

**UM ESTUDO DE SISTEMAS
LINEARES A PARTIR DE MODELOS
ECONÔMICOS**

por

Fábio Braga Pacheco

Orientadora do Trabalho:

Paula Rogeria Lima Couto

Preprint PROFMAT 2 (2016)

29 de Julho, 2016

Disponível via INTERNET:
<http://www.mat.ufpr.br>

Um Estudo de Sistemas Lineares a partir de modelos econômicos

Fábio Braga Pacheco

Departamento de Matemática - UFPR
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

e-mail: fabibragapacheco@yahoo.com.br

Resumo

Sistemas lineares, cuja aplicação está presente em diversas áreas do conhecimento humano, como Engenharia, Economia e Física, muitas vezes recebem um tratamento apenas técnico nas escolas e bem distante da realidade. Este trabalho tem por finalidade apresentar uma proposta de ensino de sistemas lineares a partir de um modelo econômico proposto na década de 1930. Nessa proposta podem ser explorados conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares. No decorrer do trabalho apresentam-se algumas técnicas de resolução de sistemas lineares, assim como uma lista de exercícios que o professor pode levar para a sala de aula.

Palavras-chave: sistema linear, modelos econômicos, ensino.

1 Introdução

Todos os dias, professores encontram dificuldades ao trabalhar Matemática em sala de aula. É muito comum escutarem de seus alunos os questionamentos: "Pra que serve isso?", "Quando eu vou usar isso na minha vida?". A falta de vínculo entre o conhecimento matemático e suas aplicações na sociedade e na ciência pode ser um dos fatores que dificultam a sua aprendizagem. Assuntos como matrizes, determinantes e sistemas lineares são muitas vezes abordados em sala de aula com um tratamento apenas técnico e não associado a possíveis usos em contextos mais próximos da realidade do aluno. Segundo [1] (1998, p. 15)

"o reconhecimento do uso das aplicações sociais da Matemática não significa brincar de vender e comprar na sala de aula, mas buscar

formas de vincular o conhecimento matemático aos seus usos científicos e sociais é essencial para dotar de sentido a atividade matemática na sala de aula."

Não evidenciar aplicações possíveis dos conteúdos matemáticos pode ser um dos fatores que dificultam a aprendizagem dos alunos. O uso do livro didático como única referência para as aulas ou mesmo como única fonte de busca para esse vínculo pode ser um dos motivos que levam a essa abordagem técnica desses conteúdos. Por isso, para os professores que atuam no ensino médio, é necessário e ao mesmo tempo vantajoso ter algum material que esclareça os pormenores dessa aplicação e proponha uma sequência didática com atividades a serem realizadas em sala.

Um tópico que pode contribuir para a aplicação do conhecimento matemático em sala de aula é a Economia. Nos meios de comunicação tem-se notícias que envolvem demanda, PIB, Selic e outros termos relacionados à área econômica. Regina Madalozzo, professora do INSPER (Instituto de Ensino Superior que atua nas áreas de negócios, Economia, Direito e Engenharia) considera um benefício aos alunos e suas famílias o ensino de economia na escola. De acordo com Madalozzo (apud [2], 2016)

"Quando uma criança ou adolescente entende o quanto custa parcelar uma compra, quanto ela compraria a mais se guardasse o dinheiro para utilizar depois, a importância da poupança no curto, médio e longo prazo, entre outros conceitos, ela já começa a se preparar para gerir de forma mais adequada seus rendimentos futuros."

A autora de livros didáticos Maria Helena Soares de Souza acredita no ensino de economia em conjunto com o ensino de matemática de forma interdisciplinar. "Pode-se usar a economia para ensinar muitos temas da matemática, como logaritmo, por exemplo. A maioria dos professores nem se dá conta disso"(Souza, apud [2], 2016).

Ao se analisar alguns livros de álgebra linear, observou-se que alguns deles, [3], [4], [5] e [6] apresentam uma abordagem aplicada ao oferecer ao leitor, em forma de apêndices, a cada capítulo teórico desenvolvido ou ao final do livro, alguns assuntos que contextualizam a Matemática apresentada. Uma aplicação ligada à Economia denominada matriz de insumo produto, proposta pelo economista russo Wassily Leontief encontrada em [3], [4], [5] e [6], trata de matrizes e sistemas lineares e não figura no ensino médio. Esta aplicação será investigada com uma álgebra matricial básica e sistemas lineares, o que possibilitará sua aplicação em salas de aula do ensino médio, tornando seu estudo acessível aos estudantes e professores.

O objetivo geral deste trabalho é propor uma abordagem para o ensino de sistemas lineares, usando os modelos econômicos do economista Wassily Leontief. Para atingir este objetivo, propõe-se uma sequência didática que apresente

alguns conceitos de Economia e exemplos de modelos econômicos, mostrando situações simples com estes modelos; o equacionamento dos problemas envolvendo as transações financeiras e a apresentação de algumas técnicas de resolução dos sistemas lineares; além disso, um estudo aprofundado sobre a forma geral dos modelos econômicos é apresentado.

Este trabalho apresenta na seção 2 alguns conceitos de economia, alguns exemplos de modelos econômicos e algumas situações envolvendo o modelo econômico de Leontief. Na seção 3 estão alguns conceitos de sistemas lineares e algumas técnicas de resolução para quatro situações apresentadas na seção 2. A seção 4 trabalha os modelos fechado e aberto de uma maneira geral. A seção 5 contém alguns exercícios extras que podem ser aplicados em sala de aula e finalmente são apresentadas as considerações finais.

2 Modelos Econômicos

O primeiro registro da palavra Economia data de 1440, na época sob o significado de "gestão de assuntos econômicos". A palavra tem origem no grego OIKONOMOS (oikos: casa; nomos: lei) que representa a administração de uma casa ou estado. [7]. Vive-se hoje numa sociedade com recursos produtivos (insumos) limitados, mas com as necessidades da população ilimitadas, pois o desejo da maioria das pessoas é sempre melhorar o padrão de vida. Um exemplo do que ocorre é a economia doméstica, onde todos os membros da família não podem ter tudo que querem, pois seus recursos financeiros são limitados. A esta falta de recurso se dá o nome de escassez. Um papel da economia é aplicar da melhor maneira possível os recursos produtivos às necessidades da população. [8].

Dois conceitos econômicos bastante relevantes para este trabalho são os de Insumo e Produto. Denomina-se Insumo todas as despesas e investimentos que contribuem para a obtenção de determinado resultado, mercadoria ou produto. Chama-se de produto tudo aquilo que é produzido. A Tabela 1 mostra alguns exemplos de insumos e produtos.

Em Economia, assim como em diversas outras áreas, são elaborados e usados modelos, que facilitam a compreensão da realidade econômica de um sistema e que são essenciais para tomada de decisões. A Figura 1 mostra um exemplo de diagrama de fluxo circular, que é uma maneira simples de visualizar como funciona a economia e que é um tipo de modelo conceitual, pois não envolve fórmulas matemáticas.

A Figura 1 descreve um sistema econômico que leva em conta apenas a interação entre indivíduos e firmas. Os indivíduos e as firmas interagem em apenas dois mercados: mercado de bens e serviços e mercado de fatores de produção (FP). Os indivíduos são proprietários dos insumos (trabalho, capital e terra) que as firmas compram no mercado de fatores de produção. As firmas, por sua vez, produzem bens e serviços que serão comprados pelos indivíduos. Este modelo não

Tabela 1: O sistema de Transformação - Exemplos.

Operação	Recursos INSUMO	Processos TRANSFORMAÇÃO	Saídas PRODUTO
Linha Aérea	<ul style="list-style-type: none"> ★ Aviões ★ Pilotos e equipe ★ Passagem e carga ★ Combustível 	Transportar passageiros e cargas	Passageiros e Cargas transportadas
Fabricante de comida congelada	<ul style="list-style-type: none"> ★ Comida fresca ★ Operadores ★ Congeladores ★ Gás 	Preparar e congelar a comida	Comida Congelada

Fonte: adaptado de [9]

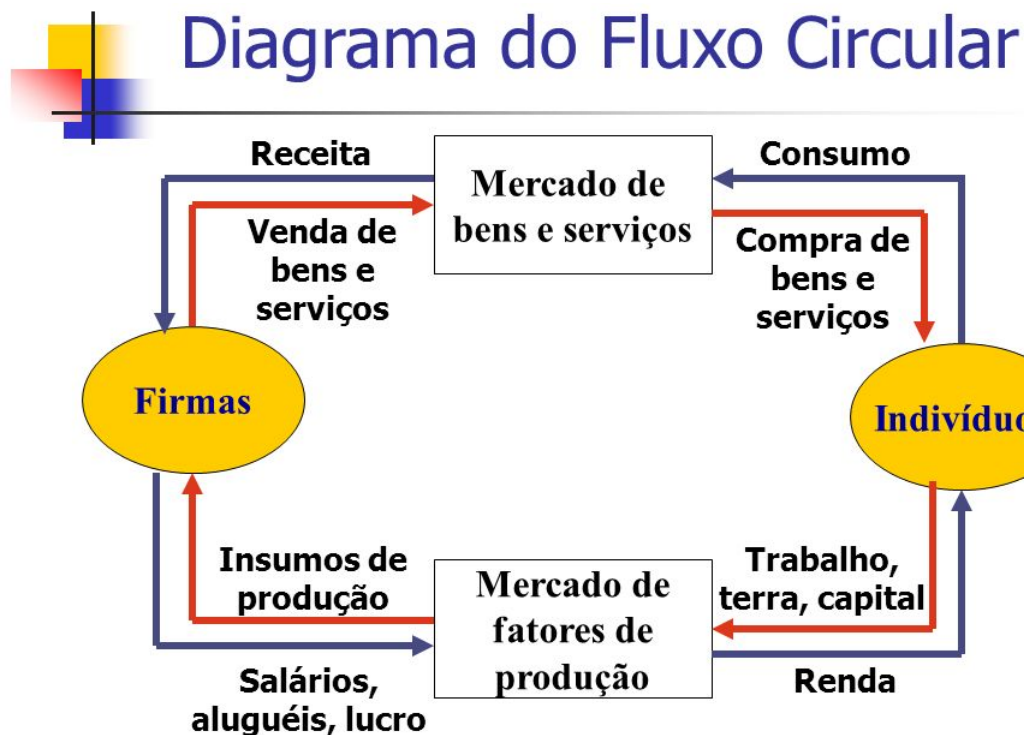


Figura 1: Diagrama de fluxo circular

Fonte: [12]

apresenta detalhes como o pagamento de impostos para o governo, por exemplo, mas dá uma ideia de como funciona a Economia. [11].

Outro modelo econômico usado é a Fronteira de Possibilidade de Produção. Este modelo representa graficamente uma relação entre quantidades de produtos que a economia tem possibilidade de produzir a partir dos fatores de produção e da tecnologia disponíveis.

Fronteira de Possibilidade de Produção

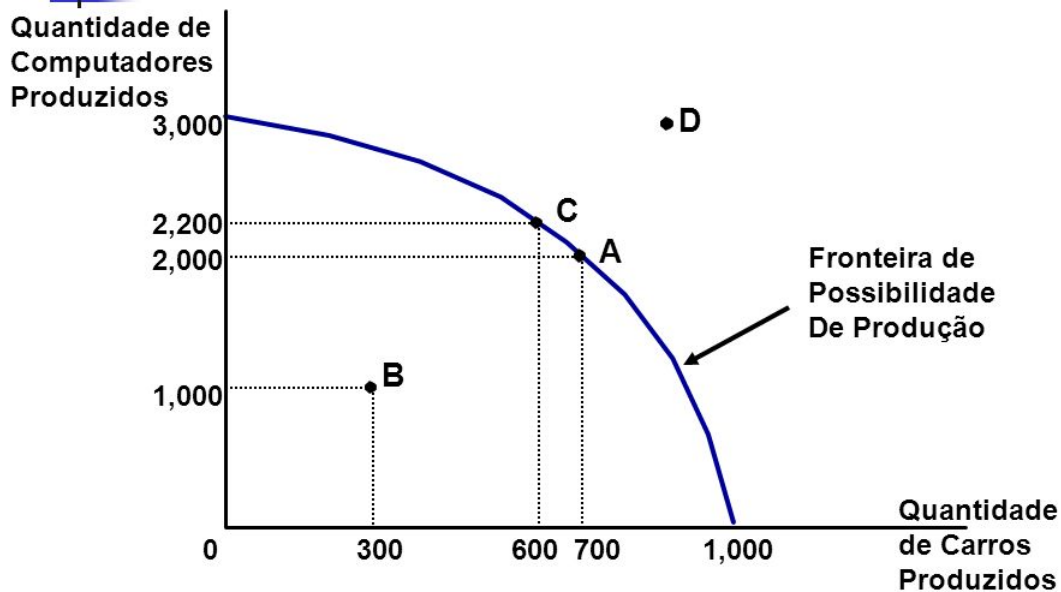


Figura 2: Fronteira de Possibilidade de Produção
Fonte: [12]

A Figura 2 apresenta um exemplo de Fronteira de Possibilidade de Produção. Em uma economia real são produzidos milhares de bens, mas para simplificar e tornar o entendimento mais fácil, admite-se como hipótese uma economia com apenas dois bens de produção, como mostra o gráfico. Nessa economia, são produzidos computadores e carros. Analisando a Figura 2, se forem produzidos 1000 carros, por exemplo, não são produzidos computadores. Por outro lado, se forem produzidos 3000 computadores, não são produzidos carros. A linha azul do gráfico, que é a fronteira de possibilidades, representa o máximo que se pode produzir nessa economia, utilizando os recursos produtivos da melhor maneira possível e levando-se em conta que eles são escassos. [11]

Esse modelo mostra uma situação em que é necessário fazer escolhas. Quando a produção de carros e computadores se encontra na linha azul, significa que a sociedade está utilizando seus recursos de maneira eficiente, ou seja, da melhor maneira possível. Ao sair do ponto C da linha e chegar ao ponto A, a produção de carros aumenta e diminui a de computadores. Ao sair do ponto A para o ponto C, a produção de computadores aumenta e a de carros diminui, ou seja, para produzir mais de um bem, tem-se de produzir menos de outro. [13]

Há muitas situações no cotidiano em que as pessoas precisam fazer esse tipo de escolhas. Pode-se citar como exemplo um casal que deseja comprar um carro.

Para comprar este bem, o casal precisa abrir mão de fazer a tão sonhada viagem, por exemplo. Considere como outro exemplo um estudante tem duas provas marcadas para o mesmo dia, nas disciplinas A e B. Supondo que ele dispõe de 20 horas para estudar para as duas provas e que resolva estudar 15 horas para a prova da disciplina A e 5 horas para a prova da disciplina B: se ele resolver estudar uma hora a mais para a prova da disciplina B, ele precisa estudar uma hora a menos para a prova da disciplina A. [11]

Apesar destes modelos terem uma representação gráfica que podem ser relacionados aos assuntos de funções, regiões no plano etc., eles não serão aprofundados neste artigo. Os modelos que serão aprofundados serão descritos a seguir.

Alguns modelos econômicos podem ser representados por equações, como é o caso dos modelos econômicos baseados nas ideias de Wassily Leontief. Esses modelos, que descrevem a economia como um sistema de equações, apresentam as relações de interdependência entre os setores, onde o produto de um setor é o insumo de outro. Apresentam-se a seguir situações simples que ilustram estas relações de interdependência em setores particulares e os problemas de ensino de matemática a eles relacionados.

Situação 1

Considere um pedreiro, um eletricista e um bombeiro hidráulico que necessitam fazer consertos em suas próprias casas (cada um deles tem uma casa). Suponha que eles combinem trabalhar 10 dias cada um, de modo a cobrir suas próprias necessidades em suas casas e nas casas dos outros dois de acordo com a tabela da Figura 3.

	Trabalho executado pelo		
	Pedreiro	Eletricista	Hidráulico
Dias de trabalho na casa do pedreiro	2	1	6
Dias de trabalho na casa do eletricista	4	5	1
Dias de trabalho na casa do hidráulico	4	4	3

Figura 3: [5]

Problema: qual deve ser o salário diário pago ao pedreiro, ao eletricista e ao bombeiro hidráulico de modo que no final o total que pagam seja igual ao total que recebem?

Ao abordar este tipo de problema na sala de aula, um dos primeiros desafios pode ser trabalhar o equacionamento do problema, o número de incógnitas, a distribuição de nomes e como elas se relacionam.

As incógnitas do problema são 3:
o salário do pedreiro x ;

o salário do eletricitista y ;
o salário do hidráulico z .

Deve-se notar que o total de salário pago pelo pedreiro deve ser igual ao que ele irá receber ao final de 10 dias de serviços prestados. Então, deve-se ter a seguinte igualdade:

Salários pagos = salário recebido

\Rightarrow Salário do pedreiro (ele próprio) + salário do eletricitista + salário do bombeiro hidráulico = Salário recebido

\Rightarrow

$$2x + y + 6z = 10x.$$

Usando um raciocínio análogo para o eletricitista e o hidráulico deve-se concluir também que

$$4x + 5y + z = 10y$$

e

$$4x + 4y + 3z = 10z.$$

Portanto, devem-se determinar x , y e z que satisfaçam simultaneamente as equações

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 10x \\ 4x + 5y + z = 10y \\ 4x + 4y + 3z = 10z \end{cases} .$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} 0, 2x + 0, 1y + 0, 6z = x \\ 0, 4x + 0, 5y + 0, 1z = y \\ 0, 4x + 0, 4y + 0, 3z = z \end{cases} .$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} 0, 8x - 0, 1y - 0, 6z = 0 \\ -0, 4x + 0, 5y - 0, 1z = 0 \\ -0, 4x - 0, 4y + 0, 7z = 0 \end{cases} . \quad (1)$$

Situação 2

Três vizinhos têm hortas nos fundos de suas casas. Pedro cultiva tomates, João cultiva milho e Marcos cultiva alface. Suponha que eles combinem dividir a colheita da seguinte forma: Pedro recebe $\frac{1}{2}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface. João recebe $\frac{1}{3}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface. Marcos recebe $\frac{1}{6}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{2}$ da alface. Além disso, eles devem cobrar valores um dos outros de modo que eles não tenham lucro nem prejuízo.

Problema: qual deve ser o valor em reais atribuída a cada colheita para que nenhum deles tenha prejuízo nem lucro, se a colheita de menor preço deve custar R\$ 100,00?

Neste caso as incógnitas do problema são:

x , o valor em reais da colheita do Pedro;

y , o valor em reais da colheita do João;

z , o valor em reais da colheita do Marcos.

O valor total em reais pago por Pedro é $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z$. O valor total recebido por ele é x . Logo, como o total pago deve ser igual ao total recebido, tem-se $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = x$.

Usando o mesmo raciocínio para João e Marcos, tem-se as seguintes equações:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = y$$

e

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = z.$$

Portanto, devem-se determinar x , y e z que satisfaçam simultaneamente as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = z \end{cases} .$$

ou

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}z = 0 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Situação 3

Uma certa cidade tem três indústrias principais: uma mina de carvão, uma usina elétrica e uma rede ferroviária local. Para produzir R\$ 1,00 de carvão, a mina precisa comprar R\$ 0,25 de eletricidade para seu equipamento e R\$ 0,25 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para produzir R\$ 1,00 de eletricidade, a usina requer R\$ 0,65 de carvão para combustível, R\$ 0,05 de sua própria eletricidade para equipamento auxiliar e R\$ 0,05 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para fornecer R\$ 1,00 de transporte, a rede ferroviária precisa de R\$ 0,55 de carvão para combustível e R\$ 0,10 de eletricidade para seu equipamento auxiliar. Numa certa semana, a mina recebe pedidos de R\$ 50.000,00 de carvão de fora da cidade e a usina recebe pedidos de R\$ 25.000,00 de eletricidade de fora da cidade. Não há demanda externa para a ferrovia.

Problema: qual é o valor em reais que cada uma das três indústrias deve produzir naquela semana para atender exatamente suas próprias demandas e a demanda externa?

Neste problema, as incógnitas são

x o valor total da produção da mina;

y o valor total da produção da usina;

z o valor total da produção da ferrovia.

Analisa-se a seguir, através de tabelas, o balanço de gastos e produções de cada um dos setores relacionados à produção de carvão. Então, utilizando-se a regra de três, tem-se o total gasto por cada indústria para sua produção total.

- Mina de carvão

O valor gasto em carvão para produzir R\$1,00 de carvão é R\$0,00.

Logo, tem-se $V_1 = 0x$, sendo V_1 o valor gasto em carvão pela mina.

Valor produzido de carvão	Valor gasto com carvão
1,00	0,00
x	V_1

- Usina elétrica

A usina necessita R\$0,65 de carvão para produzir R\$1,00 de eletricidade.

Então

tem-se $V_2 = 0,65y$ o valor gasto com carvão pela usina.

Valor produzido de eletricidade	Valor gasto com carvão
1,00	0,65
y	V_2

- Ferrovia

Para produzir R\$1,00 de transporte, a ferrovia necessita de R\$0,55 de carvão.

Logo, tem-se $V_3 = 0,55z$ o valor que a ferrovia gasta com carvão.

Valor produzido de transporte	Valor gasto com carvão
1,00	0,55
z	V_3

- Demanda externa

Seja $V_4 = \text{R\$ } 50.000,00$ a demanda externa, ou seja, o valor gasto com carvão por outras indústrias.

A produção total de carvão da mina então é

$$x = V_1 + V_2 + V_3 + V_4,$$

ou seja, obedece à equação

$$x = 0x + 0,65y + 0,55z + 50.000,00.$$

Usando o mesmo raciocínio, o total produzido pela usina e pela ferrovia devem obedecer às equações

$$y = 0,25x + 0,05y + 0,10z + 25000$$

e

$$z = 0,25x + 0,05y + 0z + 0.$$

Portanto, devem-se determinar x , y e z que satisfaçam simultaneamente as equações

$$\begin{cases} x = 0x + 0,65y + 0,55z + 50000 \\ y = 0,25x + 0,05y + 0,10z + 25000 \\ z = 0,25x + 0,05y + 0z + 0 \end{cases} . \quad (3)$$

Situação 4

Considere uma economia formada por três setores: manufatura, agricultura e serviços. Para produzir R\$ 1,00 de manufatura, este setor necessita de R\$ 0,50 de sua própria produção, R\$ 0,20 da produção da agricultura e R\$ 0,10 de serviços. Para a agricultura produzir R\$ 1,00, ela necessita de R\$ 0,10 do setor de manufatura, R\$ 0,50 sua própria produção e R\$ 0,30 do setor de serviços. Para produzir R\$ 1,00, o setor de serviços necessita de R\$ 0,10 do setor de manufatura, R\$ 0,30 da agricultura e R\$ 0,40 de serviços. Num determinado mês, o setor de manufatura recebe um pedidos de R\$ 7900,00, a agricultura recebe pedidos de R\$ 3950,00 e o setor de serviços recebe pedidos de R\$ 1975,00.

Problema: quanto cada setor deve produzir neste mês para satisfazer a sua produção e atender à demanda externa?

As incógnitas para este problema são:

x , a produção total do setor de manufatura;

y , a produção total da agricultura;

z , a produção total do setor de serviços.

As tabelas a seguir mostram o balanço de gastos e produção dos setores. Seguindo raciocínio análogo à situação anterior, utiliza-se a regra de três para saber o total gasto de cada setor com manufatura para a sua produção.

Valor produzido de manufatura	Valor gasto com manufatura
1,00	0,50
x	V_1

- Setor de manufatura

Logo tem-se $V_1 = 0,50x$ o valor gasto pela manufatura.

- Agricultura

Valor produzido pela agricultura	Valor gasto com manufatura
1,00	0,10
y	V_2

Logo tem-se $V_2 = 0,10y$ o valor gasto pela agricultura com insumos da manufatura.

- Serviços

Valor produzido pelos serviços	Valor gasto com manufatura
1,00	0,10
z	V_3

Logo tem-se $V_3 = 0,10z$ o valor gasto pelos serviços com insumos do setor de manufatura .

- Demanda externa

Seja $V_4 = \text{R\$ } 7900,00$ a demanda externa.

O valor total da produção so setor de manufatura deve atender à equação

$$x = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

ou equivalentemente

$$x = 0,5x + 0,1y + 0,1z + 7900.$$

Considerando raciocínio análogo, a produção da agricultura e do setor de serviços devem obedecer às equações

$$y = 0, 2x + 0, 5y + 0, 3z + 3950$$

e

$$z = 0, 1x + 0, 3y + 0, 4z + 1975.$$

Portanto, deve-se determinar x , y e z que atendam simultaneamente as equações

$$\begin{cases} x = 0, 5x + 0, 1y + 0, 1z + 7900 \\ y = 0, 2x + 0, 5y + 0, 3z + 3950 \\ z = 0, 1x + 0, 3y + 0, 4z + 1975 \end{cases} \quad (4)$$

Pode-se observar que nas situações de 1 a 4, as transações financeiras simples são modeladas através de sistemas lineares. As situações 1 e 2 conduziram a um sistema linear homogêneo de 3 equações e 3 incógnitas. Além disso, os dois problemas têm um objetivo que é o de determinar preços para os produtos (serviço ou bem) de tal modo que o gasto total com todos os produtos por cada pessoa envolvida, seja igual ao total recebido por ela pelo produto que ela produz. Isto é, o sistema econômico está em equilíbrio. As situações 3 e 4 conduziram a um sistema não homogêneo de 3 equações e 3 incógnitas. Essas situações vinculam a linguagem matemática ao seu uso social, o que pode dar sentido ao estudo de sistemas lineares na sala de aula.

As situações 1 e 2 são exemplos do modelo fechado de Leontief e as situações 3 e 4 exemplificam o modelo de produção (ou modelo aberto de Leontief). No modelo fechado a produção de k setores é somente distribuída entre os próprios k setores. A produção dos setores é fixada e o problema é de determinar seu preço de modo que gastos igualem ganhos. No modelo aberto os produtos de k setores são distribuídos entre os próprios k setores para mantê-los operacionais e também devem atender a uma demanda externa. Nele são os preços que são fixados e o problema é o de determinar o nível de produção em termos de valores econômicos totais para satisfazer a demanda externa [5].

Antes de abordar de maneira mais generalista os modelos fechado e aberto de Leontief, apresentam-se vários conceitos e técnicas de soluções para os sistemas lineares obtidos nas situações de 1 a 4. Vale lembrar que as técnicas que serão apresentadas a seguir, para resolver sistemas lineares 3×3 também podem ser utilizadas para resolver outros sistemas de ordem maior, que descreveriam sistemas econômicos envolvendo mais setores. A sequência a seguir, logo após aos problemas aplicados já apresentados, pode ser considerada uma sugestão para implementação destes assuntos na sala de aula.

3 Sistemas Lineares

Uma equação linear nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$, em que os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são constantes reais e b é o termo independente, sendo também um valor real.

A solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ é o conjunto de valores $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ que satisfazem a igualdade.

Um sistema linear de m equações a n incógnitas é um conjunto de m equações lineares, com as mesmas n incógnitas. Escreve-se um sistema como este de forma geral, como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

A solução de um sistema linear é o conjunto de valores $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ que satisfazem simultaneamente às igualdades

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Estes valores são as raízes do sistema linear. Este sistema pode, respeitando-se as posições das incógnitas e dos termos independentes, ser representado por uma matriz, chamada matriz aumentada do sistema.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b_3 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Para resolver um sistema linear representado na forma de matriz aumentada, pode-se utilizar três operações denominadas operações elementares.

- (i) Multiplicar uma linha inteira da matriz por um valor diferente de zero;

- (ii) Trocar duas linhas da matriz de posição;
- (iii) Somar uma linha a uma outra linha multiplicada por valor não nulo.

Essas operações permitem que se transforme o sistema original num sistema mais simples, sem alterar o seu conjunto solução.

Agora, retorna-se à situação 1, que apresenta um exemplo do modelo fechado de Leontief.

Situação 1

Seja o sistema linear 1

$$\begin{cases} 0,8x - 0,1y - 0,6z = 0 \\ -0,4x + 0,5y - 0,1z = 0 \\ -0,4x - 0,4y + 0,7z = 0 \end{cases} .$$

Obedecendo às posições das variáveis e dos termos independentes, representa-se este sistema de equações através da sua matriz aumentada, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 & 0 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 & 0 \end{bmatrix} .$$

Agora, para encontrar a solução desse sistema, será utilizada a técnica através das operações elementares.

Primeiramente, multiplicam-se por 2 a 2ª e 3ª linhas, depois realiza-se a soma com a 1ª linha.

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 & 0 \\ -0,8 & 1 & -0,2 & 0 \\ -0,8 & -0,8 & 1,4 & 0 \end{bmatrix} .$$

⇔

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,9 & -0,8 & 0 \\ 0 & -0,9 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} .$$

Agora realiza-se a soma da 2ª com a 3ª linha, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,9 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Reescrevendo esta matriz aumentada como um sistema linear, tem-se

$$\begin{cases} 0,8x - 0,1y - 0,6z = 0 \\ 0,9y - 0,8z = 0. \end{cases}$$

Aqui tem-se um sistema linear com mais incógnitas do que equações, que é um sistema mais simples do que o original e com a mesma solução.

Escrevendo y em função de z na 2ª equação, tem-se:

$$0,9y = 0,8z \Rightarrow y = \frac{0,8}{0,9}z = \frac{8}{9}z.$$

Substituindo na 1ª equação

$$\begin{aligned} 0,8x - 0,1 \cdot \left(\frac{8}{9}z\right) - 0,6z &= 0 \\ \Rightarrow 0,8x - \frac{8}{90}z - \frac{6}{10}z &= 0 \\ \Rightarrow 0,8x &= \left(\frac{8}{90} + \frac{6}{10}\right)z \\ \Rightarrow \frac{8}{10}x &= \frac{62}{90}z \\ \Rightarrow x &= \left(\frac{62}{90} \cdot \frac{10}{8}\right)z \Rightarrow x = \frac{62}{72}z = \frac{31}{36}z. \end{aligned}$$

Tem-se então:

$$\begin{cases} x = \frac{31}{36}z \\ y = \frac{8}{9}z \end{cases}$$

Tomando $z = 36r$ (analisando-se os denominadores das frações, 36 é múltiplo de 36 e 9), tem-se que

$$x = \frac{31}{36} \cdot 36r = 31r,$$

$$y = \frac{8}{9} \cdot 36r = 32r.$$

Logo, a solução do sistema é dada por:

$$\begin{cases} x = 31r \\ y = 32r \\ z = 36r \end{cases}.$$

Reescrevendo este sistema na forma de equação matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31r \\ 32r \\ 36r \end{bmatrix}.$$

Como r é um fator comum aos três valores da matriz à direita, pode-se escrever esta equação da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Supondo que em 1 dia o salário médio dos profissionais seja de R\$100,00, uma solução que não traria prejuízo para eles seria tomar $r = 3$. Logo, uma solução possível seria

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 96 \\ 108 \end{bmatrix}$$

Situação 2

Na situação 2, a resolução também será através das operações elementares. Seja o sistema linear 2

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}z = 0 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

A matriz aumentada deste sistema, respeitando-se as posições das incógnitas é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

Nesse caso, nesta situação, a resolução será através da eliminação gaussiana e do método de Gauss-Jordan, em referência aos matemáticos Johann Carl Friedrich Gauss¹ e Wilhelm Jordan².

Para resolver, serão utilizadas as operações elementares, de modo a transformar o sistema inicial num sistema equivalente, onde a solução seja mais fácil de visualizar.

Multiplica-se a 2ª linha por $\frac{3}{2}$ e a 3ª linha por 3.

¹Nascido em 1777 na Alemanha, Gauss impressionou sua professora ao realizar a soma dos inteiros positivos de 1 a 100. Ao longo de sua trajetória contribuiu com estudos na aritmética, cálculo e geometria. Morreu em 1855.

²Matemático alemão nascido em 1842, ficou conhecido por sua contribuição para a simplificação da eliminação gaussiana. Morreu em 1899.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{8} & 0 \end{array} \right].$$

Somando a 1ª linha com a 2ª e 3ª linhas, obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right].$$

Multiplica-se por 2 a 2ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right].$$

Soma-se a 2ª linha à 3ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Agora, multiplicando-se a 1ª linha por 2 e a 2ª por $\frac{3}{4}$ tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Esta última é um exemplo de uma matriz que está na forma escalonada. Para ser dessa forma, uma matriz deve ter as seguintes propriedades [5]:

- (1) Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é 1. Esse número é chamado de pivô.
- (2) Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- (3) Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior fica à direita do pivô da linha superior.

O sistema linear correspondente à esta última matriz é

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{15}{16}z = 0 \end{cases} \quad (5)$$

O sistema nessa forma é resolvido por retrossubstituição ou substituição inversa. Nesta situação, a substituição é de baixo para cima, começando pela 2ª equação, pois possui menos incógnitas. A exemplo do que aconteceu na situação 1, a vantagem de se resolver esse sistema em relação ao sistema original é de ter menos incógnitas, possibilitando assim um menor número de substituições para se chegar ao resultado.

Isolando-se y na 2ª equação tem-se

$$y = \frac{15}{16}z.$$

Substituindo na 1ª equação

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16}z - \frac{1}{2}z &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{8}z + \frac{1}{2}z \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{8}z. \end{aligned}$$

Tomando-se $z = 16r$ (analisando-se os denominadores das frações, 16 é múltiplo de 16 e 8) tem-se que

$$x = \frac{9}{8}z \Rightarrow x = 18r \text{ e } y = \frac{15}{16}z \Rightarrow y = 15r.$$

Para satisfazer a condição de preço mínimo de R\$ 100,00 da colheita, substitui-se r por $\frac{100}{15}$ e tem-se $x = 120,00$, $y = 100,00$ e $z = 106,67$.

Pode-se, a partir da matriz aumentada do sistema linear 5, aplicar mais algumas operações elementares e chegar a um sistema ainda mais simples.

Multiplica-se a 2ª linha por $\frac{2}{3}$ tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Soma-se a 2ª linha com a 1ª linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{9}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Esta matriz é um exemplo na forma escalonada reduzida por linhas. Uma matriz que está na forma escalonada reduzida por linhas, além das propriedades 1, 2 e

3 citadas anteriormente, apresenta uma outra propriedade: (4) cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas. O sistema correspondente à esta matriz é

$$\begin{cases} x - \frac{9}{8}z = 0 \\ y - \frac{15}{16}z = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} x = \frac{9}{8}z \\ y = \frac{15}{16}z \end{cases} .$$

De maneira análoga, obtém-se os valores $x = 120,00$, $y = 100,00$ e $z = 106,67$.

De um modo geral, dado o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Representando-o pela matriz aumentada tem-se:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] .$$

Aplicando-se as operações elementares, encontra-se um sistema equivalente na forma escalonada, representado pela matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{mn} & b_m \end{array} \right] ,$$

ou na forma escalonada reduzida por linhas, conforme representado na matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Se o sistema for homogêneo, sempre haverá a solução trivial. Então existem duas possibilidades:

- (i) O sistema tem somente a solução trivial;
- (ii) O sistema possui, além da solução trivial, infinitas soluções. Este caso ocorreu ao final das situações 1 e 2, onde o sistema equivalente possuía mais incógnitas que equações.

Para provar que todo sistema homogêneo com mais incógnitas que equações possui soluções além da solução trivial, será realizada a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1. *Um sistema homogêneo com mais incógnitas que equações tem uma infinidade de soluções.*

Demonstração Seja $\mathbf{Ax} = 0$ um sistema homogêneo com m equações e n incógnitas, tal que $m < n$. Através das operações elementares, encontramos na forma escalonada e equivalente a $Ax = 0$, um sistema $Cx = 0$ com r equações. Se $r \leq m$, então $r < n$. Dessa forma, ao resolvermos o sistema, cada uma das r incógnitas podem ser escritas em função das $n - r$ incógnitas restantes. Assim, estas $n - r$ incógnitas podem assumir qualquer valor real. Logo, o sistema possui infinitas soluções.

Na resolução dos exemplos que envolvem as situações 3 e 4, serão apresentadas ao leitor os conceitos de matrizes, operações com matrizes e determinantes, pois as questões serão resolvidas através da regra de Cramer³ e equação matricial, que envolvem todos estes conceitos.

Situação 3

Seja o sistema 3

$$\begin{cases} x = 0x + 0,65y + 0,55z + 50000 \\ y = 0,25x + 0,05y + 0,10z + 25000 \\ z = 0,25x + 0,05y + 0z + 0 \end{cases}.$$

³Gabriel Cramer, nascido em 1704 e nomeado doutor em 1722, ficou conhecido pelo seu trabalho com sistemas lineares, em que utiliza o cálculo de determinantes para encontrar a solução do sistema.

Isolando-se os termos independentes, tem-se

$$\begin{cases} x - (0x + 0,65y + 0,55z) = 50000 \\ y - (0,25x + 0,05y + 0,10z) = 25000 \\ z - (0,25x + 0,05y + 0z) = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} x - 0,65y - 0,55z = 50000 \\ -0,25x + 0,95y - 0,10z = 25000 \\ -0,25x - 0,05y + z = 0 \end{cases} . \quad (6)$$

Esse sistema será resolvido através da regra de Cramer, que utiliza o cálculo de determinantes na sua resolução. O determinante é um número associado a uma matriz quadrada (matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas). A idéia desse número começou no século XVII com dois matemáticos: o japonês Takakazu Seki Kowa⁴ e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz⁵. O uso de determinantes tem, entre outras aplicações, o cálculo da área de um triângulo no plano cartesiano. [14] Nesse trabalho, o interesse ficará somente no valor do determinante, necessário para a resolução do sistema linear proposto.

Seja o sistema 6

$$\begin{cases} x - 0,65y - 0,55z = 50000 \\ -0,25x + 0,95y - 0,10z = 25000 \\ -0,25x - 0,05y + z = 0 \end{cases} .$$

A exemplo do que foi realizado nas situações 1 e 2, a matriz aumentada desse sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,65 & -0,55 & 50.000 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 & 25.000 \\ -0,25 & -0,05 & 1 & 0 \end{array} \right] .$$

A matriz dos coeficientes é a matriz quadrada

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1 \end{array} \right] ,$$

que é obtida retirando-se a coluna dos termos independentes da matriz aumentada. Para calcular o determinante dessa matriz, serão apresentadas duas

⁴Nascido em 1642 e adotado por uma família nobre, aprendeu matemática sozinho e foi o primeiro matemático a estudar determinantes, em 1683.

⁵Nascido na Alemanha em 1646, foi muito cedo para a universidade, onde estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática. Foi o primeiro ocidental a estudar determinantes.

técnicas: a regra de Sarrus⁶ e a expansão por cofatores.

Regra de Sarrus

Seja a matriz dos coeficientes representada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de A, representado por $\det A = |a_{ij}|$, realizam-se os seguintes passos:

(i) Ao lado da matriz, copiam-se as duas primeiras colunas. Desse modo,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -0,65 & -0,55 & 1 & -0,65 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 & -0,25 & 0,95 \\ -0,25 & -0,05 & 1 & -0,25 & -0,05 \end{vmatrix}$$

(ii) Agora, multiplicam-se os valores das "diagonais principais", depois faz-se o mesmo com os valores das "diagonais secundárias". O resultado é $\det A =$ **soma dos produtos das diagonais principais - soma dos produtos das diagonais secundárias**.

Assim,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -0,65 & -0,55 & 1 & -0,65 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 & -0,25 & 0,95 \\ -0,25 & -0,05 & 1 & -0,25 & -0,05 \end{vmatrix} \\ &= [(1 \cdot 0,95 \cdot 1) + (-0,65) \cdot (-0,10) \cdot (-0,25) + (-0,55) \cdot (-0,25) \cdot (-0,05)] - \\ &\quad [(-0,25) \cdot 0,95 \cdot (-0,55) + (-0,05) \cdot (-0,10) \cdot 1 + 1 \cdot (-0,25) \cdot (-0,65)] \\ &= 0,62875 = \frac{503}{800}. \end{aligned}$$

A regra de Sarrus, em referência ao matemático Pierre Frederic Sarrus é uma técnica para calcular o determinante de uma matriz 3×3 . Essa técnica é um caso particular e não se aplica à matrizes maiores. De uma maneira geral, dada uma matriz

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Copiando as duas primeiras colunas da matriz à direita tem-se

⁶Pierre Frédéric Sarrus, nascido na França em 1798, foi o responsável por uma regra que calcula o determinante de uma matriz de 3 linhas e 3 colunas.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus calcula-se o determinante da matriz A.

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Expansão por cofatores

Definição 1. Dada uma matriz A, o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz A é $(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$, onde A_{ij} é a submatriz de A, obtida extraíndo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Com estes cofatores forma-se uma nova matriz \bar{A} , denominada matriz dos cofatores de A.

Considerando a mesma matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de A, escolhe-se uma linha ou coluna e multiplicam-se os valores dessa linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores. Assim, escolhendo-se a 2ª coluna, tem-se

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-0,65) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -0,25 & -0,10 \\ -0,25 & 1 \end{vmatrix} + 0,95 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -0,55 \\ -0,25 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-0,05) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -0,55 \\ -0,25 & -0,10 \end{vmatrix} \\ &= (-0,65) \cdot (-1) \cdot [(-0,25) \cdot 1 - (-0,25) \cdot (-0,10)] \\ &\quad + 0,95 \cdot 1 \cdot [(1 \cdot 1 - (-0,25) \cdot (-0,55))] \\ &\quad + (-0,05) \cdot (-1) \cdot [(1 \cdot (-0,10) - (-0,25) \cdot (-0,55))] \\ &= -0,17875 + 0,819375 - 0,011875 \\ &= 0,62875. \end{aligned}$$

A expansão por cofatores pode ser aplicada à matrizes quadradas quaisquer. De uma maneira geral, tem-se a seguinte definição:

Definição 2. Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado determinante de A . As próprias somas são denominadas expansões em cofatores de $\det(A)$, ou seja,

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$, (expansão em cofatores ao longo da coluna j).

e

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$, (expansão em cofatores ao longo da linha i).

Agora que já foram explanadas as duas técnicas de cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 3, volta-se à matriz aumentada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,65 & -0,55 & 50.000 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 & 25.000 \\ -0,25 & -0,05 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

O primeiro determinante a ser calculado geralmente é o da matriz A dos coeficientes, que será representado por $\det A = 0,62875$. O cálculo já foi realizado utilizando-se as duas técnicas anteriores.

Agora, calcula-se o determinante que será representado por $\det x$, onde os elementos que compoem a 1ª coluna da matriz dos coeficientes é substituída pelos elementos da matriz dos termos independentes. Assim,

$$\det x = \begin{vmatrix} 50.000 & -0,65 & -0,55 \\ 25.000 & 0,95 & -0,10 \\ 0 & -0,05 & 1 \end{vmatrix} = \frac{128375}{2} = 64.187,5.$$

Usando raciocínio análogo, os valores de $\det y$ e $\det(z)$ são

$$\det y = \begin{vmatrix} 1 & 50.000 & -0,55 \\ -0,25 & 25.000 & -0,10 \\ -0,25 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{70625}{2} = 35.312,5.$$

e

$$\det z = \begin{vmatrix} 1 & -0,65 & 50.000 \\ -0,25 & 0,95 & 25.000 \\ -0,25 & -0,05 & 0 \end{vmatrix} = \frac{35.312,5}{2} = 17.812,5.$$

A solução do sistema 6 é dada por

$$x = \frac{\det x}{\det A} = \frac{64.187,5}{0,62875} = 102.087,$$

$$y = \frac{\det y}{\det A} = \frac{35.312,5}{0,62875} = 56.163$$

e

$$z = \frac{\det z}{\det A} = \frac{17.812,5}{0,62875} = 28.330.$$

Portanto, para atender à demanda externa e ao consumo próprio, a mina de carvão precisa produzir R\$ 102087,00, a usina R\$ 56163,00 e a ferrovia R\$ 28330,00.

Com relação à regra de Cramer, de um modo geral, considera-se um sistema com n equações e n incógnitas dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial $AX = B$ tem-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, que é quadrada,

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a matriz das incógnitas.

Para a equação matricial $AX = B$, supõe-se que $\det A \neq 0$, ou seja, A possui inversa A^{-1} . Por definição, se A for uma matriz quadrada e existir uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então B é uma matriz inversa de A (Anton, [5]). Para resolver uma equação $ax = b$, de 1º grau na variável x , com $a \neq 0$, isola-se a incógnita dividindo-se por a ambos os lados da igualdade. No entanto, na equação matricial o processo é diferente, pois a divisão entre matrizes não é definida. Nesse caso, a solução é multiplicar os dois lados da igualdade pela

inversa da matriz A. Então:

$$\begin{aligned}
 AX &= B \\
 \Leftrightarrow A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\
 \Leftrightarrow A^{-1}AX &= A^{-1}B \\
 \Leftrightarrow I_n X &= A^{-1}B \\
 \Leftrightarrow X &= A^{-1}B.
 \end{aligned}$$

Escrevendo esta última na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A inversa de uma matriz A pode ser calculada através da matriz adjunta, representada por $adj A = \bar{A}^T$, que é a transposta da matriz dos cofatores. É um resultado passível de demonstração que $A^{-1} = \frac{1}{det A} \cdot adj A$ (Boldrini et al [16]).

$$A^{-1} = \frac{1}{det A} \cdot adj A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{det A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

O lado direito da igualdade apresenta uma multiplicação de matrizes. A multipli-

cação entre matrizes é assim definida: sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$B = [b_{ij}]_{n \times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

O produto de A e B, representado por $A \cdot B$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{n \times p}$, onde cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se a os elementos da i-ésima linha de A pela j-ésima coluna de B. Assim,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Cabe lembrar que o produto de duas matrizes só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Aplicando a multiplicação tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 \Delta_{11} + b_2 \Delta_{21} + \cdots + b_n \Delta_{n1}}{\det A} \\ x_2 = \frac{b_1 \Delta_{12} + b_2 \Delta_{22} + \cdots + b_n \Delta_{n2}}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_1 \Delta_{1n} + b_2 \Delta_{2n} + \cdots + b_n \Delta_{nn}}{\det A} \end{cases}.$$

O numerador da primeira fração é igual ao determinante que se obtém a partir de A, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. De fato, usando a expansão por cofatores, tem-se

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \Delta_{11} + b_2 \Delta_{21} + \cdots + b_n \Delta_{n1}.$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1 \Delta_{11} + b_2 \Delta_{21} + \cdots + b_n \Delta_{n1}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Estendendo o raciocínio tem-se:

$$x_2 = \frac{b_1 \Delta_{12} + b_2 \Delta_{22} + \cdots + b_n \Delta_{n2}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

⋮

$$x_i = \frac{b_1 \Delta_{1i} + \cdots + b_i \Delta_{1i} + \cdots + b_n \Delta_{ni}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Cabe aqui uma observação quanto ao uso correto da regra de Cramer, que é (Moutinho, [17]):

- (i) $\det A \neq 0$; neste caso, o sistema é possível e determinado, ou seja, tem solução e esta solução é única;
- (ii) $\det A = 0$; neste caso, o sistema é possível e indeterminado (possui infinitas soluções) ou indeterminado (não possui solução).

Situação 4

Esse exemplo será resolvido utilizando-se a equação matricial, onde será necessário o cálculo da matriz adjunta e da matriz inversa.

Seja o sistema 4

$$\begin{cases} x = 0, 5x + 0, 1y + 0, 1z + 7900 \\ y = 0, 2x + 0, 5y + 0, 3z + 3950 \\ z = 0, 1x + 0, 3y + 0, 4z + 1975 \end{cases} .$$

Isolando-se os termos independentes, tem-se:

$$\begin{cases} x - (0,5x + 0,1y + 0,1z) = 7900 \\ y - (0,2x + 0,5y + 0,3z) = 3950 \\ z - (0,1x + 0,3y + 0,4z) = 1975 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 0,5x - 0,1y - 0,1z = 7900 \\ -0,2x + 0,5y - 0,3z = 3950 \\ -0,1x - 0,3y + 0,6z = 1975 \end{cases} .$$

Esse sistema linear pode ser representado por uma equação matricial $AX = \mathbf{b}$, sendo A a matriz dos coeficientes, X a matriz com as incógnitas x , y e z e \mathbf{b} a matriz dos termos independentes. Escrevendo esse sistema na forma $AX = \mathbf{b}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0,5 & -0,3 \\ -0,1 & -0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = \mathbf{b}.$$

Usando o resultado $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$, calcula-se o determinante da matriz dos coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0,5 & -0,3 \\ -0,1 & -0,3 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,079 = \frac{79}{1000}.$$

Agora calcula-se os cofatores, como foi feito no caso anterior. Mas dessa vez com todos os elementos da matriz.

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0,21 = 0,21;$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-0,15) = 0,15;$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -0,2 & 0,5 \\ -0,1 & -0,3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0,11 = 0,11;$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-0,09) = 0,09;$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0,29) = 0,29;$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,1 & -0,3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-0,16) = 0,16;$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -0,1 & -0,1 \\ 0,5 & -0,3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0,08 = 0,08;$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-0,17) = 0,17;$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,2 & 0,5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0,23 = 0,23.$$

A matriz dos cofatores é $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,21 & 0,15 & 0,11 \\ 0,09 & 0,29 & 0,16 \\ 0,08 & 0,17 & 0,23 \end{bmatrix}$.

De acordo com a definição apresentada, a matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores de A. Para obter a transposta, trocam-se as linhas pelas colunas e as colunas pelas linhas. Logo, a matriz adjunta de A é

$$adj A = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 0,21 & 0,09 & 0,08 \\ 0,15 & 0,29 & 0,17 \\ 0,11 & 0,16 & 0,23 \end{bmatrix}.$$

Então, finalizando a questão e voltando à equação matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow X = \frac{1}{det A} \cdot (adj A)\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{0,079} \cdot \begin{bmatrix} 0,21 & 0,09 & 0,08 \\ 0,15 & 0,29 & 0,17 \\ 0,11 & 0,16 & 0,23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 27.500 \\ 33.750 \\ 24.750 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, para satisfazer a demanda externa, os setores de manufatura, agricultura e serviços devem produzir, respectivamente, R\$ 27.500,00, R\$ 33.750,00 e R\$ 24.750,00.

Como se pode observar, a natureza dos problemas descritos envolve um sistema linear cuja matriz dos coeficientes é formada por números racionais. Essa característica é interessante, pois o uso de números racionais, seja na forma de fração ou na forma decimal, é um tópico em que os alunos têm bastante dificuldade. Além disso, trabalhar com matrizes como esta é uma forma de aproximar o que é dado em sala de aula dos problemas encontrados no mundo real.

A equação matricial de uma forma geral, é resolvida por

$$\begin{aligned}
 AX &= \mathbf{b} \\
 \Rightarrow AA^{-1}X &= A^{-1}\mathbf{b} \\
 \Rightarrow IX &= A^{-1}\mathbf{b} \\
 \Rightarrow X &= A^{-1}\mathbf{b} \\
 \Rightarrow X &= \frac{1}{\det A}(\text{adj}A) \cdot \mathbf{b} \\
 X = A^{-1}B &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4 Modelos fechado e aberto

Nesta seção pretende-se representar de uma forma geral resultados que envolvem os modelos fechado e aberto. Para fazer esta generalização, pode-se observar características comun às situações 1 e 2 e às situações 3 e 4.

Na situação 1, que descreve o modelo fechado, o problema é em relação aos serviços prestados pelo pedreiro, eletricista e bombeiro hidráulico. O sistema que representa o equilíbrio deste sistema econômico é dado por

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 10x \\ 4x + 5y + z = 10y \\ 4x + 4y + 3z = 10z \end{cases}.$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} 0, 2x + 0, 1y + 0, 6z = x \\ 0, 4x + 0, 5y + 0, 1z = y \\ 0, 4x + 0, 4y + 0, 3z = z \end{cases}.$$

Este sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7)$$

Os valores que aparecem na matriz 7 dos coeficientes podem ser assim interpretados:

1) Os valores da 1ª coluna relacionam-se ao percentual de produção do pedreiro. O pedreiro trabalhará um total de 10 dias, que ficará dividido da seguinte maneira:

- 2 dias na sua casa ou $\frac{2}{10}$ da sua produção;
- 4 dias na casa do electricista ou $\frac{4}{10}$ da sua produção;
- 4 dias na casa do bombeiro hidráulico ou $\frac{4}{10}$ da sua produção.

Nota-se que somando as entradas da 1ª coluna obtém-se $\frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10} = 0,2 + 0,4 + 0,4 = 1$.

2) Os valores da 2ª coluna relacionam-se ao percentual de produção do electricista. O electricista trabalhará também um total de 10 dias, dividido assim:

- 1 dia na casa do pedreiro, ou seja, $\frac{1}{10}$ do total;
- 5 dias na sua própria casa, ou $\frac{5}{10}$ do total;
- 4 dias na casa do hidráulico ou $\frac{4}{10}$ do total.

Analogamente, somando-se as entradas da 2ª coluna tem-se $\frac{1}{10} + \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = 0,1 + 0,5 + 0,4 = 1$.

3) O bombeiro hidráulico, assim como os outros, trabalhará 10 dias. Sua produção ficará dividida da seguinte maneira:

- 6 dias na casa do pedreiro, ou $\frac{6}{10}$ do total;
- 1 dia na casa do electricista, ou $\frac{1}{10}$ do total;
- 3 dias na sua própria casa, ou $\frac{3}{10}$ do total.

Somando os valores tem-se $\frac{6}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 0,6 + 0,1 + 0,3 = 1$.

Pode-se observar que nos três casos a soma das entradas de cada coluna da matriz é igual a 1.

A situação 2 (produção de tomate, milho e alface cultivados respectivamente, pelos vizinhos Pedro, João e Marcos) é representada pelo sistema.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = z \end{cases}$$

Ou, de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (8)$$

Novamente, cada coluna da matriz representa a divisão percentual da produção de cada vizinho.

1ª coluna: $\frac{1}{2}$ para consumo próprio, $\frac{1}{3}$ para o João e $\frac{1}{6}$ para o Marcos. Somando o total dos valores dá $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

2ª coluna: $\frac{1}{3}$ para o Pedro, $\frac{1}{3}$ para si mesmo e $\frac{1}{3}$ para o Marcos. Somando o total dos valores tem-se $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

3ª coluna: $\frac{1}{4}$ para o Pedro, $\frac{1}{4}$ para o João e $\frac{1}{2}$ para o seu próprio consumo. O total dessa soma é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$.

Nas situações 1 e 2 a soma das entradas de cada coluna da matriz dos coeficientes é igual a 1, pois tudo que cada um produz é totalmente dividido entre eles. Esta é uma característica do modelo fechado de Leontief, ou seja, a produção individual ser dividida entre todos os setores, de modo que a soma das frações que cada um produz seja igual a 1. De um modo geral, se uma economia possui k setores, a produção de cada setor é utilizada por todos os setores. Para um determinado período de tempo, tem-se por definição (Anton, p. 583)

- (i) p_i = preço cobrado pela i -ésima indústria pela sua produção total. No caso $p_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$.
- (ii) e_{ij} = fração da produção total da j -ésima indústria que é comprada pela i -ésima indústria. No caso $e_{ij} \geq 0$, onde $i, j = 1, 2, \dots, k$.
- (iii) $e_{1j} + e_{2j} + \dots + e_{kj} = 1$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

As equações matriciais (7) e (8) podem ser representadas por $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$, ou,

equivalentemente, por $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, com $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ a

matriz identidade de ordem n , $E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix}$, denominada a matriz

de troca e $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$ o vetor preço.

Esta equação representa a situação de equilíbrio. O problema aqui é encontrar preços tais que a igualdade $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$ seja satisfeita.

Note que

$$\begin{aligned} E\mathbf{p} = \mathbf{p} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Resumidamente, o problema do modelo fechado (PMF) consiste em determinar o vetor \mathbf{p} tal que $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, onde $p_i \geq 0$, dados $E = [e_{ij}]$, $e_{ij} \geq 0$ e $e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1$.

Como pôde ser observado nos resultados das situações 1 e 2, o sistema homogêneo apresentou soluções não triviais para o vetor preço \mathbf{p} . Sendo as somas das entradas de coluna de uma matriz de troca iguais a 1, as somas das entradas de coluna da matriz $(I - E)$ são todas zero. Neste caso, $I - E$ tem determinante zero e, portanto, $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ tem soluções não triviais \mathbf{p} .

$$\text{De fato, sejam } E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então } I - E = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, a soma S_j dos elementos j de cada coluna j é dada por:

$$S_j = (1 - a_{jj}) - \sum_{i=1, i \neq j}^n a_{ij} = 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 - 1 = 0.$$

Na penúltima igualdade usou-se a hipótese de que a soma dos elementos da coluna j é 1, isto é,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \\ \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Sabe-se que, dada uma matriz $A_{n \times n}$, se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$.

$$\text{Seja a matriz } M_0 = I - E = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Realizando sucessivamente a soma dos elementos da linha 1 com os elementos de cada linha i , $i = 2, 3, \dots, n$, tem-se as seguintes matrizes equivalentes:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} - a_{21} & 1 - a_{12} - a_{22} & \cdots & -a_{1n} - a_{2n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} - a_{21} - a_{31} & 1 - a_{12} - a_{22} - a_{32} & \cdots & -a_{1n} - a_{2n} - a_{3n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}, \\ \vdots$$

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} - a_{21} - \cdots - a_{n1} & 1 - a_{12} - a_{22} - \cdots - a_{n2} & \cdots & -a_{1n} - a_{2n} - \cdots - a_{nn} \\ & -a_{21} & & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -a_{n1} & & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\det(I - E) = \det(M_0) = \cdots = \det(M_n) = 0,$$

pois o determinante de uma matriz com uma linha (ou uma coluna) inteira de zeros é zero.

Para que o sistema econômico faça sentido, além $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ possuir soluções não triviais, é necessário que os preços p_i sejam não-negativos. Como $p_i \geq 0$ por definição, o teorema a seguir enuncia o fato de $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ possuir soluções não triviais.

Teorema 2. *Se E for uma matriz de troca, então $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$ sempre tem uma solução não trivial \mathbf{p} cujas entradas são não negativas.*

Este teorema será ilustrado com dois exemplos.

Exemplo 01.

Considere uma sociedade composta por um agricultor e um marceneiro. O agricultor divide sua colheita da seguinte forma: $\frac{1}{2}$ da produção total para si próprio e $\frac{1}{2}$ para o marceneiro. Já no caso do marceneiro, toda a sua produção vai para consumo próprio. Esta situação pode ser apresentada na tabela da Figura 4.

A matriz de troca que representa esta situação é:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, tem-se

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bens consumidos por	Bens produzidos por	
	Agricultor	Marceneiro
Agricultor	$\frac{1}{2}$	0
Marceneiro	$\frac{1}{2}$	1

Figura 4: [5]

A solução é dada por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que dado $r > 0$, tem-se uma solução não trivial $\mathbf{p} \geq 0$.

Exemplo 02.

Se no exemplo anterior a produção de cada um, tanto do agricultor quanto do marceneiro, fossem apenas para uso próprio, a matriz de entrada seria a seguinte:

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, a solução de $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ seria

$$p = r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

em que dados $r \geq 0$ e $s \geq 0$, haveriam soluções não triviais para \mathbf{p} .

No primeiro exemplo apresentado, para satisfazer a condição de equilíbrio, um dos preços é zero. Já se fosse o exemplo 2, como r e s são independentes, haveria várias estruturas de preço linearmente independentes (Anton, [5]). O próximo teorema oferece condições para excluir estes dois casos.

Teorema 3. *Seja E uma matriz de troca tal que todas as entradas de E^m sejam positivas, com m um inteiro positivo qualquer. Então existe exatamente uma solução linearmente independente de $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, e ela pode ser escolhida com todas as suas entradas positivas.*

Demonstração. A demonstração deste teorema não será realizada, pois envolve conceitos de Cadeia de Markov. Os leitores interessados podem consultar Peterson e Olinick [18].

Tem-se como exemplos as matrizes de troca das situações 1 e 2, onde $E^m > 0$ para $m = 1$. Logo, tem-se a garantia de que existe uma solução linearmente

independente de $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{p} > 0$. Na situação 1 uma solução é

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 93 \\ 96 \\ 108 \end{bmatrix}$$

e na situação 2 é

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 120,00 \\ 100,00 \\ 106,67 \end{bmatrix}.$$

Já no que se refere ao modelo aberto, as situações 3 e 4 também têm características em comum.

Na situação 3, o sistema é

$$\begin{cases} x = 0x + 0,65y + 0,55z + 50000 \\ y = 0,25x + 0,05y + 0,10z + 25000 \\ z = 0,25x + 0,05y + 0z + 0 \end{cases}.$$

Isolando os termos independentes, tem-se

$$\begin{cases} x - (0x + 0,65y + 0,55z) = 50000 \\ y - (0,25x + 0,05y + 0,10z) = 25000 \\ z - (0,25x + 0,05y + 0z) = 0 \end{cases},$$

que pode ser escrito através da equação matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Na situação 4 tem-se o sistema

$$\begin{cases} x = 0,5x + 0,1y + 0,1z + 7900 \\ y = 0,2x + 0,5y + 0,3z + 3950 \\ z = 0,1x + 0,3y + 0,4z + 1975 \end{cases}.$$

Isolando-se os termos independentes, tem-se

$$\begin{cases} x - (0,5x + 0,1y + 0,1z) = 7900 \\ y - (0,2x + 0,5y + 0,3z) = 3950 \\ z - (0,1x + 0,3y + 0,4z) = 1975 \end{cases},$$

que escrito na forma de equação matricial, torna-se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0,10 & 0,10 \\ 0,20 & 0,50 & 0,30 \\ 0,10 & 0,30 & 0,40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7900 \\ 3950 \\ 1975 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

As equações 9 e 10 podem ser escritas na forma

$$\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (11)$$

o que significa

Produção total - consumo das indústrias = demanda externa.

Por definição,

(i) O vetor produção $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$, com $x_i \geq 0$, onde x_i é o valor monetário da produção total da i -ésima indústria.

(ii) O vetor demanda $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$, com $d_i \geq 0$, onde d_i é o valor monetário da produção da i -ésima indústria necessária para satisfazer a demanda externa.

(iii) A matriz de consumo $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$, com $c_{ij} \geq 0$, onde c_{ij} é o valor monetário da produção da i -ésima indústria que é necessária para a j -ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto.

A Equação 11 pode ser reescrita como

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}. \quad (12)$$

Para que a Equação 12 represente um sistema econômico desejável, para qualquer vetor de demanda $\mathbf{d} \geq 0$, (com todas as suas entradas maiores ou iguais a zero), ou seja, que qualquer demanda externa possa ser satisfeita, além de $(I - C)^{-1}$ existir, ela deve ter entradas não negativas, o que garante que haverá uma única solução não-negativa \mathbf{x} , dada por

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d}.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição. C é uma matriz de consumo produtiva se, e somente se, $(I - C)^{-1}$ existe e $(I - C)^{-1} \geq 0$ (isto é, tem todas as suas entradas não-negativas).

Por outro lado, observando-se a Equação 12, nota-se que para se obter $d > 0$ deve-se ter $x > Cx$, isto é, cada indústria deve produzir mais do que consome. O que pode ser resumido no seguinte teorema:

Teorema 4. *Uma matriz de consumo C é produtiva se, e só se, existe um vetor produção $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$.*

Será mostrado apenas a volta do teorema, isto é, que se existe um vetor de produção $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$ então existe $(I - C)^{-1}$ e $(I - C)^{-1} \geq 0$, isto é, C é produtiva.

Passo 1. Será mostrado agora que se existir algum vetor $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ tal que $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*$, então $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$. Seja \mathbf{x}^* o vetor de produção tal que $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}^* > C\mathbf{x}^*$, ou seja, $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*$. Como $C \geq 0$ tem-se

$$C\mathbf{x}^* = \left[\sum_{j=1}^k c_{ij}x_j \right],$$

onde $c_{ij} \geq 0$ e $x_j \geq 0$. Logo, $C\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, ou seja, $0 \leq C\mathbf{x}^*$. Mas $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*$, então tem-se

$$0 \leq C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*. \quad (13)$$

Portanto, $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$.

Passo 2. Será mostrado que, existe algum número λ tal que $0 < \lambda < 1$ e $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$.

Note que $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^* \Leftrightarrow C\mathbf{x}^* < I\mathbf{x}^*$. Seja $C\mathbf{x}^* = [p_i]$ e $\mathbf{x}^* = [x_i]$. Como, da desigualdade (13) tem-se $\forall i$ que $0 \leq p_i < x_i$, isto é, $x_i - p_i > 0$. Seja $\lambda_i = x_i - p_i$, isto é, $x_i = p_i + \lambda_i > p_i + \frac{\lambda_i}{2} > p_i$, ou seja, $p_i < p_i + \frac{\lambda_i}{2} < x_i$ para todo i , de outra forma, $0 \leq p_i < \frac{p_i + \frac{\lambda_i}{2}}{x_i} \cdot x_i < x_i$. Como $p_i \geq 0$ tem-se $0 < \frac{p_i + \frac{\lambda_i}{2}}{x_i} \cdot x_i < x_i$. Dividindo todos os termos por x_i (pois $x_i \geq 0$), tem-se

$$0 < \frac{p_i + \frac{\lambda_i}{2}}{x_i} \cdot x_i < 1. \quad (14)$$

Chamando $\alpha_i = p_i + \frac{\lambda_i}{2}$ e tomando $\lambda = \max(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, x$ tem-se $0 < \alpha_i < \lambda$ para todo i , de modo que $p_i < \alpha_i x_i < \lambda x_i$ para todo i , ou seja, $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$. Da equação (14) conclui-se que $0 < \lambda < 1$.

Passo 3. Será mostrado agora que $C^n \mathbf{x}^* < \lambda^n \mathbf{x}^*$ com $n = 1, 2, \dots$

Como foi visto anteriormente, $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$. Logo, $C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*$ é válido para $n = 1$. Agora suponha que esta afirmação seja válida para $n - 1$. Deve-se mostrar que ela também será válida para n .

Sendo

$$C^{n-1}\mathbf{x}^* < \lambda^{n-1}\mathbf{x}^*,$$

então

$$C(C^{n-1}\mathbf{x}^*) < C\lambda^{n-1}\mathbf{x}^*.$$

Como $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$, vale a desigualdade

$$C^n\mathbf{x}^* < \lambda^{n-1}C\mathbf{x}^* < \lambda^{n-1}\lambda\mathbf{x}^*$$

$$\Leftrightarrow C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*.$$

Passo 4. Será mostrado que $C^n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.

Seja $C^n = [p_{in}]$. Como $C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*$ segue que $C^n < \lambda^n$ e $C^n < \lambda^n I$. $C^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow p_{in} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty \forall n$. Como $0 < p_{in} < \lambda^n$ (pois $C^n < \lambda^n I$), $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$, (pois $0 < \lambda < 1$), pelo Teorema do Confronto (Stewart, [19]), segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{in} = 0 \forall i, n = 1, 2, \dots, k$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = 0$.

Passo 5. Expandindo o produto, será mostrado que

$$(I - C)(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) = I - C^n$$

com $n = 1, 2, \dots$

Para $n = 1$ tem-se $(I - C)(I + C) = I - C^2$.

Suponha que esta igualdade é verdadeira para $n - 1$. Deve-se provar que será também válida para n . Sendo $(I - C)(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1})$ tem-se

$$I + C + C^2 + \dots + C^{n-1} - C - C^2 - \dots - C^{n-1} - C^n = I - C^n,$$

ou seja, a igualdade

$$(I - C)(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) = I - C^n$$

é válida $\forall n$.

Passo 6. Fazendo $n \rightarrow \infty$ no Passo 5, será mostrado que existe a soma infinita de matrizes $S = I + C + C^2 + \dots$ e que $(I - C)S = I$.

Sabe-se da igualdade anterior que

$$(I - C)(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) = I - C^n$$

$$\Rightarrow (I + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) = \frac{I - C^n}{I - C}.$$

Chamando $(I + C + C^2 + \dots + C^{n-1})$ de S e sabendo que $C^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, tem-se no infinito,

$$S = \frac{I - 0}{I - C}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(I - C)$ resulta em

$$(I - C)S = I.$$

Passo 7. Será mostrado que $S \geq 0$ e que $S = (I - C)^{-1}$.

Como $C^n = [pn_{ij}]$ e $0 < pn_{ij} < \lambda^n$, tem-se que

$$\begin{aligned} S &= I + C + C^2 + \dots \\ \Leftrightarrow S &= I + [p1_{ij}] + [p2_{ij}] + \dots \\ &\Rightarrow S \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, de $(I - C)S = I$ tem-se

$$\begin{aligned} (I - C)^{-1}(I - C)S &= (I - C)^{-1}I \\ \Rightarrow S &= (I - C)^{-1}. \end{aligned}$$

Passo 8. Será mostrado que C é uma matriz de consumo produtiva.

Como $x > Cx$ e pela definição existe $(I - C)^{-1}$ tal que $(I - C)^{-1} \geq 0$, conclui-se que C é uma matriz de consumo produtiva.

Como $x > Cx$, isto significa que a produção é maior que o consumo em todas as entradas de linha dessa matriz.

O Teorema demonstrado possui dois corolários:

Corolário 1. Uma matriz de consumo C é produtiva se a soma das entradas de cada linha de C for menor do que 1.

De fato, seja o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $x \geq 0$. Além disso, sendo $C = [c_{ij}]_{k \times k}$

tal que

$$C\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k c_{ij} < 1,$$

$\forall i = 1, 2, \dots, k$ tem-se $Cx = [p_i]_{k \times 1}$, onde

$$p_i = C\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k c_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^k c_{ij} < x_i,$$

$\forall i = 1, 2, \dots, k$. Logo $C\mathbf{x} < \mathbf{x}$, ou seja, existe um vetor produção $\mathbf{x} \geq 0$ tal que $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$. Portanto, C é uma matriz de consumo produtiva.

Corolário 2. Uma matriz de consumo C é produtiva se a soma das entradas de cada coluna de C for menor do que 1.

Seja $\bar{C} = [\bar{C}_{ij}]_{k \times k}$ uma matriz de consumo tal que

$$\sum_{i=1}^k \bar{c}_{ij} < 1, \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Para mostrar que \bar{C} é produtiva basta mostrar, por definição que $(I - C)^{-1}$ existe e $(I - C)^{-1} \geq 0$.

Nota-se primeiramente que

$$(I - \bar{C}) = \begin{bmatrix} 1 - \bar{c}_{11} & -\bar{c}_{12} & \cdots & -\bar{c}_{1k} \\ -\bar{c}_{21} & 1 - \bar{c}_{22} & \cdots & -\bar{c}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{c}_{k1} & -\bar{c}_{k2} & \cdots & 1 - \bar{c}_{kk} \end{bmatrix} = (I - C)^T,$$

onde

$$c_{ij} = \bar{c}_{ji}$$

e

$$\sum_{j=1}^k c_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{c}_{ij} < 1.$$

Pelo Corolário 1, C é uma matriz de consumo produtiva, logo, por definição, $(I - C)^{-1}$ existe e é $(I - C)^{-1} \geq 0$. Assim,

$$(I - \bar{C})^{-1} = [(I - C)^T]^{-1} = [(I - C)^{-1}]^T$$

existe e é tal que

$$(I - \bar{C})^{-1} \geq 0.$$

Usou-se aqui o fato de que $[A^T]^{-1} = [A^{-1}]^T$, fato este que será demonstrado como segue.

Proposição. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, qualquer que seja a matriz invertível A .

De fato, seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, tal que a soma dos elementos

de cada linha é menor do que 1 e seja $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, tal que a soma dos elementos de cada coluna é menor do que 1.

De A^{-1} temos

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T &= \left(\frac{adj.A}{det(A)} \right)^T = \left(\frac{1}{det(A)} \cdot adj.A \right)^T = \left(\frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{det(A)} & \frac{\Delta_{21}}{det(A)} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{det(A)} \\ \frac{\Delta_{12}}{det(A)} & \frac{\Delta_{22}}{det(A)} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{det(A)} & \frac{\Delta_{2n}}{det(A)} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{det(A)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando que $det(A) = det(A^T)$, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{det(A)} & \frac{\Delta_{21}}{det(A)} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{det(A)} \\ \frac{\Delta_{12}}{det(A)} & \frac{\Delta_{22}}{det(A)} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{det(A)} & \frac{\Delta_{2n}}{det(A)} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{det(A)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{det(A^T)} & \frac{\Delta_{21}}{det(A^T)} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{det(A^T)} \\ \frac{\Delta_{12}}{det(A^T)} & \frac{\Delta_{22}}{det(A^T)} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{det(A^T)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{det(A^T)} & \frac{\Delta_{2n}}{det(A^T)} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{det(A^T)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{det(A^T)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A^T)} \cdot (adj.A^T) = (A^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Tem-se como exemplos as matrizes de consumo das situações 3 e 4, onde a soma das entradas de cada coluna é menor do que 1. Logo, pelo **Corolário 2** as duas matrizes C são produtivas.

De uma maneira geral, o problema do modelo aberto (PMA) é determinar o vetor de produção \mathbf{x} tal que

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d},$$

onde $x_i \geq 0$, $d_i \geq 0$ e $c_{ij} \geq 0$.

Como foi visto na seção 1, tem-se dois exemplos que descrevem o modelo fechado. Em cada uma das situações a produção total de cada indústria ou setor é totalmente dividida entre todos os setores. O objetivo é encontrar preços de modo que haja um equilíbrio na economia, ou seja, ninguém ganha nem perde. Nos dois exemplos que descrevem o modelo aberto, a produção total de cada setor é dividida da seguinte maneira: uma parte fica para as indústrias, pois elas

precisam de insumo para se manterem funcionando; a outra parte é para atender à uma demanda externa. Nestes exemplos de modelo aberto, os preços são fixos e o objetivo é encontrar níveis de produção (em reais) suficientes para atender todos os setores (Anton, página 585).

5 Sugestões de Exercícios

Exercício 1. Fonte: [5]

Três engenheiros, um engenheiro civil (EC), um elétrico (EE) e um mecânico (EM) têm, cada um, uma firma de consultoria. A consultoria que prestam é de natureza multidisciplinar, de modo que cada um compra uma parte do serviço das outras duas firmas. Para cada R\$ 1,00 de consultoria feita pelo EC, ele compra R\$ 0,10 de serviços do EE e R\$ 0,30 de serviços do EM. Para cada R\$ 1,00 de consultoria feita pelo EE, ele compra R\$ 0,20 de serviços do EC e R\$ 0,40 de serviços do EM. Finalmente, para cada R\$ 1,00 de consultoria feita pelo EM, ele compra R\$ 0,30 de serviços do EC e R\$ 0,40 de serviços do EE. Certa semana, o EC recebe pedidos de consultoria externa de R\$ 500,00, o EE recebe pedidos de consultoria externa de R\$ 700,00 e o EM recebe pedidos de consultoria externa de R\$ 600,00. Qual é o valor da consultoria de cada engenheiro nessa semana?

Exercício 2. Fonte: [5]

Duas oficinas de conserto de veículos, uma que trata da parte mecânica (M) e outra de lataria (L), utilizam uma os serviços da outra. Para cada R\$ 1,00 de negócios que M faz, M utiliza R\$ 0,50 de seus próprios serviços e R\$ 0,25 dos serviços de L e, para cada R\$ 1,00 de negócios que L faz, L utiliza R\$ 0,10 de seus próprios serviços e R\$ 0,25 dos serviços de M.

- (a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.
- (b) Quais valores de M e L devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de R\$ 7.000,00 de serviços mecânicos e R\$ 14.000,00 de serviços de lataria?

Exercício 3 Fonte: [5]

Uma economia simples produz alimento (A) e moradia (M). A produção de R\$ 1,00 de alimento requer R\$ 0,30 de alimento e R\$ 0,10 de moradia, e a produção de R\$ 1,00 de moradia requer R\$ 0,20 de alimento e R\$ 0,60 de moradia.

- (a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.
- (b) Quais valores de alimento e moradia devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de R\$ 130.000,00 de alimento e R\$ 130.000,00 de moradia?

Exercício 4 Fonte: [5]

Considere a economia aberta descrita pela tabela da Figura 5, onde o insumo é em unidades monetárias (R\$) necessárias para R\$ 1,00 de produto.

		Insumo requerido para produzir R\$ 1,00		
		Moradia	Alimentação	Serviços
Fornecedor	Moradia	R\$ 0,10	R\$ 0,60	R\$ 0,40
	Alimentação	R\$ 0,30	R\$ 0,20	R\$ 0,30
	Serviços	R\$ 0,40	R\$ 0,10	R\$ 0,20

Figura 5: [5]

- (a) Encontre a matriz de consumo para essa economia.
- (b) Suponha que o setor aberto tenha uma demanda no valor de R\$ 1.930,00 de moradia, R\$ 3.860,00 de alimento e R\$ 5.790,00 de serviços. Use redução por linhas para encontrar um vetor de produção que atenda essa demanda exatamente.

Exercício 5 Fonte: [5]

Uma companhia produz projetos de web, desenvolve software e presta serviços de rede. Considere a companhia como uma economia aberta descrita pela tabela da Figura 6, onde o insumo é em reais (R\$) necessários para R\$1,00 de produto.

		Insumo requerido para produzir R\$ 1,00		
		Projeto de Web	Software	Rede
Fornecedor	Projeto de Web	R\$ 0,40	R\$ 0,20	R\$ 0,45
	Software	R\$ 0,30	R\$ 0,35	R\$ 0,30
	Rede	R\$ 0,15	R\$ 0,10	R\$ 0,20

Figura 6: [5]

- (a) Encontre a matriz de consumo para essa economia.
- (b) Suponha que os consumidores (o setor aberto) tenham uma demanda no valor de R\$ 5.400,00 de projetos de web, R\$ 2.700,00 de software e R\$ 900,00 de serviços de rede. Use redução por linhas para encontrar um vetor de produção que atenda exatamente essa demanda.

Exercício 6 Fonte: [6]

Uma pequena cidade tem três unidades industriais principais: uma mina de cobre, uma estrada de ferro e uma empresa de eletricidade. Para produzir R\$1,00

de cobre, a mina de cobre usa R\$0,20 de cobre, R\$0,10 de transporte e R\$0,20 de energia elétrica. Para fornecer R\$1,00 de transporte, a estrada de ferro usa R\$0,10 de cobre, R\$0,10 de transporte e R\$0,40 de energia elétrica. Para fornecer R\$1,00 de energia elétrica, a empresa de eletricidade usa R\$0,20 de cobre, R\$0,20 de transporte e R\$0,30 de energia elétrica. Suponha que durante o ano haja uma demanda externa de 1,2 milhão de reais de cobre, 0,8 milhão de reais em transporte e 1,5 milhão de reais em energia elétrica. Quanto deve produzir cada indústria para satisfazer as demandas?

Exercício 7 Fonte: [6]

Considere uma sociedade simples, constituída de um fazendeiro, de um carpinteiro e de um alfaiate. Cada um deles produz um produto: o fazendeiro produz a comida, o carpinteiro constrói as casas e o alfaiate confecciona as roupas. Por conveniência, pode-se selecionar as unidades onde cada indivíduo produz uma unidade de artigo por ano. Suponha que, durante o ano, a porção de cada produto consumida pelos indivíduos é dada conforme a tabela da Figura 7.

Bens consumidos por:	Bens produzidos por:		
	Fazendeiro	Carpinteiro	Alfaiate
Fazendeiro	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
Carpinteiro	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Alfaiate	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Figura 7: [6]

Dessa maneira, o fazendeiro consome $\frac{7}{16}$ de sua própria produção, enquanto o carpinteiro consome $\frac{5}{16}$ da produção do fazendeiro, o carpinteiro consome $\frac{5}{16}$ das roupas confeccionadas pelo alfaiate, e assim por diante. Seja x o preço por unidade de comida, y o preço de uma casa e z o preço por peça de roupa. Vamos considerar que todos paguem o mesmo preço por um produto. Assim, o fazendeiro paga o mesmo preço pela comida que o alfaiate e o carpinteiro, embora ele mesmo produza a comida. Nessas condições, determine os preços x , y e z de modo que haja um estado de equilíbrio.

Respostas dos exercícios

(1)

EC: R\$ 1.256,00; **EE:** R\$ 1.448,00; **EM:** 1.556,00.

(2)

(a) $E = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 \\ 0,25 & 0,10 \end{bmatrix}$

(b) **M:** R\$ 25.290,00; **L:** R\$ 22.581,00.

(3)

(a) $E = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,20 \\ 0,10 & 0,60 \end{bmatrix}$

(b) **A:** R\$ 300.000,00; **M:** R\$ 400.000,00.

(4)

(a) $E = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,60 & 0,40 \\ 0,30 & 0,20 & 0,30 \\ 0,40 & 0,10 & 0,20 \end{bmatrix}$

(b) **Moradia:**R\$ 31.500,00; **Alimentação:**R\$ 26.500,00; **Serviços:**R\$ 26.300,00.

(5) **Projeto de web:** R\$ 49.304,00; **Software:** R\$ 11.739,00; **Rede:** R\$ 26.608,00.

(6)

Mina de cobre: R\$ 4.000.000,00;

Transporte: R\$ 400.000,00;

Energia elétrica: R\$ 1.800.000,00.

(7)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino sobre sistemas lineares, junto com matrizes e determinantes, aplicados a um modelo econômico. A Álgebra Linear básica merece uma atenção especial dentro do currículo do Ensino Médio e serve de base para estudos posteriores, pois como pode ser visto em algumas das referências citadas, várias são as suas aplicações.

Neste trabalho foi proposta uma sequência didática onde matrizes e determinantes foram exigidos à medida que foram resolvidos os problemas envolvendo sistemas lineares, não trabalhando os conteúdos de forma separada ou em tópicos. Aliada aos conceitos de Economia e aos exemplos de modelos econômicos citados, espera-se que esta sequência didática propicie um maior interesse em relação à

matemática.

A Matemática é fundamental dentro do currículo escolar, pois se faz presente nas mais variadas situações cotidianas. Os resultados do PISA divulgados no dia 06 de dezembro de 2016, colocam o Brasil entre os últimos colocados em um grupo de 72 países. [20] Apesar de serem vários os fatores que podem atrapalhar o desempenho escolar dos alunos, o professor pode contribuir para a melhoria deste quadro, buscando alternativas que tenham por finalidade tornar o ensino de Matemática ainda mais interessante, por exemplo através da contextualização. Espera-se que este trabalho contribua com essa tarefa, oferecendo assim mais uma opção de tema para os professores aplicarem em sala com seus alunos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado. Agradeço à minha família e aos meus amigos pelo incentivo e apoio. Aos professores do PROFMAT-UFPR, em especial à minha professora orientadora, Paula Rogeria Lima Couto, pelo conhecimento compartilhado. Aos meus colegas de curso pelo apoio. Agradeço a E. E. B. Nereu Ramos pela flexibilidade no horário. Agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro. Um agradecimento a todos que, de uma forma ou outra, contribuíram para este momento.

Referências

- [1] GOMEZ-GRANELL, C. **Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática.** Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1998.
- [2] SALEMI, V. **O ensino de Economia nas escolas brasileiras.** Disponível em: <<http://clubedojornalismo.com.br/o-ensino-de-economia-nas-escolas-brasileiras/>>. Acesso em: 15 jan. 2017.
- [3] LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações.** 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [4] KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [5] ANTON, H; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações.** 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [6] KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

- [7] CARVALHO, C. **A Origem e Etimologia da palavra "Economia"**. Disponível em: <<http://studentsforeconomy.blogspot.com.br/2011/09/origem-e-etimologia-da-palavra-economia.html>>. Acesso em: 08 out. 2016.
- [8] GREMAUD, A. P. et al. **Manual de Introdução à Economia**. São Paulo: Saraiva, 2006.
- [9] SOUZA, C. **Visão Geral da Administração da Produção**. Disponível em <<http://pt.slideshare.net/carllos.souza/gpii-aula-ii-slackcaptulo-ii-sistemas>> Acesso em 26 set. 2016.
- [10] ECONOMIA EAD UFJF. **O que, como e para quem produzir?** Disponível em <<http://www.economiaead.ufjf.br/index.php/aula-02/>> Acesso em 26 set. 2016.
- [11] MANKIW, N. G. **Introdução à economia**. 5 ed. São Paulo: CENCAGE Learning, 2009.
- [12] TOSTE, G. **Pensando como um Economista**. Disponível em <<http://slideplayer.com.br/slide/384926/>> Acesso em 26 set. 2016.
- [13] PARKIN, M. **Economia**. 8 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.
- [14] BUGLIA, F. **Matemática - Definição e Aplicações das Determinantes**. Disponível em <<https://www.infoenem.com.br/matematica-definicao-e-aplicacoes-das-determinantes/>> Acesso em 17 dez. 2016.
- [15] ENSINO DE MATEMÁTICA. **Regra de Sarrus**. Não paginado. Disponível em <<http://ensinodematemtica.blogspot.com.br/2010/01/regra-de-sarrus-10012010.html>> Acesso em 19 nov. 2016.
- [16] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3 ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.
- [17] MOUTINHO, D. Ainda os sistemas lineares. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 47, p. 44-45, 2001.
- [18] PETERSON, B. OLINICK, M. Leontief Models, Markov Chains, Substochastic Matrices, and Positive Solutions of Matrix Equations. **Mathematical Modelling**. Middlebury, v. 3, p. 221-239, 1982. Disponível em <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0270025582900276>>. Acesso em: 10 nov. 2016.
- [19] STEWART, J. **Cálculo**. 6 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- [20] PAIVA, T. **Brasil mantém últimas colocações no Pisa**. Disponível em: <<http://www.cartaeducacao.com.br/reportagens/brasil-mantem-ultimas-colocacoes-no-pisa/>>. Acesso em: 15 jan. 2017.