UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA FERRAMENTA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA

Cláudio Silva Vasconcelos

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira

Feira de Santana
Março de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA FERRAMENTA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA

Cláudio Silva Vasconcelos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira.

Feira de Santana
19 de Março de 2017

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Vasconcelos, Cláudio Silva

V45r Relações entre matemática e música: uma ferramenta para as aulas de matemática / Cláudio Silva Vasconcelos. – Feira de Santana, 2017.

61f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2017.

1. Teoria musical - Matemática. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Música no ensino de matemática. 4. Matemática - problemas, exercícios. I. Ferreira, Maurício de Araújo, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51:78

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Cláudio Silva Vasconcelos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte dias do mês de fevereiro de dois mil e dezessete às 10:00 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA FERRAMENTA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA"**, do discente **Cláudio Silva Vasconcelos**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Maurício de Araujo Ferreira (Orientador, UEFS), Antonio Messias Lopes Cruz (IFBA - Valença) e Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovado.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 20 de fevereiro de 2017.

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira (UEFS)
Orientador

Prof. Me. Antonio Messias Lopes Cruz (IFBA - Valença)

Prof. Me. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

A Deus, por tudo que tem me concedido.

Agradeço aos meus pais e irmãos por todo o apoio e incentivo aos estudos.

Aos amigos que sempre estiveram apoiando, incentivando, torcendo.

Aos colegas de turma, sempre dispostos a ajudar e por todo o companheirismo.

A todos os professores do curso, em especial ao meu orientador Maurício de Araújo Ferreira por aceitar o tema e pela paciência e dedicação.

À Universidade Estadual de Feira de Santana.

Por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este estudo mostra uma pequena parte da imensa relação entre a Matemática e a Música. São apresentadas algumas propostas de aula para os seguintes conteúdos da Educação Básica: Razão e Proporção, Progressões Geométricas e Trigonometria. Todas em formato de sequências didáticas. Em seguida, são propostos alguns exercícios seguidos de suas respectivas resoluções comentadas. Apesar de manter o foco no conteúdo matemático da educação básica, é possível perceber a contribuição de Pitágoras para o desenvolvimento da música ocidental, o aperfeiçoamento das escalas musicais e, também, os estudos de Fourier que mostram a matemática por traz da harmonia moderna.

Palavras-chaves: Razão e Proporção, Progressões Geométricas, Trigonometria, Música.

Abstract

This study shows a small part of the immense relationship between Mathematics and Music. Some lecture proposals are presented for the second contents of Basic Education: Reason and Proportion, Geometrical Progressions and Trigonometry. All in format of didactic sequences. Next, some exercises are proposed, followed by their respective resolutions. Although focusing on the mathematical content of basic education, it is possible to see Pythagoras' contribution to the development of Western music, the perfection of musical scales, and also Fourier studies that show the mathematics behind modern harmony.

Keywords: Ratio and Proportion, Geometric Progressions, Trigonometry, Music.

Sumário

Introdução

É notória a presença da matemática em nosso cotidiano, em alguns casos uma matemática simples e acessível, em outros nem tanto. Presença esta, mais forte ainda nos tempos atuais com a evolução da tecnologia. Ainda assim uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos professores de matemática é a aversão dos alunos a esta disciplina. Em vista disto, há uma necessidade de algo que estimule os alunos nas aulas. A música é quase que unanime no gosto das pessoas, Aliando isto à vasta relação entre a matemática e a música e considerando também a relevância do Ensino de Música, de forma obrigatória no Ensino Fundamental, previsto na Lei 11.769/2008, e de forma optativa, no Ensino Médio, após o Projeto de Lei (PL) 6.840/2013, o presente estudo tem a pretensão de trazer algumas propostas de ferramentas a serem utilizadas nas aulas de matemática por meio da forte relação entre a disciplina e a música.

Segundo Abdounur (2006), historicamente a música está ligada à matemática desde os experimentos de Pitágoras. Foi realizado por ele o primeiro experimento empírico da história da ciência, utilizando um monocórdio, instrumento com uma única corda. Pitágoras percebeu que as subdivisões da corda influenciam nas oscilações sofridas por ela a cada segundo, o que corresponde à frequência, determinando a altura do som produzido por ela quando tocada. Assim, cada divisão possui uma determinada frequência, que, por sua vez, corresponde a um tom diferente.

A partir dos experimentos de Pitágoras que lhe permitiu construir um sistema musical com escalas formadas a partir de "divisões"das cordas por $2, 3$ e 4 partes, até os sistemas musicais atuais, como formação de acordes e as escalas. A escrita musical é feita a partir de proporções entre os símbolos que determinam a duração de uma nota e até o silêncio e também as divisões da música em compassos. As chamadas figuras musicais possuem uma relação de proporção. Existem relações em, por exemplo, Mínimo Múltiplo Comum (MMC), Progressões Geométricas (P.G.), Trigonometria e outros conteúdos de matemática.

Além dessas e outras relações, serão apresentadas algumas sugestões para utilizar a música nas aulas de matemáticas a fim de torná-las mais interessantes e atraentes para o aluno ou simplesmente menos abstrata, além de termos uma aplicabilidade em alguns assuntos, em resposta à tão repetida pergunta feita por muitos alunos "para que serve isso?", objetivando conseguir um maior aproveitamento dos alunos nas aulas.

O Capítulo 1, que mostra a relação entre a Matemática e a Música, está subdividido em três tópicos que mostram, respectivamente, a contribuição de Pitágoras para a música, relacionando a razão entre comprimento da corda tocada e sua parte inteira com o som emitido quando tocada; Progressões Geométricas e Trigonometria. No Capítulo 2 são apresentadas algumas propostas de aulas sobre Razão, destinada ao 7º ano do Ensino Fundamental II; Progressões Geométricas, destinada ao 1º Ano do Ensino Médio e sobre Trigonometria, destinada ao 2º Ano do Ensino Médio. Em seguida, no Capítulo 3, encontra-se atividades relacionadas a cada proposta de aula do capítulo anterior. E, por fim, o Capítulo 4 é formado pelas soluções das atividades propostas.

Capítulo 1

Um pouco de Teoria Musical e da Relação entre Matemática e Música

1.1 Alguns Conceitos da Teoria Musical

No decorrer do presente trabalho aparecem alguns termos técnicos de música. Para uma melhor compreensão dos conteúdos discutidos é necessário que o leitor esteja um pouco familiarizado com alguns conceitos da teoria musical. Para um aprofundamento no assunto o leitor pode consultar o livro [16], ou a monografia [4].

As notas musicais são *dó*, *ré*, *mí*, *fá*, *sol*, *lá* e *sí*. Há uma distância entre essas notas, chamada de **intervalo musical**. O menor intervalo musical na música ocidental é o **semiton** (meio tom), dois semitons formam um **tom**. Entre a nota *dó* e *ré*, *ré* e *mí*, *fá* e *sol*, *sol* e *lá* e entre o *lá* e *sí* há uma nota intermediária, são os acidentes musicais, as notas sustenidas indicado por (#) e as bemóis indicado por b. O sustenido é quando alteramos a nota em um semitom ascendente e o bemol quando a alteramos em um semitom no sentido descendente. Logo, *dó#* (dó sustenido) refere-se à nota *ré b* (ré bemol), *ré#* a *mí b* e assim sucessivamente.

As notas musicais tocadas sucessivamente, começando numa nota e terminando na próxima de mesmo nome, ascendente ou descendente, compõe uma escala musical. A **escala cromática** é a sucessão de notas tocadas de meio em meio tom, já a **escala diatônica** tem a relação de *tom*, *tom*, *semitom*, *tom*, *tom*, *tom* e *semitom*. Existem outros tipos de escalas musicais, mas não serão discutidas neste trabalho.

Exemplo 1.1. A escala cromática de *dó* é formada pela sequência de notas

dó, *dó #*, *ré*, *ré #*, *mí*, *fá*, *fá #*, *sol*, *sol #*, *lá*, *lá #*, *sí*, *dó*.

Já a escala diatônica de *dó* é formada por *dó, ré, mí, fá, sol, lá, sí, dó.*

O primeiro e o segundo *dó* da escala são separados por um intervalo de oitava, observe que, tomando a nota *dó* como a primeira, temos na Tabela 1.1 o nome de alguns intervalos musicais.

dó	primeira
ré	segunda
mí	terça
fá	quarta
sol	quinta
lá	sexta
sí	sétima
dó	oitava

Tabela 1.1: Relação de intervalos musicais

O som possui três propriedades, são elas: Altura, Intensidade e Timbre.

- **Altura:** Propriedade do som ser mais grave ou agudo.
- **Intensidade:** É a propriedade do som ser mais forte ou fraco.
- **Timbre:** É a qualidade do som que nos permite reconhecer a sua origem. Através do timbre que descobrimos se um determinado som foi emitido por um certo instrumento ou por outro, ou ainda pela voz humana.

A música é constituída por três elementos fundamentais, são eles: Melodia, Harmonia e Ritmo.

- **Melodia:** Uma série de notas musicais tocadas sucessivamente, e que forma um sentido musical.
- **Harmonia:** Combinação das notas tocadas simultaneamente.
- **Ritmo:** Movimento ordenado dos sons no tempo.

Normalmente uma nota musical é composta por alguns sons parciais, a eles damos o nome de **harmônicos**.

Os conceitos apresentados neste capítulo nos proporcionará uma melhor compreensão na leitura deste trabalho.

1.2 Influência de Pitágoras na Música

Pitágoras foi um filósofo e educador religioso, nascido na Grécia, que viveu por volta do século VI (a.C.), as bases do sistema musical utilizado no ocidente estão presentes em seus estudos. Ele realizou experimentos com um monocórdio (instrumento com uma corda apenas e um cavalete móvel), como encontramos em [1], que foi o primeiro experimento empírico do qual se tem registro na ciência. Pitágoras acreditava que tudo poderia ser explicado com números e utilizando os números inteiros 1, 2, 3 e 4 como base ele construiu todo um sitema musical.

Pitágoras observou em seu monocórdio que uma corda esticada quando tocada dividida ao meio, como mostra a Figura 1.1, emitia um som muito parecido com o produzido por ela inteira; mais precisamente o mesmo som, diferenciado apenas de uma oitava. Ele também

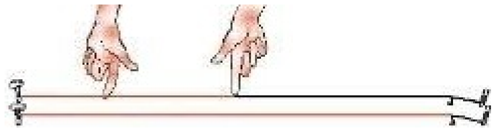

Figura 1.1: oitava

a dividiu em três partes iguais e quatro partes iguais, percebendo, assim, que quando tocada dois terços da corda, observe a Figura 1.2, se ouvia um som um pouco parecido com o da corda inteira, o mais parecido depois da divisão em duas partes iguais.

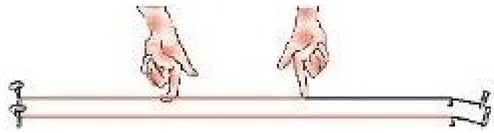

Figura 1.2: quinta

Em seguida tocando três quartos também era um som harmonioso com o da corda inteira, observe a Figura 1.3. Pitágoras então estabeleceu a consonância e dissonância, a

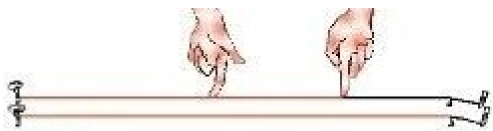

Figura 1.3: quarta

primeira quando o som "soa agradável" e a segunda quando não parece tão agradável.

Como, após a divisão da corda por dois, Pitágoras observou que o som mais consonante era o da divisão por dois terços, que veremos que será um intervalo de quinta, ele construiu a primeira escala musical dividindo a corda sucessivas vezes em dois terços.

As notas da escala musical são `dó, ré, mi, fá, sol, lá, si`. Tomando `dó` como a primeira, temos `ré` a segunda, `mi` a terça, e assim por diante. Ao reduzir o tamanho da corda por dois quintos do tamanho original, observou que encontrava a nota `sol` que, por sua vez, é a quinta. Logo, calculando em seguida dois terços desta, encontra-se a nota `ré`. Basta tomar a nota `sol` como a primeira e contar cinco notas, voltando para o `dó` quando chegarmos ao `si`. Então ele encontrou, calculando as quintas sucessivas, `sol, ré, lá, mi, si e fá` a relação entre o comprimento da parte tocada da corda e o som emitida por ela.

Capítulo 2

Relações entre Matemática e Música

2.1 Razão e Proporção na Música

Analisando matematicamente o experimento de Pitágoras vemos que se tomarmos `dó` como 1 (corda inteira), o próximo `dó` será 1/2 (metade da corda), logo, as razões das notas seguintes r será um número racional, tal que

$$\frac{1}{2} \leq r \leq 1.$$

A cada vez que obtivermos uma fração fora deste intervalo o som emitido pela corda referente à divisão que ela estabelece estará fora da oitava, aí temos que retornar para a oitava inicial, se for uma fração menor que 1/2, basta multiplicar por 2 até que ela se encontre no intervalo dado.

Assim, para encontrarmos a nota `sol` fazemos

$$1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Calculando 2/3 da nota `sol`, temos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Observemos que

$$\frac{4}{9} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, fazemos

$$2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \geq \frac{1}{2}.$$

Contando, a partir da nota `sol`, temos: `sol, lá, si, dó, ré`. Portanto, se tocarmos 8/9 da corda ela emitirá a nota `ré`. Calculando 2/3 de `ré` temos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}.$$

Acabamos de encontrar a nota `lá`.

Vamos calcular a quinta da nota `lá`, ou seja, o `mí`. Para isso fazemos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, precisamos multiplicar por 2, fazemos então

$$2 \cdot \frac{32}{81} = \frac{64}{81} \geq \frac{1}{2}.$$

Calculando quintas sucessivas, temos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}.$$

Encontramos aí a nota `si`.

Ao calcular 2/3 da nota `si` deveríamos encontrar o `fá`, ou seja, 3/4. porém encontramos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{128}{243} = \frac{256}{729}.$$

Como

$$\frac{256}{729} \leq \frac{1}{2}$$

temos que multiplicar por 2, então

$$2 \cdot \frac{256}{729} = \frac{512}{729} \geq \frac{1}{2}.$$

Vejamos que

$$\frac{2}{3} \leq \frac{512}{729} \leq \frac{3}{4}.$$

Temos então que a corda tocada nesta divisão não emite o `fá` e sim uma nota mais alta que o `fá`, contudo, mais baixa que a nota `sol`. Então surge aí a necessidade do sustenido, representado pelo símbolo `#` e chamado de acidente. Os sustenidos são as notas pretas do teclado. Portanto, tocada esta fração da corda, ela emitirá a nota `fá#.`

Continuando a divisão da corda, temos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{512}{729} = \frac{1024}{2187} \leq \frac{1}{2}.$$

Então temos que remanejar para a mesma oitava

$$2 \cdot \frac{1024}{2187} = \frac{2048}{2187}$$

encontramos o `dó#`.

Para encontrar a próxima divisão das quintas sucessivas, calculemos

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2048}{2187} = \frac{4096}{6561},$$

referente a nota `sol#`.

A seguir encontraremos o `ré#`.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4096}{6561}=\frac{8192}{19683}\leq\frac{1}{2}.$$

Para transferir para a mesma oitava das outras notas anteriores multiplicamos por 2.

$$2\cdot\frac{8192}{19683}=\frac{16384}{19683}.$$

Para ser encontrada a próxima nota, assim como as anteriores, calculamos a quinta da ultima nota que encontramos.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{16384}{19683}=\frac{32768}{59049}.$$

Acabamos de calcular a subdivisão da corda que quando tocada emite a nota `lá#.`

Seguindo o que Pitágoras chamou de ciclo das quintas encontramos as notas `dó, sol, ré, lá, mi, si, fá#, dó#, sol#, ré# e lá#`. Cada nota sendo a quinta da anterior.

Suponhamos que existisse na música o `mi#`, ela seria calculada a partir do `lá#`. Teriamos

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{32768}{59049}=\frac{65536}{177147}\leq\frac{1}{2}.$$

Multiplicamos por 2 para remanejarmos à oitava inicial. Temos

$$2\cdot\frac{65536}{177147}=\frac{131072}{177147}\simeq 0,74.$$

Observe que muito próximo de $0,75=3/4$, ou seja, da nota `fá`.

Temos então a escala de `dó` da seguinte forma

dó	ré	mí	fá	sol	lá	sí
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$.

Observe que se tomarmos uma fração diferente de 2/3, encontraremos outra nota e não a quinta. Se calcularmos 8/9 encontraremos sempre a segunda nota em relação a nota de partida e se calcularmos 3/4 encontraremos sempre a quarta.

Exemplo 2.1. Calculando 8/9 partindo da nota `ré`, temos

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{64}{81}.$$

que se refere a nota `mí`, a segunda, quando partimos da nota `ré`.

Exemplo 2.2. Calculando 3/4, partindo da nota `ré`, temos

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{24}{36}$$

que ao simplificar por 12 tem-se 2/3, referente a nota `sol` que é a quarta quando partimos da nota `ré`.

Com o 2.1 e o 2.2 podemos perceber que é possível calcular comprimentos em outros intervalos. Pitágoras utilizou o ciclo das quintas, mas pode-se calcular por outros ciclos, o das quartas, por exemplo, onde a nota seguinte a ser encontrada seria a referente a quarta da nota atual, isso no ciclo das quartas. Contudo, nenhum dos ciclos se fecham perfeitamente, não é possível retornar à nota de partida, precisando, assim, de ajustes em alguns intervalos, o temperamento, como veremos na Seção 2.2.

A divisão da corda interfere no número de oscilações dela a cada unidade de tempo, alterando a frequência. Frequência é o número de vibrações a cada segundo e é, geralmente, medida em Hertz (Hz). Quando diminuímos o tamanho da corda ela vibra mais rápido e, dessa forma, aumenta a frequência. Portanto, a nota `dó` possui uma frequência f, o `dó` que está a uma oitava acima possui uma frequência $2f$.

Vejamos, na Tabela 2.1 o que acontece com a frequência quando a parte da corda a ser tocada é alterada. Para isso, seja $x \in \mathbb{Q}^*$ o comprimento da corda em centímetros, por exemplo, e f a frequência em Hertz.

fração da corda a ser tocada	frequência
x	f
$\frac{x}{2}$	$2 \cdot f$
$\frac{x}{3}$	$3 \cdot f$
$\frac{x}{4}$	$4 \cdot f$
$2 \cdot (\frac{x}{3}) = \frac{2}{3}x$	$\frac{(3f)}{2} = \frac{3}{2}f$
$3 \cdot (\frac{x}{4}) = \frac{3}{4}x$	$\frac{(4f)}{3} = \frac{4}{3}f$

Tabela 2.1: Relação entre o comprimento da parte da corda tocada e a frequência.

Observe que o comprimento e a frequência se relacionam de forma que:

- Se o comprimento é multiplicado por um certo $t \in \mathbb{Q}^*$, a frequência é multiplicada pelo inverso de t, ou seja, $\frac{1}{t}$.
- Caso o comprimento seja dividido por um certo $t \in \mathbb{Q}^*$, a frequência é dividida pelo inverso de t, ou seja, $\frac{1}{t}$.

Portanto, o comprimento da parte da corda tocada é inversamente proporcional à frequência da nota emitida.

2.2 Progressão Geométrica na Música

Podemos observar, com base na Seção 1.2, que o ciclo pitagórico não "se fecha", logo, partindo da nota *dó* não chegamos ao *dó* novamente pelo ciclo das quintas. Durante muito tempo também ficou impossibilitada a transposição do tom de uma música para outro tom, devido à diferença, de espaçamentos de um tom para outro. Surge, então, a necessidade de uma escala igualmente espaçada, o temperamento igual. Temperamento é a "afinação de uma escala em que todos ou quase todos os intervalos resultam ligeiramente imprecisos, porém sem que fiquem distorcidos", ver [16]. No decorrer do tempo houve alguns tipos de temperamento, atualmente o sistema ocidental adota o temperamento igual que é a escala igualmente espaçada.

Para construirmos a escala temperada atual, devemos encontrar uma frequência f tal que se multiplicarmos 12 vezes seguidas esta frequência à frequência inicial f_1 encontraremos $2f_1$. Temos, então

$$f_1 \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f = 2f_1.$$

Daí, tem-se

$$f_1 \cdot f^{12} = 2 \cdot f_1.$$

Após dividir ambos os membros por f_1, chega-se a

$$f^{12} = 2.$$

E aplicando $\sqrt[12]{}$ a ambos os membros, finalmente, encontramos

$$f = \sqrt[12]{2}.$$

Observe que, ordenando as frequências f_n, temos

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6,\ f_7,\ f_8,\ f_9,\ f_{10},\ f_{11},\ f_{12} \text{ e } f_{13} \tag{2.1}$$

de forma que tenhamos $f_{13} = 2 \cdot f_1$.

Da sequência (2.1) podemos fazer

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{f_4}{f_3} = ... = \frac{f_{13}}{f_{12}} = f.$$

Daí, podemos observar que:

$$f_2 = f_1 \cdot f$$

$$f_3 = f_1 \cdot f^2$$

$$f_4 = f_1 \cdot f^3$$

$$f_5 = f_1 \cdot f^4$$

$$f_6 = f_1 \cdot f^5$$

$$f_7 = f_1 \cdot f^6$$

$$f_8 = f_1 \cdot f^7$$

$$f_9 = f_1 \cdot f^8$$

$$...$$

$$f_n = f_1 \cdot f^{(n-1)}. \tag{2.2}$$

Onde:

f_n é a enésima frequência que desejamos encontrar, ou nota musical;

f_1 é a primeira frequência, ou frequência inicial;

f é a razão. Neste caso, a um semitom (meio tom).

A equação (2.2) nos permite calcular qualquer termo pertencente a esta sequência de frequências, considerando que ela siga em frente após o termo f_{13} . Tal sequência é chamada Progressão Geométrica (P.G.).

Definição 2.3. Uma Progressão Geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo antecessor. Este quociente constante é chamado de razão. Podemos calcular o termo geral da sequência pela fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}. \tag{2.3}$$

Onde:

a_n é o n-ésimo termo da P.G.;

a_1 é o primeiro termo da P.G.;

q é a razão da P.G.

Portanto, o problema inicial se resume em formar uma progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$. Encontrada essa progressão geométrica, podemos agora construir a escala cromática, que é a escala de meio em meio tom formada pelas doze notas musicais. Vejamos na Tabela 2.2 , as notas da escala diatônica de `lá` maior e suas respectivas frequências. O `lá` padrão, usado para afinação de instrumentos emite uma frequência de 440 Hz, logo 880 Hz também representa uma nota `lá`, como vimos na Seção 1.2. Partiremos deste primeiro. Nisso, o termo a_1 de nossa P.G. é 440. Encontrar a escala cromática de `lá`, por exemplo, resume em encontrar os 12 primeiros termos da P.G.

$$a_n = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(n-1)}.$$

Os termos dessa Progressão Geométrica representará as frequências das notas `lá, lá#,si, dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá`.

Como vimos, para se ter uma escala igualmente espaçada devemos ter $f = \sqrt[12]{2}$, que se refere a um semitom. Porém, f é um número irracional, por isso a escala musical possui frequências aproximadas, com uma maior aproximação que a escala pitagórica, permitindo, assim, a transposição de tons sem comprometer a composição original.

Nota	Termos da Progressão Geométrica $a_n = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(n-1)}$	frequência
Lá	$a_1 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(1-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^0 = 440$	440 Hz
Lá # = Sí b	$a_2 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(2-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^1 = 466,1637615180898$	466 Hz
Sí	$a_3 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(3-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^2 = 493,8833012561241$	494 Hz
Dó	$a_4 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(4-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^3 = 523,2511306011968$	523 Hz
Dó # = Ré b	$a_5 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(5-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^4 = 554,3652619537437$	554 Hz
Ré	$a_6 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(6-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^5 = 587,3295358348146$	587 Hz
Ré # = Mí b	$a_7 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(7-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^6 = 622,2539674441614$	622 Hz
Mí	$a_8 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(8-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^7 = 659,2551138257392$	659 Hz
Fá	$a_9 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(9-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^8 = 698,4564628660066$	698 Hz
Fá # = Sol b	$a_{10} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(10-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^9 = 739,9888454232679$	740 Hz
Sol	$a_{11} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(11-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{10} = 783,9908719634975$	784 Hz
Sol # = Lá b	$a_{12} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(12-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{11} = 830,6093951598885$	830 Hz
Lá	$a_{13} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{(13-1)} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{12} = 880$	880 Hz

Tabela 2.2: Cálculo das frequências de uma determinada oitava.

2.3 Trigonometria na Música

Os sons são resultados de oscilações das moléculas de ar, quando perturbadas. O comportamento das moléculas, em sua maioria, são movimentos periódicos. A molécula se desloca em um certo sentido a uma distância de sua posição inicial e retorna à posição inicial ultrapassando-a de uma mesma distância, porém em sentido contrário. Para uma análise mais detalhada do comportamento das moléculas, consultar [11].

Alguns sons musicais são simples, possuem apenas uma frequência, por exemplo o som emitido por um diapasão. Outros são formados por duas ou mais frequências, múltiplas da que caracteriza o som. A maioria dos instrumentos musicais emitem sons deste tipo.

Para compreendermos melhor podemos fazer uma analogia com os números naturais. Sabemos que todo número natural maior que 1 ou é um número primo ou pode ser decompostos em fatores primos. Assim, todo som que não é um som simples ele é resultado de uma junção de sons simples, como veremos adiante.

Ora, movimentos periódicos podem ser representados por funções periódicas. Veremos que, no caso de sons simples, podemos representá-los por uma função seno.

Definição 2.4. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *periódica* quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor número $T>0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se *período* da função f.

Observação 2.5. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.6. Na Figura 2.1 está representado o gráfico de uma função periódica. Observando

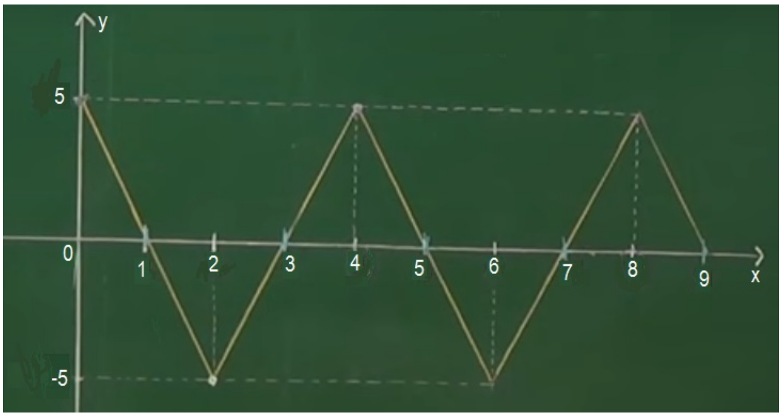

Figura 2.1: Gráfico de uma determinada Função Periódica

o gráfico da Figura 2.1 podemos perceber que o comportamento da função representada se repete, temos:

$$f(0) = f(4) = f(0+4)$$

$$f(0) = f(4) = f(8) = f(0+8)$$

ou seja, $T = \{4, 8, ...\}$ sendo que o menor valor positivo de T é 4, portanto o período da função cujo gráfico está representado na Figura 2.1 é 4.

Quando um diapasão é percutido gera uma perturbação nas moléculas de ar que estão em volta, sendo que o comportamento dessas moléculas são parecidos, de forma que entendendo o movimento de uma delas entenderemos o movimento por completo, ver em [11]. O comportamento dessas moléculas se dão de forma análoga ao de uma massa presa a uma mola, de acordo com o sistema massa-mola, obedecendo a Lei de Hooke. Portanto, vamos entender o movimento de uma massa presa a uma mola que é um tipo de Movimento Harmônico Simples (MHS). Seja a massa m presa à mola, como mostra a Figura 2.2 e o deslocamento y, a força resultante do sistema obedece à Lei de Hooke.

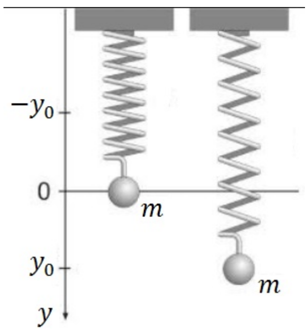

Figura 2.2: Sistema massa x mola

Logo, temos

$$F = -k \cdot y(t) \tag{2.4}$$

Onde:

- k é uma constante que depende da mola.
- $y(t)$ é o deslocamento da massa em função do tempo.

Da Segunda Lei de Newton, temos que

$$F = m \cdot a. \tag{2.5}$$

Comparando (2.4) com (2.5) tem-se

$$m \cdot a = -k \cdot y(t). \tag{2.6}$$

Dividindo ambos os membros por m, obtemos

$$a = -\frac{k}{m} \cdot y(t). \tag{2.7}$$

Como a aceleração é justamente a segunda derivada da posição em relação ao tempo. Daí, temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot y(t). \tag{2.8}$$

Vamos relacionar o Movimento Harmônico Simples com o Movimento Circular. Seja P, observe na Figura 2.3, um ponto sobre a circunferência de raio 1 movendo-se em Movimento Circular e M a projeção do ponto P sobre o eixo y, observemos que quando P e, consequentemente M, mudam de posição o ângulo θ, formado pelos segmentos OP e OD, também varia sua posição em função do tempo. A posição do ponto M em função do ângulo é dada por

$$y(t) = sen\big(\theta(t)\big), \tag{2.9}$$

onde $\theta(t)$ é a função $\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, pois o ângulo varia com o tempo. A partir da função $y(t)$, vamos calcular a aceleração do ponto P encontrando a sua segunda derivada. Ao derivar a função representada por (2.9) utilizamos a regra da cadeia. Para a primeira derivada, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot cos\big(\theta(t)\big). \tag{2.10}$$

Derivando mais uma vez, agora é preciso utilizar a regra do produto de derivadas e também a regra da cadeia

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot cos(\theta(t)) + \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \big[-sen\big(\theta(t)\big)\big]$$

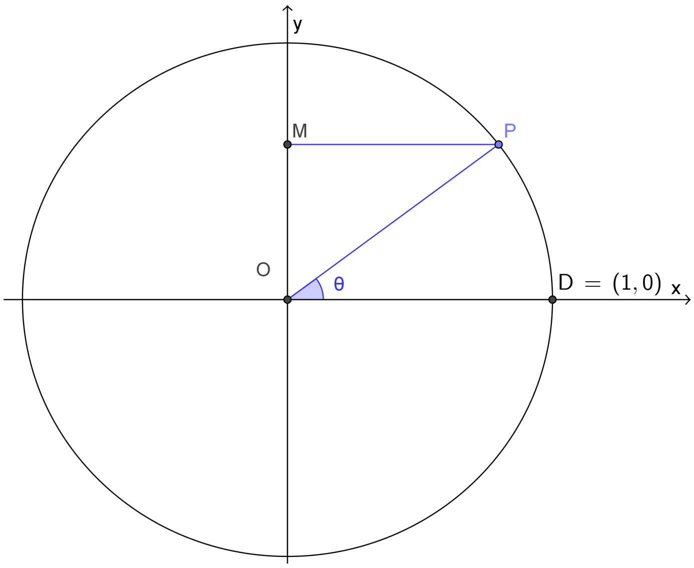

Figura 2.3: Ciclo Trigonométrico

que resulta em

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot cos\big(\theta(t)\big) - \left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 \cdot sen\big(\theta(t)\big). \tag{2.11}$$

Conforme afirma [14] (p.56), pode-se considerar o Movimento Harmônico Simples como projeção de um Movimento Circular Uniforme (M.C.U.). Este fato foi obtido experimentalmente. Logo, P está em Movimento Circular Uniforme. Então, podemos afirmar que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

Daí temos que a equação (2.11) se reduzirá a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 \cdot sen\big(\theta(t)\big). \tag{2.12}$$

Onde $\frac{d\theta}{dt}$ é a velocidade angular do movimento, que é constante, e a representaremos por ω.

Substituindo (2.9) em (2.12) temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 \cdot y(t). \tag{2.13}$$

Sabemos que M oscila em Movimento Harmônico Simples, logo, obedece à Lei de Hooke e, como vimos anteriormente, é possível obter sua aceleração por (2.7). Daí, comparando as equações (2.7) e (2.13), finalmente temos que

$$-\frac{k}{m} \cdot y(t) = -\omega^2 \cdot y(t).$$

Portanto,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.14}$$

Assim, sabemos que o ângulo θ varia com o tempo obedecendo a equação

$$\theta = \omega \cdot t. \tag{2.15}$$

Enquanto o ponto P completa uma volta no ciclo trigonométrico, M completa uma oscilação. Seja T o período, ou seja, o tempo necessário para o ponto P completar uma volta e sabendo que, ao dar uma volta, o ângulo percorrido é de 2π. Da equação (2.15), fazemos

$$2\pi = \omega \cdot T \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}. \tag{2.16}$$

Como estamos interessados em sons musicais e cada nota ou som musical é determinado por uma frequência, tentaremos encontrar θ em função da frequência de M que, por sua vez, é a mesma de P. Para isso, seja f o número de oscilações de M em 1 segundo. Daí, tem-se:

$$\begin{gathered} 1 \text{ volta } \_\_\_\_\_\_\_ \; T \text{ segundos} \\ f \text{ voltas } \_\_\_\_\_ \; 1 \text{ segundo.} \end{gathered}$$

Logo,

$$f = \frac{1}{T}. \tag{2.17}$$

Como o ponto P dá $1/T$ voltas em 1 segundo, temos que f é a frequência do ponto P e da molécula M.

De (2.16) e (2.19), temos que

$$\omega = 2\pi \cdot f. \tag{2.18}$$

Comparando as equações (2.14) e (2.18) temos

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e dividindo ambos os membros por 2π, resulta em

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.19}$$

Substituindo a equação (2.18) na (2.15), temos que

$$\theta = 2\pi \cdot f \cdot t. \tag{2.20}$$

Encontrado o ângulo θ e substituindo em (2.9), chegamos a

$$y = sen(2\pi \cdot f \cdot t). \tag{2.21}$$

Esta equação representa o comportamento de cada uma das moléculas de ar quando emitido um som musical simples. Como utilizamos uma circunferência de raio 1, temos que o ponto M se desloca apenas no intervalo $[-1, 1]$. Ou seja, tomamos a amplitude igual a 1. Amplitude representa a intensidade de um som ou seja, o seu volume.

Para uma amplitude qualquer A, a expressão $sen(2\pi \cdot f \cdot t)$ será multiplicada por A, daí a equação (2.21) passa a ser

$$y = A \cdot sen(2\pi \cdot f \cdot t). \tag{2.22}$$

Sabemos, que

$$-1 \leq sen(\theta) \leq 1,$$

logo, da equação (2.20) temos

$$-1 \leq sen(2\pi \cdot f \cdot t) \leq 1,$$

portanto,

$$-A \leq sen(2\pi \cdot f \cdot t) \leq A.$$

Assim, a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por (2.22) possui como imagem o conjunto $[-A, A]$.

Observe, na Figura 2.4, o gráfico da função quando tomamos $A = 1$ e $f = 1$.

Figura 2.4: Gráfico da função $f(t)$ com $f = 1$.

Ainda com $A = 1$, nas figuras 2.5, 2.6 e 2.7, a seguir, tomaremos frequências, respectivamente iguais a $f = 2, 4/3$ e $3/2$.

A partir dos gráficos das Figuras 1.6, 1.7, 1.8 e 1.9 podemos perceber as relações determinadas por Pitágoras, discutidas na Seção 1.2. Observe que no instante em que o gráfico da Figura 2.4 completa uma oscilação, o gráfico da Figura 2.5 completa duas, essa relação é o intervalo de oitava estabelecido por Pitágoras, observe a Figura 1.1 da

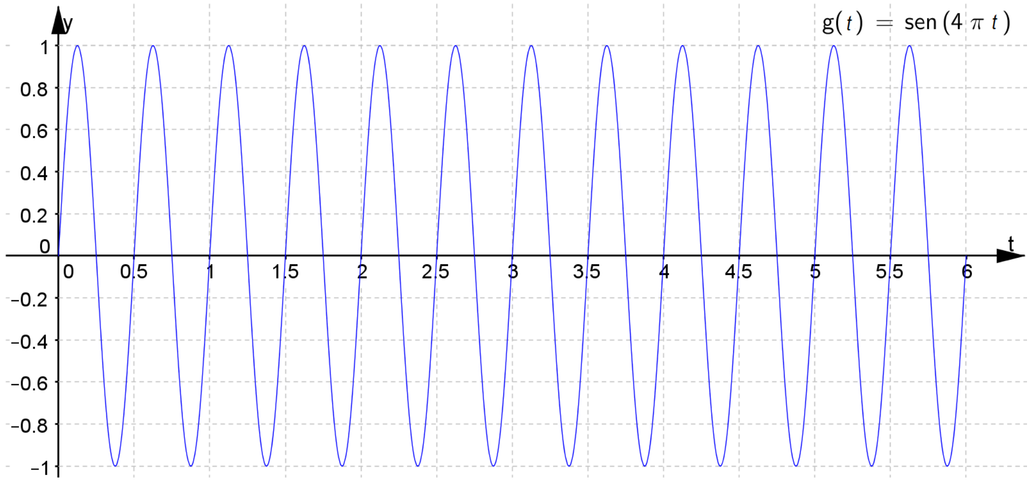

Figura 2.5: Gráfico da função $g(t)$ com $f = 2$.

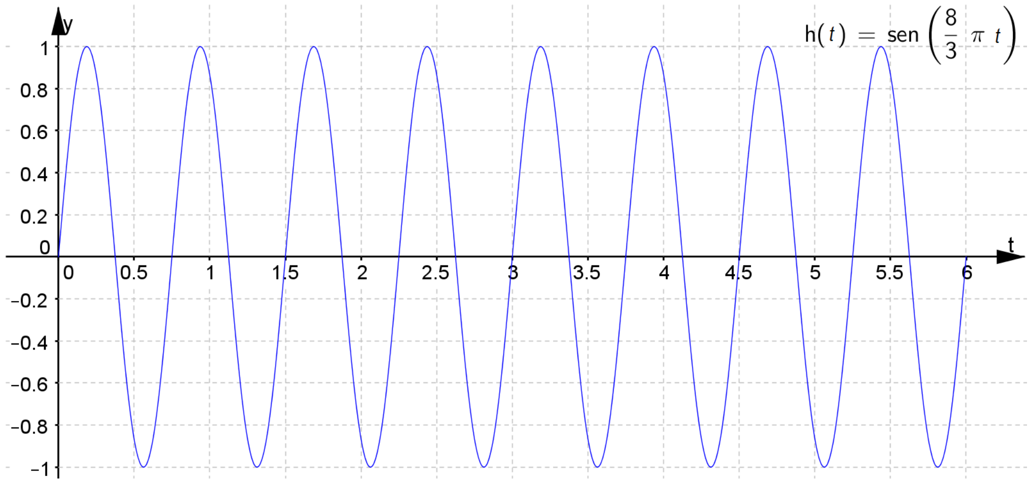

Figura 2.6: Gráfico da função $h(t)$ com $f = 4/3$.

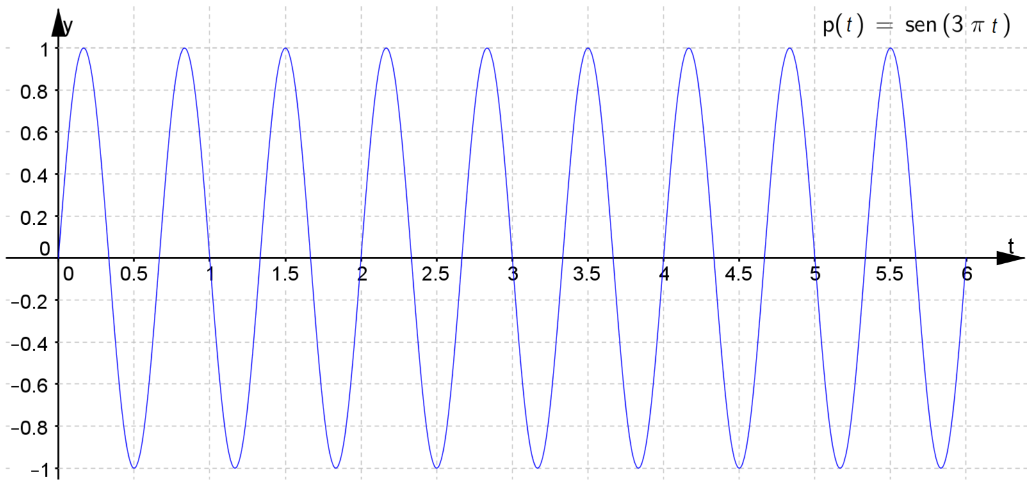

Figura 2.7: Gráfico da função $p(t)$ com $f = 3/2$.

Frequência	$f_0 = 1$	$f_1 = 2 \cdot f_0 = 2$	$f_2 = 3 \cdot f_0 = 3$	$f_3 = 4 \cdot f_0 = 4$
Amplitude	1	0,7	0,5	0,4

Tabela 2.3: Frequência dos harmônicos superiores.

Seção 1.2. Já no gráfico da Figura 2.6, são quatro oscilações para cada três representada no gráfico da Figura 2.4; um intervalo de quarta, observe a Figura 1.3 da Seção 1.2. Enquanto que no gráfico da Figura 2.7 está representada três oscilações para cada duas representada no gráfico da Figura 2.7 que representa um intervalo de quinta, veja a Figura 1.2 da Seção 1.2. Um exemplo hipotético é que, se 2.4 representasse a nota dó, 2.5 representaria a nota dó uma oitava acima, 2.6 representaria a nota fá e 2.7 representaria a nota sol.

Mas o que acontece se, na equação (2.22) mudarmos o parâmetro A? é o que observaremos na Figura 2.8 tomando $A = 0,6$, por exemplo. Veja que a frequência de ambas

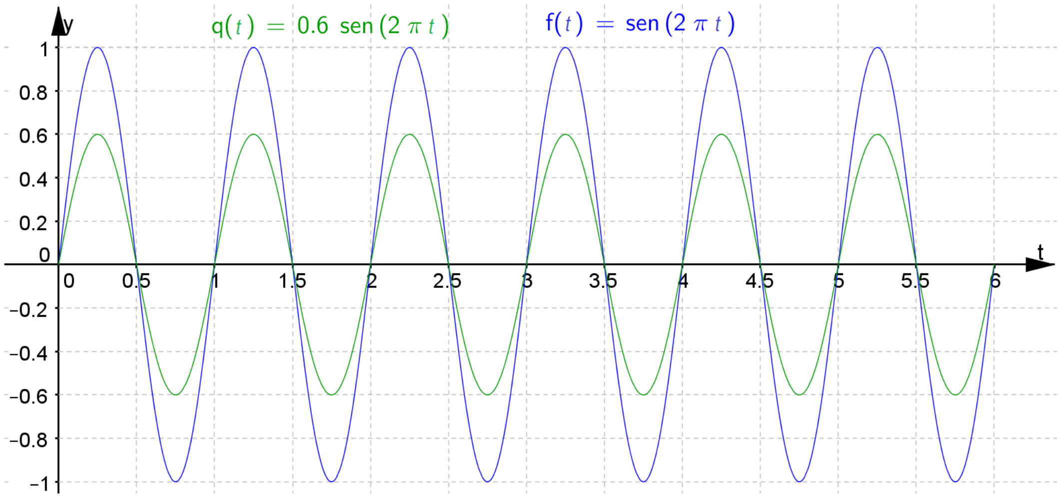

Figura 2.8: Influência da amplitude no comportamento do gráfico.

as funções são iguais, logo representam a mesma nota musical. Porém, as Amplitudes diferentes. Fisicamente, ouvimos a mesma nota, porém, a que possui amplitude igual a 1 em um volume maior que a de Amplitude igual a 0, 6.

Mas, como foi dito anteriormente, sons simples são difíceis de encontrarmos na natureza. A maioria dos sons produzidos por instrumentos são compostos por várias frequências onde a frequência predominante dá nome a nota. Essas frequências múltiplas da primeira e com amplitudes menores são chamadas de harmônicos superiores e influencia no timbre do som.

Os três primeiros harmônicos superiores são a oitava, a quinta e a quarta, respectivamente. Logo, a nota representada no gráfico da Figura 2.4 tocada por um instrumento que emite os três harmônicos superiores teriam suas frequências e amplitudes como mostra a Tabela 2.3.

Vamos verificar os gráficos de cada harmônico. No gráfico da Figura 2.4 está representado o som que possui frequência $f_0 = 1$. Em seguida, nas Figuras 2.9, 2.10 e 2.11 estão representados, respectivamente, o primeiro, segundo e terceiro harmônicos. O gráfico da Figura 2.12 representa o som complexo composto pelas frequências e amplitudes apresentadas na Tabela 2.3.

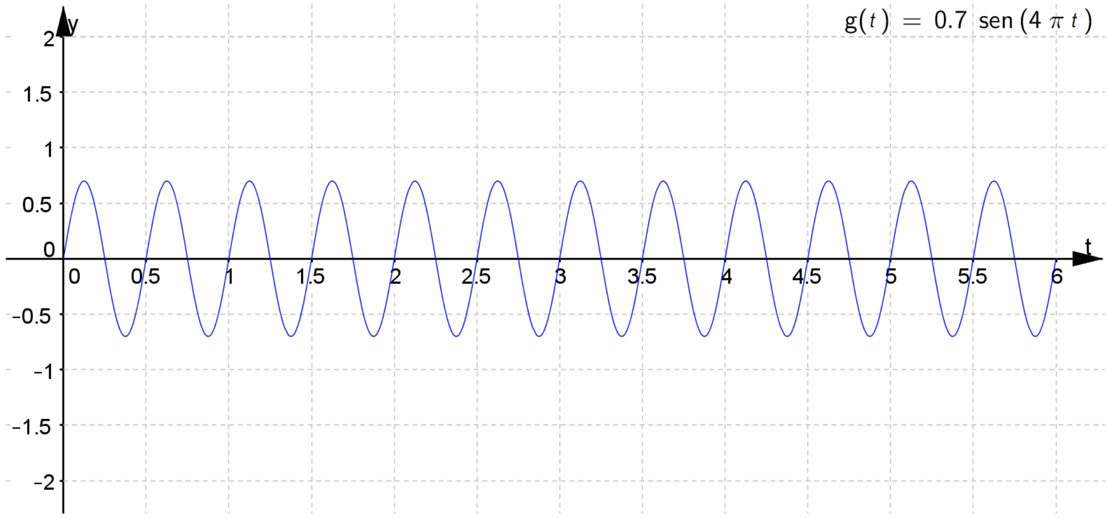

Figura 2.9: Primeiro harmônico.

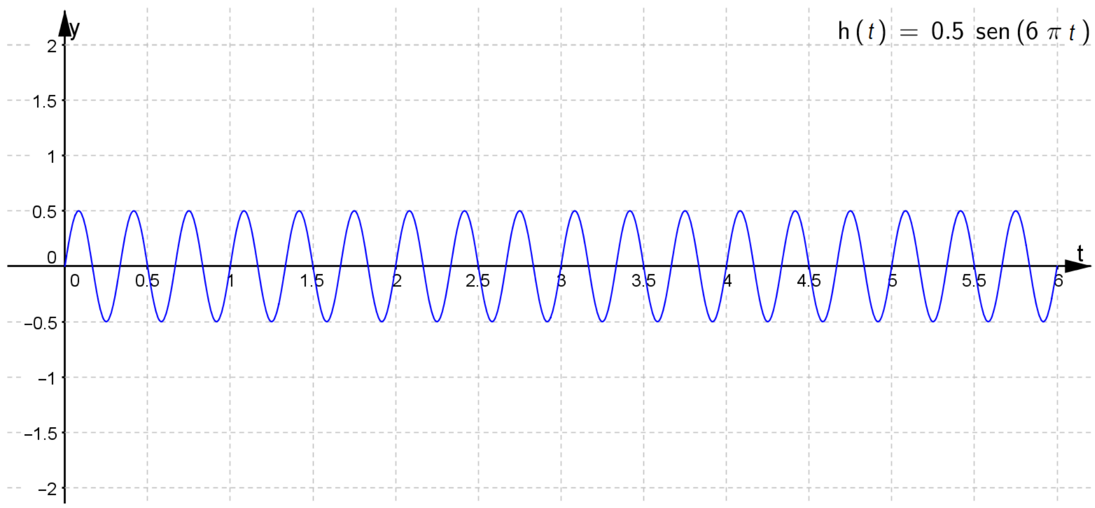

Figura 2.10: Segundo harmônico.

O som possui três propriedades, são elas: altura, intensidade e timbre.

A altura está relacionada com a frequência do som, como vimos na Seção 1.2, quanto mais agudo o som, maior será a sua frequência e, portanto, mais alto o será.

A intensidade do som é o seu volume. Um som com uma determinada altura pode ser emitido forte ou fraco, ou seja, com volume de maior ou menor intensidade. Essa intensidade é a amplitude da onda sonora. Assim, a amplitude determina o volume do

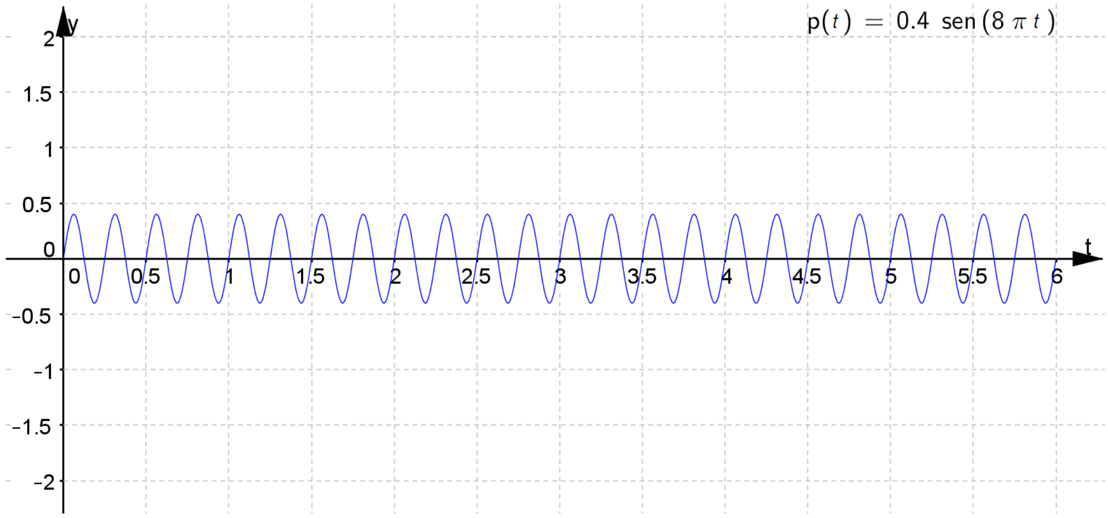

Figura 2.11: Terceiro harmônico.

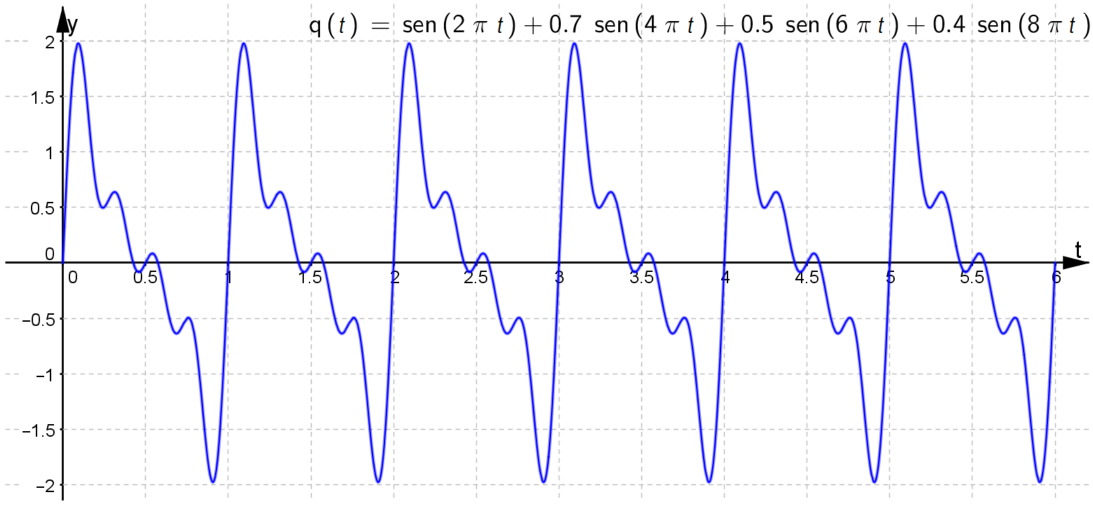

Figura 2.12: Junção do som fundamental e os harmônicos.

som, o quão forte ou fraco ele é. Observe, na Figura 2.8, que o gráfico da função $q(t)$ possui uma amplitude menor que da função $f(t)$. Portanto, representa um som com volume menor, mais fraco.

A outra propriedade do som é o timbre, este nos permite diferenciar se um som está sendo emitido por um determinado instrumento ou outro. O timbre está relacionado com os harmônicos superiores de um som, ou seja, sons que superpostos a uma frequência predominante que determina a nota que está sendo tocada. Vejamos, por exemplo, que a Figura 2.4 e a Figura 2.12 representam a mesma nota musical, porém, possuem timbres diferentes, pois na 2.4 não existem harmônicos superiores, já na figura 2.12 o som possui três harmônicos superiores. É como se fossem emitidos por instrumentos diferentes. Pode-se observar mais detalhes sobre tal fato e sobre as propriedades física do som em [7].

Os instrumentos musicais emitem sons compostos por outros sons, que são os harmônicos superiores, logo sua representação gráfica acaba sendo mais complexa, como mostra a Figura 2.12. Porém, todos os sons complexos podem ser representados por soma de funções seno, com amplitudes mais baixas e frequências múltiplas da frequência inicial. O resultado que nos garante isso é conhecido como Teorema de Fourier e diz que toda função periódica pode ser escrita como uma soma de funções seno, ver em [1] e [11]. Neste trabalho, está sendo discutido apenas sons musicais, logo, toda função que representa um som complexo pode ser representada da seguinte forma

$$f(t) = a_1 \cdot sen(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + a_2 \cdot sen(2\pi \cdot 2f_0 \cdot t) + a_3 \cdot sen(2\pi \cdot 3f_0 \cdot t) + ...$$

onde cada parcela, a partir da segunda, corresponde a um harmônico superior. Observe que o som representado na Figura 2.12 é formada por três harmônicos superiores. Então temos que

$$q(t) = f(t) + g(t) + h(t) + p(t).$$

As representações de cada um desses sons simples estão nas Figuras 2.4, 2.9, 2.10 e 2.11.

Usa-se esse princípio nos sintetizadores para diferenciar o timbre dos sons, fazendo combinações de sons simples.

As aplicações do Teorema de Fourier não se resume apenas à música, abrange uma grande classe de funções e foi desenvolvido quando Fourier estudava problemas de condução de calor.

Capítulo 3

Propostas de como Utilizar a Música nas Aulas de Matemáticas

Apesar da vasta relação entre a Matemática e a Música, este trabalho enfatiza diretamente apenas três conteúdos, para os quais, será apresentada agora uma proposta de aula em forma de sequência didática, podendo serem perfeitamente adaptadas de acordo com a realidade de cada professor e/ou seus alunos.

3.1 Aulas de Razão e Proporção

Público: 6ª Série/7º Ano.

Tempo estimado: 6 aulas.

Objetivos:

- Conhecer a contribuição de Pitágoras através da Matemática para a Música;
- Compreender a importância da Matemática para o desenvolvimento da Música;
- Perceber a diferença entre os sons emitidos por uma corda do violão, tocada em comprimentos diferentes;
- Reconhecer que as subdivisões da corda do violão podem ser representadas por razões;
- Perceber que as razões mais simples (1/2, 2/3, 3/4) da corda, emitem sons parecidos chamados de consonância perfeita;
- Compreender que os sons das escalas musicais ocidental obedecem a leis matemáticas;
- Conhecer a ideia de altura de notas musicais e frequência;
- Compreender a ideia de proporção;

- Perceber a proporção existente entre a altura da nota emitida e o comprimento da corda tocada, assim como da altura da nota emitida e a frequência;
- Reconhecer e identificar grandezas direta e inversamente proporcionais;
- Resolver problemas que envolvam variações proporcionais diretas e inversas entre grandezas;

Desenvolvimento:
1º Momento (1 aula)

- Iniciar a aula tocando uma música no violão;
- Conversar com a turma, a fim de descobrir as afinidades que têm com a música;
- Convidar os alunos a observarem que para produzir o som desejado ao tocar uma música, muitas vezes a corda do violão é particionada pelos dedos do tocador, o que faz com que elas possuam comprimentos diferentes;
- Tocar em apenas uma corda do violão, subdividindo-a, para que os alunos percebam a diferença entre os sons emitidos por ela;

2º Momento (extra-classe)

Nesse momento será proposta para a turma uma atividade, extra-classe, que poderá ser cumprida em grupos compostos por, no máximo, quatro alunos. Eles deverão reunir-se em um período diferente ao de aula e, com base em pesquisas e no que foi discutido na aula, construírem um Monocórdio.

3º Momento (1 aula)

- Relatar sobre os experimentos feitos por Pitágoras que serviram como base para o sistema musical ocidental;
- Realizar experiência com o monocórdio;
- Conceituar razão, a partir das subdivisões feitas na corda do monocórdio;

4º Momento (2 aulas)

- Levantar discussão sobre outras aplicações de Razão na música, ressaltando sua presença na leitura e escrita musical e em ritmos de percussão;
- Resolução de exercícios (situações problemas). Neste momento pode ser proposta as questões 1, 2, 3, 4 e 5 da Seção 4.1.

5º Momento (1 aula)

- Utilizando um violão, transmitir para a turma a ideia de frequência, ao tocar em apenas uma das cordas do violão, subdividindo-a, ao tempo em que também será apresentada a ideia de proporção;
- Deduzir a partir da experiência anterior que quanto maior a frequência mais alta é a nota emitida dando a ideia de grandezas diretamente proporcionais;
- Mostrar a partir do mesmo exemplo que quanto maior o comprimento referente a parte da corda tocada, menor será a altura do som por ela emitida dando a ideia de grandezas inversamente proporcionais;

6º Momento (1 aula)

- Formalizar a ideia de proporção;
- Resolução de exercícios. Incluir, entre estes exercícios, as questões 6 e 7 da Seção 4.1.

Recursos:

- Violão;
- Monocórdio (madeira + corda de violão ou similar);
- Cavalete móvel;
- Tarraxa de violão ou similar;
- Trena;
- Projetor Multimídia;
- Computador;
- Listas de exercícios.

Avaliação:

- Através da participação nas aulas e resolução das atividades propostas.

Referências:

- ABDOUNUR, J. O. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados.* Ed. 4, São Paulo: Escrituras Editora, 2006.
- BIANCHINI, E. *Matemática. 7º ano.* 6ª ed. São Paulo: Moderna, 2006.
- DANTE, L. R.. *Projeto Teláris: Matemática. 7º ano.* 1ª ed. São Paulo: Ática, 2012.

- GRANJA , Carlos Eduardo de Souza Campos. *Musicalizando a Escola: musica conhecimento e educação.* São Paulo: Escrituras Editoras, 2006.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- RODRIGUES J. F. *A Matemática e a Música.* Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/M Acesso em 08.jan.2016.

,

3.2 Aulas de Progressão Geométrica

Público: 1º Ano do Ensino Médio.

Tempo estimado: 6 aulas.

Objetivos:

- Conhecer a contribuição de Pitágoras através da Matemática para a Música;
- Compreender a importância da Matemática para o desenvolvimento da Música;
- Perceber a aplicação de Progressão Geométrica na construção de instrumentos musicais e no temperamento;
- Entender que a relação de frequências na escala cromática obedece a uma Progressão Geométrica;
- Compreender o conceito de Progressão Geométrica;
- Ampliar os conhecimentos sobre sequências e progressões por meio da sua aplicação na Música;
- Descobrir e caracterizar padrões regulares;
- Deduzir a fórmula do Termo Geral da Progressão Geométrica a partir do calculo de frequências de notas musicais;

Metodologia:

1º Momento (1 aula)

- Iniciar a aula tocando uma música escolhida pela turma, para que eles próprios cantem. Tocar a mesma música em tons diferentes;
- Falar sobre altura de notas musicais, usando como exemplo a dificuldade que sentiram para cantar à medida que os tons estavam sendo mudados;

2^{o} Momento (1 aula)

- Mostrar trecho do Filme: "Donald no País da Matemágica";
- Discutir o vídeo e enfatizar a forma utilizada por Pitágoras para formar a escala musical - o ciclo das quintas, a fim de perceber que o ciclo não se fecha;

3^{o} Momento (2 aulas)

- Utilizar a experiência de Pitágoras relativa ao ciclo das quintas, para introduzir o conceito de Progressão Geométrica e a partir daí fazer a dedução da fórmula;
- Explicar a importância da Progressão Geométrica para o sistema temperado;

4^{o} Momento (2 aulas)

- Resolução de exercícios. Dentre eles, os encontrados na Seção 4.2.

Recursos:

- Violão;
- Projetor Multimídia;
- Lista de exercícios.

Avaliação:

- Através da participação nas aulas e resolução das atividades propostas.

Referências:

- ABDOUNUR, J. O. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados.* Ed. 4, São Paulo: Escrituras Editora, 2006.
- FERENCE JUNIOR, M.; LEMON, H. B; STEPHENSON, R. J. *Curso de física : ondas (som e luz).* São Paulo: E. Blucher, pp. 33-83, s/d.
- GRANJA , Carlos Eduardo de Souza Campos. *Musicalizando a Escola: musica conhecimento e educação.* São Paulo: Escrituras Editoras, 2006.
- JÚNIOR, F.N.M.; MEDEIROS, A.;MEDEIROS, C.F. de. *Matemática e Música: As progressões geométricas e o padrão de intervalos da escala cromática.* Bolema, ano 19, n^{o} 20, pp 101-126.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- RODRIGUES J. F. *A Matemática e a Música.* Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/M Acesso em 08.jan.2016.

3.3 Aulas de Trigonometria

Público: 2º Ano do Ensino Médio.

Tempo estimado: 8 aulas.

Objetivos:

- Conhecer a contribuição de Pitágoras através da Matemática para a Música;
- Compreender a importância da Matemática para o desenvolvimento da Música;
- Reconhecer uma função periódica observando o seu gráfico;
- Entender o conceito de Período de uma Função;
- Determinar o período de uma função a partir de seu gráfico;
- Conhecer o conceito de função seno e função cosseno;
- Entender o som como resultado de vibrações no ar;
- Analisar e compreender os parâmetros de uma função do tipo $f(x) = A \cdot sen(2\pi ft)$;
- Compreender o significado físico de cada parâmetro da função do tipo $f(x) = A \cdot sen(2\pi ft)$;
- Construir e analisar gráficos de funções periódicas, especialmente funções seno e cosseno;
- Relacionar a superposição de sons a soma de funções seno simples;
- Compreender a importância das funções periódicas e trigonométricas para o desenvolvimento da música ocidental.

Metodologia

1º Momento (1 aula)

- Mostrar trecho do Filme: "Donald no País da Matemágica";
- Discutir o vídeo e enfatizar a forma utilizada por Pitágoras para formar a escala musical - o ciclo das quintas, a fim de perceber que o ciclo não se fecha;

2º Momento (1 aula)

- Com o auxílio de um computador, gravar sons de notas emitidas por um instrumento musical e também entoada por algum aluno;
- Observar os gráficos produzidos pelo programa de gravação, a fim de perceberem e constatarem a periodicidade;

- Definir funções periódicas.

3º Momento (2 aulas)

- Explicação do comportamento das moléculas de ar na produção de som;
- Utilizar o ciclo trigonométrico para deduzir a fórmula de onda de um som simples;
- Definição de Função Seno e Função Cosseno;

4º Momento (2 aulas)

- Construção de gráficos Amplitude x Tempo;
- A partir de sons musicais, discutir a influência dos parâmetros no gráfico da função $f(x) = A \cdot sen(2\pi ft)$;
- Observar, por meio prático, o significado dos parâmetros no som. Para isso, será tocado, no instrumento, notas diferentes e também uma mesma nota em intensidades diferentes, enquanto é gravado por um programa de gravação para, em seguida, observar o gráfico gerado na interface do programa pela gravação.

5º Momento (2 aulas)

- Superposição de sons e soma de funções seno. Neste momento será discutido o fato de que os sons emitidos pelos instrumentos musicais são compostos por sons simples. Momento propício para observar o gráfico de um som composto e cada som simples que o compões, observando o fato de que o gráfico do som composto é formado pela soma das funções que definem o gráfico gerado por cada som simples. Utilizando, para isso, um programa de computador como o Audacity, GoldWave, o Sound Forge, por exemplo, onde possa ser gravado os sons separados e depois "colar"um arquivo sobre o outro no programa ou salvar um arquivo formado pelos sons separados e, em seguida, fazer a observação do gráfico gerado.
- A relação entre os harmônicos e a soma de funções seno. Observação de que cada som simples que compõe uma nota emitida por um instrumento é chamado Harmônico Superior e o gráfico gerado pela nota é a soma das funções de cada som simples que o compõe.
- Resolução dos exercícios da Seção 4.3.

Recursos:

- Violão ou algum outro instrumento musical;
- Projetor Multimídia;

- Computador com programa de gravação;
- Lista de exercícios.

Avaliação

- Através da participação nas aulas e resolução das atividades propostas.

Referências

- ABDOUNUR, J. O. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados.* Ed. 4, São Paulo: Escrituras Editora, 2006.
- DANTE, L.R.. *Matemática: Contexto e aplicações, vol 2.* 2ª Ed. São Paulo: Ática, 2013.
- FERENCE JUNIOR, M.; LEMON, H. B; STEPHENSON, R. J. *Curso de física : ondas (som e luz).* São Paulo: E. Blucher, pp. 33-83, s/d.
- GRANJA , Carlos Eduardo de Souza Campos. *Musicalizando a Escola: musica conhecimento e educação.* São Paulo: Escrituras Editoras, 2006.
- IEZZI, G.. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 3, Trigonometria.* 8ª ed. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2004.
- KLINE, M. *Matemática para los estudiantes de humanidade.* México, Fondo Cultura Económica, pp. 429-449, 1992.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 2.* 4ª Ed. Mono, São Paulo: Edgard Blucher, 2002.
- R RODRIGUES J. F. *A Matemática e a Música.* Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/ Acesso em 08.jan.2016.

Capítulo 4

Sugestões de Atividades

4.1 Atividades sobre Razão e Proporção

1. No século VI (a.C.) Pitágoras realizou experimentos com um monocórdio - instrumento de uma corda só - e percebeu algumas relações entre a Matemática e a Música. Os estudos de Pitágoras serviram de base para o sistema musical do ocidente.

   João tentou reproduzir a experiência de Pitágoras com o monocórdio, para isso, ele utilizou uma corda com 84 cm de comprimento. Qual a razão entre a parte da corda tocada e a corda inteira se:

   (a) João tocar uma parte da corda referente a 28 cm?

   (b) João tocar 42 cm da corda?

   (c) Ele tocar uma parte equivalente a 56 cm?

   (d) A parte que ele tocar tiver o comprimento de 63 cm?

   (e) João tocar uma parte referente a 21 cm?

2. Pitágoras foi um matemático que estudou as relações entre Música e Matemática com um instrumento composto por uma única corda, o monocórdio. Ele partiu de três sons fundamentais que chamou de consonância, porque os sons combinavam; a oitava, quando tocada na metade da corda; a quarta, se tocarmos $3/4$ do comprimento da corda e a quinta, se tocarmos $2/3$ do comprimento da corda inteira.

   Pedro construiu um monocórdio com uma corda de medida 60 cm. Responda:

   (a) Se Pedro tocou 40 cm da corda inteira, qual a razão entre a parte da corda tocada por Pedro e a corda inteira? A nota tocada por Pedro é alguma das consonâncias perfeita em relação a nota emitida pela corda inteira? Qual?

   (b) E se ele tocou 45 cm, qual a razão entre o comprimento da corda tocada e ela inteira? Qual das consonâncias Pedro tocou?

(c) Se Pedro tocar uma parte da corda que meça 50 cm, ele ouvirá alguma das consonâncias determinadas por Pitágoras?

(d) E se for 30 cm?

3. O diapasão é um instrumento que fornece uma ou mais alturas sonoras determinadas. O diapasão em forma de garfo, ao ser percutido, faz vibrar suas duas extremidades. Modernamente, os diapasões podem ser de sopro e feito de plásticos ou metal, em forma circular ou cilíndrica, alguns proporcionam a escala completa. A altura padrão para afinação de instrumentos é a nota *lá* que possui uma frequência de 440 Hz.

   A primeira corda do violão é afinada em *mí* que tem como frequência 330 Hz. Qual a razão entre frequência da nota *lá* e a da nota *mí*?

   O texto abaixo é referente às questões 4 e 5:

   As escalas musicais diatônicas são formadas por sete notas. A escala de *dó* é:

   dó, ré, mí, fá, sol, lá, sí, dó.

   dó é a primeira, *ré* a segunda, *mí* a terça, e assim por diante. Pitágoras estabeleceu relações entre o comprimento de uma corda esticada e o som emitido por ela quando variamos o comprimento desta mesma apertando-a em pontos diferentes ou com um cavalete móvel e a tocamos em seguida. As relações estabelecidas por Pitágoras estão explicita na Tabela 4.1.

Nota	Primeira	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sétima	oitava
Razão	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 4.1: Relação entre a razão e a nota emitida.

4. Suzana esticou uma corda de 162 cm de comprimento que quando tocada na razão 1/1 emite a nota *dó*. Qual a nota emitida pela corda quando Suzana tocou cada parte com medida igual a:

   (a) 81 cm?

   (b) 144 cm?

   (c) 108 cm?

   (d) 96 cm?

   (e) 128 cm?

   (f) $121,5$ cm?

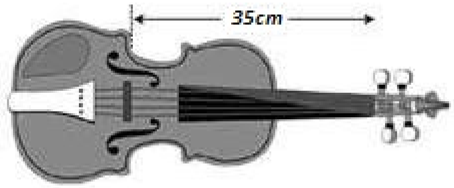

Figura 4.1: Violino

5. Marcos possui um violino idêntico ao da Figura 4.1. A quarta corda, contada de baixo para cima, do violino é afinada em *sol*.

   Responda:

   (a) Qual o comprimento desta corda que deverá ser tocada para soar a nota *sol* uma oitava acima?

   (b) E para que soe a nota dó?

6. Uma corda esticada emite uma nota com frequência de 840 Hz, quando tocada.

   (a) Se tocarmos esta corda em apenas 1/2 do seu comprimento, em qual frequência vibrará a parte desta corda?

   (b) E se tocarmos a 2/3?

   (c) Caso seja tocada apenas 3/4 da corda inteira, em qual frequência vibrará a corda?

7. Pitágoras, em seus estudos com o monocórdio, descobriu que a frequência de vibração de uma corda esticada é inversamente proporcional às subdivisões de seu comprimento. Esta relação estende-se a qualquer instrumento de corda. A quarta corda de um violão é afinada em *lá* e possui a frequência de 110 Hz. O comprimento da parte vibrante da corda solta é de 65 cm. Com base nessas informações, responda:

   (a) Quando um músico toca metade desta corda ele está tocando a nota *lá*, porém uma oitava a cima. Qual à frequência desta outra nota *lá*?

   (b) Qual a medida do comprimento da parte da corda que vibrará nessa frequência?

4.2 Atividades sobre Progressão Geométrica

1. Pitágoras, matemático de Samos que viveu no seculo VI (a.C.) estabeleceu relações entre a Matemática e a Música, seus estudos serviram de base para todo o sistema musical do ocidente. Ele descobriu relações entre o som emitido por uma corda esticada quando tocada e o seu comprimento. Assim, Pitágoras construiu escalas

DÓ	*ré*	*mí*	*fá*	*SOL*	*lá*	*sí*	*dó*	*RÉ*	*mí*	*fá*	*sol*	*LÁ*	*sí*	...
1				x				$\frac{4}{9}$				$\frac{8}{27}$		

Tabela 4.2: Anotações de Paulo

calculando quintas sucessivas e transpondo à mesma oitava quando ultrapassasse esse limite.

Paulo, calculou, utilizando a relação de Pitágoras, quintas sucessivas, mas sem se preocupar em remaneja-las à uma mesma oitava. De uma corda esticada que emitia, quando tocada inteira, a nota *dó* ele calculou as quintas sucessivas anotando sua relação com a corda inteira, como mostra a Tabela 4.2.

(a) Observe que estes números formam um Progressão Geométrica de razão igual a?

(b) Qual o valor de x na tabela, que é a relação da nota *sol*?

(c) A fração que corresponde a nota *sí*, é?

(d) Para transpor as notas à mesma escala, deve-se multiplicar por 2 a fração que indica sua relação até que chegue a oitava que tem como extremidade os dois *dó*. Isso porque a relação de oitava é $\frac{1}{2}$.

Transponha todas as relações à primeira oitava e complete a tabela do *DÓ* ao *dó*.

2. Para encontrar as frequências das notas musicais podemos utilizar a fórmula

$$a_n = a_0 \cdot (\sqrt[12]{2})^n$$

onde n é o número de semitons (meio tom) e a_0 a frequência da nota de "partida", ou seja, a tônica.

Seja a nota *lá* com frequência igual a 220 Hz, qualquer frequência da forma $2^p \cdot 220$, com p um número inteiro, será uma nota *lá* em oitavas diferente:

(a) Qual a frequência da nota *ré* que está localizada a cinco semitons acima da nota *lá*?

(b) A nota *mí* está a três tons e um semitom acima da nota *lá*. Qual a frequência desta nota *mí*?

(c) Qual a nota que está localizada a 12 semitons acima do *lá*?

(d) Que nota está a doze tons do lá?

3. (Adaptada de [13]) A frequência da nota *lá*-padrão (o *lá* central do piano) é 440 Hz e a frequência do *lá* seguinte, mais agudo, é 880 Hz.

A escala musical ocidental (de J.S. Bach para cá), dita cromática, divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão das frequências de notas consecutivas é constante.

Sabendo que essas notas são *LÁ, LÁ#,SÍ, DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MÍ, FÁ, FÁ#, SOL, SOL#, LÁ*, e que a razão de frequência entre um semitom é de aproximadamente $1,06$ determine:

(a) A frequência desse dó, primeiro dó seguinte ao lá padrão.

(b) A frequência do sinal de discar de um telefone, que é o primeiro *sol* anterior ao *lá* padrão.

4. Para colocar-se os trastes de um violão e alguns outros instrumentos de cordas como guitarra, contrabaixo, cavaquinho, entre outros, deve-se colocar de forma que o décimo segundo traste fique localizado exatamente ao meio da distância entre o rastilho e a pestana para que, quando tocada a corda nesta casa, seja emitida a mesma nota que a corda solta, porém uma oitava acima.

   Os trastes devem ser colocados de modo que a distancia até o rastilho obedeça uma Progressão Geométrica, pois cada casa do braço do violão vizinha deve diferenciar-se de meio tom.

   Tomando a pestana do violão como ponto de partida, teremos $a_0 = 65\ cm$ pois é a distância da pestana até o rastilho, será preciso colocar doze trastes, sendo que o a_{12} deve estar na metade da distância entre o rastilho e a pestana do violão (observe a Figura 4.2).

Figura 4.2: Partes do Violão

   Com base nas informações, responda:

   (a) Qual a razão desta Progressão Geométrica?

   (b) A que distância cada um destes trastes deverá estar do rastilho? (se preciso, tome $\sqrt[12]{2} \approx 1,06$)

   (c) A qual distância o décimo nono traste deve estar do rastilho do violão?

4.3 Atividades sobre Trigonometria

1. Considere os gráficos das funções seno dadas nas Figuras 4.3 e 4.4. A partir da análise dos gráficos das funções, responda:

   (a) De acordo com a Figura 4.3, qual das funções representa o som mais grave? Justifique.

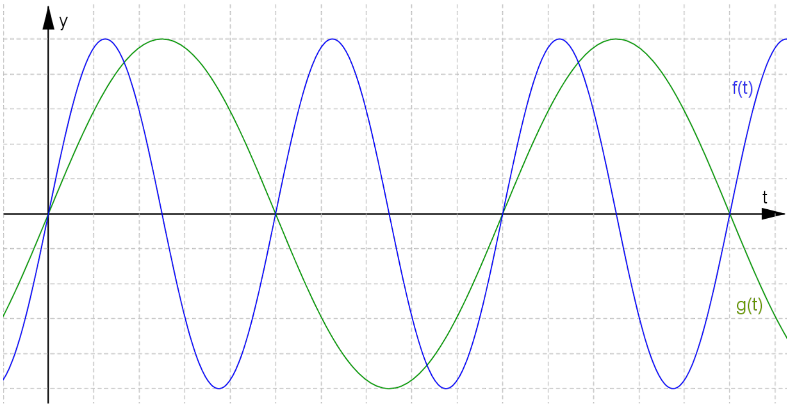

Figura 4.3: Funções que representam sons musicais.

   (b) Qual das funções da Figura 4.4 representa o som com maior volume?

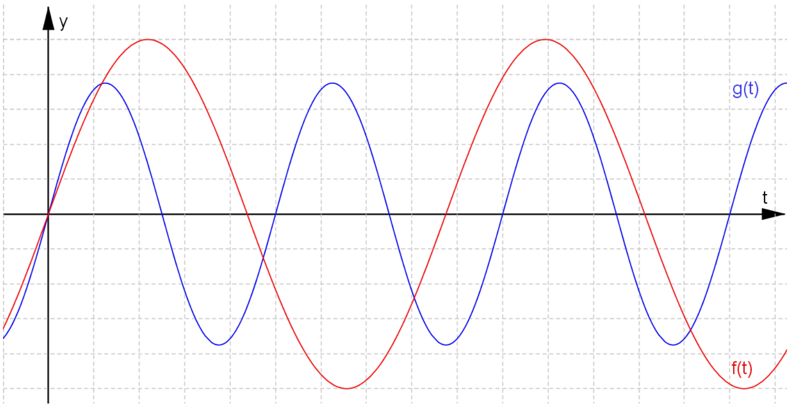

Figura 4.4: Representação gráfica de dois sons musicais.

2. O diapasão, Figura 4.5, é um instrumento em forma de garfo utilizado para afinar instrumentos musicais. Quando percutido, o diapasão emite a nota *lá*, na frequência de $440Hz$. Suponha que certo diapasão foi percutido emitindo o som numa amplitude de $0,7$.

   (a) Qual a lei da função que nos permite construir o gráfico da Amplitude x Tempo que representa esta nota?

   (b) Agora encontre a lei para uma amplitude de $0,4$.

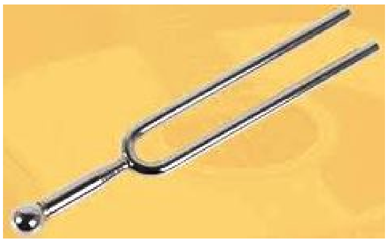

Figura 4.5: Diapasão.

   (c) Se ouvirmos os dois sons sentiremos alguma diferença entre eles? Qual?

3. Um determinado som simples é representado pela função $f(t) = 0,75 \cdot sen(660\pi t)$.
   (a) Qual a amplitude do som?
   (b) Qual a frequência do som?
   (c) Qual o período?

4. Um som simples possui frequência igual a $330HZ$ e uma amplitude de $0,21$. Qual a função que representa esse som?

   O texto abaixo serve de base paras as questões 5, 6 e 7.

   O Teorema de Fourier nos garante que todo som musical, se compõe de sons musicais simples. Ou seja, são compostos por várias frequências em que todas as frequências são múltiplas da primeira. Essas frequências múltiplas são chamadas de harmônicos. Se a primeira frequência for f, os harmônicos superiores são $2f, 3f, 4f$, e assim por diante.

5. A Tabela 4.3 apresenta um som complexo composto por cinco sons simples. As amplitudes estão expressadas em termos da primeira, que possui o valor 1.

Frequência	512				
Amplitude	$1,00$	$0,20$	$0,25$	$0,10$	$0,10$

Tabela 4.3: Som complexo: Frequência x Amplitude

   (a) De acordo com o que diz o Teorema de Fourier, complete a primeira linha da tabela.
   (b) Qual a fórmula que representa este som?

6. Um som emitido por um certo instrumento é representado pela função

$$f(t) = 0,65 \cdot sen(1046\pi t) + 0,42 \cdot sen(2092\pi t) + 0,30 \cdot sen(3136\pi t).$$

   (a) Qual a frequência deste som?

(b) Qual a amplitude e a frequência do primeiro harmônico?

(c) E do segundo harmônico?

7. Um som complexo possui dois harmônicos superiores com amplitudes iguais a $0,37$ e $0,25$ respectivamente. Se a primeira frequência é igual a 220 Hz e possui uma amplitude de $0,50$, Responda:

   (a) Qual a frequência do primeiro harmônico?

   (b) Qual a frequência do segundo harmônico?

   (c) Qual a fórmula deste som?

Capítulo 5

Solução das Atividades

5.1 Solução das Atividades sobre Razão e Proporção

1. (a) Para calcular a razão utilizaremos uma fração em que o numerador representa a medida do comprimento da parte tocada por João, $28cm$, neste caso. O denominador representa a parte inteira da corda, que mede $84cm$. Logo, temos:

$$\frac{28}{84}$$

em seguida simplificamos para encontrar uma fração equivalente irredutível.

$$\frac{28 \div 4}{84 \div 4} = \frac{7}{21}.$$

Logo, a razão é $7/21$.

A resolução dos próximos itens segue de modo análogo.

(b)

$$\frac{42}{84} \Rightarrow \frac{42 \div 42}{84 \div 42} = \frac{1}{2}.$$

Logo, a razão é $1/2$.

(c)

$$\frac{56}{84} \Rightarrow \frac{56 \div 28}{84 \div 28} = \frac{2}{3}.$$

Logo, a razão é $2/3$.

(d)

$$\frac{63}{84} \Rightarrow \frac{63 \div 21}{84 \div 21} = \frac{3}{4}.$$

Logo, a razão é $3/4$.

(e)

$$\frac{21}{84} \Rightarrow \frac{21 \div 21}{84 \div 21} = \frac{1}{4}.$$

Logo, a razão é $1/4$.

2. (a) Como o comprimento da parte da corda tocada é de 40 cm e a corda inteira possui um comprimento de 60 cm. Temos que:

$$\frac{40}{60} \Rightarrow \frac{40 \div 20}{60 \div 20} = \frac{2}{3}.$$

A nota tocada por Pedro é uma consonância perfeita, a quinta.

(b)

$$\frac{45}{60} \Rightarrow \frac{45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{3}{4}.$$

A nota tocada por Pedro é uma consonâncias perfeita, a quarta.

(c)

$$\frac{50}{60} \Rightarrow \frac{50 \div 10}{60 \div 10} = \frac{5}{6}.$$

A nota tocada por Pedro não é uma consonância perfeita.

(d)

$$\frac{30}{60} \Rightarrow \frac{30 \div 30}{60 \div 30} = \frac{1}{2}.$$

A nota tocada por Pedro é uma consonância perfeita, a oitava.

3. Para calcular a razão entre a frequência da nota *lá* e a frequência da nota *mí* fazemos:

$$\frac{440}{330}$$

simplificando esta fração, temos:

$$\frac{440 \div 110}{330 \div 110} = \frac{4}{3}.$$

Portanto, a razão entre a frequência da nota *lá* e da nota *mí* é 4/3.

4. (a) Vamos calcular a razão entre o comprimento da parte da corda tocada e o comprimento total da corda:

$$\frac{81}{162} \Rightarrow \frac{81 \div 81}{162 \div 81} = \frac{1}{2}.$$

Agora, observando na Tabela 4.1, vemos que a razão 1/2 é referente à nota *Dó*. Logo, *Dó* é a nota emitida.

A resolução dos próximos itens seguem de modo análogo.

(b)

$$\frac{144}{162} \Rightarrow \frac{144 \div 18}{162 \div 18} = \frac{8}{9}.$$

Será emitida a nota *Ré*.

(c)

$$\frac{108}{162} \Rightarrow \frac{108 \div 54}{162 \div 54} = \frac{2}{3}.$$

Será emitida a nota *Sol*.

(d)
$$\frac{96}{162} \Rightarrow \frac{96 \div 6}{162 \div 6} = \frac{16}{27}.$$
Será emitida a nota *Lá*.

(e)
$$\frac{128}{162} \Rightarrow \frac{128 \div 2}{162 \div 2} = \frac{64}{81}.$$
Será emitida a nota *Mí*.

(f)
$$\frac{121,5}{162} \Rightarrow \frac{121,5 \div 40,5}{162 \div 40,5} = \frac{3}{4}.$$
Será emitida a nota *Fá*.

5. (a) A relação de oitava é dada pela razão 1 para 2 . Logo, fazemos
$$\frac{1}{2} \cdot 35 = 17,5\ cm$$

   (b) A nota dó é a quarta da escala de sol, portanto a relação entre elas deve ser de 3/4, então:
$$\frac{3}{4} \cdot 35 = 26,25\ cm$$

6. (a) Como a frequência da nota emitida é inversamente proporcional ao comprimento da corda tocada, temos que esta corda vibrará com o dobro da frequência emitida por ela inteira. Logo
$$2 \cdot 840 = 1680\ Hz.$$

   (b) O inverso de 2/3 é 3/2. Logo
$$\frac{3}{2} \cdot 840 = \frac{2520}{2} = 1260\ Hz.$$

   (c) O inverso de 3/4 é 4/3. Daí, temos
$$\frac{4}{3} \cdot 840 = \frac{3360}{3} = 1120\ Hz.$$

7. (a) O comprimento da parte da corda tocada e a frequência da nota emitida são inversamente proporcionais. Então, como o comprimento da parte tocada foi 1/2 do comprimento da corda inteira, logo a frequência será o dobro:
$$2 \cdot 110 = 220\ Hz.$$

   (b) Basta calcular 1/2 de 65 cm.
$$\frac{1}{2} \cdot 65 = \frac{65}{2} = 32,5\ cm.$$

5.2 Solução das Atividades sobre Progressão Geométrica

1. (a) Para calcularmos a razão de uma Progressão Geométrica fazemos o quociente de uma termo com o seu antecessor. Neste caso, é possível calcularmos pelos termos referentes às notas *LÁ* e *RÉ*. Portanto

$$\frac{8}{27} \div \frac{4}{9} = \frac{8}{27} \cdot \frac{9}{4} = \frac{8 \cdot 9}{27 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{8}{4} \cdot \frac{9}{27} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(b) A razão da P.G. é igual a 2/3, como vimos no item anterior. Logo, basta multiplicarmos 1 referente a nota *DÓ* por essa razão. Temos

$$x = 1 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

(c) Para encontrar a nota *sí* pelo ciclo das quintas devemos calcular a quinta da nota *lá* que é a nota *mí*. E, em seguida, calcular a quinta da nota *mí* que será a nota *sí*.

- Observando a Tabela 4.2 vemos que a nota lá está na razão 8/27, como a razão da P.G. é de 2/3, temos

$$\frac{8}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}.$$

Encontramos aí a razão referente a nota *mí*.

- Calculando 2/3 da razão referente à nota *mí*, encontraremos a nota *sí*. Portanto

$$\frac{16}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}.$$

Logo, a relação da nota *sí*, pelo ciclo das quintas é de 32/243.

(d) Devemos multiplicar as frações por 2 até que elas sejam menores que 1 e maiores que 1/2. Observe que a primeira nota que devemos transpor é a nota *ré*, em seguida as demais:

- Ré.

$$2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}.$$

Como

$$\frac{1}{2} < \frac{8}{9} < 1,$$

temos que a razão referente à nota *ré*, na oitava inicial, é 8/9.

- Lá.

$$2 \cdot \frac{8}{27} = \frac{16}{27}.$$

Como

$$\frac{1}{2} < \frac{16}{27} < 1,$$

temos que a razão referente à nota *lá*, na oitava inicial, é 16/27.

- Mí.

$$2 \cdot \frac{16}{81} = \frac{32}{81}.$$

Como esta razão ainda é menor que 1/2, devemos multiplicar por 2 mais uma vez

$$2 \cdot \frac{32}{81} = \frac{64}{81}.$$

Como

$$\frac{1}{2} < \frac{64}{81} < 1,$$

temos que a razão referente à nota *mí*, na oitava inicial, é 64/81.

- Sí.

$$2 \cdot \frac{32}{243} = \frac{64}{243}.$$

Como esta razão ainda é menor que 1/2, devemos multiplicar por 2 mais uma vez, obtendo

$$2 \cdot \frac{64}{243} = \frac{128}{243}.$$

Como

$$\frac{1}{2} < \frac{128}{243} < 1,$$

temos que a razão referente à nota *sí*, na oitava inicial, é 128/243.

- Fá.

Para completar a tabela devemos encontrar a relação da nota *fá*, quinta da nota *sí*, logo

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{128}{243} = \frac{256}{729}.$$

Transpondo para a oitava inicial, temos

$$2 \cdot \frac{256}{729} = \frac{512}{729}.$$

Como

$$\frac{1}{2} < \frac{512}{729} < 1,$$

temos que a razão referente à nota *sí*, na oitava inicial, é 512/729.

Portanto, a Tabela 4.2 fica

DÓ	*ré*	*mí*	*fá*	*SOL*	*lá*	*sí*
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$

2. (a) Temos $a_0 = 220$ e $n = 5$. Substituindo esses valores na equação dada, temos

$$a_5 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^5 = 293,664767... \approx 293.$$

Portanto, a frequência da nota *ré* procurada é igual a 293 Hz.

(b) $a_0 = 220$. Como três tons são seis semitons, temos que três tons e um semitom são sete semitons, daí $n = 7$. Logo,

$$a_7 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^7 = 329,627556... \approx 330.$$

Logo, a frequência da nota *mí* procurada é de 330 Hz.

(c) Temos $a_0 = 220$ e $n = 12$. Logo,

$$a_{12} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{12} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2^{12}}) = 220 \cdot 2 = 440\ Hz.$$

Ora, $440 = 2 \cdot 220$, logo é uma nota *lá* diferenciada de uma oitava.

(d) Como $a_0 = 220$ e doze tons são 24 semitons $n = 24$. Temos

$$a_{24} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{24} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2^{24}}) = 220 \cdot (\sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^{12}}) = 220 \cdot (\sqrt[12]{2^{12}}) \cdot (\sqrt[12]{2^{12}})$$

$$a_{24} = 220 \cdot 2 \cdot 2 = 880\ Hz.$$

Observe que $880 = 2^2 \cdot 220$. Portanto, essa frequência emite uma nota *lá*, duas oitavas acima.

3. Utilizaremos a fórmula do termo geral da P.G. $a_n = a_0 \cdot q^n$ para a resolução de cada item a seguir, em que a_0 é a frequência da nota inicial, q é a razão da P.G. e n o número de semitons.

(a) Da nota *lá* até a nota *dó*, temos 3 semitons, pois do *lá* para o *lá* # temos um; do *lá* # ao *sí* temos mais um semitom e do *sí* para o *dó* há mais um semitom. Totalizando três semitons. Temos, então: $a_0 = 440$, $q = 1,06$ e $n = 3$.

$$a_3 = 440 \cdot (1,06)^3 \Rightarrow a_3 = 440 \cdot 1,191016 \Rightarrow a_3 = 524,04704 \Rightarrow a_3 \approx 524.$$

A frequência do *dó* é de, aproximadamente, 524 Hz.

(b) Para contar os semitons prosseguimos como no item anterior. Como queremos uma nota abaixo, a P.G. passa a ser decrescente, com razão inversa a do item anterior. Temos agora: $a_0 = 440$, $q = 1/1,06$ e $n = 2$.

$$a_2 = 440 \cdot (\frac{1}{1,06})^2 \Rightarrow a_2 = 440 \cdot (0,943396226415094)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = 440 \cdot 0,889996440014239 \Rightarrow a_2 = 391,5984336062652 \Rightarrow a_2 \approx 391\ Hz.$$

A frequência da nota *sol* é de, aproximadamente, 391 Hz.

4. (a) O termo geral de uma P.G. é $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Neste caso, $a_0 = 65$ e, como são 12 trastes, temos $n = 12$. Como o decimo segundo traste está localizado na metade da distância entre o rastilho e a pestana, temos $a_{12} = 65/2$. Daí, tem-se que

$$\frac{65}{2} = 65 \cdot q^{12} \Rightarrow 65 \cdot \frac{1}{2} = 65 \cdot q^{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = q^{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[12]{\frac{1}{2}} = \sqrt[12]{q^{12}} \Rightarrow \frac{\sqrt[12]{1}}{\sqrt[12]{2}} = \sqrt[12]{q^{12}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[12]{2}} = q \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}.$$

Portanto, a razão é $1/\sqrt[12]{2}$.

(b) Cada posição do traste obedecerá à P.G. de termo geral $a_n = 65 \cdot (\frac{1}{\sqrt[12]{2}})^n$. Mas tomando $\sqrt[12]{2} = 1,06$, temos

$$q = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} = \frac{1}{1,06.}$$

Podemos escrever o termo geral agora da seguinte maneira

$$a_n = 65 \cdot (\frac{1}{1,06})^n = \frac{65}{1,06^n}.$$

Daí, temos:

Traste 1.

$$a_1 = \frac{65}{1,06^1} \approx 61,3.$$

Logo, o Traste 1 estará localizado à um distância de aproximadamente $61,3\ cm$.

Traste 2.

$$a_2 = \frac{65}{1,06^2} \approx 57,8.$$

Logo, o Traste 2 estará localizado à um distância de aproximadamente $57,8\ cm$.

Traste 3.

$$a_3 = \frac{65}{1,06^3} \approx 54,6.$$

Logo, o Traste 3 estará localizado à um distância de aproximadamente $54,6\ cm$.

Traste 4.

$$a_4 = \frac{65}{1,06^4} \approx 51,5.$$

Logo, o Traste 4 estará localizado à um distância de aproximadamente $51,5\ cm$.

Traste 5.

$$a_5 = \frac{65}{1,06^5} \approx 48,6.$$

Logo, o Traste 5 estará localizado à um distância de aproximadamente $48,6\ cm$.

Traste 6.

$$a_6 = \frac{65}{1,06^6} \approx 45,8.$$

Logo, o Traste 6 estará localizado à um distância de aproximadamente $45,8\ cm$.

Traste 7.

$$a_7 = \frac{65}{1,06^7} \approx 43,2.$$

Logo, o Traste 7 estará localizado à um distância de aproximadamente $43,2\ cm$.

Traste 8.

$$a_8 = \frac{65}{1,06^8} \approx 40,8.$$

Logo, o Traste 8 estará localizado à um distância de aproximadamente $40,8\ cm$.

Traste 9.

$$a_9 = \frac{65}{1,06^9} \approx 38,5.$$

Logo, o Traste 9 estará localizado à um distância de aproximadamente $38,5\ cm$.

Traste 10.

$$a_{10} = \frac{65}{1,06^{10}} \approx 36,3.$$

Logo, o Traste 10 estará localizado à um distância de aproximadamente $36,3\ cm$.

Traste 11.

$$a_{11} = \frac{65}{1,06^{11}} \approx 34,2.$$

Logo, o Traste 11 estará localizado à um distância de aproximadamente $34,2\ cm$.

Traste 12.

$$a_{12} = \frac{65}{1,06^{12}} \approx 32,3.$$

Logo, o Traste 12 estará localizado à um distância de aproximadamente $32,3\ cm$.

(c) Temos: $a_0 = 65$ e $n = 19$.

$$a_{19} = \frac{65}{1,06^{19}} \approx 21,5\ cm.$$

5.3 Solução das Atividades sobre Trigonometria

1. (a) A função $g(t)$. Pois, há um número menor de oscilações que $f(t)$ em um mesmo intervalo de tempo, desse modo, sua frequência é menor. Portanto, mais grave.

   (b) $f(t)$. Observe que a amplitude, isto é, o valor máximo de $f(t)$ é maior que a amplitude de $g(t)$. Logo, sua intensidade é maior.

2. (a) Podemos representar um som simples pela equação (2.22). Neste caso temos $A = 0,7$ e $f = 440$. Substituindo os valores na equação, temos:

$$y = 0,7 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot 440 \cdot t) \Rightarrow y = 0,7 \cdot sen(880 \cdot \pi \cdot t).$$

   Portanto, a lei da função $f(t) = y$ que representa este som é

$$f(t) = 0,7 \cdot sen(880 \cdot \pi \cdot t).$$

   (b) Vejamos que $A = 0,4$ e $f = 440$. Substituindo esses valores na equação (2.22), temos

$$y = 0,4 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot 440 \cdot t) \Rightarrow y = 0,4 \cdot sen(880 \cdot \pi \cdot t).$$

   Portanto, a lei da função $g(t) = y$ que representa este som é

$$g(t) = 0,4 \cdot sen(880 \cdot \pi \cdot t).$$

(c) Sim. Vimos, na Seção 2.3 que a amplitude A, fisicamente, representa a intensidade do som. Logo, o som com amplitude $0,7$ é emitido com um volume mais intenso que o de amplitude $0,4$.

3. Um som simples é representado pela fórmula (2.22), a teremos como base para a resolução dos itens seguintes.

   (a) A amplitude A é $0,75$.

   (b) Observe que
   $$2f = 660$$
   então
   $$f = \frac{660}{2} \Rightarrow f = 330.$$
   Portanto, a frequência é $f = 330\ Hz$.

   (c) O período é o inverso da frequência, então o período desse som é $\frac{1}{330}s$.

4. Temos: $A = 0,21$ e $f = 220$. Substituindo esse valores na fórmula (2.22), temos
$$y = 0,21 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot 220 \cdot t) \Rightarrow y = 0,21 \cdot sen(440 \cdot \pi \cdot t).$$
Logo, a função que descreve esse som é
$$y = 0,21 \cdot sen(440 \cdot \pi \cdot t).$$

5. (a) Este som possui quatro harmônicos superiores, para completar a tabela devemos calcular as frequências desses harmônicos que, segundo o Teorema de Fourier, são múltiplas da frequência fundamental.

   - Frequência do Primeiro Harmônico
   $$f_1 = 2 \cdot 512 = 1024.$$
   - Frequência do Segundo Harmônico
   $$f_2 = 3 \cdot 512 = 1536.$$
   - Frequência do Terceiro Harmônico
   $$f_3 = 4 \cdot 512 = 2048.$$
   - Frequência do Quarto Harmônico
   $$f_4 = 5 \cdot 512 = 2560.$$

   A Tabela 4.3 fica

Frequência	512	1024	1536	2048	2560
Amplitude	$1,00$	$0,20$	$0,25$	$0,10$	$0,10$

(b) A função que representa este som é

$f(t) = 1,00 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 512 \cdot t) + 0,20 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 1024 \cdot t) + 0,25 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 1536 \cdot t) + 0,10 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 2048 \cdot t) + 0,10 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 2560 \cdot t) \Rightarrow f(t) = sin(1024 \cdot \pi \cdot t) + 0,20 \cdot sin(2048 \cdot \pi \cdot t) + 0,25 \cdot sin(3072 \cdot \pi \cdot t) + 0,10 \cdot sin(4096 \cdot \pi \cdot t) + 0,10 \cdot sin(5120 \cdot \pi \cdot t)$

6. (a) O som fundamental é representado pela primeira parcela da soma, a que possui a maior amplitude. Vamos calcular, então a frequência do som $0,65 \cdot sen(1046\pi t)$, que será a frequência que pede o exercício. Pela fórmula (2.22), vemos que

$$2f = 1046.$$

então,

$$f = \frac{1046}{2} \Rightarrow f = 523.$$

Portanto a frequência deste som é 523 Hz.

(b) A segunda parcela é a que representa o primeiro harmônico, logo, sua amplitude é $0,42$. Do Teorema de Fourier, sabemos que a frequência (f_1) do primeiro harmônico é o dobro da frequência (f_0) do som fundamental, logo

$$f_1 = 2 \cdot f_0 \Rightarrow f_1 = 2 \cdot 523 \Rightarrow f_1 = 1046.$$

Portanto, a frequência do primeiro harmônico é 1046 Hz.

(c) O segundo harmônico é representado pela terceira parcela, logo, sua amplitude é $0,30$. Do Teorema de Fourier, sabemos que a frequência (f_2) do segundo harmônico é o triplo da frequência (f_0) do som fundamental, logo

$$f_2 = 3 \cdot f_0 \Rightarrow f_2 = 3 \cdot 523 \Rightarrow f_2 = 1569.$$

Portanto, a frequência do segundo harmônico é 1569 Hz.

7. (a) A frequência (f_1) do primeiro harmônico, de acordo com o Teorema de Fourier, é o dobro da primeira frequência. Como a primeira frequência é 220 Hz, então

$$f_1 = 2 \cdot 220 \Rightarrow f_1 = 440.$$

Portanto, 440 Hz.

(b) A frequência (f_2) do segundo harmônico é o triplo da primeira frequência. Logo

$$f_2 = 3 \cdot 220 \Rightarrow f_2 = 660.$$

Portanto, 660 Hz.

(c) De acordo com o Teorema de Fourier, a fórmula que representa este som é

$$y = 0,50 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot 220 \cdot t) + 0,37 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot 440 \cdot t) + 0,25 \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot 660 \cdot t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0,50 \cdot sen(440 \cdot \pi \cdot t) + 0,37 \cdot sen(880 \cdot \pi \cdot t) + 0,25 \cdot sen(1320 \cdot \pi \cdot t).$$

Capítulo 6

Conclusão

Foi possível observar que há uma vasta relação entre a Matemática e a Música e que é possível relacioná-las de forma a obter-se aplicações no Ensino Fundamental II, como foi proposto com Razão e Proporção e no Ensino Médio com Progressões Geométricas e Trigonometria.

O presente trabalho teve o objetivo de mostrar algumas possibilidade explorar o notável gosto das pessoas pela música para as aulas de Matemática. Além do que, essa é uma oportunidade de trabalhar não apenas com a parte abstrata da Matemática, mas mostrando algumas aplicações de importância fundamental no desenvolvimento do sistema musical ocidental.

Aqui não foram esgotadas todas as relações existentes entre a Matemática e a Música, ficando, assim, como sugestão para outros estudos, um aprofundamento do que foi abordado ou um incentivo a outras pesquisas de outros conteúdos, como Mínimo Múltiplo Comum, Frações, Proporção, entre outros, os relacionando com formas de compasso, leitura e escrita musical.

Referências Bibliográficas

[1] ABDOUNUR, J. O. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados*. Ed. 4, São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

[2] BIANCHINI, E. *Matemática. 7º ano.* 6ª ed. São Paulo: Moderna, 2006.

[3] BICUDO, F. *O som gostoso de* $y = sen(2\pi nt)$. Calculo;ano 2, n. 13, fev, 2012.

[4] CRUZ, A. M. L..*Matemática e música: compondo um cenário educacional com harmonia*. Dissertação de Mestrado, Ilhéus, BA: UESC, 2013.

[5] DANTE, L.R.. *Matemática: Contexto e aplicações, vol 2.* 2ª Ed. São Paulo: Ática, 2013.

[6] DANTE, L. R.. *Projeto Teláris: Matemática.* 1ª ed. São Paulo: Ática, 2012.

[7] FERENCE JUNIOR, M.; LEMON, H. B; STEPHENSON, R. J. *Curso de física : ondas (som e luz)*. São Paulo: E. Blucher, pp. 33-83, s/d.

[8] GRANJA , C. E. de S. C.. *Musicalizando a Escola: musica conhecimento e educação.* São Paulo: Escrituras Editoras, 2006.

[9] IEZZI, G.. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 3, Trigonometria.* 8ª ed. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2004.

[10] JÚNIOR, F.N.M.; MEDEIROS, A.;MEDEIROS, C.F. de. *Matemática e Música: As progressões geométricas e o padrão de intervalos da escala cromática.* Bolema, ano 19, nº 20, pp 101-126.

[11] KLINE, M. *Matemática para los estudiantes de humanidade.* México, Fondo Cultura Económica, pp. 429-449, 1992.

[12] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1. 10ª ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[13] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 2. 6ª ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[14] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 2.* 4ª Ed. Mono, São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

[15] RODRIGUES J. F. *A Matemática e a Música.* Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf. Acesso em 08.jan.2016.

[16] SADIE, S.. *Dicionário Grove de música.* Edição concisa. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1994.

[17] WISNIK, J. M.. *O som e o sentido: uma outra história das músicas.* 2ª Ed.. São Paulo: Companhia Das Letras, pp. 15-88, 1989.