Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Otimização Linear como ferramenta de integração de saberes no Ensino Médio

Vinicius Valdivia Hernandez

Orientador: Prof. Dr. Luiz Leduino de Salles Neto
Coorientador: Prof. Dr. Thadeu Alves Senne

São José dos Campos
Março, 2017

PROFMAT

Título: *Otimização Linear como ferramenta de integração de saberes no Ensino Médio*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Março, 2017

Hernandez, Vinicius Valdivia

Otimização Linear como ferramenta de integração de saberes no Ensino Médio, Vinicius Valdivia Hernandez – São José dos Campos, 2017.

viii, 43f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Linear optimization as a tool for integrating knowledge in secondary education

1. Otimização Linear. 2. Simplex. 3. Aplicação Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Carlos Marcelo Gurjão de Godoy

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

VINICIUS VALDIVIA HERNANDEZ

OTIMIZAÇÃO LINEAR COMO FERRAMENTA DE INTEGRAÇÃO DE SABERES NO ENSINO MÉDIO

Presidente da banca: Prof. Dr. Luiz Leduino de Salles Neto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Anibal Tavares de Azevedo

Prof. Dr. Armando Zeferino Milioni

Prof. Dr. Luis Felipe Cesar da Rocha Bueno

Data da Defesa: 20 de Março de 2017

Educar a mente sem educar o coração não é realmente educar
(Aristóteles)
Dedicado a Luana Calobrisi Valdivia,
pelo apoio incondicional e amor da minha vida

AGRADECIMENTOS

- Aos que me inspiram em ser o melhor que posso ser:
  - Meus pais, Bal e Chico, pela minha criação e valores humanos a mim ensinados.
  - Meus irmãos Daniel e Vitor, parceiros que fazem a jornada da minha vida ser o melhor que ela possa ser.
  - Aos meus sobrinhos Pedro's; as cunhadas Luana e Silvia, ao cunhado Luiz Fernando, a sogra e amiga Rosana e Vó Gina.
  - A família Abulia.
- Aos que me motivam a seguir a profissão de professor:
  - Orientadores Luiz Leduino e Thadeu, pela confiança e motivação em suas orientações e correções durante a elaboração deste trabalho.
  - Colegas professores que dividiram angústias e conquistas nos dois anos de estudo no curso PROFMAT.
  - Professores que ministraram o curso PROFMAT pelas orientações e paciência durante o curso.
  - Amigos professores Ishii, Leo, Maria, Murilo, Primo, Rafael, Thais e Thiago.
- Em especial, a Luana, Theo, Storvo e Lola; com quem divido cada dia da minha vida.

RESUMO

Uma necessidade vivenciada por professores de Matemática do Ensino Médio é apresentar conceitos matemáticos significativos que possam ser aplicados em várias áreas do conhecimento. Uma maneira é utilizar problemas de otimização linear. E, para que seja possível lidar com esse assunto no Ensino Médio, foi feito, neste trabalho, um estudo para apresentar aos alunos os problemas de otimização linear aplicados em diferentes áreas do conhecimento, com apoio na modelagem de problemas, e os métodos de resolução gráfica em $\mathbb{R}^2$ e o Método Simplex, utilizando apenas conhecimentos do 1º ano do Ensino Médio. Para isso, foi feito um estudo das definições e teoremas que envolvem os métodos de resolução utilizados.

Palavras-chave: Otimização Linear, Simplex, Aplicação Matemática

ABSTRACT

One need experienced by high school mathematics teachers is to present significant mathematical applications that can be applied in several areas of knowledge. It can be done by introducing linear optimization problems. In order to be able to work with this subject in high school, a study was done to present to the students the application of linear optimization in different areas of knowledge with support on the modeling of problems and on the methods of graphic solucion in the plane $\mathbb{R}^2$ and the Simplex method, using only the knowledge of the 1st year of high school. To do this, we studied the definitions and theorems that involve the solution methods used.

KeyWords: Linear Optimization, Simplex, Mathematical Applications

SUMÁRIO

1

INTRODUÇÃO

Com o objetivo de apresentar alguma aplicação matemática para professores e alunos do Ensino Médio, escolhemos discutir a resolução de problemas de otimização linear.

A busca pelo desenvolvimento analítico e crítico do aluno, e a utilização de ferramentas básicas da álgebra e representação gráfica, presentes na modelagem e resolução dos problemas de otimização linear, tem o objetivo de gerar satisfação e confiança aos alunos. Segundo o PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) [8]:

> "Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais."

Com a boa escolha das aplicações envolvidas nos problemas de otimização linear, podemos estimular os alunos a compreender melhor o papel da Matemática na sociedade como um todo. As aplicações, além de agradar os alunos, seguem o objetivo do PCNEM [8]:

> "Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas."

De posse de sólidos conhecimentos teóricos, o professor poderá conduzir os alunos ao melhor entendimento dos métodos, e também possibilitar a continuidade nos estudos de aprofundamento teórico e de apoio no reconhecimento de situações que se encaixam na modelagem de problemas de otimização linear.

> "A aprendizagem é considerada como um processo psico-cognitivo, fortemente influenciado por fatores de motivação e de atitude do aluno-aprendiz. Postula-se, além disso, que para modificar o rendimento dos

> alunos, o fator decisivo é a conduta do docente e que esta, por sua vez, pode ser explicada em função do pensamento do professor - no "pensamento do professor" estão incluídas suas expectativas, sua maneira de conceber o ensino da Matemática e sua forma mais ou menos espontânea de interpretar o saber matemático."([6])

Dessa forma, produzimos um trabalho que poderá ser utilizado por professores e alunos do Ensino Médio. Para os professores destacamos os principais conceitos teóricos que indicam a razão pela qual podemos usar os métodos de resolução gráfica e o Método Simplex analítico. E para o jovem do Ensino Médio, caso queira utilizar o material, ele poderá iniciar seus estudos a partir do Capítulo 3, onde irá encontrar as orientações para resolver problemas de otimização linear.

Assim, no Capítulo 2, será apresentado todo os conceitos teóricos para o entendimento dos métodos que serão apresentados. No Capítulo 3, são feitas orientações para o apoio ao aluno na modelagem dos problemas. Em seguida, no Capítulo 4, resolvemos um problema utilizando o recurso gráfico. Já no Capítulo 5 mostramos o método Simplex analítico para resolução dos problemas de otimização linear. Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas algumas situações que podem ser modeladas como problemas de programação linear.

2

DEFINIÇÕES, TEOREMAS E PROPRIEDADES

Para ministrar um minicurso sobre resolução de problemas de otimização linear usando o método geométrico e o Simplex para o Ensino Médio, são necessários estudos para compreender como os teoremas se aplicam no raciocínio e na construção dos métodos.

Por isso, é necessário compreender a teoria básica que envolve os problemas de otimização linear: forma padrão, teoremas fundamentais, Método Simplex e dualidade. A seguir, temos uma descrição resumida da teoria de programação linear, sendo que a teoria de dualidade será apresentada de forma breve, com o objetivo de registrar possíveis novas aplicações no decorrer do minicurso.

2.1 FORMA PADRÃO

A forma padrão que os problemas de otimização linear se apresentam é a seguinte: minimizar (ou maximizar) uma função com n variáveis (sendo n um número natural), sujeito a algumas restrições e à condição de não negatividade das variáveis. Podemos representar a situação matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & \begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}$$

Chamamos a função linear f a ser minimizada de *função objetivo*, o sistema de equações lineares são chamadas de *restrições* do problema, e ainda, temos as condições de não negatividade das variáveis.

Para simplificar tal organização, podemos usar a notação matricial, dada por:

$$\begin{array}{rl}
Minimizar & f(x) = c^T x \\
S.a & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array} \tag{1}$$

Neste caso, temos, por definição, que:

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é uma matriz $m \times n$, chamada *matriz dos coeficientes.*

- $c^T = [c_1 c_2 \ldots c_n]$ é o *vetor de custos.*

- $x^T = [x_1 x_2 \ldots x_n]$ é o *vetor das variáveis ou incógnitas.*

- $b^T = [b_1 b_2 \ldots b_m]$ é o *vetor dos termos independentes ou de recursos.*

É importante saber que denotamos por x^T o transposto do vetor x.

Logo, podemos descrever um problema de otimização linear pelas seguintes características:

- A função objetivo deve ser minimizada (ou maximizada);

- As restrições do problema são definidas por um sistema de equações lineares;

- As variáveis possuem a restrição de serem não-negativas.

Uma vez que as restrições do problema produzem um sistema de equações lineares, sabemos que esse sistema poderá ter uma única solução ou infinitas soluções ou nenhuma solução.

2.2 DEFINIÇÕES, TEOREMAS E PROPRIEDADES

Agora vamos dedicar atenção ao estudo das definições e teoremas fundamentais da programação linear.

Definição 2.1 *Um ponto x=[x_1 x_2 x_3 ... x_n]^T de* (1) *é chamada de solução viável se satisfizer todas condições de não negatividade e todas as restrições. Um conjunto de soluções viável é chamado de região viável.*

Podemos interpretar uma região viável como sendo o interior e os lados de um poliedro convexo em $\mathbb{R}^n$, determinado pelas restrições do problema. Chamaremos de *pontos extremos* os vértices desse poliedro.

Definição 2.2 *Uma solução viável $\bar{x}$ = [$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_3$ ... $\bar{x}_n$]^T de* (1)*, um problema de minimização, é chamada de solução ótima se f($\bar{x}_1$,$\bar{x}_2$,$\bar{x}_3$, ... ,$\bar{x}_n$)$\leq$ f(x_1,x_2,x_3, ... ,x_n) , para qualquer solução viável x = [x_1 x_2 x_3 ... x_n]^T.*

A solução ótima de um problema, se existir, pode ser interpretada geometricamente em $\mathbb{R}^n$ como sendo um dos pontos extremos da região viável.

Teorema 2.3 *Se existir uma solução ótima para* (1)*, então existe um ponto extremo ótimo.*

Demonstração: Teorema 3.3 de [4].

Usando a representação matricial da Definição 2.1, podemos reorganizar a representação da matriz A, supondo que A possua m colunas linearmente independentes.

Definição 2.4 *A reorganização da matriz A será chamada de partição básica se for da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix},$$

em que:

- $B_{m\times m}$*; é a matriz básica que possui m colunas linearmente independentes (portanto B é não singular).*
- $N_{m\times(n-m)}$*; é a matriz não básica.*

Deste modo, faremos uma partição em relação ao vetor x:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix},$$

em que

- $x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$ é o *vetor das variáveis básicas*;
- $x_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$ é o *vetor das variáveis não básicas.*

Fazendo a substituição dessas representações de A e x na forma padrão matricial, temos:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Conseguimos, assim, uma forma geral para resolver o sistema, sendo necessário apenas atribuir valores para as variáveis não básicas de x_N.

Definição 2.5 *Será considerada solução básica a solução de $Ax = b$ com $(n - m)$ variáveis iguais a zero. Isto é, se $A = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix}$ e $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix}$, então*

$$\begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{cases}$$

Então, $\bar{x}$ é solução básica, e ainda, se $\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ (ou seja, cada componente do vetor $\bar{x}_B$ é não negativo), chamamos de solução básica viável para o problema (1).

Podemos analisar as soluções básicas viáveis em $\mathbb{R}^2$, da seguinte maneira: o conjunto de restrições irá produzir uma região limitada no plano, e quando assumimos que alguma variável é zero (variáveis não básicas), implica em buscar os valores máximos das outras variáveis (básicas). Dessa forma, a busca por soluções irá caminhar pelo limite das restrições.

Teorema 2.6 *Toda solução básica é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis.*

Demonstração: Teorema 3.2 de [4].

2.3 MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex [4] procura uma solução de (1) (caso exista) visitando os pontos extremos da região viável de (1).

Para isso, vamos reorganizar a função objetivo considerando a partição básica

$$f(x) = c^T x = \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N,$$

em que:

- c_B^T: coeficientes das variáveis básicas na função objetivo.
- c_N^T: coeficientes das variáveis não-básicas na função objetivo.

Nesse momento, vamos resgatar a fórmula da solução geral x_B e substituí-la em $f(x)$.

$$f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N$$

Se $\bar{x}$ é uma solução básica de $Ax = b$, temos que

$$f(\bar{x}) = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c_B^T B^{-1} b + c_N^T (0) = c_B^T B^{-1} b$$

Assim, podemos reescrever a função $f(x)$ da seguinte maneira:

$$f(x) = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = f(\bar{x}) - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N$$

Definição 2.7 *Chamamos de vetor multiplicador simplex o vetor $\lambda_{m\times 1}$, representado por $\lambda^T = c_B^T . B^{-1}$*

Para conhecer o vetor multiplicador simplex, devemos resolver o sistema de equações lineares $B^T \lambda = c_B$.

Fazendo agora uma nova substituição do vetor multiplicador na função $f(x)$, temos:

$$f(x) = f(\bar{x}) - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = f(\bar{x}) - \lambda^T N x_N + c_N^T x_N \Rightarrow$$
$$f(x) = f(\bar{x}) + (c_N^T - \lambda^T N) x_N$$

Se desenvolvermos o segundo termo, temos:

$$(c_N^T - \lambda^T N) x_N = ([c_{N_1} \dots c_{N_{n-m}}] - \lambda^T [a_{N_1} \dots a_{N_{n-m}}])[x_{N_1} \dots x_{N_{n-m}}]$$

Portanto, a função objetivo pode ser escrita como

$$f(x) = f(\bar{x}) + (c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1}) x_{N_1} + \dots + (c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}$$

Definição 2.8 *Os coeficientes das variáveis não básicas da função objetivo acima são chamados de custos relativos ou custos reduzidos, e poderão ser representados por $\bar{c_k} = c_{N_k} - \lambda^T a_{N_k} \geq 0$, para $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq n - m$.*

Logo, a função objetivo pode ser escrita como

$$f(x) = f(\bar{x}) + \bar{c}_1 x_{N_1} + \bar{c}_2 x_{N_2} + \dots + \bar{c}_{n-m} x_{N_{n-m}}$$

Propriedade 2.9 *(Condição de otimalidade) Considere a função objetivo*

$$f(x) = f(\bar{x}) + \bar{c}_1 x_{N_1} + \bar{c}_2 x_{N_2} + \ldots + \bar{c}_{n-m} x_{N_{n-m}}$$

Se $\bar{c}_k = c_{N_k} - \lambda^T a_{N_k} \geq 0, k = 1, 2, \ldots, n-m$ então $\bar{x}$ é solução básica viável ótima para o problema (1). Em outras palavras, se os coeficientes $\bar{c}_k$ são não-negativos e se x_N são sempre não-negativos, então a função objetivo nunca terá um valor menor que $f(\bar{x})$, sendo assim o valor ótimo para a função.

Porém, no caso da solução básica não ser ótima, significa então que existe um $\bar{c}_h < 0$, e assim podemos melhorar a solução atribuindo valor para x_{N_h}. Assumindo que $x_{N_h} = \epsilon \geq 0$, temos que:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - B^{-1}a_{N_h}\epsilon = \bar{x}_B - y\epsilon$$

Com $y = B^{-1}a_{N_h}$ e a_{N_h} é a coluna de A associada à variável não básica x_{N_h}.

Definição 2.10 *O vetor $y = B^{-1}a_{N_h}$, responsável por calcular os novos coeficientes das variáveis básicas modificadas pelo método Simplex é chamado de direção Simplex.*

Assim, analisando a possibilidade de conseguir um valor melhor para a função objetivo, vamos buscar uma das variáveis básicas a sair da base, e, para isso vamos reescrever as variáveis básicas como:

$$x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - y_i\epsilon \geq 0, \text{ com } i = 1, \ldots, m$$

Então, temos a seguinte situação:

- Se $y_i \leq 0$, então $x_{B_i} \geq 0$, para todo $\epsilon \geq 0$
- Se $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - y_i\epsilon \geq 0$ então $\epsilon \leq \frac{\bar{x}_{B_i}}{y}$

Logo, como nosso objetivo é melhorar a solução escolhendo uma variável básica, nossa escolha será dada pela seguinte regra

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo } \{\frac{\bar{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0\}$$

Com isso, nossa escolha de uma variável a sair da base, irá gerar uma mudança de uma variável não básica a entrar na base, e assim, teremos uma nova solução básica, que deverá ser verificada se é ótima ou não. É importante saber que, se $y_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, então não irá existir limitante superior para ϵ, ou seja, teremos sempre uma solução factível para todo valor de $\epsilon \geq 0$, e nesse caso dizemos que o problema é ilimitado.

Organizando os passos, o Método Simplex seguirá as seguintes etapas

1. Identificar uma solução básica para o problema (Definição 2.4)

   Para verificar se a solução é ótima:

2. Calcular o vetor multiplicador Simplex (Definição 2.5)

3. Calcular os custos relativos (Definição 2.6) e reescrever a função objetivo em relação a solução básica e estes custos relativos.

4. Verificar se temos a solução ótima (Propriedade 2.9)

   Se sim, chegamos na solução ótima ou ilimitada, e o algoritmo para; se não, devemos

5. Determinar a direção Simplex (Definição 2.7), e caso $y_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, o problema (1) é ilimitado; caso contrário, devemos determinar a variável a sair da base usando a regra

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo } \{\frac{\bar{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0\}$$

6. Atualizar o problema com a troca de variáveis e verificar se a solução é ótima, seguindo a partir da segunda etapa.

   Note que o número de pontos extremos são finitos e então o processo termina (quando ϵ maior que zero).

2.4 DUAL

Os problemas de otimização linear na forma padrão (são também chamados de *problema primal*) apresentam valores para as restrições e coeficientes da função objetivo fixos e pré-determinados. O estudo do *problema dual*, será um problema de otimização linear que irá analisar o comportamento da mudança desses valores fixos no problema primal. Assim o problema dual será construído da seguinte forma em relação ao problema primal padrão:

$\begin{aligned} Minimizar \quad & f(x) = c^T x \\ S.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} Maximizar \quad & g(x) = b^T \lambda \\ S.a \quad & A^T \lambda \leq c \end{aligned}$

Para a construção do problema dual, deve-se prosseguir da seguinte forma, a partir do problema primal na forma padrão:

- O problema dual é de maximização.

- O número de variáveis duais λ_i é igual ao número de restrições do primal.
- O número de restrições duais é igual ao número de variáveis do primal.
- Os coeficientes da função objetivo dual são os coeficientes do vetor recurso do primal.
- A matriz dos coeficientes das restrições duais é a transposta da matriz dos coeficientes do primal.
- O vetor recurso dual é formado pelos coeficientes da função objetivo do primal.

Um resumo para a construção do problema dual a partir do primal é dado pela tabela abaixo:

PRIMAL	DUAL
Minimização	Maximização
Vetor de Recursos	Vetor de Custos
Vetor de Custos	Vetor de Recursos
Restrição $(=)$ $(\leq)$ $(\geq)$	Variável $(Livre)$ $(\leq)$ $(\geq)$
Variável $(Livre)$ $(\leq)$ $(\geq)$	Restrição $(=)$ $(\geq)$ $(\leq)$

Seguem agora alguns teoremas importantes:

Teorema 2.11 *O problema dual do dual é o primal.*

Demonstração: Lema 6.1 de [4]

Teorema 2.12 *As possíveis relações entre o problema dual e primal são:*

1. *Se um dos problemas tem solução ótima, o outro problema também terá solução ótima.*
2. *Se um dos problemas tiver solução ótima ilimitada, o outro problema não terá solução viável.*
3. *Se um dos problemas não tem solução viável, o outro problema não terá solução viável também ou a solução é ilimitada.*

Demonstração: Teorema 6.1 de [4]

3 ESTRATÉGIAS PARA MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO LINEAR

Transferir as informações da situação-problema para linguagem matemática nem sempre será uma tarefa fácil.

> "O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano."([5])

Para ajudar o aluno a criar habilidades nessa etapa, é importante reconhecer as situações aplicadas no problema e ter atenção no processo de modelagem para chegar à forma padrão. Dessa forma, em meio a uma dificuldade dos alunos em prosseguir por essa etapa, o professor estará melhor preparado para orientá-los e apresentar exemplos.

As situações nas quais podemos utilizar a otimização linear são muito diversificadas e de muita curiosidade. É importante saber que, em qualquer situação onde se deseja aplicar as técnicas de otimização linear, as grandezas envolvidas no problema deverão respeitar regras bem definidas, que são as hipóteses de linearidade, aditividade, proporcionalidade e fracionamento. (Ver [3]).

3.1 MODELAGEM DO PROBLEMA

A modelagem dos problemas de programação linear requer certos cuidados. Para melhor orientar os alunos, é conveniente esquematizar uma organização junto com eles para definir etapas.

> "A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia."([5])

Como sugestão de apoio aos alunos, realizar algumas perguntas sobre o problema poderão ajudá-los a escrever matematicamente a situação do problema.

- Quais são as grandezas envolvidas?

- Quais dados foram apresentados?
- O que deseja descobrir (variáveis)?
- Será que é possível escrever sentenças matemáticas que representam a situação do problema?
- E agora, como encontrar uma resposta?

Assim, tentar modelar um problema de otimização linear irá trazer ao aluno um momento de reflexão sobre seus conhecimentos prévios em Matemática, o que resultará no desenvolvimento da análise crítica e da capacidade de conexão com situações práticas.

Alguns pontos levantados por [2], explicando a importância da modelagem matemática como instrumento de pesquisa, são importantes para reflexão do professor, pois, apesar do objetivo no Ensino Médio não ser a pesquisa, nada o impede de utilizar algumas ferramentas e atividades que possam favorecer o caminho para futuros pesquisadores:

- Estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Desenvolver métodos para fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Sugerir prioridades de aplicações de recursos, pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Preencher lacunas onde há falta de dados experimentais;
- Usá-la como recurso para melhorar o entendimento da realidade;
- Usá-la como linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

4 MÉTODO GEOMÉTRICO

Para trabalhar a resolução de problemas de otimização linear com duas variáveis, vamos usar o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Essa representação gráfica do problema é importante, pois apresenta etapas significativas do raciocínio lógico do Método Simplex. Por isso, apresentamos alguns passos para o encontro da regra geral para resolver esse tipo de problema (Teorema 2.3). Assim, podemos iniciar apresentando um problema de otimização linear com duas variáveis. Como exemplo, vamos utilizar o problema abaixo:

Exemplo 4.1 *A comissão organizadora da formatura do 3º ano promoveu grandes ações para levantar dinheiro para uma festa, e contou com a ajuda de outros colegas. Dentre as atividades propostas, uma delas era fazer e vender bombons nos intervalos da escola, e um grupo de amigas decidiu assumir a tarefa.*

Elas sabiam fazer dois tipos de bombons: tradicionais e trufados. Para fazer cada bombom tradicional, elas gastavam 7 minutos e, para os trufados eram necessários 16 minutos. O gasto para fazer um tradicional é de R$ 0,40 e um trufado é de R$ 1,60. Para fazer os bombons, foram investidos R$ 48,00 para compra dos ingredientes e 126 unidades de papel decorativo para embalar os bombons. Sabendo que elas possuem um tempo na semana de 9 horas para fazer os bombons, que os bombons tradicionais conterão 3 papeis decorativos e os trufados terão apenas 1 papel decorativo, e que os bombons tradicionais serão vendidos por R$ 2,00 e os trufados por R$ 3,50, quantos bombons tradicionais e trufados devem ser feitos para ter o maior lucro possível, sendo que todas unidades produzidas serão vendidas?

4.1 MODELAGEM DO PROBLEMA

Devemos ter atenção com esta primeira etapa, pois, a transcrição das informações para um formato matemático não é trivial aos alunos do Ensino Médio. É fundamental ajudá-los a organizar as informações e, com calma, montar as expressões do problema, seguindo como sugestão a Seção 3.1.

Para o Exemplo 4.1, temos:

- O objetivo é maximizar o lucro. O lucro para venda de cada bombom tradicional é R$1,60 e para a trufa é de R$1,90.

- Existe um tempo de preparo para cada tipo de bombom (7 ou 16 min) e um tempo limitado para o trabalho de fazê-los (9 horas).
- Existe um custo para cada unidade de cada tipo de bombom (R$0,40 ou R$1,60) e um limite de gastos(R$48,00).
- Existe a necessidade de embalar os bombons (1 ou 3 unid.) e um limite de embalagens (126 unidades).

As variáveis do problema são:

x_1: número de bombons tradicionais
x_2: número de bombons trufados

Podemos agora montar as equações na forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & L(x) = 1,6x_1 + 1,9x_2 \ (Lucro) \\ \text{S.a} & \begin{array}{ll} 7x_1 + 16x_2 \leq 540 & (Tempo) \\ 0,4x_1 + 1,6x_2 \leq 48 & (Custo) \\ 3x_1 + x_2 \leq 126 & (Embalagens) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array} \end{array} \tag{2}$$

Neste momento, analisar a situação e estudar as restrições do problema irá aproximar o aluno do objetivo do problema. Buscar soluções por testes aleatórios é uma atividade interessante para criar estratégias de cálculo envolvendo a função objetivo e as restrições ao mesmo tempo. Apenas devemos tomar cuidado com o problema proposto para que a solução não "apareça" dessa maneira.

4.2 REPRESENTAÇÃO DAS RESTRIÇÕES $\mathbb{R}^2$

A utilização do plano $\mathbb{R}^2$ para representar as restrições irá funcionar como um recurso visual para analisar os possíveis valores das variáveis em cada restrição. Para isso, utilize o eixo das abscissas para representar a quantidade de bombons tradicionais, o eixo das ordenadas para representar a quantidade de bombons trufados.

$$Tempo : 7x_1 + 16x_2 \leq 540$$
$$Custo : 0,4x_1 + 1,6x_2 \leq 48$$
$$Embalagens : 3x_1 + x_2 \leq 126$$

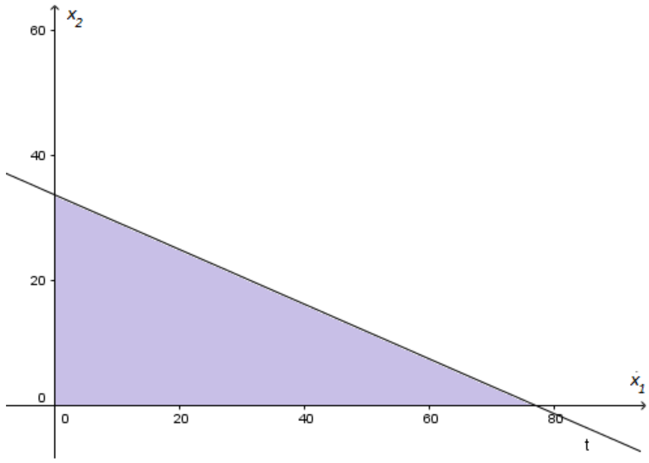

Figura 1: $7x_1 + 16x_2 \leq 540$ (Tempo)

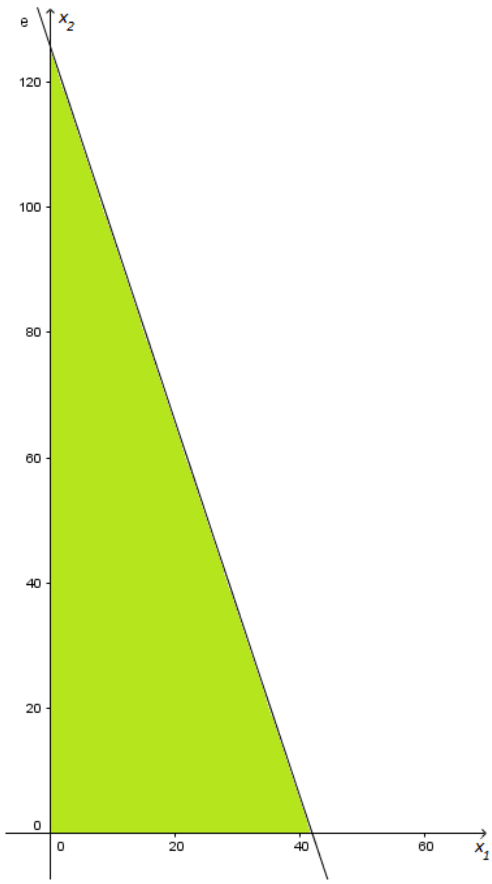

Figura 2: $3x_1 + x_2 \leq 126$ (Embalagens)

Iniciamos a representação das restrições de forma separada, uma a uma, de forma a reconhecer as regiões do plano onde os possíveis valores das variáveis se localizam.

Veja como nas Figuras 1, 2 e 3.

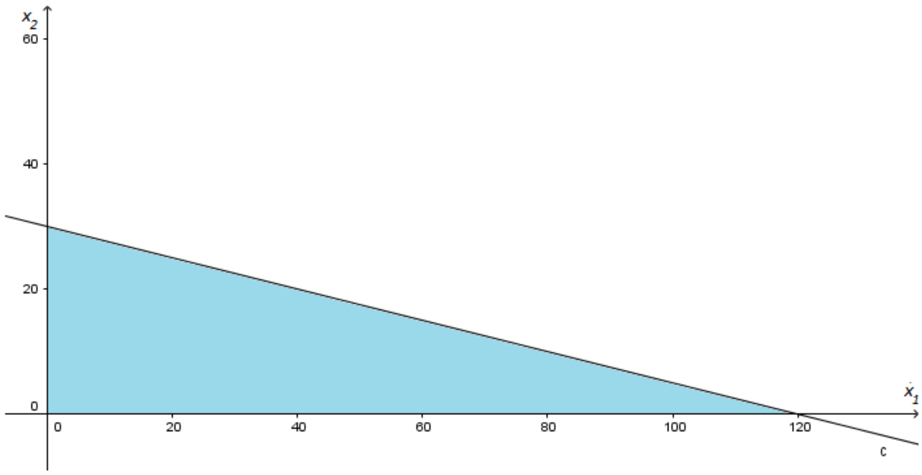

Figura 3: $0,4x_1 + 1,6x_2 \leq 48$ (Custo)

Assim, como as restrições devem ser satisfeitas ao mesmo tempo, vamos colocar todas as representações das restrições no mesmo plano, e identificar uma região onde todas as restrições são respeitadas.

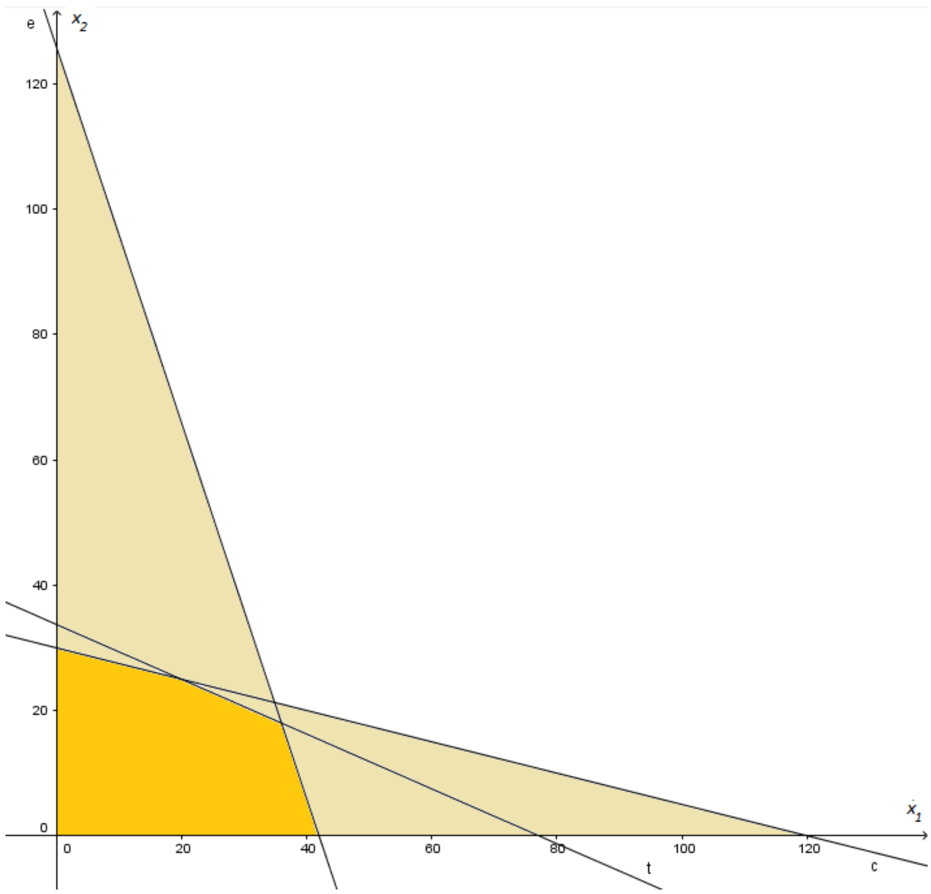

Figura 4: Restrições de tempo, de embalagens e de custo representados geometricamente no mesmo plano cartesiano

Com a região determinada no plano, é possível fazer uma nova análise do problema e melhorar os valores dos testes. Neste momento pode ser feito uma discussão sobre as estratégias adotadas e como elaborar uma estratégia usando a figura no plano.

Essa intervenção com o grupo tem como objetivo apresentar o raciocínio e a lógica usada no Método Simplex. Partindo da escolha de um valor máximo para uma variável dentre todas as restrições, e, a partir dessa escolha, buscamos os valores para outra variável, respeitando todas restrições, de modo que os valores da função objetivo fiquem cada vez maiores. É provável que nesse processo exista a necessidade de alterar o primeiro valor escolhido para primeira variável, trabalhando a ideia de compensação entre os valores para as variáveis.

4.3 SOLUÇÃO ÓTIMA

Aplicando a lógica do Método Simplex no plano cartesiano, não será difícil mostrar que os vértices são os melhores testes a serem feitos. Aplicamos essa estratégia na Figura 5.

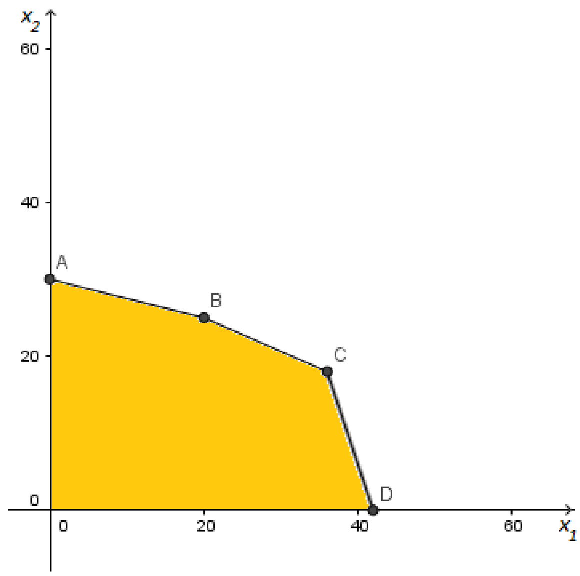

Figura 5: Região viável do problema (2)

Sabendo que o ponto A é a interseção do eixo x_2 com a equação do tempo, que o ponto B é a interseção da equação do tempo com a equação do custo, que o ponto C é a interseção da equação do custo com a equação das embalagens, que o ponto D é a interseção da equação das embalagens com o eixo x_1, obtemos as seguintes coordenadas:

$(x_1; x_2)$
$A = (0; 30)$
$B = (20; 25)$
$C = (36; 18)$
$D = (42; 0)$

Por fim, testamos esses pontos na função objetivo, e verificamos qual deles produz o maior lucro para venda dos bombons.

$\left.\begin{array}{r} A = (0; 30) \\ L(x) = 1,6x_1 + 1,9x_2 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow 1,6 \times 0 + 1,9 \times 30 = 57$
$\left.\begin{array}{r} B = (20; 25) \\ L(x) = 1,6x_1 + 1,9x_2 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow 1,6 \times 20 + 1,9 \times 25 = 79,50$
$\left.\begin{array}{r} C = (36; 18) \\ L(x) = 1,6x_1 + 1,9x_2 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow 1,6 \times 36 + 1,9 \times 18 = 91,80$
$\left.\begin{array}{r} D = (42; 0) \\ L(x) = 1,6x_1 + 1,9x_2 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow 1,6 \times 42 + 1,9 \times 0 = 67,20$

Concluímos que para obter o maior lucro (R$91,80) serão necessários fazer 36 bombons tradicionais e 18 trufas.

4.4 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Uma vez resolvido um problema dessa maneira, é importante revisar o problema e as etapas de raciocínio para chegar no objetivo do problema, que é obter a melhor situação possível para maximizar o lucro na venda dos bombons.

Um novo momento para discussão da situação final, verificando como os pontos dos vértices se relacionam com as restrições, pode ser uma estratégia importante para consolidar o entendimento do problema e aproximar o aluno ao modelo de problema de otimização linear que foi proposto.

Assim, com a segurança de que os alunos entenderam as etapas e as escolhas dos vértices, pode-se apresentar alguns conceitos teóricos, como a forma padrão de modelagem desses problemas, Definições 2.1 e 2.2, e os Teoremas 2.3 e 2.6

A apresentação desses conceitos para os alunos deverá ser feita apenas para consolidar o entendimento da resolução do problema e estimular o aluno a pensar em aplicações distintas onde se pode modelar a situação no formato de um problema de otimização linear.

5

MÉTODO SIMPLEX - ANALÍTICO

Após o primeiro contato com os problemas de otimização linear, e resolver outros problemas com duas variáveis geometricamente, é provável que algum aluno sinta a necessidade de saber o que fazer com problemas com mais de duas variáveis.

Ir para $\mathbb{R}^3$ no caso de três variáveis é uma dedução lógica aceitável. Porém tal escolha não irá nos ajudar a resolver o problema, uma vez no $\mathbb{R}^3$ não é tão fácil de representar as restrições nem conseguir enxergar os pontos extremos da região viável.

Assim, com esse problema técnico para resolver um problema com mais de duas variáveis, podemos apresentar uma nova estratégia para resolver os problemas de otimização linear: o Método Simplex.

Nesta apresentação do Método Simplex, não utilizaremos a representação do problema (1) na forma padrão. Abordaremos o método através da intuição e de recursos algébricos simples. Para isso, vamos apresentar um novo problema.

Exemplo 5.1 *Uma grande padaria deseja aproveitar o melhor da matéria prima na produção de pães. Para isso, precisa ter um controle muito grande sobre o estoque e não deixá-los se deteriorarem com o tempo. O primeiro passo é conhecer a capacidade de estocagem dos produtos na padaria, e evitar ao máximo o gasto com fretes.*

Foi definido, assim, uma quantidade de farinha, fermento e ovos, que deveriam ser utilizados por dia para a fabricação dos pães caseiro, de sal e doce. A quantidade máxima que poderia ser utilizada por dia é de 40 kg de farinha, 1,8 kg de fermento e 95 ovos.

Agora, o objetivo é de saber qual quantidade, em kg, de cada tipo de pão deve ser produzido por dia para que o lucro seja o maior possível. Use as informações da tabela abaixo, para a produção de 1 kg de cada tipo de pão, e encontre o maior lucro possível nessa situação.

	PÃO DE SAL	*PÃO CASEIRO*	*PÃO DOCE*
FARINHA (kg)	*1*	*1*	*1*
FERMENTO (g)	*60*	*25*	*20*
OVOS (unid)	*3*	*1*	*2*
LUCRO (R$)	*3*	*1,5*	*2*

5.1 MODELAGEM DO PROBLEMA

Após um primeiro contato com problemas de otimização linear, é esperado que os alunos tenham mais confiança em executar esta etapa sozinhos. A escolha de uma aplicação diferente irá proporcionar uma experiência muito boa aos alunos, que poderão entender outras formas de relacionar os dados do problema com as variáveis, criando uma sensação confortável para o desenvolvimento das ideias. Seguindo as sugestões de modelagem da Seção 3.1, podemos modelar o Exemplo 5.1, da seguinte forma:

- O objetivo é maximizar o lucro. O lucro com a venda de 1 kg de pão de sal é de R$ 3,00, com pão caseiro é de R$ 1,50 e com pão doce é de R$ 2,00.
- Para produção de 1 kg de qualquer tipo de pão, é necessário 1 kg de farinha, com limite diário de 40 kg.
- A quantidade de fermento necessária para o pão de sal é de 60 g, para o pão caseiro é de 25 g e para o pão doce é de 20 g, com um limite diário de 1,8 kg.
- O número de ovos para o pão de sal é 3, para o pão caseiro é 1 e o pão doce é 2, com um limite diário de 95 ovos.

As variáveis do problema são:

x_1: quantidade (em kg) de pão de sal
x_2: quantidade (em kg) de pão caseiro
x_3: quantidade (em kg) de pão doce

Podemos, agora, montar o problema na forma padrão:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Maximizar: } L(x) = 3x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \ (Lucro) \\
\text{S.a} & \left\{\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 & (Farinha) \\
0,06x_1 + 0,025x_2 + 0,02x_3 \leq 1,8 & (Fermento) \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 95 & (Ovos) \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 &
\end{array}\right.
\end{array}
\tag{3}
$$

5.2 VARIÁVEIS DE FOLGA

A estratégia inicial será de apresentar a transformação das inequações nas restrições em equações. Para isso, a argumentação lógica sobre o estudo das inequações deve ser feito, de modo que os alunos reconheçam que nem sempre os limites das restrições serão utilizados. Como exemplo, pode-se mostrar no Exemplo 4.1 que a solução ótima do problema indica que não será usado todo o dinheiro disponível para fazer os doces.

Por isso, criamos as variáveis de folga x_4, x_5, x_6, não negativas, para cada inequação das restrições, obtendo assim uma nova representação do problema, agora por equações nas restrições.

$$
\begin{array}{ll}
 & Maximizar : L(x) = 3x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 \\
\text{S.a} & 0,06x_1 + 0,025x_2 + 0,02x_3 + x_5 = 1,8 \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 95 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

5.3 APLICANDO O MÉTODO SIMPLEX ANALÍTICO

O Método Simplex parte de uma solução básica inicial viável, e em seguida, busca de outra solução básica viável melhor. Para os alunos abordaremos esse método de resolução através de processos algébricos e de argumentações sobre as decisões tomadas.

5.3.1 *Solução inicial*

Devemos buscar uma solução inicial qualquer de modo que algumas das variáveis sejam iguais a zero e que respeitem todas as restrições. Uma argumentação para essa escolha vem do método geométrico, pois, se a solução está em um vértice da região viável formada pelas restrições do problema, isso significa que as variáveis de folga nessas restrições são iguais a zero.

Para isso, vamos isolar as variáveis de folga em cada restrição.

$$\begin{array}{ll} & Max : L(x) = 3x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \\ & x_4 = 40 - x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{S.a} & x_5 = 1,8 - 0,06x_1 - 0,025x_2 - 0,02x_3 \\ & x_6 = 95 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Com essa organização, vamos assumir que todas as variáveis iniciais do problema x_1, x_2, x_3 valham zero. Assim, teremos uma solução do tipo

$$\begin{array}{lcl} Max : L(x) = 3.0 + 1,5.0 + 2.0 & & \\ x_4 = 40 - 0 - 0 - 0 & & x_4 = 40 \\ x_5 = 1,8 - 0,06.0 - 0,025.0 - 0,02.0 & \Rightarrow & x_5 = 1,8 \\ x_6 = 95 - 3.0 - 0 - 2.0 & & x_6 = 95 \end{array}$$

Uma forma de apresentar a solução do problema é $x^{(1)} = [0\ 0\ 0\ 40\ 1,8\ 95]^T$ e $L(x^{(1)}) = 0$.

É claro que esta não é a melhor solução possível pois não foi produzido nenhum produto. Então, vamos fazer alguma alteração nessa solução para que possamos ter uma melhor solução para o problema.

5.3.2 *Encontrando uma solução melhor*

Para encontrar uma solução melhor, imediatamente buscamos a variável que possui o coeficiente que produz o maior aumento no valor da função objetivo. Esta com certeza, é a melhor escolha para fazer a alteração.

No modelo anterior, a variável x_1 tem o maior coeficiente na função objetivo, e vamos alterá-la para o maior valor possível. Este maior valor possível será fornecido pelas restrições do problema, quando $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Assim, temos:

$$\begin{array}{ccc} x_4 = 40 - x_1 - 0 - 0 & & x_4 = 40 - x_1 \\ x_5 = 1,8 - 0,06x_1 - 0,025.0 - 0,02.0 & \Rightarrow & x_5 = 1,8 - 0,06x_1 \\ x_6 = 95 - 3x_1 - 0 - 2.0 & & x_6 = 95 - 3x_1 \end{array}$$

Sabendo que todas variáveis são não negativas, temos como encontrar o maior valor possível para x_1, respeitando todas restrições ao mesmo tempo.

$$\begin{array}{ccccc} x_4 = 40 - x_1 \geq 0 & & x_1 \leq 40 & & x_1 \leq 40 \\ x_5 = 1,8 - 0,06x_1 \geq 0 & \Rightarrow & 0,06x_1 \leq 1,8 & \Rightarrow & x_1 \leq 30 \\ x_6 = 95 - 3x_1 \geq 0 & & 3x_1 \leq 95 & & x_1 \leq 31,66 \end{array}$$

Concluímos então que o maior valor possível é $x_1 = 30$, e com isso, temos que $x_5 = 0$. Dessa forma, vamos reorganizar a restrição com a variável de folga x_5, isolando a variável x_1:

$$x_5 = 1,8 - 0,06x_1 - 0,025x_2 - 0,02x_3 \Rightarrow x_1 = 30 - \tfrac{5}{12}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{50}{3}x_5$$

Assim, como temos o valor máximo definido para x_1 em uma restrição, devemos garantir que ele seja atingido. Para isso vamos fazer a substituição da variável x_1 pela a expressão que a representa, em função das variáveis x_2, x_3 e x_5, nas outras restrições e função objetivo.

Iremos obter uma nova organização das variáveis para deduzir uma nova solução e garantir o valor máximo para x_1.

$$\begin{array}{c} Max: L(x) = 3x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 40 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 1,8 - 0,06x_1 - 0,025x_2 - 0,02x_3 \\ x_6 = 95 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} Max: L(x) = 3(30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5) + 1,5x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 40 - (30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5) - x_2 - x_3 \\ x_1 = 30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5 \\ x_6 = 95 - 3(30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5) - x_2 - 2x_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} Max: L(x) = 90 + 0,25x_2 + x_3 - 50x_5 \\ x_4 = 10 - \frac{7}{12}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5 \\ x_1 = 30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5 \\ x_6 = 5 + 0,25x_2 - x_3 + 50x_5 \\ \text{Fim da 1}^{\text{a}}\text{ iteração} \end{array}$$

Dessa forma, se fixarmos $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, temos que $x_1 = 30, x_4 = 10$ e $x_6 = 5$ e solução é $x^{(2)} = [30\ 0\ 0\ 10\ 0\ 5]^T$. Para essa solução a função objetivo $L(x)$ tem valor igual a $L(x^{(2)}) = 90 + 0,25.0 + 0 - 50.0 = 90 + 0 + 0 - 0 = 90$.

5.3.3 *É a melhor solução?*

A reflexão sobre a solução encontrada pode ser feita de modo a perceber que existe a possibilidade de alterar os valores de x_2 e x_3 na função objetivo no final da 1ª iteração, pois as variáveis de x_2 e x_3 estão zeradas por escolha e ainda seus coeficiente numéricos na função objetivo são positivos. Isso indica que qualquer mudança em uma dessas variáveis, teremos um resultado melhor que o encontrado anteriormente.

Assim, é importante registrar com os alunos a conclusão dessa análise e entender que essa estratégia considera a possibilidade de melhorar a solução a partir da solução encontrada na segunda iteração

Conclusão:

- em um problema de otimização linear de maximização, se após uma iteração, existir algum coeficiente positivo para alguma variável, a solução poderá ser melhorada.

- em um problema de otimização linear de minimização, se após uma iteração, existir algum coeficiente negativo para alguma variável, a solução poderá ser melhorada.

5.3.4 *Repetição do processo*

Sabendo que é possível encontrar uma melhor solução a partir da 1ª iteração, é possível aplicar a estratégia usada anteriormente para x_2 ou x_3. Como o coeficiente de x_3 é maior que de x_2, vamos buscar qual maior valor possível para x_3 dentro das restrições, quando $x_2 = 0$ e $x_5 = 0$.

$$\begin{array}{c} x_4 = 10 - \frac{7}{12}.0 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{50}{3}.0 \\ x_1 = 30 - \frac{5}{12}.0 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}.0 \\ x_6 = 5 + 0,25.0 - x_3 + 50.0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_4 = 10 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_1 = 30 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_6 = 5 - x_3 \end{array}$$

Lembrando que todas as variáveis são não negativas, buscamos dentre as restrições qual maior valor possível para x_3. Assim temos:

$$\begin{array}{c} x_4 = 10 - \frac{2}{3}x_3 \geq 0 \\ x_1 = 30 - \frac{1}{3}x_3 \geq 0 \\ x_6 = 5 - x_3 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_3 \leq 15 \\ x_3 \leq 90 \\ x_3 \leq 5 \end{array}$$

Concluímos então que podemos assumir ter $x_3 = 5$ e, que por consequência, $x_6 = 0$. Vamos reorganizar a restrição que possui x_6, isolando x_3.

$$x_6 = 5 + 0,25x_2 - x_3 + 50x_5 \Rightarrow x_3 = 5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6$$

Nesse momento, temos de garantir que o maior valor da variável x_3 seja atingido, e para isso, fazemos a substituição da variável x_3 pela expressão que a representa, em função de x_2, x_5 e x_6, nas outras restrições e função objetivo.

$$\begin{array}{c} Max : L(x) = 90 + 0,25x_2 + x_3 - 50x_5 \\ x_4 = 10 - \frac{7}{12}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5 \\ x_1 = 30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{50}{3}x_5 \\ x_6 = 5 + 0,25x_2 - x_3 + 50x_5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} Max : L(x) = 90 + 0,25x_2 + (5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6) - 50x_5 \\ x_4 = 10 - \frac{7}{12}x_2 - \frac{2}{3}.(5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6) - \frac{50}{3}x_5 \\ x_1 = 30 - \frac{5}{12}x_2 - \frac{1}{3}.(5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6) - \frac{50}{3}x_5 \\ x_3 = 5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} Max : L(x) = 95 + 0,5x_2 - x_6 \\ x_4 = \frac{20}{3} - \frac{3}{4}x_2 - 50x_5 + \frac{2}{3}x_6 \\ x_1 = \frac{85}{3} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{100}{3}x_5 + \frac{1}{6}x_6 \\ x_3 = 5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6 \end{array}$$

Fim da 2ª iteração

Logo, se fixarmos $x_2 = x_5 = x_6 = 0$ obtemos $x_1 = \frac{85}{3}, x_3 = 5$ e $x_4 = \frac{20}{3}$ e a solução é $x^{(3)} = [\frac{85}{3}\ 0\ 5\ \frac{20}{3}\ 0\ 0]^T$. Com isso, o valor da função objetivo $L(x)$ é igual a $L(x^{(3)}) = 95 + 0,5.0 - 0 = 95 + 0 - 0 = 95$.

Note que obtemos um resultado melhor para função objetivo, como era esperado. Porém, analisando a função objetivo ao final da 2ª iteração, existe um coeficiente positivo associado a variável x_2, o que nos leva à conclusão de que ainda não encontramos a melhor solução possível.

Por isso, efetuamos a terceira iteração em relação à variável x_2, começando por determinar o maior valor possível para x_2 nas restrições quando $x_5 = x_6 = 0$.

$$\begin{array}{ccc} x_4 = \frac{20}{3} - \frac{3}{4}x_2 - 50.0 + \frac{2}{3}.0 & & x_4 = \frac{20}{3} - \frac{3}{4}x_2 \\ x_1 = \frac{85}{3} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{100}{3}.0 + \frac{1}{6}.0 & \Rightarrow & x_1 = \frac{85}{3} - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 5 + 0,25x_2 + 50.0 - 0 & & x_3 = 5 + 0,25x_2 \end{array}$$

Como todas variáveis são positivas, temos:

$$\begin{array}{ccc} x_4 = \frac{20}{3} - \frac{3}{4}x_2 \geq 0 & & x_2 \leq \frac{80}{9} \\ x_1 = \frac{85}{3} - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq \frac{170}{3} \\ x_3 = 5 + 0,25x_2 \geq 0 & & x_2 \geq -20 \end{array}$$

O maior valor que podemos ter para x_2 é $\frac{80}{9}$, e com isso $x_4 = 0$. Vamos reorganizar a restrição que possui a varável x_4, isolando x_2.

$$x_4 = \frac{20}{3} - \frac{3}{4}x_2 - 50x_5 + \frac{2}{3}x_6 \Rightarrow x_2 = \frac{80}{9} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{200}{3}x_5 + \frac{8}{9}x_6$$

Para garantir que o valor da variável x_2 seja atingido, vamos substituí-la pela expressão que a representa em função de x_4, x_5 e x_6 nas outras restrições do problema e na função objetivo.

$$\begin{array}{ccc} Max : L(x) = 95 + 0,5x_2 - x_6 & & Max : L(x) = 95 + 0,5(\frac{80}{9} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{200}{3}x_5 + \frac{8}{9}x_6) - x_6 \\ x_4 = \frac{20}{3} - \frac{3}{4}x_2 - 50x_5 + \frac{2}{3}x_6 & \Rightarrow & x_2 = \frac{80}{9} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{200}{3}x_5 + \frac{8}{9}x_6 \\ x_1 = \frac{85}{3} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{100}{3}x_5 + \frac{1}{6}x_6 & & x_1 = \frac{85}{3} - \frac{1}{2}(\frac{80}{9} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{200}{3}x_5 + \frac{8}{9}x_6) - \frac{100}{3}x_5 + \frac{1}{6}x_6 \\ x_3 = 5 + 0,25x_2 + 50x_5 - x_6 & & x_3 = 5 + 0,25(\frac{80}{9} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{200}{3}x_5 + \frac{8}{9}x_6) + 50x_5 - x_6 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} Max : L(x) = \frac{895}{9} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{100}{3}x_5 - \frac{5}{9}x_6 \\ x_2 = \frac{80}{9} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{200}{3}x_5 + \frac{8}{9}x_6 \\ x_1 = \frac{215}{9} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{18}x_6 \\ x_3 = \frac{85}{9} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{100}{3}x_5 - \frac{7}{9}x_6 \end{array}$$

Fim da 3ª iteração

Portanto, assumindo que $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, temos $x_1 = \frac{215}{9}, x_2 = \frac{80}{9}$ e $x_3 = \frac{85}{9}$ e a solução é $x^{(3)} = [\frac{215}{9}\ \frac{80}{9}\ \frac{85}{9}\ 0\ 0\ 0]^T$. Assim, o valor da função $L(x)$ é igual a $L(x^{(3)}) = \frac{895}{9} - \frac{2}{3}.0 - \frac{100}{3}.0 - \frac{5}{9}.0 = 99,44$.

E como na função objetivo no final da 3ª iteração não possui nenhum coeficiente positivo para todas as variáveis, devemos parar as iterações.

Assim, o maior lucro possível para a padaria em um dia é de R$ 99,44, se conseguir vender todos os pães que serão produzidos na quantidade, segundo a tabela abaixo:

Pães de sal: 23,88 kg
Pães caseiros: 8,88 kg
Pães doces: 7,22 kg

5.4 RESUMO DO MÉTODO SIMPLEX ANALÍTICO

O Método Simplex apresentado dessa maneira traz a possibilidade de estabelecer etapas de execução do método. As principais etapas foram descritas abaixo:

1. Criar as variáveis de folga, e transformar as inequações em equações.
2. Isolar as variáveis de folga nas equações obtidas.
3. Escolher uma variável inicial do problema para atribuir valor enquanto as outras estão zeradas.
4. Identificar qual o melhor valor possível para a variável sem violar as outras restrições.
5. Garantir que esse melhor valor seja atingido, reescrevendo as equações e a função objetivo do problema.
6. Verificar se a solução é ótima.

Resolver um problema de otimização linear será uma enorme conquista para os alunos. Lembrá-los das dificuldades iniciais no problema e como elas foram superadas faz parte do aprendizado, e dão oportunidade de discutir outras aplicações para esse tipo de problema.

5.5 MÉTODO SIMPLEX EM TABELAS

O Método Simplex em tabelas é uma estratégia de aplicação importante e de fácil entendimento. Não abordaremos esse assunto no momento, e o leitor interessado pode ter mais informações em [1] e em [3].

6 APLICAÇÕES

> "O termo *aplicação matemática* denota do fato de se utilizar seus conceitos para entendimento de fenômenos do mundo real."([2])

A ideia principal desse trabalho é aproximar o conhecimento matemático dos alunos com outras áreas do conhecimento, em especial, a Geografia com a reflexão de problemas urbanos e sociais, e a Biologia, com estudos para ajudar no controle no trabalho com a natureza.

Para elaborar os problemas, foi feito um estudo sobre o modelos mais conhecidos de problemas de otimização linear, que são encontrados em [3]:

- Problema de mistura
- Problema de transporte, transbordo e designação
- Problema de planejamento da produção
- Problema de programação de projetos
- Problema de gestão financeira (fluxo de caixa)
- Problema de meio ambiente
- Problema de corte e empacotamento

Nessas situações, é muito interessante reconhecer como a modelagem dos problemas acontece em relação às informações, e como as ideias do problema podem se encaixar na forma padrão dos problemas de otimização. E, a partir daí, é possível tentar estabelecer esse padrão de raciocínio em outras situações, e buscar novas aplicações. Assim, aplicar e resolver problemas desse tipo está na capacidade de reconhecê-lo de uma forma específica para obter a resposta desejada.

E essa é a grande importância da Matemática no desenvolvimento das pessoas, reconhecer as regras matemáticas usadas na sociedade, e, melhor ainda, resolver possíveis problemas decorrentes dessas regras.

> "O fato de que se ensine matemática na escola responde a uma necessidade ao mesmo tempo individual e social: cada um de nós deve saber

> um pouco de matemática para resolver, ou quando muito reconhecer, os problemas com os quais se depara na convivência com os demais."([6])

A seguir, veremos alguns exemplos, elaborados para o minicurso, de problemas de otimização linear aplicados nas áreas de Geografia e Biologia.

6.1 AUTOMAÇÃO DE HORTAS URBANAS

6.1.1 *Problema com 2 variáveis*

Uma maneira de consumir alimentos frescos é ter em casa uma horta. Assim você terá certeza que não serão usados inseticidas proibidos, e se fizer um bom planejamento, poderá ter vegetais frescos todos os dias.

Sabendo do rigor nos cuidados com a horta, foi criada uma máquina que rega e protege os vegetais de forma programada e automatizada, bastando apenas abastecê-la diariamente. A máquina possui dois recipientes, um para água outro para inseticida natural; o primeiro com capacidade de 2 litros e o outro, com inseticida, que tem capacidade de aplicar 30 doses da substância; e a máquina poderá cuidar de uma área de 3,5 m^2.

A decisão é de plantar apenas alface e tomate, com no mínimo, 10 pés de alface e 5 tomateiros. Sabemos que cada alface ocupa uma área de 900 cm^2 e o tomateiro 4000 cm^2, e que precisam, respectivamente, de 75 ml e 150 ml de água por dia. Uma vez ao dia, a alface receberá uma dose de inseticida e o tomate 3 doses.

Qual deverá ser a quantidade de alface e tomate plantadas nessa horta para que ela produza o máximo de refeições no mês, sabendo que cada região para o plantio de uma alface é capaz de ser aproveitado por até 4 refeições por mês, e cada tomateiro irá produzir 8 refeições por mês?

6.1.2 *Problema com 3 variáveis*

Sabendo do rigor nos cuidados com a horta, foi criada uma máquina que rega e protege os vegetais de forma programada e automatizada, bastando apenas abastecê-la diariamente. Suponhamos, agora, que a máquina possua dois recipientes, um para água outro para inseticida natural; o primeiro com capacidade de 3,5 litros e o outro, com inseticida, com capacidade de aplicar 40 doses da substância, e a máquina poderá cuidar de uma área de 4 m^2.

A decisão é de plantar alface, tomate e cenoura, com no mínimo 10 pés de alface, 5 tomateiros e 10 cenouras. Sabemos que cada alface ocupa uma área de 900 cm^2, o tomateiro, 4000 cm^2, e a cenoura 200 cm^2, e que precisam, respectivamente, de 75 ml, 150 ml e 50 ml de água por dia. Uma vez ao dia, a alface receberá uma dose de inseticida, o tomate, 3 doses, e a cenoura 60% da dose.

Qual deverá ser a quantidade de alface, tomate e cenoura plantadas nessa horta para que produza o máximo de refeições no mês, sabendo que cada região para o plantio de uma alface é capaz de ser aproveitado por até 4 refeições por mês, e cada tomateiro irá produzir 8 refeições por mês e a região de cada cenoura produz 2 refeições?

6.2 ESTUDO SOBRE LOCOMOÇÃO URBANA

O secretário de transporte na cidade de Torvos precisa resolver alguns problemas de locomoção urbana como o congestionamento nas vias principais, e controlar a poluição emitida por carros e ônibus. Para realizar tal tarefa, ele terá disponível por mês R$ 200 000,00, e, assim, fazer a manutenção das vias.

Para buscar uma solução para esses problemas, ele decidiu que iria analisar a situação com três meios de transporte: ônibus, carro e bicicleta; durante o horário de maior movimento ao final da tarde, entre 15:00 até as 19:00.

Assim, foi feito um estudo para saber qual era a capacidade máxima de ocupação nas principais vias (em m^2) pelos meios de transporte para evitar congestionamentos, outro estudo para conhecer o limite aceitável de CO_2 emitido pelos carros e ônibus, e, por fim, qual era o custo necessário de cada meio de transporte para o governo.

Veja o resultado na tabela abaixo:

	Área Ocupada(m^2)	Emissão de CO_2(kg)	Custo(R$)	Nº pessoas
ÔNIBUS	30	16	150,00	420
CARRO	6	0,12	150,00	3
BICICLETA	6	0	50,00	1
LIMITE	15000	1500	200000,00	

Descubra quantos ônibus, carros e bicicletas (que não ultrapassem 500 unidades de bicicletas) poderão trafegar pelas vias principais, nesse horário, para que o máximo de pessoas possam se locomover pela cidade, sem trânsito, respeitando os limites de poluição e o orçamento financeiro do governo.

6.3 APOIANDO OS CORREDORES ECOLÓGICOS

Uma estratégia de pesquisadores para restaurar e aumentar a área de cobertura de vegetação natural de uma região é interligar os fragmentos de áreas naturais que ainda restaram, através dos chamados Corredores Ecológicos. Os Corredores Ecológicos irão propiciar o aumento na dispersão de sementes e melhor sustentabilidade aos animais nativos. Para a implementação desses corredores, é necessária uma grande equipe de profissionais, das mais variadas áreas, uma vez que um projeto como esse irá atingir todos da sociedade.

6.3.1 *Custos de fertilizantes*

Um produtor de leite, que usa toda área de sua fazenda para o gado se alimentar, decidiu ceder uma área de suas terras para que fosse utilizada como Corredor Ecológico. O grupo que propôs o projeto levou um especialista em solo até a região cedida, e constatou que será necessário utilizar fertilizante na terra para poder criar o corredor.

O fertilizante que será usado terá de seguir as seguintes propriedades mínimas: 90 g de nitrogênio por kg de fertilizante, 170 g de fósforo por kg de fertilizante e 130 g de potássio por kg de fertilizante, não podendo ultrapassar 540 g dessas substâncias (nitrogênio - fósforo - potássio) por kg de fertilizante.

Para conseguir um fertilizante como esse, o produtor tem 3 tipos compostos que podem ser misturados, e que possuem as propriedades, por cada kg do composto, conforme mostra a tabela abaixo:

	COMPOSTO A	COMPOSTO B	COMPOSTO C
NITROGÊNIO (g/kg)	10	50	60
FÓSFORO (g/kg)	80	20	50
POTÁSSIO (g/kg)	40	50	30
CUSTO (R$/kg)	10,00	15,00	12,00

Faça um estudo e determine a quantidade de cada tipo de composto para fazer o fertilizante, com o menor custo possível. Estabeleça a relação de proporção entre os compostos utilizados e apresente a quantidade aproximada de cada composto para obter 1 tonelada de fertilizante e o custo dessa produção.

6.3.2 *Escolhendo um caminho para os Corredores Ecológicos*

Com programas de conscientização para as pessoas e o reconhecimento do Estado, foi aprovado um programa para criação de um Corredor Ecológico na cidade de Torvos. Foram localizadas todas as regiões com vegetação nativa e interligadas conforme as possibilidades de relevo e de ocupação urbana. A figura abaixo faz uma representação simplificada do mapeamento:

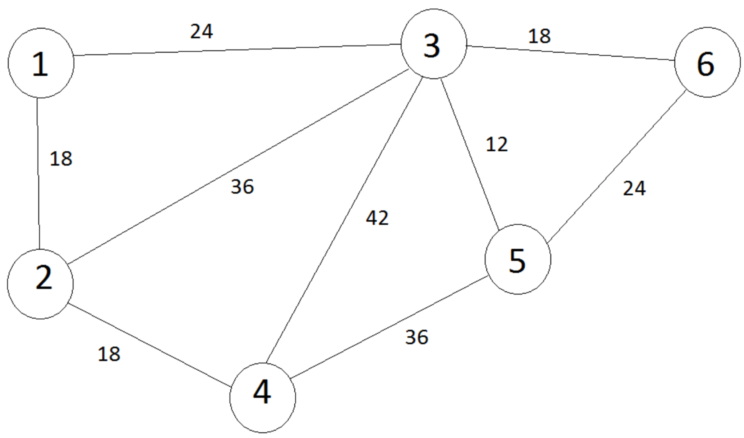

Figura 6: Regiões com vegetação nativa

As regiões circulares representam os centros de natureza nativa e as ligações entre elas são os Corredores Ecológicos, com o tempo, em meses, de implementação e estabilização do corredor entre os centros.

A primeira etapa do projeto é a interligação de todos os centros, construindo um caminho contínuo de Corredores Ecológicos a partir do centro 1. Determine qual é o melhor caminho para os corredores, de modo que o tempo para finalização dessa etapa seja o menor possível.

ATENÇÃO: para resolver este último problema, que pode ser modelado seguindo os problemas de *Transporte, transbordo e designação*[3] e ainda considerar apenas as soluções inteiras e binárias para o problema. Para maiores detalhes, ver [3].

SUGESTÃO: os problemas sobre o Corredor Ecológico podem ser resolvidos utilizando ferramentas computacionais, como por exemplo os aplicativos para smartphone (Android): OR Commented (Operational Research) e Didatic Linear Programming.

7 CONCLUSÃO

Na missão de apoiar o ensino de Matemática para alunos do Ensino Médio, acreditamos que, ao apresentar a resolução de problemas de otimização linear de forma prática e sem necessidade de novos conceitos ou ferramentas avançadas, conseguimos conectar outras áreas de estudo com a Matemática vista no Ensino Médio. Com isso, mostramos que o pensamento matemático pode, de fato, ser interligado com as situações do dia-a-dia e produzir resultados significativos para o desenvolvimento social.

Os estudos dos conceitos teóricos apresentados com rigor, são necessários para compreender a ferramenta utilizada na resolução dos problemas. Outro motivo importante é encaminhar um possível estudo para uma sequência desse minicurso, podendo abordar temas como a dualidade em programação linear ou colocar o método Simplex analítico na forma tabular e inserir ferramentas eletrônicas.

O caminho escolhido para o desenvolvimento dos métodos foi usar a reflexão sobre as tomadas de decisão para modelar e resolver os problemas, uma vez que as habilidades matemáticas necessárias são consideradas básicas para o 1º ano do Ensino Médio. As consequências do caminho adotado favorecem dois pontos importantes presentes no público do Ensino Médio: o primeiro é fazer os alunos vivenciarem uma aplicação da Matemática de maneira simples, com métodos criativos e lógicos, reconhecendo cada vez mais a importância da Matemática no seu desenvolvimento; e o segundo ponto é a aproximação da relação entre professor-aluno, tornando-os parceiros na interpretação e resolução dos problemas.

As aplicações servem para conectar os alunos ao estudo da Matemática, uma vez que o pensamento matemático vem sendo deixado de lado no Ensino Médio, trocado pelas limitações da "decoreba" e execução fria e padronizada na resolução dos problemas, podendo, assim, despertar nos alunos o desejo de aplicar os conhecimentos adquiridos em novas situações.

Por isso, a expectativa é que este material possa ajudar e inspirar professores e admiradores da Matemática, a aplicar a teoria de resolução de problemas de otimização linear com alunos do Ensino Médio. E se cada vez mais escolhermos temas da Matemática Aplicada para atividades no Ensino Médio, conseguiremos mostrar a necessidade de conhecer e controlar as técnicas matemáticas, independentemente da área do conhecimento preferida do aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] G. Lachtermacher, Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões, Elsevier, 2004.

[2] Bassanezi, R. C., Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia, Contexto, 2016.

[3] Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R., Yanasse, H., Pesquisa Operacional para cursos de engenharia: Modelagem e algoritmos, Editora Campus, 2007

[4] Bazaraa, M. S., Linear Programming and networks flows, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[5] Polya, G., A arte de resolver problemas, Interciência, 2006.

[6] Chevallard, Y., Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem, Artmed Editora, 2001.

[7] L. L. Salles Neto, *Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio*, **34** (2006).

[8] Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) portal.mec.gov.br

[9] Corredor Ecológico Vale do Paraíba: um caminho de muitas mãos, www.corredordovale.org.br