Figura 3.3 Limite (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Assim, calcular o limite da função $f(x)$ em um ponto $x = a$ é estudar o quanto a função $f(x)$ se aproxima de um valor L quando x aproxima de a . Vale ressaltar que na determinação do limite de $f(x)$, quando x tende para a , não interessa como f está definida em a (nem mesmo se f está realmente definida), importando apenas como f está definida para valores de x na vizinhança de a .

Pela análise gráfica, isto é, apenas observando o gráfico da função podemos dar uma ideia melhor ao nosso aluno do que estamos tentando dizer.

Observe os gráficos abaixo de três funções:

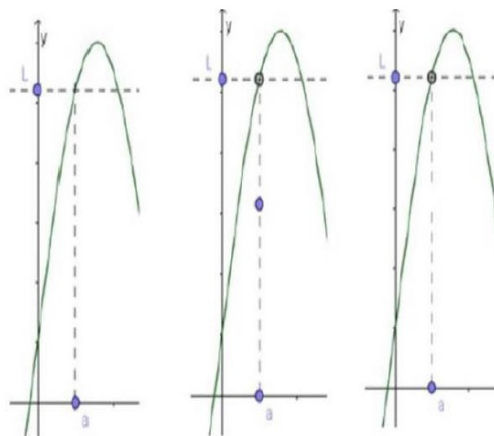


Figura 3.4 Análise do Limite (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Note que no terceiro gráfico $f(a)$ não está definido e no segundo gráfico $f(a) \neq L$.

Porém, em cada caso, não importando o que acontece em a , o limite da $f(x)$ quando x tende a a é igual a L .

Seria também interessante trazer ao conhecimento de nosso aluno o estudo do comportamento de funções em que os valores de $f(x)$ não tendem a um número ou seja, não existe limite.

Tomemos por exemplo a função $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, definida para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, à esquerda e à direita de 1, temos que

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	4	16	100	10000	1000000

Tabela 5: Aproximação pela esquerda ($x < 1$)

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	1	4	16	100	10000	1000000

Tabela 6: Aproximação pela direita ($x > 1$)

Observamos nas duas tabelas que os valores da função são cada vez maiores, na medida em que x se aproxima de 1. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando valores para x bastante

próximos de 1. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número e não existe limite de $f(x)$ quando x tende a 1. Logo devemos explicar para os alunos que para tal situação devemos usar o símbolo de ∞ , sendo nesse caso $+\infty$ (mais infinito).

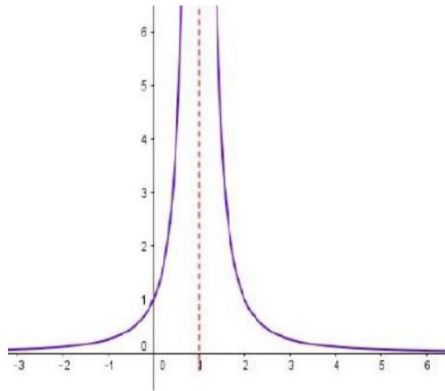


Figura 3.5 Função 1 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Portanto é simplesmente uma maneira de expressar a não existência do limite, onde o símbolo de ∞ não é um número. É válido chamar a atenção dos alunos que, diferentemente da função anterior $f(x)$ que cresce ilimitadamente quando x tende a 1, podemos também ter funções em que o inverso ocorra, isto é, quando x se aproxima de a os valores da $g(x)$ decrescem ilimitadamente. Podemos dar como exemplo $g(x) = -f(x)$ isto é, $g(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ definida para todo x real e $x \neq 1$. Se efetuarmos os cálculos iremos perceber, podemos tornar os valores de $g(x)$ tanto menores quando desejarmos ou seja, menores que qualquer número negativo, tomando valores de x bastante próximos de 1 e sendo assim o limite de $g(x)$ quando x tende a 1 será $-\infty$ (menos infinito).

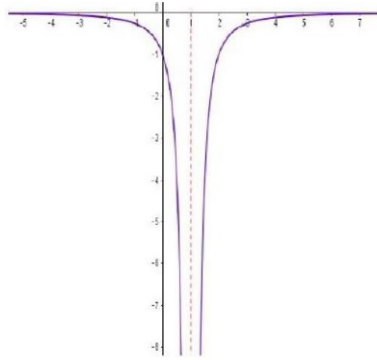


Figura 3.6 Função 2 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Com essas explicações dadas é sugerido que o professor finalize tal assunto com o seguinte função: Seja $h(x) = \frac{1}{x-1}$ para todo x real e $x \neq 1$. Assim como nas anteriores iremos atribuir valores próximos de 1, tanto por valores maiores quanto menores.

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	-1	-2	-4	-10	-100	-1000

Tabela 7: Aproximação pela esquerda ($x < 1$)

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	1	2	4	10	100	1000

Tabela 8: Aproximação pela direita ($x > 1$)

Feito esses cálculos, o aluno não terá dificuldade em perceber que se x assume valores próximos de 1 à esquerda de 1 os valores da função decrescem ilimitadamente e se x assume valores próximos de 1 à direita, então os valores da função crescem ilimitadamente, isto é, o limite de $h(x)$ quando x tende a 1 por valores a esquerda é $-\infty$ e o limite a $h(x)$ quando x tende a 1 por valores a direita é $+\infty$.

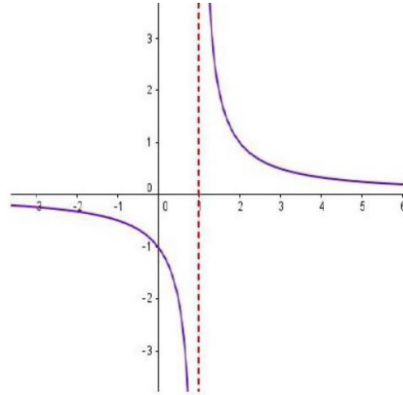


Figura 3.7 Função 3 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

No intuito de oferecer um amplo espectro no estudo de limites para um aluno de Ensino Médio, iremos finalizar tal estudo tomando valores de x arbitrariamente grandes (positivo ou negativo) e ver o que acontece com a $f(x)$ (limites no infinito). Para começarmos a abordagem a essa teoria tomemos o seguinte exemplo: Seja $f(x) = \frac{x+2}{x}$ para todo x real e $x \neq 0$. Atribuindo a x valores de tal forma que cresça ilimitadamente temos que:

x	1	5	10	100	1000	10000
$f(x)$	3	1,4	1,2	1,02	1,002	1,0002

Tabela 9: Valores de x crescendo ilimitadamente

Analisando a tabela o aluno provavelmente irá conjecturar que quanto maior o valor de x , mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. Isto é, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuímos para x valores cada vez maiores. Ou seja o limite de $f(x)$ quando x tende a mais infinito é 1. Podemos também considerar a mesma função porém atribuindo a x valores de tal forma que x decresça ilimitadamente.

x	-1	-5	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	-1	0,6	0,8	0,98	0,998	0,9998

Tabela 10: Valores de x decrescendo ilimitadamente

E observaremos que a medida que x decresce através de valores negativos, os valores da função se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar $f(x)$ tão próximo

de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos a x valores cada vez menores, ou seja, o limite de $f(x)$ quando x tende a menos infinito é 1.

Com o intuito de verificar o raciocínio lógico dedutivo do aluno não mencionamos no corpo do texto o caso de limites infinitos no infinito, e o trataremos somente em uma das atividades. Porém, entendemos que o professor pode dar uma atenção maior a esse tipo de limite quando tratado por funções polinomiais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ em que $m \geq 1$ e $a_m \neq 0$.

Pode-se pedir que o aluno considere a função polinomial $p(x) = 3x^3 - 25x^2 + 4x - 7$ e avalie seu comportamento para valores muito grandes de x (tendendo a $+\infty$) e valores muito pequenos de x (tendendo a $-\infty$), registrando suas observações como nos exemplos anteriores em tabelas e tirando as conclusões necessárias.

Espera-se que o aluno perceba que quanto maior os valores de x mais a função polinomial, no exemplo anterior, caminha para mais infinito e quanto menor os valores de x mais a função se emcaminha para menos infinito.

E através de outros exemplos de mesmo caráter exploratório, o professor poderia fazê-los perceber que os limites calculados nos exemplos dados foram ditados pelo termo de maior grau do polinômio.

Observando esses aspectos envolvendo os conceitos infinitos e infinitésimo dos nossos alunos, podemos nos perguntar por que conhecimentos tão importantes para o ensino da Matemática e ferramenta de caráter complementar para compreensão da intuição de limite sejam subtraídos das mentes de nossos alunos. Acreditamos que esse fato se deve aos seguintes fatores: o professor desconhece a complexidade da dualidade do finito com o infinito, há interesse do professor em esconder tais estudos no intuito de não complicar suas aulas; ou até mesmo fatores envolvidos na formação do professor como a falta da

discussão desses conceitos de maneira mais contundente nos cursos de graduação, que poderia ser feita de maneira mais humanista e filosófica.

Devido a esses fatos iremos sugerir atividades a seguir com a proposta de introduzir essas ideias de maneira simples e intuitiva sem nos prender a definições de limites e suas propriedades. Nosso objetivo aqui, sem intenção dogmática, é propiciar aos alunos o desenvolvimento das principais ideias do Cálculo para um melhor aprendizado de problemas cotidianos ou para facilitar seus estudos num curso superior que oborde Cálculo. As atividades a seguir foram aplicadas em um grupo de alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Madre Teresa de Calcutá, localizada no bairro de Realengo, zona oeste do Rio de Janeiro, durante os meses de outubro e novembro de 2016 sendo gasto em média um tempo de 50 minutos e no máximo dois tempos de aula dependendo da atividade para a realização das tarefas.

A seguir listaremos essas atividades, e ao final de cada atividade proposta faremos uma análise a priori e a posteriori dos trabalhos propostos com a participação dos alunos.

A atividade a seguir pode parecer simples porém queremos determinar qual o grau de familiaridade que os alunos possuem com conceitos de infinito e infinitésimo.

Atividade 1.1 : Responda às perguntas abaixo:

a) Vocês já ouviram falar sobre infinito ? E infinitésimos? Vocês lembram de alguma palavra, frase ou figura que esteja relacionada com os dois termos ?

b) A soma infinita dos elementos a seguir é conhecida como a série de Grandi.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

Você consegue expressar o valor do resultado dessa soma? Você encontrou somente um valor? Descreva seu procedimento.

c) A quantidade de grãos de areia que existem numa praia representa uma quantidade muito grande ou uma infinidade? Explique sua resposta.

d) Em sua opinião qual conjunto que possui mais elementos? os dos números pares ou o dos números ímpares? Justifique.

e) Se compararmos os conjuntos da pergunta anterior com o conjunto dos números naturais, qual possui mais elementos? Justifique.

f) Você consegue me dizer quantos números racionais existem entre 2 e 3 ? E entre $\frac{5}{2}$ e 3 ?

g) Dê exemplos de números irracionais. Em sua opinião, qual conjunto possui o maior número de elementos: Racionais o irracionais ?

Análise a priori: Esta atividade tem por objetivo coletar o grau de informação que os alunos tem pelo assunto. Com a respostas dessas perguntas temos o intuito de explicar argumentos que comprovem tais respostas e futuramente trazer a resposta correta aos

fatos abordados.

Na atividade a seguir abordaremos um dos paradoxos de Zenão.

Atividade 1.2 : Imagine que um arqueiro dispara uma flecha em um alvo. Observe que para chegar ao alvo inicialmente a flecha deverá percorrer metade da distância entre o alvo e o arqueiro. Uma vez percorrida essa distância a flecha deve percorrer metade da distância entre sua posição e o alvo e assim sucessivamente, como mostra a imagem abaixo (SILVA, 2013):

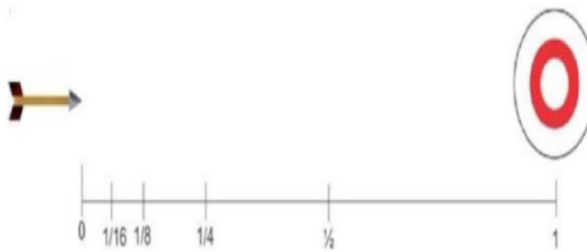


Figura 3.8 Distância Percorrida Pela Flecha (Fonte: Silva, 2013).

- Podemos modelar essa situação usando alguma função já estudada?
- A flecha chega até o alvo? Por quê?
- Relacione o problema com o conteúdo de Progressões Geométricas.

Análise a priori: Espera-se que o aluno perceba que a distância entre a flecha e o alvo é uma aplicação da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, na qual x é o número de vezes que contamos a metade do trajeto entre a flecha e o alvo. O objetivo aqui é que o aluno perceba que não importa quão grande x seja tal valor nunca será zero, mas irá se aproximar de zero cada vez mais. Espera-se um pouco de dificuldade do aluno na justificativa dos fatos a

serem percebidos.

Atividade 1.3 : Observe as figuras abaixo:

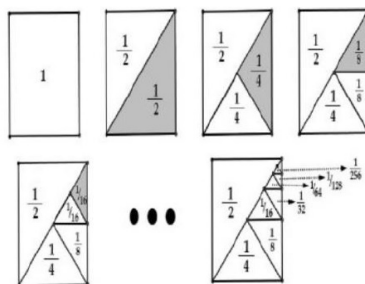


Figura 3.9: Divisões do Quadrado (Fonte: Amorim, 2013).

Como podemos ver do primeiro quadrado para o seguinte, dividimos ao meio a área total e tomamos uma metade, que destacamos de cinza conforme se vê no segundo quadrado. A nova área é novamente dividida ao meio e tomamos uma metade e assim sucessivamente. Com isto podemos destacar a seguinte sequência (AMORIM, 2013):

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$$

- A sequência acima é uma progressão? De que tipo?
- Qual a razão dessa progressão? Determine os dez primeiros termos dessa sequência.
- Podemos afirmar que os termos dessa sequência estão se aproximando de algum valor? Qual?
- Em relação à pergunta anterior, você acha que em algum momento os termos dessa sequência equivalerá o valor respondido anteriormente?
- A partir dos termos da sequência anterior vamos construir uma nova sequência formada pelas somas parciais de seus termos. Observe cada uma das somas parciais através da figuras abaixo:

do início, com 1 (uma) unidade de área.

Atividade 1.4 : Considere a função $f(x) = x^2$ (MOLON, 2013).

a) O que você entende por domínio e imagem de uma função? Qual o domínio e a imagem da função acima? Construa o gráfico dessa função.

b) Analisando os valores de $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 3$ pela esquerda complete a tabela abaixo:

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$			7,84				

Tabela 11 : Aproximação pela esquerda ($x < 3$)

Os valores estão se aproximando de qual número? Na sua opinião chegaremos a encontrar esse número como resultado?

c) Analisando os valores de $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 3$ pela direita complete a tabela abaixo:

x	4	3,5	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001
$f(x)$							

Tabela 12 : Aproximação pela direita ($x > 3$)

Os valores estão se aproximando de qual número? Na sua opinião chegaremos a encontrar esse número como resultado?

d) Observando os resultados anteriores podemos dizer que quanto mais x está próximo de 3 a função $f(x) = x^2$ está mais próxima de qual valor?

e) Complete as seguintes tabelas:

x	1	5	10	20	50	100	1000
$f(x)$							

Tabela 14: Valores de x crescendo

x	-1	-5	-10	-20	-50	-100	-1000
$f(x)$							

Tabela 13: Valores de x decrescendo

O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de x crescem cada vez mais?

O que acontece com os valores de $f(x)$ à medida em que os valores de x decrescem cada vez mais?

f) Escreva com suas palavras as conclusões que podem ser tiradas dessas observações.

Análise a priori: Esta atividade está associada à ideia intuitiva de limite de uma função nas proximidades de um ponto. A partir da curiosidade de alguns alunos findamos introduzindo de maneira superficial a simbologia para representar esse fato. Neste trabalho, como o objetivo era introduzir as noções intuitivas do Cálculo, aplicadas à função quadrática, (de natureza contínua), a noção de limite está sendo tratada de forma intuitiva e não rigorosa. Vale ressaltar que devido à curiosidade dos alunos foi proposta para casa a função $f(x) = \frac{1}{x}$ para completar uma tabela similar à abordada anteriormente, com as discussões dos resultados encontrados; trabalhando assim a ideia de limites no infinito.

3.2 Taxa de variação: O problema da variabilidade

O conceito de variação de uma função está ligado ao estudo do seu comportamento num delimitado trecho do seu domínio. Ou seja, é feita uma análise de como a função que modela um certo problema se comporta, podendo ser crescente, decrescente ou até mesmo manter uma estabilidade no intervalo do domínio requerido.

Existem várias aplicações na vida real relativas às taxas de variação. Eis algumas: velocidade, aceleração, taxas de crescimento populacional, taxas de desemprego, taxas de produção, taxas de fluxo de água. Enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando em que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

Embora as taxas de variação se refiram frequentemente ao tempo, podemos estudar a taxa de variação de uma variável em relação a qualquer outra variável. Vê-se, então que é importante que a ideia de taxa de variação faça parte do conhecimento matemático de todos. Todavia, sabemos que esta não é a realidade da maior parte da população.

O conceito de derivada, como dito antes, já fez parte do currículo de escolas secundárias do Brasil. Nos dias de hoje algumas instituições escolares de Ensino Médio procuram resgatar esse conceito introduzindo ideias e atividades que abordem tal conceito. Observa-se que alguns livros tentam, ao final do capítulo de funções, resgatar e relacionar tal conceito, porém nem sempre é feito de maneira satisfatória.

Nesta seção, apresentaremos o conceito de derivada como uma medida de variação (taxa de variação instantânea), ou seja, o conceito de velocidade, uma das ferramentas usadas de caráter motivacional. Em nenhum momento estamos preocupados em alimentar conceitos relacionados a teoremas e técnicas para o cálculo de derivadas de uma função.

Na linha de pensamento pretendida aqui, a apresentação do conceito de derivada pela definição formal neste momento não traz benefícios à aprendizagem do aluno, pois muitas vezes traz como foco principal as regras de derivação, fugindo do pensamento primordial da relação da variação entre grandezas.

Iremos primeiramente abordar o conceito de taxa de variação média, que exprime a razão com que a função cresce, decresce num dado intervalo do domínio. Contudo

partiremos do pressuposto que o aluno já tenha estudado anteriormente temas como: reta secante, função afim, função quadrática, coeficiente angular da reta entre outros tópicos necessários para um entendimento completo das ideias propostas.

Definimos a **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $I = [x_1, x_2]$ com $x_1 < x_2$ por:

$$TV_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ou ainda, definindo $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$, com Δy e Δx correspondendo respectivamente, ao acréscimo quando $f(x)$ varia de $f(x_1)$ até $f(x_2)$ e quando x varia de x_1 a x_2 . Assim podemos escrever a taxa de variação média por:

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Além disso, fazendo a seguinte manipulação algébrica $x_2 = x_1 + \Delta x$ teremos

$$TV_m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Na Física quando abordamos problemas envolvendo a posição de um móvel em função do tempo, a taxa de variação média é usualmente chamada de velocidade média entre os instantes procurados.

Vamos analisar o seguinte exemplo: Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 metros por segundo. Sua altura em metros após t segundos é dada por $s(t) = 10t - 4,9t^2$. Encontre a velocidade média para o período de tempo de 0,5s até 1,0s e 1,5s até 2,0s.

Resolvendo algebricamente encontraremos que:

$$s(1, 0) = 5,1m$$

$$s(0, 5) = 3,775m$$

Logo

$$TV_m = \frac{5,1 - 3,775}{1,0 - 0,5} = \frac{1,325}{0,5} = 2,65$$

Agora analisando o outro intervalo temos

$$s(2, 0) = 0,40m$$

$$s(1, 5) = 3,975m$$

Logo

$$TV_m = \frac{0,40 - 3,975}{2,0 - 1,5} = \frac{-3,975}{0,5} = -7,15$$

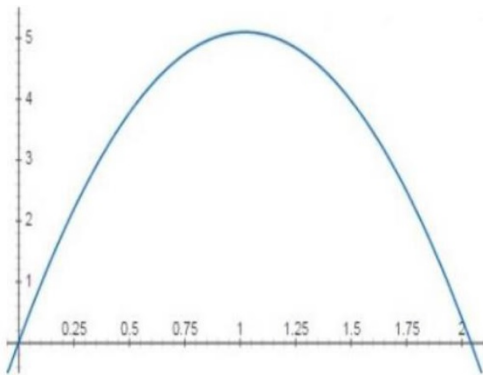


Figura 3.11: Trajetória (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Quando, em uma trajetória, o móvel se desloca para o lado positivo, temos uma variação de espaço positiva o movimento é chamado progressivo, pois teremos uma velocidade positiva. Agora, se um móvel tem uma variação de espaço negativa o movimento é chamado retrógrado, pois teremos uma velocidade negativa.

A taxa de variação média de uma função f no intervalo $I = [x_1, x_2]$ também admite uma interpretação geométrica. De fato, considere a reta que passa pelos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ do gráfico de f . O coeficiente angular da reta que passa por P e Q no intervalo $I = [x_1, x_2]$ é dado por:

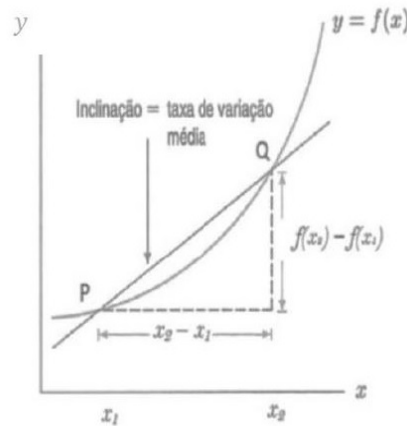


Figura 3.12: Taxa de Variação Média (Fonte: Lima, 2012).

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TV_m$$

Dessa forma geometricamente mostramos ao aluno que o coeficiente angular da reta que passa por P e Q é a taxa de variação média de f no intervalo $I = [x_1, x_2]$.

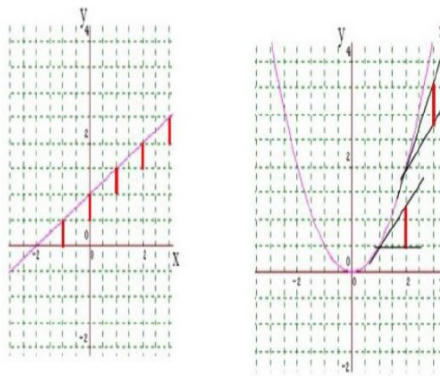


Figura 3.13: Taxa de Variação (Fonte: Resende, 2003).

Porém, embora a taxa de variação média seja útil, é interessante mostrar ao aluno que podem surgir situações específicas em que ela pode apresentar limitações. O seguinte

exemplo pode ser dado como motivação a essa afirmação: Se uma pessoa viajando em seu automóvel atinge um obstáculo como por exemplo uma árvore, não é a velocidade média considerada durante o tempo de viagem do início do movimento até o choque com a árvore que tem relevância. Estamos interessados em saber a sua velocidade no instante da colisão fator determinante para saber se o indivíduo sobreviverá o acidente ou não.

Urge então estudar uma taxa de variação no instante da colisão, isto é, uma taxa instantânea da distância em relação ao tempo.

O conceito de taxa instantânea está intimamente ligado ao conceito geométrico de reta tangente, por isso achamos melhor fazer pequenas ressalvas na apresentação deste tópico aos alunos. O primeiro contato do aluno com o conceito de reta tangente está ligado à geometria com o estudo de círculos.

De fato, em curvas como circunferências ou elipses, a reta tangente é a que tem um único ponto comum com a curva.

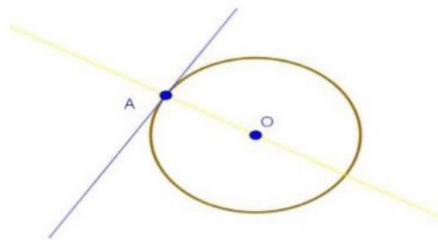


Figura 3.14: Tangente 1 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Entretanto, de forma geral, uma tangente a uma curva num ponto pode interceptá-la em vários outros pontos.

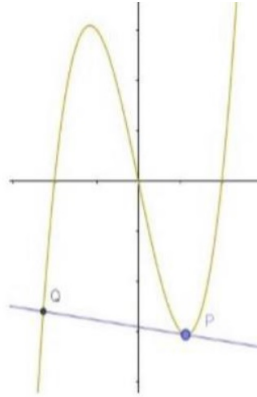


Figura 3.15: Tangente 2 (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Percebemos que não é fácil aos alunos a determinação geométrica da reta tangente a uma curva num ponto P . Esta dificuldade deve-se ao fato de os alunos não relacionarem a reta tangente a uma curva num ponto P com a posição limite das retas secantes que passam por P e por um ponto da curva Q_n que se aproxima infinitamente do ponto P .

Agora se quisermos manter o ponto P fixo e traçar retas que passam por P e por pontos pertencentes a f e cada vez mais próximos de P , perceberemos que a medida que Q se aproxima de P o número h fica cada vez mais próximo de zero. Com essa observação é razoável esperar que o coeficiente angular da reta secante que passa por P e Q fique próximo de um determinado valor real.

Notamos que a tangente é a posição limite da reta secante que passa pelos pontos P e Q . Aliando esse conceito à taxa de variação instantânea chegaremos à seguinte conclusão: A taxa de variação instantânea é representada pelo coeficiente angular da reta tangente à curva da função f no ponto P .

Para uma associação mais significativa vamos abordar o seguinte exemplo: suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto de uma torre, 450 m acima do solo. Encontre velocidade da bola no instante 5s. (Despreze a resistência do ar.)

Historicamente Galileu descobriu através de experimentos que a distância percorrida

por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele estava caindo. Se a distância percorrida após t segundos for chamada de $s(t)$ e medida em metros, então a lei de Galileu pode ser expressa pela equação (LIMA, 2012):

$$s(t) = 4,9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade no instante $t = 5s$ se refere a não termos um intervalo. Porém podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média (taxa de variação média) em intervalos cada vez mais próximos de $5s$.

Intervalo de tempo	Velocidade Média
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Tabela 15: Velocidade Média

Parece que à medida que encurtamos o período de tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 metros por segundo. Assim a velocidade instantânea em $t = 5s$ é de 49 metros por segundo. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola e considerarmos os pontos $P(a, 4.9a^2)$ e $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, teremos a inclinação da reta secante PQ dada por

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h - a)} = 9.8a + 4.9h,$$

Que igual a velocidade média no intervalo de tempo $(a, a + h)$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ deve ser igual a inclinação da reta tangente em P .

A variação instantânea da função é feita ao analisar a variação do declive da reta (através do coeficiente angular) num intervalo muito pequeno do domínio, e esta taxa de variação instantânea TV_i é representada pelo coeficiente angular m_{PQ} da reta tangente à curva da função f no ponto P .

Vamos formalizar de maneira algébrica o conceito de taxa de variação instantânea. Considere a taxa de variação média num intervalo dado do domínio da f . A partir da expressão dessa taxa chegaremos a expressão da taxa de variação instantânea.

Seja $I = [x_0, x_0 + \Delta x]$ um intervalo do domínio de uma função f , sendo Δx um acréscimo diferente de zero. O cálculo da taxa de variação média nos conduzirá a seguinte expressão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Como vimos anteriormente a taxa de variação instantânea foi associada ao coeficiente angular da a reta tangente no ponto P , por meio da aproximação da reta secante à reta tangente.

Assim, teremos que no intervalo $I = [x_0, x_0 + \Delta x]$ a taxa de variação média será dada pelo coeficiente angular da reta secante à curva nos extremos do intervalo.

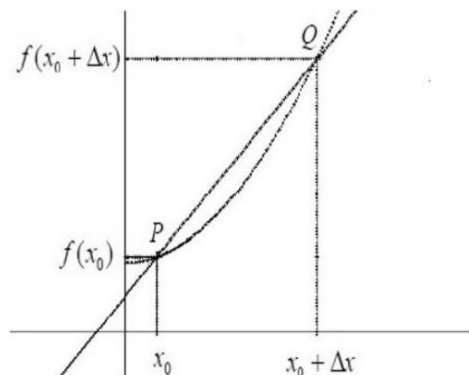


Figura 3.16: Reta Secante (Fonte: Lopes, 2008).

Como estamos interessados em analisar o comportamento de x_0 devemos assim como no exemplo dado considerar intervalos muito próximos os quais x_0 pertença, isto é, devemos analisar o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x \rightarrow 0$.

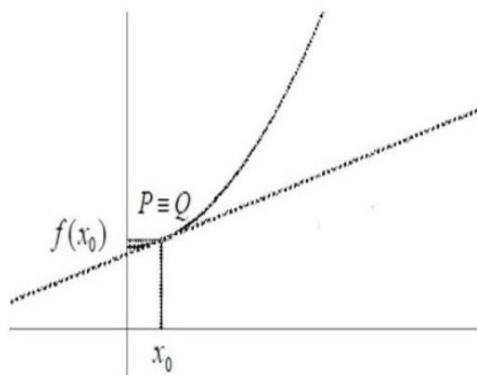


Figura 3.17: Variação Instantânea (Fonte: Lopes, 2008).

Chegaremos então que a razão $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ com $\Delta x \rightarrow 0$ corresponderá ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto x_0 . Desta forma a taxa de variação instantânea num ponto x_0 será dada para o qual $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ se aproxima quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Através dos estudos feitos podemos então enunciar a derivada como a taxa de variação instantânea da função f no ponto x_0 e a representamos por $f'(x_0)$.

$$TV_i = f'(x_0)$$

Através desses fatos podemos mostrar uma caracterização diferente de como é feito o estudo de funções no Ensino Médio. Lá a ideia de função é estabelecida, em geral, não no contexto da variabilidade, mas em termos de uma correspondência entre os valores das variáveis x e y e em seguida estudada uma série de propriedades algébricas de funções subordinando seu significado somente ao exercício.

Armado dessas teorias pode-se mostrar ao aluno, por exemplo, que a partir do estudo de variações podemos caracterizar a função afim $f(x) = ax + b$ como aquela cuja que a

taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é um valor constante. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \frac{ax_0 + a\Delta x + b - ax_0 - b}{\Delta x} \\ &= \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a\end{aligned}$$

Assim temos que o coeficiente angular da reta tangente à função afim em qualquer ponto é o valor a , isto é, a taxa de variação (derivada) em relação à função afim é um valor constante.

Outra análise que merece destaque se refere à função constante $f(x) = k$, onde k é um número real. Repetindo os passos feitos na análise da função afim o aluno irá perceber que o coeficiente angular da reta tangente à função constante em qualquer ponto será igual a zero. De fato,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k - k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Ou seja, a taxa de variação (derivada) em relação à função constante é zero.

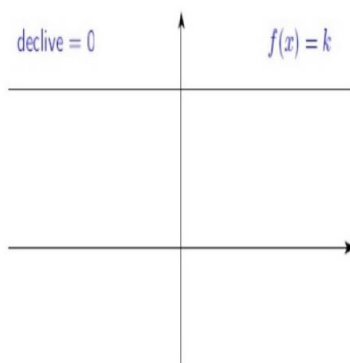


Figura 3.18: Derivada em Relação a Função Constante (Fonte: PROFMAT, 2014)

E no que diz respeito à análise da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ esta pode ser caracterizada como a função cuja a taxa de variação da taxa de variação da quantidade y em relação a x é constante, o que equivale a dizer que a variação da inclinação da reta tangente ao gráfico é constante.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{\Delta x} \\ &= \frac{2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2ax_0 + a\Delta x + b)}{\Delta x} \\ &= 2ax_0 + a\Delta x + b \end{aligned}$$

Como estamos considerando Δx como um incremento muito pequeno, sem perda de generalidade podemos fazer $\Delta x = 0$ e com isso vamos mostrar ao aluno que as retas tangentes à função quadrática terão coeficiente angular igual $2ax_0 + b$, isto é, a taxa de variação (derivada) em relação à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dada pela função $f'(x) = 2ax + b$.

Pensamos ser interessante como motivação, que agora os alunos sejam desafiados a tirar as conclusões parecidas considerando as funções de terceiro grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Espera-se que através dos exemplos anteriores o aluno siga os mesmos passos, chegando à conclusão de que o coeficiente angular da reta tangente à função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ seja igual a

$$\frac{\Delta x(3ax_0^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2 + 2bx + b\Delta x + c)}{\Delta x}$$

$$= 3ax_0^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2 + 2bx + b\Delta x + c$$

Sem perda de generalidade podemos fazer $\Delta x = 0$ e chegaremos a

$$f'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$$

Cabe ao professor nesse momento observar se os alunos estão tendo o entendimento necessário para prosseguir na análise. A ideia é generalizar os resultados com uma função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Repetindo de maneira idêntica os processos anteriores encontraremos como o coeficiente angular da reta tangente (derivada) a função $f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1$.

Feito isso, pode - se mostrar com clareza para o aluno o seguinte fato:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

E com isso podemos escrever que

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = g(x + \Delta x),$$

fazendo com que o aluno perceba que a derivada de uma função polinomial será representada por uma outra função polinomial g .

Outro fato importante a mencionar é que no Ensino Médio o aluno é apresentado às coordenadas do vértice da função do 2º grau por meio da utilização da fórmula de Bháskara, tendo em mente que a abscissa do mesmo é a média aritmética entre as raízes reais x_1 e x_2 (quando estas existem), obtendo-se a ordenada do vértice a partir da imagem

da abscissa. Excluem-se assim por esse método, as situações em que a parábola não admite raízes reais. Além disso, o assunto nem sempre é apresentado ao aluno de forma contextualizada, e a maneira mais natural de apresentá-lo seria a busca do ponto que representa o extremo (máximo ou mínimo) da função quadrática, sendo a abscissa o ponto onde esse extremo é atingido e a ordenada o valor extremo assumido.

Entretanto quando o professor considera somente a abscissa do vértice como a média aritmética entre as raízes, ele parte, como já dissemos, da premissa de que existem raízes reais, o que nem sempre ocorre. De fato, se o aluno estiver trabalhando com modelos matemáticos descritos por funções do 2º grau pode não fazer sentido para o aluno considerar raízes da mesma e, nesse caso, a busca pelo extremo da função estaria comprometida. Agora, se utilizarmos a interpretação geométrica da derivada tendo uma de suas idéias relacionadas ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto pode-se obter as coordenadas do vértice da parábola sem considerar as possíveis raízes da função. Ao aluno já foi apresentada anteriormente a derivada da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ como a função $f'(x) = 2ax + b$. E partindo do fato de que, no vértice da parábola, a reta tangente é horizontal e, portanto, possui coeficiente angular zero podemos relacionar algebricamente esses fatos:

$$f'(x_v) = 2ax_v + b = 0$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Isto de fato apresenta uma outra visão ao aluno do conceito, relacionando o conceito de derivada ao estudo de extremos de uma função. Caberia ao professor trazer ao aluno as pontas soltas dos conceitos apresentados até a esse momento, amarrando-as em uma

só definição. Isto é, fazer com que o aluno chegue às seguintes conclusões: Que $f'(x) > 0$ significa dizer que a reta tangente é ascendente, ou ainda, que o gráfico da função tem imagem crescente em certo intervalo; se, por outro lado, $f'(x) < 0$ a reta tangente correspondente é descendente, ou ainda, que gráfico da função possui imagem decrescente em certo intervalo; e, finalmente, se $f'(x) = 0$ a reta tangente correspondente é paralela ao eixo das abscissas.

Utilizamos como exemplo a função quadrática $f(x) = x^2$ e suas retas tangentes, para perguntar ao aluno o que ocorre quando o coeficiente angular da reta tangente à função muda de negativo para positivo?

Trazendo essa mesma estrutura a função $f(x) = -x^2$, pode se perguntar o que ocorre quando o coeficiente angular da reta tangente à função muda de positivo para negativo.

Essa é uma ótima oportunidade para o professor trabalhar com o conceito de máximos e mínimos locais (extremos locais) e máximos e mínimos locais e/ou absolutos de uma função, trabalhando de maneira superficial a teoria.

As definições abaixo estão expostas de maneira formal. Porém o que se intenciona é dar uma ideia ao aluno de extremos locais e absolutos:

- Uma função $f: D \rightarrow R$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio de f .
- Uma função $f: D \rightarrow R$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio de f .
- Uma função tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$.
- Uma função tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio,

se existe intervalo aberto I , tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$.

Nas figuras abaixo representamos o gráfico de duas funções:

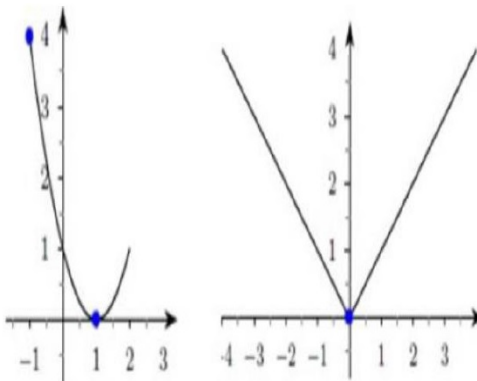


Figura 3.19: Funções (Fonte: PROFMAT, 2014).

Na primeira figura temos a função $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x - 1)^2$. Na segunda figura temos a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|$. Observe que a primeira função possui máximo absoluto em $x = -1$ e mínimo absoluto em $x = 1$, enquanto a segunda função possui mínimo absoluto em $x = 0$ e não possui máximo absoluto.

No caso das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2$ mencionadas anteriormente teremos que a função $f(x) = x^2$ possui um mínimo local e absoluto em $x = 0$ e a função $f(x) = -x^2$ possui um máximo local e absoluto também em $x = 0$.

Relacionando os conceitos anteriores com a reta tangente e a teoria acima de máximo e mínimos, os alunos têm condições de chegar às seguintes conclusões: Se o sinal de $f'(x)$ mudar de positivo para negativo em c , então $f(x)$ tem um máximo local em c . Se o sinal de $f'(x)$ mudar de negativo para positivo em c , então $f(x)$ tem um mínimo local em c e Se $f'(x)$ não mudar de positivo para negativo, ou vice-versa, em c , então f não tem máximo e nem mínimo locais em c .

Cabe ao professor nesse momento fazer com que o aluno não chegue a uma conclusão falsa de que basta a derivada ser zero no ponto estudado para que este seja máximo ou

mínimo da função. Pode - se pedir ao aluno que calcule a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto zero, chegando como resposta a zero. Porém traçando o gráfico da função poderemos mostrar que a função em questão não possui máximo ou mínimo local em $x = 0$. Na verdade ela sequer apresenta extremos locais.

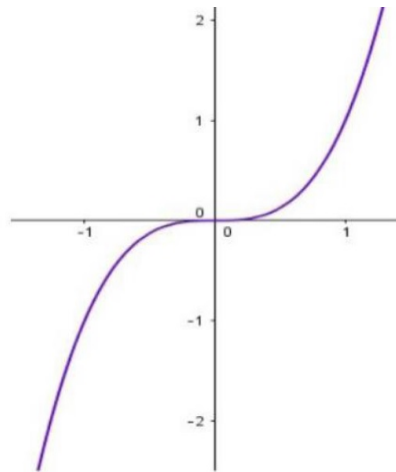


Figura 3.20: Função $f(x) = x^3$ (Fonte: Elaborada pelo Autor).

Para melhor entendimento do aluno sobre a variabilidade, explorando a ideia de velocidade de crescimento de algumas funções, é interessante propor o seguinte problema: Analise as três funções abaixo no intervalo $[0,5]$ (LOPES, 2008).

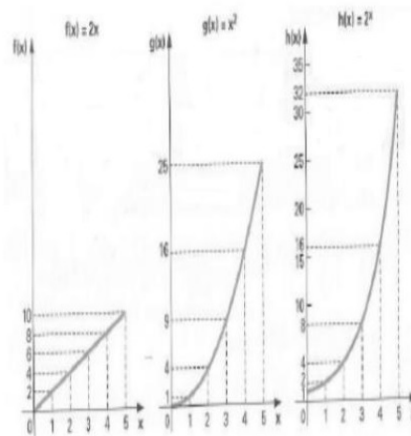


Figura 3.21: Variação (Fonte: Lopes, 2008).

Complete a tabela abaixo:

INTERVALO DE X	TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE $(f(x) = 2x)$	TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE $(g(x) = x^2)$	TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE $(h(x) = 2^x)$
[0,1]			
[1,2]			
[2,3]			
[3,4]			
[4,5]			
[0,5]			

Tabela 16: Taxa de Variação

Através dos resultados obtidos na tabela anterior vamos analisar a relação as taxas de variação da função afim, quadrática e exponencial.

Observe que os valores de $f(x)$ crescem 2 unidades cada vez que x varia uma unidade, já os valores $g(x)$ e $h(x)$ crescem de forma diferente quando x varia uma unidade.

Podemos afirmar que, apesar de as três funções serem crescentes no intervalo $[0; 5]$, elas crescem com taxas diferentes. Observamos que a taxa de de variação média da função polinomial do primeiro grau é constante e igual a dois em todos os intervalos. Observe também que a função exponencial cresce mais rapidamente nos últimos intervalos.

Como de fato geometricamente a taxa de variação instantânea é o coeficiente angular da reta tangente, é cauteloso analisar alguns exemplos em que a derivada não existe.

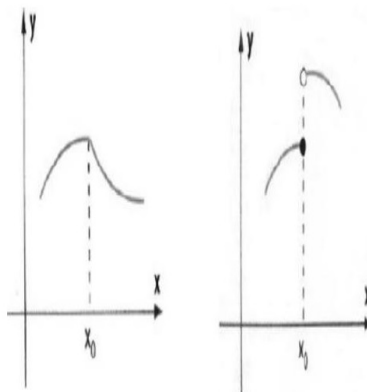


Figura 3.22: Derivada não existe (1) (Fonte: Mota, 2014).

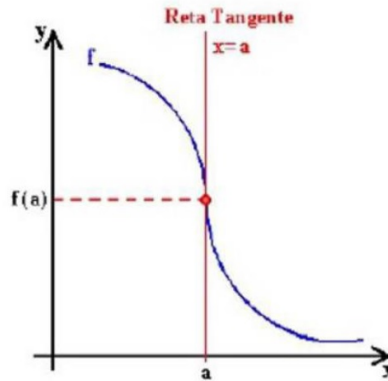


Figura 3.23: Derivada não existe (2) (Fonte: Lima, 2012).

Observe que quando a função muda bruscamente de sentido isto é forma um bico, ou uma descontinuidade (representa um salto) a derivada não existe naquele ponto. E destaca-se também uma reta paralela ao eixo y , a qual não possui coeficiente angular, por tangente de noventa graus não estar definida.

A seguir abordaremos algumas atividades que serão aplicadas em sala de aula, envolvendo taxa de variação média e taxa de variação instantânea e faremos uma análise a priori dos objetivos dessas questões.

Atividade 2.1: A posição de um corpo, em função do tempo pode ser dada pela função $s(t) = 3t + 4$, com $0 \leq t \leq 11$, onde s denota a posição do móvel em metros e t é o tempo em segundos (LIMA, 2012).

a) O que significa determinar velocidade média de um móvel num determinado intervalo de tempo?

b) Calcule a velocidade média desse corpo em cada um dos seguintes intervalos de tempo: $[2; 3]$; $[2, 5; 9]$; $[5, 6; 10]$; $[0; 11]$.

c) Qual o coeficiente angular da reta $y = 3x + 4$?

d) O que você pode concluir observando a resposta dos itens anteriores ?

Análise a priori: Essa atividade tem por objetivo estimular a percepção do aluno de que a taxa de variação de uma função afim é constante em qualquer intervalo de tempo considerado e é igual ao coeficiente angular da reta obtida ao representarmos graficamente a função afim.

Atividade 2.2: A posição de uma bola abandonada em queda livre (desprezando a resistência do ar) pode ser modulada pela função $s(t) = 4,9t^2$ onde s é dado em metros e representa a bola no instante t , dado em segundos, após o início da queda. Considere que o tempo total da queda seja de 10 segundos (LIMA, 2012).

a) Calcule a velocidade média da bola nos intervalos de tempo: $[0; 2]$; $[3; 4]$; $[5, 5; 6, 8]$; $[9; 9, 5]$.

b) O que acontece numericamente com a velocidade média quando a bola vai se aproximando do solo ?

c) Calcule velocidade média da bola no intervalo $[4, 4 + \Delta t]$

d) Se a variação Δt fosse tão pequena (muito próxima de zero) que pudesse ser desprezada, qual seria a velocidade média no item anterior?

e) O que você entende por velocidade instantânea? Qual a velocidade instantânea da bola no instante $t = 5s$?

Análise a priori: Nesta atividade, esperamos que os alunos percebam que a taxa

de variação de uma função quadrática não é constante, diferente do que acontece com a função afim. Espera-se que o aluno perceba também a velocidade média da bola aumenta à medida em que vai aproximando do solo; e por fim relacionar a velocidade instantânea com os resultados obtidos nos últimos itens.

Atividade 2.3: Os desenhos abaixo representam reservatórios com a mesma capacidade e altura. Temos torneiras enchendo cada um dos reservatórios e vamos admitir que a vazão da água é a mesma para todos eles e constante (LOPES, 2008).

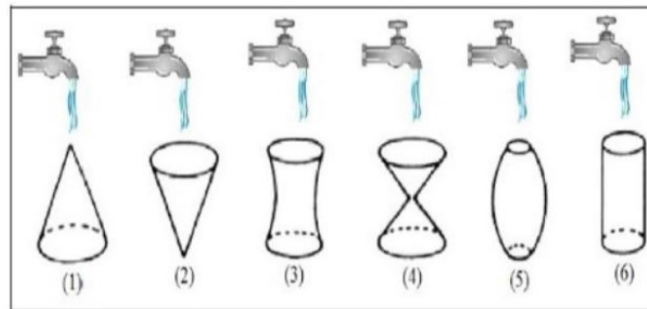


Figura 3.24: Reservatórios (Fonte: Lopes, 2008).

Analisando o comportamento do nível de água no decorrer do tempo relacione a forma do pote com o gráfico da variação da altura em função do tempo de cada um deles. Justifique seu raciocínio.

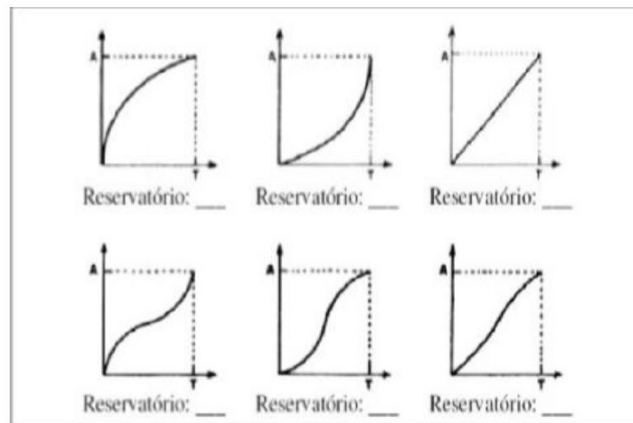


Figura 3.25: Representação Gráfica (Fonte: Lopes, 2008).

Análise a priori: O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno descreva de que maneira a altura varia em função do tempo no início, meio e fim do processo, isto é, a velocidade de crescimento a partir da forma do recipiente. É válido ressaltar que todas as funções são crescentes, visto que a altura aumenta com o decorrer do tempo.

Atividade 2.4: Pedro faz o trajeto de sua casa a pé. Faz sempre o mesmo trajeto e percorre 2.700m. Sai às 7h de casa e chega à escola 7h e 30min. Na aula de Matemática de quarta-feira, o professor pediu aos alunos que representassem graficamente tempo x distância de seus trajetos de ida à escola daquela semana. Pedro apresentou os gráficos, observando que o trajeto sempre tinha sido o mesmo e que a diferença estava na forma de fazer o trajeto (LOPES, 2008):

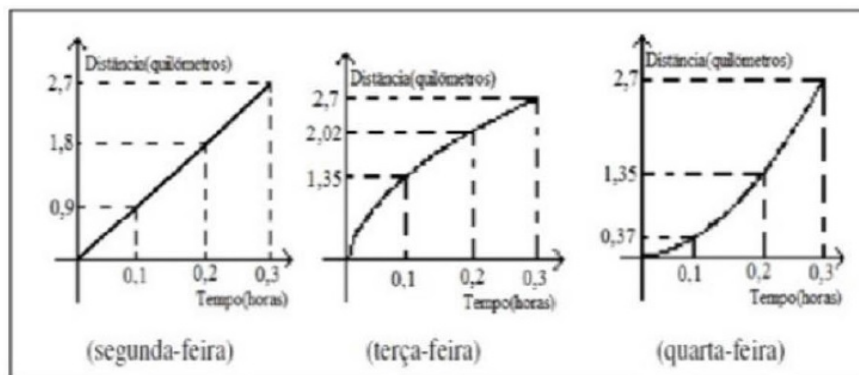


Figura 3.26: Evolução Gráfica (Fonte: Lopes, 2008).

a) Calcule a velocidade média com que Pedro estava caminhando em cada um dos dias, nos intervalos de tempo considerados.

Intervalos de Tempo (hora)	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira
	Velocidade média (quilômetros por hora)	Velocidade média (quilômetros por hora)	Velocidade média (quilômetros por hora)
$t=0,0$ e $t=0,1$			
$t=0,1$ e $t=0,2$			
$t=0,2$ e $t=0,3$			

Tabela 17: Velocidade Média de Pedro

b) Se for considerado o intervalo entre a hora da saída de casa e a hora da chegada na escola, em qual dos dias Pedro andou mais rápido?

Análise a priori: Esperamos que os alunos percebam sem maiores dificuldades as diferenças entre as taxas de variação nos intervalos dados, analisando qual função apresenta por exemplo a taxa de variação constante e qual função apresentar uma maior taxa de variação no intervalo correspondente ao início e o fim do total do trajeto.

3.3 Uma ideia intuitiva por aproximação de áreas

O cálculo de áreas de regiões planas (curvas) é um problema de natureza geométrica mas, que sua solução passa pelo domínio do Cálculo. Desde o ensino fundamental o aluno aprende a calcular a área de regiões planas como retângulos, quadrados, triângulos, trapézios, etc...

Então quando abordo em sala de aula áreas sob o gráfico em determinado intervalo $[a,b]$ dado, envolvendo funções polinomiais do primeiro grau os alunos sem muita dificuldade conseguem chegar a um resultado satisfatório. Usando somente os conceitos sobre

o cálculo de áreas que já conhecem, estudantes observam que como o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau é uma reta e identificam a região do gráfico limitada pela reta e pelo eixo OX como um triângulo ou como a união de um triângulo com um retângulo, sendo nesse caso a área total é obtida como a soma das áreas das duas figuras, ou até mesmo um trapézio.

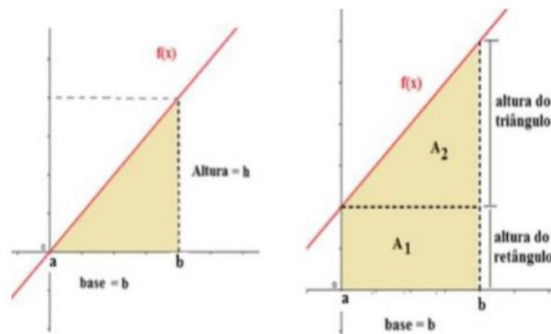


Figura 3.27: Áreas (Fonte: Molon, 2015).

Porém, grande parte dos alunos sente uma dificuldade enorme no cálculo da área de uma região que não pode ser diretamente comparada a uma figura plana conhecida, como, por exemplo, calcular a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ num intervalo dado.

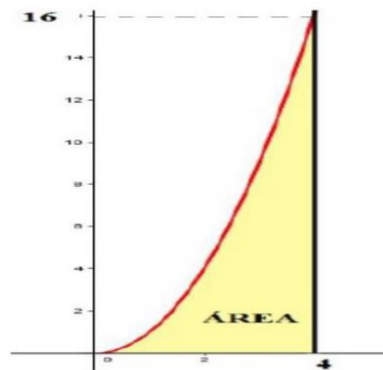


Figura 3.28: Áreas (Fonte: Molon, 2015).

Em algumas aulas no Ensino Médio abordo tal problema. Interessantemente alguns alunos de maneira intuitiva apresentam respostas bastante curiosas a essa atividade,

utilizando a aproximação por triângulos e por retângulos, figuras às quais estão familiarizados para o cálculo de áreas, estimando alguns pontos sobre o gráfico para efetuarem seus cálculos. Alguns alunos dizem as seguintes frases: “Professor coloca vários triângulos aí dentro da figura ou coloca retângulos que ficam melhor encaixados no desenho ou até mesmo uma mistura de triângulos com retângulos dando a ideia de trapézios”.

Aproveitando tal intuição a apresento de maneira introdutória o software Geogebra aos alunos. Por a escola em que trabalho não possuir laboratório de informática sou obrigado a fazer somente uma exposição no auditório com meu notebook. Como sabemos o Geogebra é um software de geometria dinâmica, caracterizada como uma ferramenta auxiliar no ensino de diversos tópicos da matemática com destaque para a questão da visualização, para as múltiplas representações (algébricas, gráficas e tabulares) e das possibilidades de experimentação e investigação para a sala de aula.

Outra vantagem se deve ao fato de ser um programa livre, de código aberto e ainda possui ferramentas de autoria para criar materiais de ensino interativos na web facilitando o acesso a essa ferramenta. Além disso possui interface simples e menus intuitivos que facilitam toda questão de manipulação do programa.

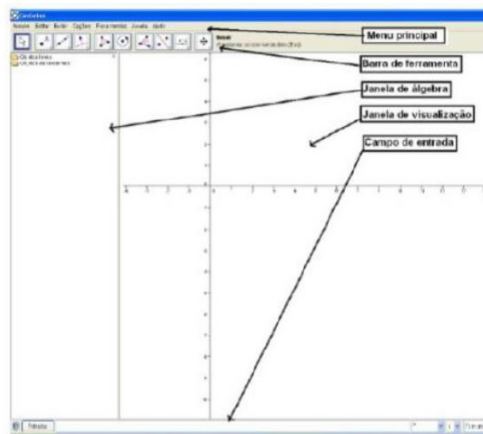


Figura 3.29: Interface do Geogebra (Fonte: Monteiro, 2011).

A escolha do programa para introduzir o conceito de área de figuras um pouco mais complexas se deve ao fato de trabalharmos futuramente com aproximações, sendo difícil a visualização em papel ou quadro das modificações ocorridas no gráfico em função de alterações nos coeficientes da função. Com o software Geogebra, torna-se possível essa visualização, além de dar um sentido dinâmico as representações.

A recepção a essa nova maneira de trabalhar os tópicos com o auxílio do computador estimula grande parte do corpo discente. Como sabemos, as tecnologias de certa forma invadem e compõem o cotidiano de diferentes formas e em diferentes lugares, permeando praticamente todas as áreas do conhecimento humano. Elas habitam o cotidiano de tal forma que já fazem parte de nossa natureza humana, e portanto, se articulam com nosso sistema cognitivo de tal forma que não conseguimos pensar sem seu auxílio.

Porém a utilização de ferramentas tecnológicas no cotidiano das salas de aula em todos os níveis de educação não é visto como algo simples, a escolha de determinado tipo de tecnologia altera profundamente a natureza do processo educacional e a comunicação entre os participantes. É preciso refletir sobre as pesquisas e captar os aspectos envolvidos em implementações dessa natureza para caminhar dentro dessas questões levantadas.

Voltando à questão anterior da função $f(x) = x^2$, vamos analisar a área sob a curva no intervalo $[0,4]$. Inicialmente vamos utilizar o comando `SomaDeRiemannSuperior` do software para efetuarmos a soma das áreas de 4 retângulos, de base 1 e com altura determinada pela ordenada do ponto de intersecção do retângulo criado com o gráfico da função. E posteriormente utilizando o comando `SomaDeRiemannInferior` para aproximar por falta a área descrita, também utilizando retângulos, de modo análogo ao item anterior.

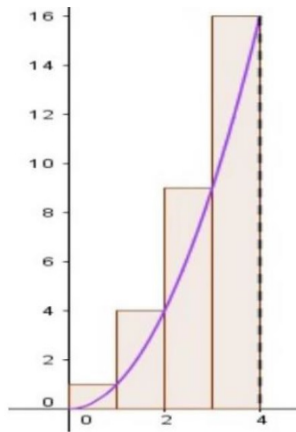


Figura 3.30: Soma de Reimann Superior (Fonte: Molon, 2015).

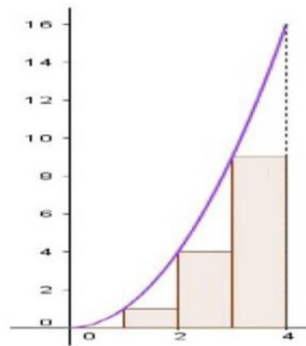


Figura 3.31: Soma de Reimann Inferior (Fonte: Molon, 2015).

Na imagem abaixo o programa indica o resultado tanto da soma por excesso quanto por falta, sendo o valor por excesso representado por a e por falta representado por b .

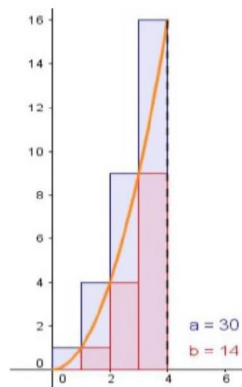


Figura 3.32: Soma por Excesso e por Falta (Fonte: Molon, 2015).

Com isso levamos ao aluno a perceber que a área procurada está limitada pelos valores de a e b , ou seja, a área da região abaixo da curva do gráfico que queremos calcular fica

limitada pelos valores da Soma Superior e Soma Inferior.

$$\text{Soma Inferior}(b) \leq \text{Área procurada} \leq \text{Soma Superior}(a)$$

Através desse fato pergunto o que aconteceria se aumentássemos o número de retângulos para o cálculo da área.

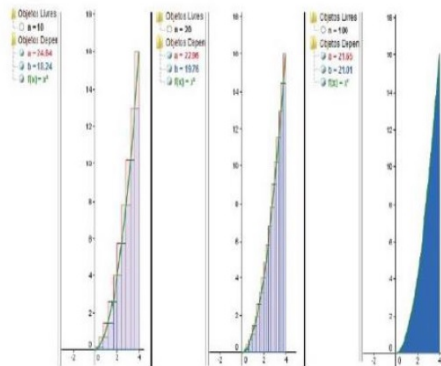


Figura 3.33: Aproximação Maior da Área Procurada (Fonte: Molon, 2015).

Após algumas sugestões mostro em que através desse aumento de retângulos vamos conseguir uma aproximação cada vez maior da área procurada.

Observe que que a aproximação do valor da área se tornar cada vez mais melhor à medida que aumentamos o número de faixas. Com isso podemos estimular o aluno a pensar o que ocorreria se o números de intervalos tendesse a infinito.

De fato, seja a área S abaixo do grafico a seguir, limitada pelo intervalo $[a,b]$.

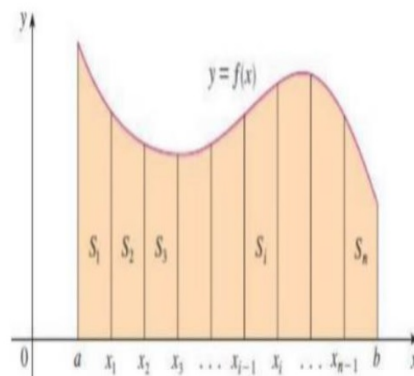


Figura 3.34: Subdivisão em n faixas (Fonte: Paliga, 2012).

Começamos por subdividir em n faixas S_1, S_2, \dots, S_n de igual largura. A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$, assim a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

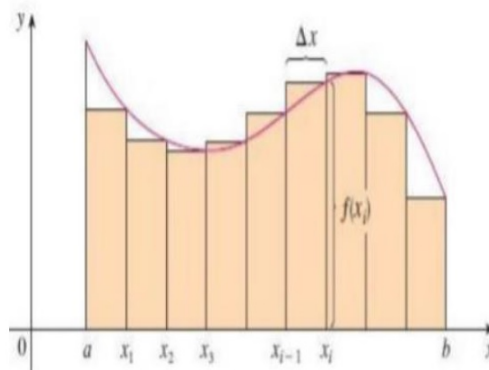


Figura 3.35: Subintervalos (Fonte: Paliga, 2012).

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos. $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Logo, teremos que as extremidades dos subintervalos são $x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, x_3 = a + 3\Delta x \dots$

Vamos aproximar cada faixa do retângulo de largura Δx e altura no valor da f é a área do i -ésimo retângulo será dada por $f(x_i)\Delta x$. Como a área S está sendo aproximada pela soma das áreas desses retângulos, podemos escrever que ,quando $n \rightarrow \infty$, a área S sob gráfico da f é o limite da soma das áreas dos retângulos

$$\text{Área } S = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$$

Esta ideia, tratada de forma mais refinada, irá ser denominada Soma de Riemann, em homenagem ao matemático alemão Georg Friedrich Riemann (1826 – 1866). Podemos levar o aluno a concluir que, aumentando o número de retângulos, encontramos valores cada vez mais próximos da área da região limitada pelo gráfico da função f .

Uma aplicação aliada à cinemática de fácil entendimento para o aluno seria, por exemplo, estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo (segundos) dado pela tabela abaixo.

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Tabela 18: Cinemática

Primeiramente devemos lembrar que a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo. Traçando um gráfico de velocidade por tempo iremos observar que o que estamos fazendo é somar as áreas dos retângulos como na figura abaixo.

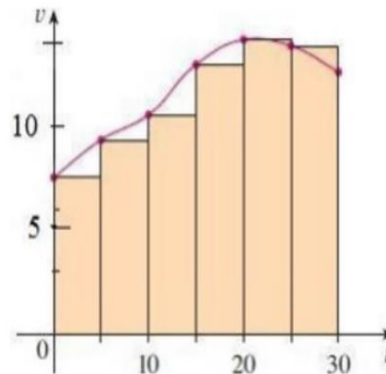


Figura 3.36: Distância Percorrida (Fonte: Paliga, 2012).

Logo, a área aproximada (por falta) será igual a soma das áreas das distâncias percorridas em cada intervalo.

$$(7.5 \times 5) + (9,4 \times 5) + (10.6 \times 5) + (12.8 \times 5) + (14.4 \times 5) + (13,9 \times 5) = 342 \text{ m}$$

Fazendo os retângulos, de forma a achar a área por excesso, encontraremos aproximadamente 367m, o que nos diz que a distância s está entre 342 m e 367 m.

Vale ressaltar que a atividade busca explorar a ideia de aproximação da área da região definida, introduzindo de maneira superficial a ideia da soma Riemann, não nos preocupando em formalizá-la.

As atividades a seguir foram trabalhadas primeiramente de forma estática (papel) e posteriormente foram feitas observações e da experimentações proporcionadas pelo software GeoGebra, de modo que os alunos pudessem perceber o refinamento da atividade.

Atividade 3.1: O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado abaixo. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios eram acionados (STEWART, 2009):

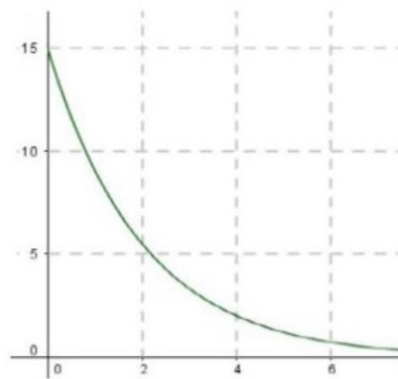


Figura 3.37: Velocidade do Carro Freando (Fonte: Elaborada pelo autor).

Análise a priori: A atividade tem o intuito de mostrar aplicação dos resultados vistos, em situações familiares ao aluno, usando elementos da Física para descrever tal cenário. Entendemos que se o professor buscar relacionar os conteúdos com situações reais, que exijam dos alunos a reflexão e o raciocínio, a partir de contextos que façam sentido, os resultados serão mais proveitosos.

Atividade 3.2: Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Abaixo foram feitas aproximações por retângulos da área abaixo da curva no intervalo dado (ALAMEIDA, 2014).

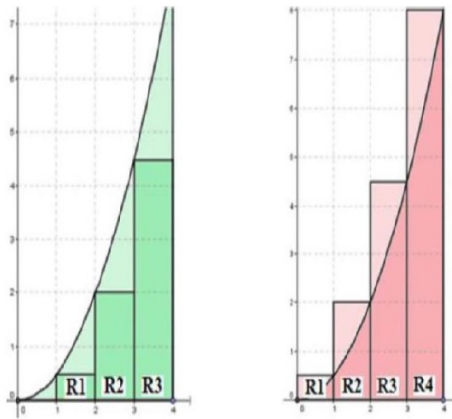


Figura 3.37: Aproximação por Falta e por Excesso (Fonte:Almeida, 2014).

Utilizando seus conhecimentos para o cálculo da área de retângulos, preencha as tabelas.

	Base b	Altura h = f(x)	Área = b.h
Retângulo 1 R1			
Retângulo 2 R2			
Retângulo 3 R3			

Tabela 19: Aproximação por falta

	Base b	Altura h = f(x)	Área = b.h
Retângulo 1 R1			
Retângulo 2 R2			
Retângulo 3 R3			
Retângulo 4 R4			

Tabela 20: Aproximação por excesso

Logo qual é o intervalo em que a área real estaria definida?

Análise a priori: O objetivo dessa atividade é explorar a ideia de aproximação das áreas das regiões definidas. A ideia intuitiva de integral (definida) foi trabalhada a partir da observação, de modo que os alunos pudessem perceber que, quanto maior o número de retângulos considerados, melhor seria a aproximação para o valor da área desejada.

Atividade 3.3: Considere a função definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, b]$ (BRITO, 2013).

a) Dividindo $[0, b]$ em n intervalos, qual o comprimento de cada subintervalo ?

b) Sabendo que a sequência: $x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}, x_n = \frac{nb}{n}$

representa os pontos de subdivisão do intervalo, preencha a tabela abaixo.

x	Altura dos Retângulos Inferiores	Área dos Retângulos Inferiores	Altura dos Retângulos Superiores	Área dos Retângulos Superiores
0				
$\frac{b}{n}$				
$\frac{2b}{n}$				
$\frac{3b}{n}$				
$\frac{4b}{n}$				
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{(n-1)b}{n}$				

Tabela 21: Área dos retângulos

c) Determine a expressão da soma das áreas dos retângulos em cada caso.

Análise a priori: A ideia aqui é fazer o aluno trabalhar as ideias vistas com um pouco mais de simbologia e generalização. Vale ressaltar que o aluno provavelmente terá mais dificuldade nessa atividade, sendo necessário algumas dicas do professor como a atenção para a mudança no intervalo de definição da função feita anteriormente, pois a altura de cada retângulo é calculada através da imagem do valor inicial de cada partição; lembrando também que na segunda parte da tabela a altura de cada retângulo é calculada através da imagem do valor final de cada partição.

3.4 Análise de resultados

Como dito anteriormente, o espaço a seguir destina-se à análise das atividades aplicadas na sala de aula. Todos os registros feitos pelos estudantes nos materiais disponibilizados foram recolhidos para um diagnóstico dos resultados. As atividades foram aplicadas a uma turma do 2º ano do segundo grau da Escola Estadual Madre Teresa de Calcutá. A proposta apresentada à turma foi de nos trinta ou quarenta minutos finais de cada aula letiva nos meses de outubro e novembro apresentar-lhes os conteúdos que descrevemos nas seções anteriores. Após a explicação do que faríamos nesses dois meses de trabalho, a turma em sua maioria concordou com a proposta apresentada. Porém, após os primeiros dois encontros percebi que houve um desinteresse de uma parte dos alunos, seja faltando as aulas ou até mesmo não prestando atenção a nenhuma nas explicações. Sendo assim percebi que houve um esforço maior de um grupo de 15 alunos da turma comprometidos com a explicação e com a assiduidade das aulas.

Os alunos trabalharam individualmente as atividades propostas, mas, por vezes, conversavam com seus colegas para relembrar algum conceito já estudado. Ao final de cada aplicação da atividade proposta, fazíamos uma reflexão sobre o que se pretendia explorar com as atividades naquele momento. Vale ressaltar que as atividades da seção 3.1 foram as únicas, em que primeiro foram aplicadas as atividades e ao final das aplicações foram construídos conceitos e teorias em relação ao tópico estudado que se destinava ao entendimento do conceito de infinito e infinitésimos, finalizando a seção com conceitos de limite de uma função e limite de uma sequência.

Iniciaremos então a análise dos resultados apresentados, tecendo alguns comentários sobre as respostas obtidas em cada atividade.

Os itens a seguir estão relacionados às atividades de limites de funções e limite de seqüências.

Atividade 1.1: Nessa atividade estávamos interessados em medir o conhecimento prévio do aluno e suas limitações. Nela os alunos respondiam ao questionário proposto. Ao analisar material recolhido percebi que de forma geral mostravam muita ingenuidade nas resposta apresentadas, o que de certa forma era esperado. Quando foi pedido para realizar a soma de Grandi, tivemos respostas muito interessantes, porém, em alguns casos não sabiam explicar de forma escrita sendo a forma verbal a forma que encontrei para entender as lógicas das respostas dadas. Foram dadas seguintes respostas:

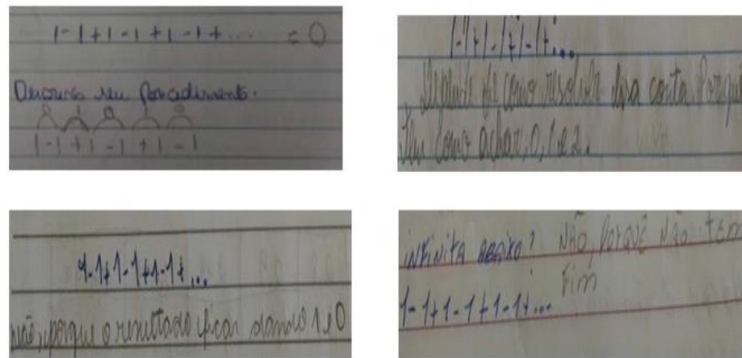


Figura 3.39: Atividade 1.1

Em Rezende (2013), foi pedido aos alunos que realizassem a mesma tarefa. Coincidência ou não os alunos encontraram também as mesmas resposta que os alunos participantes desse estudo. Em sua Tese de Doutorado, Rezende(2013) afirma que "Apesar de não entenderem o porquê da confusão, os estudantes afirmam que os resultados obtidos são verdadeiros por que partem de "raciocínios lógicos" e de propriedades bastantes bem conhecidas por eles: será?."

Outro fato que gerou muita discussão foi ligado às perguntas envolvendo os conjuntos dos números pares e ímpares e dos conjuntos dos irracionais e racionais. Em relação a

saber qual dos conjuntos possuía mais elementos: pares ou ímpares. O grupo em sua totalidade defendia a ideia de que os dois conjuntos, possuíam a mesma quantidade de elementos porém, não sabiam explicar de forma escrita e clara tal afirmação.

Quando estava discutindo os resultados após a aplicação, somente um aluno chegou a fazer a seguinte afirmação verbal: Devida as circunstâncias apresentadas nos dois conjuntos, pode-se fazer casais com os conjuntos unindo o primeiro número par ao primeiro número ímpar e assim sucessivamente, assim teriam o mesmo número de elementos.

Já na pergunta envolvendo os conjuntos dos irracionais e racionais, todas as respostas foram direcionadas ao conjunto dos números racionais. Fato esse apoiado na pouca vivência dos alunos com os números irracionais, conhecendo assim pouco números irracionais. Nas demais perguntas, as respostas dadas foram em sua totalidade satisfatórias, e em nenhuma resposta mereceu destaque.

Atividade 1.2: Analisando essa atividade, pude perceber que os alunos conseguiram responder de forma satisfatória às perguntas. Todos responderam que sim, para modelagem do problema pela função dada. Também de uma forma geral concordaram que a flecha chegaria em algum momento ao seu alvo, mesmo a flecha percorrendo a distância cada vez mais lenta. Somente um aluno respondeu que isso nunca aconteceria pois estava lidando com procedimentos infinitos. De fato a associação por parte dos alunos da velocidade da flecha com o exercício em si é de caráter compreensível, já que teoricamente para os alunos se a distância percorrida é cada vez menor então a velocidade da flecha estava diminuindo. Na hora de relacionar a questão com o conceito de Progressão Geométricas todos conseguiram chegar às conclusões esperadas, usando o que tinham apreendido no segundo bimestre de limites de somas infinitas de progressões geométricas.

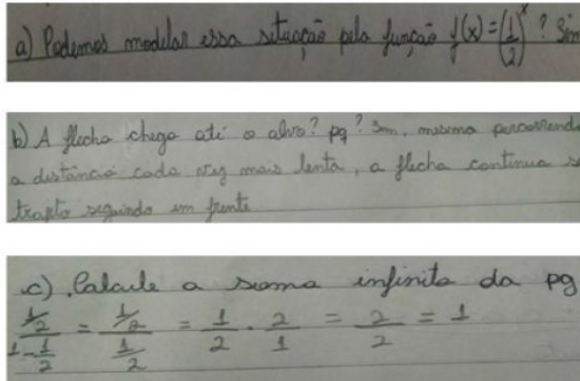


Figura 3.40: Atividade 1.2

Atividade 1.3: Nessa atividade todos começaram identificando com sucesso que a sequência tratava de uma Progressão Geométrica decrescente. Identificaram sem problemas tanto a razão da progressão quanto seus dez primeiros termos. Na terceira pergunta os alunos em geral, disseram que os números da sequência estavam se aproximando de zero, porém, dois alunos escreveram que os valores da sequência iam aumentando. Fato esse ser decorrente da visualização somente dos denominadores das frações. Na pergunta seguinte todos equivocadamente responderam que em algum momento os termos dessa sequência seria zero. Acredito ser decorrente da figura acizentada está cada vez menos visível ao olho do aluno. Na última pergunta todos escreveram que os termos iam aumentando. E também escreveram que 1 seria o número o qual a sequência estava se aproximando, porém nesse caso aconselhei a continuarem o cálculo de mais termos da sequência para terem certeza do fato.

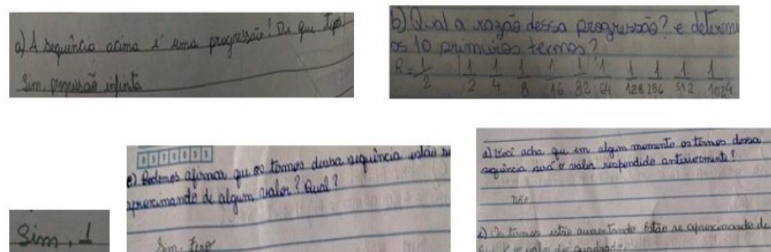


Figura 3.41: Atividade 1.3

Atividade 1.4: Essa talvez tenha sido a atividade mais fácil para eles. Nenhum aluno fugiu da ideia esperada e de forma intuitiva completaram a tabela e responderam às perguntas. Porém alguns erraram algumas contas e todos tiveram dificuldades em escrever tanto o domínio quanto a imagem da função, não sabendo explicar nenhum dos dois conceitos.

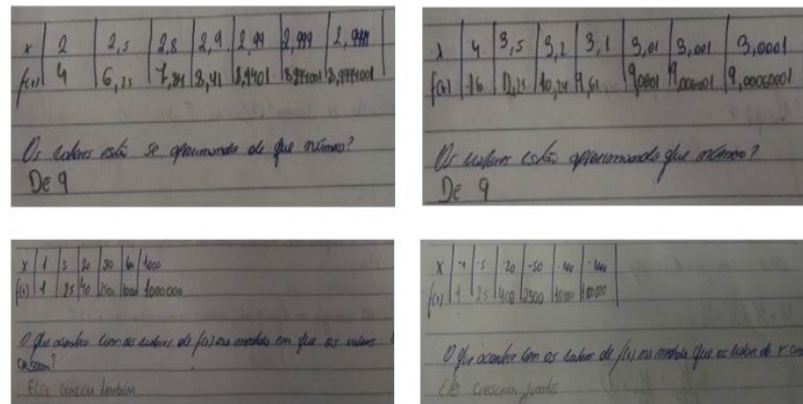


Figura 3.42: Atividade 1.4

As análises a seguir estão relacionadas ao conceito de variabilidade ou taxa de variação e reta tangente.

Atividade 2.1: Na primeira pergunta envolvendo o conceito de velocidade de média muitos alunos entenderam o que significava. Porém no decorrer da atividade não souberam dar uma resposta completa do que seria determinar a velocidade média de um móvel num determinado tempo. No segundo item, muitos alunos conseguiram calcular a velocidade média nos intervalos, porém como erraram em contas não conseguiram chegar a conclusão pedida no último item em relação ao coeficiente angular da reta dada.

a) O que significa determinar a velocidade média de um corpo. A velocidade média é a relação entre uma variação de espaço e o intervalo de tempo no qual ocorre esta variação

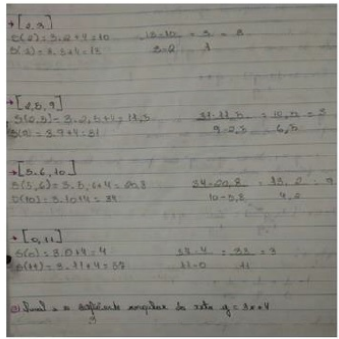


Figura 3.43: Atividade 2.1

Atividade 2.2: Analisando essa atividade, pode constatar que os alunos encontraram muita facilidade para responder os dois primeiros itens e muita dificuldade em realizar as operações algébricas quando era dado o intervalo $[4, 4 + \Delta t]$. Nesse tópico somente alguns alunos encontraram resultados satisfatórios. Em relação à velocidade instantânea a maioria das respostas estava associada a uma velocidade calculada em um tempo específico. Para o cálculo da velocidade instantânea em 5 segundos, alguns alunos usaram a relação do item c) fazendo o intervalo $[5, 5 + \Delta t]$ e ao final fazendo $\Delta t = 0$.

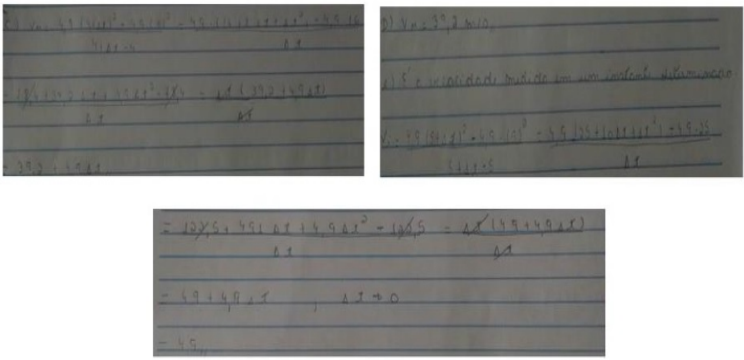


Figura 3.44: Atividade 2.2

Atividade 2.3: Observando as respostas dadas, pode perceber que todos os alunos afirmaram que a torneira 6 estava relacionada ao preenchimento do reservatório que estava

representado por uma reta. Porém, as torneiras 3, 4 e 5 foram as que apresentaram mais confusões. Alguns alunos trocaram as repostas e só observaram isso ao final da atividade, confrontando as repostas obtidas.

Devido a esse fato, esbocei no quadro as figuras e pedi a ajuda dos alunos para me indicar em cada pedaço da figura, como seria clasificado a velocidade de crescimento da água no reservatório. Eles poderiam classificar em rapidamente, lentamente e uniformemente. Curioso foi que com esse método de análise todos os alunos encontraram repostas diferentes das anteriores.

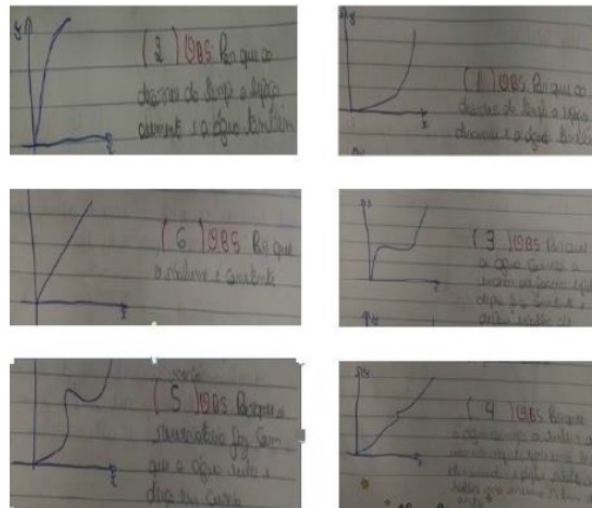


Figura 3.45: Atividade 2.3

Atividade 2.4: Nessa atividade mais uma vez não encontramos nenhum percalço, e encontraram repostas bem conclusivas do que era perguntado. Conseguiram tanto completar a tabela sem errar operações algébricas como relacionar cada função com a classificação de sua taxa de variação.

Intervalo de tempo	Velocidade inicial	Velocidade final	Velocidade média
$t=0,0$ até $t=0,1$	9	13,5	9,75
$t=0,1$ até $t=0,2$	9	6,75	7,875
$t=0,2$ até $t=0,3$	9	6,75	7,875

$$V_1 = \frac{0,9 - 0,0}{0,1 - 0,0} = \frac{0,9}{0,1} = 9$$

$$V_2 = \frac{1,35 - 0,9}{0,2 - 0,1} = \frac{0,45}{0,1} = 4,5$$

$$V_3 = \frac{2,7 - 1,35}{0,3 - 0,2} = \frac{1,35}{0,1} = 13,5$$

$$V_4 = \frac{3,02 - 1,35}{0,2 - 0,1} = \frac{1,67}{0,1} = 16,7$$

$$V_5 = \frac{0,17 - 0,0}{0,1 - 0,0} = \frac{0,17}{0,1} = 1,7$$

$$V_6 = \frac{1,35 - 0,17}{0,2 - 0,1} = \frac{1,18}{0,1} = 11,8$$

$$V_7 = \frac{2,7 - 1,35}{0,3 - 0,2} = \frac{1,35}{0,1} = 13,5$$

Figura 3.46: Atividade 2.4

As atividades abaixo referem-se ao conteúdo de áreas, associado ao conceito de soma de Reimann.

Atividade 3.1: No exercício em questão foi observado que os alunos em sua maioria fizeram somente a soma superior das áreas dos retângulos, aproximando o valor encontrado. Somente um aluno fez tanto a soma da área dos retângulos superiores à curva quanto a soma dos retângulos inferiores à curva. Na verdade conversando com os alunos após a tarefa, percebi que o que ocorreu foi um equívoco de construção de pensamento em relação ao cálculo da área abaixo da curva. Eles disseram que somente um método era suficiente para o cálculo da distância percorrida. Ocorrido esse fato, chamei a atenção deles para os exemplos dados anteriormente em sala, justificando o cálculo das áreas dos retângulos superiores e inferiores.

Aproximação por fôlha

	Base	Altura	Área
Retângulo 1 R_1	1	0,5	0,5
Retângulo 2 R_2	1	2	2
Retângulo 3 R_3	1	4,5	4,5
Retângulo 4 R_4	—	—	—

Soma: $0,5 + 2,0 + 4,5 = 7,0$

Aproximação por retângulos

	Base	Altura	Área
Retângulo 1 R_1	1	0,5	0,5
Retângulo 2 R_2	1	2	2
Retângulo 3 R_3	1	4,5	4,5
Retângulo 4 R_4	1	8	8

Soma: $0,5 + 2,0 + 4,5 + 8 = 15$

Figura 3.47: Atividade 3.1

Atividade 3.2: Sem dificuldades, conseguiram completar a tabela. Compreendendo a ideia de aproximar a área utilizando um número cada vez maior de retângulos. É possível afirmar que eles compreenderam a ideia intuitiva do cálculo da integral definida das funções apresentadas nos exemplos quanto na atividade. Como foi dito, a escola não possui computadores suficientes e em bom estado para realização de uma tarefa usando a manipulação do Geogebra. Devido a esse fato mostrei em meu notebook o desenvolvimento do exercício usando o software, para reforçar o conceito apreendido. Vale ressaltar que um aluno chamou a atenção para o exercício, que de forma bem clara pedia para encontrar a área baixo da curva tanto por retângulos superiores quanto inferiores, fato esse que para ele não estava explicado na questão anterior, justificando assim seu equívoco na atividade 1 dessa secção.

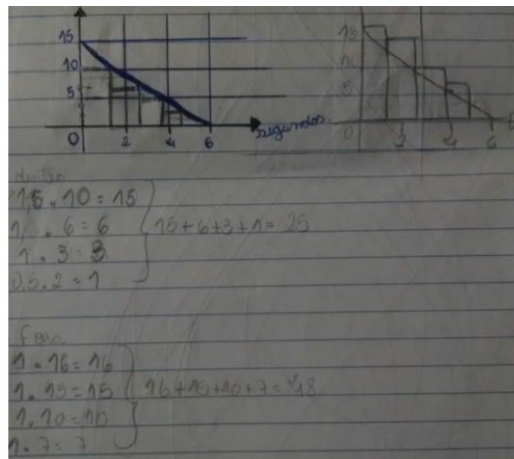


Figura 3.48: Atividade 3.2

Atividade 3.3: Essa atividade com certeza foi a mais difícil. Observando os alunos durante a atividade muitos deles perguntaram se poderiam consultar o caderno para visualizar a construção da soma de Reimann, comentada na aula anterior. Mesmo assim completaram de forma equivocada alguns campos ou até mesmo deixaram em branco. Um aluna chegou a completar de forma correta o início da tabela porém, no momento

de completar os retângulos superiores não teve atenção. Vale lembrar que o quadro correspondente ao retângulos superiores, a altura de cada retângulo é calculada através da imagem do valor final de cada partição na função. Devido a esse fato, tive o bom senso de ajudá-los na tarefa, fazendo perguntas que estimulassem o raciocínio lógico. Primeiramente substituí as letras por números e em seguida pedi a participação deles para completar as etapas da atividade. E concluímos várias das etapas pedidas da atividade.

a) $\frac{b}{n}$

b)

0	0	0	$(\frac{b}{n})^2$	0
$\frac{b}{n}$	$(\frac{b}{n})^2$	$(\frac{b}{n})(\frac{b}{n})^2$	$(\frac{b}{n})^3$	$(\frac{b}{n})^2 \cdot b$
$\frac{2b}{n}$	$(\frac{2b}{n})^2$	$(\frac{b}{n})(\frac{2b}{n})^2$	$(\frac{2b}{n})^3$	$(\frac{2b}{n})^2 \cdot b$
$\frac{3b}{n}$	$(\frac{3b}{n})^2$	$(\frac{b}{n})(\frac{3b}{n})^2$	$(\frac{3b}{n})^3$	$(\frac{3b}{n})^2 \cdot b$
$\frac{4b}{n}$	$(\frac{4b}{n})^2$	$(\frac{b}{n})(\frac{4b}{n})^2$	$(\frac{4b}{n})^3$	$(\frac{4b}{n})^2 \cdot b$
⋮				
$\frac{(n-1)b}{n}$	$(\frac{(n-1)b}{n})^2$	$(\frac{b}{n})(\frac{(n-1)b}{n})^2$	$(\frac{(n-1)b}{n})^3$	$(\frac{(n-1)b}{n})^2 \cdot b$

Figura 3.49: Atividade 3.3

Conclusão

As considerações aqui chamadas de finais são, na verdade, apenas início de nosso trabalho, que busca entender de que forma o Cálculo Diferencial e Integral teve sua teoria construída no século XVII, de que forma foram os primeiros estudos dirigidos aos alunos no território brasileiro, mostrando como se sucederam o ensinamento desses conceitos e seus objetivos, para que possamos chegar ao conceito primordial do trabalho aqui apresentado: Como introduzir noções de Cálculo para nossos alunos do Ensino Médio?

Ao longo dos anos, algumas tentativas de trazer o Cálculo ao Ensino Médio foram feitas porém, se for considerado o Cálculo Diferencial e Integral com todo seu rigor, certamente os alunos não terão maturidade suficiente para trabalhar com tais conceitos. Como os primeiros estudos destinados ao Cálculo no Brasil tinham a finalidade de formar profissionais da área militar e engenheiros, as técnicas de cálculo de derivadas e de integrais resumiam-se basicamente à derivação e integração, sempre com ênfase nas regras destes processos.

Porém, como pode-se constatar através das atividades envolvendo aspectos introdutórios do conceito do Cálculo, apresentadas de modo conveniente como parte integrante para relacionarmos conceitos aprendidos por eles no Ensino Médio, mostra que ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelo novo olhar dado a esses diversos conceitos matemáticos.

Através da abordagem baseada na experimentação, na visualização e na aplicação dos conceitos estudados foi verificado que o entendimento do conceito de limite associado tanto ao estudo de funções com processos infinitos de aproximação quanto aplicado a progressões geométricas, no estudo de sequências, também se mostraram boas oportunidades de trabalho com o conceito de limite. Apresentamos os conceitos dos limites sem os ϵ s e δ s, com uma apresentação geométrica e intuitiva, pois acreditamos que os alunos do Ensino Médio conseguirão entender o conceito. De forma intuitiva, também apresentamos a ideia de limites infinitos e no infinito.

A ideia da derivada trabalhada de forma contextualizada com a física (cinemática) foi uma ótima ponte criada para romper laços tradicionais de ensino. Foi observado que tal ligação entre os conteúdos, trabalhada de maneira interligada, traz ao aluno um sentimento de motivação muito maior. O conceito intuitivo de derivada de uma função em um ponto, por meio da construção e do entendimento do conceito de reta tangente ao gráfico de uma função e da análise do coeficiente angular dessa reta, também foram assuntos entendidos pelos estudantes.

Em relação ao cálculo da área sob o gráfico de uma função em um intervalo determinado do seu domínio, os estudantes sem dificuldade, conseguiram compreender a ideia de aproximar a área utilizando um número cada vez maior de figuras geométricas conhecidas. O problema do cálculo da área de regiões abordadas no decorrer desse trabalho, foram trabalhadas de maneira bastante intuitiva com o auxílio do software Geogebra, trazendo uma visualização muito significativa na construção do conceito de integral.

Observando tanto à análise a priori quanto a posteriori das atividades, pudemos perceber que os alunos em sua maioria não fugiu dos resultados esperados. Porém, algumas dificuldades foram sentidas nas atividades, principalmente as de caráter mais

simbólico e respondidas de maneira incompleta ou até mesmo incorretas. Tivemos a preocupação de elucidar todas as incoerências durante a discussão de respostas, através desse fato pudemos perceber que muitas das repostas não estavam erradas, e sim escritas de maneira incorreta, devido o aluno do Ensino Médio não possuir o hábito de escrever textos em conteúdos matemáticos.

É válido ressaltar que os conhecimentos históricos aqui apresentados tinham por finalidade entender algumas lacunas históricas e romper um pouco com o enfoque tradicional de alguns trabalhos descritos que focam somente no ensino do Cálculo Diferencial e Integral e está preocupado com o aluno de cursos universitários e muitas das vezes não estão interessados em como chegamos a esse cenário do Cálculo nos dias de hoje.

Mesmo que os nossos alunos do Ensino Médio não tenham maturidade para entender todo aspecto histórico aqui apresentado, é de responsabilidade dos cursos de formação em oferecer “cadeiras” que abordem esses fatos históricos como também do professor que vá introduzir ideias superficiais do Cálculo Diferencia e Integral no Ensino Médio, tenha conhecimento destes fatos históricos com a finalidade de não deixar a curiosidade de alguns alunos sem resposta, visto que alguns dos nossos alunos possam entrar em contato com estes conceitos de forma massiva.

Para que o professor trabalhe as ideias intuitivas do Cálculo no Ensino Médio, é necessário que ele domine esses conceitos e que perceba a necessidade de ampliar os horizontes do ensino da Matemática. Então não basta trazermos teorias excelentes de como trabalhar tais conceitos com o aluno, é também necessário investir na formação de um profissional de educação, tanto durante sua jornada de graduação como durante cursos posteriores como Mestrados e Doutorados.

Percebeu-se com esse trabalho que o aluno do Ensino Médio espera mais do que

conceitos e fórmulas. É esperado que a Matemática adquira aplicação e utilidade. Pode-se verificar então que ao deixar de trabalhar essas ideias, ainda no Ensino Médio, se perde uma ótima possibilidade de ampliar o conhecimento dos estudantes e de mostrar a aplicação dos conceitos matemáticos que estão presentes no currículo desse ano.

Finalizamos esse trabalho com um convite aos nossos colegas professores de matemática a experimentarem essa abordagem de ensino, inspirando-os a trabalharem com mais aplicações, conforme sua necessidade em sala de aula, trazendo assim suas experiências como lenha para aumentar o calor de discussões em debates, visando melhorar cada vez mais o ensino no nosso país. Acredita ser possível que o Cálculo Diferencial e Integral volte a fazer parte do currículo de Matemática no Ensino Médio, claro não repetindo as experiências históricas aqui vistas e sim com um direcionamento feito com linguagens e abordagens adequadas, como foram feitas nas atividades propostas sem grandes formalismos, teoremas e demonstrações.

Bibliografia

- [1] **ALMEIDA, F.** *Integral Definida: Uma Abordagem para o Ensino Médio com o Auxílio do Software Geogebra.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Ceará, 2014.
- [2] **ALVES, L.** *Derivadas como no Tempo de Newton e Leibniz.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Católica de Brasília, 2014.
- [3] **AMORIM, L.** *Cálculo no Ensino Médio: Progressões Geométricas e o Que Vai Para Baixo do Tapete.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática, 2013).
- [4] **ARANTES, L.** *O Cálculo Diferencial e Integral na Formação de Estudantes da Academia Real Militar.* Atividade de pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES, 2007 a 2009).
- [5] **ÁVILA, G.** *Limites e Derivadas no Ensino Médio.* Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006 pág(30 à 38).
- [6] **ÁVILA, G.** *O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.* Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

- [7] **ÁVILA, G.** *Cálculo de funções de uma variável*, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC Ed, 2002.
- [8] **BARICENTRO DA MENTE.** Disponível no site <http://obaricentrodamente.blogspot.com>. Acesso em 10 de agosto de 2016.
- [9] **BARON, M. E.** *Curso de História da Matemática: origem e desenvolvimento do Cálculo.*, Brasília, UnB, v.1/2/3/4/, 1985.
- [10] **BELL, E.T.** *The Development of Mathematics*. Nova York, Dover, 1992.
- [11] **BOYER, C.B.** *Cálculo - Tópicos da História da Matemática para o uso em sala de aula.* v.6. São Paulo: Atual, 1992.
- [12] **BOYER, C.B.** *História da Matemática.* 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.
- [13] **BRITO, F.** *Cálculo no Ensino Médio: Área sob o gráfico de uma curva.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). IMPA, 2013.
- [14] **BRITO, M.** *A História da Matemática no Brasil.* Artigo (Licenciatura em Matemática). Universidade Católica de Brasília, 2007.
- [15] **BRITO, J.** *O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). Universidade Federal do Piauí, 2013.
- [16] **CALAZANS, A.** *Newton e Berkeley: As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões n'O Analista.* Dissertação (Mestrado em Filosofia). Universidade Federal Do Paraná, 2009.

- [17] **EBAH.** *O Cálculo.* Disponível no site <http://www.ebah.com.br/content/calculo>. Acesso em 10 de agosto de 2016.
- [18] **CARNEIRO, J. P; WAGNER, E.** *Vale a pena estudar Cálculo?* Revista do Professor de Matemática, n°53, p.18-21.SBM, 2004.
- [19] **CARVALHO, R.** *A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo.* Monografia (Curso De Especialização Em Matemática Para Professores Com Ênfase Em Cálculo). Universidade Federal De Minas Gerais, 2007.
- [20] **CHILD, J.M.** *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow.* Chicago e Londres,1916.
- [21] **CURSO FOCO.** *Inovação no Ensino da Geometria.* Disponível no site www.apm.pt/apm/foco98/activ7.html. Acesso em 10 de agosto de 2016.
- [22] **DALL'NESSE, C.** *Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.
- [23] **DANTAS, S.C.** Reinterpretando a “Construção” do Cálculo Diferencial e Integral de Leibniz com uso de Recursos Geométricos 2013. (Apresentação de Trabalho/Conferência ou palestra).
- [24] **ESCARLATE, A.C.** *Uma Investigação sobre a Aprendizagem da Integral.* Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- [25] **EVES, Howard.** *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Unicamp, 2008.

- [26] **FERREIRA, A.** *Resgate da Inserção das Noções Elementares do Cálculo (em Particular, das Noções de Limite) durante o Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.
- [27] **FIGUEIREDO, E.B, HAVEROTH, G.A, AGUIAR, R.** *Os Métodos de Descartes e Fermat para Determinar a Tangente a uma curva.* Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional. Joinville, Santa Catarina, 2013.
- [28] **SBM.** *Fundamentos De Cálculo.* Coleção PROFMAT, 2014.
- [29] **GEOGEBRA.** *Software,* Disponível no site <http://www.geogebra.org/cms/>.
- [30] **GOMES, M.** *História do Ensino da Matemática: uma introdução..* Universidade de Minas Gerais, 2012.
- [31] **GRATTANN-GUINNESS, I.** *From the Calculus to Set Theory 1630-1910.* New Jersey: Princeton University Press, 1980.
- [32] **GUIDORIZZI, H.L.** *Um curso de Cálculo, Vol.1 , 5 ed.* LTC. Rio de Janeiro, 2001.
- [33] **IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos, MACHADO, Nilson José.** *Fundamentos de Matemática Elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral,* 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [34] **LACROIX, S.F** *Traité élémentaire de calcul différentiel e de calcul integral,* Guathier-Villars, Paris, 1867. Primeiro e segundo volume disponíveis: <http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cil.math>.
- [35] **LIMA, E. B.** *Dos Infinitésimos aos Limites: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da Análise Matemática no Brasil.* Dissertação (Mestrado em Ensino,

Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2016.

- [36] **LIMA, E.L, CARVALHO, P.C.P.,WAGNER, E, MORGADO A.** *A Matemática do Ensino Médio*,Volume 1, Coleção do Professor de Matemática. 6 ed. SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [37] **LIMA, G, SILVA, B.** *A implantação da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Matemática da USP e o papel da professora Elza Furtado Gomide.* Dissertação de Doutorado em Matemática. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.
- [38] **LIMA, G.***O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das Escolas Militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo.* Dissertação (Doutorado em Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2013.
- [39] **LIMA, G.** *O Ensino Do Cálculo No Brasil: Breve Retrospectiva e Perspectivas Atu-ais.* XI Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, 2013.
- [40] **LOPES, S.** *Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio* Dissertação(Mestrado em Ensino Da Matemática). Universidade Federal do Rio De Janeiro, 2008.
- [41] **MACHADO, N. J.** *Lugar de Cálculo é no ensino médio.* Disponível no site <https://imaginariopuro.wordpress.com/tag/nilson-jose-machado/>. Acesso em 10 out. de 2016.

- [42] **MATOS, L.** *Compreensões sobre Derivada e Integral com o Uso de um cas on line: Um Estudo com Alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio.* (Mestrado Profissional de Matemática). Universidade Federal De Juiz De Fora, 2013.
- [43] **MATTOS, A.** *A Matemática no Contexto da Criação da Universidade de São Paulo em 1934.* Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2010.
- [44] **MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO.** *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM).* Brasil.MEC/SEMTEC - Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.
- [45] **MIORIM, M.** *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo: Atual, 1998.
- [46] **MOLON, J.** *Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra.* Rio Grande do Sul: UFSM, 2013.
- [47] **MONTEIRO, A.** *Estudo de Funções Através de uma Abordagem Geométrica Utilizando o Software Geogebra.* Monografia (Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo). Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.
- [48] **MORAIS, A.** *Cálculo no Ensino Médio: Aplicações na Matemática e nas Ciências Naturais.* TCC: Especialização em Ensino De Matemática para o Ensino Médio. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.

- [49] **MOTA, J.** *Derivadas no Ensino Médio: Reflexões e Propostas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Sergipe, 2014.
- [50] **OLIVEIRA, G.** *A utilização do Cálculo Diferencial e Integral para Estender os Cálculos de Áreas de Figuras Planas e Comprimentos de Curvas no Plano*. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [51] **OLIVEIRA, F.** *Uma Proposta para o Ensino de Noções de Cálculo no Ensino Médio*. Monografia (Licenciatura em matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- [52] **PCN, Ensino Médio.** *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.
- [53] **PEREIRA, V.** *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- [54] **RAAD, M.** *História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura*. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.
- [55] **REZENDE, W. M.** *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

- [56] **REZENDE, W.M.** *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite*. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.
- [57] **ROQUE, T.** *O Estudo do Movimento e a Transformação da Geometria no início do século XVII*, Módulo 6 - História da Matemática, Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [58] **ROQUE, T.** *História da Matemática: Uma visão crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. 1^o ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [59] **SILVA, C.** *O Cálculo no Ensino Médio: As Taxas De Variação e o Conceito De Derivada*. Monografia. (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos, 2012.
- [60] **SILVA, G.** *Pensando no Infinito para Entender o Cálculo: Uma visão de professores sobre a introdução do Cálculo no Ensino Médio*. Monografia (Licenciatura em matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.
- [61] **STEWART, J.** *Cálculo*. Vol.1, 6 ed. São Paulo: Cengage, 2009.
- [62] **TINOCO, L.A.A.** *Construindo o conceito de função*. Instituto de Matemática - UFRJ - Projeto Fundão. Rio de Janeiro, 2001.
- [63] **VIANNA, B.** *Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre o Infinito*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). IMPA, 2013.

Anexos

Atividade 1.1 : Responda às perguntas abaixo:

a) Vocês já ouviram falar sobre infinito ? E infinitésimos? Vocês lembram de alguma palavra, frase ou figura que esteja relacionada com os dois termos ?

b) A soma infinita dos elementos a seguir é conhecida como a série de Grandi.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

Você consegue expressar o valor do resultado dessa soma? Você encontrou somente um valor? Descreva seu procedimento.

c) A quantidade de grãos de areia que existem numa praia representa uma quantidade muito grande ou uma infinidade? Explique sua resposta.

d) Em sua opinião qual conjunto que possui mais elementos? os dos números pares ou o dos números ímpares? Justifique.

e) Se compararmos os conjuntos da pergunta anterior com o conjunto dos números naturais, qual possui mais elementos? Justifique.

f) Você consegue me dizer quantos números racionais existem entre 2 e 3 ? E entre $\frac{5}{2}$ e 3 ?

g) Dê exemplos de números irracionais. Em sua opinião, qual conjunto possui o maior número de elementos: Racionais ou irracionais ?

Atividade 1.2 : Imagine que um arqueiro dispara uma flecha em um alvo. Observe que para chegar ao alvo inicialmente a flecha deverá percorrer metade da distância entre o alvo e o arqueiro. Uma vez percorrida essa distância a flecha deve percorrer metade da distância entre sua posição e o alvo e assim sucessivamente, como mostra a imagem abaixo:

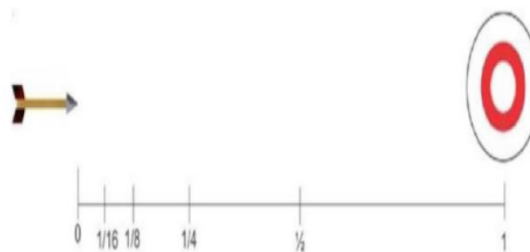


Figura 3.8 Distância Percorrida Pela Flecha (Fonte: Silva, 2013).

a) Podemos modelar essa situação usando alguma função já estudada?

b) A flecha chega até o alvo? Por quê?

c) Relacione o problema com o conteúdo de Progressões Geométricas.

Atividade 1.3 : Observe as figuras abaixo:

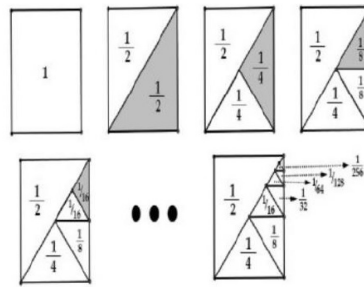


Figura 3.9: Divisões do Quadrado (Fonte: Amorim, 2013).

Como podemos ver do primeiro quadrado para o seguinte, dividimos ao meio a área total e tomamos uma metade, que destacamos de cinza conforme se vê no segundo quadrado. A nova área é novamente dividida ao meio e tomamos uma metade e assim sucessivamente. Com isto podemos destacar a seguinte sequência:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

- A sequência acima é uma progressão? De que tipo?
- Qual a razão dessa progressão? Determine os dez primeiros termos dessa sequência.
- Podemos afirmar que os termos dessa sequência estão se aproximando de algum valor? Qual?
- Em relação à pergunta anterior, você acha que em algum momento os termos dessa sequência equivalerá o valor respondido anteriormente?
- A partir dos termos da sequência anterior vamos construir uma nova sequência formada pelas somas parciais de seus termos. Observe cada uma das somas parciais através da figuras abaixo:

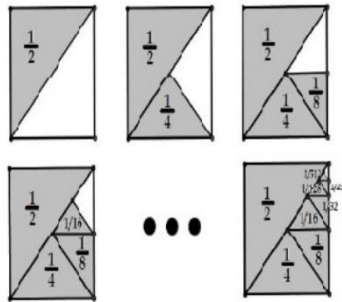


Figura 3.10: Somas Parciais (Fonte: Amorim, 2013).

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} = 0,5 \\
 S_2 &= S_1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \\
 S_3 &= S_2 + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875 \\
 S_4 &= S_3 + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375 \\
 \vdots & \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

Podemos afirmar que os termos dessa nova sequência estão aumentando? À medida que n cresce os termos da soma estão se aproximando de algum número? Que número é esse? Você acha lógica essa resposta? Justifique.

Atividade 1.4 : Considere a função $f(x) = x^2$.

a) O que você entende por domínio e imagem de uma função? Qual o domínio e a imagem da função acima? Construa o gráfico dessa função.

b) Analisando os valores de $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 3$ pela direita complete a tabela abaixo:

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$			7,84				

Tabela 11 : Aproximação pela esquerda ($x < 3$)

Os valores estão se aproximando de qual número? Na sua opinião chegaremos a encontrar esse número como resultado?

c) Analisando os valores de $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 3$ pela esquerda complete a tabela abaixo:

x	4	3,5	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001
$f(x)$							

Tabela 12 : Aproximação pela direita ($x > 3$)

Os valores estão se aproximando de qual número? Na sua opinião chegaremos a encontrar esse número como resultado?

d) Observando os resultados anteriores podemos dizer que quanto mais x está próximo de 3 a função $f(x) = x^2$ está mais próxima de qual valor?

e) Complete as seguintes tabelas:

x	-1	-5	-10	-20	-50	-100	-1000
$f(x)$							

Tabela 13: Valores de x decrescendo

O que acontece com os valores de $f(x)$ à medida em que os valores de x decrescem cada vez mais?

x	1	5	10	20	50	100	1000
$f(x)$							

Tabela 14: Valores de x crescendo

O que acontece com os valores de $f(x)$ na medida em que os valores de x crescem cada vez mais?

f) Escreva com suas palavras as conclusões que podem ser tiradas dessas observações

Atividade 2.1: A posição de um corpo, em função do tempo pode ser dada pela função $s(t) = 3t + 4$, com $0 \leq t \leq 11$, onde s denota a posição do móvel em metros e t é o tempo em segundos.

a) O que significa determinar velocidade média de um móvel num determinado intervalo de tempo?

b) Calcule a velocidade média desse corpo em cada um dos seguintes intervalos de tempo: $[2; 3]$; $[2, 5; 9]$; $[5, 6; 10]$; $[0; 11]$.

c) Qual o coeficiente angular da reta $y = 3x + 4$?

d) O que você pode concluir observando a resposta dos itens anteriores ?

Atividade 2.2: A posição de uma bola abandonada em queda livre (desprezando a resistência do ar) pode ser modulada pela função $s(t) = 4,9t^2$ onde s é dado em metros e representa a bola no instante t , dado em segundos, após o início da queda. Considere que o tempo total da queda seja de 10 segundos.

a) Calcule a velocidade média da bola nos intervalos de tempo: $[0; 2]$; $[3; 4]$; $[5, 5; 6, 8]$; $[9; 9, 5]$.

b) O que acontece numericamente com a velocidade média quando a bola vai se aproximando do solo ?

c) Calcule velocidade média da bola no intervalo $[4, 4 + \Delta t]$

d) Se a variação Δt fosse tão pequena (muito próxima de zero) que pudesse ser desprezada, qual seria a velocidade média no item anterior?

e) O que você entende por velocidade instantânea? Qual a velocidade instantânea da bola no instante $t = 5s$?

Atividade 2.3: Os desenhos abaixo representam reservatórios com a mesma capacidade e altura. Temos torneiras enchendo cada um dos reservatórios e vamos admitir que a vazão da água é a mesma para todos eles e constante.

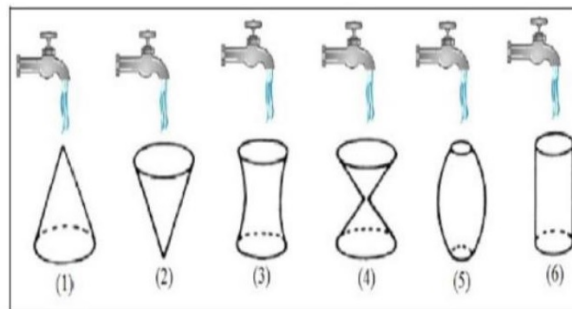


Figura 3.24: Reservatórios (Fonte: Lopes, 2008).

Analisando o comportamento do nível de água no decorrer do tempo relacione a forma do pote com o gráfico da variação da altura em função do tempo de cada um deles. Justifique seu raciocínio.

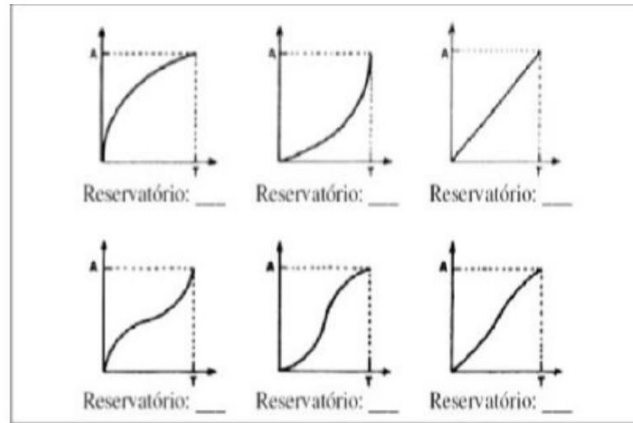


Figura 3.25: Representação Gráfica (Fonte: Lopes, 2008).

Atividade 2.4: Pedro faz o trajeto de sua casa a pé. Faz sempre o mesmo trajeto e percorre 2.700m. Sai às 7h de casa e chega à escola 7h e 30min. Na aula de Matemática de quarta-feira, o professor pediu aos alunos que representassem graficamente tempo x distância de seus trajetos de ida à escola daquela semana. Pedro apresentou os gráficos, observando que o trajeto sempre tinha sido o mesmo e que a diferença estava na forma de fazer o trajeto:

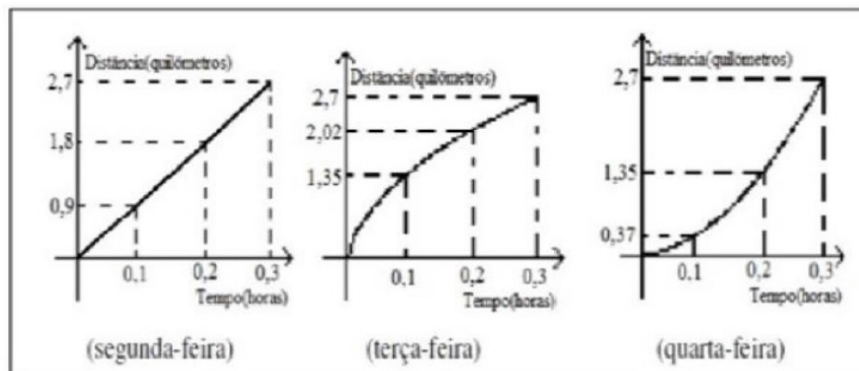


Figura 3.26: Evolução Gráfica (Fonte: Lopes, 2008).

a) Calcule a velocidade média com que Pedro estava caminhando em cada um dos dias, nos intervalos de tempo considerados.

Intervalos de Tempo (hora)	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira
	Velocidade média (quilômetros por hora)	Velocidade média (quilômetros por hora)	Velocidade média (quilômetros por hora)
t=0,0 e t=0,1			
t=0,1 e t=0,2			
t=0,2 e t=0,3			

Tabela 17: Velocidade Média de Pedro

b) Se for considerado o intervalo entre a hora da saída de casa e a hora da chegada na escola, em qual dos dias Pedro andou mais rápido?

Atividade 3.1: O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado abaixo. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios eram acionados.

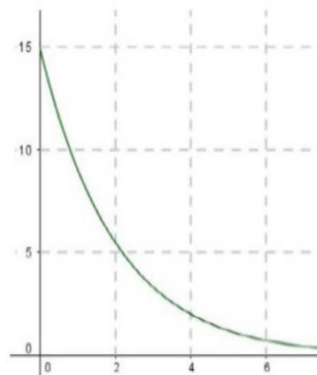


Figura 3.37: Velocidade do Carro Freando (Fonte: Elaborada pelo autor).

Atividade 3.2: Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Abaixo foram feitas aproximações por retângulos da área abaixo da curva no intervalo dado.

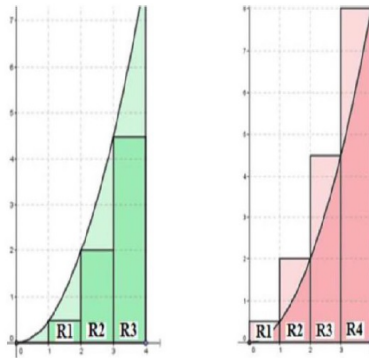


Figura 3.37: Aproximação por Falta e por Excesso (Fonte:Almeida, 2014).

Utilizando seus conhecimentos para o cálculo da área de retângulos, preencha as tabelas.

	Base b	Altura h = f(x)	Área = b.h
Retângulo 1 R1			
Retângulo 2 R2			
Retângulo 3 R3			

	Base b	Altura h = f(x)	Área = b.h
Retângulo 1 R1			
Retângulo 2 R2			
Retângulo 3 R3			
Retângulo 4 R4			

Tabela 19: Aproximação por falta

Tabela 20: Aproximação por excesso

Logo qual é o intervalo em que a área real estaria definida?

Atividade 3.3: Considere a função definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, b]$.

a) Dividindo $[0, b]$ em n intervalos, qual o comprimento de cada subintervalo ?

b) Sabendo que a sequência: $x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}, x_n = \frac{nb}{n}$

representa os pontos de subdivisão do intervalo, preencha a tabela abaixo.

x	Altura dos Retângulos Inferiores	Área dos Retângulos Inferiores	Altura dos Retângulos Superiores	Área dos Retângulos Superiores
0				
$\frac{b}{n}$				
$\frac{2b}{n}$				
$\frac{3b}{n}$				
$\frac{4b}{n}$				
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{(n-1)b}{n}$				

Tabela 21: Área dos retângulos

c) Determine a expressão da soma das áreas dos retângulos em cada caso.