

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*O ESTUDO DAS ÁRVORES DE STEINER NO PLANO EUCLIDIANO E  
ALGUMAS APLICAÇÕES ATRAVÉS DO ALGORITMO DE MELZAK*

Jhones Carvalho Coelho

MANAUS

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Jhones Carvalho Coelho

*O estudo das Árvores de Steiner no Plano Euclidiano e algumas aplicações  
através do Algoritmo de Melzak*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS  
2016

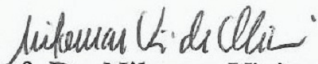
JHONES CARVALHO COELHO

O ESTUDO DAS ÁRVORES DE STEINER NO PLANO EUCLIDIANO E  
ALGUMAS APLICAÇÕES ATRAVÉS DO ALGORITMO DE MELZAK

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Programa de Mestrado Profissional em Matemá-  
tica da Universidade Federal do Amazonas, como  
requisito parcial para obtenção do título de Mestre  
em Matemática.

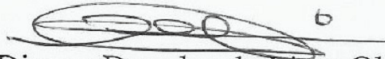
Aprovado em 15 de Dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA



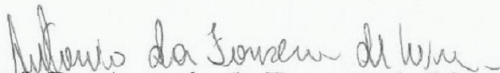
Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

Presidente



Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

Membro



Prof. Dr. Antonio da Fonseca de Lira

Membro

# AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

A minha Esposa, Kátia Dos Santos Coelho, por ter aparecido em minha vida, por está presente comigo em todos os momentos, por ter me dado meus dois Filhos. Minha família que eu amo e que é o meu maior motivo para vencer.

A minha Mãe, Maria Salete Pinto De Carvalho, que sempre me deu e ainda me dá forças para estudar, por sempre ter colocado os filhos como principal prioridade na vida dela. Dedico muito essa minha vitória à ela. Obrigado minha Mãe por tudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela paciência em me ajudar neste trabalho, por acreditar em mim e por ser um grande Mestre.

A meus irmãos, primos e amigos. Pela união e momentos de descontração.

A Universidade Federal do Amazonas (UFAM), por ter me dado essa oportunidade de cursar o PROFMAT e por ser o lugar que sempre me atrai em busca de novos conhecimentos e realizações.

A todos os Professores e aos Colegas do PROFMAT.

## RESUMO

Dado um conjunto de pontos no plano, que denominamos *terminais* ou *pontos regulares*, prova-se que sempre existe uma árvore mínima que os conecta, chamado "árvore de Steiner". Os *terminais* podem representar centros de conexão para rotas, elementos de circuito elétrico, ou de redes diversas. Ou seja, o problema em questão é *otimizar a comunicação* entre os terminais, caso isto seja representado por uma árvore de menor comprimento possível. Nem sempre o "menor comprimento" representa a otimização. O Problema de Steiner possui variações, por exemplo, em que as arestas da árvore só podem seguir direções horizontal e vertical, como no caso de circuitos elétricos. Outra variação é quando cada ponto Steiner tem custo muito alto, e pretende-se obter uma tal árvore com o menor número de tais pontos. Ela será "mínimo local" para comprimento, mas não necessariamente global. Um modelo físico e bastante simples para "árvore de Steiner" é que ela pode ser também realizada por películas de sabão, e por isso compartilham propriedades de Superfícies Mínimas. Como exemplo, considere uma solução de sabão. Ao mergulharmos e retirarmos duas placas paralelas ligadas por pinos, uma película irá conectá-los. Esta representa um grafo de comprimento mínimo que interliga os pinos. Como é sabido, as películas de sabão realizam as Superfícies Mínimas. Para visualizar uma "Árvore de Steiner", recorre-se a Algoritmos Numéricos e Programação Gráfica, os métodos baseiam-se principalmente na implementação dos algoritmos. Este presente trabalho está dividido em três partes: breve história dos problemas de otimização, em destaque o problema de Steiner; teoria sobre a *Árvore Mínima* ou *Árvore de Steiner* e o *Algoritmo de Melzak*; alguns exemplos de casos reais.

Palavras-chave: Pontos Terminais, Árvore Mínima, Árvore de Steiner, Algoritmo de Melzak.

# ABSTRACT

Given a set of points on the plane, we call *terminals* or *regular points*, it proves that there is always a minimum tree that connects called "Steiner tree". The *terminals* may represent hubs to routes, circuit elements, or different networks. That is, the problem in question is to *optimize* to *communication* between terminals, if this is represented by a tree of shortest length possible. Not always the "shorter" is optimization. Steiner problem has variations, for example, the tree can only follow the edges of the horizontal and vertical directions, as in the case of electrical circuits. Another variation is when each Steiner point is very expensive, and it is intended to obtain such a tree with the lowest number of such points. It will be "local minimum" for length, but not necessarily globally. A physical and quite simple model for "Steiner tree" is that it can also be performed by soap films, and therefore share minimum surface properties. As an example, consider a soap solution. Getting closer and withdraw two parallel plates connected by pins, a film will connect them. This represents a minimum length graph that interconnects the pins. As is known, the soap films perform the Minimal Surfaces. To view a "Steiner tree" refers to Numerical Algorithms and Graphical Programming, methods are mainly based on the implementation of the algorithms. This present work is divided into three parts: a brief history of optimization problems, highlighted the Steiner problem; theory of the *Minimum Tre* or *Steiner tree* and *algorithm Melzak*; some examples of real cases.

Keywords: Endpoints , Minimum Tree , Steiner Tree , Algorithm Melzak

# LISTA DE SÍMBOLOS

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| $\mathbb{R}^2$                    | Plano euclidiano.  |
| $S$                               | Ponto de Steiner.  |
| $\angle ABC$                      | Medida do ângulo $ABC$ .   |
| $n$                               | Número de pontos regulares .   |
| $P_i, i = 1, 2, \dots, n$         | Pontos regulares.  |
| $S_i, i = 1, 2, \dots, k$         | Pontos de Steiner.   |
| $k$                               | Número de pontos de Steiner.   |
| $=$                               | Igual.   |
| $L(U, V)$                         | Lúnula do vértice $UV$ .   |
| $W$                               | Região com formato de fatia.   |
| $A_i, i = 1, 2, \dots, n + k - 1$ | Arestas.   |
| $F_i$                             | Força externa em $A_i$ .   |
| $\sum_{i=1}^n$                    | Somatório variando de 1 a $n$ .                                      |
| $L_0$                             | Comprimento de uma aresta.   |
| $E_{ij}$                          | Ponto equilátero dos vértices $P_i$ e $P_j$ .                        |
| $l(SMT(V))$                       | Comprimento da árvore mínima de Steiner euclidiana no conjunto $V$ . |
| $l(MST(V))$                       | Comprimento da árvore mínima geradora para o mesmo conjunto $V$ .    |
| $\rho_d$                          | Razão de Steiner no $\mathbb{R}^d$ .                                 |
| $\rho$                            | Razão de Steiner.  |
| $PASE$                            | Problema da Árvore de Steiner Euclidiano.                            |
| $\square$                         | Indica o fim de uma demonstração.                                    |

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C672e Coelho, Jhones Carvalho Coelho  
O estudo das árvores de Steiner no plano Euclidiano e algumas aplicações através do algoritmo de Melzak / Jhones Carvalho Coelho. 2016  
59 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Árvores Mínima de Steiner. 2. Árvore Geradora Mínima. 3. Problema de Steiner. 4. Algoritmo de Melzak. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>2</b>  |
| <b>Motivação</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1 Um Breve Histórico</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1 Problemas de otimização na antiguidade . . . . .                   | 4         |
| 1.2 Problemas de otimização na Renascença . . . . .                    | 6         |
| 1.3 Problemas de otimização no século XX . . . . .                     | 8         |
| 1.4 O Problema de Steiner . . . . .                                    | 10        |
| <b>2 A árvore de Steiner no <math>\mathbb{R}^2</math></b>              | <b>13</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .   | 13        |
| 2.2 O problema de Torricelli-Fermat . . . . .                          | 13        |
| 2.3 O Problema de Steiner Generalizado . . . . .                       | 18        |
| 2.4 Algumas Definições . . . . .                                       | 19        |
| 2.5 Propriedades das árvores de Steiner . . . . .                      | 20        |
| <b>3 O Algoritmo de Melzak no <math>\mathbb{R}^2</math></b>            | <b>28</b> |
| 3.1 Uma aplicação para encontrar uma árvore de Steiner . . . . .       | 28        |
| <b>4 A Razão de Steiner no <math>\mathbb{R}^2</math></b>               | <b>39</b> |
| <b>5 Alguns casos nos quais se pode utilizar uma árvore de Steiner</b> | <b>41</b> |
| 5.1 Aplicações do PASE na Configuração Molecular . . . . .             | 41        |
| 5.2 Aplicações do PASE no Projeto de Redes . . . . .                   | 42        |
| 5.3 Redes Ópticas . . . . .  | 43        |
| 5.3.1 Otimização de Distribuição de Sinal de Redes . . . . .           | 44        |
| 5.4 Outros casos práticos da Árvore de Steiner . . . . .               | 45        |
| <b>Considerações Finais</b>  | <b>46</b> |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                      | <b>47</b> |

# Introdução

Os problemas de minimizar ou maximizar algo, começaram a muito tempo atrás na antiguidade, desde que houve a necessidade de saber um limite mínimo ou máximo para certas grandezas. O campo da matemática que trata desses estudos chama-se *Otimização*. Na renascença muitos matemáticos eminentes se dedicaram ao estudo dos problemas de extremos.

No século XVII o desenvolvimento das Ciências Naturais determinou o aprofundamento nas pesquisas no campo da otimização, começando pelas tentativas de explicar a Lei da Refração da Luz. Por volta de 1600 o grande matemático francês Pierre de Fermat propôs o princípio ótimo: *O trajeto que um raio luminoso segue num meio heterogêneo é o mais curto possível e corresponde a um caminho mínimo*. A partir desse momento, surgiu a idéia dos chamados "Princípios Variacionais", isto é, as leis da natureza se deduzem de relações extremas, ou seja, entre máximos e mínimos de grandezas. Os problemas de otimização surgem com frequência em questões relacionadas a problemas de Engenharias e Ciências. Dentre estes, o de minimizar uma soma de distâncias é um dos mais antigos na Matemática e, conseqüentemente, foi estudado por matemáticos renomados ao longo da História, tais como Euler e Gauss.

Um problema foi proposto no século XVII pelo matemático Pierre Fermat: *Dados três pontos no plano, qual é o quarto ponto tal que a soma dos comprimentos de suas distâncias aos três pontos dados é mínima?* Em 1640 Torricelle mostrou o primeiro método para solucionar este problema utilizando a construção da interseção de três círculos que ficou conhecido como círculos de Torricelle, conforme será mostrado no capítulo 2. O segundo método foi descoberto por Simpson em 1750. Cerca de 84 anos depois, Heiner juntou esses fatos e propôs uma solução para o problema de Fermat que será mostrado adiante.

O caso citado acima é para três pontos no plano chamados de *terminais*, e o ponto encontrado que minimiza a soma das distâncias é chamado *Ponto de Steiner*. Este problema também pode ser generalizado para  $n$  pontos no plano e perguntar qual é a menor árvore que interconecta esses pontos se pudermos acrescentar tantos pontos extras quanto quisermos, desde que esse acréscimo de pontos corresponda a uma diminuição no comprimento total da árvore formada, esse problema ficou conhecido na literatura como *Problema de Steiner* em homenagem ao geômetra Jacob Steiner(1796 - 1863).

Vários algoritmos foram criados para solucionar o Problema de Steiner, o primeiro deles para o caso euclidiano no plano em um número finito de passos foi proposto por Melzak, conforme será explicado com mais detalhes ao logo deste trabalho.

Na prática, existem uma variedades de situações reais, nas quais, a árvore mínima de Steiner pode ser aplicada como por exemplo: na configuração das moléculas do DNA, na distribuição de redes de sinais ópticos, na distribuição de poços de petróleo, etc. Em geral, são utilizados programas desenvolvidos com o uso dos algoritmos, que nos dão uma construção da topologia desejada para a árvore mínima. A grande vantagem dessas aplicações pode está associada à fatores econômicos, uma vez que se conhece a distância mínima numa rede, então isso trará uma diminuição de custos.

# Motivação

Desde a antiguidade que a geometria é utilizada para resolver situações problemas do dia a dia. Os problemas mais comuns que envolvem a abordagem teórica deste trabalho são aqueles em que se deve encontrar uma posição ou um ponto adequado (ponto ótimo) de onde se pretende fazer uma rede de distribuição com distância mínima. Por exemplo:

1. Digamos que se queira fazer uma distribuição de sinal de internet para 5 lugares diferentes afastados por uma certa distância um do outro e precise saber qual é melhor posição para uma torre de transmissão, para que cada lugar tenha um bom sinal recebido, esse local provavelmente será aquele que tenha a menor distância para esses cinco lugares, isso garante que todos os lugares tenham a mesma qualidade de sinal.
2. Outro problema similar seria se numa vizinhança, digamos com 3 casas, se queira alocar uma caixa d'água para abastecer essas três casas. A primeira coisa que se deve considerar é que as casas tenham o mesmo abastecimento, ou seja, uma casa não pode ficar com vazão de água mais "fraca" que a de outra. Para que isso ocorra, então o lugar mais adequado seria aquele que minimiza a distância para essas casas.

# Capítulo 1

## Um Breve Histórico

Neste capítulo falaremos um pouco sobre o surgimento dos problemas que tratam sobre a natureza de minimizar ou maximizar distâncias, quantidades, espaços, etc. Área esta da matemática que chamamos de "otimização". Assim, espera-se que esta abordagem histórica sirva de motivação para compreendermos a importância da teoria do problema de Steiner para a humanidade.

### 1.1 Problemas de otimização na antiguidade

As grandezas máximas e mínimas, deram origem à problemas que foram objeto de minuciosa consideração no decorrer de toda a evolução da Matemática. Segundo [1], o chamado problema isoperimétrico clássico: "achar, dentre as curvas planas fechadas de um dado comprimento, aquela que limita a maior superfície possível", é considerado o mais antigo dos problemas de máximos e mínimos.

É muito mencionada na literatura sobre a história dos problemas de máximo e de mínimo, a lenda de Dido (também chamada de Elisa ou Elisha), que envolve um problema isoperimétrico. A mesma está contada na Eneida, poema épico escrito pelo grande poeta romano Virgílio (70 a.C. - 19 a.C.). Dido era uma princesa fenícia da cidade de Tiro que fugiu de navio no século IX a.C. para o norte da África quando seu esposo Siqueu foi assassinado pelo rei Pigmalião, que era irmão da Dido. Ela, junto com um grupo dos seus seguidores fundou lá a cidade de Cartago (na atual Tunísia). Segundo a lenda, o rei local lhe diz que podia tomar toda a terra que couber numa bolsa feita com a pele de um único animal. Dido decidiu cortar a pele em tiras muito finas que foram emendadas formando uma longa corda, que usaram para cercar um terreno semicircular na orla marítima. Este tipo de problema, segundo [2], é chamado problema isoperimétrico relativo.

Existem algumas variações da lenda de Dido, por exemplo, se era uma circunferência ou uma semicircunferência, mas em todas se menciona o problema isoperimétrico. A solução de Dido, ou melhor, de algum matemático do seu séquito, foi evidentemente intuitiva. A solução

formal não é simples e foi escrita após alguns séculos. Muitas demonstrações foram publicadas, algumas devidas a grandes matemáticos, mas incompletas. Por exemplo, o eminente matemático germano-suíço Jacob Steiner (1796-1863) resolveu o problema assumindo a existência da solução e considerando três etapas na sua demonstração:

(i) A curva deve fechar uma região convexa.

(ii) Qualquer reta que divida pela metade o perímetro da região, também divide a região em duas partes com a mesma área.

(iii) A semicircunferência de comprimento  $\frac{\pi}{2}$  cujos extremos estejam sobre uma reta dada, é a curva que abrange uma região de área máxima, considerando todas as curvas de perímetro  $\frac{\pi}{2}$  que limitam regiões convexas a um lado da reta e com extremos nela.

O problema isoperimétrico teve uma importância significativa em pesquisas sobre extremos vários séculos depois. Ao respeito [2], entender bem o que é uma solução completa do problema isoperimétrico foi muito importante para a formulação correta do que é a solução de problemas variacionais em Matemática. Principalmente no que se refere ao aspecto existencial das soluções.

Voltando à antiga Grécia, os filósofos tentaram resolver o problema isoperimétrico clássico ainda no século V a.C.. Existem escritos de Aristóteles no século III onde já se afirma que a circunferência é a solução, mas a sua demonstração era de índole filosófica. Os gregos Zenódoro e Pappus também escreveram sobre o problema nas suas obras. Ainda que a solução do problema fosse aceita, não existem registros da época de alguma demonstração matemática de que a circunferência é a curva que maximiza a área para um dado perímetro fixo. Os geômetras gregos formularam e resolveram vários problemas de máximos e de mínimos, os quais aparecem em Os Elementos, de Euclides, e nas obras de Arquimedes e Apolônio.

Um primeiro fato histórico bem documentado está nas obras de Apolônio, um destacado matemático grego da antiguidade, que viveu entre 262 e 190 a.C. Apolônio dedicou o Livro V da sua obra monumental As Cônicas (em oito volumes), a estudar segmentos de comprimento máximo e mínimo traçados com respeito a uma cônica. Segundo [3], Apolônio argumenta em sua introdução que "o tema é dos que parece ser digno de estudo pelo seu próprio interesse"(p. 203). Segundo [4], Apolônio demonstra que se  $O$  é qualquer ponto no interior de uma cônica e se  $OP$  é o segmento de reta de comprimento máximo ou mínimo desde  $O$  até a cônica, então a reta perpendicular a  $OP$  em  $P$  é tangente à cônica em  $P$ ; e se  $O_0$  é qualquer ponto fora da cônica sobre  $OP$ , então  $O_0P$  é o segmento de comprimento mínimo de  $O_0$  até a cônica. Agora, esta propriedade é expressa como a perpendicularidade entre a tangente e normal."(P. 97) (em tradução livre).

Este problema pode ser estudado atualmente num contexto mais geral, como parte das condições de transversalidade em problemas de Cálculo das Variações, uma teoria criada por Euler, no século XVIII. [3] afirma sobre o trabalho de Apolônio que embora devamos admirar o autor por sua elevada atitude intelectual, pode ser pertinentemente observado que o que em seu tempo era bela teoria, sem perspectiva de aplicabilidade à ciência ou engenharia de seu tempo,

a partir daí tornou-se fundamental em campos como a dinâmica terrestre e a mecânica celeste. Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos na verdade são teoremas sobre tangentes e normais de seções cônicas. É claro, em outras palavras, que foi a matemática pura e Apolônio que permitiram, cerca de 1800 anos mais tarde, os Princípios de Newton.

Um pouco mais adiante, o já mencionado livro de Boyer, relata um fato histórico da antiguidade vinculado com problemas de otimização e nos lembra um dos princípios filosóficos de Aristóteles, que atribui a natureza um comportamento otimizador. Heron se interessava por mensuração em todas as formas. Foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada Catóptrica (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte  $F$  a um espelho  $MM_0$  e, então, ao olho  $E$  de um observador, o caminho mais curto possível  $FPE$ , é aquele em que os ângulos  $FPM$  e  $EPM_0$  são iguais. (Boyer 1986, p. 118).

Verifica-se no próximo item, que na Renascença se retoma a ideia do comportamento otimizador da natureza. Outro fato histórico interessante que mostra como naquela época estavam presentes as ideias sobre extremos numa perspectiva correta, embora não necessariamente rigorosa e formal, é a obra de Pappus de Alexandria, que escreveu um livro em volta do 320 a.C. com o título de Coleção Matemática. Ao respeito, [3] escreve: "Papus parece estar seguindo de perto uma obra Sobre figuras isométricas, escrita quase meio milênio antes por Zenodoro (cerca de 180 a.C), do qual alguns fragmentos foram preservados por comentadores posteriores. Entre as proposições no tratado de Zenodoro, havia uma afirmando que de todas as figuras sólidas de igual superfície, a esfera tem o volume máximo, mas evidentemente só se dava uma justificativa incompleta".

No breve resumo acima revela-se a importância atribuída aos problemas extremos desde a antiguidade, na própria Matemática e nas suas aplicações a outras ciências, bem como sua influência no desenvolvimento posterior dos conhecimentos sobre problemas gerais, não só geométricos, de máximos e mínimos.

## 1.2 Problemas de otimização na Renascença

O desenvolvimento das Ciências Naturais no século XVII determinou o aprofundamento nas pesquisas no campo da otimização. Tudo começou pelas tentativas de explicar a Lei da Refração da Luz, que desde a antiguidade se tentou deduzir. No século II a.C., Ptolomeu tentou uma abordagem experimental, mas sua empresa fracassou. No século XVII o cientista holandês Snellius estabeleceu essa lei e, então, surgiu o problema do estudo dos princípios físicos que a fundamentam. Para explicar dita lei, o grande matemático francês Pierre de Fermat propôs, aproximadamente no ano 1600, o princípio ótimo que posteriormente recebeu seu nome e que diz: "O trajeto que um raio luminoso segue num meio heterogêneo é o mais curto possível e corresponde a um tempo mínimo".

A partir desse momento, a ideia dos chamados "Princípios Variacionais", isto é, a convicção de que as leis da natureza se deduzem de relações extremas (relações entre valores máximos e mínimos de grandezas), passou a ser uma das ideias centrais das Ciências Naturais e norteou as pesquisas. Até a segunda metade do século XVII não houve nenhum procedimento geral que permitisse resolver os problemas sobre cálculo de extremos. A necessidade da sua formulação estimulou notavelmente a criação do Cálculo Diferencial.

O primeiro procedimento de caráter geral que tinha por objetivo calcular máximos e mínimos foi descrito por Fermat no ano 1630. Na linguagem atual é o conhecido Teorema de Fermat, encontrado nos livros de Cálculo, pelo qual estabelece que a anulação da derivada num ponto do interior do domínio da função, é uma condição necessária para a existência de extremo neste ponto. Na realidade, Fermat formulou esse resultado somente para polinômios. Na sua forma geral foi obtido por Isaac Newton nos anos sessenta do século XVII e redescoberto, independentemente, por Leibniz e publicado por ele no famoso artigo "Nova methodus promaximis et minimis", com o qual começa a história da Análise Matemática. Observe atentamente o título em latim (na época todos os artigos científicos se publicava nesta língua), que livremente pode-se traduzir como "Novo método para encontrar máximos e mínimos".

No século XVIII Euler e Lagrange criaram os procedimentos de solução de problemas de cálculo de extremos de funções de várias variáveis, com e sem restrições do tipo equação. O principal procedimento, denominado Método dos Multiplicadores de Lagrange, atualmente forma parte do currículo de qualquer curso superior de engenharia ou de Matemática. Os aportes de Lagrange e de Euler permitiram tratar os problemas de otimização nos quais o elemento otimizador não é um número real nem um vetor  $n$  dimensional, mas uma função. Refere-se ao Cálculo de Variações e à solução rigorosa de problemas como o famoso e histórico "Problema da Braquistócrona", onde se propõe encontrar a curva plana ao longo da qual uma partícula se deslizará unicamente por influência da gravidade e sem fricção, num tempo mínimo, de um ponto P a outro Q, considerando estes pontos num plano vertical, Q mais baixo que P, mas não ambos numa mesma reta vertical. Certamente, achar tal curva, é achar a função que a define.

Na revista *Acta Eruditorum* do mês de junho de 1696 (primeira e única revista daquela época) foi publicado o artigo de Johann Bernoulli cujo título traduzimos livremente como "Um novo problema para cuja solução são convidados os matemáticos". Nele propunha-se o problema da braquistócrona, a curva do descenso mais rápido, a partir do qual começa a história do Cálculo de Variações clássico. Houve soluções muito elegantes, com critérios específicos para este problema, como resposta ao desafio formulado por Johann Bernoulli, aos matemáticos dessa época. Cinco matemáticos responderam com soluções: Isaac Newton, Jacques Bernoulli (irmão de Johann), Gottfried Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhauss e Guillaume de L'Hôpital. Destacam-se, dentre as soluções apresentadas, a do próprio Johann Bernoulli, a de Leibniz, a de Jacques Bernoulli (irmão de Johann) e a famosa de Newton, que levou o primeiro lugar.

Quatro das soluções (excluída a de L'Hôpital) foram publicadas na edição de maio da revista. Newton levava anos retirado da vida científica quando esse evento ocorreu e apresentou seu



trabalho anonimamente. Conta-se que quando Bernoulli leu a solução anônima de Newton o identificou e exclamou: "Eu reconheço o leão pela marca da garra".

O desenvolvimento da teoria do Cálculo de Variações prosseguiu no transcurso de mais dois séculos. Além das condições necessárias de primeira ordem (equações de Euler-Lagrange), foram descobertas condições suficientes de segunda ordem para dois tipos de extremos: forte e fraco, nos trabalhos de Legendre, Jacobi e Weierstrass, bem como a atualmente chamada teoria de Hamilton-Jacobi que permitiu construir a teoria do campo de Kneser e Hilbert.

Os princípios variacionais demonstraram serem umas ferramentas muito poderosas na mecânica, na óptica e na eletrodinâmica, com muitas aplicações à engenharia. Na física, nas áreas de relatividade e mecânica quântica, aparecem inúmeros exemplos que revelam o poder do Cálculo de Variações.

### **1.3 Problemas de otimização no século XX**

No século XX, na década de trinta, considerava-se que o assunto dos problemas extremais estava praticamente esgotado. Mas em 1939 o matemático russo Leonid Vitaliyevich Kantorovich foi convidado a oferecer uma consultoria para uma empresa dedicada à produção de madeira compensada. Motivado pelos problemas encontrados criou novos métodos de estudo e solução da classe de problemas de otimização que utilizavam exclusivamente funções lineares na formulação da função objetivo e das equações e inequações das restrições.

Foram estabelecidos os fundamentos de um novo ramo da teoria dos problemas de otimização, após a formalização do problema, hoje chamado Programação Linear. Na realidade, embora o nome "Programação Linear" já esteja generalizado, existe certa confusão com a aceção da palavra programação, que está muito vinculada com a informática. Melhor seria utilizar a expressão "Otimização Linear", mas é tarde para alguém tentar obrigar a troca de nome.

Na época de Kantorovich sua descoberta não teve difusão nem impacto científico, principalmente porque o ditador soviético Josef Stalin considerava antimarxista a aplicação de métodos matemáticos na economia, e os que tentavam eram fortemente reprimidos. Foi em 1975 que Kantorovich recebeu o Prêmio Nobel, conjuntamente com o economista norte-americano T. Ch. Kupmans, pelos resultados obtidos e suas aplicações econômicas.

A história que aparece na maioria dos livros considera que a Programação Linear se desenvolveu a partir da quarta década do século XX. Aqui surgiu o nome Pesquisa Operacional (PO), que é bem mais abrangente que a Programação Linear (PL), que é um ramo seu. O nascimento da PO foi fruto da Segunda Guerra Mundial, contexto em que foi gerada.

A Administração Militar inglesa convocou um grande grupo de cientistas de diferentes especialidades, incluindo vários matemáticos, para estudar a solução de problemas táticos e estratégicos associados à defesa do país, aplicando o método científico a estes e outros problemas de índole militar. Devido aos esforços bélicos, existia uma necessidade urgente de assinar recursos escassos às operações militares e às atividades dentro de cada operação, na forma mais eficiente

possível. O nome de Pesquisa Operacional foi dado, aparentemente, porque a equipe estava desenvolvendo a atividade de pesquisar operações militares, como, por exemplo, o desenvolvimento do uso do novo radar no combate aéreo; o gerenciamento das operações anti-submarinas e de proteção de comboios no oceano; e em geral a logística das operações militares. Motivados pelos êxitos dos ingleses, os administradores militares norte-americanos começaram a realizar pesquisas similares. Para isto, reuniram um grupo seletivo de especialistas que obtiveram bons resultados nos seus trabalhos. Os estudos incluíram problemas logísticos complexos, planejamento de colocação de minas no mar e utilização efetiva de equipamentos eletrônicos.

Ao término da guerra, estas bem sucedidas operações militares geraram um grande interesse fora do campo militar. Os administradores industriais começaram a aplicar as ferramentas da Pesquisa Operacional para a solução dos seus problemas, que se originaram pelo crescimento e complexidade das indústrias. Outro fator para o desenvolvimento da Pesquisa Operacional foi que muitos cientistas que tinham participado das equipes de PO durante a guerra e tinham informação importante sobre este trabalho estavam motivados a continuar procurando resultados neste campo. Assim, resultaram avanços muito importantes na pós-guerra. Muitas das ferramentas da PO, como a Programação Linear, a Programação Dinâmica, Linhas de espera, Teoria de Inventários e outras estiveram criadas antes de terminar a década de 1950. Segundo o texto de [5], embora tem-se creditado à Inglaterra a criação da Pesquisa Operacional como uma nova disciplina, os Estados Unidos tomaram logo a liderança neste campo. A primeira técnica matemática amplamente aceita no meio da PO foi o Método Simplex, algoritmo que permite resolver qualquer problema de Programação Linear. Ficou amplamente conhecida em 1947 pelo matemático americano George B. Dantzig. O fato de existir um algoritmo capaz de resolver qualquer problema de PL é importantíssimo. Isso deu um grande impulso às aplicações da PL e a partir daquela data novas técnicas se desenvolveram graças ao esforço e cooperação de matemáticos, cientistas e administradores, tanto da área acadêmica como da industrial.

O surgimento dos computadores deu um grande impulso a Pesquisa Operacional. Para resolver os problemas da PO é necessário um grande número de cálculos e sem a ajuda de um computador eletrônico é impossível conseguir resolvê-los. Na década de 1980 apareceram computadores pessoais (PC) cada vez mais rápidos e com maior memória, acompanhados por pacotes de softwares eficientes para resolver os problemas de PO. Isto colocou as técnicas da PO ao alcance de um grande número de pessoas. Atualmente, milhões de indivíduos têm acesso à aplicação das modernas técnicas da PO. As origens científicas da PO datam de muito tempo antes da Segunda Guerra Mundial. Modelos primitivos de programação matemática foram apresentados pelos economistas Quesnay, em 1759; e Walras, em 1874; modelos econômicos mais sofisticados de um gênero semelhante foram propostos por Von Neumann, em 1937, e como foi dito, por Kantorovich em 1939. As bases matemáticas de modelos lineares foram estabelecidas perto da mudança do século XIX. Em 1826, Fourier descobriu um método para manipular desigualdades lineares, que está muito relacionado com a solução de problemas de programação linear. Outros trabalhos precursores são devidos a Jordan, em 1873; Minkowski, em 1896; e

Farks, em 1903. Outro exemplo de resultado precursor é o trabalho seminal sobre modelos dinâmicos devido a Markov, que viveu de 1856 a 1922.

O desenvolvimento da PL estimulou o desenvolvimento de outros ramos da Teoria de Otimização, como a Análise Convexa, que constitui atualmente um dos pilares mais sólidos e ainda em desenvolvimento da Otimização. Os trabalhos do eminente matemático John Von Neumann foram decisivos no desenvolvimento dos resultados mais importantes nessas áreas no século XX. Outro nome inesquecível na otimização é o do matemático russo Lev S. Pontriaguin, pai da Teoria do Controle Ótimo. Observa-se nesta breve síntese a importância dos problemas de otimização na Matemática e suas remotas origens na antiguidade da história da matemática, onde muitos problemas geométricos de máximos e mínimos configuraram o gérmen de métodos e técnicas avançadas de otimização. A beleza de muitos desses problemas cativa e pode ser fonte de recursos didáticos para ensinar uma Matemática mais atraente para os alunos.

## 1.4 O Problema de Steiner

Nas áreas Engenharias e Ciências encontram-se com maior frequência questões relacionadas a problemas de otimização. Dentre estes, o de minimizar uma soma de distâncias é um dos mais antigos na Matemática e, conseqüentemente, foi estudado por matemáticos renomados ao longo da História, tais como Euler e Gauss.

Um problema simples era proposto por Fermat na metade do século XVII: encontrar um ponto  $P$  que minimizava a soma das distâncias de  $P$  a cada um de três pontos dados num plano. Soluções para este problema foram conseguidas independentemente pelo próprio Fermat e também Torricelli. Eles deduziram que poderiam surgir duas situações exclusivas: o ponto  $P$  estava na região interior ao triângulo formado pelos três pontos dados (nesse caso, os ângulos em  $P$  determinados pelos segmentos unindo  $P$  aos três pontos são todos  $120^\circ$  ou  $P$  é um dos três vértices e o ângulo em  $P$ , formado pelos segmentos juntando  $P$  aos outros dois pontos é maior ou igual a  $120^\circ$ .

No século XIX, um matemático da Universidade de Berlim chamado Jacob Steiner, estudou este problema e o generalizou com a inclusão de um conjunto arbitrariamente grande de pontos no plano. O problema foi generalizado posteriormente para um problema de minimização de caminho com a seguinte questão: dados  $n$  pontos num plano, encontrar o comprimento do menor caminho possível, ligando-os por segmentos de retas, podendo-se acrescentar  $k$  pontos, com  $k \leq n - 2$ . Este problema foi bastante divulgado após o surgimento do livro de Courant e Robbins [7] *What is Mathematics?*, de 1941. Courant e Robbins ligaram o nome de Steiner a este problema generalizado, passando a partir de então a chamar-se "Problema da Árvore Mínima de Steiner". A solução para essa questão que permite o acréscimo de outros pontos, cada um dos quais chamado ponto de Steiner, é mais geral do que o problema original de Fermat para  $n$  pontos dados, e tem uma configuração final de uma árvore ao invés de uma "estrela".

Até 1961, apesar de muito estudado, apenas heurísticas eram conhecidas para a solução

do problema da árvore mínima de Steiner (ou SMT, do inglês Steiner Minimal Tree). Nesse ano, Melzak [8] desenvolveu o primeiro algoritmo conhecido para a solução do SMT com um número finito de passos, explorando propriedades das árvores, e baseando-se em construções geométricas com régua e compasso. No entanto, esse algoritmo funciona apenas quando a quantidade de pontos é muito pequena, por ser de ordem exponencial. Devemos assinalar que persiste a afirmação da inexistência de construção geométrica para  $n \geq 4$  pontos, dado o fato que o algoritmo de Melzak não ensina a escolher dentre as  $2^{n-2}$  soluções geométricas possíveis qual a melhor. Ou seja, a melhor solução não pode ser construída inequivocamentecom régua e compasso sem que todas as outras construções possíveis sejam feitas.

Em 1968, Gilbert e Pollak [9] cunharam definitivamente o termo "Árvore Mínima de Steiner" para o problema que relaciona a árvore dos pontos dados inicialmente e os pontos de Steiner, informalmente definidos acima. Com demonstração de algumas propriedades conhecidas até aquele momento, e espalhadas na literatura, sua revisão estimulou várias pesquisas nos anos seguintes, através de várias conjecturas interessantes. Foram também Gilbert e Pollak que popularizaram a *razão de Steiner*, um quociente entre o comprimento das Árvore Mínima de Steiner e o comprimento da Árvore Geradora Mínima, que trataremos nos próximos capítulos.

Nos anos seguintes, ainda no caso bidimensional, várias aplicações relacionadas ao Problema de Steiner surgiram, dando nova importância ao problema. Um dos exemplos mais notórios é o de planejamento de circuitos eletrônicos para rotas VLSI (*Very Large Scale Integrated*), que precisa usar uma definição de distância diferente da usual euclidiana, em que o ganho em performance em soluções ótimas é muito grande. Em Cieslik [10], e suas referências, podemos encontrar algumas outras aplicações interessantes em espaços métricos não necessariamente euclidianos.

Até 1992 nenhum algoritmo para tentar encontrar a SMT para o caso tridimensional euclidiano era conhecido. Nesse ano, W. D. Smith [15] forneceu o primeiro algoritmo para tratar o problema tridimensional euclidiano que temos notícia, cuja performance, embora altamente insatisfatória mesmo para quantidade pequena de pontos, serviu de base para vários trabalhos que buscavam algoritmos heurísticos para o caso tridimensional e que, com devido aperfeiçoamento posteriormente explicado, será utilizado na presente tese como uma aplicação à Biologia Matemática.

McGregor Smith e W. Smith [16], ainda em 1995, fizeram uma famosa conjectura que chamaram "Main Conjecture" sobre uma configuração de pontos chamada de Sausage, a ser definida posteriormente, na qual a razão de Steiner no caso tridimensional teria um determinado valor, alcançado para um número infinito de pontos (diferente, portanto, do caso bidimensional), o qual seria obtido quando a configuração inicial dos pontos de entrada estivesse disposta em uma estrutura helicoidal, semelhante a uma molécula de DNA. Até o início do presente trabalho nenhum experimento computacional numérico havia questionado esse valor como referência para o caso tridimensional.

McGregor Smith [17, 18] apresentou várias propriedades que foram generalizadas do espaço

euclidiano bidimensional para o tridimensional, e ainda metodologias algorítmicas que devido à novidade e potencialidade do problema de Steiner, podem ser utilizadas em diversas áreas de aplicações. E uma das aplicações mais interessantes é aquela relacionada ao Problema de Configuração de Energia Mínima, descrita em outros artigos, e enfatizada por McGregor Smith em [18, 19], que fornece boas idéias para o trabalho do Problema de Enovelamento de Proteínas e DNA, de grande importância para vários ramos das Ciências na atualidade, principalmente aquelas que buscam a produção de drogas para curas de doenças como Câncer e Aids.

Mondaini e colaboradores [20, 21, 22] estudaram casos do problema de Fermat-Steiner generalizado em vários trabalhos, associando-o ao problema de aglomerados moleculares primitivos como evolução do problema de Fermat com  $n$  arestas densamente conectadas para o problema de Steiner com menor quantidade de arestas e estiramento desse aglomerado para minimização da energia do referido conjunto. Além disso, iniciaram o estudo de configurações específicas de pontos do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . O grupo liderado pelo Prof. Mondaini iniciou um estudo para a configuração de pontos de Steiner obtidos a partir de hélice circular reta.

# Capítulo 2

## A árvore de Steiner no $\mathbb{R}^2$

### 2.1 Introdução

Vamos descrever as principais propriedades do problema de Steiner euclidiano plano, apresentando os métodos utilizados para determinar o Ponto de Steiner no caso de três pontos no plano. Estas propriedades podem ser generalizadas para dimensões superiores a 2, sendo importantes nos algoritmos que descrevemos neste e no capítulo seguinte. Vamos introduzir o problema da razão de Steiner, algumas soluções para casos particulares e como o problema foi resolvido para o caso bidimensional.

### 2.2 O problema de Torricelli-Fermat

O problema de Torricelli-Fermat, que ficou conhecido como o Problema de Steiner para três pontos neste caso, é um bom exemplo de problema de otimização que combina geometria elementar e um princípio de minimização em sua solução. Ele foi proposto pela primeira vez no século XVII por Fermat (veja [7, 8, 9]) no fim do seu livro *Treatise on Minima and Maxima*, em que faz o seguinte questionamento:

*Dados três pontos no plano, qual é o quarto ponto tal que a soma dos comprimentos de suas distâncias aos três pontos dados é mínima?*

Temos então um caso particular do problema de Steiner para o triângulo. As figuras 2.1, 2.2 e 2.3 apresentam três formas alternativas de encontrarmos a solução para este problema.

Na figura 2.1, dados três vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  de um triângulo, temos três circunferências  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , cada uma passando por vértices tomados dois a dois desse triângulo e pontos  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , em cada uma das circunferências formando triângulos equiláteros com estes vértices. Estas circunferências se interceptam num ponto  $S$  interior ao triângulo  $ABC$  (sob certas condições para os ângulos internos desse triângulo), o ponto de Steiner.

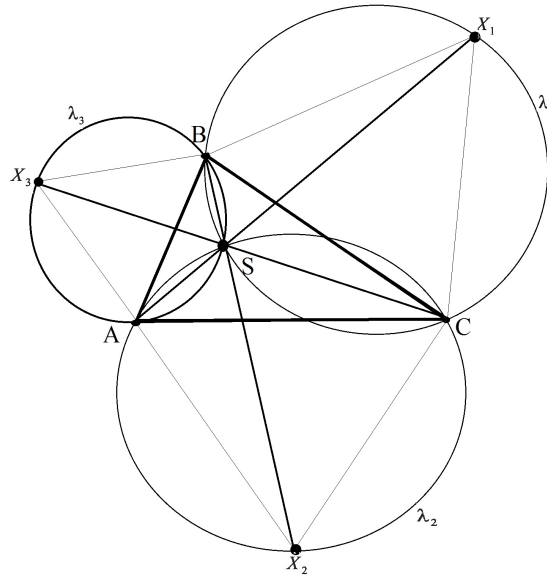


Figura 2.1: O ponto de Steiner como interseção de circunferências.

Na figura 2.2, são mostrados três triângulos equiláteros determinados da mesma forma que a abordagem anterior, cujo segmento obtido pela união dos vértices  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dos triângulos equiláteros com o vértice oposto do triângulo em questão, determina as chamadas linhas de Simpson. As três linhas têm exatamente o comprimento da árvore mínima de Steiner. A interseção das linhas de Simpson também determina a localização do ponto de Steiner.

A figura 2.3 mostra a conformação do problema dual consistindo da construção do triângulo equilátero circunscritível de altura máxima, passando pelos vértices dados (veja [10]). O primeiro método de solução do problema de Fermat apresentado acima foi descoberto por Torricelli em 1640, sendo por esta razão os círculos utilizados na construção conhecida como círculos de Torricelli. O segundo método foi descoberto por Simpson em 1750. Na realidade, redescoberto, pois um aluno de Torricelli chamado Viviani já havia encontrado tal solução. E o problema dual foi descoberto em 1846 por Fasbender, considerando que o ponto procurado deve estar sempre no interior do triângulo ABC dado.

Ambos os métodos de Torricelli e Simpson resultam num ponto de Steiner somente se os ângulos internos do triângulo ABC forem menores que  $120^\circ$ . Se um dos ângulos internos do triângulo ABC for maior ou igual a  $120^\circ$  nenhum dos métodos funciona. Nesse caso, o método de Torricelli produz um ponto fora do triângulo ABC, e os segmentos determinados pelas linhas de Simpson não se interceptam.

Cerca de 84 anos depois, Heinen (veja [10, 23]) juntou todos esses fatos e propôs uma solução para o problema de Fermat. A seguir apresentamos essa demonstração.

**Teorema 2.1.** (Heinen - 1834) *Se um triângulo ABC tem um ângulo interno maior ou igual a  $120^\circ$ , então o ponto que minimiza a soma das distâncias aos três vértices coincidirá com aquele vértice que determina esse ângulo com os demais. Entretanto, se todos os ângulos internos do*

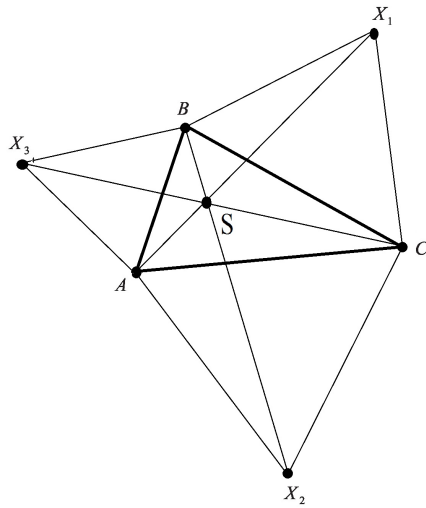


Figura 2.2: O ponto de Steiner como interseção das linhas de Simpson

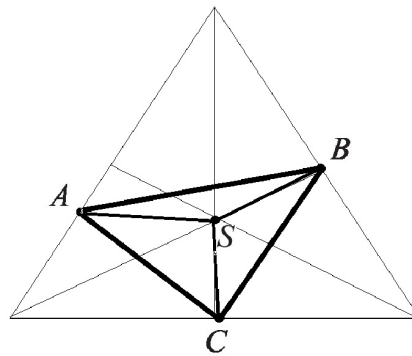


Figura 2.3: Vértices dados sobre os lados do triângulo equilátero de altura máxima



triângulo  $ABC$  forem menores que  $120^\circ$  então deve existir um ponto  $S$ , interior à região do triângulo  $ABC$  dado, ponto esse determinado pelos círculos de Torriceli, cuja distância do ponto  $S$  aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é mínima. Além disso,

$$AS + BS + CS = AA' = BB' = CC' \quad (2.1)$$

onde  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são as linhas de Simpson.

**Demonstração.** Vamos utilizar uma construção bastante simples para facilitar a prova da segunda parte do teorema, onde nenhum dos ângulos internos do triângulo  $ABC$  dado é maior ou igual  $120^\circ$ . Seja  $S$  qualquer ponto no plano do triângulo, conforme mostrado na figura 2.4, abaixo.

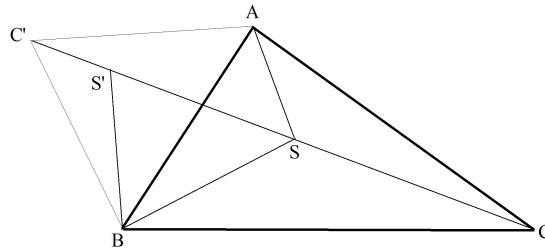


Figura 2.4: Todos os ângulos internos do triângulo  $ABC$  são menores que  $120^\circ$ .

Com centro de rotação no ponto  $B$ , giramos o segmento  $BA$  no sentido anti-horário num ângulo de  $60^\circ$  até chegar a posição  $BC'$ , e semelhantemente giramos o segmento  $BS$  até  $BS'$ . Dessa forma são equiláteros os triângulos  $ABC'$  e  $BSS'$ .

Como a construção resulta em uma rotação do triângulo  $ABS$  de um ângulo de  $60^\circ$  ao redor do ponto  $B$  até a posição  $C'S'$ , vemos que  $AS = C'S'$ . Também temos que  $BS = SS'$ , e portanto

$$AS + BS + CS = C'S' + S'S + SC. \quad (2.2)$$

Então o problema de minimizar a soma do lado esquerdo da equação 2.2 resulta no problema de minimizar o lado direito, pela escolha da localização apropriada para o ponto  $S$ . Notemos agora que o ponto  $C'$ , determinado somente pelo triângulo  $ABC$  é independente do ponto  $S$ . A soma do lado direito de (2.2) denota o caminho do ponto  $C'$  até o ponto  $C$  passando pelos pontos intermediários  $S'$  e  $S$ . Se pudermos fazer desse caminho uma linha reta, então o lado direito de (2.2) seria minimizado, assim como o comprimento do caminho de  $C'$  a  $C$ . Isto pode ser feito se o ponto  $S$  pudesse ser localizado de forma que cada um dos ângulos  $\angle ASB$ ,  $\angle ASC$  e  $\angle BSC$  seja  $120^\circ$ . Neste caso temos

$$\angle C'S'B = \angle ASB = 120^\circ,$$

$$\angle C'S'B + \angle BS'S = 180^\circ = \angle BSS' + \angle BSC,$$

e portanto  $C'S'SC$  é um segmento de linha reta.

Vamos agora mostrar que o ponto  $S$  pode realmente ser obtido de forma que os ângulos determinados em  $S$  pelos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  sejam  $120^\circ$ . Considere os círculos circunscritos aos triângulos equiláteros  $C'AB$  e  $A'BC$ , conforme a figura 2.5 abaixo.

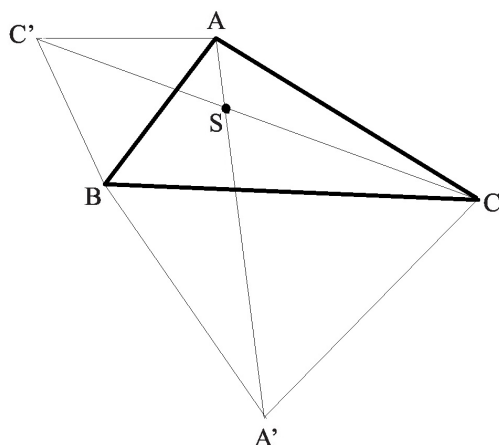


Figura 2.5: O ponto  $S$  é a interseção dos círculos de Torricelli.

Estes círculos se interceptam no ponto  $B$ , obviamente, mas também em outro ponto, e este é o ponto  $S$  que minimiza o comprimento de  $AS + BS + CS$ . Como os quatro pontos  $C'$ ,  $A$ ,  $S$ ,  $B$  estão no mesmo círculo, os ângulos opostos deste quadrilátero são suplementares, e portanto

$$\angle AC'B + \angle ASB = 180^\circ.$$

Mas  $\angle AC'B = 60^\circ$ , então temos  $\angle ASB = 120^\circ$ , como queríamos. Similarmente os pontos  $A'$ ,  $B$ ,  $C$  e  $S$  estão num mesmo círculo e pelo mesmo argumento da construção anterior  $\angle BSC = 120^\circ$ . Segue que  $\angle ASC = 120^\circ$ , pois os três ângulos em  $S$  devem totalizar  $360^\circ$ .

Vamos provar agora a primeira parte do teorema. No caso de um dos ângulos do triângulo  $ABC$ , digamos  $\angle ABC$ , ser maior ou igual a  $120^\circ$ , a análise acima não é satisfatória. No caso que o ângulo  $\angle ABC = 120^\circ$ , por exemplo, os pontos  $C'$ ,  $B$  e  $C$  são colineares. Isto sugere que a localização do ponto  $S$  é o ponto  $B$ . No caso em que  $\angle ABC$  é maior que  $120^\circ$ , a construção usada acima não leva a uma solução do problema.

Recomeçaremos com uma construção diferente para ser analisada e utilizaremos um método análogo aos anteriores estudados, ou seja, através de rotação de segmentos específicos. Seja  $S$  qualquer ponto, que não seja o ponto  $B$ , no plano do triângulo  $ABC$ . Provaremos que  $AB + BC < AS + BS + CS$ , como afirmado pelo teorema. A figura 2.6 mostra o ponto  $C'$  escolhido na reta  $CB$ , ou na extensão do segmento  $BC$  para ser mais claro, de forma que  $C'B = AB$ . O ponto  $S'$  é escolhido de forma que o triângulo  $C'S'B$  seja obtido por rotação no sentido

anti-horário do triângulo  $ABS$ .

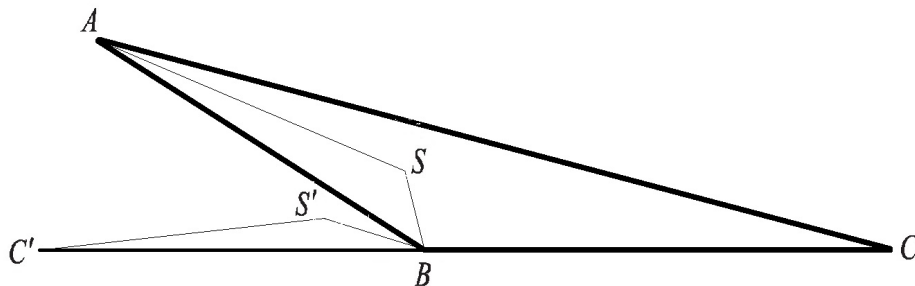


Figura 2.6: O ângulo  $\angle ABC \geq 120^\circ$ .

Logo vemos que

$$\begin{aligned} C'S' &= AS, \\ \angle SBS' &= \angle ABC' \leq 60^\circ \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} BS &\geq S'S, \\ AS + BS + CS &\geq C'S' + S'S + SC \\ &> C'C = AB + BC \end{aligned}$$

pois não podem estar ambos  $S$  e  $S'$  sobre o segmento  $C'C$  pela construção. Isto conclui a demonstração.

## 2.3 O Problema de Steiner Generalizado

Existem várias maneiras de generalizar o problema de Fermat para três pontos. A primeira delas é perguntando qual o ponto  $P$  cuja soma das distâncias de  $n$  pontos, com  $n \geq 3$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  a esse ponto é mínima. No caso  $n = 3$  é o caso que estudamos na seção anterior. Para o caso  $n > 3$  resulta num problema não-linear que é possível determinar a sua solução teórica (veja [20, 21, 22]). Podemos ainda atribuir pesos às arestas que conectam os pontos  $P_n$  ao ponto  $P$  procurado. Não trataremos esses casos no presente trabalho.

Outra generalização para o problema de Fermat é considerar  $n$  pontos no plano (ou no espaço  $d$ -dimensional,  $d \geq 2$ ) e perguntar qual é a menor árvore que interconecta esses pontos

se pudermos acrescentar tantos pontos extras quanto quisermos, desde que esse acréscimo de pontos corresponda a uma diminuição no comprimento total da árvore formada. Esse problema ficou conhecido na literatura como "Problema de Steiner", em homenagem ao célebre geômetra alemão Jacob Steiner, que lecionou na Universidade de Berlin no século XIX. Foram Courant e Robbins que nomearam dessa forma essa generalização do problema de Fermat no seu livro *What is Mathematics?* de 1941, que ajudou a divulgar o problema devido à popularidade deste, no entanto causando descontentamento em relação ao nome do problema. Alguns reclamam pela prioridade temporal para Fermat, que teria sido o primeiro a propor o problema; outros, que a generalização deveria lembrar Jarnik e Kössler, que em 1934 estudaram o problema de interconectar pontos no plano com comprimento mínimo, analisando o caso em que os  $n$  pontos são os vértices de um polígono regular. Mais especificamente, eles encontraram a árvore mais curta para  $n = 3, 4, 5$  e mostraram que  $n - 1$  lados do polígono regular de  $n$  lados constituem a árvore mais curta quando  $n \geq 13$ .

Neste momento, para finalizar, citaremos Kuhn [24]:

*"Although this very gifted geometer (Steiner) of the 19th century can be counted among the dozens of mathematicians who have written on the subject, he does not seem to have contributed anything new, either to its formulation or its solution."*

Utilizaremos a nomenclatura clássica, ou seja, o segundo problema da generalização do problema de Fermat descrito acima nesta seção será chamado de problema de Steiner, termo que foi cristalizado no trabalho de Gilbert e Pollak (veja [9]).

## 2.4 Algumas Definições

Uma topologia de uma árvore define quais pares de pontos devem ter conexões entre si, mas não as posições dos pontos de Steiner, os pontos adicionados à árvore para encurtá-la. Abaixo, na figura 2.7, são apresentadas duas topologias distintas de árvores de Steiner que possuem quatro pontos dados e dois pontos de Steiner.

Fixada uma topologia, uma árvore de Steiner é aquela que não pode ser encurtada por qualquer perturbação. Se uma árvore de Steiner pode ter seu comprimento diminuído pelo acréscimo de pontos de Steiner então ela é chamada de árvore relativamente mínima. Uma árvore mínima de Steiner, relativa àquela topologia, é árvore de menor comprimento obtida. É importante notar que uma árvore mínima de Steiner é sempre uma árvore de Steiner, e que uma árvore de Steiner é sempre uma árvore mínima, relativamente àquela topologia. A árvore mínima de Steiner (global) é a árvore de Steiner obtida quando todas as possíveis topologias são analisadas. As árvores mínimas relativas possuem duas propriedades importantes: primeiro, existe, no máximo, uma árvore mínima referente à topologia escolhida e um conjunto de pontos dados; segundo, se existe uma árvore mínima relativa, existe um algoritmo para encontrá-la, com auxílio de propriedades elementares dessas árvores, que discutiremos na seção seguinte.

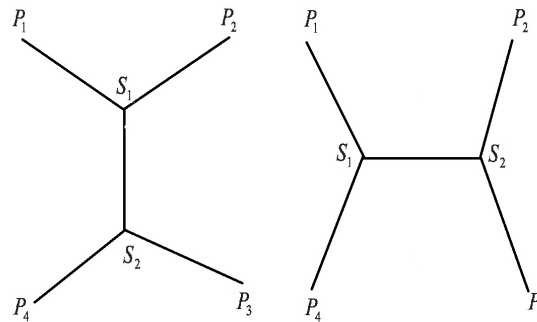


Figura 2.7: Duas topologias de uma árvore de Steiner com quatro pontos dados.

A árvore obtida pela conexão de todos os pontos dados, sem formação de ciclos, sem acréscimos de pontos de Steiner é chamada de árvore geradora mínima. Essa árvore é facilmente encontrada, sua complexidade computacional é de ordem polinomial, e existe um vasto número de algoritmos para obtê-la, sendo os mais conhecidos os algoritmos de Prim e de Kruskal (veja [25, 26]).

## 2.5 Propriedades das árvores de Steiner

Algumas propriedades do problema de Steiner no plano podem ser utilizadas como guia para generalizações em espaços de dimensões superiores e, em particular, no espaço tridimensional. Vamos destacar aquelas propriedades que são mais relevantes nas aplicações teóricas e práticas.

Antes, porém, de apresentar as propriedades das árvores de Steiner, mostraremos duas interpretações físicas e que são utilizadas para encontrar as posições dos pontos de Steiner para uma configuração relativamente pequena de pontos regulares, os pontos dados.

A primeira delas é como um sistema mecânico em que a energia potencial está relacionada com a soma das distâncias entre os vértices adjacentes, e o equilíbrio estável é obtido quando a árvore tem um comprimento mínimo relativo. Podemos pensar nesse sistema como  $n$  pontos fixos, seguros por fios elásticos de tensões unitárias constantes não importando o quanto são esticados, e com outros  $k$  pontos de Steiner podendo mover-se livremente.

A outra interpretação é uma que envolve uma película de sabão entre planos paralelos separados por palitos em  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , veja figura 2.8. Como a película pode mudar sua topologia por separação, a árvore de equilíbrio é a árvore de Steiner. Existem outros modelos físicos para conseguir árvores de Steiner, mas surgem dificuldades na sua aplicação, dentre as quais podemos destacar: não produzir uma *SMT*; consumir um tempo muito grande para a construção de modelos grandes; podem aparecer erros mecânicos em modelos com grande número de pontos (veja [23, 27, 28, 29]).

As propriedades mais utilizadas são as seguintes: (veja [23])

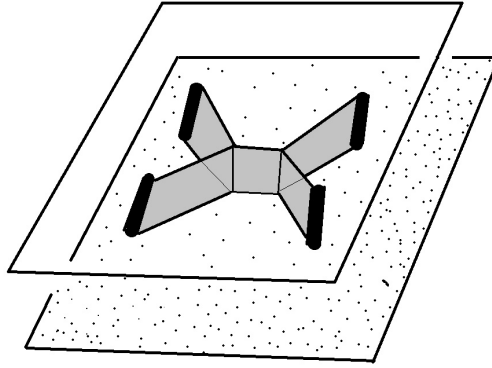


Figura 2.8: Solução do problema de Steiner por bolha de sabão.

### A. Sobre ângulos e arestas na árvore de Steiner

**Proposição 2.1.** *i) Numa árvore de Steiner, nenhum par de arestas se encontra com um ângulo menor que  $120^\circ$ .*

*ii) Duas arestas de uma árvore de Steiner não se interceptam mais - não há "loops".*

*iii) Cada ponto de Steiner possui exatamente três arestas incidentes, e o ângulo entre quaisquer dois desses segmentos é exatamente  $120^\circ$ .*

**Demonstração.** Vamos mostrar o item *i*, pois os dois outros são conseqüências imediatas dele. Seja  $S$  um ponto de Steiner tal que duas arestas da árvore de Steiner se encontram nesse ponto formando um ângulo menor que  $120^\circ$ . Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos regulares tais que  $AS$  e  $BS$  sejam as arestas, conforme a figura 2.9, abaixo.

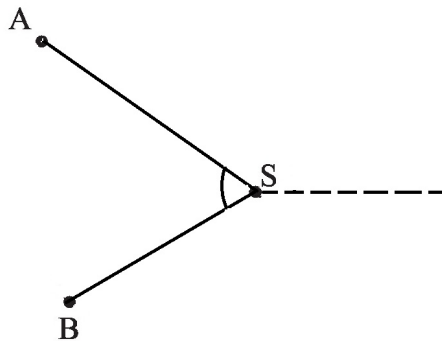


Figura 2.9: O ângulo  $ASB$  tem medida inferior que  $120^\circ$  na árvore de Steiner.

Seja  $S'$  o ponto de interseção para as três linhas de Simpson para o triângulo  $ABS$ . Na árvore de Steiner, se trocarmos  $AS$  e  $BS$  pelos três segmentos  $AS'$ ,  $BS'$  e  $SS'$  então obtemos uma

árvore com um comprimento menor ainda, conforme a figura 2.10, abaixo. Essa contradição mostra que o ângulo entre duas arestas quaisquer numa árvore de Steiner é, no mínimo,  $120^\circ$ .

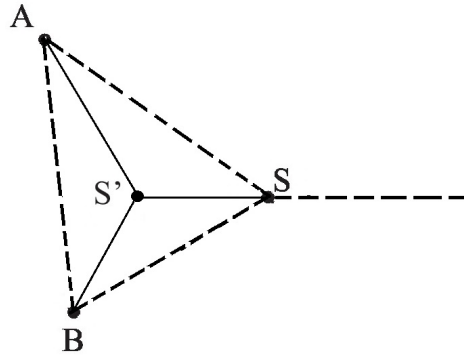


Figura 2.10: O Ponto  $S'$  encurta o comprimento da árvore de Steiner.

### B. Sobre o número de pontos de Steiner

Cada árvore de Steiner tem um número a mais de pontos do que o número de arestas. Seja uma árvore com  $n$  pontos regulares  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , e  $k$  pontos de Steiner, logo o número de arestas desta árvore deve ser  $n + k - 1$ . Como cada aresta tem duas extremidades, obtemos  $2(n + k - 1)$  arestas incidentes pela soma em todos os vértices do número de arestas incidentes. Se  $n_m$  dos vértices  $P_i$  possuem  $m$  arestas incidentes ( $\sum_m n_m = n$ ), essa soma será [9]

$$3k + \sum_m m n_m = 2(n + k - 1) = 2k - 2 + 2 \sum_m n_m,$$

então

$$k = n_1 - 2 - n_3 - 2n_4 - \dots$$

Em particular,

$$k \leq n - 2,$$

com a igualdade valendo se, e somente se,  $P_i$  possuir uma única aresta incidente.

### C. Envoltória convexa dos pontos de Steiner

Vamos mostrar a seguir que numa árvore com mínimo relativo, todos os pontos de Steiner estão dentro de uma envoltória convexa. Uma *envoltória de Steiner* para um dado conjunto de  $n$  pontos é definido como sendo a região que sabemos conter uma árvore mínima de Steiner. Uma vez conhecida a envoltória de Steiner, podemos confinar suas computações dentro da área dada. Portanto, quanto menor for uma envoltória de Steiner, menor esforço computacional

será dispendido. Os dois lemas abaixo nos dão algumas ferramentas para restringir as árvores mínimas de Steiner.

**Lema 2.1.** (Propriedade Lunar [9]). *Seja  $UV$  qualquer aresta de uma árvore mínima de Steiner. Seja  $L(U,V)$  a região consistindo de todos os pontos  $P$  satisfazendo*

$$PU < UV, PV < UV,$$

*onde  $L(U,V)$  é uma interseção de formato lunar de círculos de raios do comprimento de  $UV$ , centrados nos pontos  $U$  e  $V$ . Então nenhum outro vértice da árvore mínima de Steiner pode estar em  $L(U,V)$ .*

**Demonstração.** Se  $Q$  fosse um desses vértices, a árvore mínima de Steiner deveria conter ou um caminho de  $Q$  para  $U$  não contendo  $V$ , ou vice-versa. No último caso, por exemplo, a árvore mínima de Steiner pode ser encurtada pela retirada da aresta  $UV$  e pela adição da aresta  $QV$ , uma contradição (veja a figura 2.11, abaixo).

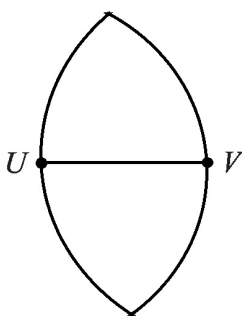


Figura 2.11: Exemplo de uma lúnula  $L(U, V)$ .

**Lema 2.2.** (Propriedade da fatia [9]) *Seja  $W$  qualquer região aberta com formato de fatia, tendo um ângulo igual ou superior a  $120^\circ$  e não contendo nenhum dos pontos regulares. Então  $W$  não contém pontos de Steiner.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, suponhamos que  $W$  englobe a região angular de  $-60^\circ$  a  $60^\circ$ , conforme a figura 2.12, abaixo.

Suponhamos que existam pontos de Steiner nessa região, dos quais o ponto  $S$  é aquele com maior abscissa. Das três arestas incidentes em  $S$ , uma o deixa na direção  $\pm 60^\circ$  do eixo positivo. Esta não pode sair de  $W$  e, portanto, não pode acabar num ponto regular.

No caso em que a fatia represente um ângulo menor que  $120^\circ$ , podemos supor a existência de um ponto  $S$  nessa região, do qual as três arestas incidentes se conectam com pontos regulares, conforme a 2.13.



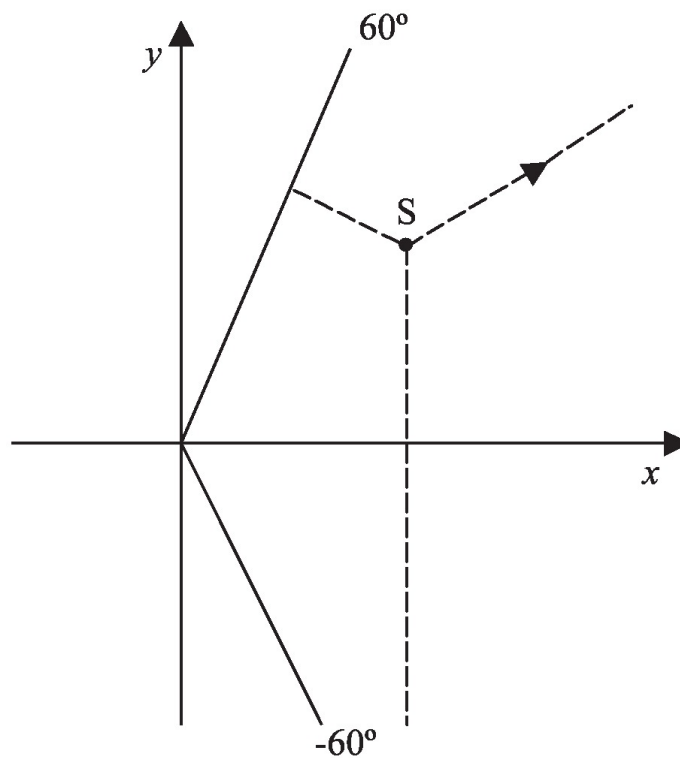


Figura 2.12: Região em formato de fatia igual a  $120^\circ$

**Corolário 1.** (Envoltória convexa [9]) *A envoltória convexa dos pontos regulares é uma envoltória de Steiner.*

**Demonstração.** Cada reta suporte da envoltória convexa dos pontos regulares define uma fatia de  $180^\circ$  livre de pontos regulares.

### C. Teorema de Maxwell para árvores de Steiner

**Lema 2.3.** *Se tomarmos vetores unitários para fora de uma árvore mínima relativa nas direções de cada uma das arestas incidentes em  $A_1, A_2, \dots, A_n$  com  $F_i$  denotando a soma das forças unitárias em  $A_i$ . Em termos mecânicos  $F_i$  é a força externa necessária em  $A_i$  para manter a árvore em equilíbrio. O comprimento  $L$  da árvore é dado pela fórmula [9]*

$$L = \sum_{i=1}^n A_i \cdot F_i. \quad (2.3)$$

(Aqui qualquer origem conveniente pode ser usada para medir os vetores posição  $A_i$ .)

**Demonstração.** Para provar (2.3), devemos construir um vetor unitário de força  $f_k$  apontando para fora de cada ponto  $A_k$ , considerando todas as arestas da árvore. Como existem

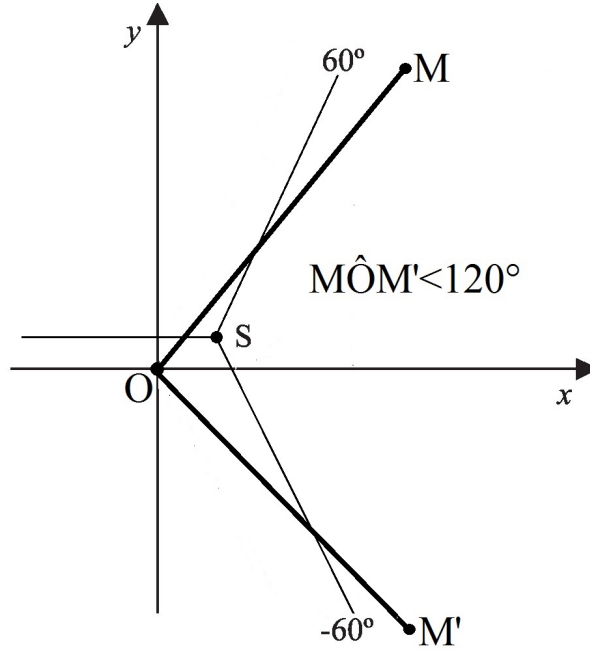


Figura 2.13: Região em formato de fatia menor que  $120^\circ$

$n + s - 1$  arestas, devem existir  $2(n + s - 1)$  vetores para traçar. Depois, consideramos uma soma de produtos internos definidos por

$$T = \sum P_k \cdot f_k,$$

onde a soma é estendida a todos os  $2(n + s - 1)$  pontos das arestas. Os termos de  $T$  podem ser agrupados de duas maneiras. Primeiro, podemos combinar termos para os quais  $P_k$  é o mesmo ponto. Cada ponto de Steiner aparece em três termos de  $T$ . A contribuição de um ponto de Steiner  $S$  para  $T$  é zero porque as três forças em  $S$  estão em equilíbrio. A contribuição de um dado ponto  $A_i$  para  $T$  é  $A_k \cdot F_k$ . Então  $T$  é o lado direito de (2.3). No segundo agrupamento, combinamos os dois termos associados com as duas extremidades de cada aresta. Se  $P_1P_2$  é uma aresta de comprimento  $L_{12}$  então

$$P_2 = P_1 + L_{12}\vec{u},$$

onde  $\vec{u}$  é um vetor unitário. Os termos para esta aresta contribuem  $P_1 \cdot (-\vec{u}) + P_2 \cdot \vec{u} = L_{12}$ . Então  $T$  é também o lado esquerdo de (2.3).

#### D. Distância entre pontos de Steiner

Vamos mostrar a seguir uma topologia para a árvore de Steiner com quatro pontos regulares que formam um retângulo. [6]

**Lema 2.4.** Seja  $P_1P_2P_3P_4$  um retângulo,  $S_1$  o ponto de Steiner mais próximo de  $P_1$  e  $L_0 = |P_1S_1|$ . Então os lados do retângulo medem  $|P_1P_2| = |P_3P_4| = L_0\sqrt{3}$  e  $|P_2P_3| = |P_4P_1| = L_0 + |S_1S_2|$ .

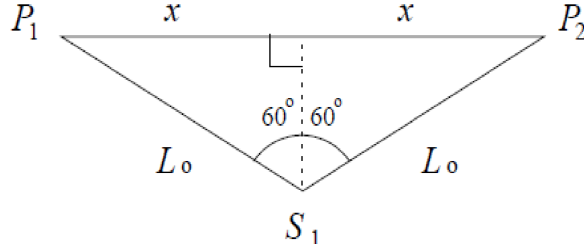


Figura 2.14: triângulo 1

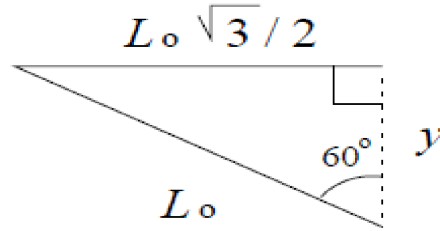


Figura 2.15: triângulo 1

*Demonstração.* Pela figura (2.14) temos que  $\sin 60^\circ = \frac{x}{L_0} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{L_0} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}L_0$ .

Como  $l = |P_1P_2| = 2x \Rightarrow l = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L_0 \Rightarrow l = \sqrt{3}L_0$ .

Agora, na figura (2.15) temos que  $\cos 60^\circ = \frac{y}{L_0} \Rightarrow y = \frac{L_0}{2}$ . Logo segue-se a tese. □

As duas figuras a seguir referem-se ao próximo lema:

**Lema 2.5.** Se  $|P_1P_2| > |P_1P_4|$  na figura (2.16), então a árvore mais curta corresponde à figura (2.17).

*Demonstração.* Temos  $L_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow l = L_0\sqrt{3}$ . Observando o triângulo  $S_2P_4M$  na figura (2.16),  $\tan 30^\circ = \frac{x}{l/2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{l} \Rightarrow x = \frac{l\sqrt{3}}{6}$ . Então  $z = 1 - \frac{2l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow z = \frac{3 - l\sqrt{3}}{3}$  e

$$L_0 = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, o comprimento desta árvore na figura(2.16) é  $4L_0 + z = \frac{4l\sqrt{3}}{3} + \frac{3 - l\sqrt{3}}{3} = 1 + l\sqrt{3}$

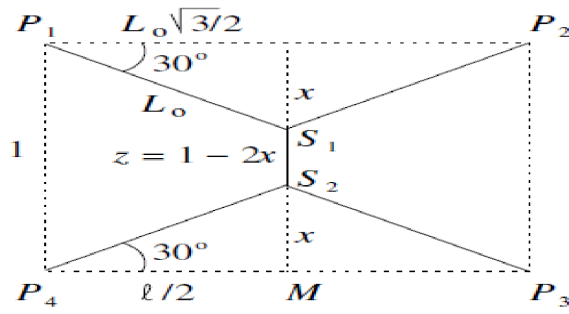


Figura 2.16: triângulo 1

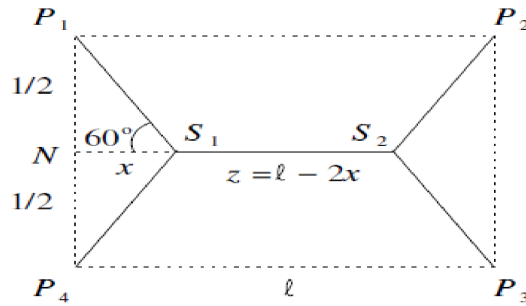


Figura 2.17: triângulo 1

Observando o triângulo  $NS_1P_1$  na figura (2.17) obtemos  $\tan 60^\circ = \frac{1/2}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6}$  e  $\sin 60^\circ = \frac{1/2}{L_0} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2L_0} \Rightarrow L_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Então,  $z = l - 2x = l - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3l - \sqrt{3}}{3}$ . Assim,  $4L_0 + z = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{3l - \sqrt{3}}{3} = l + \sqrt{3}$  é o comprimento desta árvore (2.17). Logo,  $1 + l\sqrt{3} > l + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)l > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow l > 1$ .  $\therefore$  a figura (2.17) tem menor comprimento. □

**Lema 2.6.** Suponha  $S_1$  e  $S_2$  pontos de Steiner conectados por uma aresta em uma árvore mínima de Steiner. De  $S_1$  e  $S_2$  partem duas outras arestas. Seja  $L_0$  o comprimento mais curto entre essas quatro. Então  $|S_1S_2| \geq (\sqrt{3} - 1)L_0$ .

*Demonstração.* Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois pontos os quais são extremos de duas arestas de  $S_1$ , ambas medindo  $L_0$ . Do mesmo modo, sejam  $P_3$  e  $P_4$  dois pontos que são extremos de  $S_2$  em suas duas arestas de comprimento  $L_0$ . Os pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  são vértices de um retângulo, e a árvore que conecta  $P_1, P_2, P_3, P_4$  está representada na figura (2.16) ou (2.17).

Pelos lemas (2.4) e (2.5)  $z = l - L_0 \geq 1 - L_0 = L_0\sqrt{3} - L_0 = (\sqrt{3} - 1)L_0$ . □

# Capítulo 3

## O Algoritmo de Melzak no $\mathbb{R}^2$

### 3.1 Uma aplicação para encontrar uma árvore de Steiner

O primeiro algoritmo para a resolução do problema de Steiner euclidiano plano em um número finito de passos foi proposto por Melzak (veja [8]), constituindo uma generalização do método para encontrar o ponto de Steiner dados três pontos. Esse algoritmo encontra todas as árvores mínimas de Steiner possíveis e escolhe aquela que possuir o menor comprimento. Vários outros algoritmos surgiram da adaptação ou melhoramento do algoritmo de Melzak (veja [30, 31, 32, 33, 34, 35]).

O algoritmo de Melzak consiste numa fase de combinação dos pontos, em que a árvore original será reduzida a dois pontos apenas, e uma outra fase de reconstrução em que são obtidos os pontos de Steiner na árvore original. Vamos explicar as duas fases desse algoritmo, ilustrando com um exemplo de seis pontos regulares.

Durante a fase de combinação, conforme já foi dito, reduziremos o número de pontos regulares a dois pontos (não necessariamente regulares) pelo processo que explicaremos a seguir. Para fixar as idéias tomaremos uma topologia  $F$  como referência. Dizemos que dois pontos são vizinhos se estão conectados a um mesmo ponto de Steiner nessa topologia, ou seja, são adjacentes a este ponto de Steiner. Um ponto  $E_{ij}$  é chamado de ponto *equilátero*, referente a uma aresta  $A_iA_j$  de uma árvore (veja as figuras 3.1 e 3.2 para as duas últimas definições).

A cada passo do estágio de combinação dois pontos vizinhos são substituídos por um ponto equilátero. Pela figura 3.2 podemos observar que existem dois pontos equiláteros para cada par de pontos  $A_iA_j$ . Retiramos  $A_i$  e  $A_j$  da lista de pontos existentes na árvore e acrescentamos os pontos equiláteros  $E_{ij}$ , um por vez. A fase de reconstrução termina quando houver apenas dois pontos restantes.

A fase de reconstrução começa pela junção dos dois pontos que sobraram pela linha de Simpson para a configuração de  $n$  pontos regulares. O segmento determinado por linha de Simpson tem a mesma propriedade descrita para três pontos no teorema 2.1, ou seja, é exatamente o comprimento da árvore mínima de Steiner nessa topologia (veja [23]). A árvore inicial é mudada de

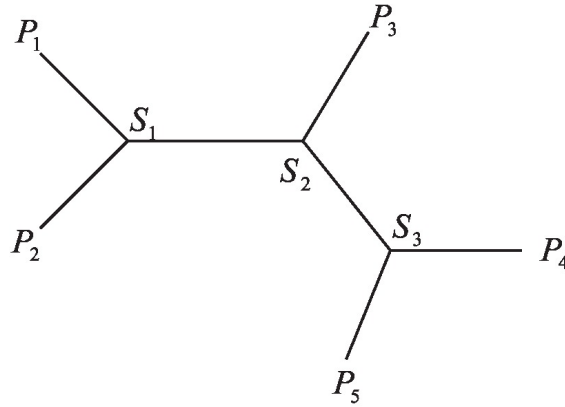


Figura 3.1: Os pares de pontos  $(P_1, P_2)$  e  $(P_4, P_5)$  são vizinhos;  $P_3$  não é vizinho de nenhum ponto regular

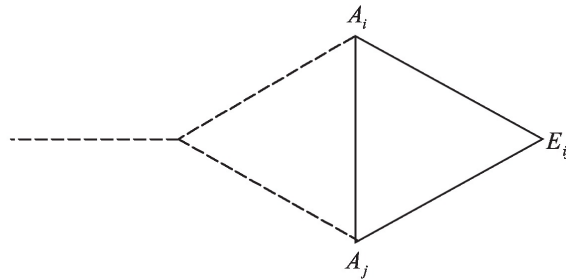


Figura 3.2:  $E_{ij}$  é um ponto equilátero, pois o triângulo  $A_i E_{ij} A_j$  é equilátero

$T$  para  $T'$  no estágio de reconstrução através da substituição de uma aresta de  $T$ , que possui um ponto equilátero por um ponto de Steiner e seus dois pontos adjacentes, conforme a figura 3.3.

Destacamos novamente o fato dos  $A_i$  e  $A_j$  não serem necessariamente pontos regulares. Neste caso, possivelmente serão pontos equiláteros. Se o arco  $A_i A_j$  não tiver interseção com o segmento  $A_k E_{ij}$  então o estágio de reconstrução deve terminar, e concluímos que não existe árvore de Steiner cheia para a topologia  $F$ . O estágio de reconstrução segue enquanto houver algum ponto regular fora da árvore considerada ou até que não exista uma interseção conforme descrito acima.

Vamos agora exemplificar o algoritmo de Melzak com uma árvore que possui seis pontos regulares, conforme mostra a figura 3.4. Os pontos de Steiner devem está na menor região plana que contém esses pontos regulares.

Procedemos da seguinte maneira: agrupamos  $P_1$  e  $P_2$  e geramos o ponto equilátero  $E_{12}$  (obviamente existe outro ponto equilátero  $E'_{12}$ , mas existem critérios para que seja tomado o ponto equilátero adequado). Depois agrupamos os pontos  $P_3$  e  $P_4$ , dando origem ao ponto equilátero  $E_{34}$ . Agora, agrupamos os pontos equiláteros  $E_{12}$  e  $E_{34}$  num único ponto equilátero  $E_{1234}$ . Finalmente, agrupamos os pontos  $E_{1234}$  e  $P_5$  num único ponto  $E_{12345}$ . Todos esses pas-

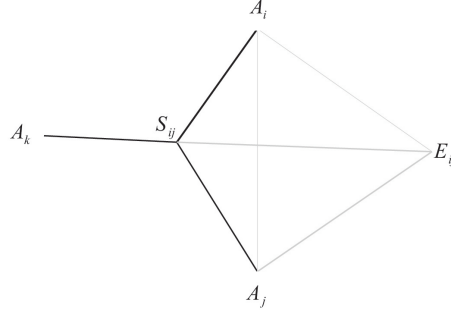


Figura 3.3:  $E_{ij}$  é substituído por  $A_i$ ,  $A_j$  e  $S_{ij}$

Os pedidos acima são mostrados nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7, onde, além da configuração inicial, podemos também observar a linha de Simpson da árvore considerada, o segmento ligando os pontos  $E_{12345}$  e  $P_6$ . O comprimento da árvore de Steiner nessa topologia é igual ao comprimento desse segmento, como verificaremos a seguir. Finalizamos dessa forma a primeira fase, a combinação dos pontos regulares da árvore.

Agora passemos à fase de reconstrução. Vamos começar substituindo o ponto  $E_{12345}$  pelo primeiro ponto de Steiner, que chamaremos aqui de  $S_1$ , também pelos pontos  $E_{1234}$  e  $P_5$ , como está sendo mostrado na figura 3.8, abaixo. Esse ponto de Steiner  $S_1$ , está situado na linha de Simpson formada pelo segmento que uni os pontos  $E_{12345}$  e  $P_6$ , determinado pelas propriedades já apresentadas neste trabalho.

Em seguida, devemos substituir o ponto  $E_{1234}$  por  $E_{12}$ ,  $E_{34}$  e  $S_2$  (situado na interseção da linha de Simpson  $E_{1234}S_1$  com o círculo circunscrito ao triângulo  $E_{12}E_{34}E_{1234}$ ), conforme a figura 3.9, o ponto  $E_{12}$  por  $P_1$ ,  $P_2$  e  $S_3$  (situado na interseção da linha de Simpson  $E_{12}S_2$  com o círculo circunscrito ao triângulo  $P_1P_2E_{12}$ ), e o ponto  $E_{34}$  por  $P_3$ ,  $P_4$  e  $S_4$  (situado na interseção da linha de Simpson  $E_{34}S_2$  com o círculo circunscrito ao triângulo  $P_3P_4E_{34}$ ). Esses passos são ilustrados na figura 3.10

Para verificar o comprimento da linha de Simpson  $E_{12345}P_6$  é, realmente, dada pelo comprimento da árvore de Steiner obtida, notemos que

$$E_{12345}P_6 = E_{1234}S_1 + P_5S_1 + P_6S_1. \quad (3.1)$$

Mas,

$$E_{1234}S_1 = E_{12}S_2 + E_{34}S_2 + S_2S_1 \quad (3.2)$$

e

$$E_{12}S_2 = P_1S_3 + P_2S_3 + S_3S_2 \quad (3.3)$$

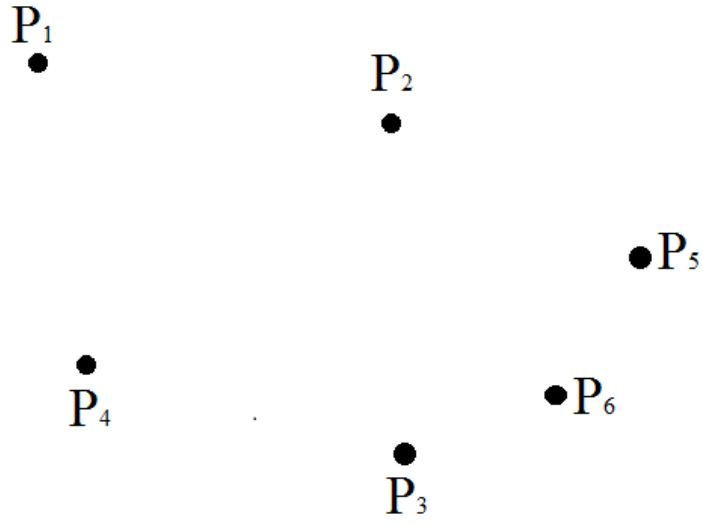


Figura 3.4: *Exemplo de seis pontos regulares*

$$E_{34}S_2 = P_3S_4 + P_4S_4 + S_4S_2 \quad (3.4)$$

Se substituirmos as equações (3.3) e (3.4) na equação (3.2), e em seguida substituindo esta última na equação (3.1) obtemos

$$E_{12345}P_6 = P_1S_3 + P_2S_3 + P_3S_4 + P_4S_4 + S_3S_2 + S_4S_2 + S_2S_1 + P_5S_1 + P_6S_1.$$

Portanto, o comprimento da linha de Simpson  $E_{12345}P_6$  (generalizada para  $n$  pontos) tem o mesmo comprimento da árvore de Steiner, figura 3.11.

Para que tenhamos certeza que encontramos a menor árvore de Steiner, devemos verificar todas as topologias, o que é inviável para uma árvore com grande número de pontos regulares.



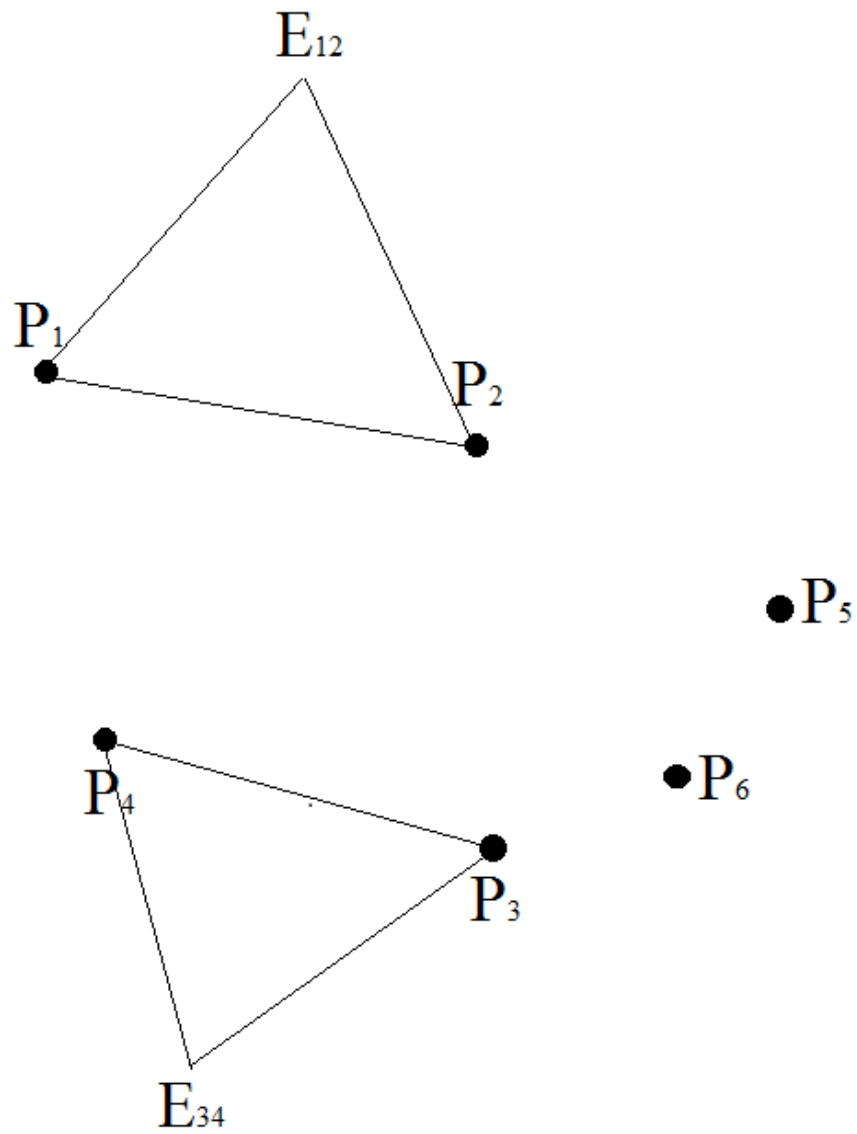


Figura 3.5: Exemplo da 1ª. fase do algoritmo de Melzak

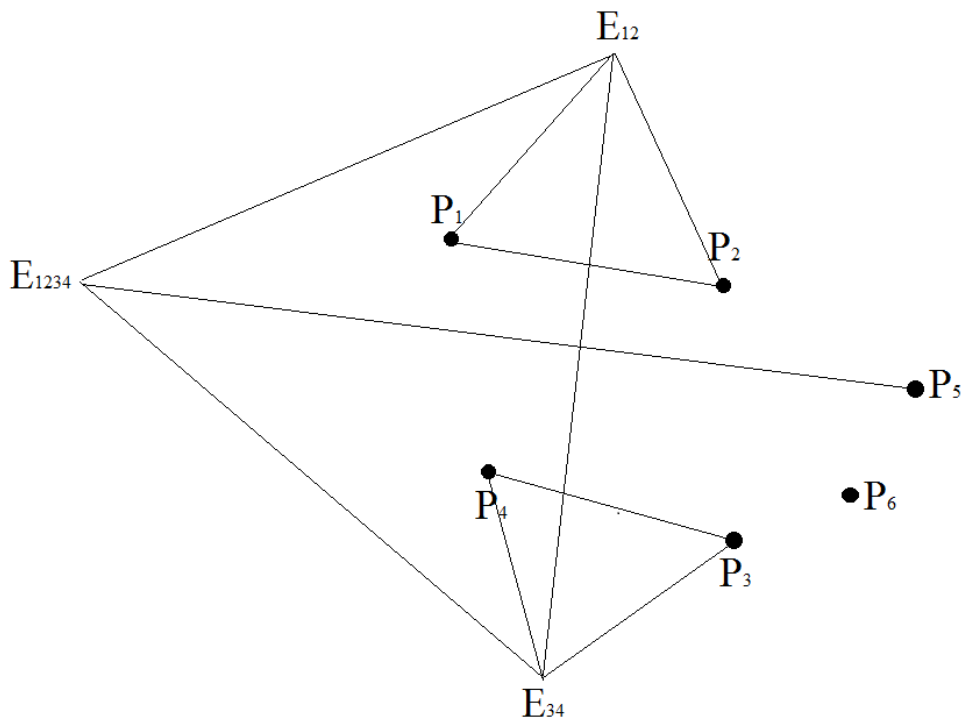


Figura 3.6: Exemplo da 1<sup>a</sup>. fase do algoritmo de Melzak.

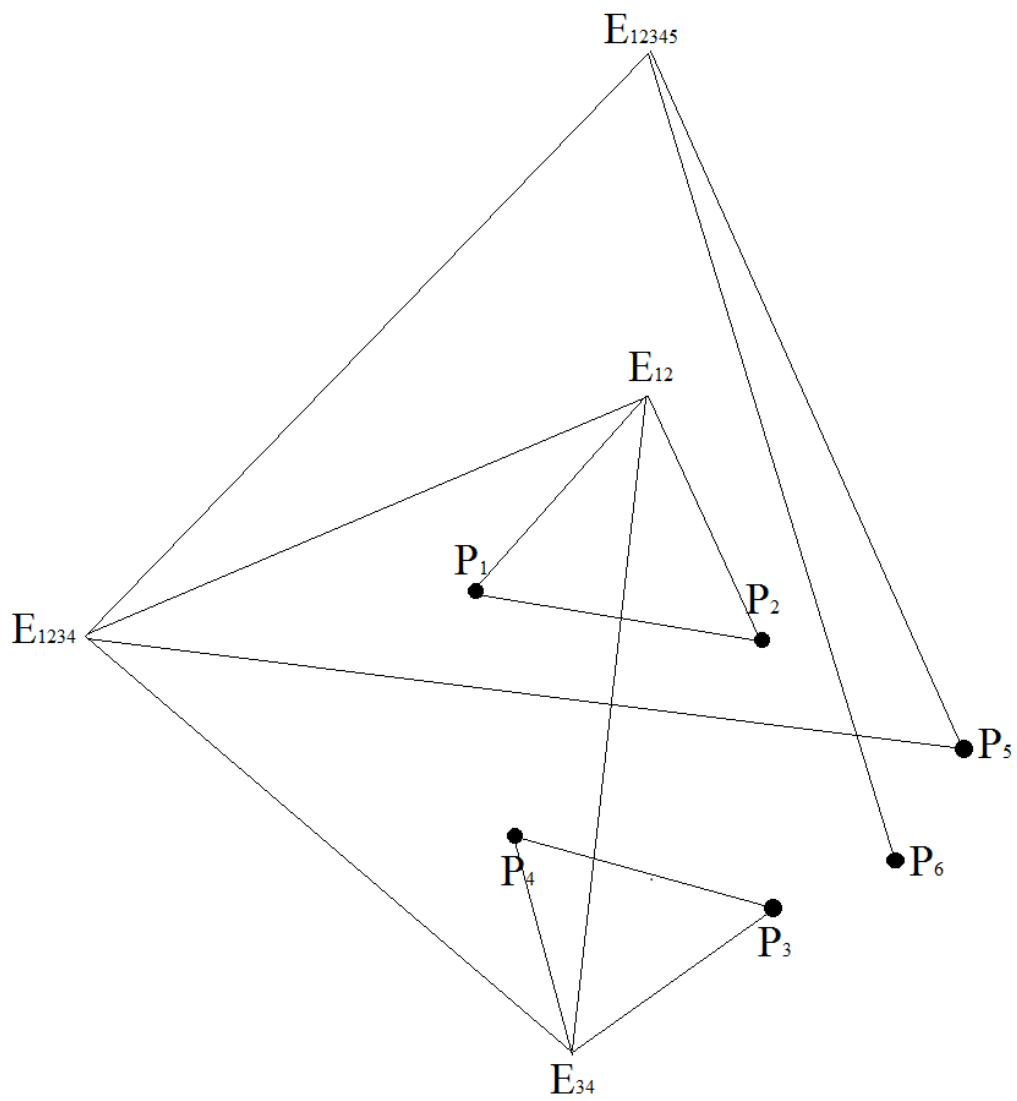


Figura 3.7: Exemplo da 1ª. fase do algoritmo de Melzak

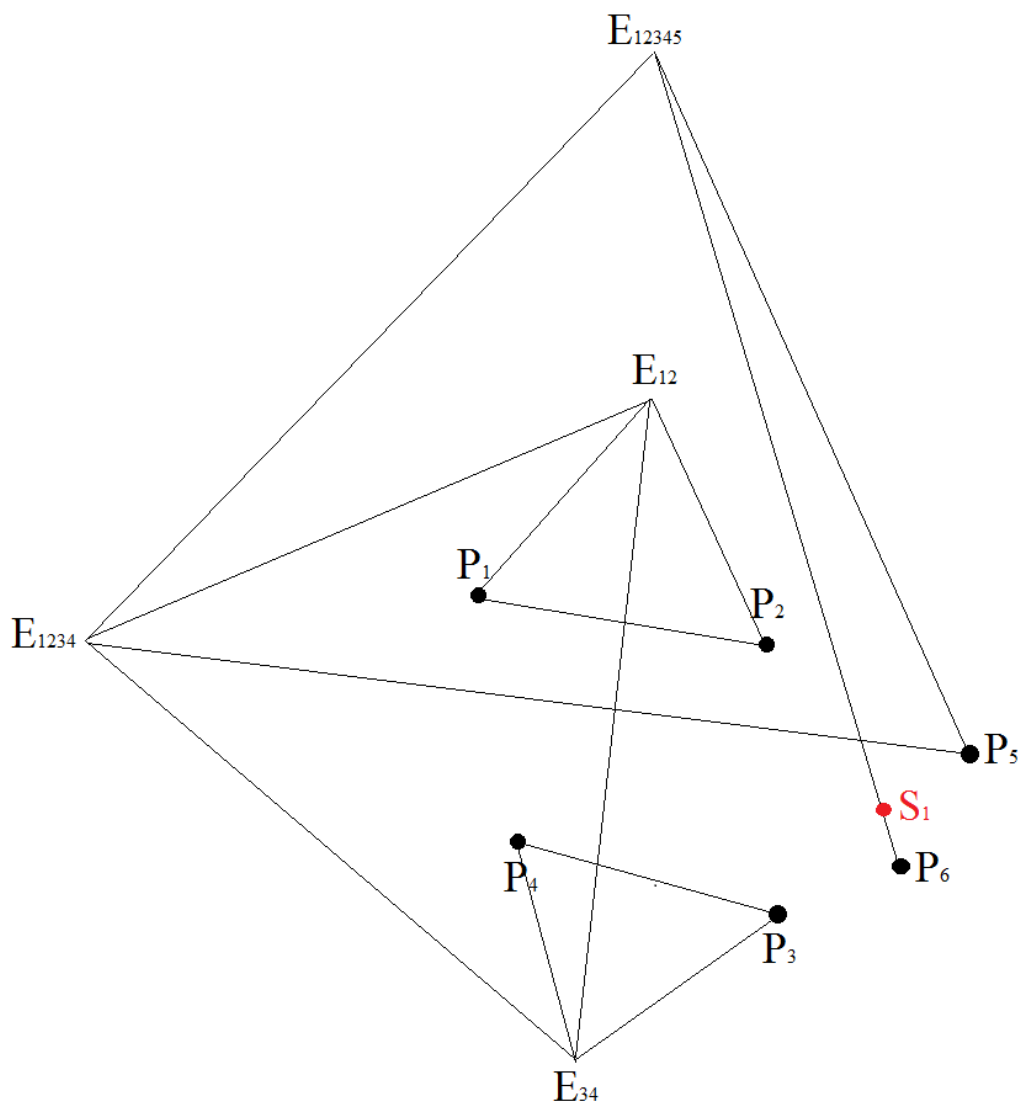


Figura 3.8:  $E_{12345}$  é substituído pelo ponto de Steiner  $S_1$  e pelos pontos  $P_5$  e  $E_{1234}$

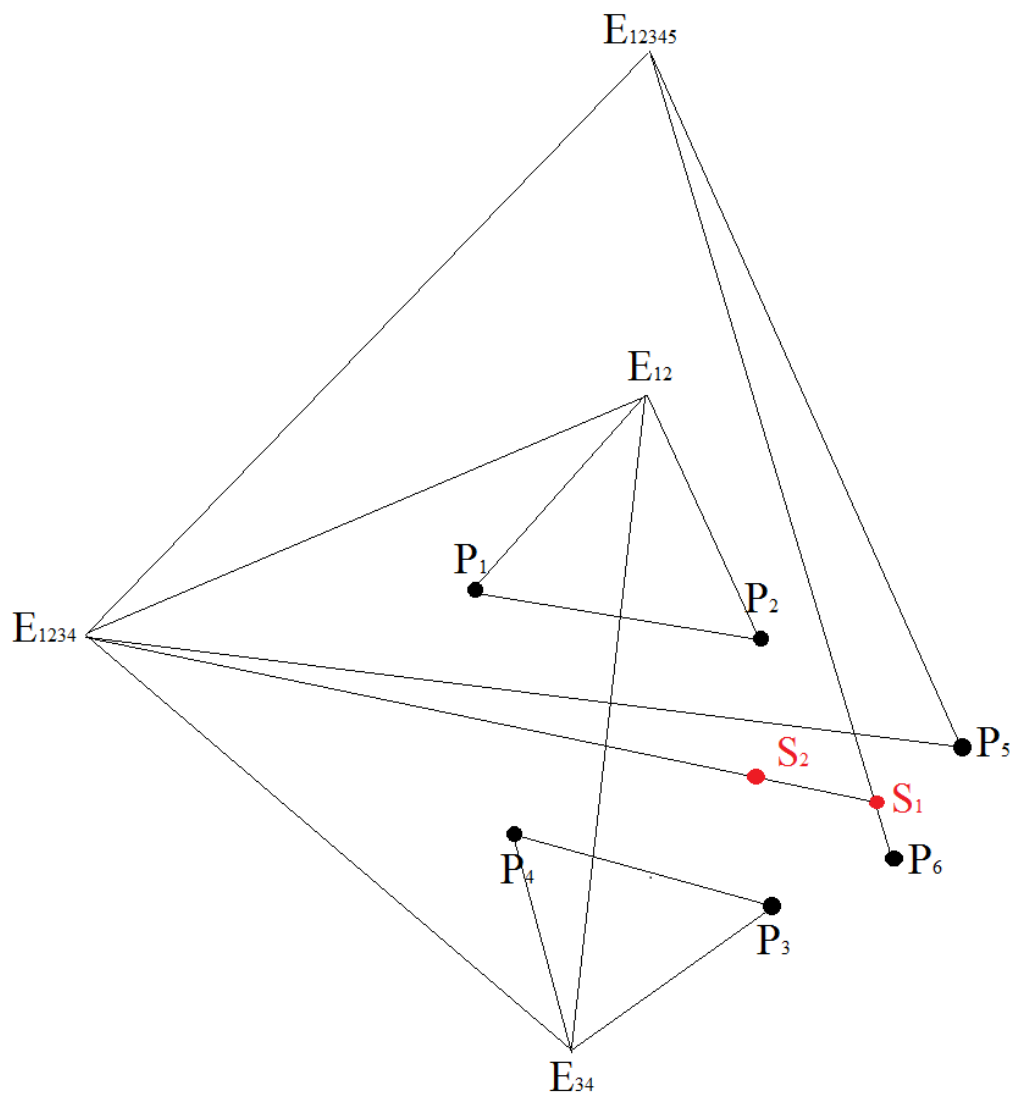


Figura 3.9: O ponto equilátero  $E_{1234}$  é substituído por  $E_{12}$ ,  $E_{34}$  e  $S_2$ .

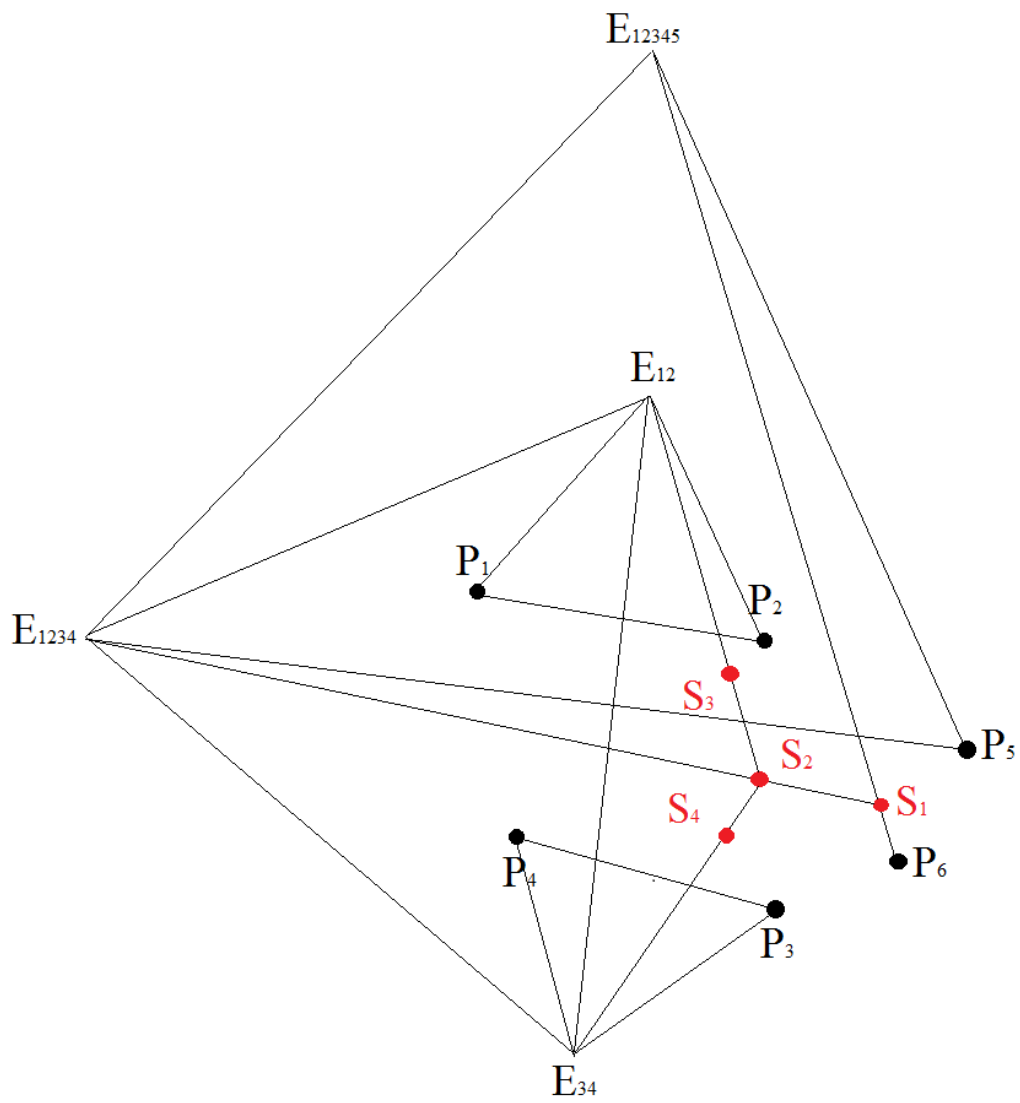


Figura 3.10: O ponto equilátero  $E_{12}$  é substituído por  $P_1$ ,  $P_2$  e  $S_3$ , e o ponto  $E_{34}$  por  $P_3$ ,  $P_4$  e  $S_4$

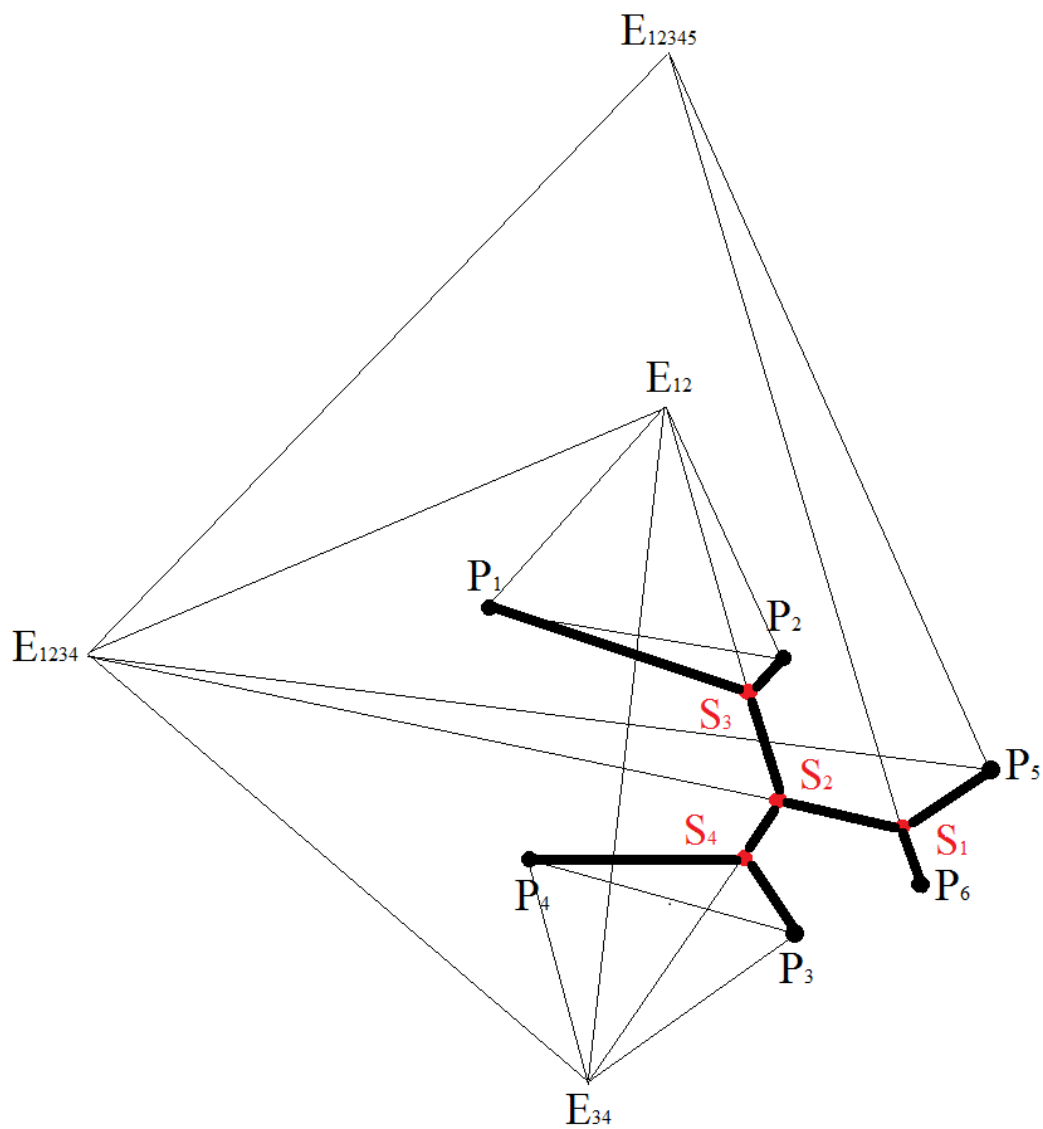


Figura 3.11: *topologia de uma árvore com quatro pontos de Steiner para os seis pontos regulares*

# Capítulo 4

## A Razão de Steiner no $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo vamos discutir a razão de Steiner no caso particular em que a dimensão  $d$  do espaço euclidiano em questão é 2, mas definiremos a caso  $d$ -dimensional para uso e referência posterior.

Seja  $l(SMT(V))$  o comprimento da árvore mínima de Steiner euclidiana para um conjunto  $V$  de pontos em  $E^d$ ;  $l(MST(V))$  o comprimento da árvore mínima geradora para esse mesmo conjunto  $V$  de pontos no espaço euclidiano  $E^d$ , então

$\rho_d$  é a menor razão de Steiner dentre todos os conjuntos  $V$  na dimensão  $d$ , isto é,

$$\rho_d = \inf_{V \subseteq \mathbb{R}^d} \rho(V),$$

onde  $\rho(V) = \frac{l(SMT(V))}{l(MST(V))}$ .

Claramente, a razão de Steiner  $\rho_d$  é, no máximo, igual a um. Chamaremos de  $\rho$  apenas.

Existem duas maneiras mais imediatas de interpretação da razão de Steiner. A primeira é o conhecimento do quanto podemos ganhar ao substituir a árvore mínima geradora pela árvore mínima de Steiner. Como a complexidade computacional para encontrar a árvore mínima de Steiner é muito grande, pode ser mais adequado continuar com a árvore mínima geradora, cuja complexidade é polinomial no pior caso. Simplificadamente, essa comparação pode ser feita pela observação do fato que a razão de Steiner é equivalente a seguinte igualdade

$$l(SMT(V)) = \rho \cdot l(MST(V)),$$

fixadas as topologias e o número de pontos. Assim, podemos dizer que  $\rho$  representa o decréscimo máximo possível no comprimento da  $MST$ , através de pontos de Steiner.

A outra interpretação interessante para a razão de Steiner é a relacionada à de uma configuração de energia mínima. Sabemos que a energia potencial de um sistema será mínima se este estiver em equilíbrio, sendo chamado de *estável* quando sua função potencial não puder ser melhorada para atingir um valor de mínimo ainda inferior ao conseguido. Neste caso, dizemos que o sistema atingiu um estado de energia mínima global. No entanto, o sistema pode estar em



equilíbrio instável quando a função energia do sistema alcançar um valor menor. Neste caso, dizemos que o sistema está num mínimo relativo. A conexão que existe entre a razão de Steiner e a configuração de energia mínima é que <sup>1</sup>, possivelmente, quanto mais próximo da unidade for a razão de Steiner de certos agregados protéicos, mais estáveis estariam essas determinadas moléculas, ou trechos destas. Ou seja, ao aumento da razão de Steiner corresponderia à diminuição da energia potencial da configuração. Assim, algumas macromoléculas de interesse biológico, como as proteínas, que representariam configurações estáveis, estariam com seus átomos numa configuração dada por árvores de Steiner, ou seja, a razão de Steiner de sua configuração seria aproximadamente igual à unidade, o que representaria um valor de equilíbrio estável.

Antes de sua recente solução, a razão de Steiner para a métrica euclidiana no  $\mathbb{R}^2$  era problema aberto famoso. Em 1968, Gilbert e Pollak observaram que a razão de Steiner era  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  para os vértices de um triângulo equilátero e conjecturaram que nenhum conjunto de pontos no plano alcançava uma razão de Steiner inferior. Por vários anos, pesquisadores avançaram em direção à demonstração de duas maneiras: pelo estudo de conjuntos arbitrários, mas com um número fixo de pontos, para  $n = 3, 4, 5, 6$  (veja [9, 36, 37, 38], respectivamente); e por outra linha de raciocínio, levantando o limite inferior para a razão de Steiner para conjuntos arbitrários de pontos, com  $\rho \geq 0.5$ ,  $\rho \geq 0.57$ ,  $\rho \geq 0.74$ ,  $\rho \geq 0.80$ ,  $\rho \geq 0.824$  (veja [9, 39, 40, 41, 43], respectivamente). Finalmente, cerca de vinte e dois anos após conjecturado por Gilbert e Pollak, Du e Hwang anunciaram (veja [44]) uma prova da conjectura (veja [45]):

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Demonstrações mais detalhadas podem ser encontradas em dois outros artigos dos mesmos autores (veja [46, 47]). Em sua demonstração incorporaram algumas idéias de Rubinstein e Thomas (veja [38, 48, 49]).

Para o caso tridimensional, no entanto, a generalização de Gilbert e Pollak se mostrou falsa. Smith e Du (veja [42]) mostraram que a razão de Steiner para o  $d$ -simplex, que era a configuração imaginada por Gilbert e Pollak como a que deveria possuir a menor razão de Steiner, não era a que apresentava a menor razão Steiner para o caso  $d$ -dimensional,  $d \geq 3$ . Eles mostraram que uma configuração que chamaram de  $d$ -sausage apresentava valores ainda menores que os do  $d$ -simplex, e desta constatação, conjecturaram que a configuração da  $d$ -sausage seria a que apresentava a menor razão de Steiner em todos as dimensões, com  $d \geq 3$ .

---

<sup>1</sup>Por modelagem computacional, não conclusiva, pois foram usadas apenas duas proteínas e um algoritmo que não conseguia trabalhar na molécula inteira, conforme [19].

# Capítulo 5

## Alguns casos nos quais se pode utilizar uma árvore de Steiner

O problema da árvore de Steiner Euclidiana (PASE) pode servir de suporte teórico a diversos problemas práticos reais, ou seja, resolvendo-se de forma eficiente o problema em questão, conseqüentemente, o mesmo acontece com os problemas que podem ser modelados como o PASE. Algumas aplicações que podem ser modeladas como um PASE são: configuração molecular (bioquímica), projeto de redes (elétrica, minas, dutos, etc.) e inferência filogenética. A seguir, cada uma destas aplicações será apresentada.

### 5.1 Aplicações do PASE na Configuração Molecular

MCGREGOR SMITH [18] apresentou várias propriedades que foram generalizadas do espaço euclidiano bidimensional para o tridimensional, e ainda metodologias algorítmicas que, devido à novidade e potencialidade do problema de Steiner, podem ser utilizadas em diversas áreas de aplicações. Uma das aplicações mais interessantes é aquela relacionada ao Problema de Configuração de Energia Mínima, descrita em outros artigos, e enfatizada por MCGREGOR SMITH [18] que fornece boas idéias para o trabalho do Problema de Enovelamento de Proteínas e DNA, sendo muito importante para vários ramos das Ciências na atualidade, principalmente aquelas que buscam a produção de drogas para curas de doenças como Câncer e AIDS.

OLIVEIRA [11] propôs em sua tese de doutorado um algoritmo denominado APOLONIO, baseado no algoritmo de Smith [15], como também realizou um estudo do problema de árvore mínima de Steiner euclidiana tridimensional (PASET), relacionando a função razão de Steiner ao problema de configuração de energia mínima de macromoléculas de interesse biológico. A seguir, na figura 5.1, tem-se exemplos de como a estrutura de árvore de Steiner euclidiana tridimensional aparece em algumas configurações moleculares.

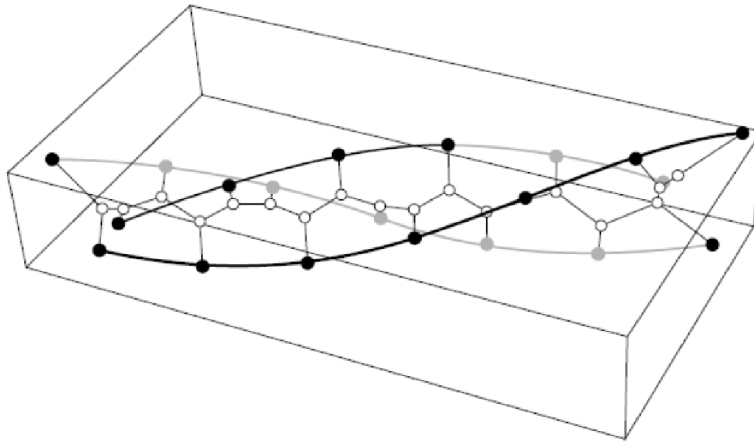


Figura 5.1: *Hélice tripla em uma Árvore de Steiner Mínima (ASM) para  $P = 20$ .*

## 5.2 Aplicações do PASE no Projeto de Redes

O projeto dos mais variados tipos de rede (elétrica, minas, dutos, etc) com comprimento mínimo é de suma importância e tem grande impacto econômico em diversas situações. No caso da necessidade de realização do projeto de uma rede de tamanho mínimo em uma estrutura tridimensional, pode-se criar um modelo baseado no problema da árvore de Steiner euclidiano tridimensional (PASET), onde os pontos fixos são os pontos da rede que se deseja conectar. Assim sendo, resolvendo-se o PASET, obtém-se a rede de custo mínimo que interliga estes pontos fixos, fazendo uso, se necessário de pontos extras de conexão (pontos de Steiner). Na Figura 5.2 tem-se um exemplo de uma rede de túneis em uma mina subterrânea, onde os pontos numerados são os pontos fixos e os não numerados são os pontos de Steiner. Já na Figura 5.3, tem-se um exemplo de uma rede de dutos de ventilação, onde os círculos brancos são os pontos fixos e os círculos pretos são os pontos de Steiner.

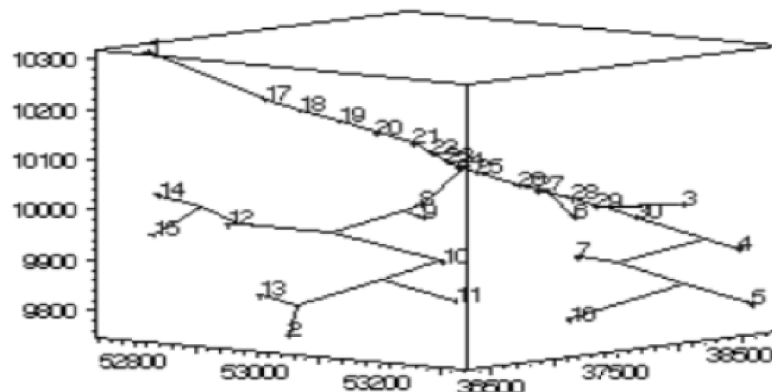


Figura 5.2: *Redes de túneis em uma mina subterrânea.*

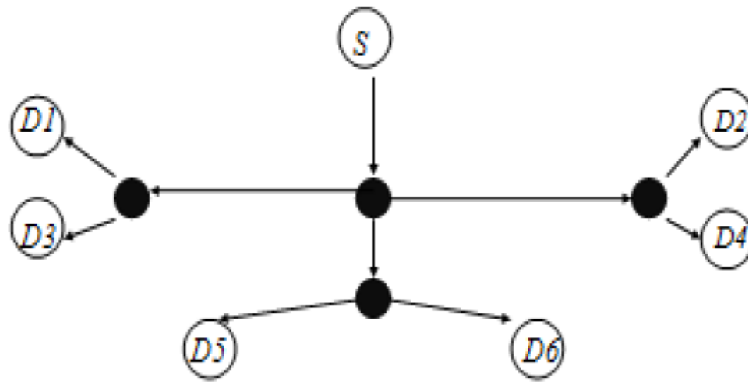


Figura 5.3: *Redes de dutos de ventilação.*

### 5.3 Redes Ópticas

Em um sistema de transmissão de uma rede óptica passiva, o sinal óptico é transmitido por uma Central Office através de uma rede de distribuição. Na fibra óptica são feitas derivações através do uso de *splitters* (divisores ópticos passivos).

Estas redes podem atingir um tamanho razoável e envolver custos significativos, tanto de implementação quanto de operação.

A figura a seguir exibe a configuração de distribuição de uma rede óptica a partir dos *splitters*. Conhecidas as posições dos *splitters* (neste caso representam os pontos de Steiner), a otimização da rede pode constituir uma árvore geradora sobre os pontos de demanda.

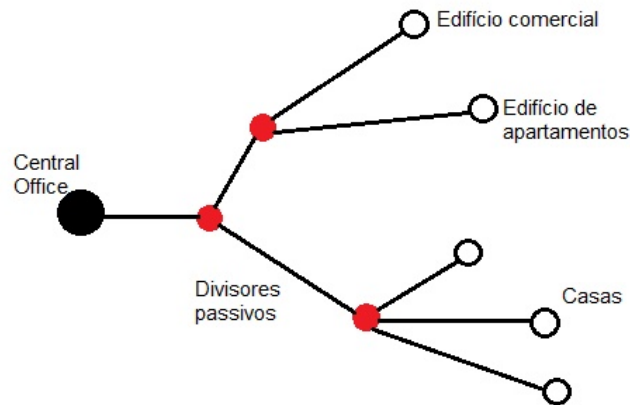


Figura 5.4: *Arquitetura genérica de uma rede óptica*

### 5.3.1 Otimização de Distribuição de Sinal de Redes

Um sinal é gerado em um ponto da rede, transita codificado até pontos de decodificação e é distribuído aos usuários.

O serviço de decodificação tem custos diferentes em cada ponto, em virtude de características de demanda e operação nestes pontos. Diferentes configurações de distribuição têm seu custo calculado através do custo do caminho percorrido mais o custo do serviço de decodificação.

Este problema pode ser modelado como uma árvore de Steiner. As figuras 5.5, 5.6 e 5.7, mostram respectivamente, uma distribuição qualquer, uma árvore de custo maior e outra de custo inferior.

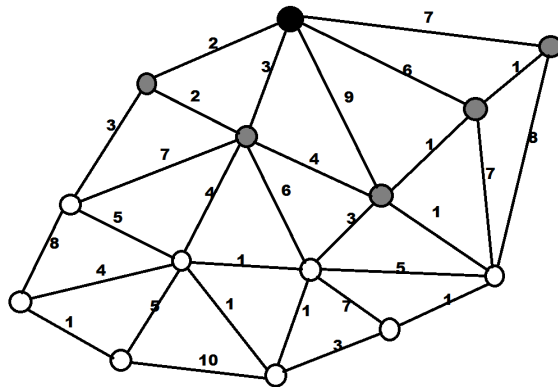


Figura 5.5: Redes com custo de distribuição nas arestas. Vértices da cor cinza indicam pontos de decodificação

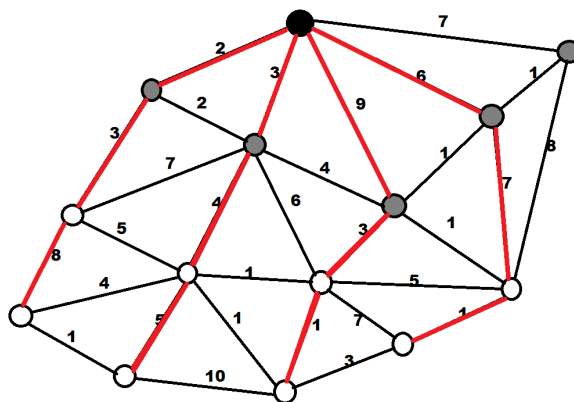


Figura 5.6: Solução com custo de 52 unidades

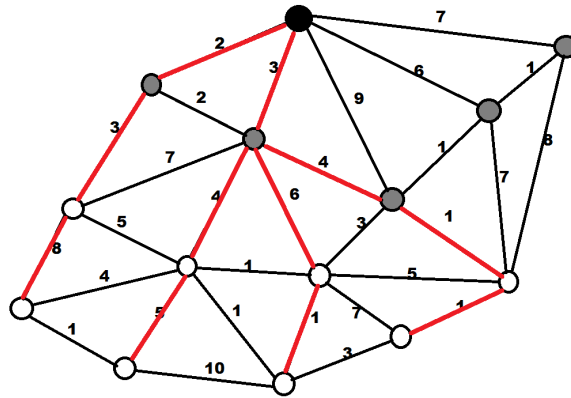


Figura 5.7: Solução com custo de 38 unidades

## 5.4 Outros casos práticos da Árvore de Steiner

1. Projeto de redes de computadores e de comunicação;
2. Instalações telefônicas, hidráulicas, elétricas, de petróleo e gás;
3. Análise de agrupamentos;
4. Análise genética;
5. Análise de padrões de distribuição espacial de esporos;
6. Astronomia (determinação de agrupamento de quasars);
7. Geração de limites de problemas NP-Difíceis;
8. Computação móvel;
9. Modelos de localização de interação de partículas em fluxo turbulento de fluidos;
10. etc.

# Considerações Finais

A importância desse trabalho foi conhecer e apreciar o desenvolvimento histórico do Problema de Steiner, analisando as propriedades geométricas utilizadas na solução desse problema, observa-se que podemos interligar uma distribuição de pontos por uma distância mínima e essa distância é encontrada por construções geométricas utilizando régua e compasso. Assim, espera-se que este trabalho possa contribuir para aplicações geométricas elementares tanto para nível médio, como também para alunos de graduação em busca de mais conhecimentos.

## **Trabalhos futuros:**

Para nós professores que temos o papel de fazer despertar nos nossos alunos o fascínio pela matemática, como ferramenta para situações reais, algumas estratégias serão desenvolvidas futuramente com base nesse estudo:

- Utilização do Geogebra como aplicação para nível médio, para encontrar o ponto de Steiner no caso de três pontos no plano;
- Situações problemas nas quais se necessitam determinar os pontos de Steiner;

# Referências Bibliográficas

- [1] GALÉEV E. TIJOMÍROV, V. Breve curso de la teoría de problemas extremales. Moscou: MIR, 1991.
- [2] MERCURI FRANCESCO; PEDROSA, R. L. Uma introdução às desigualdade isoperimétricas. Rio de Janeiro: [s.n.], 1993.
- [3] BOYER, C. B. História da matemática. São Paulo: Blucher, 2010.
- [4] KLINE, M. Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1. Oxford: [s.n.], 1990.
- [5] CASTANEDA, A. M. M. Introdução à programação linear. apostila para a disciplina de programação linear. departamento de matemática. Boa vista, RR, 2013.
- [6] COIMBRA, W. R. *Árvores de Steiner : Teoria, geração numérica e aplicações* / Wendhel Raffa Coimbra - Santo André : Universidade Federal do ABC, 2009.
- [7] COURANT, R., ROBBINS, H., *What is Mathematics?*. 1 ed., New York, Oxford University Press, 1941.
- [8] MELZAK, Z.A. "On the Problem of Steiner", *Canadian Mathematics Bulletin*, v.4, pp. 143-148, 1961.
- [9] GILBERT, E. N, POLLAK, H.O. "Steiner Minimal Trees", *SIAM J. Appl. Math.*, v. 16, n.1, pp. 1-29, 1968.
- [10] CIESLIK, A., *On the Steiner Ratio*. 1 ed., Amsterdam, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [11] OLIVEIRA, N. V., *O Problema de Steiner e a Estrutura das Biomacromoléculas*. Tese de D.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.
- [12] MONTENEGRO, F., TORREÃO, J. R. A., MACULAN, N. *Microcanonical Optimization Algorithm for the Euclidian Steiner Problem in  $R(n)$  with application to Phylogenetic Inference*. Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids and Related Interdisciplinary Topics, v. 68, n. 5, p. 56702, 2003.



- [13] THOMPSON, E. A. "The Method of Minimum Evolution". *Annals of Human Genetics*, vol 36, pp. 333-340, 1973.
- [14] UFOP, U. F. O. P. *Departamento de Computação*. Ouro Preto, 2016. Disponível em <<http://www.decom.ufop.br/marco/>>
- [15] SMITH, W.D. "How to Find Steiner Minimal Trees in Euclidean  $d$ -Space", *Algorithmica*, v. 7, pp. 137-177, 1992.
- [16] SMITH, J.M, SMITH, W.D. "On the Steiner Ratio in 3 - Space", *Journal of Combinatorial Theory, A*, v. 69, pp. 301-332, 1995.
- [17] SMITH, J. M., WEISS, R., PATEL, M. "An  $O(N^2)$  Heuristic for Steiner Minimal Trees in  $E^3$ ", *Networks*, v. 25, pp. 273-289, 1995.
- [18] SMITH, J.M. "Steiner Minimal Tree in  $E^3$ : Theory, Algorithms and Applications."v.2, In: *Handbook of Combinatorial Optimization*, pp. 397-470. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [19] SMITH, J.M., TOPPUR, B. "Euclidean Steiner Minimal Trees, Minimal Energy Configurations, and the Embedding Problem of Weighted Graphs in  $E^3$ ". *Discrete Applied Mathematics*, v.71, pp. 187-215, 1996.
- [20] MONDAINI, R. "The Minimal Surface Structure of Biomolecules". In: *Proceedings of the First Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, pp. 1-11, Rio de Janeiro, 2001.
- [21] MONDAINI, R., MONDAINI, D.F., MACULAN N. "The Study of Steiner Points Associated with the Vertices of Regular Tetraedra Joined Together at Common Faces". *Investigation Operativa*, v.6, pp.103 - 110, 1998.
- [22] MONDAINI, R. P., MONTENEGRO, F., MONDAINI, D. F. Modelling a Steiner Point Distribution of a Generic Helix Point configuration. In: Relatório Técnico - UFRJ - COPPE - ES-406/96, 1996.
- [23] HWANG, F.K., RICHARDS, D.S., WINTER, P. *The Steiner Tree Problem*. North-Holland, 1992.
- [24] KUHN, H.W. "Steiner's" Problem Revisited ". *Studies in Optimization*, v. 10, Dantzig, G.B., Eaves, B.C. (eds.), Math. Assoc. Amer., pp. 53-70, 1975.
- [25] PRIM, R.C. "Shortest connection networks and some generalizations". *Bell System Tech. J.*, v. 36, pp. 1389-1401, 1957.

- [26] KRUSKAL, Jr., J. B. "On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem". *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 7, pp. 48-50, 1956.
- [27] POLYA, G. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1954.
- [28] MIEHLE, W. "Link-length Minimization in Networks". *Operations Research*, v. 6., 232-243, 1958.
- [29] SOUKUP, J. "Minimal Steiner Tree, Roots of Polynomial, and Other Magic". *ACM/SIGMAP Newsletter*, v. 22, 37-51, 1977.
- [30] COCKAYNE, E. J. "On the Steiner Problem". *Canadian Mathematics Bulletin*, v. 10, pp. 431-450, 1967.
- [31] COCKAYNE, E. J., SHILLER, D. G. "On the Steiner Problem". *Computation of Steiner Tree. Combinatorics*, Welsh, D. J. A., Woodall, D. R. (eds.). pp. 53-71, 1972.
- [32] HWANG, F. K. "A Linear Time Algorithm for Full Steiner trees". *Operations Research Letters*, v. 4, pp. 235-237, 1986.
- [33] COCKAYNE, E.J., HEWGILL, D.E. "Improved Computation of Plane Steiner Minimal Trees". *Algorithmica*, v. 7, pp. 219-229, 1992.
- [34] WINTER, P. "An Algorithm for the Steiner Problem in the Euclidean Plane". *Networks*, v. 15, pp. 323-345, 1985.
- [35] COCKAYNE, E. J. "On the Efficiency of the Algorithm for Steiner Minimal Trees". *SIAM J. Appl. Math. Programming*, v. 69, pp. 150-159, 1995.
- [36] POLLAK, H. O. "Some remarks on the Steiner Trees Problems". *J. Comb. Theory, Ser. A*, v. 24, pp. 278-295, 1978.
- [37] DU, D.Z., HWANG, F.K., YAO, E. N. "The Steiner ratio conjecture is true for five points". *J. Comb. Theory, Ser. A*, v. 38, pp. 230-240, 1985.
- [38] RUBINSTEIN, J. H., THOMAS, D. A. "The Steiner Ratio conjecture is true for six points". *J. Comb. Theory, Ser. A*, v. 58, pp. 54-77, 1991.
- [39] GRAHAM, R. L., HWANG, F. K. "A Remark on Steiner Minimal Trees". *Bull. Of the Inst. of Math. Sinica*, v. 4, pp. 177-182, 1976.
- [40] CHUNG, F. R. K., HWANG, F. K. "A lower bound for the Steiner Tree Problem". *SIAM J. Appl. Math.*, v. 34, pp. 27-36, 1978.

- [41] DU, D.Z., HWANG, F. K. "A new bound for the Steiner Ratio". *Trans. Am. Soc.*, v. 278, pp. 137-148, 1983.
- [42] DU, D.Z., SMITH, W.D., "The Steiner ratio conjecture is true for five points". *J. Comb. Theory, Ser. A*, v. 38, pp. 230-240, 1985.
- [43] CHUNG, F. R. K., GRAHAM, R. L. "A new bound for Euclidean Steiner Minimal Trees". *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, v. 440, pp. 328-346, 1985.
- [44] DU, D.Z, HWANG, F.K. "An Approach for Proving Lower Bounds: Solution of Gilbert-Pollak's Conjecture on the Steiner Ratio". In: *Proc. of the 31st Ann. Symp. on Foundations of the Computer Science*, St. Louis, 1990.
- [45] DU, D.Z, HWANG, F.K. "The Steiner ratio conjecture of Gilbert and Pollak is true". In: *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, v. 87, pp. 9464-9466, 1990.
- [46] DU, D.Z, HWANG, F.K. "The state of art in Steiner ratio problems". In: *Computing in Euclidean Geometry*, Du, D.Z., Hwang, F. K. (eds.), pp. 163-192. World Scientific, Singapore, 1992.
- [47] DU, D. Z., HWANG, F. K. "A proof of Gilbert-Pollak's conjecture on the Steiner ratio". *Algorithmica*, v. 7, pp. 121-135, 1992.
- [48] RUBINSTEIN, J. H., THOMAS, D. A. "Variational approach to the Steiner network problem". In: *Topological Network Design*, Smith, J. M., Winter, P. (eds.), Annals of Operations Research, , v. 33, pp. 481-500, J. C. Baltzer AG, Basel, 1991.
- [49] MEEKS, W., YAU, S. T. "Topology of three manifolds and the embedding problem in minimal surface theory". *Ann. Math.*, v. 112, pp. 441-485, 1980.