

---

**Universidade Federal de São Paulo**

Instituto de Ciência e Tecnologia

---



**Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional - PROFMAT**

**Modelagem matemática nas primeiras  
disciplinas do Ensino Superior: uma  
estratégia para a abordagem de funções e  
sistemas**

**Thiago Siqueira Santos**

Orientador: Prof. Dr. Luís Felipe Bueno

São José dos Campos

Março, 2017



**PROFMAT**

Título: *Modelagem matemática nas primeiras disciplinas do Ensino Superior: uma estratégia para a abordagem de funções e sistemas*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

**São José dos Campos**

**Março, 2017**

Santos, Thiago Siqueira

**Modelagem matemática nas primeiras disciplinas do Ensino Superior: uma estratégia para a abordagem de funções e sistemas,**

Thiago Siqueira Santos – São José dos Campos, 2017.

viii, 56f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Mathematical modeling at the early classes of higher education: a strategy for an approach of functions and systems

1. Modelagem. 2. Funções. 3. Sistemas lineares.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

**Chefe de departamento:**

Prof. Dr. Carlos Marcelo Gurjão de Godoy

**Coordenador do Programa de Pós-Graduação:**

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

THIAGO SIQUEIRA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS PRIMEIRAS  
DISCIPLINAS DO ENSINO SUPERIOR: UMA ESTRATÉGIA  
PARA A ABORDAGEM DE FUNÇÕES E SISTEMAS

**Presidente da banca:** Prof. Dr. Luís Felipe Bueno

**Banca examinadora:**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Cláudia Aline A. S. Mesquita

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Prof. Dr. Robson Silva

**Data da Defesa:** 3 de março de 2017

*“A colheita é comum, mas o capinar é sozinho.”*

*João Guimarães Rosa*

## AGRADECIMENTOS

---

Às três Marias:

Minha mãe, pela sabedoria, amor e carinho;

A mãe de meu pai, por ensiná-lo a cuidar com chás;

Catarina, companheira de tantos sonhos, por ser a melhor parte dos dias.

Aos amigos professores:

Meu orientador, Prof. Luís Felipe Bueno, pelo bom humor, cobranças, coragem e seu compromisso com uma educação pública de qualidade;

Os que viveram a correria de todo o processo do ProfMat;

Os que investiram seu tempo no tablado da UNIFESP pela nossa formação;

Thaís, Palavra, Murilo, Fabi, Ishii, Léo e Rafael, pelas conversas de varanda.

Aos meus queridos alunos:

Os mais brilhantes, por me motivarem a continuar aluno;

Os não tão brilhantes, por me motivarem a continuar professor.

À tudo aquilo que, no universo, represente coragem, justiça e amor.

## RESUMO

---

De acordo com nossa vivência como professores de Matemática, temos percebido certo receio por parte da maioria dos alunos sobre os tópicos funções e sistemas lineares, tanto no ensino básico, quanto no superior. Este tipo de comportamento gera uma barreira adicional para a compreensão dos temas ensinados e, quando se trata do ensino superior, vai de encontro com a expectativa dos professores que consideram que esses tópicos já façam parte do domínio do aluno. Neste trabalho, por meio da modelagem matemática, vamos focar em estudar alternativas que aumentem o repertório do professor para a apresentação dos assuntos ministrados e propor abordagens para o momento de transição vivenciado pelos alunos ingressantes da graduação.

## ABSTRACT

---

According to our experience as Mathematic's teacher, we have noticed a certain concern from most of the students about two topics: functions and linear systems, both in basic and higher education. This sort of behavior generates an additional barrier to the understanding of the subjects taught and, when it comes to higher education, it collides with the professor's expectations, which consider those topics to be a part of the student's previous knowledge. In this work, through mathematical modeling, we will focus on studying alternatives that increase professor's repertoire for the presentation of the subjects to be taught and also on proposing approaches for the transition period experienced by undergraduate freshmen students.



## SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO	2
2	UMA ANÁLISE DOS ASSUNTOS ABORDADOS NO ENEM	5
3	A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO	14
4	O TAMANHO DAS LATAS DE ALUMÍNIO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA FUNÇÕES	19
4.1	O problema	19
4.1.1	Hipóteses, variáveis e dados	20
4.2	A condução do problema	20
4.3	Considerações finais sobre a abordagem	25
5	O PROBLEMA DOS LANCES LIVRES: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA SISTEMAS LINEARES	29
5.1	O problema	29
5.1.1	Hipóteses, variáveis e dados	30
5.2	A condução do problema	30
5.3	Considerações finais sobre a abordagem	39
6	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47

## INTRODUÇÃO

---

A Modelagem fornece alternativas pedagógicas para abordar tópicos da Matemática através de problemas não essencialmente matemáticos [1]. É sobre essa premissa que iremos construir o presente trabalho.

Em certa medida, a Modelagem Matemática é uma forma privilegiada de interligar os saberes matemáticos com o cotidiano. Um cotidiano que nos fornece situações de comparação, classificação, quantificação e medição que nos impulsionam à generalizações e inferências. É o conhecimento da Matemática, imerso em um contexto cultural, como uma ferramenta de buscar uma forma de lidar com o mundo [2]. De uma forma geral, entenderemos a Modelagem Matemática como um meio de matematização da realidade.

Segundo Bassanezi [3], como um processo intrínseco da Matemática Aplicada, a Modelagem mantém uma relação fundamental com a dinâmica no Ensino Superior, visto que ela define currículos de alguns cursos de graduação. Busca-se desenvolver os tópicos mais “aplicáveis”, isto é, aqueles que já serviram como base para modelos de alguma realidade, como as equações diferenciais e a programação linear.

Porém, é na relação da Modelagem com o ensino-aprendizagem, e não apenas na definição de currículos, que poderemos trabalhar no sentido de obter um repertório alternativo para o professor de Matemática em todos os níveis de ensino [4]. Uma recente co-publicação, de abril de 2016, entre a Consortium for Mathematics and its Applications (COMAP) e a Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), chamada de GAIMME [5], Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education, apresenta uma série de perspectivas de como a Modelagem pode apresentar alternativas para dentro da sala de aula.

Em contrapartida, essas alternativas são pouco abordadas nos livros didáticos brasileiros e, por consequência, raramente estão presentes nos repertórios apresentados pelos docentes do ensino básico e superior. Como pode ser visto em [3], essa ausência pode ocorrer pois existem obstáculos instrucionais, como por exemplo o comprometimento com a abordagem completa de uma ementa, obstáculos gerados pelos alunos, que de certa forma estão habituados a não serem colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, e obstáculos criados pelos próprios professores, ou por não se sentirem habilitados para trabalhar em áreas que não conhecem, ou

ainda por não entenderem que as aplicações de um determinado conceito seja parte do ensino da Matemática.

Existe ainda um descontentamento comum entre os professores que ministram as disciplinas iniciais dos cursos superiores da área de exatas sobre os conhecimentos prévios do corpo discente que recebem. Na nossa visão isso é compreensível, já que hoje poucos professores do ensino superior têm contato com o processo de seleção de seus alunos. Sem conhecer bem a formação do aluno que recebe, é mais difícil para os professores conseguirem a suavidade que se espera na transição entre o ensino básico e o ensino superior.

Além disso, existe um número pouco confortável de alunos que não conseguem ter o rendimento mínimo em disciplinas como Cálculo e Geometria Analítica, o que contribui com a evasão dos cursos ainda nos períodos iniciais. Dados da Confederação Nacional da Indústria, relatam uma evasão de cerca de 55% nos cursos de engenharia entre os anos 2000 e 2010 [6].

É importante dizer que o objetivo desse texto não é fazer uma crítica a outras abordagens, ou ainda desvalorizar o trabalho do docente que estrutura a sua aula no formato “Enunciado-Demonstração-Aplicação”. De forma alguma estamos propondo que existe uma relação direta entre a evasão dos alunos ingressantes e uma postura docente pautada pelo modelo expositivo. Segundo SILVA [7], a questão da evasão no ensino superior ainda é pouco explorada pela literatura acadêmica e questões metodológicas impedem a generalização dos resultados. A proposta aqui é apresentar roteiros baseados no caráter investigativo da Modelagem Matemática, que possam servir como referência, material de apoio ou como roteiro para um estudo autônomo, tanto dentro do Ensino Médio quanto no Superior.

Neste ponto vale salientar que existe uma diferença entre a contextualização e um problema de modelagem matemática. Segundo o exemplo dado por Levy [4], transformar a sentença aritmética  $2 + 3$  em “2 maçãs mais 3 maçãs” não é o foco, porém, questões como “quantas fatias de maçã deveriam estar em um lanche?” levantam questões sobre alimentação saudável, o que nos levaria a trabalhar com tabelas nutricionais, ou ainda sobre o tamanho de lancheiras, que fomentaria a discussão sobre volumes e aproveitamento de espaços.

A presente dissertação será organizada em quatro partes:

- (i) Uma análise dos assuntos recorrentes na prova de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM, por se tratar da principal porta de acesso às universidades públicas e, por esse motivo, por ser um bom parâmetro sobre a trajetória escolar dos alunos ingressantes;
- (ii) Uma síntese de como a modelagem matemática pode ser utilizada no processo

de ensino-aprendizagem, baseada nos trabalhos de Almeida et al [1] e Bassanezi [3] [8];

(iii) Uma proposta para a abordagem do tópico funções reais, dada sua importância na disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral; e

(iv) Uma proposta para a abordagem do tópico sistemas lineares, pela relevância para disciplinas como a Geometria Analítica.

## UMA ANÁLISE DOS ASSUNTOS ABORDADOS NO ENEM

---

O ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio, foi criado no ano de 1998 com o intuito de avaliar os três anos finais do ensino básico, coletando dados que têm o potencial de serem utilizados em melhorias na educação de uma forma geral. Sua elaboração, aplicação, correção, bem como a análise dos resultados, é feita pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), autarquia federal filiada ao Ministério da Educação (MEC).

Diferentemente de outras provas do gênero, como o Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), cuja aplicação acontece em vários momentos ao longo do Ensino Fundamental, o ENEM, como sistema de avaliação do Ensino Médio, era destinado apenas aos alunos concluintes. Originalmente, contava com uma prova de 63 questões objetivas, com temáticas interdisciplinares, e uma proposta de produção de texto.

Em 2004, a prova começou a ser utilizada pelo Programa Universidade para Todos (Prouni), o que levou o número de inscritos para 3 milhões. Com o caminhar dos anos, o Exame se tornou o principal instrumento de seleção de um grande número de IFES (Instituições Federais de Ensino Superior) e em 2009 houve uma reestruturação da prova. As questões interdisciplinares foram substituídas por quatro provas objetivas, cada uma com 45 questões, de diferentes áreas: Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; e, de interesse maior para este trabalho, Matemática e suas Tecnologias. A prova de redação foi mantida nos mesmos moldes [9].

Área do Conhecimento	Componentes Curriculares
Ciências Humanas e suas Tecnologias	História, Geografia, Filosofia e Sociologia
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Química, Física e Biologia
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Redação	Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação e Comunicação
Matemática e suas Tecnologias	Matemática

*Tabela I: Distribuição das disciplinas lecionadas no ensino médio nas 4 áreas do ENEM*

Inicialmente, sair de uma proposta interdisciplinar para uma mais compartimentada, como é vista nos vestibulares mais tradicionais, seria transformar o ENEM em

mais um exame de seleção. A Tabela I mostra a divisão das disciplinas em cada uma das áreas e uma característica chama a atenção: a Matemática está isolada dentro de uma grande área.

Construir uma prova com a premissa de não fazer conexões com as outras áreas do saber seria caminhar no sentido oposto do que é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEN), como pode ser visto no trecho abaixo, sobre o critério para a construção de um currículo em Matemática [10]:

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Entretanto, a reestruturação apresentou eixos cognitivos que, por serem comuns à todas as áreas, têm o potencial de promover uma unicidade entre as 4 grandes áreas. Dessa forma, a ideia é promover uma união entre as áreas construindo-se uma prova pautada nos seguintes eixos [9]:

- Dominar linguagens: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
- Compreender fenômenos: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
- Enfrentar situações-problema: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- Construir argumentação: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
- Elaborar propostas: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Em nossa análise, é possível perceber a presença desses eixos dentro da prova de Matemática, o que garante uma prova contextualizada e interdisciplinar. Inclusive nota-se que a linguagem matemática está presente em outras partes da prova, por exemplo, nos gráficos apresentados dentro da proposta de redação.

Outro ponto importante da mudança diz respeito à competências e habilidades. Cada área possui um número específico de competências que organizam 30 habilidades exigidas em cada parte da prova. A área de Matemática é dividida em 7 competências [9]:

**Competência de área 1** – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

*H1* – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

*H2* – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

*H3* – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

*H4* – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

*H5* – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

**Competência de área 2** – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

*H6* – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

*H7* – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

*H8* – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

*H9* – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**Competência de área 3** – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

*H10* – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

*H11* – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

*H12* – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

*H13* – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

*H14* – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

**Competência de área 4** – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

*H15* – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

*H16* – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

*H17* – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

*H18* – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

**Competência de área 5** – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

*H19* – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

*H20* – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

*H21* – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

*H22* – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

*H23* – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

**Competência de área 6** – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

*H24* – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

*H25* – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

*H26* – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

**Competência de área 7** – Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

*H27* – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

*H28* – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

*H29* – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

*H30* – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

De uma maneira muito sucinta, é como se a prova de Matemática do ENEM pudesse ser organizada em 7 subconjuntos: Números e operações; Geometria; Grandezas e medidas; Interdependência entre grandezas; Modelagem; Tratamento da informação e Probabilidade. Porém, é comum encontrarmos questões que trabalhem mais de uma habilidade e, com isso, pertençam às intersecções desses subconjuntos.

Perceba que uma abordagem pautada em habilidades desconecta o exame de uma lista de conteúdos. É possível, por exemplo, avaliar a proficiência de da habilidade 7, “Identificar características de figuras planas ou espaciais”, sem necessariamente utilizar o conceito de prisma. Isto é, podemos ter exames que apresentem algum conteúdo específico e outros, em anos posteriores, que não.

A vantagem de se construir um exame sobre uma tabela de habilidades, e não em tópicos conteudistas, é a facilidade da avaliação pela TRI, teoria de resposta ao item. Deste modo, é possível criar provas diferentes, comparáveis através do tempo, e que avaliem as mesmas habilidades. No ano de 2016, por exemplo, o MEC optou por adiar a aplicação do exame em escolas que estavam ocupadas por protestos estudantis e, posteriormente, aplicou uma outra versão para os alunos inscritos para aquelas unidades. Com a TRI, baseando-se na ideia de construir uma prova com itens diferentes que avalie as mesmas habilidades, foi possível essa realização e a comparação dos resultados entre as diferentes datas de aplicação. A teoria também permite a aplicação do ENEM para pessoas privadas de liberdade (ENEM PPL),



aplicado em penitenciárias e unidades socioeducativas, com a mesma premissa de comparação.

Não é objetivo deste texto fazer uma análise da TRI, porém é relevante destacar que tanto a elaboração quanto a correção e divulgação dos resultados é feita através da teoria.

Apesar do Exame não estar pautado em conteúdos, existe uma lista de tópicos, chamada de objetos de conhecimento, disponibilizada pelo INEP. Colocamos aqui os objetos referentes à área de Matemática e suas tecnologias [11]:

- **Conhecimentos numéricos:** operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
- **Conhecimentos geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
- **Conhecimentos de estatística e probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
- **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º grau, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
- **Conhecimentos algébricos/geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

É possível perceber a ausência de temas como matrizes e determinantes, números complexos, elipses, hipérbolas e fatorações algébricas. Assuntos que em uma primeira avaliação podem ser considerados secundários na construção de um currículo de matemática para o ensino básico mas que são muitas vezes considerados nos cursos de graduação nas áreas de exatas como conhecimentos prévios que os alunos já dominam.

Desta forma, nos pareceu produtivo analisar os assuntos que foram abordados nas questões da prova de matemática do ENEM do ano de 2009 até 2016 e compará-los com a nossa expectativa quanto aquilo que julgamos que um aluno ingressante deveria saber. Por uma questão de organização, classificamos cada questão em um único tópico, aquele que nos pareceu mais central na resolução do item. Fizemos as análises das versões azuis das provas que foram aplicadas ao final de cada ano, todas disponibilizadas no site do INEP. Quando existiam mais de uma aplicação na mesma época, optamos pela prova que teve o maior número de participantes.

Obviamente essa classificação é subjetiva e apresentaria variações se a análise fosse feita por outros professores. Como exemplo, podemos citar a questão 139 da prova de 2014, versão azul:

Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em  $1/8$ , preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

- a)  $1/8$
- b)  $7/8$
- c)  $8/7$
- d)  $8/9$
- e)  $9/8$

Poderíamos classificar esta questão como um problema de geometria espacial mas, como temos a espessura constante, é fácil analisá-la como uma questão de geometria plana, estudando as variações das áreas de retângulos. Também cabe a classificação como grandezas inversamente proporcionais, visto que o produto entre a largura e a altura são constantes. Optamos por classificá-la dessa última forma, dado que a essência do problema reside na ideia de entender como se comporta uma grandeza dada a variação de outra.

Acreditamos que essa subjetividade não irá influenciar na análise final, visto que casos como o citado anteriormente não são tão frequentes e, na maior parte dos casos, a classificação é bastante clara.

Inicialmente, criamos uma tabela de assuntos que esperávamos encontrar, baseada na lista de objetos de conhecimento e nos assuntos que considerávamos fundantes de disciplinas como Cálculo Diferencial e Geometria Analítica e Vetores. Quando um assunto parecia ser muito recorrente, nos parecia conveniente quebrá-lo em mais de um item. A Tabela II nos mostra a distribuição a cada ano:

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Conjuntos (Noções e simbologia)	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Conjuntos numéricos	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Construções geométricas	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Contagem	4,44%	2,22%	2,22%	6,67%	4,44%	6,67%	6,67%	4,44%
Determinantes	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Função afim	0,00%	2,22%	8,89%	2,22%	2,22%	0,00%	2,22%	8,89%
Função Exponencial	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%	2,22%	0,00%	2,22%	0,00%
Função Logarítmica	0,00%	0,00%	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%	2,22%	4,44%
Função Modular	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Função Quadrática	4,44%	2,22%	0,00%	0,00%	4,44%	2,22%	4,44%	2,22%
Função Trigonométrica	0,00%	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,22%	0,00%
Funções (Classificações)	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Funções (Definições)	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Geometria analítica	2,22%	0,00%	2,22%	0,00%	4,44%	2,22%	2,22%	2,22%
Gráficos (Leitura e interpretação)	6,67%	8,89%	4,44%	13,33%	6,67%	8,89%	6,67%	4,44%
Grandezas proporcionais	6,67%	4,44%	20,00%	11,11%	17,78%	6,67%	11,11%	20,00%
Matrizes	0,00%	0,00%	0,00%	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Medidas de dispersão	2,22%	2,22%	0,00%	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%	2,22%
Medidas de posição	6,67%	4,44%	4,44%	2,22%	6,67%	8,89%	4,44%	8,89%
Números complexos	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Ordens, classes e unidades de medida	2,22%	2,22%	11,11%	11,11%	2,22%	6,67%	6,67%	2,22%
Polinômios	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Porcentagem e mat financeira	8,89%	13,33%	8,89%	6,67%	8,89%	22,22%	6,67%	8,89%
Postulados de Euclides	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Probabilidade	8,89%	4,44%	6,67%	6,67%	8,89%	4,44%	8,89%	2,22%
Problemas de aritmética	11,11%	6,67%	4,44%	2,22%	4,44%	6,67%	6,67%	4,44%
Problemas de geometria espacial	13,33%	24,44%	6,67%	8,89%	13,33%	22,22%	11,11%	8,89%
Problemas de geometria plana	11,11%	8,89%	6,67%	11,11%	6,67%	2,22%	15,56%	8,89%
Problemas do 1º e 2º grau	2,22%	4,44%	4,44%	11,11%	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%
Sequências	0,00%	4,44%	2,22%	0,00%	2,22%	0,00%	0,00%	2,22%
Simetrias, rotações e planificações	4,44%	2,22%	4,44%	2,22%	2,22%	0,00%	0,00%	4,44%
Sistemas lineares	2,22%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

*Tabela II: Frequência relativa de cada um dos assuntos ao longo dos anos no ENEM. Para facilitar a visualização, quanto mais intensa a coloração, maior é o valor apresentado.*

É possível perceber que existe uma regularidade ao longo dos anos, visto que não existem grandes variações na frequência de um determinado assunto de um exame para outro.

A Tabela III e o gráfico da Figura 1 apresentam a frequência de cada um dos tópicos estudados nas 360 questões dos exames entre 2009 e 2016:

Assuntos	Frequência
Problemas de geometria espacial	13,61%
Grandezas proporcionais	12,22%
Porcentagem e mat financeira	10,56%
Problemas de geometria plana	8,89%
Gráficos (Leitura e interpretação)	7,50%
Probabilidade	6,39%
Medidas de posição	5,83%
Problemas de aritmética	5,83%
Ordens, classes e unidades de medida	5,56%
Contagem	4,72%
Função afim	3,33%
Problemas do 1º e 2º grau	3,06%
Função Quadrática	2,50%
Simetrias, rotações e planificações	2,50%
Geometria analítica	1,94%
Sequências	1,39%
Função Logaritmica	1,11%
Medidas de dispersão	1,11%
Função Exponencial	0,83%
Função Trigonométrica	0,56%
Matrizes	0,28%
Sistemas lineares	0,28%
Conjuntos (Noções e simbologia)	0,00%
Conjuntos numéricos	0,00%
Construções geométricas	0,00%
Determinantes	0,00%
Função Modular	0,00%
Funções (Classificações)	0,00%
Funções (Definições)	0,00%
Números complexos	0,00%
Polinômios	0,00%
Postulados de Euclides	0,00%

*Tabela III: Frequência relativa dos assuntos nas 360 questões de matemática entre os anos de 2009 e 2016 do ENEM.*

Analisando esses dados, nos chama a atenção o fato das frequências de tópicos como função afim (3,33%), função quadrática (2,5%) e sistemas lineares (0,28%) serem bastante baixas, visto que são assuntos fundamentais na construção dos conceitos que serão trabalhados nas primeiras séries do ensino superior.

Dadas as proporções do exame, temos claro que ele é um norteador para alunos e escolas básicas no que diz respeito àquilo que deve ser valorizado dentro de um currículo e vamos considerá-lo como uma ferramenta de análise sobre a história acadêmica progressiva dos alunos, visto que o próprio MEC o faz quando compara as notas obtidas pelos alunos concluintes no ENADE (Exame Nacional de Desempenho

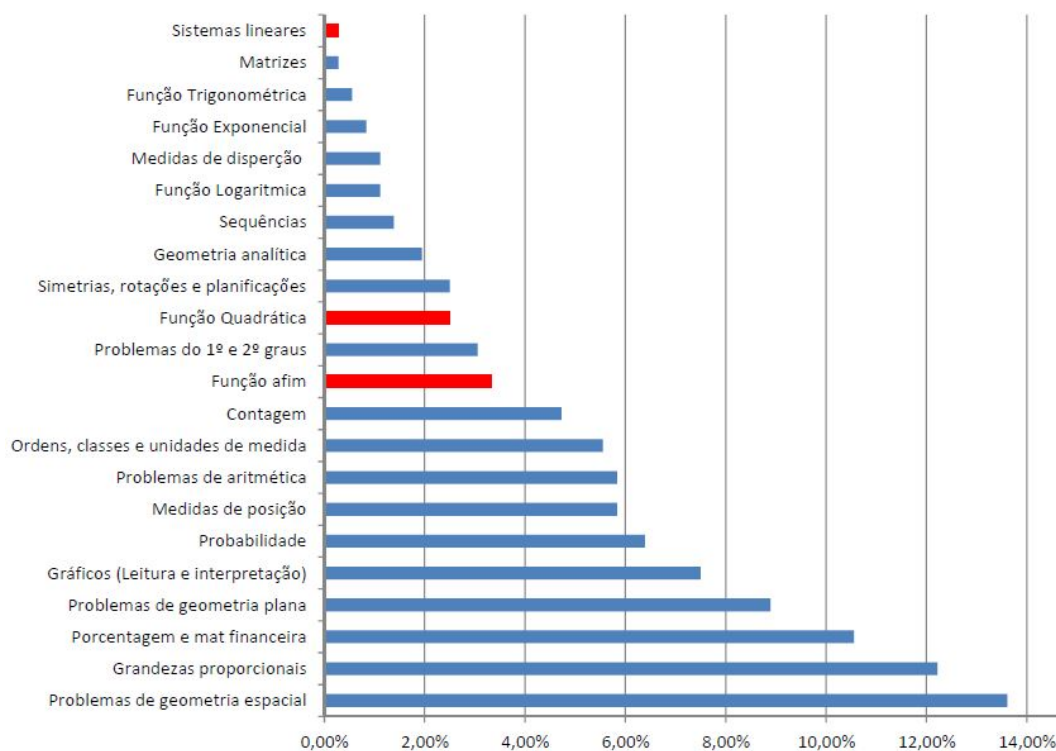


Figura 1: Frequência relativa dos assuntos entre os anos de 2009 e 2016 do ENEM.

de Estudantes) com seus desempenhos no ENEM como ingressantes. Assim, nos parece razoável propor abordagens para os tópicos funções e sistemas lineares, dadas as baixas incidências e a importância dos temas nas disciplinas iniciais dos cursos de exatas do Ensino Superior.

Informalmente, fizemos uma consulta via e-mail para mais de 30 professores universitários da área de exatas, todos de instituições públicas, questionando quais eram os assuntos que eles julgavam ser os menos cobrados no ENEM. O assunto mais apontado foi o tópico geometria espacial, justamente o mais recorrente. Essa consulta, que não tem um caráter de análise estatística, nos mostrou mais um indício da relevância do presente trabalho.

Por fim, gostaríamos de salientar que de forma alguma este texto cabe como uma crítica ao ENEM e aos métodos de seleção coordenados pelo MEC. Trata-se da segunda maior prova do mundo para acesso ao Ensino Superior, atrás apenas do exame Gaokao da China, e deve ser analisado sob a ótica desta magnitude. Atualmente, o INEP está fazendo uma consulta pública em seu site sobre formas de aplicação, datas e tamanho da prova, o que demonstra uma necessidade de, continuamente, repensar os processos de avaliação e seleção.

## A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

---

Modelo, do latim *modellum*, tem o significado de “medida em geral” [1], do italiano *modello*, objeto ou figura destinada à imitação [12]. Ao criarmos um modelo matemático estamos moldando os objetos teóricos para imitarmos algo que naquele momento não está presente.

De uma forma mais direta, tomaremos a definição de [1]:

Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que investigam.

A Modelagem Matemática tem suas origens dentro da Matemática Aplicada e não tem fim em si mesma, visto que todo modelo tem como objetivo a solução de uma problemática, a previsão de dados ou a expansão da compreensão sobre determinada situação. Portanto, quando falamos de seu uso dentro da educação, trata-se necessariamente de uma adaptação.

As etapas de construção de um modelo matemático, como uma ferramenta de pesquisa multidisciplinar, conectam uma situação problemática inicial a sua solução através das etapas de inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação [1]. Geralmente, essas etapas são apresentadas na forma de diagramas na literatura área.

A inteiração se trata de tomar ciência da situação que será modelada, elencar os problemas, coletar dados, consultar especialistas e estudar bibliografias. Mesmo que existam estudos anteriores bem sucedidos, a interação se trata de conhecê-los e avaliar a necessidade de novas buscas. Esta etapa, quando aplicada para fins educacionais, tem grande potencial interdisciplinar e motivador.

Na matematização, temos um processo de tradução da linguagem natural para a matemática. O papel desta etapa está em, literalmente, modelar o objeto matemático, seja ele uma função, uma forma geométrica ou um conceito estatístico, de modo a representar a situação estudada na primeira etapa. É uma forma de evidenciar o problema matemático que, aos olhos do pesquisador, é equivalente ao problema real. Em contextos de sala de aula, é o momento de apresentarmos conceitos, fomentar a necessidade de certas notações e, de interesse maior deste trabalho, propor uma retomada de tópicos já estudados.

De uma forma mais ampla, a modelagem permite uma aplicação dos tópicos matemáticos já estudados. Se na etapa de matematização associamos, por exemplo, a máxima produção de uma empresa com o máximo de uma função, a resolução é a busca desse máximo.

Dependendo da conveniência, este é o momento de utilizar tecnologias informáticas na sala de aula, permitindo lidar com cálculos mais complexos e com dados reais, o que fará com que o foco permaneça na modelagem em si. Outra vantagem é a possibilidade de utilizar simulações numéricas em substituição de conceitos que ainda não são do repertório do aluno, como por exemplo é visto no Capítulo 4, no qual uma planilha eletrônica permite localizar o mínimo de uma função sem o uso de regras de derivação.

A interpretação e a validação dos resultados, que permite ao pesquisador responder se seu questionamento inicial foi solucionado e/ou aprimorar seu modelo. Na perspectiva da sala de aula, a análise dos resultados coloca o aluno em processo de autonomia. O próprio indivíduo, ou grupo de estudo, irá avaliar se os avanços foram satisfatórios e propor mudanças.

Cabe aqui uma observação feita por [8] sobre a etapa de validação:

Para aqueles que se dispõem a trabalhar com modelagem matemática, é importante ter claro seus objetivos e estabelecer alguns critérios de qualidade adequados a esses objetivos. Por exemplo, se a modelagem matemática vai ser utilizada em sala de aula com a finalidade de motivar os alunos a incorporar certos conteúdos matemáticos ou a valorizar a própria matemática, muitas vezes, a validação dos modelos não é um critério fundamental para sua qualificação. Por outro lado, se o interesse recai nos resultados fornecidos pelo modelo, então a sua validação é indispensável.

Isto é, se uma atividade de modelagem está sendo desenvolvida em sala, por exemplo, estudando o caráter exponencial do crescimento de uma população de peixes, os objetivos passam por conhecer as características da função modeladora, por análises gráficas e pela comunicação dos resultados obtidos e não necessariamente por verificar se, de fato, em um dado momento a população atingiu determinada marca.

O fato é que serão necessárias adaptações para introduzir uma ferramenta de pesquisa da Matemática Aplicada dentro de uma atividade de ensino. Isto é, apesar do aluno desempenhar um papel semelhante ao de um pesquisador e o professor o de um orientador, o foco ainda está no processo em si e não no resultado. Dentro da literatura do tema, existem discussões sobre o quão frutíferas são essas adaptações, por exemplo, a quem compete a escolha do tema ou se é necessário fazer introduções graduais para que os alunos desenvolvam a habilidade de modelar.

Existe ainda uma diferença fundamental: os tópicos matemáticos que serão utilizados na modelagem. Naturalmente, esse não é um limitante para um pesquisador, sendo inúmeros os casos em que uma nova matemática foi criada para se resolver um problema. Já com uma proposta escolar, as ferramentas matemáticas que se tem a mão, ou ainda, a ementa do curso são fatores limitantes, como afirma [8]:

A modelagem como processo de ensino-aprendizagem pode ser utilizada de maneiras diversas se o ambiente de ensino for diferenciado. Assim, se estamos num ambiente de Iniciação Científica ou cursos de Especialização para professores de Matemática, o programa de conteúdos não causa grandes problemas. Entretanto, se o curso for regular com um programa a ser cumprido, o processo de modelagem deve ser adaptado, considerando temas dirigidos que tenham modelos com características próprias do conteúdo a ser tratado no curso. Neste caso, também não se pode deixar de fazer a formalização contínua dos objetos matemáticos que aparecem nos modelos e é desejável que o professor já tenha trabalhado anteriormente com o tema para que o desenvolvimento do curso flua normalmente.

Nesse sentido, a proposta de aumentar o repertório docente através da modelagem não é o de ter a sala de aula como um laboratório de pesquisa em Matemática Aplicada, mas sim um ambiente que proporcione inferências, tomadas de decisão, aplicações e, acima de tudo, criatividade. Esta última, intimamente ligada com a proposta de aproximar a modelagem ao ensino, como sugere [13]:

Cada ato de imaginação criativa consiste, entretanto, em atribuir a uma coisa propriedades ou funções completamente inesperadas. Um martelo, por exemplo, em vez de ser empregado para cravar pregos, também pode ser usado, contanto que se tenha um fio à mão, como pêndulo ou como prumo. Todo ato criativo, portanto, consiste em ver um A como um B, um martelo como parte de um pêndulo, um movimento como uma função matemática, uma força como um vetor ou justamente a imagem de um cachimbo como um cachimbo<sup>1</sup>.

Para este trabalho, cabe investigar não somente a inserção da modelagem no ensino, mas analisá-la em um período específico. Quando voltamos nossa atenção para as primeiras disciplinas do Ensino Superior da área de exatas, entendemos que essa inserção deve ser compatível com o estágio “transitório” no qual se encontram os alunos.

Além de todos os desafios do novo ciclo, o estudante encontra uma equipe docente que, dada a natureza de suas atividades, está distante do currículo desenvolvido ao

---

<sup>1</sup>Nossa nota: O autor Michel Otte faz uma referência à famosa pintura *La trahison des images*, do artista belga René François Ghislain Magritte, que possui uma imagem de um cachimbo com os dizeres “Isto não é um cachimbo”. A referência está exatamente na relação de associar a imagem de um objeto ao próprio objeto.



longo do Ensino Médio, o que dificulta ainda mais a promoção de aulas que facilitem essa transição.

A título de exemplo, vamos transcrever três enunciados de [5] que mostram essas especificidades das séries iniciais. Todos eles tratam sobre o cálculo da derivada através do quociente  $[f(x+h) - f(x)]/h$ .

O primeiro deles, uma tarefa meramente técnica, que não oferece conexões com a realidade:

Aproxime a derivada da função  $f(x) = x^3e^x$  para  $x = 2$  calculando o quociente de diferença com  $h = 0.1$ ,  $h = 0.01$ , e  $h = 0.001$ .<sup>2</sup>

O segundo, também técnico, porém com uma contextualização:

Os gradientes adiabáticos podem ajudar a identificar bolsões de ar instável e são particularmente importantes para o vôo de aeronaves não tripuladas. O gradiente adiabático,  $\gamma$ , é definido como a taxa na qual a temperatura diminui à medida que a altitude aumenta, ou  $\gamma = -dT/da$ , na qual  $T$  é a temperatura e  $a$  é a altitude. A temperatura da atmosfera sobre *Little Rock, Arkansas* em um dia típico de outubro foi medida e é dada aproximadamente pela função:

$T(a) = 24.3 - 5.81a + 0.295a^2 - 0.057a^3 + 0.0024a^5 + 0.006\cos(a)$ , no qual  $T$  está em graus centígrados e  $a$  está em quilômetros.

Aproxime o gradiente adiabático para uma altura de  $11\text{km}$  calculando o quociente de diferença com  $h = 0.1$ ,  $h = 0.01$ , e  $h = 0.001$ .<sup>3</sup>

A questão é que mesmo oferecendo dados reais e uma contextualização, o problema deixa pouco espaço para discussões ou tomadas de decisão. Perceba que isso não o caracteriza como uma questão ruim, mas, assim como o primeiro, basta aplicar a técnica como um computador seguindo etapas de um algoritmo.

O último trata-se de uma alteração do segundo, com uma proposta mais aberta para o comando final:

Os gradientes adiabáticos podem ajudar a identificar bolsões de ar instável e são particularmente importantes para o vôo de aeronaves não tripuladas. O gradiente adiabático,  $\gamma$ , é definido como a taxa na qual a temperatura diminui à medida que a altitude aumenta, ou  $\gamma = -dT/da$ , na qual  $T$  é a temperatura e  $a$  é a altitude. A temperatura da atmosfera sobre *Little Rock, Arkansas* em um dia típico de outubro foi medida e é dada aproximadamente pela função:

$T(a) = 24.3 - 5.81a + 0.295a^2 - 0.057a^3 + 0.0024a^5 + 0.006\cos(a)$ , no qual  $T$  está em graus centígrados e  $a$  está em quilômetros.

Você foi convidado a avaliar a segurança de uma missão de vigilância de drone sobre a cidade de *Little Rock*. O drone está programado para voar em uma altura aproximada de  $11\text{km}$  sobre a cidade, embora a

---

<sup>2</sup>Nossa tradução.

<sup>3</sup>Nossa tradução.

missão poderia ser realizada em qualquer altitude entre  $9km$  e  $15km$ . Ele poderá voar com segurança se o gradiente adiabático for inferior a  $6^{\circ}C/km$ ; Se o gradiente adiabático for superior a  $8^{\circ}C/km$ , então o seu drone deve aterrissar por razões de segurança. Usando o que você sabe sobre quocientes de diferença, avalie a segurança da missão e ofereça um conjunto completo de recomendações para o seu supervisor, juntamente com todas as suposições que você fez na conclusão de sua análise.<sup>4</sup>

Obviamente, é necessário o discernimento que nem todos os questionamentos devem adotar essa proposta. Apesar de muito mais significativo e de promover discussões, exige um investimento grande do tempo de aula. A ideia central aqui é mostrar que existem diferenças entre um problema de aplicação e de modelagem, cuja característica principal é o espaço para interpretação e tomadas de decisão.

Os próximos dois capítulos ilustram problemas de modelagem simples que podem ser trabalhados no sentido de apoiar os alunos ingressantes da graduação. Dada a natureza de um texto fechado, o leitor pode associar as propostas à problemas de aplicação, mas a ideia é que o desenvolvimento das atividades permitam com que os alunos participem das escolhas que levam à resolução do problema.

---

<sup>4</sup>Nossa tradução.

## O TAMANHO DAS LATAS DE ALUMÍNIO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA FUNÇÕES

---

O problema que abordamos aqui já aparece em livros de Cálculo, por exemplo, no início do capítulo “Aplicações da derivação” de [14], mas nossa abordagem será diferente, focada principalmente no processo de construção da resolução da problemática e não somente na resposta do problema de otimização. A ideia central dessa discussão é desenvolver de forma intuitiva o conceito de funções e de máximos e mínimos. O ponto de partida são os assuntos que têm uma grande frequência no ENEM, como os problemas de geometria espacial e as análises de gráficos. Em paralelo, é possível apresentar a simbologia de conjuntos, definições de domínio e imagem e algumas propriedades de funções.

### 4.1 O PROBLEMA

As latas de alumínio, em comparação com outras formas de envase, oferecem vantagens de transporte, armazenamento e resfriamento. No Brasil, em de 2015, a produção anual chegou ao número de 25 bilhões de latas, o que significa uma média de 120 latas por brasileiro. No que diz respeito à reciclagem, a embalagem é a mais reaproveitada do mundo, principalmente pelo fato do alumínio ser 100% reciclável.

Analisando os diversos formatos que existem no mercado (Figura 2), com uma atenção especial para o volume mais comum de  $350ml$ , uma questão de economia surge: É possível dimensionar uma lata cilíndrica que utilize a menor quantidade de alumínio?



Figura 2: Diversos formatos de latas comercializadas no Brasil.

## 4.1.1 Hipóteses, variáveis e dados

- Consideraremos a latinha de alumínio como um cilindro circular reto;
- O volume  $V$  do cilindro é fixo e será de  $350\text{ml}$ ;
- $r$  é o raio do cilindro;
- $h$  é a altura do cilindro.
- $S(r)$  será a superfície do cilindro em função de  $r$ ;
- A quantidade de alumínio gasta para fabricar uma lata é proporcional a superfície do alumínio.

## 4.2 A CONDUÇÃO DO PROBLEMA

As discussões em sala de aula, ou em um roteiro de estudo autônomo, podem começar com um texto motivacional falando sobre os índices de reciclagem das latas de alumínio no Brasil. Como um exemplo, poderia ser feita a análise do gráfico (Figura 3) disponibilizado pela Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alumínio, Abralatas, que faz um comparativo sobre a reciclagem no mundo [15]:

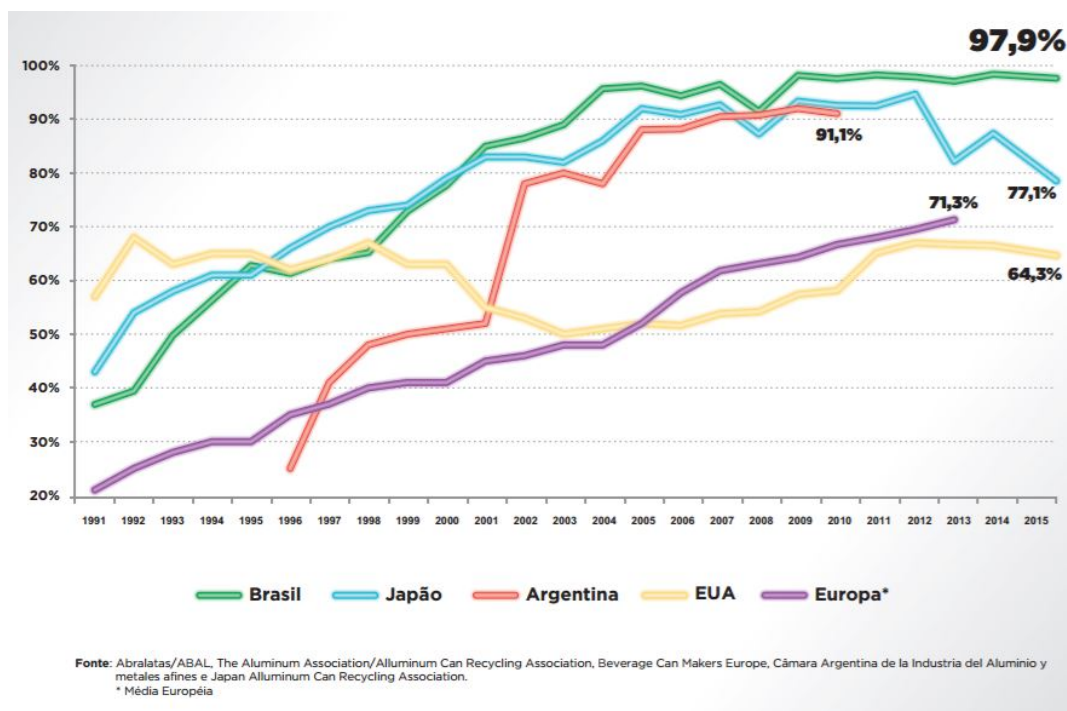


Figura 3: Índices de reciclagem da lata de alumínio para bebidas – 1991 a 2015 (em %).

A grande questão é que os alunos percebam que o excelente índice alcançado pelo Brasil está diretamente relacionado com o impacto social que a coleta da sucata de

alumínio tem. Em outras palavras, existe um interesse comercial na reciclagem e há mão de obra disponível para a coleta.

Depois dessa introdução, voltaremos a atenção dos alunos para o formato da lata de alumínio. É importante deixar claro que a hipótese de que a latinha é um cilindro circular reto é equivocada, visto que a base convexa e temos um tronco de cone na parte superior, mas que se trata de uma modelagem mais simples e que o modelo pode ser melhorado posteriormente.

Sem o uso da álgebra, vamos pensar no que acontece com a altura da lata ao variarmos o raio e mantermos fixado o valor do volume. Intuitivamente, essas são conclusões simples, já que para abarcar a mesma quantidade de líquido, se diminuirmos o raio, a altura deverá ser maior e vice-versa. É possível mostrar essa relação graficamente utilizando um software como o Geogebra.

Algebricamente, temos que o volume de um cilindro circular reto é dado por:

$$V = \pi r^2 h. \quad (1)$$

Isolando o valor de  $h$  na equação e lembrando-se que  $V$  é  $350ml$ , temos:

$$h = \frac{350}{\pi r^2}. \quad (2)$$

Temos então que as conclusões obtidas intuitivamente estão de acordo com o que explicitamos algebricamente. Quanto maior é o valor do raio, maior é o denominador da fração, menor será o valor da razão e, portanto, menor a altura. Formalmente, dizemos que a altura e o quadrado do raio são inversamente proporcionais.

Neste ponto, cabe um comentário, principalmente se estamos pensando em resgatar e fortalecer os conceitos trabalhados ao longo do Ensino Médio. As grandezas  $h$  e  $r$  não são inversamente proporcionais, embora o acréscimo de um implique na redução do outro. Não é o fato de “se um aumenta o outro diminui” que caracteriza as grandezas inversamente proporcionais, como é comum de encontrarmos na fala dos alunos. Por definição, grandezas inversamente proporcionais são aquelas cujo produto é constante. Em nosso problema, temos que o produto entre a altura e o quadrado do raio é sempre igual ao volume(fixo) dividido por  $\pi$ .

Agora, encaminharemos a discussão para a superfície da lata. Neste ponto, é importante perceber que a álgebra terá um papel mais importante do que o de confirmar as conclusões que intuitivamente construímos, visto que, algumas das respostas não são tão intuitivas assim.

Começaremos questionando o que acontece com a superfície da lata de alumínio se o raio aumentar, visto que em nossa hipótese o gasto de alumínio é proporcional

à superfície. Para construirmos essa ideia junto aos alunos, imaginaremos um raio muito maior do que o encontramos na realidade, que esta na casa dos centímetros. Se o raio estiver na casa dos metros, por exemplo, teremos uma altura muito pequena, mas as bases do cilindro serão grandes, do tamanho de mesas de jantar. Estendendo o raciocínio e pensando que o raio fosse medido em quilômetros, e suas bases pudessem cobrir quarteirões inteiros, é relativamente fácil intuir que se aumentarmos o valor do raio indiscriminadamente, ou levarmos a altura da lata a um valor muito próximo de zero, teremos uma superfície cada vez maior.

A questão não é tão simples quando construímos o raciocínio oposto, diminuindo o valor do raio e aumentando o valor da altura. Considerando um raio na casa dos milímetros, teremos uma latinha com a aparência de um canudo. É claro aqui que a altura será maior, mas não é imediato que a superfície desse cilindro aumentará. Por esse motivo, é importante trabalharmos a álgebra.

Evitando o uso de fórmulas prontas, podemos encontrar uma expressão algébrica para a superfície de um cilindro analisando sua planificação, como podemos ver na Figura 4.

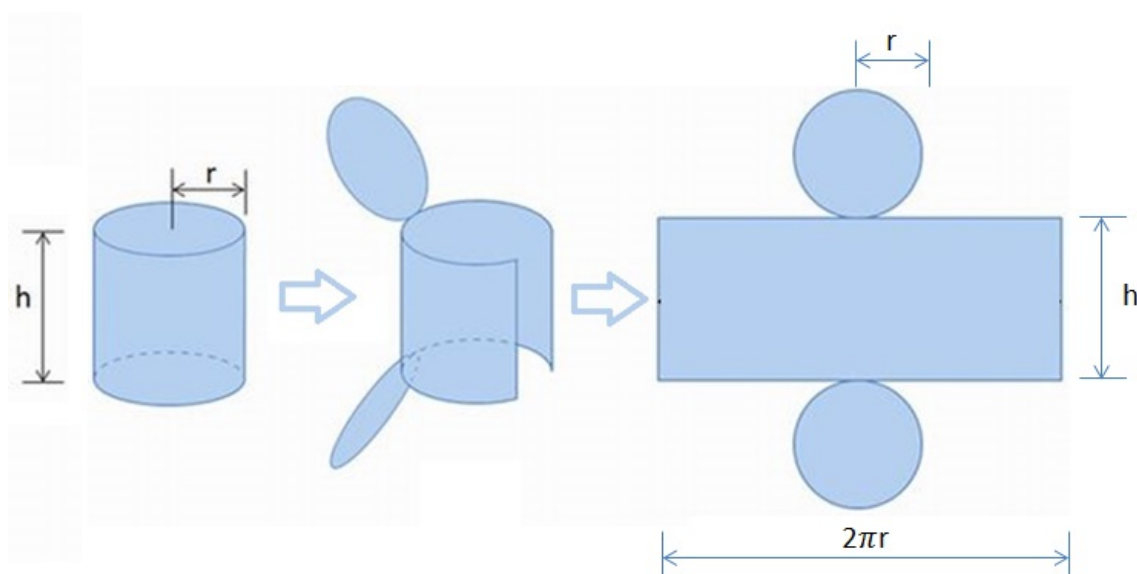


Figura 4: Planificação do cilindro.

Ou seja, a superfície do cilindro é a soma do dobro da área de sua base com a área de um retângulo em que um dos lados é igual a altura do cilindro e o outro tem a mesma medida do perímetro da base.

Dessa forma, podemos escrever:

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h. \quad (3)$$

Substituindo a equação (2) em (3), conseguiremos uma expressão que dependerá exclusivamente do raio:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{700}{r}. \quad (4)$$

Como esta expressão nos fornece o tamanho da superfície da lata de alumínio dado o valor do raio, podemos investigar algebricamente os questionamentos que intuitivamente não estavam claros.

Quando maior é o valor do raio, maior será o valor da parcela  $2\pi r^2$  e mais próximo de zero está a parcela  $\frac{700}{r}$ . Com isto, estaríamos somando um número cada vez maior com algo muito pequeno, que resultaria em uma superfície muito grande. Ou seja, se aumentarmos o raio indiscriminadamente, teremos um gasto indiscriminado de alumínio.

Por outro lado, quanto mais o raio se aproxima do zero, temos que a primeira parcela da expressão (4) ficará cada vez mais próxima do zero e a segunda cada vez maior. Ou seja, o que não tinha ficado claro intuitivamente é que quanto mais próximo o raio estiver do valor nulo, maior será o gasto de alumínio.

É possível deixar essas conclusões ainda mais claras para os alunos construindo, com a ajuda de uma planilha eletrônica, uma tabela de valores de superfícies associadas aos raios, como a que segue:

Raio (r)	S(r)
0,1	7000,06
0,5	1401,57
1	706,283
2	375,133
3	289,882
4	275,531
5	297,08
10	698,319
15	1460,38
20	2548,27

*Tabela IV: Valores, em cm e cm<sup>2</sup>, associados à função S(r).*

Com esses valores em mãos, podemos chegar ao centro do problema. Se para valores muito altos e muito baixos de raio, temos um alto gasto de alumínio, é natural pensar que existe um valor intermediário, que minimize o tamanho da superfície. Observando a tabela, os alunos podem concluir que este valor acontece quando r assume um valor no intervalo [3,5]. Um gráfico (Figura 5), gerado pela planilha eletrônica, deixa essa conclusão mais clara.

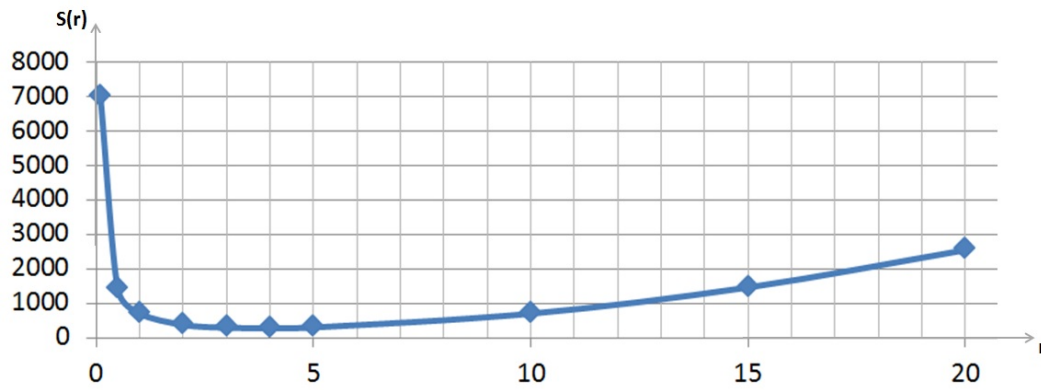


Figura 5: Gráfico gerado por uma planilha eletrônica, da função  $S(r)$ .

Dessa forma, os alunos devem construir uma outra tabela, agora com o raio variando no intervalo  $[3, 5]$ , para buscar o valor que deixa a lata com a menor superfície, como pode ser visto na Figura 6.

Raio (r)	$S(r)$
3	289,882
3,2	283,09
3,4	278,516
3,6	275,875
3,8	274,94
4	275,531
4,2	277,502
4,4	280,733
4,6	285,126
4,8	290,598
5	297,08

Tabela V: Valores, em cm e  $\text{cm}^2$ , associados à função  $S(r)$  no intervalo  $[3, 5]$ .

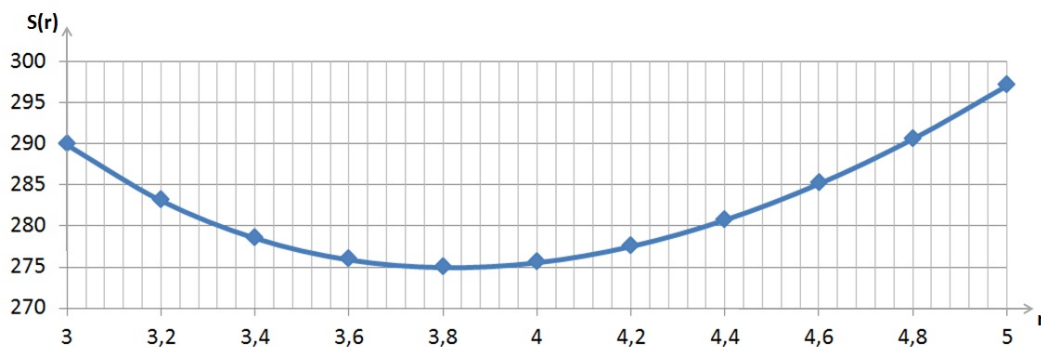


Figura 6: Gráfico da função  $S(r)$  no intervalo  $[3, 5]$ .



Conclui-se que para um valor de raio próximos à 3,8 cm, temos a minimização da superfície e, por consequência, do gasto de alumínio.

As etapas de um processo de modelagem vistas no Capítulo 3, podem ser identificadas nessa abordagem associando a leitura sobre reciclagem como a inteiração, a construção da função  $S(r)$  como a matematização e a análise dos gráficos como a interpretação de resultados. Cabe o comentário que o raio observado nas latas de alumínio comercializadas estão por volta de 3,6 cm, o que gera discussões sobre as hipóteses feitas inicialmente e sobre a questão da ergonomia ao segurarmos a lata. Essas discussões entrariam na etapa de validação do modelo.

### 4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A ABORDAGEM

Sobre a apresentação formal de conceitos, é possível abordá-los de duas formas. Ao final do desenvolvimento do problema ou os intercalando em momentos oportunos. Neste texto, optamos por fazê-lo ao final, apenas por organização.

Começaremos pelo tópico função, analisando 3 definições:

- Definição dada por [14]:

Uma função  $f$  é uma lei que associa, a cada elemento  $x$  em um conjunto  $D$ , exatamente um elemento, chamado  $f(x)$ , em um conjunto  $E$ .

- Definição dada por [16]:

Dados os conjuntos  $X$ ,  $Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  (lê-se “uma função de  $X$  em  $Y$ ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y = f(x) \in Y$ . O conjunto  $X$  chama-se o *domínio* e  $Y$  é o *contradomínio* da função.

- Definição dada por [17]:

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , não vazios, uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  recebe o nome de aplicação de  $A$  em  $B$  ou função definida em  $A$  com imagens em  $B$  se, e somente se, para todo  $x \in A$  existe um só  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ .

A última dessas definições, a mais rigorosa delas, visto que substitui os termos “lei”, “regra” e “associa” pelo conceito de relação (subconjunto de um produto cartesiano), apesar de mais completa é também a mais hermética. Apresentá-la em um momento que os alunos já dominam as noções básicas de funções nos parece mais conveniente e, neste momento, não é nosso foco.

A definição dada por [14] não utiliza uma simbologia para a pertinência de elementos e deixa a nomenclatura de domínio e imagem para um outro momento, o que

parece interessante para uma primeira apresentação do tema. Confrontar essa definição com a expressão (4) pode trazer uma clareza maior para elucidar o conceito de função.

A expressão (4) nos dá uma forma de associar cada valor de raio a uma superfície correspondente. Literalmente, podemos dizer que a superfície depende de um valor de raio. O conjunto  $D$ , para este caso, são os valores possíveis para o raio e conhecendo a natureza do problema podemos facilmente delimitar como qualquer real positivo. Já o conjunto  $E$  seriam os valores para a superfície.

É importante que fique claro aos alunos a ideia de que para cada valor positivo de raio temos um, e somente um, valor de superfície. Conceber esse critério passa muitas vezes por entender que a importância do tópico funções dentro das ciências exatas está exatamente nessa estrutura que permite descrever situações do tipo “para cada pergunta existe uma única resposta”.

Na definição dada por [16], sentimos a falta do destaque para essa unicidade, apesar do texto que segue ser mais claro no sentido de construir o conceito:

Em muitos exemplos de funções  $f : X \rightarrow Y$ , principalmente na Matemática Elementar,  $X$  e  $Y$  são conjuntos numéricos e a regra  $x \mapsto f(x)$  exprime o valor  $f(x)$  por meio de uma fórmula que envolve  $x$ . Mas em geral não precisa ser assim. A natureza da regra que ensina como obter  $f(x)$  quando é dado  $x$  é inteiramente arbitrária, sendo sujeita a apenas duas condições:

- a) Não deve haver exceções: a fim de que a função  $f$  tenha o conjunto  $X$  como domínio, a regra deve fornecer  $f(x)$ , *seja qual for*  $x \in X$  dado.
- b) Não pode haver ambiguidades: a cada  $x \in X$ , a regra deve fazer corresponder um *único*  $f(x)$  em  $Y$ .

Feita essa ressalva, nos parece uma definição interessante pensando nos alunos ingressantes da graduação, principalmente por resumir o conceito em duas palavras: exceção e ambiguidade.

Ainda tomando como exemplo a expressão (4) do modelo construído, temos que  $X$  será o conjunto dos valores possíveis para o raio e  $Y$  o conjunto dos valores da superfície. Para os valores de  $X$ , não há exceção ou ambiguidade. O nome dado ao conjunto  $X$ , domínio, têm uma importância semântica essencial, de fato, os valores de raio dominam a expressão  $S(r)$ , na qual  $S$  é apenas um reflexo dos valores que serão assumidos por  $r$ . Neste ponto, temos outra associação semântica para a construção do conceito de conjunto imagem e contradomínio.

Uma função é uma forma de relacionar os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio, de um modo que para o domínio não existam exceções ou ambiguidades. Quando isto ficar claro para os alunos, é possível analisar o que aconteceria se aplicássemos esses critérios para o contradomínio, construindo assim os conceitos de imagem, injeção, sobrejeção e funções inversas.

Vamos analisar o critério de exceção que inicialmente não é estabelecido para o contradomínio. Isto é, nem todos os seus elementos precisam ser “reflexos” de algum valor do domínio. Como exemplo, não temos valores de  $r$  correspondentes a uma superfície de  $270\text{cm}^2$ , como pode ser visto no gráfico apresentado na Figura 6. Se não são todos os elementos do contradomínio que estão associados a um valor do domínio, existe um subconjunto que contém todos esses elementos. Dessa forma, é natural dar um nome a esse conjunto, o conjunto imagem.

Se o critério de exceção fosse imposto ao contradomínio, teríamos uma função em que todos os elementos desse conjunto seriam relacionados na função, isto é, um contradomínio igual a imagem. Dentro da matemática, classificamos essas funções com o nome de sobrejetora. É possível ilustrar esse tipo de função, entendendo que na expressão (2) o valor da altura  $h$  está em função do raio  $r$ . Para  $X$  e  $Y$  sendo o conjunto de todos os valores reais positivos, o que é natural assumir para o problema, sempre teremos uma sobrejeção.

A mesma expressão de  $h$  em função de  $r$ , pode ser analisada para aplicarmos o critério de ambiguidade no contradomínio. Como pode ser analisado no gráfico apresentado na Figura 7, temos que todos os valores positivos de  $h$  estão associados a um único valor de raio. Funções com essa característica são chamadas de injetoras. A função  $S(r)$  pode ser utilizada como um contraexemplo para a injeção.

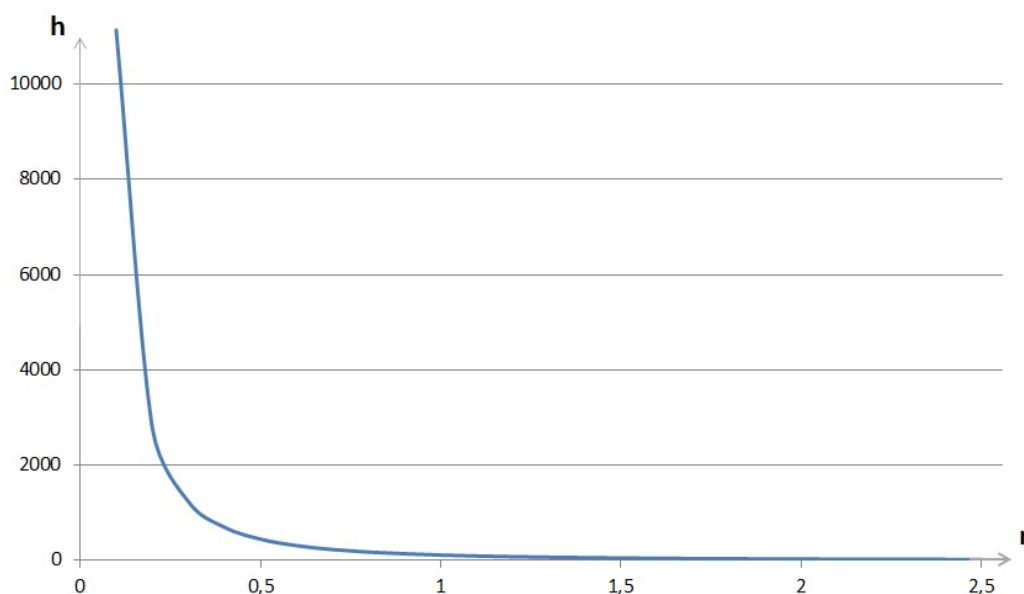


Figura 7: Gráfico da função  $h = \frac{350}{\pi r^2}$ .

A importância aqui foge dos termos. O essencial não é que um aluno saiba os nomes dados às funções com determinadas características, mas sim os conceitos

que levaram à necessidade de se criar esses nomes. Quando uma função tem seu contradomínio obedecendo as mesmas regras impostas ao domínio, podemos então inverter esses papéis, isto é, criar uma função inversa.

Da expressão (2), considerando  $r$  e  $h$  sempre positivos, podemos isolar o valor de  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{350}{\pi h}}. \quad (5)$$

Dessa forma, é possível ver através da vivência do problema das latinhas de alumínio a expressão (2) como uma função bijetora, portanto obedece os critérios para ser inversível, e a expressão (5) como sua inversa.

O problema do tamanho das latinhas de alumínio ainda poderia ser utilizado para contextualizar os símbolos de pertinência ( $\in$ ) e inclusão ( $\subset$ ), discutindo, por exemplo, se o valor zero pertenceria ao domínio da função  $S(r)$ , ou ainda, mostrando que o conjunto imagem está sempre contido no contradomínio.

Por fim, entendemos que o modelo serve como introdução à assuntos da disciplina de Cálculo, como limites e derivadas. Discussões sobre máximos e mínimos podem ser criadas generalizando o problema ao fato de que todo cilindro equilátero terá a superfície mínima entre todos os cilindros equivalentes.

## O PROBLEMA DOS LANCES LIVRES: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA SISTEMAS LINEARES

---

Neste capítulo, a proposta é fazer uma retomada do estudo de sistemas lineares através da análise da solução de um exercício, o problema dos lances livres, que aparece em [5]:

Michel Jordan é um jogador de basquete da Carolina do Norte. Eu estava assistindo um de seus jogos pela televisão, quando ele sofre uma falta indo em direção à cesta, o que dá direito a dois lances livres. Neste momento, o narrador da partida faz o anúncio “Michel Jordam está convertendo 78% dos lances livres que cobra na temporada!”. Ele então erra a primeira cobrança e acerta a segunda. Mais tarde, no mesmo jogo, Michel sofre outra falta e novamente tem direito a dois lances livres. Desta vez, o locutor diz que “as estatísticas mostram que Jordan tem 76% de aproveitamento nos lances livres!”. Determine o número de lances cobrados por Michel Jordan na temporada e qual é o seu número de acertos.<sup>1</sup>

No desenvolver dessa atividade, que parte de um assunto bastante recorrente no ENEM, as porcentagens, vamos passar por conceitos de plano cartesiano, interpretações geométricas de um sistema linear, equações de reta e suas inclinações.

### 5.1 O PROBLEMA

Com uma aparência inicialmente simples, o “problema dos lances livres” fala sobre os anúncios feitos por um locutor esportivo com relação ao aproveitamento de um jogador de basquete na temporada. Em um primeiro momento, ele diz que o jogador tem 78% de aproveitamento e, após o jogador ter convertido uma cobrança e errado outra, ele afirma que o aproveitamento cai para 76%. A questão é que, ao calcularmos o número de lances livres convertidos pelo jogador na temporada, encontramos um número não inteiro, o que nos leva a concluir que existe alguma inconsistência no problema.

É possível afirmar que o locutor cometeu um engano em seus anúncios? Se sim, qual foi o erro? Se não, qual é a solução do problema?

---

<sup>1</sup>Nossa tradução.

5.1.1 *Hipóteses, variáveis e dados*

- Consideraremos que o locutor fez um arredondamento das porcentagens, seguindo o padrão da norma ABNT NBR 5891 [18], antes de anunciá-las;
- $x$  será o número de lances livres cobrados pelo jogador na temporada no instante do 1º anúncio;
- $y$  será o número de lances livres convertidos pelo jogador na temporada no mesmo instante;
- $x$  e  $y$  são números naturais não nulos, de modo que  $x > y$ ;

## 5.2 A CONDUÇÃO DO PROBLEMA

As discussões para a abordagem do problema, neste caso, começam antes dele revelar-se ao alunos. Primeiro é necessário encontrar as soluções do enunciado e depois disso criticá-las. Equacionando as porcentagens presentes no texto, podemos escrever:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 0,78 \\ \frac{y+1}{x+2} = 0,76. \end{cases} \quad (6)$$

E portanto:

$$\begin{cases} y = 0,78x \\ y = 0,76x + 0,52. \end{cases} \quad (7)$$

Igualando as equações do Sistema (7), podemos escrever:

$$0,78x = 0,76x + 0,52$$

logo

$$0,78x - 0,76x = 0,52$$

e portanto

$$x = 26.$$

Para encontrar o valor de  $y$ , vamos substituir o valor de  $x$  na primeira equação de (6):

$$y = 0,78 \cdot 26$$

$$y = 20, 28.$$

Neste momento, a análise das respostas deve ser feita pelos alunos. Não faz sentido pensarmos em um número de acertos que não seja um número natural. É possível que os alunos façam a proposta de arredondar o número de acertos para 20, dessa forma, teríamos:

$$\frac{y}{x} = \frac{20}{26} = 0, \overline{769230}.$$

Porém, isso faria com que o locutor anunciasse um índice de acerto igual a 77% e não os 78% do enunciado.

Agora é o momento de direcionar os alunos para a pergunta “É possível afirmar que o locutor cometeu um engano em seus anúncios?”. A hipótese de que ele fez arredondamentos antes do anúncio impede de afirmarmos que sim, o que transforma o problema em modelar o enunciado segundo alguma regra de arredondamento.

Seguindo as normas estabelecidas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas, o problema dos lances livres pode ser modelado como um sistema de inequações:

$$\begin{cases} 0,775 \leq \frac{y}{x} \leq 0,785 \\ 0,755 \leq \frac{y+1}{x+2} \leq 0,765. \end{cases} \quad (8)$$

Nesta modelagem, é necessário uma atenção especial ao trecho da norma [18]:

Quando o algarismo a ser conservado for ímpar, seguido de 5 e posteriormente de zeros, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores.

(...)

Quando o algarismo a ser conservado for par, seguido de 5 e posteriormente de zeros, permanece o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores.

A interpretação da norma, bem como a comparação dela com outras regras de arredondamento, pode ser bastante frutífera em sala de aula e é essencial para a construção do sistema, visto que justifica o uso dos símbolos de menor que ou igual nas inequações.

Como o sistema (8) é formado por duplas inequações, ele pode ser reescrito na forma de 4 inequações:

$$\begin{cases} y \leq 0,785x \\ y \geq 0,775x \\ y \leq 0,765x + 0,53 \\ y \geq 0,755x + 0,51. \end{cases} \quad (9)$$

As soluções do sistema (9) são representadas por uma região do plano cartesiano, porém, apenas os pontos que possuem coordenadas inteiras são relevantes para solucionar o problema que foi modelado. Dessa forma, a representação geométrica das inequações será essencial na resolução.

No plano cartesiano, a representação dos pontos  $(x, y)$  tais que  $y = 0,78x$  é a reta apresentada na Figura 8. Um ponto T que tenha coordenadas  $(x, z)$ , de modo que  $z < y$ , também é representado nesta figura de modo a mostrar qual será a posição dos pontos com essa característica.

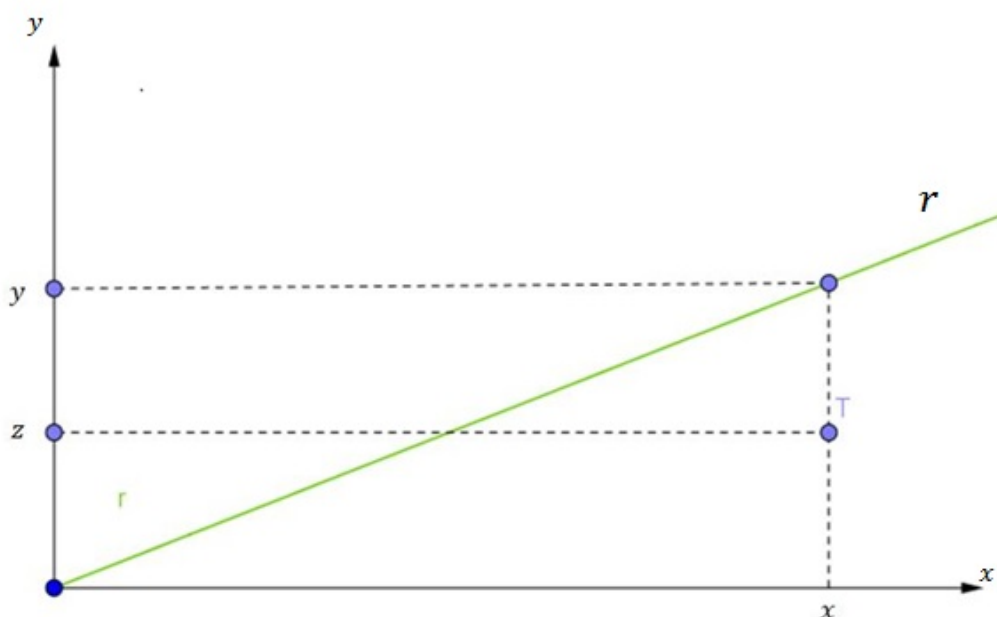
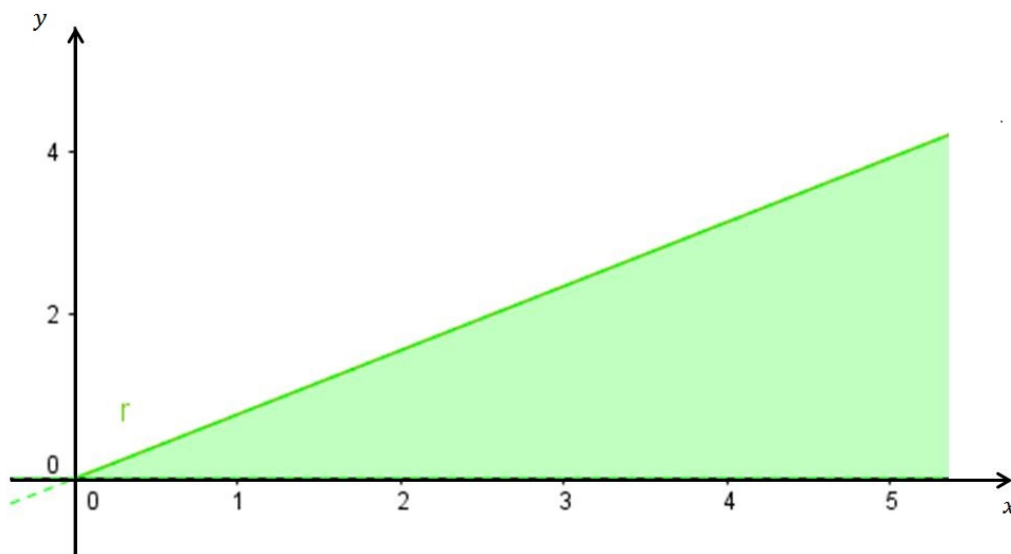
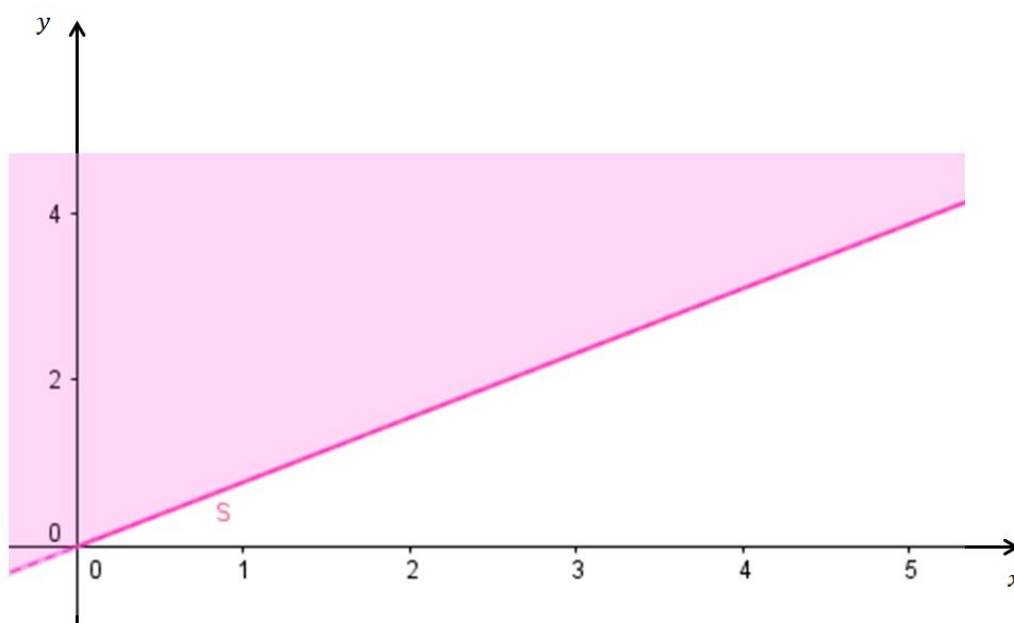


Figura 8: Representação gráfica da equação  $y = 0,785x$  e de um ponto de ordenada menor do que os pontos da reta.

Com isso, a representação da primeira inequação de (9) é o conjunto de pontos que estão abaixo da reta  $r : y = 0,785x$ , como podemos ver na Figura 9.

Já os pontos que representam a segunda inequação, dado o sinal de maior que ou igual a, são os pontos que estão acima da reta  $s : y = 0,775x$ , como mostra a Figura 10.



Figura 9: Representação gráfica da inequação  $y \leq 0,785x$ .Figura 10: Representação gráfica da inequação  $y \geq 0,775x$ .

Dessa forma, os valores que satisfazem as duas primeiras inequações são aqueles que são representados pela intersecção das regiões apresentadas nas Figuras 9 e 10. Como o coeficiente angular das retas  $r$  e  $s$  são muito próximos, temos uma região bastante estreita, e que será melhor visualizada para valores mais altos de  $x$ . Softwares de geometria dinâmica, como por exemplo o Geogebra, facilitam esse tipo de visualização. A Figura 11 mostra a região delimitada pelas duas primeiras inequações do sistema (9).

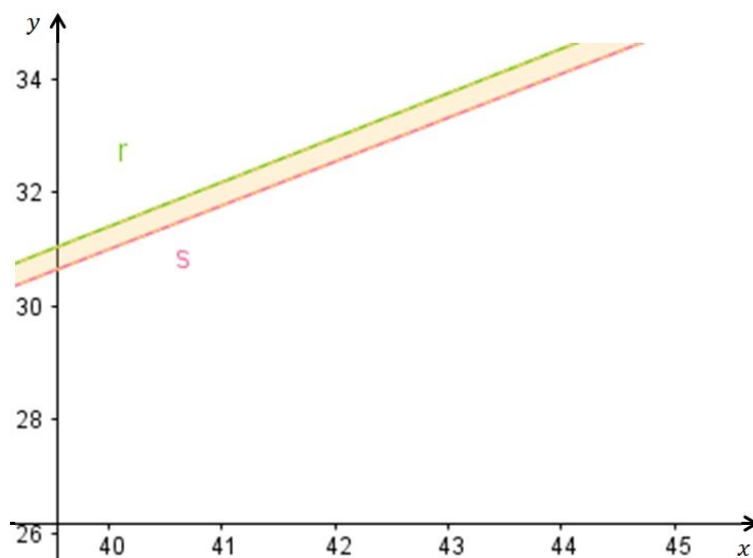


Figura 11: Região delimitada pelas inequações  $y \leq 0,785x$  e  $y \geq 0,775x$ .

É interessante fazer com que os alunos analisem o significado do gráfico apresentado na Figura 11 dentro do problema que está sendo modelado. Os pontos da região destacada são todos aqueles cujas coordenadas  $(x, y)$  apresentam uma razão  $\frac{y}{x}$  que poderia ser arredondada para 78%, isto é, as possibilidades dadas com o primeiro anúncio do locutor. Feita essa relação, fica clara a aparência estreita da região para valores pequenos de  $x$  e  $y$  e mais larga para valores maiores. Isso aconteceu porque, para um número grande de  $x$ , por exemplo 1000, teríamos uma série de valores de  $y$ , os inteiros no intervalo  $[775, 785]$ , que satisfazem a condição. Já para valores pequenos, como  $x = 100$ , teríamos apenas o valor 78 satisfazendo o problema.

De forma análoga, é possível construir uma região no plano cartesiano que representa as possibilidades olhando exclusivamente para o segundo anúncio do locutor, como pode ser visto na Figura 12.

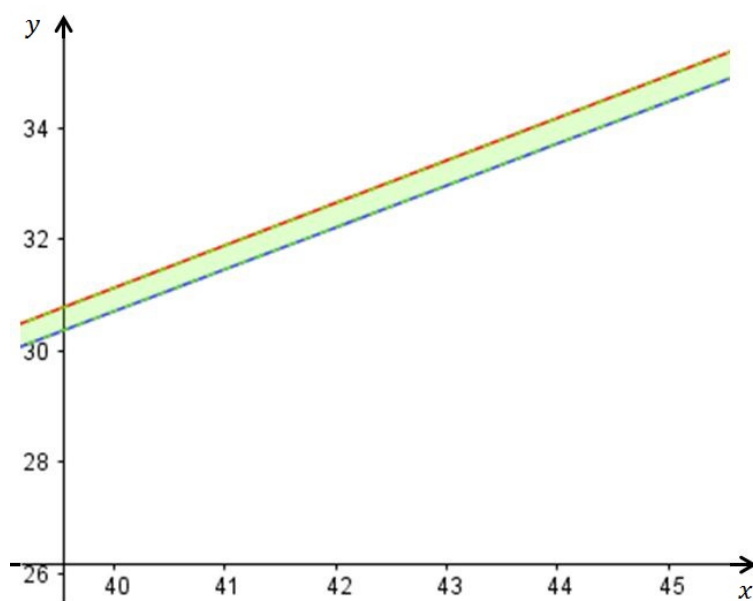


Figura 12: Região delimitada pelas inequações  $y \leq 0,765x + 0,53$  e  $y \geq 0,755x + 0,51$ .

As soluções do problema estarão em uma região do plano cartesiano que satisfaçam todas as inequações do sistema (9). Esta região está representada na Figura 13, que foi construída fora de escala com o intuito de tornar a compreensão mais clara.

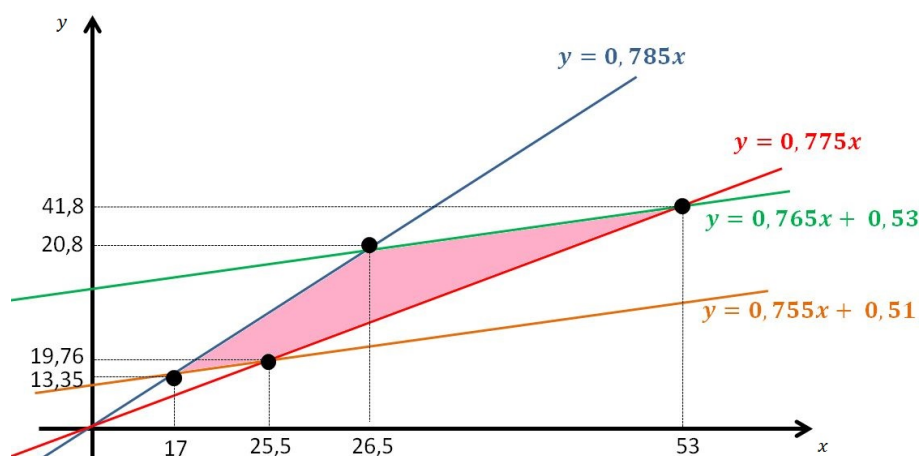


Figura 13: A região destacada representa as soluções do sistema (9).

As Figuras 14, 15, 16 e 17 mostram os vértices do quadrilátero que representa a solução do sistema, em gráficos construídos em escala.

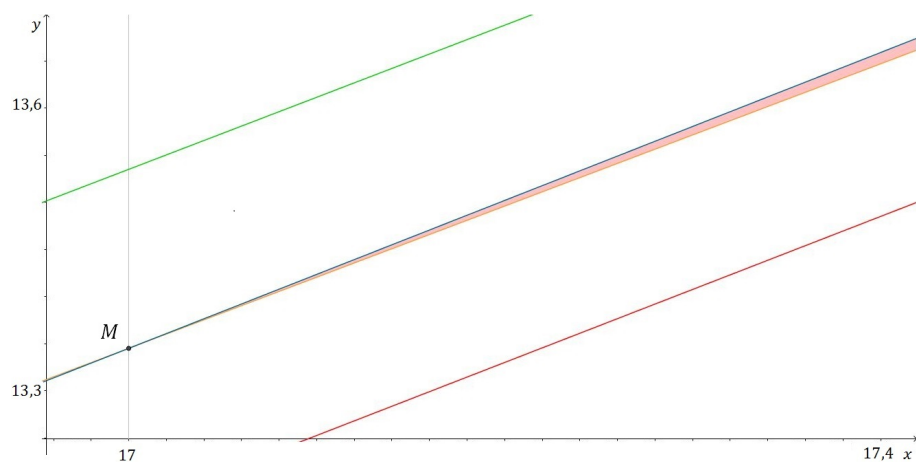


Figura 14: Detalhe da intersecção entre as retas  $y = 0,785x$  e  $y = 0,755x + 0,51$ .

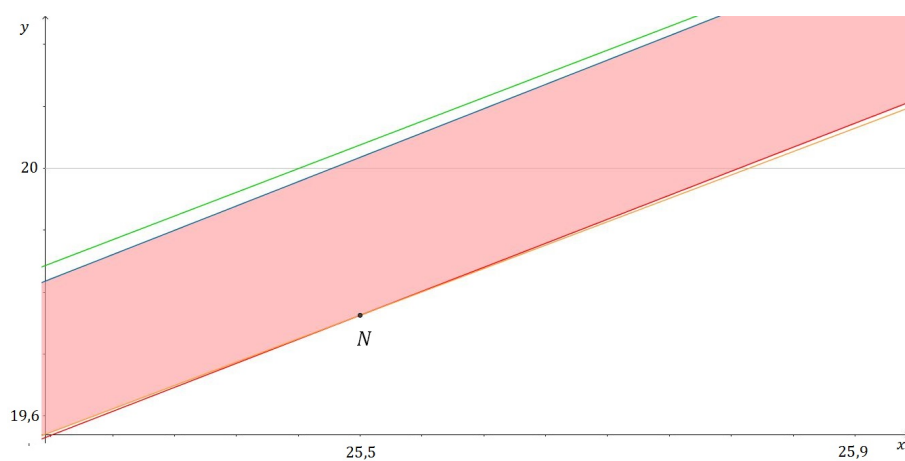


Figura 15: Detalhe da intersecção entre as retas  $y = 0,775x$  e  $y = 0,755x + 0,51$ .

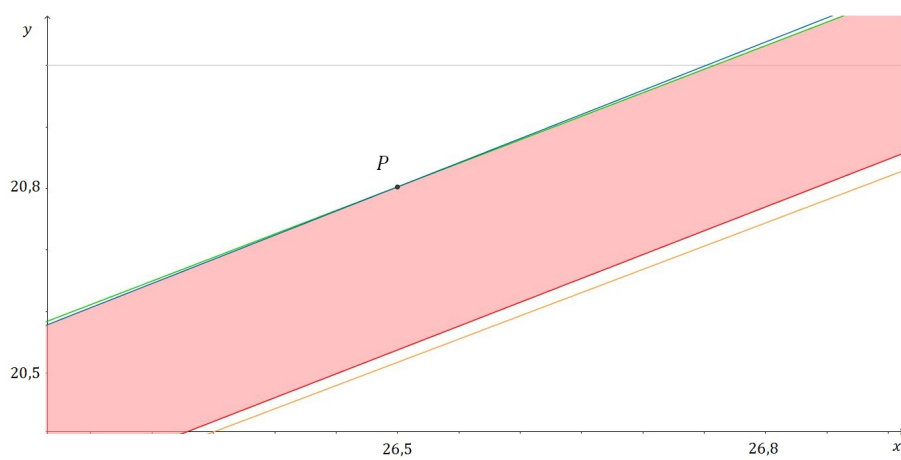


Figura 16: Detalhe da intersecção entre as retas  $y = 0,785x$  e  $y = 0,765x + 0,53$ .

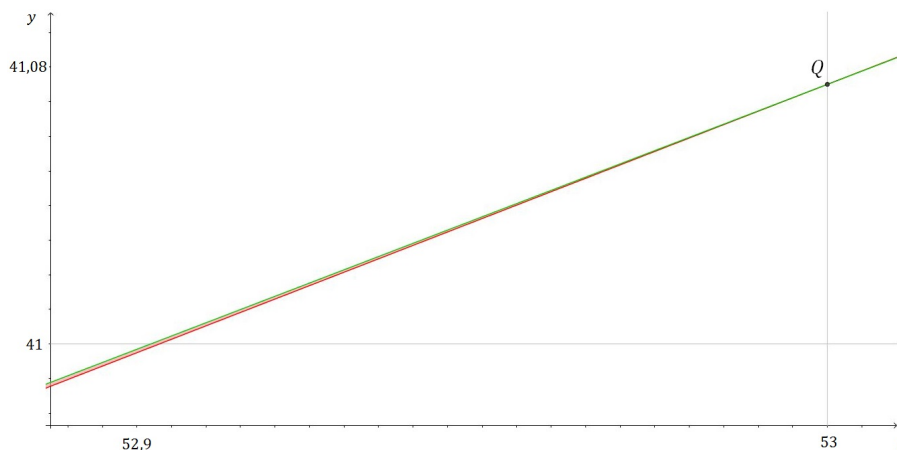


Figura 17: Detalhe da intersecção entre as retas  $y = 0,775x$  e  $y = 0,765x + 0,53$ .

Os alunos devem analisar a região apresentada e concluir que apenas os pontos internos com coordenadas inteiras são soluções do problema dos lances livres. Com um software de desenho, é possível configurar uma malha para valores inteiros para as variáveis e com a ferramenta de zoom, encontrar as soluções. Posteriormente, o aluno poderia confirmar algebricamente que os pontos encontrados satisfazem as condições, simplesmente testando se as inequações são satisfeitas para os valores obtidos. As Figuras 18, 19, 20 e 21 mostram as 6 soluções existentes para o problema representadas pelos pontos A, B, C, D, E e F.

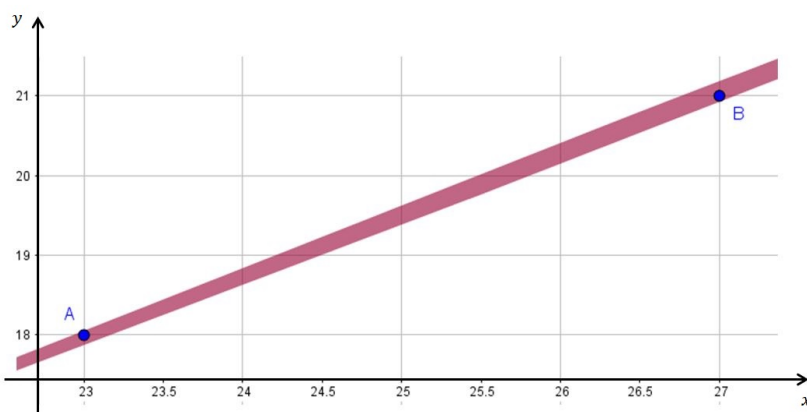


Figura 18: Os pontos A e B representam duas soluções do sistema

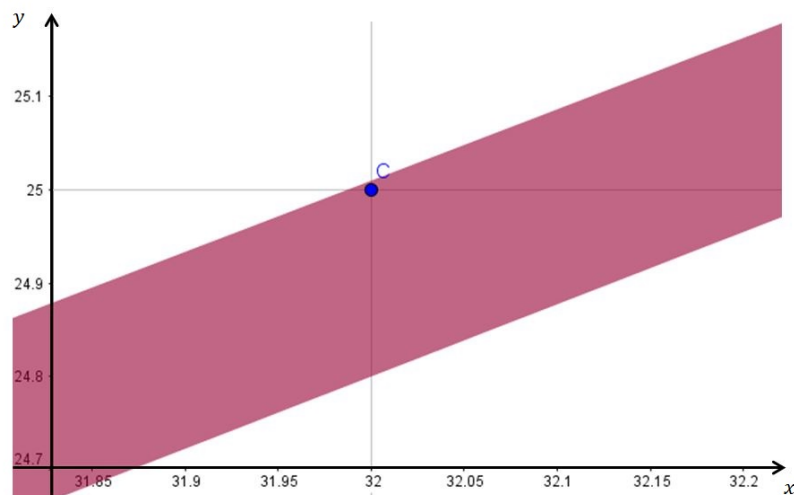


Figura 19: O ponto C representa uma solução do sistema.

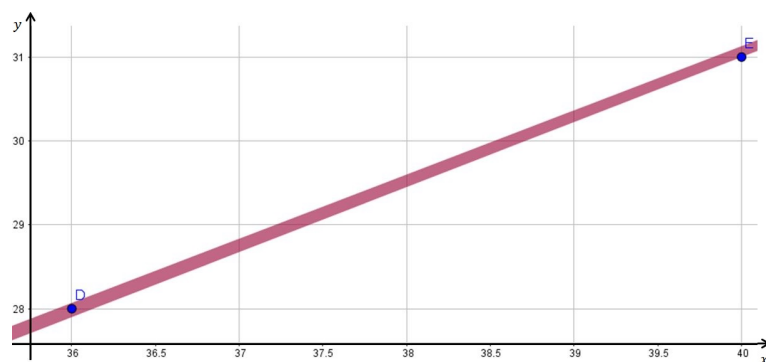


Figura 20: Os pontos D e E representam duas soluções do sistema.

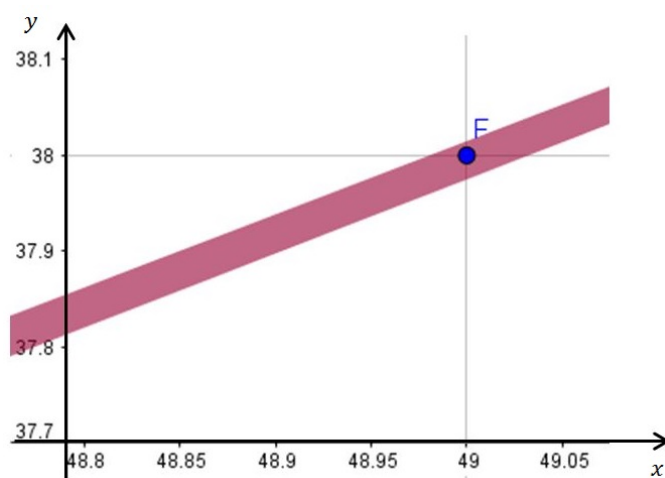


Figura 21: O ponto F representa uma solução do sistema.

Assim, temos que se o locutor fez arredondamentos ao anunciar as estatísticas do jogador, as possibilidades, pensando no primeiro momento da narração, são de:

- 23 lances com 18 acertos, que correspondem a 78,2%;
- 27 lances com 21 acertos, que corresponde a 77,8%;
- 32 lances com 25 acertos, que corresponde a 78,1%;
- 36 lances com 28 acertos, que corresponde a 77,8%;
- 40 lances com 31 acertos, que corresponde a 77,5%;
- 49 lances com 38 acertos, que corresponde a 77,6%.

Respectivamente, para o segundo momento da narração, temos:

- 25 lances com 19 acertos, que correspondem a 76%;
- 29 lances com 22 acertos, que corresponde a 75,9%;
- 34 lances com 26 acertos, que corresponde a 76,4%;
- 38 lances com 29 acertos, que corresponde a 76,3%;
- 42 lances com 32 acertos, que corresponde a 76,2%;
- 51 lances com 39 acertos, que corresponde a 76,47%.

Sobre o questionamento inicial, “É possível afirmar que o locutor cometeu um engano em seus anúncios?”, a resposta é não. Não podemos fazer essa afirmação, considerando que encontramos possibilidades que passam por arredondamentos e não necessariamente por erros. O interessante é discutir com os alunos que a afirmação “o locutor não cometeu erros” também não pode ser classificada como verdadeira, visto que a inconsistência das soluções que encontramos inicialmente para o sistema linear, também pode ter vindo de um erro de leitura ou cálculo das porcentagens.

Novamente, podemos perceber as etapas de um processo de modelagem nessa abordagem. A solução do problema inicial, bem como o conhecimento das normas de arredondamento caracterizam a inteiração, a construção do sistema de inequações (9) é matematização do problema, a análise dos gráficos entra como a interpretação de resultados e os cálculos das porcentagens relacionadas aos pontos de coordenadas inteiras são a validação do modelo.

### 5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A ABORDAGEM

Novamente, temos duas opções para a abordagem dos conceitos técnicos: formalizar os assuntos ao longo da apresentação do problema, ou fazê-lo ao final. Como os conceitos aqui são mais curtos e rápidos de serem trabalhados, talvez seja mais interessante desenvolvê-los de acordo com suas necessidades no problema. Aqui, vamos organizar um roteiro de como isso pode ser feito.

Segundo o dicionário Houaiss [19], sistema é qualquer conjunto constituído de partes e elementos interdependentes. É nesse sentido que utilizamos as expressões sistema solar, sistema digestivo, sistema operacional, sistema único de saúde, etc. A palavra sistema traz consigo a ideia de interdependência.

É por esse motivo que tratamos as equações que aparecem em (7) como um sistema. A incógnita  $x$  de uma equação se refere ao mesmo número representado na outra e, se não existisse essa interligação, poderíamos tratá-las apenas como um conjunto de equações.

A definição de equação linear limita as relações entre as variáveis. Por exemplo, uma equação deste tipo não apresenta multiplicações entre incógnitas ou o valor do seno de uma delas. De acordo com [20]:

Chamamos de equação linear, nas incógnitas  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , toda equação do tipo  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ .

Segundo essa definição, uma equação linear de duas incógnitas teria o formato  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ , com  $a_1, a_2$  e  $b$  como constantes conhecidas. Utilizando as incógnitas  $x$  e  $y$  e isolando o valor de  $y$ , apenas para ser apresentada da forma como foi trabalhada no problema, podemos escrevê-la como  $y = \alpha x + \beta$ , desde que  $a_2 \neq 0$ .

Quando buscamos a solução de uma equação, estamos querendo um valor, ou um conjunto de valores, que satisfaçam a igualdade. Já em um sistema linear, a busca são por valores que satisfaçam todas as equações apresentadas. Com a ajuda do problema modelado, é fácil mostrar aos alunos que se  $x = 78$  e  $y = 100$ , temos que a primeira equação do sistema (7) é satisfeita, mas como não satisfaz a segunda equação, o par (78; 100) não é uma solução para o sistema.

Algebricamente, pelo método da substituição ou da eliminação, é simples encontrarmos a solução do sistema, como foi feito ao longo da abordagem. O ponto aqui é mostrar a força que um método geométrico tem e, indiretamente, justificar a importância do estudo da geometria analítica como uma forma de conexão entre a álgebra e geometria.

Associar de forma biunívoca um ponto em um plano a um par ordenado é uma construção simples intuitivamente, apesar de ser bastante abstrata se for definida com rigor. Com a ajuda de uma planilha eletrônica, é possível atribuir valores para  $x$  em ambas as equações do sistema (7) encontrando uma série de pares ordenados (Tabela VI) que satisfaçam cada uma das equações isoladamente.



x	$y = 0,78x$	$y = 0,76x + 0,52$
1	0,78	1,28
2	1,56	2,04
3	2,34	2,8
4	3,12	3,56
5	3,9	4,32
6	4,68	5,08
7	5,46	5,84
8	6,24	6,6
9	7,02	7,36
10	7,8	8,12

Tabela VI: Valores que satisfazem isoladamente às equações do sistema (7).

Colocando esses valores em um gráfico, como pode ser visto na Figura 22, é natural conjecturar que os pontos associados às equações se organizam em retas. E, por consequência da primeira conjectura, podemos intuir que em algum momento essas retas se cruzaram.

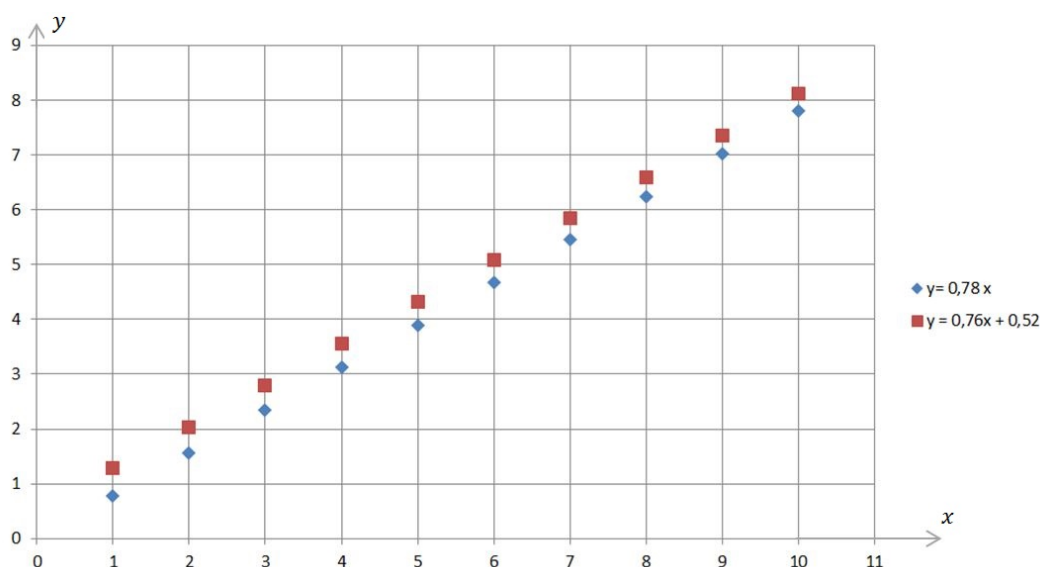


Figura 22: Pontos associados às equações do sistema (7).

É importante deixar claro que não estamos dando pouca importância às demonstrações. Acreditamos que elas devem acontecer em sala de aula, principalmente como uma estratégia de convencimento. A proposta inclui despertar a dúvida, construir uma conjectura e só então estabelecermos uma estratégia para uma validação. Neste exemplo, podemos pensar em dois pontos pertencentes a uma das retas e questionar os alunos sobre quais devem ser as características das coordenadas do terceiro ponto para que ele esteja alinhado com os outros dois, conforme mostra o esquema na Figura 23.

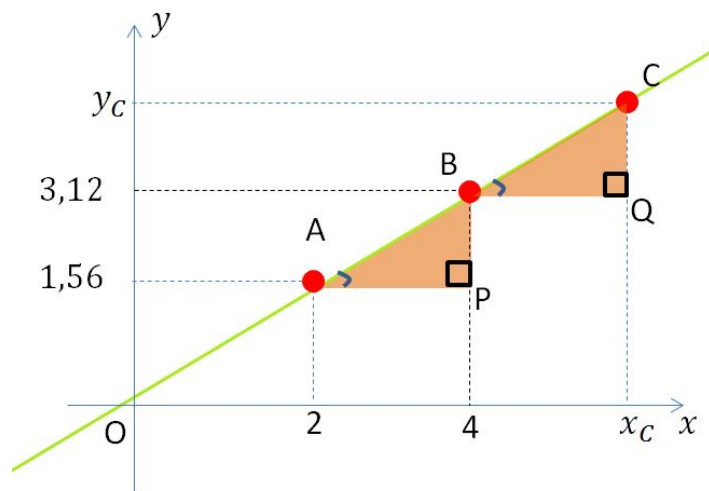


Figura 23: As coordenadas do ponto C obedecem um critério para seu alinhamento com os pontos  $A(2; 1,56)$  e  $B(4; 3,12)$ .

Neste exemplo, que toma A e B com coordenadas que satisfazem  $y = 0,78x$ , temos que para C estar alinhado aos outros dois, os triângulos ABP e BCQ devem ser semelhantes. Para isso, temos:

$$\frac{3,12 - 1,56}{4 - 2} = \frac{y_c - 3,12}{x_c - 4}$$

portanto

$$0,78 = \frac{y_c - 3,12}{x_c - 4}$$

logo

$$y_c = 0,78x_c.$$

Isso significa que todos os pontos que estão alinhados com A e B têm a propriedade da ordenada ter 78% do valor da abscissa, o que está diretamente relacionado com o problema que estávamos enfrentando. O mesmo pode ser feito para a segunda equação, mostrando que os pontos associados aos seus pares ordenados estão alinhados. Posteriormente, como seria natural em uma aula de Geometria Analítica, podemos pedir aos alunos para generalizar o que foi feito, mostrando que toda equação do tipo  $y = \alpha x + \beta$  é representada por uma reta no plano cartesiano.

Aqui chegamos a um ponto importante sobre os sistemas lineares de duas incógnitas. Se cada equação pode ser interpretada como uma reta, a solução estará necessariamente no ponto de intersecção dessas retas, isto é, no ponto cujas coordenadas satisfazem ambas as equações.

Ainda apoiados no problema dos lances livres, vamos formalizar os conceitos de coeficiente angular e coeficiente linear. Se colocarmos no mesmo gráfico as retas  $r : y = 0,785x$  e  $s : y = 0,775x$ , limites das regiões apresentadas nas Figuras 9 e 10, podemos perceber uma diferença sutil em suas inclinações, conforme mostra a Figura 24.

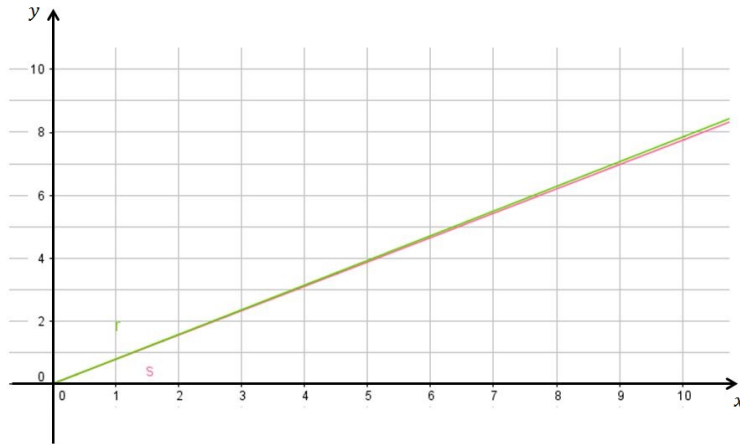
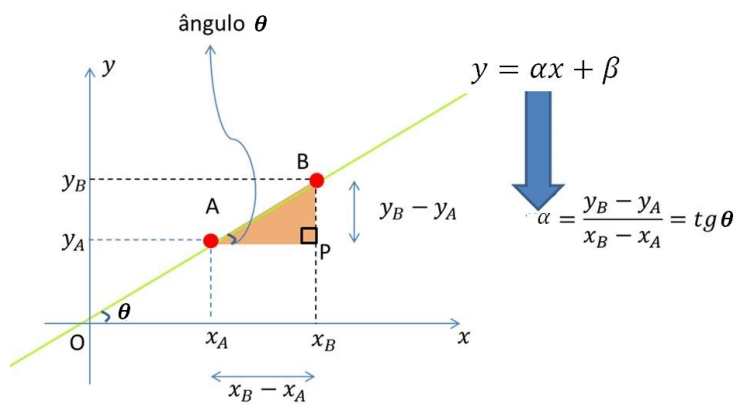


Figura 24: As retas  $r$  e  $s$  têm inclinações ligeiramente diferentes.

O coeficiente que multiplica a variável  $x$ , chamado de coeficiente angular, é responsável pela taxa de variação da variável  $y$ . Isto significa que, quanto maior o seu valor, maiores serão os valores que  $y$  irá assumir dado um aumento de  $x$ . Geometricamente, temos uma reta cada vez mais inclinada. A Figura 25 mostra a relação do coeficiente angular com a inclinação da reta.



c

Figura 25: O coeficiente angular é a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo  $x$ .

O coeficiente linear pode ser analisado pelos alunos através das retas que limitam as regiões representadas pelas duas últimas inequações do sistema (9). Chamando de  $t$  a reta de equação  $y = 0,765x + 0,53$  e de  $s$  a reta  $y = 0,755x + 0,51$ , podemos perceber na Figura 26 o que acontece com os valores iniciais, isto é, quando  $x = 0$ .

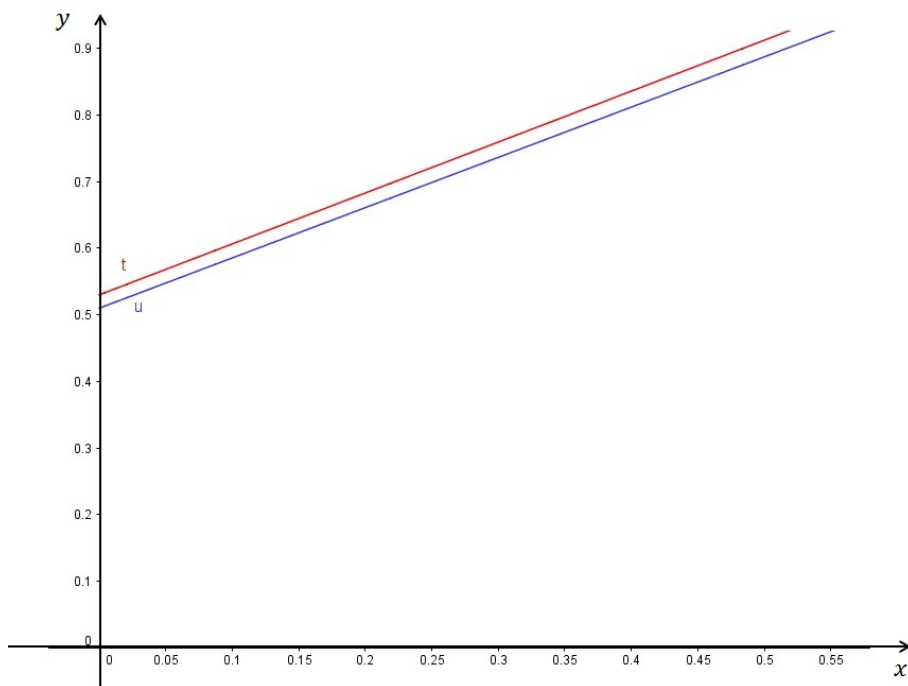


Figura 26: O coeficiente linear determina o ponto de cruzamento entre a reta e o eixo  $y$ .

Por fim, é necessário perceber que parte da dificuldade em relação a visualização da região na qual estão as soluções do problema dos lances livres se deve ao fato das retas limitantes terem coeficientes angulares e lineares muito próximos, o que faz as retas serem quase coincidentes ao olhar.

## CONCLUSÃO

---

Ao longo da vivência durante o período do mestrado, várias questões foram levantadas sobre situações cotidianas tanto do ambiente universitário quanto do escolar. Pela primeira vez, estávamos inseridos num grupo com massa crítica suficiente para conhecer detalhes dos dois lados e com isso enriquecer as discussões. Professores experientes do ensino básico, que agora novamente alunos universitários, estavam em contato próximo com professores do ensino superior. Acreditamos que isso por si só já é um impacto importante do programa em que esta dissertação está inserida.

Dentre as várias conversas desse grupo no período, percebemos uma angústia do professor universitário sobre uma maneira de atingir de forma mais eficaz alunos ingressantes na universidade. Com as trocas de experiências neste processo, pudemos perceber que muitas vezes a expectativa do professor universitário sobre algum conhecimento técnico do aluno ingressante era muito distante da realidade. Com isso em mente, este trabalho foi voltado para identificar de forma mais sistemática os motivos para estas divergências e propor alternativas que estivessem ao nosso alcance para contorná-las.

Primeiramente elencamos pontos chave para as disciplinas iniciais de matemática dos cursos da área de exatas. Buscamos identificar a frequência da cobrança destes pontos e outros pontos no ENEM, que é um dos principais norteadores para professores do ensino médio e dos próprios alunos. Paralelamente, indagamos docentes do ensino superior sobre o que esperavam destas frequências e obtivemos resultados muito distintos da realidade. Desta forma, parece natural que o professor universitário tenha dificuldades para lecionar para alunos ingressantes, uma vez que os conhecimentos pressupostos por um muitas vezes não são de domínio do outro.

Enxergamos que é necessária uma aproximação da comunidade acadêmica com o grupo responsável pela elaboração do ENEM. Com certeza seria uma discussão muito rica, com a apresentação e defesa dos pontos de vista destes dois grupos sobre quais deveriam ser os elementos principais da avaliação do Ensino Médio no país e também da principal prova de acesso ao ensino superior no Brasil. Esta aproximação poderia partir de qualquer um dos dois grupos, tanto o MEC trazendo a comunidade universitária para ser mais participativa na concepção do ENEM, quanto as instituições de educação superior trazendo seus docentes para conhecer

mais o exame. Em ambos os casos, não estaria na nossa alçada tomar qualquer atitude para contribuir com a situação.

Uma alternativa a nosso alcance para contribuir com a lacuna enfrentada na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior fosse transposta é a elaboração de roteiros didáticos sobre pontos que consideramos cruciais neste contexto. Nesta dissertação escolhemos dois destes pontos para essa ação, um relacionado com a disciplina de Cálculo em Uma Variável e outro mais relacionado com a disciplina de Geometria Analítica.

Acreditamos que os roteiros que desenvolvemos podem ser utilizados no início da vida acadêmica de um aluno e pode ser conduzido tanto por um docente da universidade quanto por um monitor, ou ainda em um plano estudo autônomo do aluno. Procuramos fazer uma transição suave entre os conteúdos de maior domínio do aluno do Ensino Médio para os conteúdos de nosso interesse. Além disso, combinamos gradualmente aspectos intuitivos com o formalismo matemático. Na condução destes roteiros exploramos fortemente o aspecto da modelagem matemática como uma ferramenta pedagógica. Em nosso levantamento bibliográfico, vimos que estudos recentes [5] sobre este tema apontam que esta estratégia mostra-se motivadora e incita a criatividade do aluno. Ressaltamos no texto também a diferença entre contextualização e modelagem que é muito confundida pelos professores tanto no ensino superior, quanto no básico.

Muitos pontos diferentes dos escolhidos por nós poderiam ter sido selecionados para serem trabalhados no contexto desta dissertação ou ainda na composição de um material auxiliar maior. Uma análise estatística mais rigorosa sobre nossas percepções também seriam muito bem vindas. Com certeza um estudo mais formal sobre estes tópicos dariam um embasamento científico bem maior. Acreditamos que estas observações podem servir de base para temas de dissertações ou estudos científicos futuros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] L. Almeida, K. Silva, R. Vertuan, Modelagem matemática na educação básica, Editora Contexto (2012).
- [2] U. D'Ambrosio, Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade, Editora Autêntica (2005).
- [3] R. Bassanezi, Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, Editora Contexto (2009).
- [4] R. Levy, *Teaching Mathematical Modeling to Students*, SIAM NEWS (May, 2016), page 5.
- [5] COMAP, SIAM, *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*. (2016)
- [6] R. Monaco, Mais da metade dos estudantes abandona cursos de engenharia, Portal da Industria (2013). Disponível em: <<http://www.portaldaindustria.com.br/cni/imprensa/2013/07/1,19276/mais-da-metade-dos-estudantes-abandona-cursos-de-engenharia.html>>
- [7] G. SILVA, Análise de evasão no ensino superior: uma proposta de diagnóstico de seus determinantes . Revista da Avaliação da Educação Superior), (2013), v. 18, n. 2, p.311-333.
- [8] R. Bassanezi, Modelagem Matemática: Teoria e Prática, Editora Contexto (2015).
- [9] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): relatório pedagógico 2009-2010. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (2013).
- [10] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.
- [11] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Matriz de referência ENEM. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (2012).

- [12] D. da Silva, De onde vêm as palavras: origens e curiosidades da língua portuguesa, Lexikon (2014).
- [13] M. Otte, O formal, o social e o subjetivo: Uma introdução a filosofia e à didática da Matemática, Editora Unesp (1993).
- [14] J. Stewart, Cálculo, volume 1. Editora Cengage Learning, 2016.
- [15] Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alumínio, Reciclando ideias, Notícias da lata nº70 (Dezembro, 2016), página 3.
- [16] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado, A matemática do Ensino Médio, v1, SBM, 2012
- [17] G. Iezzi, C. Murakami, Fundamentos da matemática elementar, v1, Atual Editora, 2005.
- [18] Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT NBR 5891: Regras de arredondamento na numeração decimal, (2014).
- [19] HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa. Elaborado pelo Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda, Objetiva (2009).
- [20] G. Iezzi, S. Hazzan, Fundamentos da matemática elementar, v4, Atual Editora, 2005.