UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Samy Marques Rocha

Distribuição Binomial e Aplicações

São Luís - MA

2017

Samy Marques Rocha

Distribuição Binomial e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Josenildo de Souza Chaves (Orientador)

Doutor em Estatística

Universidade Federal do Maranhão

São Luís - MA

2017

Rocha, Samy Marques.

Distribuição Binomial e Aplicações / Samy Marques. Rocha - 2017

58.p

Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, 2017.

Orientador: Josenildo de Souza Chaves

1. Distribuição binomial 2. Distribuição de probabilidade 3. Variável aleatória binomial 4. Distribuição binomial e relações com outras distribuições de probabilidade. I.Título.

CDU

Samy Marques Rocha

Distribuição Binomial e Aplicações

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 16/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Josenildo de Souza Chaves (Orientador)
Doutor em Estatística
Universidade Federal do Maranhão

Prof. João Coelho Silva Filho
Doutor em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Valeska Martins de Souza
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

A minha família...

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me guiado nessa caminhada e por ter me iluminado nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Prof. Josenildo pela singular ajuda e dedicação a meu trabalho.

Ao PROFMAT pela oportunidade de adquirir mais conhecimentos a minha profissão, sendo um programa de importância imensa na qualificação de docentes do nosso País.

A minha família, em especial à minha mãe, Lusia, por sempre acreditar na minha capacidade de trabalho e nunca me deixar desistir desse sonho, e ser a grande responsável pela formação da minha conduta.

A meus colegas de turma que passaram pelas mesmas dificuldades que eu mas seguiram com perseverança em busca dos objetivos.

À minha esposa pela compreensão dos tempos que tive que me dedicar aos estudos, abdicando-me, em certos momentos, das tarefas de pai de família.

"Plante seu jardim e decore sua alma, ao invés de esperar que alguém lhe traga flores. E você aprende que realmente pode suportar, que realmente é forte, e que pode ir muito mais longe depois de pensar que não se pode mais. E que realmente a vida tem valor e que você tem valor diante da vida!"

William Shakespeare

RESUMO

A distribuição de probabilidade Binomial é uma das mais utilizadas para representar dados de variáveis aleatórias discretas. Neste trabalho, apresentamos a construção do modelo Binomial e suas principais características. O relacionamento com outras distribuições é explorado seguindo os aspectos teóricos e exemplos de aplicações. Os exemplos usando dados do campeonato brasileiro de futebol podem se tornar uma proposta motivadora para os alunos do Ensino Médio. A metodologia é aplicada com o apoio computacional do software livre GeoGebra.

Palavras-chave: Distribuição binomial, variáveis aleatórias discretas, função de probabilidade, software GeoGebra.

ABSTRACT

The Binomial probability distribution is one of the most commonly used to represent data of discrete random variables. In this work, we present the construction of the Binomial model and its main characteristics. The relationship with other distributions is explored following the theoretical aspects and examples of applications. The examples using data from the Brazilian soccer championship can become a motivational proposal for the students of the High School. The methodology is applied with the computational support of free software Geogebra.

Keywords: Binomial distribution, discrete random variables, probability function, software Geogebra.

SUMÁRIO

1 Introdução

A Distribuição de probabilidade Binomial é uma das mais utilizadas para representar dados de variáveis aleatórias discretas. Ela está associada a problemas de contagens em que uma variável de interesse X representa o número de vezes que um particular evento ocorre em n repetições independentes de um experimento aleatório. Meyer (2010), Bussab & Morettin (2010) e Magalhães (2006), por exemplo, são boas recomendações para aqueles que desejam se iniciar no estudo de probabilidade e variáveis aleatórias.

Conjecturamos que a distribuição Binomial se estudada de forma dinâmica com o auxílio de ferramentas tecnológicas e aplicações relacionadas a temas como o esporte, comum ao cotidiano dos discentes, pode ser mais atrativa nas disciplinas de matemática e estatística do Ensino Médio. Neste nível de ensino, podemos relacionar Dante (2011) e Iezzi (2013) como referências fundamentais ao aprendizado. Entretanto, podemos verificar que no Ensino Médio essa distribuição precisa ser melhor abordada em sala de aula.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em vários artigos, reforça essa necessidade; coloquemos em evidência o artigo Art. 35, inciso IV, quando diz que uma das finalidades do Ensino Médio como etapa final da educação básica é a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

As principais características da distribuição Binomial e relações com outras distribuições estão apresentadas. A metodologia aplicada enfatiza os aspectos teóricos desenvolvidos, incluindo aplicações com dados do campeonato brasileiro de futebol com apoio computacional na construção e visualização de gráficos e tabelas. O trabalho tem subsídios necessários para motivar alunos de matemática para projetos em duas grandes áreas do conhecimento, a estatística e a probabilidade.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da distribuição de probabilidade Binomial e suas aplicações, relacionando-a com outras variáveis aleatórias. Especificamente, destacamos os seguintes objetivos:

- Introduzir a definição e alguns conceitos básicos de variáveis aleatórias;
- Definir e determinar algumas características da distribuição binomial;
- Apresentar algumas distribuições de probabilidade importantes relacionadas com a binomial;
- Apresentar e utilizar a calculadora de probabilidade do GeoGebra (Hohenwarter, 2004) como auxílio na construção de tabelas, gráficos e solução dos problemas aplicados;
- Propor alternativas para resoluções de exercícios, fazendo analogia entre uma solução escrita e a solução usando a calculadora de probabilidade do GeoGebra.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 definimos variáveis aleatórias, funções de probabilidade, função densidade de probabilidade e distribuição acumulada. Uma introdução a funções de v.a's é realizada. Algumas características como valor esperado e variância são estudados. A distribuição uniforme contínua e a distribuição normal estão apresentadas. No Capítulo 3 apresentamos a distribuição binomial, mostrando exemplos, definindo a v.a binomial e demonstrando sua função de probabilidade. Neste capítulo, determinamos o valor esperado e a variância de uma variável aleatória com distribuição binomial, depois relacionamos esta distribuição com as de Bernoulli, Poisson, geométrica, binomial negativa, hipergeométrica, multinomial e normal, esta última por ser a mais importante variável aleatória contínua, já que o tratamento principal aqui é a distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta, a binomial. O Capítulo 4, está dividido em duas partes: A primeira consiste em aplicar o conhecimento de variáveis aleatórias num tema muito popular, o campeonato brasileiro de futebol; na segunda apresentamos algumas aplicações que desenvolvemos utilizando a Calculadora de Probabilidade do GeoGebra como ferramenta no auxílio das soluções. No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais.

2 Variáveis Aleatórias

O espaço amostral Ω de um experimento aleatório, algumas vezes não está representado por quantidades numéricas. Por exemplo, suponha que no lançamento de uma moeda n vezes, desejamos observar as faces voltadas para cima e contar o número de caras nos n lançamentos. Ao i-ésimo lançamento podemos associar um espaço amostral $\Omega_i = \{cara, coroa\}$, $i = 1, \cdots, n$. Contudo, em muitas situações experimentais, há o interesse na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um número. Mesmo quando os resultados não são numéricos, podemos atribuir um número a cada resultado do experimento. Por exemplo, podemos atribuir o valor um ou zero a cada ocorrência de cara ou coroa, respectivamente.

Uma variável aleatória X associa um valor numérico a cada resultado elementar de um experimento aleatório. A Figura 2.1 mostra uma representação esquemática de uma variável aleatória.

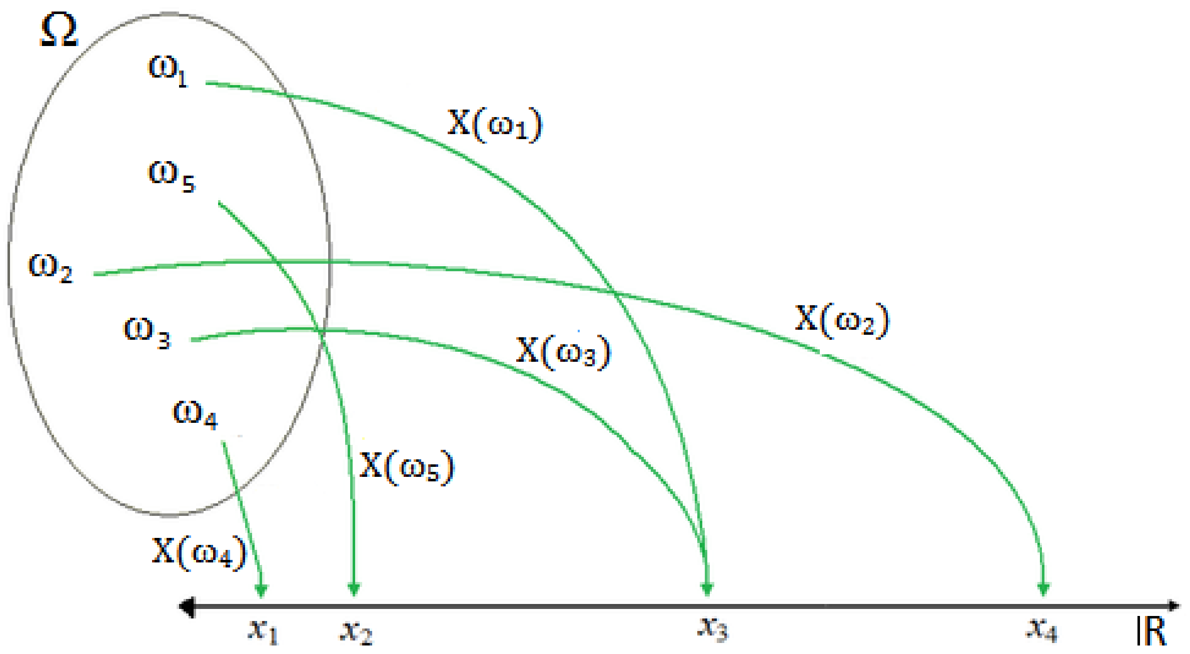

Figura 2.1: Representação esquemática de uma variável aleatória X.

Fonte: wikipedia.

Definição 2.1. Seja Ω um espaço amostral associado ao experimento aleatório. Uma função X, que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é denominada *variável aleatória* (v.a.).

Em muitos casos, Ω tem como resultado um número; então $X(x_i) = x_i$. Geralmente, estamos interessados nos valores numéricos da v.a. Por isso, em muitas situações a natureza de X é desprezada. Entretanto, é importante compreender a relação entre a origem e os valores assumidos pela v.a. X (Meyer, 2010).

2.1 Variável aleatória discreta

Uma v.a. é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for finito ou infinito enumerável.

Exemplo 2.1. Seja X uma v.a. que representa o número de caras obtidas em n lançamentos de uma moeda, então X é uma v.a. discreta.

2.1.1 Função de probabilidade

Esta função é associada as variáveis aleatórias discretas. Uma v.a. discreta está bem caracterizada se conhecermos a sua função de probabilidade dada pela seguinte definição.

Definição 2.2. (Bussab & Morettin, 2010). Chama-se função de probabilidade da v.a. discreta X, que assume os valores x_1, x_2,... x_n..., a função $(x_i, p(x_i)), i = 1, 2...$, que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i), i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

A função de probabilidade de X, satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 2.1. $0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots;$

Propriedade 2.2. $\sum p(x_i) = 1.$

A função de probabilidade de uma v.a. discreta X pode ser representada por uma tabela, como mostra a Tabela 2.1:

Tabela 2.1: *Função de probabilidade de uma v.a. X.*

X	$p(x)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
.	.
.	.
.	.
x_n	$p(x_n)$
$\sum$	1

A função de probabilidade de uma v.a. discreta X pode também ser representada graficamente por um histograma de probabilidade, ver Figura 2.2.

Exemplo 2.2. A Figura 2.2 apresenta a distribuição de probabilidade da v.a. X = número de coroas em dois lançamentos de uma moeda honesta.

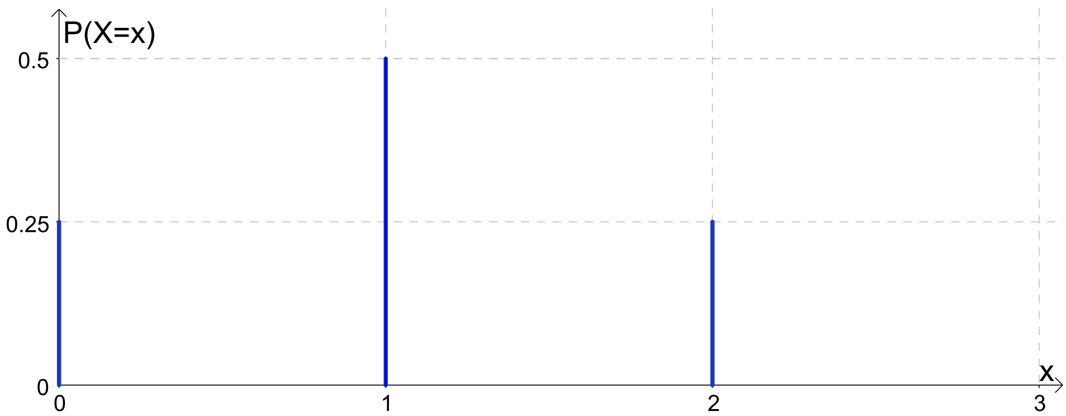

Figura 2.2: Distribuição de probabilidade de uma v.a. X = número de coroas em dois lançamentos de uma moeda honesta.

No caso de algum valor, x_j, não pertencer ao conjunto de valores possíveis da v.a., será atribuída probabilidade zero a x_j, ou seja, $p(x_j) = 0$.

2.2 Variáveis aleatórias contínuas

Uma variável é contínua se seus valores possíveis não podem ser listados, podendo assumir um número infinito de valores em um intervalo finito ou infinito.

Definição 2.3. X é uma v.a. contínua, se existir uma função f, denominada função densidade de probabilidade fdp de X que satisfaz as seguintes condições:

(a) $f(x) \geq 0$ para todo x;

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx{=}1$;

(c) Para quaisquer a, b, com $-\infty < a < b < +\infty$, temos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Para a v.a. contínua a função p definida somente para os valores $x_1, x_2, ...$ associada à v.a. discreta é substituída por uma função f definida para todos os valores de x em algum intervalo $[a, b]$, onde a e b podem ser $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente.

2.3 Função de distribuição acumulada

Com os conceitos de v.a's discretas e contínuas formalizados, vamos apresentar um conceito geral, onde há a formação de uma função denominada de função de distribuição acumulada (fd), $F(x)$ da variável aleatória X:

Se X for uma variável aleatória discreta,

$$F(x) = \sum_j p(x_j),\ para\ x_j \leq x.$$

Se X for uma variável aleatória contínua,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Se X for uma v.a. discreta com um número finito de valores possíveis, o gráfico da função fd é construído por segmentos de retas horizontais (nesse caso a fd se denomina função em degraus). A função F é contínua, exceto nos valores possíveis de X: $x_1, x_2, \cdots, x_n$. No valor x_j a função apresenta um "salto"de magnitude $p(x_j) = P(x = x_j)$, como mostra a Figura 2.3.

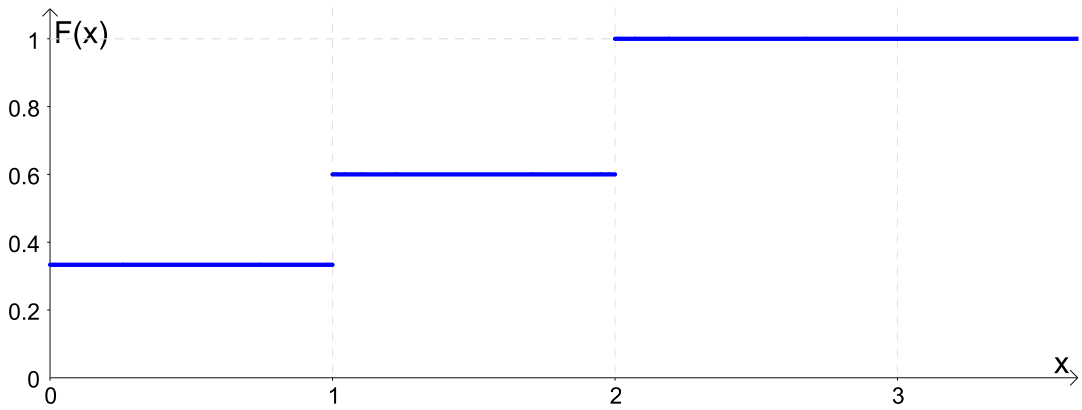

Figura 2.3: Representação gráfica de uma função de distribuição acumulada de uma v.a. discreta.

Se X for uma variável aleatória contínua para todo x, sua fd pode ser representada por um gráfico semelhante ao da Figura 2.4.

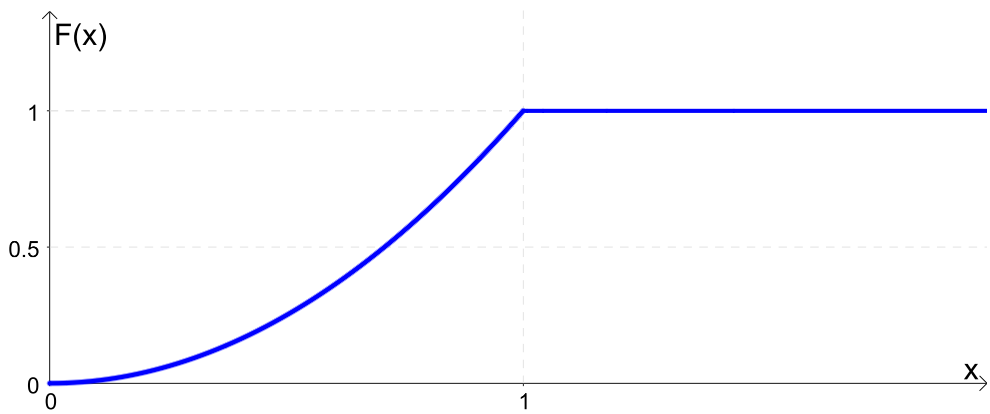

Figura 2.4: Representação gráfica de uma função de distribuição acumulada de uma v.a. contínua.

Exemplo 2.3. Variáveis aleatórias uniformemente distribuídas. Diremos que X é uma v.a. uniformemente distribuída sobre um intervalo $[a, b]$, abreviadamente $X \sim U[a, b]$, quando X for uma v.a. contínua que tome todos os valores no intervalo $[a, b]$, onde a e b são ambos finitos e a fdp for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } x \in [a, b] \\ 0, & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Para quaisquer subintervalos $[a, b]$, onde $a \leq c \leq d \leq b$, P$(c \leq X \leq d)$ é a mesma para todos os subintervalos que tenham o mesmo comprimento. Assim, podemos representar a probabilidade de uma variável aleatória uniformemente distribuída, nesse intervalo por:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

Note que se escolhermos ao acaso um ponto p, num intervalo $[a, b]$, podemos dizer que a abscissa do ponto escolhido, digamos X, é uniformemente distribuída sobre $[a, b]$.

A fd de uma v.a. $X \sim U[a, b]$ é dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a; \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b; \\ 1, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Um modelo gráfico da fd é mostrado na Figura 2.5.

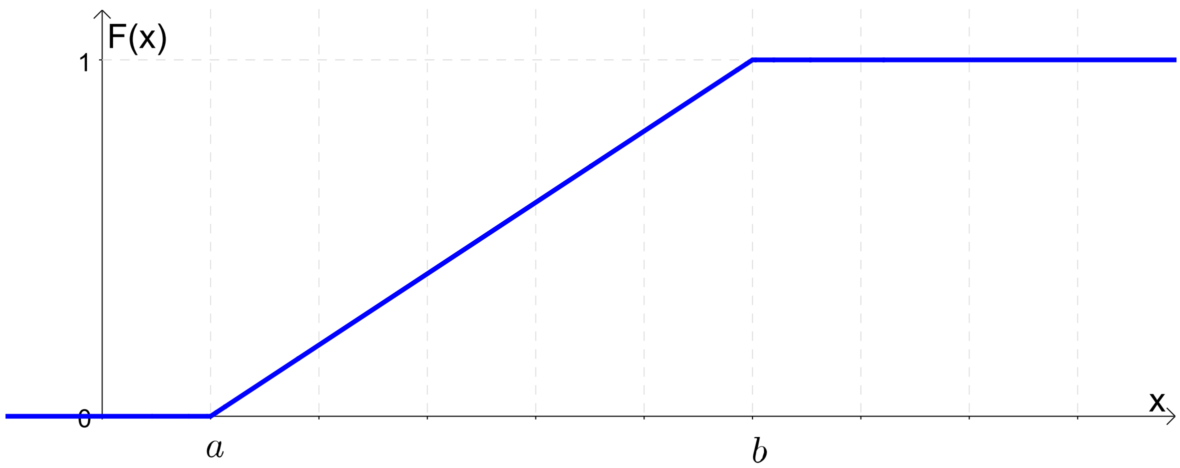

Figura 2.5: Modelo gráfico da fd de uma v.a. $X \sim U[a, b]$.

2.4 Funções de variáveis aleatórias

As funções de v.a.'s também são v.a.'s. Se uma variável aleatória X é definida em um experimento Ω para uma função $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $Y(x) = y$ é uma v.a..

Definição 2.4. Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório, com $\omega \in \Omega$. Seja $X(\omega) = x$ uma variável definida em Ω, com $x \in Cd_X$ e $Y(x) = y$, com $y \in Y$, uma variável definida em X, onde Cd_X e Cd_Y são o contradomínios de X e Y, respectivamente. Então $Y(x) = y$ é uma v.a. por meio de uma relação de transitividade, ou seja, $y = Y[X(\omega)]$, como ilustra a Figura 2.6.

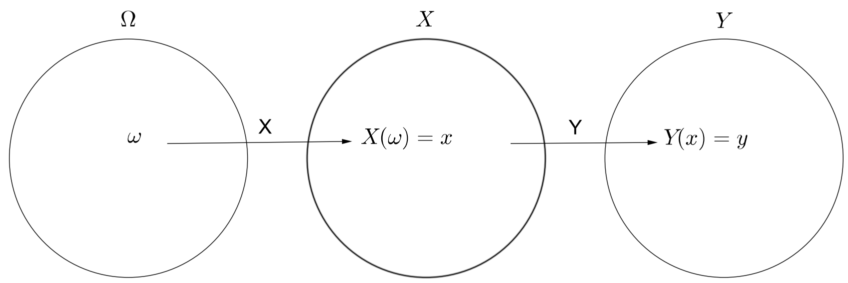

Figura 2.6: Esquema da relação $y = Y[X(\omega)]$.

As condições exigidas na Definição 2.4 se estende para as funções de v.a.'s. Isso significa que $P(Y = y) = P(X = x)$, ou seja, a probabilidade associada ao contradomínio de Y é igual à probabilidade do evento equivalente em termos de X. Então, podemos definir $P(Y)$ da seguinte forma:

$$P(Y) = P\left(\{x \in Cd_X : Y(x) \in Cd_Y\}\right).$$

As distribuições de probabilidades de funções de v.a.'s podem ser de interesse em muitas situações, por exemplo na determinação da variância e funções geradora de momentos.

Exemplo 2.4. Seja X uma v.a. e seja $Y = X^2$. Então,
$F_Y(y) = P(X^2 \leq y)$.
Se $y < 0$, $P(X^2 \leq y) = 0$. Logo
$F_X(y) = 0$, se $y < 0$
Se $y \geq 0$,
$P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$.
Esta probabilidade pode ser escrita como:

$$P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}), \tag{2.2}$$

A primeira parcela do lado direito de (2.2) é $P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$. Enquanto, a segunda parcela é igual a $F_X(-\sqrt{y})$ menos a probabilidade de X ser igual a $-\sqrt{y}$. Portanto,
$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) + P(X = -\sqrt{y})$, se $y \geq 0$.

2.5 Esperança matemática e variância de uma variável aleatória

O valor esperado de uma v.a. é uma medida de tendência central da distribuição de probabilidade dessa v.a., já a variância nos dá ideia da dispersão dos valores da variável em torno do valor esperado.

2.5.1 Esperança matemática ou valor esperado de uma variável aleatória

Definição 2.5. Seja X uma v.a., o *valor esperado* de X, denotado por $E(X)$ ou μ_X é dado por:

Se X é uma v.a. discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \tag{2.3}$$

desde que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ convirja absolutamente, ou seja, se

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < +\infty.$$

Se X é uma v.a. contínua,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{2.4}$$

Pode acontecer que a integral (imprópria) em (2.4) não convirja. Então, $E(X)$ existirá se, somente se,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$$

é finita.

2.5.2 Variância

Definição 2.6. Seja X uma variável aleatória. A variância de X, denotada por $Var(X)$ ou σ_X^2, é dada por

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2. \tag{2.5}$$

Se X é uma v.a. discreta

$$Var(X) = \sum_{x} (x - \mu_X)^2 p(x), \tag{2.6}$$

e se X é uma v.a. contínua

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx. \tag{2.7}$$

A raiz quadrada da $Var(X)$, σ_X é denominada de desvio-padrão da v.a. X.

O cálculo da variância de uma v.a. X também pode ser simplificado com o seguinte resultado

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \tag{2.8}$$

sendo que $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$.

2.6 Distribuição normal

Dados seguindo uma distribuição normal surgem, por exemplo, das variáveis aleatórias: peso e altura de um determinado indivíduo; o erro de medições; o diâmetro de uma peça fabricada, entre outras.

A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições de probabilidade, conhecida também como distribuição de Gauss ou Gaussiana. É completamente descrita por seus parâmetros, a média e o desvio padrão. O mais importante uso da distribuição Normal é na aproximação de somas de v.a.'s via o teorema central do limite. Uma apresentação deste teorema com demonstração de um caso particular é dado, por exemplo, em Meyer (2010) e em Magalhães (2011).

Definição 2.7. Uma v.a. X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se a função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \tag{2.9}$$

sendo que, $-\infty < \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$. Usamos a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para afirmar que X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.

A Figura 2.7 mostra a forma gráfica de $f(x)$ definida por (2.9).

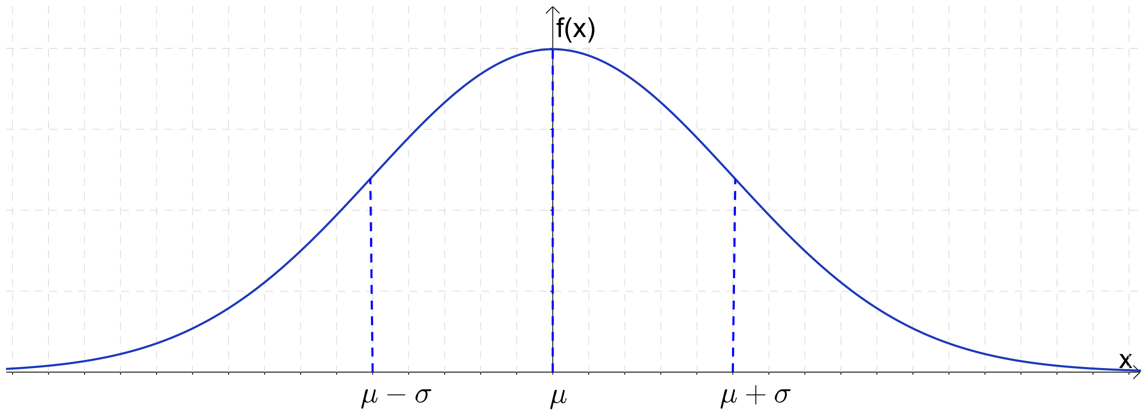

Figura 2.7: Representação gráfica da $f(x)$ da v.a. $X{\sim}N(\mu,\sigma^2)$.

As principais características da fdp, f de uma v.a. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ são:

a) O ponto máximo é o ponto onde a abscissa é μ;

b) Os pontos de inflexão são $f(\mu-\sigma)$ e $f(\mu+\sigma)$;

c) $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$;

d) O gráfico de f é simétrico com relação a μ.

Proposição 2.1. *Seja $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, então, a v.a. padronizada $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.*

Prova:

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) \\ &= P\left(X \leq z\sigma + \mu\right) = F_X(z\sigma+\mu). \end{aligned}$$

Se $\phi(z) = F'_X(z)$, então

$$\phi(z) = f_X(z\sigma+\mu)\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty \leq z \leq +\infty.$$

□

Devemos observar que, $P(Z \leq z) = \Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$. Entretanto, o Teorema Fundamental do Cálculo não pode ser aplicado para calcular esta integral, porque não podemos achar uma função cuja derivada seja igual a $e^{-\frac{z^2}{2}}$. A solução com o uso de um método numérico de integração pode ser empregada, ou o uso de tabelas publicadas na maioria dos livros de estatística. Obviamente, a distribuição normal e outras distribuições de probabilidade importantes são tradadas como função de biblioteca nos softwares de estatística e de matemática, como por exemplo, o R (R Core Team,

2016) e o Maple (de Andrade, 2004). No Capítulo 4, apresentamos uma seção que trata detalhadamente o cálculo de probabilidade usando o Geogebra (Wikipedia, 2017).

Graficamente podemos representar $\Phi(z)$ como na Figura 2.8.

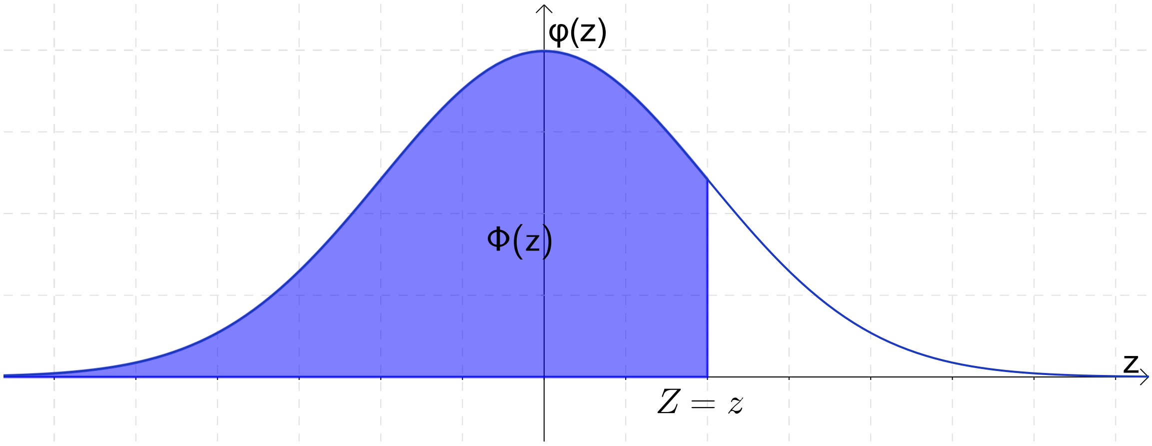

Figura 2.8: $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$ representada pela área sombreada.

A Figura 2.9 mostra o gráfico da fdp da v.a. $Z \sim N(0,1)$ e a $P(0 \leq Z \leq b)$ representada pela área sombreada.

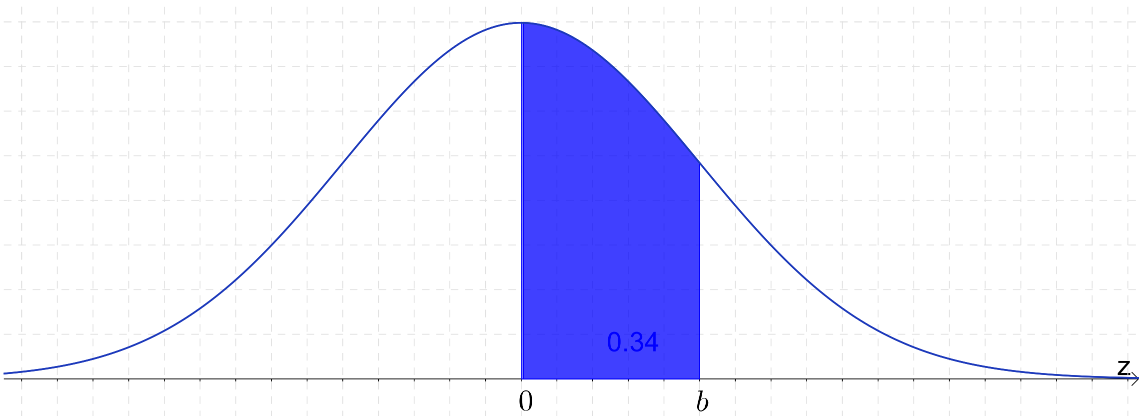

Figura 2.9: $P(0 \leq Z \leq b)$ representada pela área sombreada para b fixado.

Para calcularmos $P\left(a \leq X \leq b\right)$, onde $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ fazemos uso da Proposição 2.1. Logo,

$$P\left(a \leq X \leq b\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

No Exemplo 2.5 temos uma aplicação da distribuição normal padronizada ou reduzida para calcular uma probabilidade sobre uma v.a. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Exemplo 2.5. Suponha-se que X tenha distribução $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ e desejamos determinar $P(X \leq \mu + 2\sigma)$.

Note que,

$$P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(Z \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}) = P(Z \leq 2) = 0.9772.$$

A distribuição Normal ainda está explorada em exemplos e aplicações do Capítulo 3 que trata da distribuição Binomial e no Capítulo 4 de aplicações da metodologia.

3 Distribuição Binomial

3.1 Introdução

A distribuição Binomial surge naturalmente em problemas de contagens. Por exemplo, o número de caras em n lançamentos de uma moeda honesta; o número de peças defeituosas fabricadas durante o dia numa linha de produção; o número de alunos que são favoráveis a uma determinada prática de esportes numa escola; são variáveis que sob determinadas condições podem ser representadas por uma distribuição Binomial.

Sempre que realizarmos repetições independentes de um experimento e estivermos interessados somente em uma dicotomia - defeituoso ou não-defeituoso (perfeito); dureza acima ou abaixo de certo padrão; nível de ruído em um sistema de comunicação acima ou abaixo de um limiar preestabelecido, estaremos virtualmente tratando com um espaço amostral no qual podemos definir uma variável aleatória binomial. Enquanto as condições da experimentação permaneçam suficientemente estáveis, de modo que a probabilidade de algum atributo, digamos A, permaneça constante, poderemos empregar o modelo binomial (Meyer, 2010).

Considere inicialmente o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. Suponha que uma moeda honesta seja lançada três vezes e desejamos obter a face cara voltada para cima e seja X o número de caras. O espaço amostral para esse experimento aleatório pode ser representado por:

$$\Omega = \{ccc, cck, kcc, ckc, kkc, kck, ckk, kkk\} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\},$$

onde $k =$"cara", $c =$"coroa".

A variável aleatória X, atribui a cada resultado $\omega_i \in \Omega$ o número de caras ou coroa encontradas em ω_i, $i = 1, 2, ..., 8$. Neste caso específico X assume os possíveis valores $X = 0, 1, 2, 3$. Logo,

$X = 0$ se, e somente se, ocorrer ccc;

$X = 1$ se, e somente se, ocorrer cck, kcc ou ckc;

$X = 2$ se, e somente se, ocorrer kkc, kck ou ckk;

$X = 3$ se, e somente se, ocorrer kkk.

Então,

$p(0) = P(X = 0) = (0,5)^3$,

$p(1) = P(X = 1) = 3(0,5)(0,5)^2$,

$p(2) = P(X = 2) = 3(0,5)(0,5)^2$,

$p(3) = P(X = 3) = (0,5)^3$.

A Figura 3.1 mostra a distribuição de probabilidade da v.a. X do Exemplo 3.1.

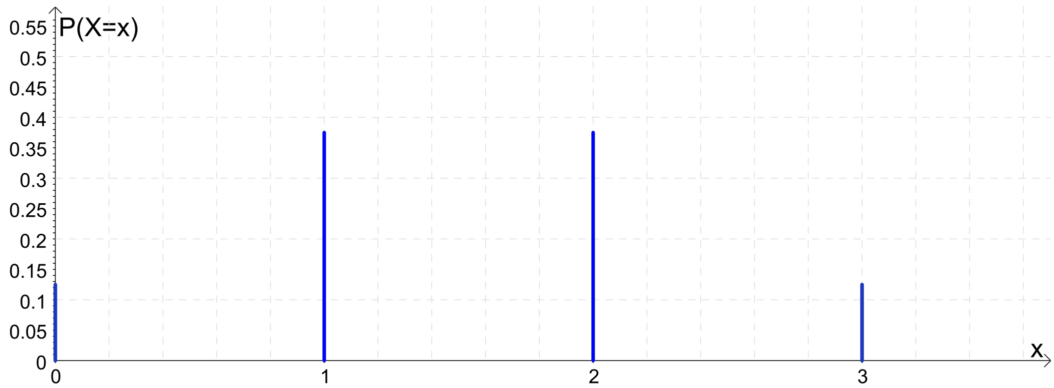

Figura 3.1: Representação gráfica da distribuição de probabilidade do Exemplo 3.1.

A distribuição de probabilidade empregada no Exemplo 3.1 pode ser generalizada de acordo com a seguinte definição.

Definição 3.1. Considerem-se n repetições independentes de um experimento aleatório, e que em cada repetição, $P(A) = p$, consequentemente, $P(\bar{A}) = 1 - p$. Então, X=Número de vezes que o evento A tenha ocorrido é denominada de variável aleatória binomial, com parâmetros n e p.

Empregamos a notação: $X \sim B(n, p)$ para indicar que a v.a. X tem uma distribuição binomial com parâmetros n e p.

Teorema 3.1.1. *Se a variável aleatória $X \sim B(n, p)$, então*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \dots, n, \tag{3.1}$$

em que,

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n - x)!}.$$

Como as probabilidades $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ representam o termo geral da expansão binomial $[p+(1-p)]^n$, a Expressão (3.1) recebe a denominação de distribuição binomial.

Demonstração do Teorema 3.1.1: Considere-se um particular elemento de um espaço amostral satisfazendo à condição $X = x$. Um resultado como esse poderia surgir, por exemplo, se em n repetições do experimento ocorresse A x-vezes nas primeiras repetições, enquanto nas últimas $(n-x)$ repetições ocorresse $\bar{A}$, isto é,

$$\underbrace{AAA...A}_{x}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\bar{A}...\bar{A}}_{n-x}.$$

Como todas as repetições são independentes, a probabilidade desta sequência particular é $p^x(1-p)^{n-x}$, mas há $\binom{n}{x}$ sequências para as quais temos o resultado $X = x$. Note que $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$, representa o número de arranjos de n objetos, sendo x do tipo A e $(n-x)$ do tipo $\bar{A}$. E o resultado (3.1) fica estabelecido. □

A função de distribuição acumulada de uma v.a. $X \sim B(n,p)$ é dada por:

$$P(X \leq x) = F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) = \sum_{x_i \leq x} \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}. \qquad (3.2)$$

Assim, a fd da v.a. $X \sim B(3;0,5)$ do Exemplo 3.1 é:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \text{se } x < 0; \\ &= 0,125, \text{se } 0 \leq x < 1; \\ &= 0,50, \text{se } 1 \geq x < 2; \\ &= 0,875, \text{se } 2 \geq x < 3; \\ &= 1, \text{se } x \geq 3. \end{aligned}$$

A Figura 3.2 exibe a representação gráfica da fd da v.a. $X \sim B(3;0,5)$.

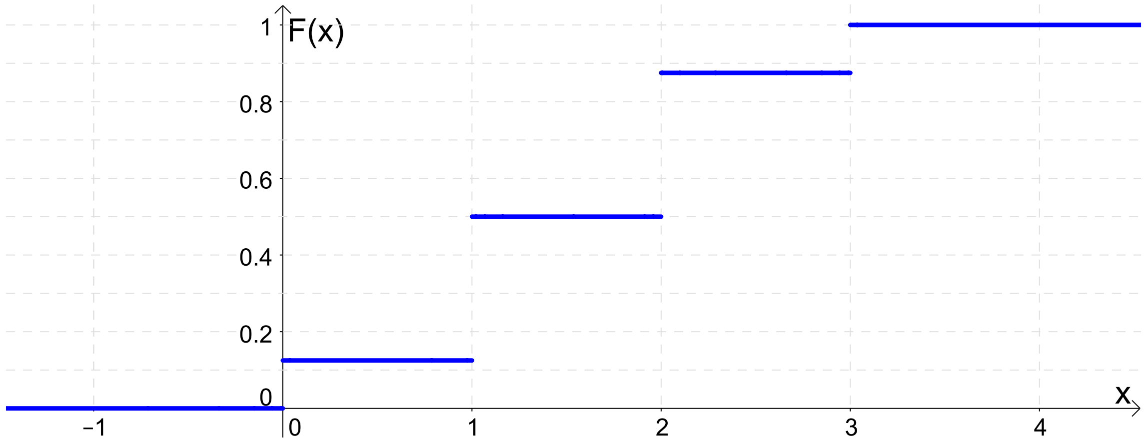

Figura 3.2: Gráfico da distribuição acumulada da v.a. $X \sim B(3; 0,5)$ do Exemplo 3.1.

3.2 Valor esperado e variância da distribuição binomial

Teorema 3.2.1. *(Meyer, 2010) Seja X uma v.a., seguindo uma distribuição binomial com parâmetro n e p. Então,*

$$E(X) = np. \tag{3.3}$$

Demonstração: Como $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, teremos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \end{aligned}$$

uma vez que o termo com $x = 0$ é igual a zero.

Façamos $s = x - 1$ na soma acima. Como x assume valores desde 1 até n, s assume os valores desde zero até $(n-1)$. Substituindo x, em todos os termos, por $(s+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{s=0}^{n-1} n \binom{n-1}{s} p^{s+1} (1-p)^{n-s-1} = \\ &= np \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{n-1-s}. \end{aligned}$$

A soma, na expressão (3.4), é apenas a soma das probabilidades binomiais com n substituído por $(n-1)$, isto é, $[p + (1-p)]^{n-1}$ e, portanto, igual a 1. Isto estabelece o resultado (3.1). $\square$

Teorema 3.2.2. *Seja X uma v.a. seguindo uma distribuição binomial, com parâmetros n e p. Então,*

$$Var(X) = np(1-p). \tag{3.4}$$

Demonstração: Como já sabemos que $E(X) = np$, determinamos $E(X^2)$ da seguinte forma:

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 p(x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} [x(x-1)+x] \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \underbrace{\sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{np},$$

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} + np,$$

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} (1-p)^{n-x} + np.$$

Fazendo $y = x - 2$, temos que

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{y=0}^{n-2} \binom{n-2}{y} p^y (1-p)^{n-2-y}}_{1} + np.$$

Então,

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np.$$

Substituindo $E(X^2)$ e $E(X)$ em $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, *temos*

$$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - [np]^2,$$

Portanto,

$$Var(X) = np(1-p). \ \square$$

Definição 3.2. A raiz quadrada positiva de $Var(X)$ é denominada de desvio padrão de X, e denotada por σ.

3.3 Relação entre a distribuição binomial e de Bernoulli

Definida a distribuição binomial, agora consideremos uma única repetição de um experimento aleatório, podendo ocorrer sucesso ou fracasso. Se p é a probabilidade de sucesso e a probabilidade de fracasso é $1-p$. Sendo X o número de sucessos em uma única tentativa do experimento e, considerando $X = 0$ para fracasso e $X = 1$ para sucesso, temos que

$$P(X = 0) = 1 - p \text{ e } P(X = 1) = p.$$

Se considerarmos $n = 1$ na função (3.1), temos que,

$$P(X = x) = \binom{1}{x} p^x (1-p)^{1-x} = p^x(1-p)^{1-x}, \ x = 0, 1.$$

Portanto, a v.a. X tem distribuição de Bernoulli e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \ x = 0, 1. \tag{3.5}$$

As repetições individuais de um experimento binomial são denominadas de provas de Bernoulli.

Como as provas de Bernoulli são casos particulares da binomial, o valor esperado e a variância de uma variável aleatória de Bernoulli são, respectivamente:

$$E(X) = p \text{ e } Var(X) = p(1-p).$$

Se $X_1 + ... + X_n \sim Bernoulli(p)$, então $X = X_1 + ... + X_n \sim B(n, p)$.

3.4 Relação entre a distribuição binomial e Poisson

A distribuição de Poisson está relacionada a experimentos em que um evento ocorre em algum intervalo de tempo, área, volume, etc., e exerce por si mesma um papel extremamente importante, pois representa um modelo probabilístico adequado para um grande número de fenômenos observáveis. Nesta seção a distribuição de Poisson, representando o número de ocorrência, por unidade de medida, é empregada como uma aproximação da distribuição binomial.

Uma v.a. X tem distribuição de Poisson, com parâmetro $\alpha > 0$, quando sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2 \ldots. \tag{3.6}$$

Note que a expressão 3.6 representa uma distribuição de probabilidade, pois

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!} = e^{-\alpha}e^{\alpha} = 1.$$

Além disso se X tiver distribuição de Poisson com parâmetro α, então $E(X) = \alpha$ e $Var(X) = \alpha$.

As Probabilidades binomiais $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, se $n \to \infty$ e $p \to 0$, quando é considerado $np = \alpha$, aproximam-se da distribuição de Poisson, como mostramos a seguir:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!}p^x(1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Considerando $np = \alpha$, temos que $p = \alpha/n$ e $1 - p = 1 - \alpha/n$.

Substituindo p por sua expressão equivalente em termos de α, obtêm-se

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^x\left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \frac{\alpha^x}{x!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{\alpha}{n}\right]^{n-x} = \\ &= \frac{\alpha^x}{x!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{\alpha}{n}\right]^{n}\left[1-\frac{\alpha}{n}\right]^{-x}. \end{aligned}$$

Para que α permaneça constante em $np = \alpha$; $n \to \infty$ e $p \to 0$, pois de outro modo α não ficaria constante. De forma recíproca, se $n \to \infty$ e $p \to 0$, $np \to \alpha$.

Os termos da forma $(1-1/n)$, $(1-2/n)$,... se aproximam de 1 à medida que n tende para o infinito, consequentemente, $(1-\alpha/n)^{-x}$. Com isso, quando $n \to \infty$, $(1-\alpha/n)^n \to e^{-\alpha}$; esta última é consequência da definição do número e.

Dessa forma é obtida a distribuição de Poisson, ou seja,

$$lim_{n\to\infty}P(X = x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!}.$$

Este importante resultado está resumido no teorema seguinte:

Teorema 3.4.1. *(Meyer, 2010) Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente com parâmetro p (baseado em n repetições de um experimento). Isto é,*

$$P(X = x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.$$

Admita-se que quando $n \to \infty$, fique $np = \alpha$ (constante), equivalentemente, quando $n \to \infty$, $p \to 0$, de modo que $np \to \alpha$. Nessas condições, teremos

$$lim_{n\to\infty}P(X = x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!},$$

que representa a distribuição de Poisson com parâmetro α.

O Teorema 3.4.1 diz, essencialmente, que poderemos ter uma aproximação das probabilidades binomiais com as probabilidades da distribuição de Poisson, toda vez eque n seja grande e p seja pequeno.

3.5 Relação entre a distribuição binomial e geométrica

Seja X uma variável aleatória que representa o número de repetições necessárias para obter a primeira ocorrência de um evento A (sucesso), os possíveis valores de X são 1,2,.... Como $X = x$ se, e somente se, as primeiras $x - 1$ repetições do experimento derem o resultado $\bar{A}$ (não-sucesso), enquanto a x-ésima repetição dê o resultado A, com probabilidades constantes $1 - p$ e p, respectivamente, temos

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \qquad x = 1, 2, \ldots. \tag{3.7}$$

A distribuição de probabilidade da v.a. (3.7) é denominada de distribuição geométrica.

Obviamente, $P(X = x) > 0$. Considere $(1 - p) = q$,

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = p(1 + q + q^2 + ...) = p\left[\frac{1}{1-q}\right] = 1.$$

O valor esperado de X pode ser obtido da seguinte forma:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x-1}^{\infty} \frac{d}{dq}q^x =$$

$$= p\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^x = p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{1}{p}.$$

Um Cálculo análogo mostra que $Var(X) = q/p^2$.

A distribuição geométrica está relacionada com a distribuição binomial, em ambos os casos o interesse está apenas na ocorrência ou não ocorrência de algum evento A (sucesso) pertencente a um espaço amostral; pois como na distribuição binomial, as repetições do experimento, são independentes, e em cada repetição $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1 - p$, permanecem as mesmas.

A distribuição geométrica se difere da distribuição binomial pelo fato que, na primeira, repetimos o experimento até que um evento A ocorra pela primeira vez; enquanto que na binomial, o número de repetições é pré-determinado; na outra é uma variável aleatória.

Na distribuição geométrica, sendo X o número de tentativas necessárias para o aparecimento do primeiro sucesso, se $X = 1$, temos que

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p \Rightarrow P(X = 1) = (1-p)^{1-1}p = p.$$

Na distribuição binomial, sendo X o número de sucessos em n tentativas, se $x = 1$ e $n = 1$, temos que

$$P(X = x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \Rightarrow P(X = 1) = \binom{1}{1}p^1(1-p)^{1-1} = p;$$

ou seja, para $x = 1$ e $n = 1$, temos

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = p$$

Isso mostra que as distribuições geométrica e binomial se igualam quando o número de tentativas e o número de sucesso são iguais a 1. Esse fato também mostra a aproximação entre essas distribuições quando $x \to 1$ e $n \to 1$.

3.6 Relação entre a distribuição binomial e binomial negativa

A distribuição binomial negativa ou distribuição de Pascal indica o número de experimentos necessários até que o evento A ocorra pela r-ésima vez. Se a ideia fosse a necessidade de repetir o experimento até que A apareça pela primeira vez, teríamos uma distribuição geométrica.

Retomando a da distribuição binomial negativa, $X = x$ se, e somente se, A ocorrer na x-ésima repetição e A tiver ocorrido exatamente $(r-1)$ vezes nas $(x-1)$ repetições anteriores. A probabilidade deste evento é $p\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{x-r}$, desde que o que acontece nas primeiras $(x-1)$ repetições é independente daquilo que acontece na x-ésima repetição e, as probabilidades $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1-p$, permaneçam constantes em cada repetição. Portanto,

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots. \tag{3.8}$$

Verifica-se facilmente que, para $x = 1$, a função (3.8) reduz-se à função (3.7).

Na distribuição binomial a variável aleatória X têm parâmetros n e p fixos; onde X representa o número de sucessos em n provas repetidas de Bernoulli, com probabilidade de sucesso igual a $P(X) = p$ e, os valores de X são tais que $0 \leq X \leq n$. Por outro lado, sendo Y uma variável aleatória com distribuição binomial negativa com parâmetros r e p fixos, Yé o número de provas de Bernoulli necessárias para obter r sucessos, com probabilidade $P(Y) = p$, em que $r < Y$ (aqui usamos Y como v.a. binomial negativa para diferenciar de X, v.a. binomial).

Quando a quantidade de provas necessárias para se obter r-sucessos for menor ou igual à quantidade de provas realizadas, a quantidade de r-sucessos dados, deverá ser menor ou igual ao número de sucessos previstos; Quando a quantidade de provas necessárias para se obter r sucessos for maior que a quantidade de provas realizadas, a quantidades de r sucessos deverá ser maior que o número de sucessos previstos.

Dessa forma, valem as seguintes relações:

(a)$P(Y \leq n) = P(X \geq r)$,

(b)$P(Y > n) = P(X < r)$.

Prova:

(a) Se ocorrem r ou mais sucessos nas primeiras n provas repetidas, então serão necessárias n ou menos provas para obter os primeiros r sucessos.
(b) Se ocorrem menos de r sucessos nas primeiras n provas, então será preciso realizar mais do que n provas para obter r sucessos.□

3.7 Relação entre a distribuição binomial e a hipergeométrica

A distribuição hipergeométrica é uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta, onde, em um espaço amostral há N elementos dos quais r são do tipo A e $N - r$ são do tipo $\bar{A}$; escolhe-se um amostra, de um tamanho n, sem reposição, desse espaço amostral, com $n \leq N$; se $X = x$ é o número de elementos do tipo A encontrados, dentre os r elementos, então $n - x$ são do tipo $\bar{A}$. Essa percepção gera a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, min(n, r). \tag{3.9}$$

Quando a quantidade N de elementos de um espaço amostral é muito grande, a distribuição hipergeométrica aproxima-se da binomial, ou seja,

$$\lim_{N \to \infty} P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

em que $p = r/N$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \\
&= \frac{r!}{x!(r-x)!}\frac{(N-r)!}{(n-x)![(N-r)-(n-x)]!}\frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \frac{r!}{x!(r-x)!}\frac{(N-r)!}{(n-x)!(N-r-n+x)!}\frac{n!(N-n)!}{N!}.
\end{aligned}
$$

Formando o termo binomial $\binom{n}{x}$,

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!}\frac{r!}{(r-x)!}\frac{(N-r)!}{(N-r-n+x)}\frac{(N-n)!}{N!} = \\
&= \binom{n}{x}\frac{[r.(r-1)...(r-x+1)][(N-r)(N-r-1)...(N-r-n+x+1)]}{N(N-1)...(N-n+1)}.
\end{aligned}
$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por $1/N$, temos

$$
P(X=x) = \binom{n}{x}\frac{\left[\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{r-1}{N}\right)...\left(\frac{r-x+1}{N}\right)\right]\left[\left(\frac{n-r}{N}\right)\left(\frac{N-r-1}{N}\right)...\left(\frac{N-r-n+x+1}{N}\right)\right]}{\left(\frac{N}{N}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)...\left(\frac{N-n+1}{N}\right)}.
$$

Fazendo $p = r/N$, temos que

$$
P(X=x) = \binom{n}{x}\frac{\left[p\left(p-\frac{1}{N}\right)...\left(p-\frac{x-1}{N}\right)\right]\left[(1-p)\left(1-p-\frac{1}{N}\right)...\left(1-p-\frac{n-x-1}{N}\right)\right]}{\left(1-\frac{1}{N}\right)...\left(1-\frac{n-1}{N}\right)};
$$

determinando $\lim_{N\to\infty} P(X=x)$, temos

$$
\lim_{N\to\infty} P(X=x) = \lim_{N\to\infty}\binom{n}{x}\frac{\left[p\left(p-\frac{1}{N}\right)...\left(p-\frac{x-1}{N}\right)\right]\left[(1-p)\left(1-p-\frac{1}{N}\right)...\left(1-p-\frac{n-x-1}{N}\right)\right]}{\left(1-\frac{1}{N}\right)...\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}.
$$

Portanto,

$$
\lim_{N\to\infty} P(X=x) = \binom{n}{x}\frac{p^x(1-p)^{n-x}}{1^n} = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},
$$

que é a função de probabilidade da distribuição binomial.

Se X tiver uma distribuição hipergeométrica dada pela Função (3.9), então, o valor esperado e a variância de X são, respectivamente,

$$
E(X) = np \text{ e } Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}.
$$

3.8 Relação entre a distribuição binomial e multinomial

A distribuição multinomial é uma generalização da distribuição binomial para mais de dois resultados possíveis.

A distribuição binomial pode ser generalizada considerando-se um experimento aleatório, seu espaço amostral, e a partição desse espaço amostral em k eventos mutuamente excludentes $A_1, ..., A_k$, associados as v.a.'s $X_1, ..., X_k$, respectivamente.

Considere-se n repetições do experimento. Seja $p_i = P(A_i)$ e suponha-se que p_i permaneça constante em todas as repetições. Certamente, teremos $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Então em n repetições, a probabilidade de que o evento X_1 ocorra n_1 vezes, X_2 ocorra n_2 vezes, ...X_k ocorra n_k vezes, onde $n = n_1 + ... + n_k$, é obtida por:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, ..., X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} p_1^{n_1} ... p_k^{n_k}. \tag{3.10}$$

Essa função de probabilidade é chamada de multinomial de $(X_1, X_2, ..., X_k)$.
Para $k = 2$, temos

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} p^{n_1} p^{n_2}.$$

Fazendo $n = n_1 + n_2$, temos que $n_2 = n - n_1$ e,

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n - n_1) = \frac{n!}{n_1(n - n_1)!} p_1^{n_1} p_2^{n - n_1},$$

que é a função de probabilidade da distribuição binomial com parâmetros n e p_1, $p_2 = 1 - p_1$.

3.9 Relação entre a binomial e a normal

As distribuições de probabilidade Binomial e Normal estão entre as mais utilizadas para representar dados de variáveis aleatórias discretas e contínuas, respectivamente.

De acordo com Meyer (2010) o relacionamento da distribuição Binomial com a Normal decorre da aproximação de DeMoivre-Laplace, no sentido de que se X tiver uma distribuição binomial com parâmetros n e p e se

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}, \tag{3.11}$$

então para n grande, Z terá uma distribuição aproximadamente $N(0, 1)$.

A lei dos grandes números relaciona-se essencialmente com a variável aleatória X binomialmente distribuída, porque X foi definida como o número de sucessos em n repetições independentes de um experimento, e precisamos apenas associar "sucesso"com a ocorrência do evento A, afim de reconhecermos essa relação. Assim, pode-se dizer que à medida que o número de repetições de um experimento crescer, a frequência relativa de sucesso, X/n, convergirá para a probabilidade sucesso p.

Como, X/n é "próximo"de p, com n grande e isso não nos diz como essa "proximidade"é alcançada, investigaremos a distribuição de probabilidade de $X \sim B(n, p)$, quando n for grande.

Considere-se, a seguir,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}.$$

Esta probabilidade depende de n, de uma maneira bastante complicada, e não fica evidente o que acontece à expressão acima se n for grande. Para estudarmos essa probabilidade, precisamos empregar a fórmula de Stirling, uma aproximação bem conhecida de $n!$. Temos que, para n grande,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2},$$

no sentido de que

$$lim_{n\to\infty} n!/(\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}) = 1.$$

Tabela 3.1: Aproximação entre $n!$ e $\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}$ (Fórmula de Stirling).

n	n!	$\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}$	Diferença	Diferença/n!
1	1	0,922	0,078	0,08
2	2	1,919	0,081	0,04
5	120	118,019	1,981	0,02
10	$(3,6288)^6$	$(3,5986)10^6$	$(0,0302)10^6$	0,008
100	$(9,3326)^{157}$	$(9,3249)10^{157}$	$(0,0077)10^{157}$	0,0008

Fonte: (Meyer, 2010).

Muito embora a diferença entre $n!$ e sua aproximação cresça quando $n \to \infty$, veja que o erro relativo mostrado na última coluna da Tabela 3.1 diminui quando n aumenta.

Empregando a fórmula de Stirling aos vários fatoriais que aparecem na expressão de $P(X = x)$, pode-se mostrar (depois de algumas transformações), que para n grande,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi np\,(1-p)}} exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]^2\right). \quad (3.12)$$

Finalmente, pode-se mostrar que para n grande,

$$P(X \leq x) = P\left[\frac{X - np}{\sqrt{np\,(1-p)}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}\right] \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-np)/\sqrt{np(1-p)}} e^{-t^2/2} dt. \quad (3.13)$$

Através da aproximação de *DeMoivre-Laplace*, encontramos uma boa aproximação da binomial pela normal.

Se X tiver uma distribuição binomial com parâmetro n e p, e se

$$Z = \frac{X - np}{[np(1-p)]^{1/2}},$$

então, para n grande, Z terá uma distribuição aproximadamente $N(0, 1)$, no sentido de que,

$$lim_{n \to \infty} P(Z \leq z) = \varphi(z).$$

Esta aproximação será válida para valores de $n > 10$, desde que p seja próximo de $1/2$. Se p for próximo de 0 ou 1, n deverá ser um tanto maior, para garantir uma boa aproximação. Este resultado não é apenas de notável interesse teórico, mas também de grande importância prática. Na Tabela 3.2, a precisão da aproximação em (3.12) é apresentada para diversos valores de n, x e p.

Tabela 3.2: Aproximação normal da distribuição binomial para alguns valores de n, x e p.

x	$n = 8$, $p = 0,2$		$n = 8$, $p = 0,5$		$n = 25$, $p = 0,2$	
	Aproximação	Exata	Aproximação	Exata	Aproximação	Exata
0	0,13	0,168	0,005	0,004	0,009	0,004
1	0,306	0,336	0,03	0,031	0,027	0,024
2	0,331	0,294	0,104	0,109	0,065	0,071
3	0,164	0,147	0,22	0,219	0,121	0,136
4	0,037	0,046	0,282	0,273	0,176	0,187
5	0,004	0,009	0,22	0,219	0,199	0,196
6	0+	0,001	0,104	0,109	0,176	0,163
7	0+	0+	0,03	0,031	0,121	0,111
8	0+	0+	0,005	0,004	0,065	0,062
9	0+	0+	0+	0+	0,027	0,029
10	0+	0+	0+	0+	0,009	0,012
11	0+	0+	0+	0+	0,002	0,004

Fonte: (Meyer, 2010)

Exemplo 3.2. Suponha-se que um processo de fabricação produza arruelas, cerca de 5% das quais são defeituosas (por exemplo, muito grande). Se 100 arruelas forem inspecionada, qual será a probabilidade de que menos de quatro arruelas sejam defeituosas? Fazendo-se igual a X o número de arruelas defeituosas encontradas, a Lei dos Grandes Números apenas nos diz que $X/100$ será "próximo"de 0,05; contudo, não nos diz como calcular a probabilidade desejada.

Observamos que

$$E(X) = np = 100(0,05) = 5 \text{ e } V(X) = np(1-p) = 4,75.$$

Daí podemos escrever,

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P\left(\frac{0-5}{\sqrt{4,75}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{4,75}} \leq \frac{3-5}{\sqrt{4,75}}\right) \\ &= \Phi(-0,92) - \Phi(-2,3). \end{aligned}$$

Temos que $\Phi(-0,92) = 0,1788$ e $\Phi(-2,3) = 0,0107$. Portanto,
$P(X \leq 3) = 0,1788 - 0,0107 = 0,1681$.

Ao empregar a aproximação normal à distribuição binomial, estaremos aproximando a distribuição de uma v.a. discreta com a distribuição de uma v.a. contínua. Por isso, algum cuidado deve ser tomado com os pontos extremos dos intervalos considerados. Por exemplo, para uma variável aleatória contínua, $P(X = 3) = 0$, enquanto para uma variável aleatória discreta esta probabilidade pode ser não nula.

As seguintes *correções de continuidade* melhoram a aproximação acima:
a) $P(X = x) \cong P\left(x - \frac{1}{2} \leq X \leq x + \frac{1}{2}\right)$;
b) $P(a \leq X \leq b) \cong P\left(a - \frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2} + b\right)$.
Empregando esta última correção para a avaliação de $P(X \leq 3)$, teremos

$$P(X = x) = P(0 \leq X \leq 3) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq 3 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\cong \Phi(-0,69) - \Phi(-2,53) = 0,239.$$

4 Aplicações

4.1 Introdução

Distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias estão incluídas no conteúdo do Ensino Médio de forma muito discreta. Há dificuldades de interpretações de problemas e estudar as soluções somente de forma algébrica e tradicional poderia tornar este estudo monótono para estes discentes. Um incentivo ao estudo das variáveis aleatórias, em especial a binomial, é aplicá-las para solucionar problemas envolvendo um tema bastante atrativo para os jovens, o Campeonato Brasileiro de Futebol da série A e usar ferramentas tecnológicas no auxílio das soluções.

Na primeira parte deste capítulo as aplicações estão voltadas a problemas do Brasileirão. Na segunda, apresentamos algumas aplicações de v.a.'s usando a calculadora de probabilidade do GeoGebra.

4.2 Campeonato Brasileiro de Futebol

Vinte times participam desse campeonato. Durante o decorrer da temporada, cada time joga duas vezes contra o mesmo adversário (em um sistema de pontos corridos), uma vez em seu estádio e a outra no do seu adversário, em um total de 38 jogos, ao todo são 380 jogos. As equipes recebem três pontos por vitória e um ponto por empate. Não são atribuídos pontos para derrotas. As equipes são classificadas pelo total de pontos acumulados ao final do campeonato e o time com mais pontos é o campeão.

O "Brasileirão", como é conhecido este campeonato, é um experimento muito útil para aplicação dos teoremas e conceitos vistos nos capítulos anteriores. Os dados produzidos podem revelar as características numéricas comum aquelas equipes que conquistaram a mesma posição em anos anteriores. Usaremos dados do Brasileirão 2016 para observar características comuns que servirão como hipóteses aceitas nas aplicações deste capítulo.

4.2.1 Número de partidas vitoriosas pelo campeão

O Palmeiras foi o campeão do Brasileirão 2016, conservando uma característica dos campeões de anos anteriores, venceu a maioria das partidas jogando em casa, 14 dos 19 jogos em casa, que corresponde a 74% desses jogos. O fato de o time jogar em casa influencia muito no jogo, pois a torcida transmite uma energia motivadora aos seu jogadores. Jogando fora de casa, venceu 10 dos 19 jogos, ou 53%. A associação da distribuição binomial de probabilidade a esses dados ajuda a explicar o título de campeão.

Exemplo 4.1. O Palmeiras jogando em casa

Seja X uma v.a. representando o número de vitórias do Palmeiras em n partidas jogando em casa, com probabilidade de vitória constante p. Como foram vencidas 14 das 19 partidas, assumimos que a probabilidade desse time ganhar em casa é $p = 0,74$ e de não ganhar é $(1 - p) = 0,26$. Então, a distribuição de probabilidade associada a v.a. X, pelo Teorema 3.1.1, é binomial com parâmetros $n = 19$ e $p = 0,74$, representada pela Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Distribuição de probabilidade da v.a. $X \sim B(19; 0,74)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	$7,7^{-12}$	$4,1^{-10}$	$1,1^{-8}$	$1,7^{-7}$	$1,9^{-6}$	$1,7^{-5}$	$1,1^{-4}$	$5,8^{-4}$	$2,5^{-3}$	$8,7^{-3}$

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$P(X = x)$	0,025	0,058	0,109	0,167	0,204	0,194	0,138	0,069	0,022	0,003

Essa distribuição de probabilidade está também representada na Figura 4.1.

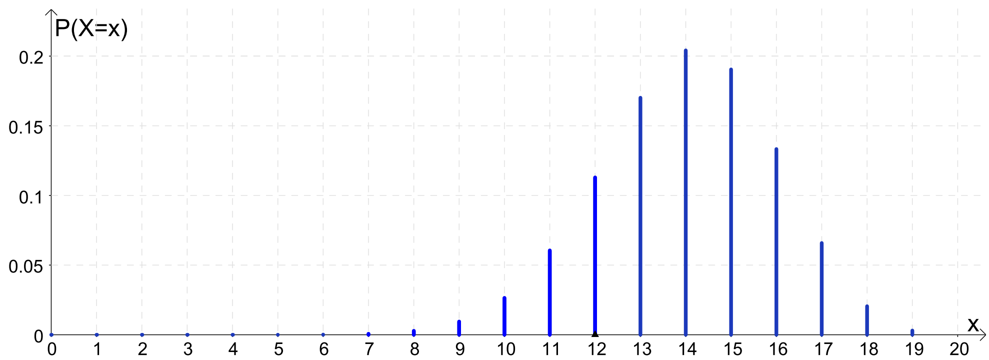

Figura 4.1: Gráfico da função de probabilidade da v.a. $X \sim B(19; 0,74)$.

Pelas hipóteses que fixamos podemos assumir que o time campeão do Brasileirão tem aproximadamente 20,41% de probabilidade de vencer 14 das 19 partidas jogadas em casa. A probabilidade de vencer nenhuma partida é praticamente 0%; ao passo que o número de vitórias vai se afastando de 14, a probabilidade desse número de vitórias diminui.

Agora, suponha que o número de vitórias alcançadas pelo Palmeiras no Brasileirão 2016, sejam suficientes para que uma equipe seja campeã. Se as partidas forem independentes uma da outra, e se uma equipe realmente se tornará campeã quando ganhar ao menos 14 partidas das 19 disputadas em casa. Qual será a probabilidade desse time ser campeão? Vamos utilizar a v.a. binomial, as aproximações Normal e Poisson da binomial.

Desejamos calcular $P(14 \leq X \leq 19)$.

Pela binomial, temos:
$P(14 \leq X \leq 19) = \sum_{x=14}^{19} P(X = x)$. Da Tabela 4.1, temos
$P(14 \leq X \leq 19) = 0,204 + 0,194 + 0,138 + 0,069 + 0,022 + 0,003 = 0,63.$

Pela aproximação normal da distribuição binomial e empregando a correção de continuidade, temos:

$$P(14 \leq X \leq 19) \approx P\left(14 - \frac{1}{2} \leq X \leq 19 + \frac{1}{2}\right) = P(13,5 \leq X \leq 19,5).$$

Temos que a esperança matemática e a variância, são dados, respectivamente, por

$$E(X) = np = 19 \times 0,74 = 14,06 \text{ e } Var(X) = np(1-p) = 19 \times 0,74 \times 0,26 = 3,66.$$

Daí podemos escrever

$$\begin{aligned} P(14 \leq X \leq 19) &\approx P\left(\frac{13,5 - 14,06}{\sqrt{3,66}} \leq \frac{X - 14,06}{\sqrt{3,66}} \leq \frac{19,5 - 14,06}{\sqrt{3,66}}\right) = \\ &= \Phi(2,84) - \Phi(-0,29) = 0,6118. \end{aligned}$$

Logo, pela aproximação normal, da fdp da v.a. $X \sim N(14,06; 3,66)$, $P(14 \leq X \leq 19) \approx 61,18\%$.

A Figura 4.2 mostra o gráfico da função de probabilidade da v.a. $X \sim B(19; 0,74)$.

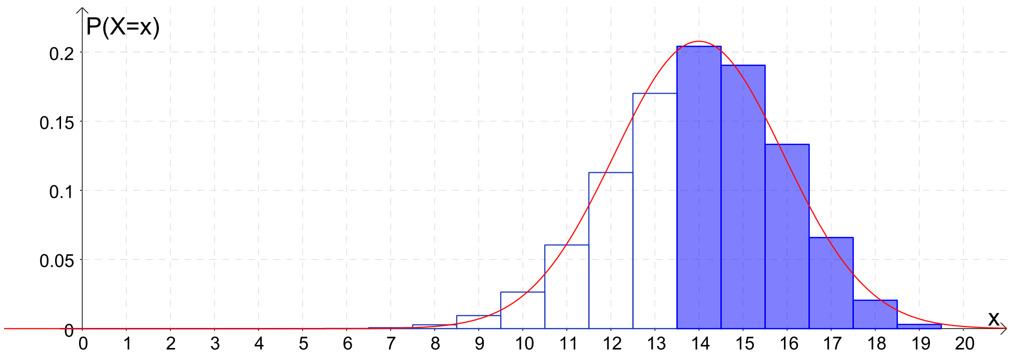

Figura 4.2: Curva normal aproximando o gráfico da v.a. $X \sim B(19; 0, 74)$.

Para encontrar $P(14 \leq X \leq 19)$ a partir de Poisson admitimos que $P(14 \leq X \leq 19) \approx P(X \geq 14)$ para melhorar a aproximação, pois a probabilidade está relacionada à uma equipe ganhar ao menos 14 partidas em casa. Considerando os dados anteriores, $\alpha = 14$ e, sendo X uma v.a. com distribuição de Poisson. Então

$$P(X = x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^{x}}{x!}, \ x = 0, 1, 2, ...,$$

e

$$P(14 \leq X \leq 19) \approx P(X \geq 14) = \sum_{x=14}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^{x}}{x!} \approx 0,54.$$

A Tabela 4.2 mostra a distribuição de Poisson com $\alpha = 14$.

Tabela 4.2: Distribuição de Poisson com $\alpha = 14$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$P(X = x)$	0,08	0,10	0,11	0,11	0,10	0,09	0,07	0,06	0,04	0,03	0,02

x	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	$\cdots$
$P(X = x)$	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Uma particularidade desse exemplo é que considerando uma única partida, ou seja, $n = 1$, o Palmeiras poderia ganhar ou não ganhar, logo a quantidade X de vitória seria 0 ou 1($X = 0$ ou $X = 1$), que resulta na distribuição de Bernoulli e, sua função de probabilidade é dada por:

$P(X = 0) = 0,74^0 \times 0,26 = 0,26$ e

$P(X = 1) = 0,74 \times 0,26^0 = 0,74.$

Essa distribuição confirma que a probabilidade de não ganhar ou ganhar em uma partida, respectivamente, é 26% ou 74% como esperado.

Exemplo 4.2. O Palmeiras jogando fora de casa

Seja X uma v.a. representando o número de vitórias do Palmeiras em n partidas jogando fora de casa, com probabilidade de vitória constante p. Como foram vencidas 10 das 19 partidas, assumimos que a probabilidade desse time ganhar fora de casa é $p = 0,53$ e de não ganhar é $(1 - p) = 0,47$. Então, a distribuição de probabilidade associada a v.a. X, pelo Teorma 3.1.1, é binomial com parâmetros $n = 19$ e $p = 0,53$, representada na Tabela 4.3.

Por analogia aos cálculos do Exemplo 4.1, será mostrado apenas o gráfico dessa distribuição, como mostra a Figura 4.3.

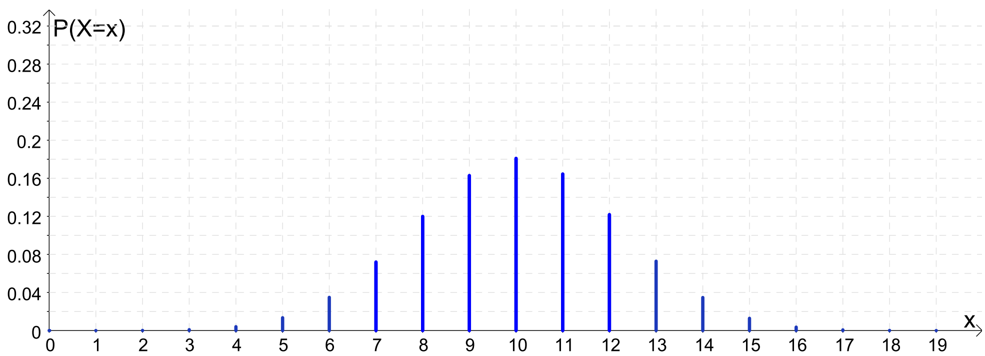

Figura 4.3: Gráfico da função de probabilidade da v.a. $X \sim B(19; 0,53)$.

Comparando os gráficos das Figuras 4.1 e 4.3, podemos perceber que o fator "casa" realmente influencia no resultado das partidas, como citado anteriormente. Da Figura 4.3, podemos assumir que um time campeão do Brasileirão tem maior probabilidade de ganhar 10 das 19 partidas fora de casa, aproximadamente 18,09%; ao passo que a quantidade de jogos vencidos fora de casa for se afastando de 10, a probabilidade diminui.

Da mesma forma que caracterizamos um primeiro colocado, podemos caracterizar um último colocado, um que permaneça na série A ou que caia para a série B, entre outros casos.

Conservadas as características desse time campeão em 2016, era de se esperar que ele realmente ganhasse 14 partidas em casa. O valor esperado do número de vitórias da v.a. X em $n = 19$ partidas em casa, considerando a probabilidade $p = 0,74$ constante é:

$E(X) = np = 19 \times 0,74 = 14,06.$

A variância ($Var(X)$) do número de vitórias em casa é:

$Var(X) = np(1-p) = 19 \times 0,74 \times 0,26 = 3,66.$

A variância ($Var(Y)$) do número de vitórias fora de casa é:

$Var(Y) = np(1-p) = 19 \times 0,53 \times 0,47 = 4,73.$

Em relação à quantidade de vitórias do Palmeiras dentro e fora de casa, podemos concluir, através da variância, que houveram mais regularidades dentro de casa. Isso pode ser verificado quanto $Var(X) < Var(Y)$.

Exemplo 4.3. Gols no Brasileirão

No Brasileirão 2016 houve 912 gols em 379 jogos, pois em função da tragédia com o time da Chapecoense o campeonato desse ano teve o número de jogos reduzido em 1, o que corresponde a 2,41 gols por jogo. Desejamos determinar a probabilidade de ocorrência de 1 gol em uma partida e esboçar o gráfico da distribuição de probabilidade.

Seja X uma v.a. com distribuição de Poisson com média $\alpha = 2,41$ representando o número de gols em uma partida. Então

$$P(X = x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, ...$$

Logo,

$$P(X = 1) = e^{-2,41}2,41\text{=0,2165 ou 21,65\%.}$$

A distribuição de probabilidade está representada na 4.4.

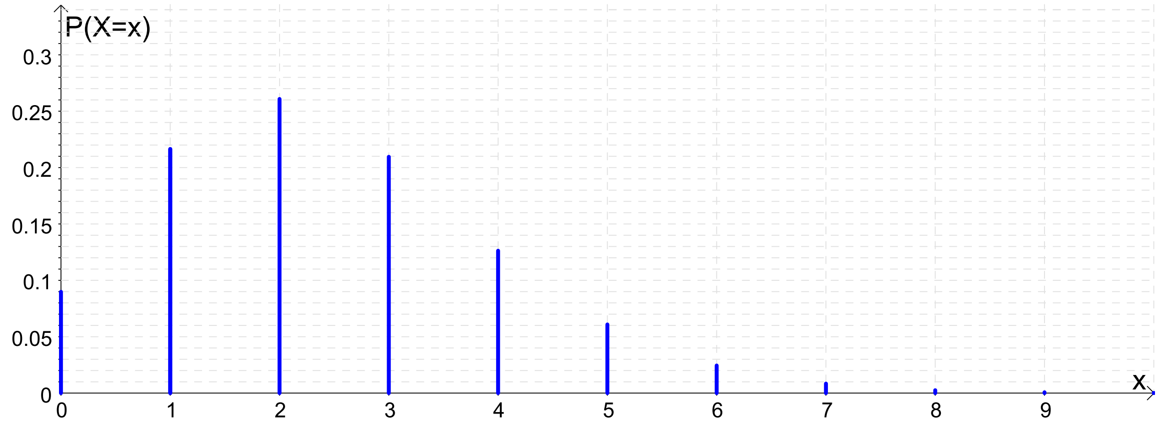

Figura 4.4: Distribuição de Poisson com média $\alpha = 2,41$.

4.3 Aplicações utilizando a calculadora de probabilidade do GeoGebra

O GeoGebra é um software matemático, que reúne um sistema de geometria dinâmica, álgebra e cálculo, seu download é gratuito; ele foi desenvolvido para educação matemática nas escolas. Aqui, usaremos um importante recurso do GeoGebra, a calculadora de probabilidade como ferramenta tecnológica para auxiliar na solução dos problemas. As Figuras 4.5 e 4.6, respectivamente, mostram a janela inicial do GeoGebra e a calculadora de probabilidade.

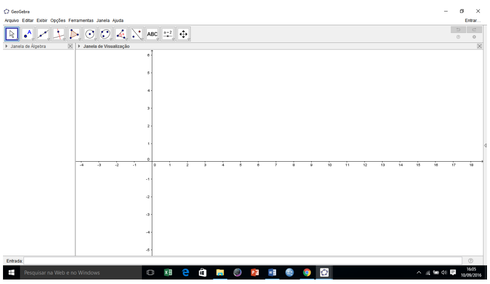

Figura 4.5: Tela inicial do GeoGebra.

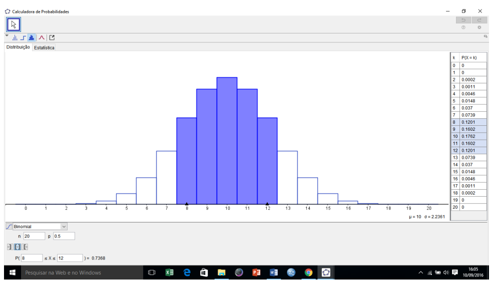

Figura 4.6: Calculadora de probabilidade do GeoGebra.

A calculadora de probabilidade está localizada na barra de menu do GeoGebra, para acessá-la clique em exibir, em seguida, calculadora de probabilidade, como na Figura 4.7. Este procedimento nos leva à Figura 4.6 que é a calculadora de probabilidade do GeoGebra.

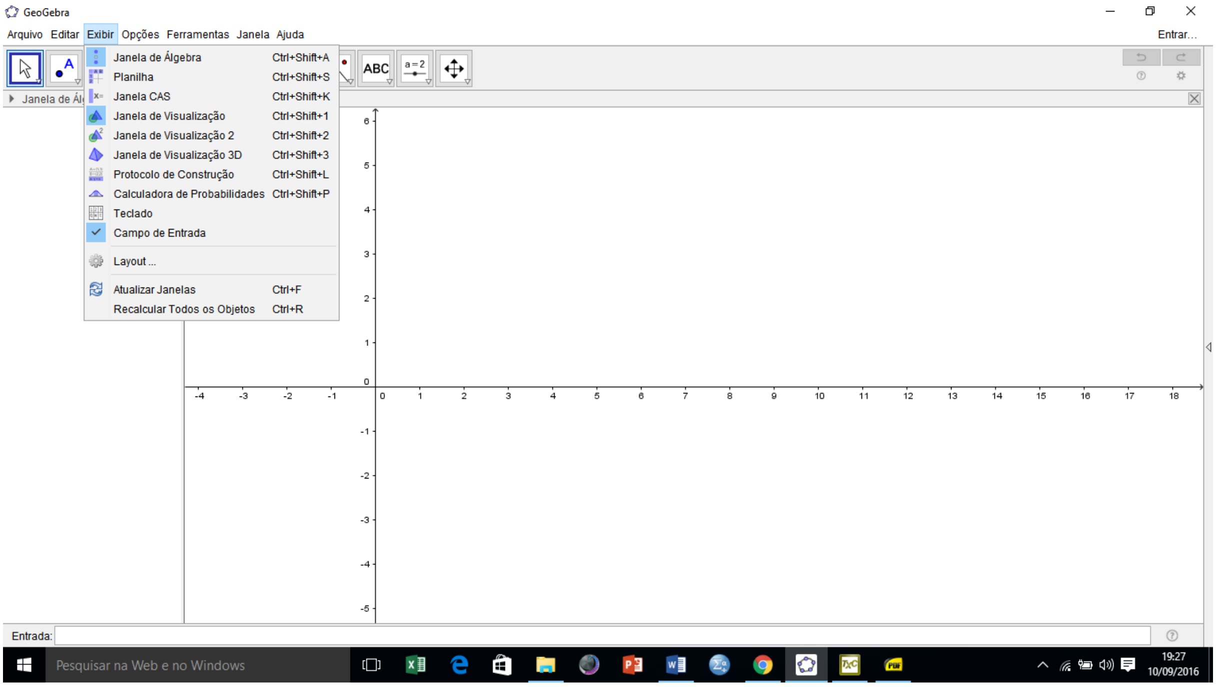

Figura 4.7: Localização da calculadora de probabilidade no GeoGeabra.

Antes de usar a calculadora de probabilidade, é importante conhecer suas ferramentas. Para visualizar os elementos, serão aplicados como modelo, os dados de uma v.a. X distribuída binominalmente, em 20 tentativas com probabilidade 0,5; ou seja, $X \sim B(20; 0,5)$. A Figura 4.8 ilustra a janela esperada, com alguns elementos destacados e numerados:

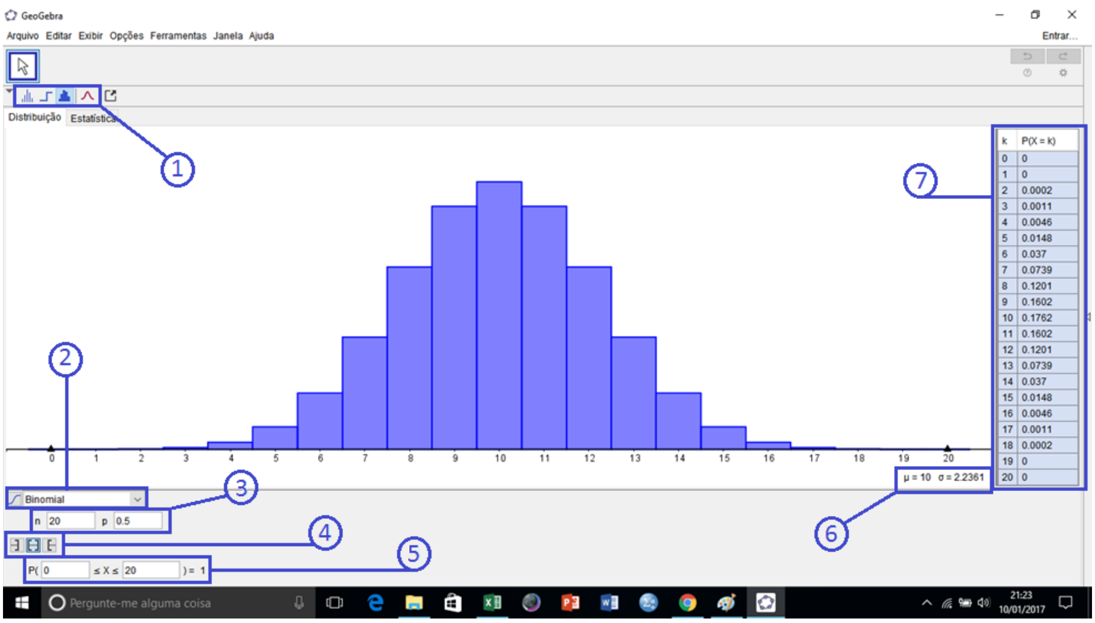

Figura 4.8: Calculadora de probabilidade mostrando a função de probabilidade da v.a. $X \sim B(20; 0,5)$.

1. alteram o tipo do gráfico, da esquerda para direita, temos respectivamente: gráfico linear, diagrama em degraus, diagrama de barras e curva normal sobreposta ao diagrama;
2. aba de opções de distribuição de probabilidade: Binomial, Poisson, Pascal, Hipergeométrica, entre outras;
3. campo para inclusão de parâmetros que variam com o tipo de distribuição. No caso da Figura 4.8, $n = 20$ e $p = 0.5$, pois $X \sim B(20; 0, 5)$;
4. opção do tipo de intervalo assumido pela v.a.(limitado à direita, limitado à esquerda e direita e, limitado à esquerda);
5. campos para inclusão dos limites dos intervalos ou valores, a serem assumidos pela v.a.; a igualdade representa a probabilidade do intervalo, ou do valor, da v.a. Na Figura 4.8 o intervalo da v.a. X é $0 \leq X \leq 20$ e a probabilidade é 1;
6. μ e σ representam, respectivamente, a média (ou valor esperado $E(X)$) e o desvio padrão $\left(\sigma = \sqrt{Var(X)}\right)$ da v.a. X e
7. tabela da distribuição de probabilidade da v.a. X.

Apresentamos nos exemplos seguintes soluções algébricas e ilustrações usando a calculadora de probabilidade do GeoGebra. É importante notar que algumas soluções podem ser exclusivamente algébricas e, que o conhecimento da teoria é pré-requesito para inserção dos dados na calculadora de probabilidade.

Exemplo 4.4. Suponha que alunos de matemática de uma escola sejam classificados aprovados em (A) ou não-aprovados $(\bar{A})$. Admita que três desses alunos, no fim do semestre, sejam escolhidos ao acaso. Suponhamos que seja 0,2 a probabilidade de um aluno ser reprovado e 0,8 a de ser aprovado. Admitamos que essas probabilidades sejam as mesmas para cada aluno, ao menos enquanto durar o nosso estudo. Finalmente admita-se que a aprovações de qualquer aluno em particular sejam independentes.

Desejamos estudar a v.a. X, a qual atribui a cada resultado $\omega \in \Omega$ o número de alunos reprovados associados a Ω. Consequentemente o conjunto dos valores possíveis de X é 0, 1, 2, 3, então

$$P(X = x) = \binom{3}{x} 0, 2^x (1 - 0, 2)^{3-x},\ x = 0, 1, 2, 3.$$

Na calculadora de probabilidade, como mostra a Figura 4.9, temos o uso da distribuição binomial. Insere-se os parâmetros $n = 3$ e $p = 0.2$ no campo 3; no 4, devemos optar pelo intervalo fechado à esquerda e a direita e no campo 5 insere-se os limites do intervalo [0, 3] e, obtemos, na tabela de distribuição de probabilidade, o resultado esperado.

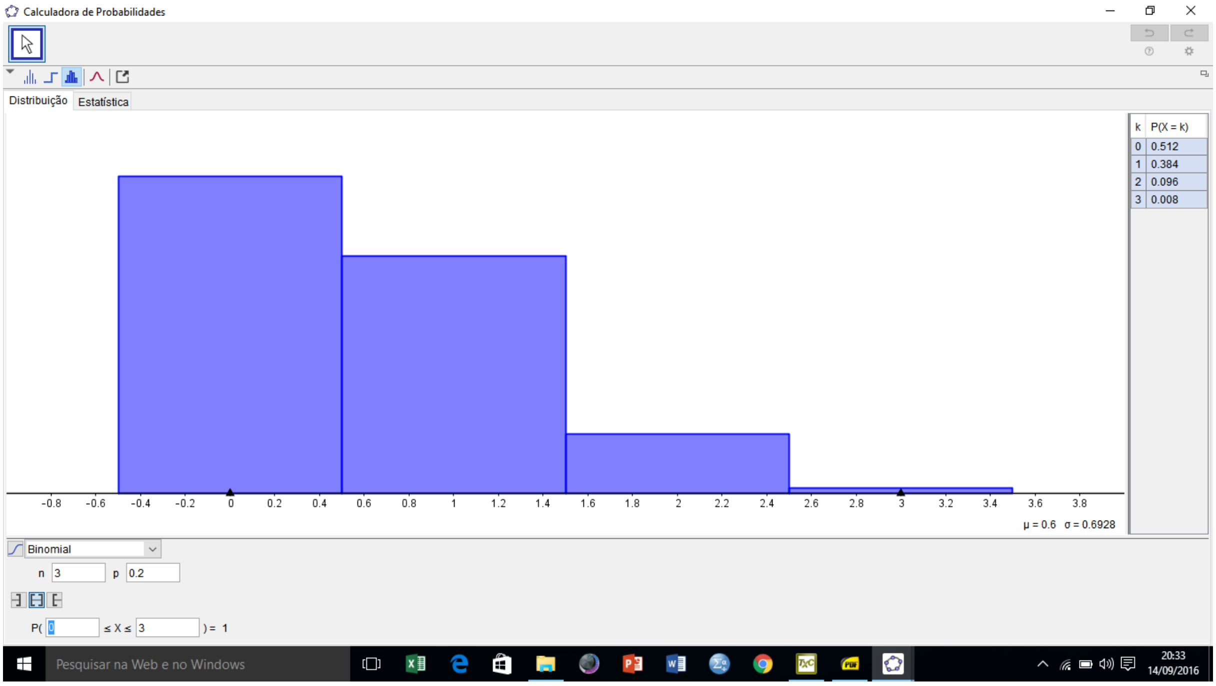

Figura 4.9: V.a. X distribuída binominalmente com parâmetros $(3; 0, 2)$.

Além disso, podemos exportar o gráfico de $P(X = x)$ para a janela inicial do GeoGebra.

Exemplo 4.5. Sabe-se que uma determinada moeda apresenta cara três vezes mais frequentemente que coroa. Essa moeda é jogada três vezes. Seja X o número de caras que aparece. Estabeleça a distribuição de probabilidade de X e também a fd (função de distribuição acumulada). Faça o esboço do gráfico de ambas.

Uma solução algébrica:

Seja k o número de caras e c o número de coroas, temos

$$p(k) + p(c) = 1 \Rightarrow p(c) = 1 - p(k).$$

Como a probabilidade de cara(k) é três vezes mais frequente que coroa(c), temos

$$p(k) = 3p(c) \Rightarrow p(k) = 3\left[1 - p(k)\right].$$

Logo,

$$p(k) = \tfrac{3}{4} \text{ e } p(c) = \tfrac{1}{4}.$$

Assim, se X é igual ao número de caras que aparece, temos que $X \sim B(3; 0,75)$.

$P(X = 0) = p(c)p(c)p(c) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \cong 0,0156;$

$P(X = 1) = p(c)p(c)p(k) + p(c)p(k)p(c) + p(k)p(c)p(c) = 3p(c)^2 p(k) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64} \cong 0,1406;$

$P(X = 2) = p(c)p(k)p(k) + p(k)p(c)p(k) + p(k)p(k)p(c) = 3p(c)p(k)^2 = 3\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} \cong 0,4219;$

$P(X = 3) = p(k)p(k)p(k) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \cong 0,4219.$

Portanto,

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{64} & \text{se } x = 0; \\ \frac{9}{64} & \text{se } x = 1; \\ \frac{27}{64} & \text{se } x = 2,\ 3. \end{cases}$$

O gráfico é mostrado na Figura 4.10.

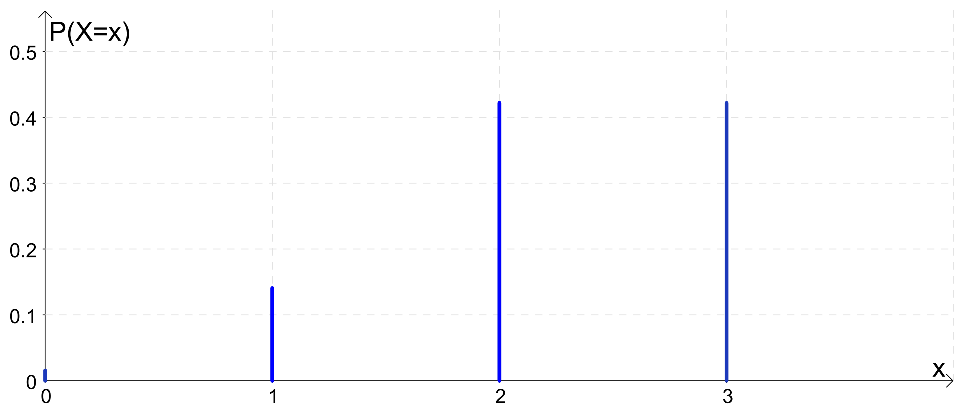

Figura 4.10: Gráfico da função de distribuição de probabilidade da v.a. $X \sim B(3; 0,75)$.

Para fd,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ \frac{1}{64} \cong 0.0156, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ \frac{5}{32} \cong 0.1563, & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ \frac{37}{64} \cong 0.5781, & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

E seu gráfico é mostrado na Figura 4.11.

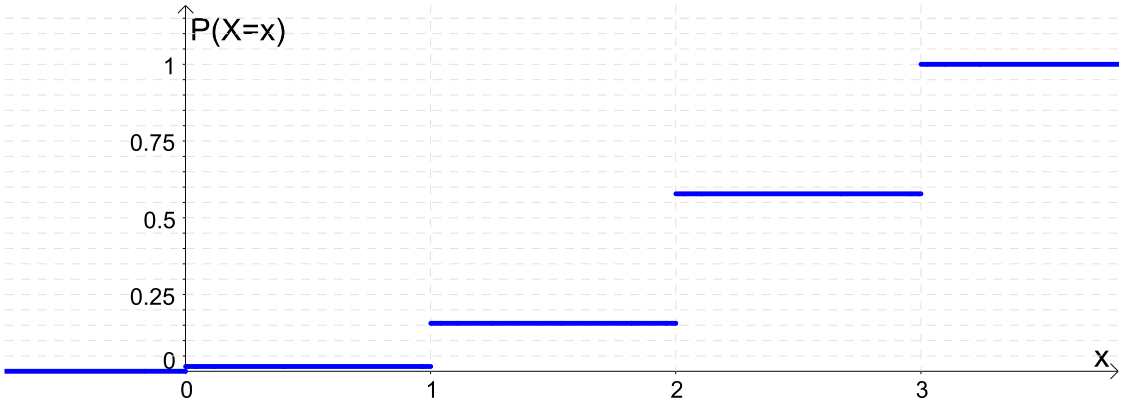

Figura 4.11: Gráfico da fd da v.a. $X \sim B(3; 0,75)$.

Uma solução com o auxílio da calculadora de probabilidade do GeoGebra:

Tendo em vista que a distribuição é binomial, com parâmetros $n = 3$ e $p = 3/4 = 0,75$, pois a v.a. X é o número de caras que aparece, inserindo-se esses dados na calculadora de probabilidade, como na Aplicação 4.4, o resultado é a tela da Figura 4.12.

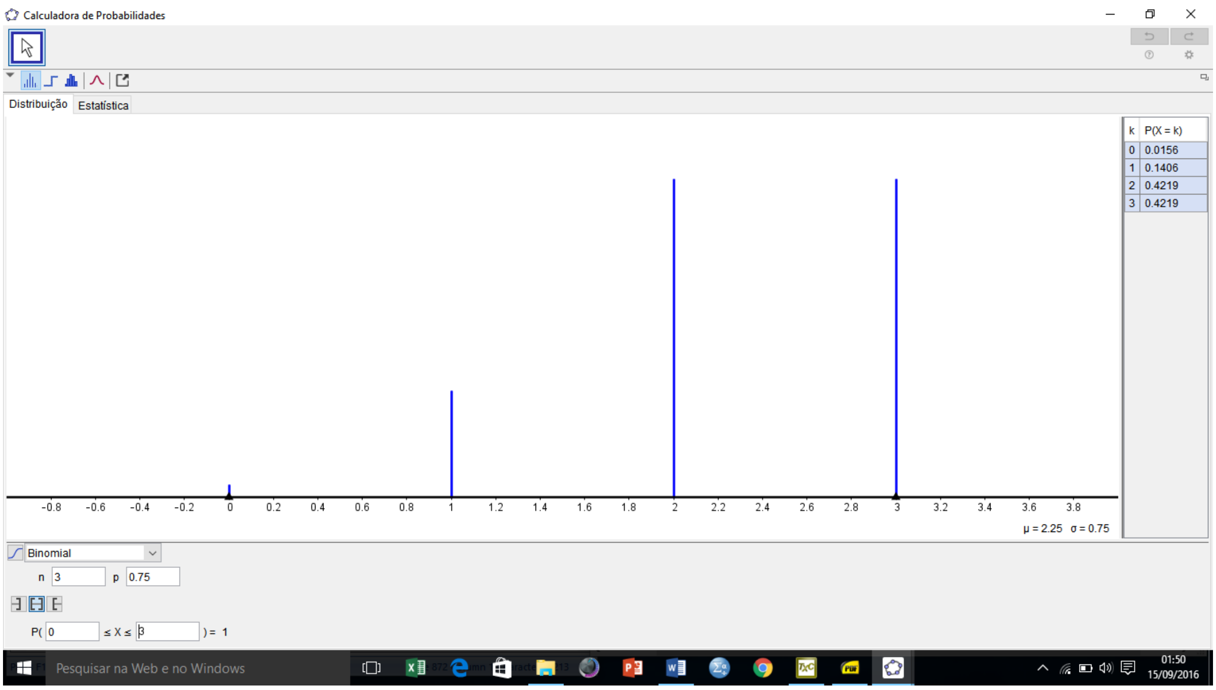

Figura 4.12: Gráfico da distribuição de probabilidade da v.a. $X \sim B(3; 0,75)$.

Observa-se que na tabela de distribuição de probabilidade da Figura 4.12, os resultados para cada valor da v.a. X são iguais aos da solução algébrica.

Para a fd, mostraremos um gráfico para cada intervalo acumulado e o que teremos é uma sequência de gráficos-1, 2, 3 e 4-representando, respectivamente, as probabilidades de $P(0 \leq X < 1)$, $P(1 \leq X < 2)$, $P(2 \leq X < 3)$ e $P(X \geq 3)$.

Para fazer uma analogia aos resultados obtidos na solução algébrica, verificamos a igualdade nos valores acumulados de X, na Figura 4.11, localizado como no Campo 5 referente à Figura 4.8; assim, temos:

$P(0 \leq X < 1) = 0.0156$ (gráfico 1),

$P(1 \leq X < 2) = 0.1563$ (gráfico 2),

$P(2 \leq X < 3) = 0.5781$ (gráfico 3) e

$P(X \geq 3) = 1$ (gráfico 4).

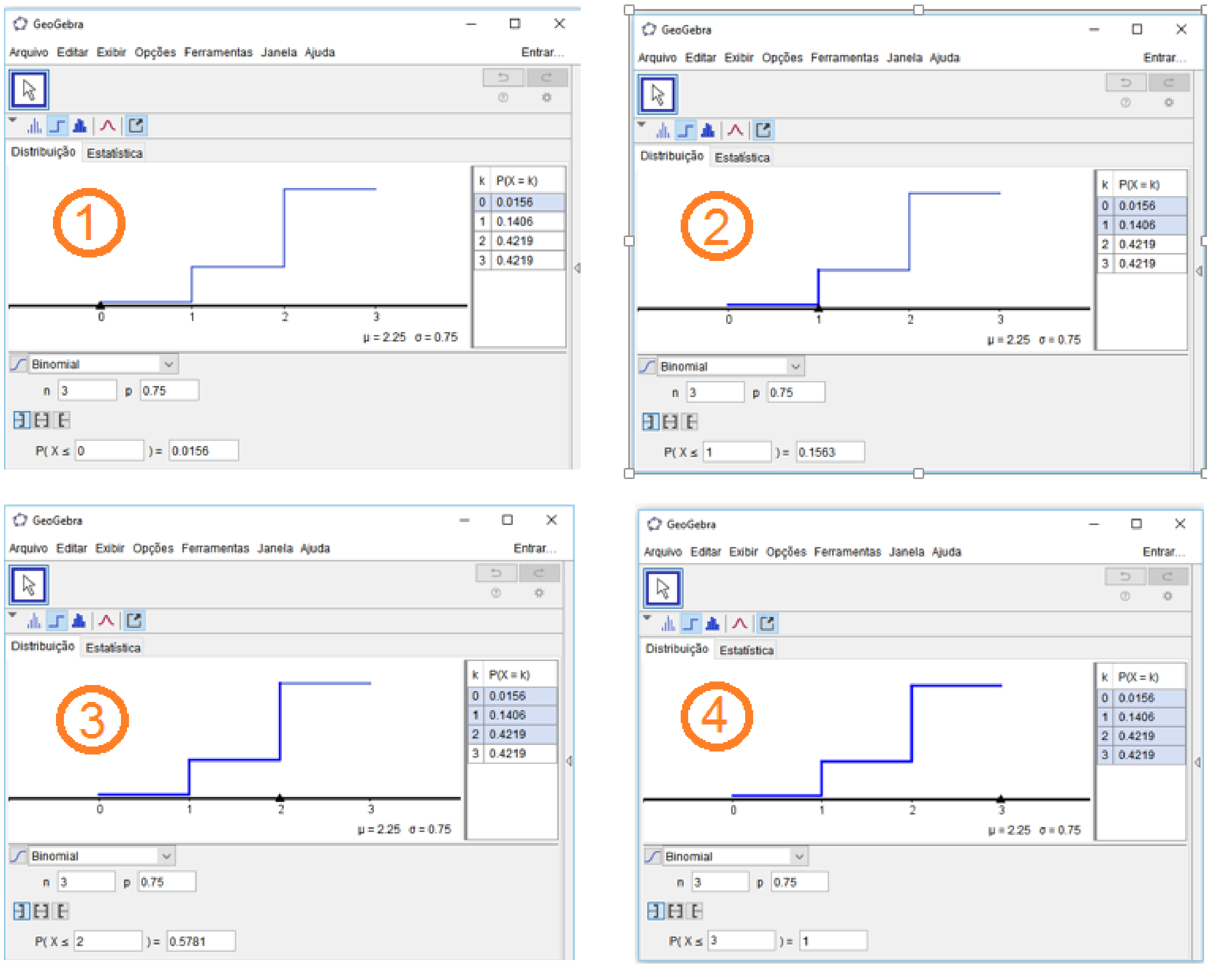

Figura 4.13: Representação gráfica da função de distribuição acumulada de $X \sim B(3; 0, 75)$.

Verifica-se, na Figura 4.13, que as tabelas de probabilidade de cada gráfico mostram, através de uma seleção, os intervalos acumulados bem definidos.

Para mostrar que $P(X < 0) = 0$, insere-se um valor menor que zero, no campo indicado para intervalos e o resultado é a Figura 4.14, concluindo assim, a solução.

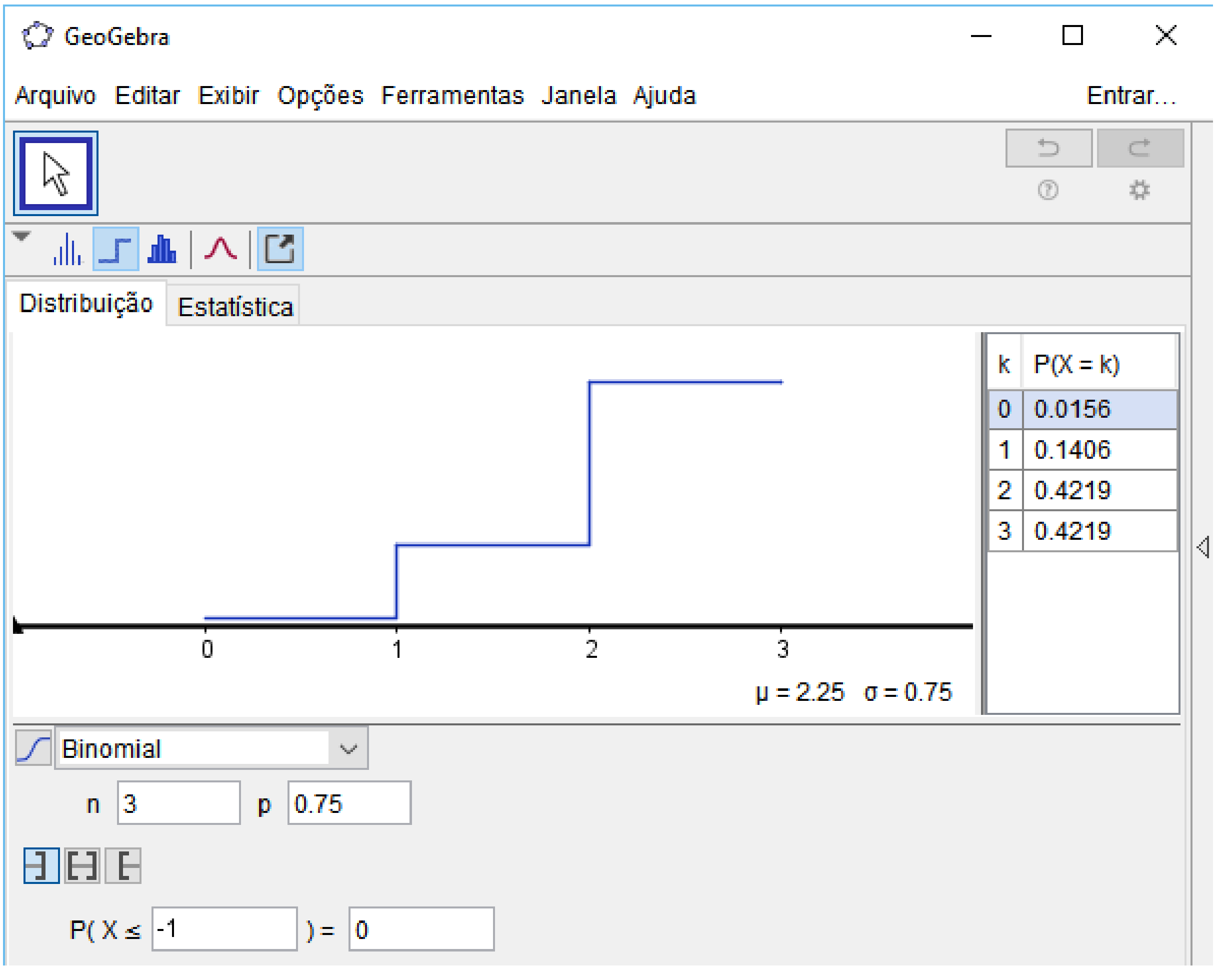

Figura 4.14: Probabilidade de X para valores menores que zero na Aplicação 4.5.

Exemplo 4.6. Em uma caixa há 40 bolas brancas e 20 bolas pretas. Retira-se uma bola dessa caixa. Determinar $E(X)$, $Var(X)$ e a probabilidade da bola retirada ser preta.

Uma solução algébrica.

Como temos somente uma tentativa de retirar uma bola branca ou preta, temos uma prova de Bernoulli.

Seja X o número de bolas pretas, temos

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x},$$

então

$$X = \begin{cases} 0 \rightarrow (1-p) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}; \\ 1 \rightarrow p = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Portanto,

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{1-1} = \frac{1}{3}.$$

Como $X \sim B(1; 0,33)$, $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$, temos,

$$E(X) = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ e } Var(X) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} = 0,22.$$

Portanto a probabilidade de ser tirada uma bola preta é, aproximadamente, 33%, seu valor esperado é 0,33 e a variância é 0,22.

Uma solução com o auxílio da calculadora de probabilidade do GeoGebra.

Verificando que a questão se trata de uma prova de Bernoulli; opta-se, na aba de opções de distribuição de probabilidade, pela distribuição binomial; insere-se os parâmetros $n = 1$ e $p = 1/3 = 0,333...$ no campo para inclusão de parâmetros; opta-se pelo intervalo limitado à esquerda na opção do tipo de intervalo assumido pela v.a., no campo para inclusão dos limites dos intervalos ou valores, a serem assumidos pela v.a., insere-se o valor de x, 1. O resultado está em destaque na Figura 4.15.

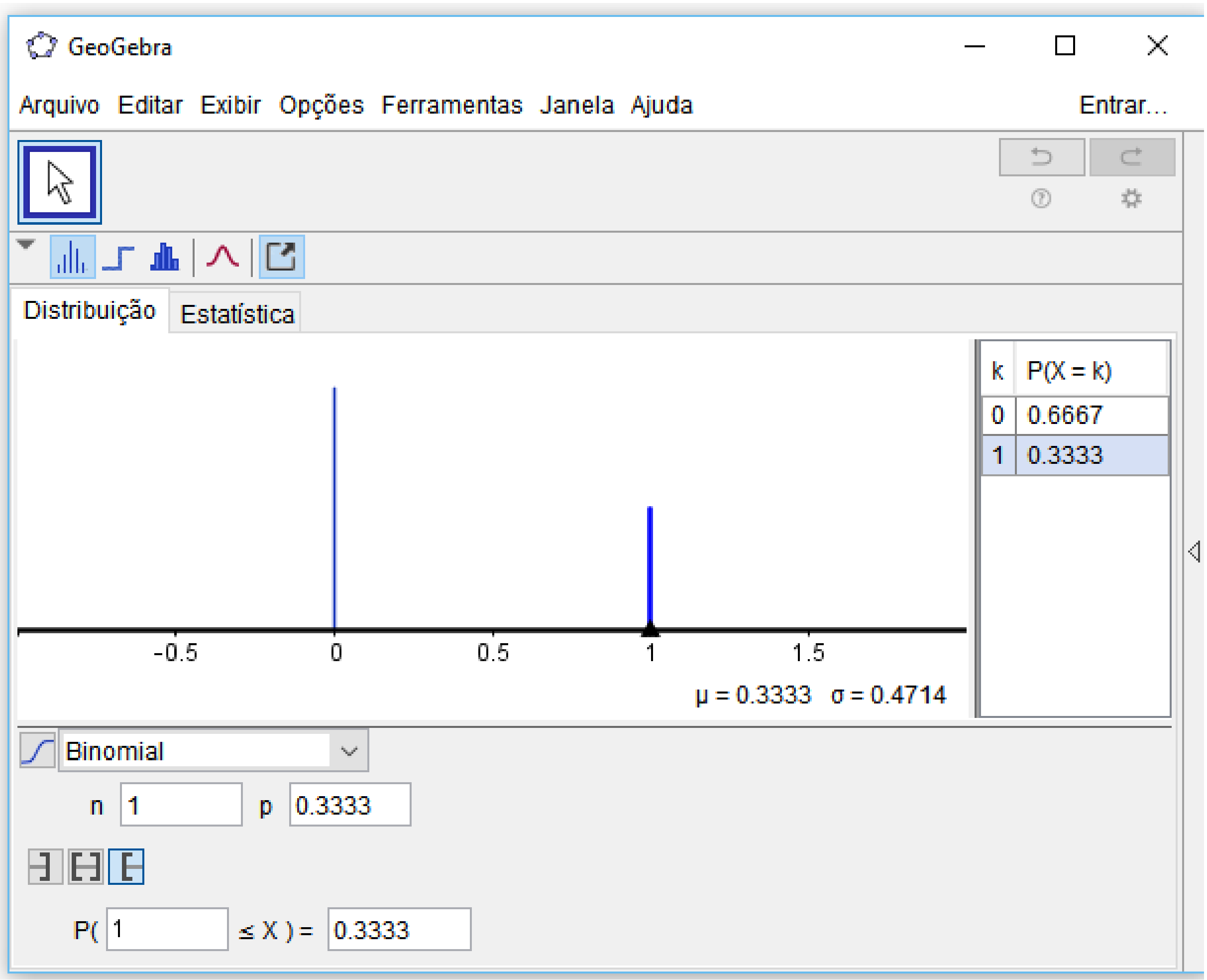

Figura 4.15: Distribuição de Bernoulli.

Portanto, pela Figura 4.15,

• a probabilidade de uma bola preta ser retirada é $P(X = 1) = 0,3333$;

• o Valor esperado $E(X) = \mu = 0,3333$ e,

• a variância $Var(X) = \sigma^2 = (0.4714)^2 = 0,2222$

Confirmando, assim, os resultados da solução algébrica.

Exemplo 4.7. (Morettin, 2010) A probabilidade de um lâmpada se queimar ao ser ligada é 1/100. Numa instalação com 100 lâmpadas, qual a probabilidade de 2 lâmpadas se queimarem ao serem ligadas?

Uma solução algébrica

Seja X o número de lâmpadas queimadas, com probabilidade $1/100 = 0,01$, se as lampadas podem estar perfeitas ou queimadas, então $X \sim B(100; 0,01)$. Logo,

$$P(X = 2) = \binom{100}{2}(0,01)^2(0,99)^{98} \cong 0,1849.$$

Fazendo, $\lambda = np = 100 \times 0,01 = 1$ e, considerando a distribuição de Poisson, temos

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1}1^2}{2!} \cong 0,1839;$$

que é uma boa aproximação da binomial.

Uma solução com o auxílio da calculadora de probabilidade do GeoGebra.

Como distribuição binomial:

Na calculadora de probabilidade do GeoGebra, opta-se por binomial na aba de opção de distribuição de probabilidade; inseri-se os parâmetros $n = 100$ e $p = 0,01$ no campo para inclusão de parâmetros; opta-se pelo intervalo limitado à esquerda e a direita e insere-se o 2, pois se $2 \leq X \leq 2$, então $X = 2$, nos dois campos para inclusão dos limites dos intervalos ou valores. O resultado pode ser visto na Figura 4.16.

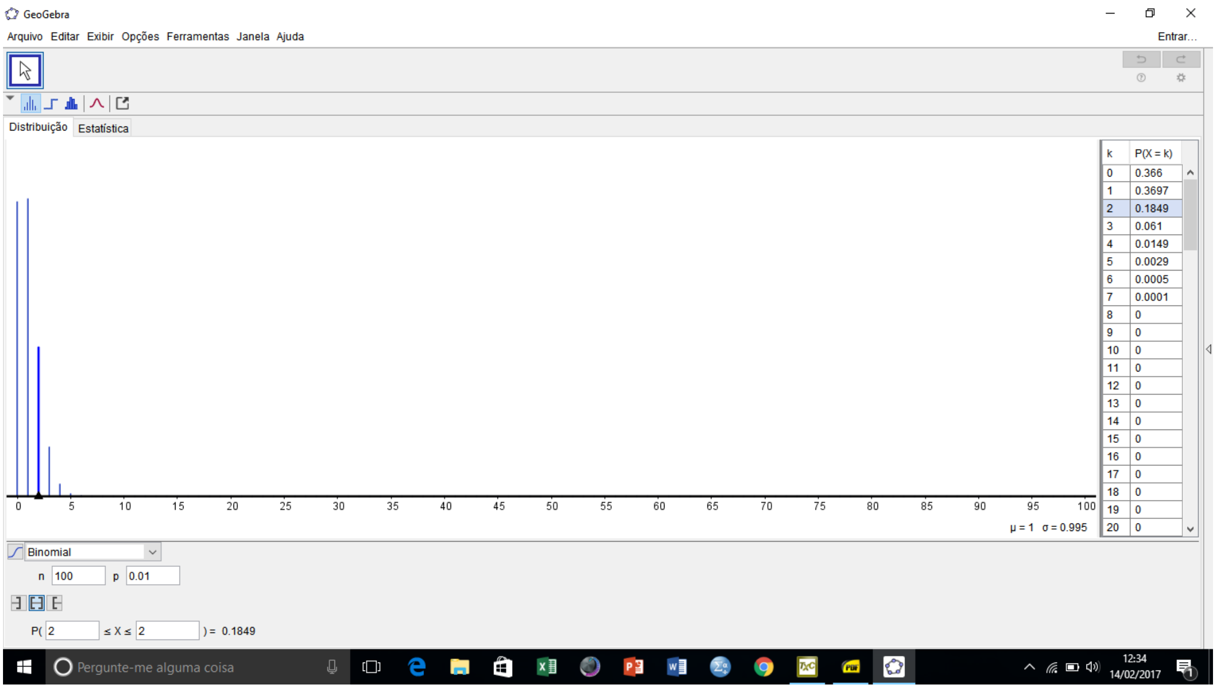

Figura 4.16: Distribuição de probabilidade da v.a. $X \sim B(100; 0,01)$.

Verifica-se que o resultado é igual ao da solução algébrica, P(X=2)=0,1849. Além disso, visualizar-se a probabilidade de outros valores para X, o valor esperado $E(X) = \mu = 1$, a variância $Var(E) = \sigma^2 = 1$ e a representação gráfica.

Como distribuição de Poisson:

Lembrando que,

$$P(X = x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!},$$

e considerando a igualdade $\alpha = \mu = 1$, pois $\mu = np = 100 \times 0,01 = 1$. Para chegar à solução, basta optar pela distribuição de Poisson, inserir 1 no campo referente a μ e inserir 2 nos campos para inclusão dos limites dos intervalos, como na solução anterior. A Figura 4.17 mostra a solução desejada, $P(X = 2) = 0,1839$.

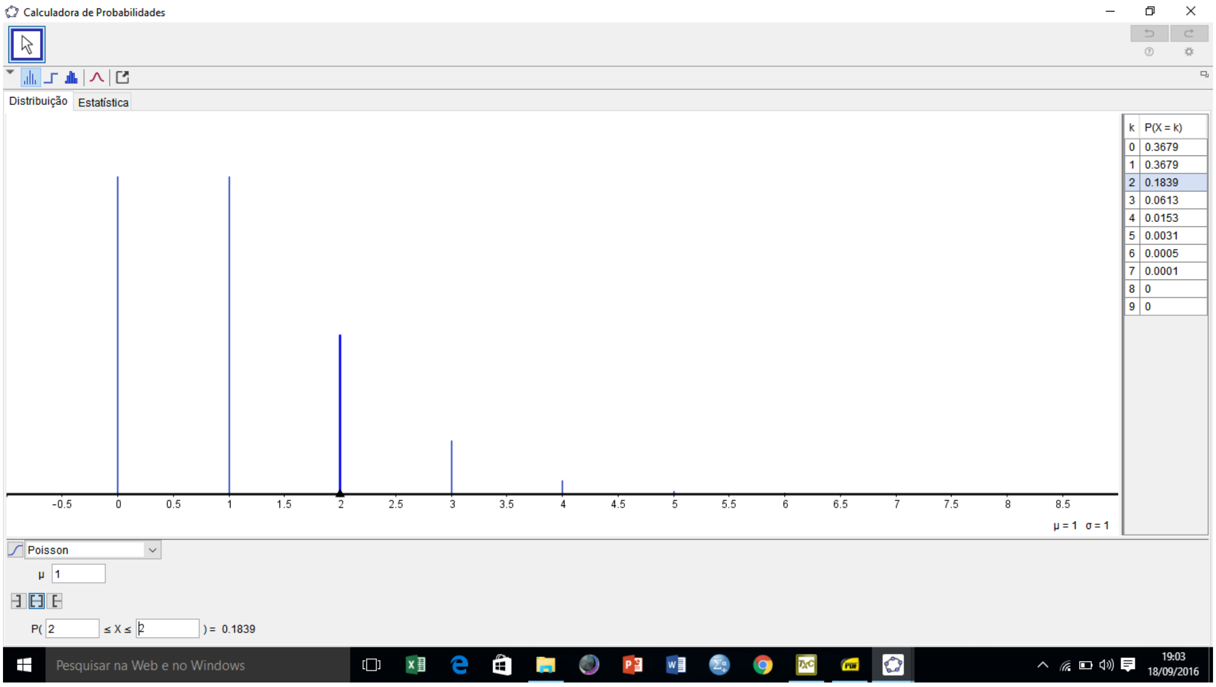

Figura 4.17: Distribuição de Poisson com $\alpha = 1$.

Observa-se que os resultados obtidos nas Figuras 4.16 e 4.17 confirmam a boa aproximação da distribuição de Poisson à distribuição binomial, mostrada no Capítulo 3.

Exemplo 4.8. De um baralho com 52 cartas, retiram-se 12 cartas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que 2 sejam figuras?

Uma solução algébrica.

Seja X o número de figuras em 12 cartas e, estas retiradas de um total de 52 cartas, então X tem distribuição hipergeométrica, logo

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Sabendo que em um baralho comum existem 12 cartas consideradas figuras, temos

$$P(X = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{52-12}{12-2}}{\binom{52}{12}} = 0,2711.$$

Portanto, retirando-se 12 cartas de um baralho comum, a probabilidade de duas dessas cartas retiradas serem figuras é 27,11 %.

Uma solução com o auxílio da calculadora de probabilidade do GeoGebra.

Na aba de opção de distribuição de probabilidade, optamos por Hipergeométrica; inserimos os parâmetros $N = 52$ em população, $n = 12$ (quantidades de figuras em um baralho) e $r = 12$ em amostra (quantidade de cartas retiradas das 52); optamos por intervalos limitas à esquerda e à direita; nos campos para inclusão de intervalos ou valores, digita-se 2 (já explicado antes). A solução é a que aparece na Figura 4.18.

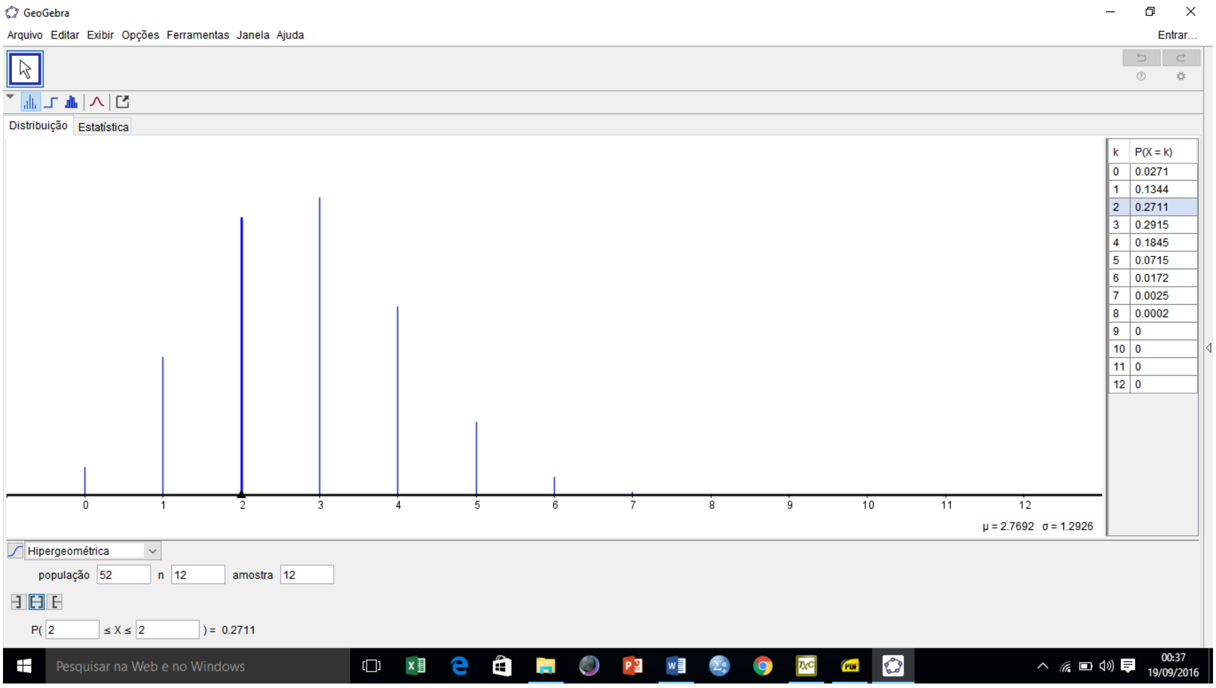

Figura 4.18: Distribuição hipergeométrica.

A solução é 0,2711, como na solução algébrica e aparece exatamente após a igualdade, na Figura 4.18. Também, pode-se visualizá-la na tabela de distribuição de probabilidade; além disso, pode ser visto outros valores possíveis para a v.a. X, a representação gráfica, a média (μ) e o desvio padrão (σ); tornando a solução mais dinâmica.

5 Considerações Finais

Esperamos que este trabalho venha contribuir para que a distribuição binomial e distribuições relacionadas possam ser melhor abordadas no Ensino Médio. As aplicações do Capítulo 4 relacionadas ao campeonato brasileiro de futebol reforçam a ideia de que problemas envolvendo a distribuição binomial são comumente observados em temas bastante populares. Claramente o assunto fica mais interessante para a maioria dos discentes, a menos daqueles não atraídos pelo futebol. A comparação entre soluções tradicionais através de cálculos algébricos e soluções determinadas a partir da calculadora de probabilidade do GeoGebra podem ser implementadas sem muito esforço didático.

Mesmo sabendo que os recursos computacionais são ferramentas poderosas na obtenção de soluções numéricas e gráficas, podemos perceber que o conhecimento teórico e algébrico da matemática não pode ser substituído simplesmente pela inserção de dados em um software afim de obtermos um número como resposta. Entretanto, a dificuldade de trabalho com a distribuição de probabilidade binomial no Ensino Médio é minimizada quando usamos temas atrativos e tecnologia em sala de aula.

Os conhecimentos básicos em probabilidade tornam-se indispensáveis nos dias de hoje. Além disso, podemos propor que se incluídas no Ensino Médio, as variáveis aleatórias levarão o estudante muito além das aplicações das definições clássicas e frequentista de probabilidade.

Como tratamos de forma intensa a distribuição de probabilidade binomial, fazendo um breve estudo da v.a. contínua normal, sugerimos como proposta de trabalho futuro esta v.a. Finalmente, estamos certos de que o estudo da distribuição binomial e suas aplicações devem ser melhor tratados no Ensino Médio.

Referências

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. ***LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional***. Brasília : MEC, 1996.

BUSSAB, Wilton de O; MORETTIN, Pedro A. ***Estatística Básica***, 6. ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática Contexto e Aplicações 2***, Ensino Médio - 2º Ano - ed. 2011 - São Paulo: Editora Ática, 2011.

DE ANDRADE, Lenimar Nunes. ***Introdução à Computação Algébrica com o MAPLE***. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

HOHENWARTER, Markus; FUCHS, Karl. ***Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra***. In: Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference. Wikipedia. 2004.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento. ***Probabilidade e Variáveis Aleatórias*** 2ª. ed. - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

MATEMÁTICA: **Ciências e Aplicações**, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo, 2013.

MEYER, Paul L. ***Probabilidade Aplicações a Estatística***/Paul L. MEYER ; tradução Ruy de C. B. Lourenço filho.-[Reimpr.].-Rio de Janeiro : LTC, 2010.

MORETTIN, Luiz G. ***Estatística Básica: probabilidade e inferência***, volume único/Luiz Gonzaga Morettin. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

R, Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2016.

VARIÁVEL ALEATÓRIA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Vari%C3%A1vel_aleat%C3%B3ria&oldid=47631579>. Acesso em: 3 jan. 2017.