UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

A construção dos números reais e aplicações

José Elias da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB
Outubro/2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

A construção dos números reais e aplicações

por

José Elias da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

S586c Silva, José Elias da.
A construção dos números reais e aplicações [manuscrito] / José Elias da Silva. - 2016.
52 p.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Números reais. 2. Cortes de Dedekind. 3. Sequência de Cauchy. 4. Matemática. I. Título.
21. ed. CDD 512.72

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS E APLICAÇÕES

por

José Elias da Silva

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Antônio Joaquim Rodrigues Feitosa - UFPB
Membro externo

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda - UEPB
Membro interno

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Orientador

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Outubro/2016

Dedicatória

Às minhas filhas Brenda Jennifer Costa da Silva, Camila Karen Costa da Silva e Sarah Mirelly Costa da Silva.

Agradecimentos

Em primeiro lugar à Deus.
Aos meus pais, que sempre estão ao meu lado em todas as minhas decisões.
Ao orientador Aldo Trajano Lourêdo, pela orientação, paciência e amizade. Sem esses requisitios não teria chegado até aqui.
Aos professores doutores, Manuel Milla Miranda e Antônio Joaquim Rodrigues Feitosa, por suas importantes observações e sugestões.
Aos meus amigos de graduação, que formaram uma nova família para mim.
Ás minhas filhas Brenda Jennifer(Jenny) , Camila Karen (Mylla) e Sarah Mirrelly, que pelo simples fato de existirem, me dão força e coragem para seguir em frente.
Aos amigos Ginaldo Farias, Renan, Cicero, Kézia Patrícia todos tiveram importante participação nessa minha conquista.
Enfim, a todo, que de uma forma direta ou indireta contribuíram para o meu sucesso.
Muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho serão estudadas duas construções do sistema dos números reais. A construção do sistema dos números reais por cortes na reta ou secções no conjunto dos números racionais, avançada por Dedekind, e a construção do número real como classe de equivalência de sucessões fundamentais de números racionais, ideia protagonizada por Cantor. Relacionado com este tema, um capítulo deste trabalho será dedicado à aplicação da densidade dos números racionais e irracionais.

Posteriormente, e de uma forma mais sintetizada do que nas anteriores, são apresentadas outras construções, procurando tornar mais claro a ideia fundamental subjacente ao conceito de número real. Por fim, utiliza-se o método axiomático com o intuito de mostrar a unicidade do sistema dos números reais, isto é, concluir finalmente que existe um corpo completo e ordenado, e apenas um a menos de um isomorfismo, do conjunto dos números reais.

Palavras Chaves: Números reais, Cortes de Dedekind, Sequência de Cauchy.

Abstract

In this study we work two constructions of the real numbers system. The construction the system of real numbers by cuts or straight sections in the set of rational numbers, advanced by Dedekind, and the construction of the real number as equivalence class of fundamental sequences of rational numbers, idea introducel by Cantor.
Related to this approach, we dedicate a Chapter to show density of the rational numbers and irrational numbers in the set of real numbers.
Later, in a more synthesized form than the above constructions,we present other approachs which the fundamental idea of real numbers is more clear.
Finally we use method axiomatic in order to show the uniqueness of the real numbers system, thus, we conclude that there is a complete and orderly body which is unique up to isomorphism . This unique body is named the real numbers body.

Keywords: real numbers, Dedekind cuts, Cauchy Sequence .

Um dia você irá olhar para todas as dificuldades que enfrentou e verá que elas foram essenciais, pois a fizeram chegar no topo.
(Zé Ramalho)

Sumário

Introdução

O conceito de número real é um dos mais profundos da matemática, remonta aos gregos da escola pitagórica, com a descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado. A construção desse conceito passou por Eudoxo (século IV a.C.), com sua teoria das proporções, registrada nos Elementos de Euclides, e só foi concretizada no século XIX.

A existência de grandezas incomensuráveis e a ausência de um tratamento eficiente para expressá-la, isto é, o desconhecimento de uma fundamentação teórica para o conceito de número real, não impediu o progresso de ramos da matemática do século XVI ao século XIX. No entanto, a complexidade dessa matemática conduziu a problemas para cuja compreensão e solução o entendimento intuitivo não era suficiente. É mais ou menos assim que formamos o nosso conceito de número real: apesar de ouvirmos falar de números reais desde o Ensino Fundamental, concretamente só trabalhamos com números racionais naquela fase ou, no máximo, manipulamos números que aprendemos a chamar de reais. Isto ocorre até no Ensino Superior e, mais grave, em não raras faculdades de matemática, os formandos concluem o seu curso com mesma ideia de número real com que eles ingressaram.

Os matemáticos, Cantor e Dedekind, construíram os números reais a partir dos racionais por métodos diferentes, respectivamente conhecidos por Classes de Equivalência de Sequência de Cauchy e por Cortes de Dedekind.

No Ensino Fundamental, os números reais são geralmente introduzidos de uma maneira um tanto empírica e seu estudo não costuma ir além de algumas operações algébricas elementares. Basicamente, o que se diz nesse nível sobre os números reais é o seguinte: admite-se que a cada ponto de uma reta está associado um número real. Há pontos que não correspondem a números racionais. A esses pontos sem abscissa racional correspondem os números chamados irracionais. Outra forma de introduzi-los é a seguinte: admite-se ou, em alguns casos, demonstra-se que a representação decimal dos números racionais é periódica e, reciprocamente, toda representação decimal periódica corresponde à de um número racional. Conclui-se por definir número irracional como sendo aqueles que possuem representação decimal não periódica. Ao conjunto constituído pelos racionas e irracionais dá-se o nome de conjunto dos números reais. Note que, em ambas as abordagens, somos conduzidos a admitir a existência de número não racionais: no primeiro caso, para dotar todo ponto da reta de uma abscissa e no segundo, para conceber qualquer desenvolvimento decimal como número. Em ambos os casos, no entretanto, raramente se toca na natureza desses novos números.

Em linhas gerais, o que faremos é construir rigorosamente os números reais, tendo como ponto de partida o conjunto dos números racionais com suas propriedades algébricas e aritméticas.

Abordagens distintas surgiram acerca da construção e da definição de número real. Mas as teorias que permaneceram e que se tornaram mais conhecidas nos nossos dias foi a de Dedekind, e a de Cantor.

Richard Dedekind (1831 - 1916) estudou em Göttingen, sendo então aluno de Gauss e Dirichlet. No início de sua carreira de professor em Zurique em 1858, quando ensinava Cálculo Diferencial, pela primeira vez percebeu a necessidade de um tratamento científico acerca do conceito de continuidade, ao tentar provar que uma função crescente e limitada tem limite, a partir daí foi conduzido a reconsiderar todo o problema da definição de número real.

Refletindo sobre a questão do que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais, e tendo em vista as ideias de Galileu e Leibniz sobre a continuidade de pontos sobre uma reta, Dedekind observou e concluiu que o fundamento da continuidade de um segmento de reta se deve a natureza da divisão dos pontos em duas partes por um ponto sobre o segmento. Assim, em toda divisão dos pontos de um segmento de linha reta em duas partes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, a direita existe um e um só ponto que produz esta decomposição de todos os pontos em duas classes.

Em 1887, Dedekind escreve:

...e se interpretarmos número como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. Aí reside a origem de minha teoria (...) e minhas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais [20, pág.57]. Deixando então claro que seu estímulo para a sua construção de números reais, foi buscada na teoria das proporções de Eudoxo. Inspirado na definição de Eudoxo, Dedekind notou que a sua definição levava a separação dos números racionais em dois conjuntos D e E de números racionais, tais que todo número do conjunto E, é menor do que todo número do conjunto D, existindo um e somente um número que produz este "corte", ou corte de Dedekind. Se E tem um maior elemento (máximo) ou se D tem menor elemento (mínimo), o corte define um número racional; mas se E não tem um maior elemento e nem D um menor elemento, então o corte define um número irracional. Dedekind observa que os números racionais pode ser estendido de modo a formar um contínuo numérico, pois a adjunção dos irracionais aos racionais preencheria as lacunas de descontinuidade que existiam no conjunto dos números racionais, formando assim um conjunto, ora denominado por conjunto dos números reais.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Peterburgo, Rússia em 1845: Em 1856 sua família mudou-se para a Alemanha onde continuou seus estudos em filosofia, física e matemática. Estudou em Zurique, Gottingen e Berlim, onde teve grande influência de Weierstrass. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867: Desenvolveu sua carreira no ensino na Universidade de Halle, pequena escola sem grande prestígio. Com 29 anos, Cantor casou-se e na sua lua de mel em Interlaken, conheceu e se tornou amigo de Richard Dedekind, que havia publicado sua teoria dos irracionais em 1872 dois anos antes de se conhecerem. No mesmo ano, 1874 Cantor publicou um de seus artigos mais revolucionário a respeito de teoria dos conjuntos e teoria do infinito. A partir daí, partindo do pressuposto de que os racionais são conhecidos com todas as suas propriedades, Cantor criou uma abordagem dos números irracionais utilizando a noção de sequência de Cauchy de números racionais, isto é, uma sequência de números racionais $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$ com a propriedade de que para dado qualquer racional $r > 0$ existe um natural n_1 tal que $|x_n - x_m| < r$ para todo $m, n > n_1$: Ele associou a toda sequência de Cauchy um número real, usando a ideia de convergência.

Tendo percebido que sequências de Cauchy podiam convergir para o mesmo número, Cantor definiu uma relação de equivalência entre duas sequências de Cauchy, desta maneira, (x_n) e (y_n), sequências de Cauchy, são equivalentes se $x_n - y_n \longrightarrow 0$ e assim as organizou em classes de modo que duas sequências pertencem a mesma classe se, e somente se, elas são equivalentes. Então todo número racional r está associado à classe a qual pertence a sequência onde seus termos são todos constantes iguais a r: Porém muitas das classes escapam dessa associação, e daí Cantor postulou que estas classes originam os números ora denominados números irracionais. Analisando geometricamente, podemos associar a cada número racional um ponto da reta euclidiana, porém, existem pontos da reta que não têm associado nenhum número racional. O processo de completamento de $\mathbb{Q}$ consistirá em enxergar cada racional como limite das sequências convergentes em $\mathbb{Q}$, completando a reta com as sequências de Cauchy que não convergem em $\mathbb{Q}$, isto é, a cada "lacuna"sobre a reta depois de fixados os números racionais está associada alguma sequência de Cauchy de racionais.

Capítulo 1

Construção dos números reais utilizando a noção de corte

Nesta seção, serão construído os números reais utilizando a noção de corte. Seguiremos basicamente [3].

1.1 Números Racionais

Os números racionais são os números da forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$, o conjunto dos números racionais é indicado por $\mathbb{Q}$, assim

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

onde $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois racionais quaisquer com $b \neq 0$ e $d \neq 0$. A soma e o produto destes racionais são obtidos da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

A operação que a cada par de números racionais associa a sua soma denomina-se adição, e a que associa o produto denomina-se multiplicação.

O número racional $\frac{a}{b}$ se diz positivo se $a \cdot b \in \mathbb{N}$; se $a \cdot b \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ se diz estritamente positivo.

Sejam r e s dois racionais: dizemos que r é estritamente menor que s (ou que s é estritamente maior que r) e escrevemos $r < s$ (respectivamente $s > r$) se existe um racional t estritamente positivo tal que $s = r + t$. A notação $r \leq s$ (leia: r menor ou igual a s ou simplesmente r menor que s) é usada para indicar a afirmação $r < s$ ou $r = s$. A notação $r \geqslant s$ (leia: r maior ou igual a s ou simplesmente r maior que s) é equivalente a $s \leq r$. Observe que r positivo equivale a $r \geq 0$. Se $s \leq 0$, dizemos que s é negativo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as seguintes propriedades:

Sejam x,y,z números racionais quaisquer. Então

Associativa

$(A1)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$

Comutativa

$(A2)$ $x + y = y + x$

Existência de elemento neutro

$(A3)$ $x + 0 = x$

Existência de oposto

$(A4)$ Para todo racional x existe um único racional y tal que $x + y = 0$. Tal y denomina-se oposto de X e indica-se por $-x$. Assim, $x + (-x) = 0$.

Associativa

$(M1)$ $(xy)z = x(yz)$

Comutativa

$(M2)$ $xy = yx$

Existência de elemento neutro

$(M3)$ $x \cdot 1 = x \quad 1 \neq 0$

Existência de inverso

$(M4)$Para todo racional $x \neq 0$ existe um único racional y tal que $x \cdot y = 1$. Tal y denomina-se inverso de x e indica-se por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Assim, $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributiva da multiplicação em relação à adição

$$x(y + z) = xy + xz$$

Reflexiva: $x \leq x \ \ \forall x \in \mathbb{Q}$

Anti-simétrica: $x \leq y$ e $y \leq x \Longrightarrow x = y$.

Transitiva: $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

Quaisquer que sejam os racionais x e y, temos:

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

Compatibilidade da ordem com a adição: $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$

Compatibilidade de ordem com a multiplicação: $x \leq y$ e $0 \leq z \Longrightarrow xz \leq yz$

Observação 1.1 *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos e suponhamos que em K estejam definidas duas operações indicadas por $+$ e $\cdot$, se a terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ satisfizer as propriedades (A1) a (A4), (M1) a (M4) de (D), diremos que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo. Se além disso,* *em $\mathbb{K}$ estiver definida uma relação ($\leq$) de modo que a quádrupla $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ satisfaça todas as 8 propriedades anteriormente listadas, então diremos que $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado. Segue que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado.*

Observação 1.2 *Todo corpo ordenado tem característica* [1] *0, pois $0 < 1$ fornece $1 < 1 + 1 = 2$, que fornece $2 < 2 + 1 = 3$, e assim por diante.*

Assim, nos corpos ordenados, as inclusões $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ respeitam, inclusive, a ordem de $\mathbb{K}$.

Definição 1.1 *Seja S um conjunto ordenado, e $E \subset S$. Se existir um $\beta \in S$, tal que $x \leq \beta$ para todo $x \in E$, dizemos que E é limitado superiormente, e chamamos β uma cota superior de E.*

Definição 1.2 *Suponha que S é um conjunto ordenado, $E \subset S$ e E é limitado superiormente. Suponha que existe um $\alpha \in S$ com as seguintes propriedades:*
(i) α é uma cota superior de E.
(ii) Se $\gamma < \alpha$, então γ não é cota superior de E .
Então α é chamado a menor cota superior de E (existe no máximo um α a partir de ii) ou o supremo de E, e escrevemos:

$$\alpha = \sup E.$$

A maior cota inferior, ou ínfimo do conjunto E, que é limitado inferiormente é definido da mesma maneira. Denotamos:

$$\alpha = \inf E.$$

Significa que α é limite inferior de E, e que não existe β com $\beta > \alpha$, tal que β seja cota inferior de E.

Teorema 1.1 *Suponha que S é um conjunto ordenado com a propriedade menor cota superior, $B \subset S$ B não é vazio, e B é limitado inferiormente. Seja L o conjunto de todas as cotas inferiores de B. Então*

$$\alpha = \sup L$$

existe em S, e $\alpha = \inf B$. Em particular, $\inf B$ existe em S.

[1] Num corpo K pode ser possível adicionar uma quantidade finita de parcelas iguais a 1 e obter 0, isto é,

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 0$$

. Quando esse fato acontece, **o menor natural** k, tal que a soma de k parcelas 1 é igual a 0, é chamado a **característica** de K e dizemos que um corpo tem **característica** k. Quando tal número natural não existe, dizemos que o corpo tem **característica 0**

Demonstração: Seja B um conjunto limitado inferiormente, $l \neq \emptyset$. Sendo L formado por todos elementos $y \in S$ tal que $y \leq x$ para todo $x \in B$, temos que todo $x \in B$ é um cota superior de L. L é limitado superiormente. Nossas hipóteses sobre S implica que L tem um supremo em S. Seja α este supremo.
Se $\gamma < \alpha$, então γ não é uma cota superior de L, portanto $\gamma \in B$. Assim $\alpha \neq x$ para todo $x \in B$. Logo $\alpha \in L$.
Se $\alpha < \beta$, então $\beta \in L$, desde que α é uma cota superior de L.
Mostramos que $\alpha \in L$, mas $\beta \notin L$ se $\beta > \alpha$. Em outras palavras α é uma cota superior de B, mas β não é se $\beta > \alpha$. Isto mostra que $\alpha = \inf B$.

■

1.2 Cortes de Dedekind

Nesta seção apresentaremos o conceito de cortes de Dedekind e algumas de suas propriedades.

Definição 1.3 *Seja α um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Dizemos que α é um número real, ou simplesmente corte, se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) α contém pelo menos um racional, mas não todos os racionais;

ii) Se $p \in \alpha$ e q é um número racional com $q < p$, então $q \in \alpha$;

iii) Em α não existe racional máximo.

A ideia que está por trás de tal definição é a de caracterizar um número real pelo conjunto de todos os números racionais que o precedem. Pela definição acima, estamos representado um número real α pelo conjunto de números reais que o precedem.

Lema 1.1 *Se $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < s$, então $r < \frac{r+s}{2} < s$*

Demonstração: Se $r < s$, temos que, $2r = r + r < r + s$ e $r + s < s + s = 2s$, daí,

$$2r < r + s < 2s$$

, isto é,

$$r < \frac{r+s}{2} < s$$

. ■.

Exemplo 1.1 *Seja $r \in \mathbb{Q}$. O conjunto $D = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$ é um corte de Dedekind.*

De fato,

(i) Temos que $r \in \mathbb{Q}$. Então, $r-1, r+1 \in \mathbb{Q}$ e mais ainda, $r-1 < r < r+1$, logo $r-1 \in D$ e $r+1 \notin D$. Portanto, temos que $D \neq \emptyset$ e $D \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Seja $x \in D$. Suponha $y \in \mathbb{Q}$, $y < x$ assim $y < x < r$, logo $y < r$, isto é, $y \in D$.

(iii) Suponhamos que exista um número racional m que seja o máximo em D. Sendo assim $x \leq m$ para todo $x \in D$. Sabemos que $m < r$, pelo lema (1.1), obtemos $m < \frac{m+r}{2} < r$, o que é um absurdo. Portanto, D não possui racional máximo.

Teorema 1.2 *Sejam $p, q \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.*

Demonstração: Se $p \in \alpha$ e $q \leq p$, conclui-se de (ii) que $q \in \alpha$

■

Em razão deste teorema, os racionais que não estão em α são chamados **cotas superiores** de α.

Subconjuntos limitados superiormente em $\mathbb{Q}$ nem sempre tem cota superior mínima. Entretanto, ela existe para alguns desses subconjuntos, que nesta seção chamamos de cortes racionais

Teorema 1.3 *Seja r um número racional e α o conjunto constituído de todos os racionais p tais que $p < r$. Então, α é um corte e r é a menor cota superior deste conjunto, isto é, o supremo de α.*

Demonstração: De imediato verificamos que α satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 1.3. Quanto a (iii), basta observar que qualquer que seja $p \in \alpha$

$$p < \frac{p+r}{2} < r,$$

e, portanto, $\frac{p+r}{2} \in \alpha$

Segue do **Teorema de Dedekind** que $r \notin \alpha$, pois caso contrário, se $p = r$ teríamos $r < r$, absurdo.

Assim, r é cota superior de α. Além disso, segue de (3.1) que nenhum $p < r$ pode ser cota superior. Portanto, r é a menor cota superior. ■

Definição 1.4 *O corte definido no Teorema 1.2 é um corte que chamamos de bf racional. Quando queremos indicar que um corte α é um corte racional cujo supremo é r, escrevemos $\alpha = r^*$. Os cortes que não são racionais serão chamados* **irracionais**.

Definição 1.5 *Seja o conjunto $\mathbb{Q}^* = \{r^*; r \in \mathbb{Q}\}$. Os elementos de $\mathbb{Q}^*$ são cortes* **racionais**.

Definição 1.6 *Sejam α e β cortes. Escrevemos $\alpha = \beta$ se de $p \in \alpha$ resulta $p \in \beta$ e de $q \in \beta$ resulta $q \in \alpha$, isto é, se os dois conjuntos são idênticos. Em caso contrário, escrevemos $\alpha \neq \beta$.*

1.2.1 Relação de Ordem

Nesta seção veremos alguns conceitos relacionados ao corte.

O símbolo $\mathbb{R}$ será usado para indicar o conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \{\alpha : \alpha$ é um corte$\}$

Definição 1.7 *Sejam α e β dois números reais. Definimos:*

a) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$

b) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$ *e* $\alpha \neq \beta$

Lema 1.2 *Se α é um número real e se x é racional, com $x \notin \alpha$, então $p < x$, para todo $p \in \alpha$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo, que exista $p \in \alpha$, com $p \geq x$, pela condição (ii) da definição 1.3, teríamos, então, que $x \in \alpha$, o que é uma contradição. Portanto, se $x \notin \alpha$, então $p < x$ para todo $p \in \alpha$. ■

Mostraremos agora que, $\leq$ é uma relação de ordem sobre $\mathbb{R}$, isto é, $\leq$ satisfaz as propriedades:

01) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq \alpha$;

02) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$;

03) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$.

04) quaisquer que sejam α e β em $\mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.

Demonstração: 01) Suponha $\alpha \in \mathbb{R}$. Como α é um subconjunto próprio de α, então $\alpha \subset \alpha$ e portanto $\alpha \leq \alpha$.

02) Suponha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$. Logo, por definição $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$ e portanto $\alpha = \beta$.

03) Considere $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$. Então, $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \gamma$, logo $\alpha \subset \gamma$ e portanto $\alpha \leq \gamma$.

04) Quaisquer que sejam os reais α e β, $\alpha \subset \beta$ ou $\alpha \not\subset \beta$.

Se $\alpha \subset \beta$, então $\alpha \leq \beta$.

Se $\alpha \not\subset \beta$, então existe um racional x, com $x \in \alpha$ e $x \notin \beta$.

Como $x \notin \beta$, segue pelo lema (1.2) que $p < x$, para todo $p \in \beta$. Como $x \in \alpha$, para todo $p \in \beta$, $p < x$, segue pela condição (ii) da definição (1.3) que $p \in \alpha$, par todo $p \in \beta$, isto é, $\beta \subset \alpha$, ou seja, $\beta \leq \alpha$. ■

Definição 1.8 *Sejam α e β cortes. Escrevemos $\alpha < \beta$ $(ou \beta > \alpha)$ se existe um racional p, tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$.*

$$\alpha \leq \beta \; significa \; \alpha = \beta \; ou \; \alpha < \beta$$

$$\alpha \geq \beta \; significa \; \beta \leq \alpha$$

Se define também 0^**, como o conjunto de todos os números racionais negativos. E, imediatamente, verificamos que* 0^* *é um corte.*
Se $\alpha > 0^*$*, dizemos que* α *é* **positivo***; se* $\alpha \geq 0^*$*, dizemos que* α **não é negativo***. Analogamente, se* $\alpha < 0^*$*,* α *é* **negativo***, e* **não é positivo** *se* $\alpha \leq 0^*$*.*

Teorema 1.4 (Tricotomia) *Sejam* α*,*β *números reais. Então* $\alpha = \beta$ *ou* $\alpha < \beta$ *ou* $\beta < \alpha$*.*

Demonstração: Se $\alpha = \beta$, nenhuma das outras relações é válida pela definição de igualdade de conjuntos. Para mostrar que $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$ se excluem mutuamente, suponhamos que ambas as relações sejam válidas. Como $\alpha < \beta$, existe um racional p tal que

$$p \in \beta, \; p \notin \alpha,$$

de $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ resulta $p < q$, enquanto de $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$ resulta $q < p$. Isto é um contradição, pois $p < q$ e $q < p$ é impossível para racionais. Até aqui provamos que no máximo, que uma das três relações é válida. Suponhamos agora, $\alpha \neq \beta$. Então, os dois conjuntos não são idênticos, isto é, ou existe um racional p em α mas não em β e , neste caso, $\beta < \alpha$ ou existe um racional q em β mas não em α, e portanto, $\alpha < \beta$.

■

1.2.2 Adição em $\mathbb{R}$

No que segue veremos o conceito da adição em $\mathbb{R}$

Teorema 1.5 *Sejam* α, β *números reas. Seja* γ *o conjunto de todos os racionais* r *tais que* $r = p + q$*, com* $p \in \alpha$ *e* $q \in \beta$*. Então,* γ *é um corte.*

Demonstração: Vamos mostrar que γ satisfaz as três condições da definição de corte.

(i) Como α e β não são vazios, existem $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Assim $p + q \in \gamma$, logo γ não é vazio.

Por outro lado, como $\alpha \neq \mathbb{Q}$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$, existem racionais r e t, com $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, pelo Lema 1.2, tem-se

$$\text{Para todo} \quad p \in \alpha, p < s \quad \text{e para todo} \quad q \in \beta, q < t$$

daí

$$\text{Para todo} \quad p \in \alpha, \quad \text{para todo} \quad q \in \beta, p + q < s + t$$

Logo, $s + t \notin \gamma$, portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Precisamos provar que, se $x \in \gamma$ e $y < x$, então $y \in \gamma$. Para provar que $y \in \gamma$, precisamos fabricar um $s \in \alpha$ e um $t \in \beta$, de mo que $y = s + t$.

Temos:

$$x \in \gamma \Leftrightarrow x = p + q \quad \text{para algum} \quad p \in \alpha \quad \text{e algum} \quad q \in \beta.$$

De $y \in x$ segue $y < p + q$, daí $y - p < q$, como $q \in \beta$, segue que $y - p \in \beta$. Então,

$$y = p + (y - p), \quad \text{com} \quad p \in \alpha \quad \text{e} \quad (y - p) \in \beta.$$

Logo, $y \in \gamma$.

(iii) Para provar que γ não tem máximo, precisamos provar que, se $x \in \gamma$, então existe $y \in \gamma$ com $x < y$. Temos:

$$x \in \gamma \Leftrightarrow x = p + q \quad \text{para algum} \quad p \in \alpha \quad \text{e algum} \quad q \in \beta.$$

Como α e β não tem máximo, existem racionais $s \in \alpha$ e $t \in \beta$ com $p < s$ e $q < t$, daí $p + q < s + t$. Tomando-se $y = s + t$, tem-se $x < y$, com $y \in \gamma$. Assim y não tem máximo.

Como as condições (i), (ii) e (iii) da definição 1.3 foram verificadas, segue que $\gamma \in \mathbb{R}$.

■

Definição 1.9 *Sejam α e β dois números reais. O número real $\gamma = \{p + q : p \in \alpha, b \in \beta\}$ denomina-se soma de α e β e é indicado por $\alpha + \beta$. Assim, $\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, b \in \beta\}$*

A operação que a cada par (α, β) de números reais associa a sua soma $\alpha + \beta$ denomina-se adição e é indicada por $+$.

1.2.3 Propriedades da Adição em $\mathbb{R}$

Nosso objetivo nessa seção, é provar que a adição satisfaz as propriedades (A1), (A2), (A3), (A4) e (OA).

Lema 1.3 *Sejam α um número real, $u < 0$ um racional e M_α o conjunto das cotas superiores de α. Nestas condições, existem $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$, $q \neq \min M_\alpha$ (caso $\min M_\alpha$ exista), tais que $p - q = u$.*

Demonstração: Estamos interessados em determinar $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$, $q \neq \min M_\alpha$, com $p - q = u$.

Para isto tomemos um racional $s \notin \alpha$ com $s \neq \min M_\alpha$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o racional $q_n = nu + s$.

Seja, agora, $\overline{n}$ o máximo dos naturais n para os quais $q_n \in M_\alpha$, $q_n \neq \min M_\alpha$.

Dois casos podem ocorrer:

1º CASO. $q_. \in M_\alpha$ e $q_{\overline{n}+1} \in \min M_\alpha$.

Tomando-se $q = q_{\overline{n}}$ e $p = q_{\overline{n}+1}$, $p - q = u$.

2º CASO. $q_. \in M_\alpha$ e $q_{\overline{n}+1} = \min M_\alpha$.(que só poderá ocorrer se $\min M_\alpha$ existir)

Tomando-se

$$q = q_{\overline{n}} + \frac{1}{2}u e p = q_{\overline{n}+1} + \frac{1}{2}u, p - q = u$$

, com $p \in \alpha$ e $q \in M_\alpha$, $q \neq \min M_\alpha$. ■

Teorema 1.6 *A adição satisfaz as propriedades:*

A1) Associativa: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

A2) Comutativa: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = \beta + \alpha$;

A3) Existência de elemento neutro:$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + 0^* = \alpha$;

A4) Existência de Oposto: Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, *existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *com* $\alpha + \beta = 0^*$;

OA) Compatibilidade da adição com a ordem: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Demonstração: (A1) e (A2) ficam a cargo do leitor.

(A3) Precisamos provar que $\alpha + 0^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha + 0^*$.

Mostremos a primeira inclusão

$$\alpha + 0^* \subset \alpha$$

Lembramos que, $0^* = \{u \in \mathbb{Q} : u < 0\}$. Temos:

$$x \in \alpha + 0^* \Leftrightarrow x = a + u \quad \text{para algum} \quad a \in \alpha \quad \text{e algum} \quad u < 0, u \in \mathbb{Q}$$

, e

$$u < 0 \Rightarrow a + u < a \Rightarrow x < a \Rightarrow x \in \alpha,$$

portanto,

$$x \in \alpha + 0^* \Rightarrow x \in \alpha.$$

Logo, $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

Reciprocamente, mostraremos agora, que

$$\alpha \subset \alpha + 0^*.$$

precisamos provar que, se $x \in \alpha$, então é possível fabricar um $a \in \alpha$ e um $u < 0$ tal que $x = a + u$. Então,

$$x \in \alpha \Rightarrow \exists a \in \alpha, \quad \text{com} \quad x < a, \quad \text{pois} \quad \alpha \quad \text{não tem máximo},$$

e

$$x < a \Rightarrow x - a < 0.$$

Assim,

$$x = a + (x - a), \quad \text{com} \quad a \in \alpha \quad \text{e} \quad x - a < 0.$$

Logo, $x \in \alpha + 0^*$. Portanto,

$$\alpha \subset \alpha + 0^*.$$

(A4) Seja α um número real. Como $\beta = \{p \in \mathbb{Q} : -p \in M_\alpha \quad \text{e} \quad -p \neq \min M_\alpha\}$ é um número real, vamos provar que $\alpha + \beta = 0^*$.

Mostraremos primeiro que

$$\alpha + \beta \subset 0^*.$$

Note que:

$$x \in \alpha + \beta \Leftrightarrow x = a + b \quad \text{para algum} \quad a \in \alpha \quad \text{e algum} \quad b \in \beta. b \in \beta \Rightarrow -b > a \Rightarrow a + b < 0$$

Assim,

$$x \in \alpha + \beta \Rightarrow x \in 0^*, \quad \text{ou seja,} \quad \alpha + \beta \subset 0^*.$$

Reciprocamente, mostraremos agora, que

$$0^* \subset \alpha + \beta.$$

Precisamos provar que, se $x \in 0^*$, então $x = a + b$ para algum $a \in \alpha$ e algum $b \in \beta$.

Como $x < 0$, segue do Lema 1.3, que existem $a \in \alpha$ e $-b \in M_\alpha$, com $-b \neq \min M_\alpha$, tais que $x = a - (-b)$, assim $x = a + b$ com $a \in \alpha$ e $b \in \beta$. Portanto, $0^* \subset \alpha + \beta$.

Provamos, assim, que dado um real α, existe um real β tal que $\alpha + \beta = 0$. Provaremos mais adiante que tal β é único e será, então, denominado oposto de α e indicado por $-\alpha$.

(OA) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, com $\alpha \leq \beta$, vamos provar que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Temos

$$x \in \alpha + \gamma \Rightarrow x = a + c \quad \text{para alguma} a \in \alpha \quad \text{e algum} \quad c \in \gamma.$$

Da hipótese, segue que $a \in \alpha \Rightarrow a \in \beta$.

Assim, $x = a + c$ para algum $a \in \beta$ e algum $c \in \gamma$. Logo, $x \in \beta + \gamma$. Provamos assim, que

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \subset \beta + \gamma \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

.

■

Teorema 1.7 (Unicidade do oposto) *Se $\alpha + \beta = 0^*$ e $\alpha + \gamma = 0^*$, então $\beta = \gamma$.*

Demonstração: Temos que:

$$\beta = 0^* + \beta = (\gamma + \alpha) + \beta = \gamma + (\alpha + \beta) = \gamma + 0^* = \gamma.$$

■

Teorema 1.8 (unicidade do elemento neutro) *Se $\alpha + \gamma = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\gamma = 0^*$*

Demonstração: Da hipótese, segue que $0^* + \gamma = 0^*$. Daí $\gamma = 0^*$ ■

1.2.4 Multiplicação em $\mathbb{R}$

Nesta seção veremos o conceito de multiplicação módulo e propriedades relacionadas.

Teorema 1.9 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$. Então*

$$\gamma = \mathbb{Q}_- \cup \{ab : a \in \alpha, b \in \beta, a > 0, b > 0\}$$

é um número real.

Demonstração: (R1) $\gamma \neq \emptyset$, pois $\mathbb{Q}_- \subset \gamma$. Para provar que $\gamma \neq \mathbb{Q}$, procedemos assim: como α e β são números reais, existem racionais m e n com $m \notin \alpha$ e $n \notin \beta$, daí:

$$\forall a \in \alpha, \quad \text{com} \quad a > 0, a < m,$$

$$\forall b \in \beta, \quad \text{com} \quad b > 0, b < n.$$

Logo,

$$ab < mn \quad \text{para todo} \quad a \in \alpha, a > 0, \quad \text{para todo} \quad b \in \beta, b > 0, \quad \text{portanto,} \quad mn \notin \gamma.$$

(R2) Sejam $p, q \in \mathbb{Q}$ com $p \in \gamma$ e $q < p$. Precisamos provar que $q \in \gamma$. Então:

a) Se $p \leq 0$, então $q < 0$, logo $q \in \gamma$.

b) Se $P > 0$ e $q \leq 0$, $q \in \gamma$.

c) Se $p > 0$ e $q > 0$, vem:

$p \in \gamma$ e $p > 0 \Rightarrow p = ab$ para algum $a \in \alpha$, $a > 0$, e para algum $b \in \beta$, $b > 0$.

De $0 < q < p = ab$, vem $\dfrac{q}{a} < b$, assim $\dfrac{q}{a} \in \beta$, e $\dfrac{q}{a} > 0$,

logo

$q = a \cdot \dfrac{q}{a}$ com $a \in \alpha$, $a > 0$ e $\dfrac{q}{a} \in \beta$, $\dfrac{q}{a} > 0$. Portanto, $q \in \gamma$.

(R3) Para provarmos que γ não tem máximo, basta provarmos que, se $p \in \gamma$ e $p > 0$, então existe $q \in \gamma$ com $q > p$.

Temos $p \in \gamma$, $p > 0 \Rightarrow p = ab$ para algum $a \in \alpha$, $a > 0$ e algum $b \in \beta$, $b > 0$.

Como α e β são números reais, existem $a' > a$ com $a' \in \alpha$, $b' > b$, com $b' \in \beta$, daí $a'b' > ab = p$, com $a'b' \in \gamma$. ∎

Definição 1.10 *A cada corte α associamos um corte $|\alpha|$, que chamamos* **valor absoluto** *de α, definido por:*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & se \quad \alpha \geq 0^*; \\ -\alpha, & se \quad \alpha \leq 0^*. \end{cases}$$

Definição 1.11 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Definimos o* **produto** *de α por β por:*

$$|\alpha\beta| = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|), & se \quad \alpha < 0^*, \beta \geq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & se \quad \alpha \geq 0^*, \beta < 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & se \quad \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

1.2.5 Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{R}$

Nesta seção, vamos provar as propriedades (M1), (M2), (M3), (M4), (D) e (OM).

Lema 1.4 *Sejam $\alpha > 0^*$ um número real e u racional, com $0 < u < 1$. Então, existem racionais $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$, com $q \neq \min M_\alpha$, (caso M_α admita mínimo), tais que $\dfrac{p}{q} = u$. (M_α é o conjunto das cotas superiores de α).*

Teorema 1.10 *Sejam α, β e γ reais quaisquer. A multiplicação verifica as seguintes propriedades: (M1) $\alpha\beta = \beta\alpha$;*
(M2) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
(M3) $\alpha 1^* = \alpha$;
(M4) Se $\alpha \neq 0^*$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \cdot \beta = 1^*$;
(D) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;
(OM) Se $\alpha \leq \beta$ e $0^* \leq \gamma$, então $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Demonstração: (M1) e (M2) ficam a cargo do leitor.
(M3) Suponhamos, inicialmente $\alpha > 0^*$. Precisamos mostrar que $\alpha \cdot 1^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha \cdot 1^*$.
Mostraremos inicialmente a inclusão $\alpha \cdot 1^* \subset \alpha$.
Lembramos inicialmente que $\alpha \cdot 1^* = \mathbb{Q}_- \cup \{ab : a \in \alpha, a > 0, 0 < b < 1\}$.
Note que $x \in \alpha \cdot 1^*$ e $x \leq 0 \Rightarrow x \in \alpha$.
Note que $x \in \alpha \cdot 1^*$ e $x > 0 \Rightarrow x = au$, com $a \in \alpha$, $a > 0$, e $0 < u < 1$.
De $u < 1$ e $a > 0$, segue $au < a$ e, portanto, $x = au \in \alpha$. Fica provado, deste modo, que $\alpha \cdot 1^* \subset \alpha$.
Mostremos agora que $\alpha \subset \alpha \cdot 1^*$.
Note que $x \in \alpha$ e $x < 0 \Rightarrow x \in \alpha \cdot 1^*$.
Note que $x \in \alpha$ e $x > 0 \Rightarrow \exists a \in \alpha$, com $x < a$.
Assim $x = a \cdot \dfrac{x}{a} \in \alpha \cdot 1^*$, pois, $a \in \alpha$, $a > 0$, e $\dfrac{x}{a} < 1$ com $\dfrac{x}{a} > 0$. Portanto, $\alpha \subset \alpha \cdot 1^*$.
Provamos assim, que se $\alpha > 0^*$, então $\alpha \cdot 1^* = \alpha$.
Se $\alpha = 0^*$, pela definição de produto, $\alpha \cdot 1^* = 0^* \cdot 1^* = 0^* = \alpha$.
Se $\alpha < 0^*$, então $\alpha \cdot 1^* = -[(-\alpha)] = -[-\alpha] = \alpha$. Segue que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot 1^* = \alpha$.
(M4)
(D) Precisamos provar que

$$\alpha(\beta + \gamma) \subset \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{e} \quad \alpha\beta + \alpha\gamma \subset \alpha(\beta + \gamma)$$

1^o **CASO:** $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$.
Considere $x \in \alpha(\beta + \gamma)$ e $x \leq 0 \Rightarrow x \in \alpha\beta + \alpha\gamma$.
Agora, $x \in \alpha(\beta + \gamma)$ e $x > 0 \Rightarrow x = ad$ para algum $a > 0$, $a \in \alpha$, e pra algum $d \in \beta + \gamma > 0$. $d \in \beta + \gamma \Rightarrow d = b + c$, com $b \in \beta$ e $c \in \gamma$.

Assim, $x = ab + ac \in \alpha\beta + \alpha\gamma$, pois $ab \in \alpha \cdot \beta$ e $ac \in \alpha\gamma$.

Portanto, $\alpha(\beta + \gamma) \subset \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Reciprocamente, se $x \in \alpha\beta + \alpha\gamma$ e $x \leq 0 \Rightarrow x \in \alpha(\beta + \gamma)$.

Suponha agora, $x \in \alpha\beta + \alpha\gamma$ e $x > 0$. Como $\alpha\beta > 0^*$ e $\alpha\gamma > 0^*$, existem $u \in \alpha\beta$, $u > 0$, e $v \in \alpha\gamma$, $v > 0$, tais que $x = u + v$.

Segue que existem $a, a \in \alpha$, com $a > 0$ e $a' > 0$,$b \in \beta$, com $b > 0$, $c \in \gamma$, com $c > o$, tais que $x = ab + a'c$.

Supondo $a' \leq a$, resulta

$$x = ab + a'c \leq ab + ac = a(b + c) \in \alpha(\beta + \gamma).$$

Logo, pela (R2), $x \in \alpha(\beta + \gamma)$, e portanto

$$\alpha\beta + \alpha\gamma \subset \alpha(\beta + \gamma).$$

2^o **CASO:** $\alpha > 0^*$ e $\beta + \gamma > 0^*$. Temos:

$$\alpha\gamma = \alpha[(\beta + \gamma) + (-\beta)] = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\beta).$$

daí

$$\alpha(\beta + \gamma) \subset \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

3^o **CASO:** $\alpha > 0^*$ e $\beta + \gamma < 0^*$.

$$\alpha(\beta + \gamma) = -[\alpha(-\beta - \gamma)] = -[\alpha(-\beta) + \alpha(-\gamma)],$$

ou seja,

$$\alpha(\beta + \gamma) \subset \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

(OM) ■

Teorema 1.11 *Se $\alpha \neq 0^*$, para cada corte β existe um único corte γ(que designamos por $\frac{\beta}{\gamma}$) tal que $\alpha\gamma = \beta$.*

Com isto, demonstramos que o conjunto dos cortes é um corpo ordenado.

Definição 1.12 *Um Corpo Ordenado Completo é um Corpo Ordenado no qual todo o subconjunto não vazio limitado superiormente (majorado) tem supremo.*

Então, provando o seguinte Teorema verificamos, finalmente, que o Conjunto dos Números Reais, construído ao longo deste Capítulo, é um Corpo Ordenado Completo.

Teorema 1.12 *Se A é um conjunto de números reais, $A \neq \emptyset$ é limitado superiormente, então A possui supremo.*

Demonstração: Consideremos $\beta = \{x : x\text{está em algum}\alpha \in A\}$. Então β é certamente uma coleção de números racionais.

A prova de que β é um número real baseia-se em verificar as quatro propriedades de número real, isto é, as quatro propriedades da Definição 1.3. (1) Suponhamos que $x \in \beta$ e que $y < x$. A primeira condição significa que x pertence a algum α em A. Uma vez que α é um número real, $y < x$ implica que y está em α. Consequentemente, é certamente verdade que $y \in \beta$. (2) Uma vez que $A \neq \emptyset$, então existe algum $\alpha \in A$. Sendo α um número real, existe algum $x \in \alpha$. Isto significa que $x \in \beta$, logo $\beta \neq \emptyset$. (3) Uma vez que A é limitado superiormente, existe um número real γ tal que $\alpha < \gamma$, para qualquer $\alpha \in A$. Sendo γ um número real, existe um número racional x que não está em γ. Mas se $\alpha < \gamma$ significa que α está contido em γ, então, é igualmente verdade que x não está em α para qualquer $\alpha \in A$. O que significa que x não está em β, logo $\beta \neq \mathbb{Q}$. (4) Suponhamos que $x \in \beta$. Então x está em α para algum $\alpha \in A$. Como α não possui máximo, existe um número racional y tal que $x < y$ e $y \in \alpha$. Isto significa que $y \in \beta$, assim β não possui máximo. Estas 4 propriedades provam que β é um número real. A prova de que β é o supremo de A é facilmente concretizada.

Se $\alpha \in A$ então claramente α está contido em β, o que significa que $\alpha \leq \beta$, então β é um majorante de A.

Por outro lado, se considerarmos γ um majorante para A, então $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$, o que implica α estar contido em γ, para todo $\alpha \in A$, e isto seguramente implica que β está contido em γ. O que significa que $\beta \leq \gamma$ e assim β é o supremo de A. ■

Capítulo 2

Costrução dos números reais utilizando classes de equivalência

2.1 Relação Binária

Nesta seção são revisados alguns tópicos relacionados a relação binária e do produto cartesiano

Definição 2.1 *Dados dois elementos a e b, chama-se par ordenado um terceiro elemento que se indica por* (a, b).

Um elemento x chama-se primeiro elemento, ou a primeira coordenada, ou a primeira projeção do **par ordenado** (a, b); e um elemento y chama-se segundo elemento, ou a segunda coordenada, ou a segunda projeção do par ordenado (a, b).

Definição 2.2 *Dois pares ordenados* (a, b) *e* (c, d) *dizem-se iguais se, e somente se* $a = c$ *e* $b = d$. *Simbolicamente, temos*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Definição 2.3 *Dados um conjunto não vazio* A *e* $a, b \in A$, *definimos o* **par ordenado** (a, b) *como sendo o conjunto* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

Teorema 2.1 *Sejam* A *um conjunto e* $a, b, c, d \in A$. *Temos que:*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Demonstração: Se $a = c$ e $b = d$, então vale a igualdade $\{\{a\}, \{a, b\}\}$=$\{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Suponhamos, portanto, que seja verdadeira a igualdade $\{\{a\}, \{a, b\}\}$=$\{\{c\}, \{c, d\}\}$. Se $a = b$, temos $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Assim $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, de onde vem que $\{\{c\}\} = \{\{c, d\}\} = \{a\}$ e portanto $c = d = a$. Como $a = b$, obtemos $a = c$ e $b = d$.

Supondo-se que $a \neq b$, de $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ vem

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}\} \text{ ou } \{\{a\}\} = \{\{c, d\}\}.$$

Se fosse $\{\{a\}\} = \{\{c, d\}\}$, teríamos $a = c = d$, logo $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, c\}\} = \{c\}$, o que acarreta $\{\{a\}\} = \{\{a, b\}\}$ o que não seria possível, pois, por hipótese $a \neq b$. Portanto, temos $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, de onde vem $a = c$ e então

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}.$$

Como $\{\{a, b\}\} \neq \{\{a\}\}$ resulta desta última igualdade

$$\{a, b\} = \{a, d\}.$$

Logo, $b = d$. Fica assim demonstrado que $a = c$ e $b = d$. ∎

Definição 2.4 *Sejam A e B dois conjuntos não vazios, chama-se* **produto cartesiano** *de A por B ao conjunto de todos pares ordenados (a, b) com primeiro elemento em A e segundo elemento em B.*

Indicaremos o produto cartesiano de A por B pela notação $A \times B$, que se lê "A cartesiano B". Simbolicamente, temos:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Definição 2.5 *Sejam A e B dois conjuntos e seja $A \times B$ o produto cartesiano de A por B. Todo subconjunto R de $A \times B$ é denominado* **relação** *de A em B. Se R é uma* **relação** *de A em A, isto é, se R é um subconjunto de $A \times A$, diz-se, simplesmente, que R é uma* **relação** *sobre A.*

Para indicarmos que $(a, b) \in R$, usaremos a notação aRb. Se $(a, b) \notin R$ escreveremos $a(\ R)b$.

2.1.1 Relação de Equivalência

Nesta seção veremos o conceito de relação de equivalência e resultados relacionados.

Definição 2.6 *Diz-se que uma relação R sobre um conjunto A é uma* **relação de equivalência** *se, e somente se, são válidas as seguintes condições.*

i) Reflexiva: aRa para todo $a \in A$;
ii) Simétrica: Se aRb, então bRa para todo $a, b \in A$;
iii) Transitiva: Se aRb e bRc, então aRc para todo $a, b, c \in A$.

Exemplo 2.1 *Seja a relação R em $\mathbb{Z}$(conjunto dos números inteiros) assim definida*

$$xRy \Leftrightarrow 5|(x-y),$$

é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Solução: Vamos mostrar que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$ é divisível por 5, isto é, xRx. Logo R é reflexiva.

ii) Suponhamos que xRy. Então, $x - y$ é divisível por 5, isto é, temos $x - y = 5\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ e portanto $y - x = 5(-\lambda)$, também é divisível por 5, ou seja, R é simétrica.

iii) Suponhamos que xRy e yRz. Então, $x - y$ e $y - z$ são divisíveis por 5, isto é, temos $x - y = 5\lambda$, e $y - z = 5\alpha$, $\lambda, \alpha \in \mathbb{Z}$ e portanto $x - z = (x - y) + (y - z) = 5(\lambda + \alpha)$ também é divisível por 5, ou seja, R é transitiva.

Logo, R satisfaz as três propriedades, e portanto R é uma relação de equivalência.

Definição 2.7 *Seja $\sim$ uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Para cada $a \in A$, o conjunto de todos os elementos x em A tais que $x \sim a$ chama-se* **classe de equivalência** *de A por $\sim$ e indica-se por $\overline{a}$. Ou seja,*

$$\overline{a} = \{x \in A : x \sim a\}$$

. Um elemento $b \in \overline{a}$ é dito um **representante** *da classe $\overline{a}$. O conjunto de todas as classes de equivalência segundo a relação $\sim$ chama-se* **conjunto quociente** *de A por $\sim$, e indica-se por $A/\sim$. Assim,*

$$A/\sim = \{\overline{a} : a \in A\}$$

.

Teorema 2.2 *Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Então, $\overline{x} = \overline{y}$ se, e somente se, xRy. $\forall x, y \in A$.*

Demonstração: Vamos supor $\overline{x} = \overline{y}$. Daí, obtemos

$$x \in \overline{x} = \overline{y} \Rightarrow x \in \overline{y} \Rightarrow xRy.$$

Reciprocamente, sejam $x, y \in A$; para $z \in A$, com $z \in \overline{x}$, temos que zRx. Mas, por hipótese xRy. Desse modo, zRy, pois a relação R é transitiva. Logo, $z \in \overline{y}$, ou seja, $\overline{x} \subset \overline{y}$. Da mesma forma, prova-se que $\overline{y} \subset \overline{x}$ e portanto, $\overline{x} = \overline{y}$. ■

2.2 Sequências de números reais

Nesta seção veremos o conceito de sequências reais e suas principais propriedades.

Definição 2.8 *Uma* **sequência** *ou* **sucessão** *infinita de números reais é uma função*

$$\begin{array}{rcl} a : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a(n) = a_n \end{array}$$

que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $a_n \in \mathbb{R}$ chamado de termo geral ou n-ésimo termo da sequência. Representamos uma sequência por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ou simplesmente por (a_n)

Se a cada $k \in \mathbb{N}$ se associa um único ponto $p_k \in \mathbb{R}^n$, se obtém uma sucessão infinita $(p_1, p_2, ..., p_k, ...)$ ou $(p_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.9 (sequências limitadas) *Uma sequência (a_n) é* **limitada** *quando existem x e y reais tais que $a_n \in [x, y]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, sempre vale $x \leq a_n \leq y$.*

Todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo do tipo $[-c, c]$, com $c > 0$, para ver isto, basta tomar $c = \max\{|x|, |y|\}$, pois $c \geq y$ e $c \geq -x$ daí $x \geq -c$ e portanto

$$-c \leq a_n \leq c \Leftrightarrow |a_n| \leq c.$$

Assim, podemos ver que uma sequência (a_n) é limitada se existe $c > 0$, tal que $|a_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.10 *Dizemos que um número L é o* **limite** *de uma sequência (a_n) se, para cada $\epsilon > 0$, existir $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq N(\epsilon)$.*

Quando uma sequência (a_n) possui limite L dizemos que (a_n) **converge** para L, ou é convergente para L, e denotamos tal fato simbolicamente por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, ou $\lim a_n = L$ ou ainda por $a_n \to L$.

Quando uma sequência não é convergente dizemos que é **divergente**.

Proposição 2.1 *O limite de uma sequência convergente é único.*

Demonstração: Seja (a_n) convergente. Suponhamos por contradição, que $a_n \to L$ e $a_n \to L'$ com $L \neq L'$. Vamos supor, sem perda da generalidade, que $L > L'$. Sendo assim, podemos tomar $\epsilon = \frac{L-L'}{2} > 0$. Neste caso existiram N_1 *e* N_2 em $\mathbb{N}$, tais que $|a_n - L| < \epsilon, \forall n \geq N_1$ *e* $|a_n - L'| < \epsilon, \forall n \geq N_2$. Agora se $n > max\{N_1, N_2\}$ teríamos:

$$a_n \in \left(\frac{3L' - L}{2}, \frac{L + L'}{2}\right) \cap \left(\frac{L + L'}{2}, \frac{3L - L'}{2}\right) = \emptyset,$$

o que é um absurdo. ■

O significado intuitivo do fato de (a_n) possuir limite L é que, estabelecendo-se uma margem de erro mediante um número positivo ϵ, podemos substituir todos os termos da sequencia a partir de $N(\epsilon)$, por L e o erro cometido com esta aproximação é menor que ϵ.

Proposição 2.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência convergente para L. Considerando $\epsilon = 1$ temos que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - L| < 1$, para todo $n \geq N$. Como

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L|,$$

então, para todo $n \geq N$ temos $|a_n| < 1 + |L|$. Tomemos agora

$$M = max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |L|\}$$

e obtemos $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, demonstrando que (a_n) é limitada. ■

Proposição 2.3 *Uma sequência (a_n) crescente limitada converge para o supremo a dos seus termos, então vale sempre $a_n \leq a$.*

As sequências convergentes apresentam um comportamento plenamente compatível com as operações algébricas em $\mathbb{R}$.

Proposição 2.4 *Se (a_n) converge e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, então $(|a_n|)$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$ se $n \geq N$. Mas

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|,$$

donde, obtemos $||a_n| - |a|| < \epsilon$ se $n \geq N$. ■

É importante observar que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira, a menos que $a = 0$, como podemos constatar com o exemplo da sequência divergente $((-1)^n)$ cuja sequência obtida tomando-se o valor absoluto de cada termo é a sequência constante e igual a 1, portanto, convergente.

Proposição 2.5 *Seja (a_n) uma sequência convergente e tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < -\frac{a}{2} \text{ se } n \geq N.$$

Portanto $a_n - a < -\dfrac{a}{2}$ donde $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$, para todo $n \geq N$ o que é uma contradição. ■

Corolário 2.1 *Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes de números reais tais que $a_n \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Demonstração: Considere $c_n = a_n - b_n \geq 0$, vale para $n > N$ que $c_n \geq 0$. Então, (c_n) é convergente por ser subtração de sequências convergentes, logo $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \geq 0$ e daí $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$. ■

Teorema 2.3 (Bolzano - Weierstrasss) *Toda sequência limitada possui uma subseqência convergente*

2.2.1 Sequência de Cauchy

Nesta seção veremos o conceito de sequência de Cauchy e suas principais propriedades.

Definição 2.11 *Uma sequência (a_n) é denominada* **sequência de Cauchy** *se, para cada $\epsilon > 0$ existe um $N(\epsilon)$ tal que*

$$m, n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$$

Definição 2.12 *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < \cdots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$.*

Teorema 2.4 *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração: Seja (x_{n_k}) com $k \in \mathbb{N}$ uma subsequência de (x_n). Como $\lim x_n = a$, então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, $\forall n \geq n_0$. Em particular, $x_{n_k} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, $\forall n_k \geq n_0$. Logo, $\lim x_{n_k} = a$. ■

Proposição 2.6 *Se uma sequência de Cauchy (a_n) tem uma subsequência que converge para para a, então $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Demonstração: Seja (x_{n_k}) uma subsequência de uma sequência de Cauchy (x_n), tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Então, dado $\epsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Como (x_n) é de Cauchy, existe m_1 tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall m, n \geq m_1.$$

Tomemos $N = \max\{k_0, m_1\}$ e fixemos um $k \geq N$ natural com $n_k \geq N$, temos;

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_K} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

■

Proposição 2.7 *Adimitamos que em $\mathbb{R}$ toda sequência de Cauchy é convergente. Então todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente possui supremo.*

Definição 2.13 *Duas sucessões de Cauchy de números racionais dizem-se* **equivalentes***, o que se simboliza por $(a_n) \sim (b_n)$, se a sucessão $(a_n - b_n)$, constituída pelas diferenças dos termos da mesma ordem nas duas sucessões, tiver como limite o número racional zero, isto é,*

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow (a_n - b_n) \to 0$$

Teorema 2.5 *A relação $\sim$, é uma relação de equivalência sobre o conjunto $S_f(\mathbb{Q})$ que é compatível com a adição e multiplicação do anel $S_f(\mathbb{Q})$.*

Demonstração: Mostremos que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto $S_f(\mathbb{Q})$. De fato,

(i) Reflexividade:

$$(a_n) \sim (a_n), \text{ pois } (a_n - a_n) \to 0.$$

(ii) Simetria:

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (b_n) \sim (a_n), \text{ pois } (a_n - b_n) \to 0 \text{ também } (b_n - a_n) \to 0.$$

(iii) Transitividade:

$$\text{Se } (a_n) \sim (b_n) \text{ e } (b_n) \sim (c_n), \text{ então } (a_n) \sim (c_n).$$

o que se justifica com a seguinte implicação:

$$\lim(a_n - b_n) = 0 \text{ e } \lim(b_n - c_n) = 0 \Rightarrow \lim(a_n - c_n) = 0.$$

De fato,

$$\lim(a_n - c_n) = \lim(a_n - b_n + b_n - c_n) = 0 \Rightarrow \lim(a_n - b_n) + \lim(b_n - c_n) = 0.$$

■

Se (a_n),(b_n) e (c_n) são sequências de Cauchy e se $(a_n) \sim (b_n)$, mostremos que

$$(a_n + c_n) \sim (b_n + c_n)$$

e

$$(a_n c_n) \sim (b_n c_n)$$

isto é, a relação $\sim$ é compatível coma adição e com a multiplicação.

De fato,

$$(a_n + c_n) - (b_n + c_n) = (a_n - b_n) \longrightarrow 0$$

também temos

$$(a_n c_n) - (b_n c_n) = (a_n c_n - b_n c_n) = (a_n - b_n)(c_n) \longrightarrow 0$$

Corolário 2.2 *Se (a_n),(b_n), (c_n)e(d_n) são sequências de Cauchy e se $(a_n) \sim (b_n)$ e $(c_n) \sim (d_n)$, então $(a_n + c_n) \sim (b_n + d_n)$ e $(a_n c_n) \sim (b_n d_n)$.*

Demonstração: Como $(a_n) \sim (b_n)$ e $(c_n) \sim (d_n)$, temos pelo resultado anterior que $(a_n + c_n) \sim (b_n + c_n)$ e $(c_n + b_n) \sim (d_n + b_n)$. Logo, pela transitividade de $\sim$ segue que $(a_n + c_n) \sim (b_n + d_n)$.

Do mesmo modo, temos

$$(a_n c_n) \sim (b_n c_n) \text{ e } (c_n b_n) \sim (d_n b_n),$$

donde segue, pela transitividade de $\sim$ que

$$(a_n c_n) \sim (b_n d_n).$$

■

Se (a_n) é uma sequência de Cauchy, a classe de equivalência $\overline{(a_n)}$ módulo $\sim$, é definida por

$$\overline{(a_n)} = \{(x_n) \in S_f(\mathbb{Q}) : (x_n) \sim (a_n)\},$$

onde, $S_f(\mathbb{Q})$ é o anel das sequências de Cauchy de elementos de $\mathbb{Q}$.

O conjunto quociente de $S_f(\mathbb{Q})$ pela relação de equivalência $\sim$ será indicado por K, isto é, $\mathbb{K} = S_f(\mathbb{Q})/\sim$. Pelo teorema 2.2, temos:

$$\overline{(a_n)} \sim \overline{(b_n)} \Leftrightarrow (a_n - b_n) \longrightarrow 0$$

Definiremos a soma e produto de dois elementos quaisquer $\alpha = \overline{(a_n)}$ e $\beta = \overline{(b_n)}$ de K, isto é, por meio de

$$\alpha + \beta = \overline{(a_n + b_n)}.$$

e

$$\alpha\beta = \overline{(a_n b_n)}.$$

De acordo com o Corolário acima estas definições não dependem dos representantes (a_n) e (b_n) das classes de equivalência α e β. Ficam assim definidas as operações de adição e de multiplicação.

i) $(\overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}) \mapsto \overline{(a_n + b_n)}$;

ii) $(\overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}) \mapsto \overline{(a_n b_n)}$ sobre $S_f(\mathbb{Q})/\sim$.

Teorema 2.6 *As operações i) e ii) acima definem uma estrutura de corpo comutativo sobre* $\mathbb{R}$.

Demonstração: (A1) A adição é associativa, isto é,$\forall \overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}, \overline{(c_n)} \in \mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{(a_n)}, \overline{(b_n)}, \overline{(c_n)} &= \overline{(a_n)} + \overline{((b_n) + (c_n))} = \overline{(a_n) + ((b_n) + (c_n))} \\ &= \overline{((a_n) + (b_n)) + (c_n)} = \overline{((a_n) + (b_n))} + \overline{(c_n)} \\ &= \overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} + \overline{(c_n)}. \end{aligned}$$

(A2) A adição é comutativa, isto é, $\forall \overline{(a_n)}, \overline{(b_n)} \in \mathbb{K}$. De fato,

$$\overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} = \overline{(a_n + b_n)} = \overline{(b_n + a_n)} = \overline{(b_n)} + \overline{(a_n)}.$$

(A3) Consideremos $0' = \overline{0}$, determinada pela sequência constante (0). Temos que, $\forall \alpha = \overline{a_n} \in \mathbb{K}$. Logo,

$$\alpha + 0' = \overline{(a_n)} + \overline{0} = \overline{(a_n)} = \alpha.$$

Portanto, $0'$ é o elemento neutro para a operação da adição definida sobre $\mathbb{K}$.

Observação 2.1 *Note que, uma sequência (x_n) pertence à classe de equivalência $0'$ se, e somente se, (x_n) converge para zero, portanto $0' \longmapsto 0$.*

(A4) Seja $\alpha = \overline{(a_n)}$ um elemento qualquer de $\mathbb{K}$ e consideremos $-\alpha = \overline{-(a_n)}$. Temos,

$$\alpha + (-\alpha) = \overline{(a_n)} + \overline{(-a_n)} = \overline{0} = 0'.$$

Portanto, $-\alpha = \overline{(-a_n)}$ é o oposto de $\alpha = \overline{(a_n)}$.

(M3) Considere $1' = \overline{(1)}$, determinada pela sequência constante (1). Temos, para todo $\alpha = \overline{(a_n)} \in \mathbb{K}$ que:

$$\alpha \cdot 1' = \overline{(a_n)} \cdot \overline{(1)} = \overline{(a_n)} = \alpha.$$

Portanto $1^{'}$ é o elemento unidade para a operação multiplicação definida sobre $\mathbb{K}$.

(M4) Seja $\alpha = \overline{(a_n)} \neq 0$. Então, $(a_n) \in S_0(\mathbb{Q})$ logo, existe um número natural p tal que $a_n \neq 0, \quad \forall n > p$. Assim, consideremos a sequência (b_n) definada por $b_i = 1$ para $i = 0, 1, \cdots, p$ e $b_n = a_n, \quad \forall n > p$. Mostra-se que (b_n) é de Cauchy e que $(b_n)_{\sim}(a_n)$. Logo, $\alpha = a_n = b_n$. E portanto, a sequência (b_n) é inversível em $S_f(\mathbb{Q})$ e sua inversa é a sequência (b_n^{-1}), pondo -se $\alpha^{-1} = \overline{(b_n^{-1})}$, teremos $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1'$. Portanto, α é inversível. ■

Vamos agora, no conjunto de todas as sucessões de Cauchy de números racionais, agrupar num mesmo subconjunto aquelas que são entre si equivalentes.

Consideremos cada um desses subconjuntos como elemento de um novo conjunto, o conjunto $\mathbb{K}$, constituído pela totalidade dos subconjuntos de sucessões de Cauchy que agora foram criados.

Podemos distinguir dois tipos de elementos de $\mathbb{K}$: os que são constituídos por sucessões de Cauchy convergentes no domínio dos números racionais, e os que são constituídos por sucessões de Cauchy não convergentes.

A cada um dos elementos do primeiro tipo, corresponde biunivocamente um número racional, isto é, o elemento constituído pelo conjunto das sucessões que convergem para um número racional $\frac{m}{n}$ corresponderá ao número racional $\frac{m}{n}$.

Definição 2.14 *Os elementos de $\mathbb{K}$ denominam-se de números reais.*

Designaremos por $[a_n]$ o número real constituído pelo conjunto de todas as sucessões equivalentes à sucessão (a_n) e a sucessão (a_n) ou outra qualquer (a_n) que lhe seja equivalente, diremos representante do número real $[a_n]$.

Se a sucessão (a_n) tem limite no domínio $\mathbb{Q}$, dos números racionais, e se esse limite é a, o número real $[a_n]$, será representado por $[a]$, uma vez que a sucessão (a), com todos elementos iguais ao número racional a, tem como limite a e é uma sucessão que pode ser utilizada para representar $[a_n]$, pois é equivalente a (a_n). Assim, podemos denominar de [0] o número real que corresponde ao conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 0. Da mesma forma,[1] o número real que corresponde ao conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 1, e assim sucessivamente. Assim, quando não necessitarmos utilizar sucessões representativas dos números reais utilizaremos as letras minúsculas gregas.

2.2.2 Ordenação do Conjunto dos Números Reais

Teorema 2.7 *O conjunto $\mathbb{Q}'$ de $\mathbb{R}$, formado por todas a classes de equivalência $\overline{(a)}$, onde $a \in \mathbb{Q}$, é um isomorfismo de $\mathbb{R}$ e a aplicação $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$ definida por $\varphi(a) = \overline{(a)}$ é um isomorfismo do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais no corpo $\mathbb{Q}'$*

Demonstração: Mostremos que $\mathbb{Q}'$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$. De fato,

(i) $\overline{0}, \overline{1} \in \mathbb{Q}'$, pois $0, 1 \in \mathbb{Q}$

(ii) se $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Q}'$, então $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a-b}$. Como $a - b \in \mathbb{Q}$, pois $a, b \in \mathbb{Q}$, segue que $\overline{a-b} \in \mathbb{Q}'$, ou seja, $\overline{a} - \overline{b} \in \mathbb{Q}$.

(iii) Se $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Q}'$ e $\overline{b} \neq \overline{0}$, então $\overline{(a)(b)}^{-1} = \overline{(a)(b^{-1})} = \overline{(ab^{-1})}$. Como $(ab^{-1}) \in \mathbb{Q}$, então $\overline{(ab^{-1})} \in \mathbb{Q}'$, ou seja, $\overline{(a)(b)}^{-1} \in \mathbb{Q}'$.

Agora, mostremos que a aplicação $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$ é um homomorfismo. De fato, se $a, b \in \mathbb{Q}$, temos;

(iv) $\varphi((a + b)) = \overline{(a + b)} = \overline{(a)} + \overline{(b)} = \varphi(a) + \varphi(b)$;

(v) $\varphi((a \cdot b)) = \overline{(a \cdot b)} = \overline{(a)} \cdot \overline{(b)} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Finalmente mostremos que φ é um isomorfismo. Para isto, mostremos primeiro que φ é um homomorfismo injetivo. De fato, seja

$$N(\varphi) = \{a \in \mathbb{Q} : \varphi(a) = \overline{(0)}\} = \{a \in \mathbb{Q} : \overline{(a)} = \overline{(b)}\}.$$

Note que, $\{0\} \subset N(\alpha)$. Então $\varphi(a) = \overline{(0)}$, ou seja, $\overline{(a)} = \overline{(0)} \Rightarrow (a) \in \overline{(0)}$. Mas, $\overline{(0)} = \{(x_n) \in S_f(\mathbb{Q}) : (x_n) \sim (0)\}$.

Logo, $(x_n - 0) \in S_0(\mathbb{Q})$, ou seja,

$$\overline{(0)} = \{(x_n) \in S_f(\mathbb{Q}) : \lim x_n = 0\}.$$

Daí, se $(a) \in \overline{(0)}$, então $\lim(a) = 0 \Rightarrow (a) = (0) \Rightarrow a = 0$. Portanto, $N(\varphi) = \{0\}$, e φ é injetiva. Evidentemente φ é sobrejetiva, e portanto φ é um isomorfismo de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}'$, como queríamos mostrar. ■

A partir de agora identificaremos $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{Q}'$ por meio do isomorfismo φ, isto é, poremos $a = \overline{(a)}, \ \forall a \in \mathbb{Q}$. Assim, temos $0 = 0'$ e $1 = 1'$.
Indiquemos por P_0 (respectivamente P_0^*) o conjunto de todos os números racionais positivos (respectivamente, estritamente positivos).

Definição 2.15 *Diz-se que uma sequência $(a_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ é estritamente positiva se, e somente se, existe $M \in P_0^*$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $M < a_n$ para todo $n > n_0$*

Lema 2.1 *Uma sequência $(a_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ é estritamente positiva se, e somente se, $(a_n) \notin S_0(\mathbb{Q})$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n \ \ \forall n > n_0$*

Lema 2.2 *Sejam $(a_n), (b_n) \in S_f(\mathbb{Q})$. Se $(b_n) \sim (a_n)$ e se (a_n) é estritamente positiva, então (b_n) também é estritamente positiva.*

Demonstração: Temo que existem $M \in P_0^*$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $M < a_n \ \ \forall n \geq p$, por outro lado a sequência $(b_n - a_n)$ é convergente a zero. Logo, dado $\frac{M}{2} \in P_0^*$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - a_n| < \frac{M}{2}$, ou $a_n - \frac{M}{2} < b_n < a_n + \frac{M}{2} \ \ \forall n > q$.
Pondo-se $n_0 = \max\{p, q\}$ teremos, para todo $n > n_0$

$$b_n > a_n - \frac{M}{2} > M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2}.$$

Portanto, b_n é estritamente positiva. ■

Definição 2.16 *Um número real $\alpha = \overline{(a_n)}$, onde $(a_n) \in S_f(\mathbb{Q})$, é estritamente positivo se, e somente se a sequência (a_n) é estritamente positiva,*

Chamaremos de P^* o conjunto de todos os números reais que são estritamente positivos e colocaremos $P = P^* \cup \{0\}$. Definiremos uma relação $\leq$, sobre $\mathbb{R}$, do seguinte modo: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\beta - \alpha \in P$.
Portanto, se $\alpha = \overline{(a_n)}$ e se $\beta = \overline{(b_n)}$, temos: $\alpha < \beta$ se, e somente se,$(a_n - b_n)$ não convergem para zero e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n \ \ \forall n > n_0$

Teorema 2.8 *A relação $\leq$ é uma ordem total sobre $\mathbb{R}$, que é compatível com a adição e com a multiplicação.*

Demonstração:

I) $P + P \subset P$

Sejam $\alpha = \overline{(a_n)}$ e $\beta = \overline{(b_n)}$ elementos e P. Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, temos que $\alpha + \beta \in P$.

Logo,podemos supor que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ pela definição 2.15, existem $p, q \in \mathbb{N}$ e existem $M_1, M_2 \in P_0^*$ tais que

$$M_1 < a_n \ \ \forall n > p$$

e

$$M_2 < b_n \ \ \forall n > q$$

Pondo $n_0 = \max\{p, q\}$, teremos, $\forall n > n_0$

$$O < M_1 + M_2 < a_n + b_n$$

. Portanto, $(a_n + b_n)$ é estritamente positiva e então $\alpha + \beta \in P^*$.

II) $P \cap (-P) = \{0\}$

Seja $\alpha = \overline{(a_n)}$ um elemento de $P \cap (-P)$ e suponha que fosse $\alpha \neq 0$. De $\alpha \in P^*$ resulta do lema 2.1, que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n \ \ \forall n > p$, de $\alpha \in -P$ vem $-\alpha = \overline{(-a_n)} \in P^*$. Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $0 < -a_n$ ou $a_n < 0$, $\forall n > q$.

Tomando $n > \max\{p, q\}$ teremos $0 < a_n$ e $a_n < 0$ e chegamos assim a uma contradição.

III) $P \cup (-P) = \mathbb{R}$

Seja $\alpha = \overline{(a_n)}$ um elemento real qualquer e suponha que $\alpha \notin P$. Logo, (a_n) não converge para zero. Portanto, existe $M \in P_0^*$ e existem $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n < -M$ para todo $n > n_0$, ou seja, $-\alpha \in P^*$ e então $-\alpha \in P$.

IV) $PP \subset P$

Sejam $\alpha = \overline{(a_n)}$ e $\beta = \overline{(b_n)}$ dois elementos de P. Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, temos que $\alpha\, \beta \in P$. Logo, podemos supor que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Assim, temos $\alpha\beta = \overline{(a_n b_n)} \neq 0$, ou $(a_n)(b_n)$ não converge para zero.

Por outro lado, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$a_n > 0 \ \ \forall n > p$$

e

$$b_n > 0 \ \ \forall n > q.$$

Portanto, para todo $n > \max\{p, q\}$ teremos $a_n b_n > 0$ e então $(a_n b_n)$ é estritamente positiva, ou seja, $\alpha\beta \in P^*$.

■

A ordem *leq*, definida sobre $\mathbb{R}$, induz a ordem habitual sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, pois já sabemos que o corpo $\mathbb{Q}$ só pode ser ordenado de um único modo. Portanto, em particular, temos $P_0 = P \cup \mathbb{Q}$.

Lema 2.3 *O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é arquimediano.*

Lema 2.4 *Se* $(a_n) \in S_f(\mathbb{Q})$*, então* $(a_n) \in S_c(\mathbb{R})$*, isto é, toda sequência de Cauchy de números racionais, é convergente para um número real, além disso, temos* $\lim a_n = \overline{(a_n)}$

Lema 2.5 *Toda sequência* $(a_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ *monótona pertence ao conjunto* $S_c(\mathbb{R})$

Teorema 2.9 *O corpo ordenado* $\mathbb{R}$ *dos números reais é completo.*

Demonstração: Uma outra prova que os números reais é completo, além do isomorfismo que faremos no capítulo 4 pode ser encontrada em (MONTEIRO, 1969, P.261) ou (KUHLKAMP, 2002, P, 212). ∎

Capítulo 3

Densidade

Nesta seção veremos o conceito de densidade e suas principais propriedades. também dedicaremos este capítulo a questões do PROFMAT.

Proposição 3.1 (caracterização do supremo) *Seja A um conjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$. Então, $u \in \mathbb{Q}$ é o supremo de A se, e somente se:*

a) u é cota superior de A, isto é, $x \leq u$, $\forall x \in A$;

b) Dado qualquer racional $r > 0$, existe $x \in A$ tal que $u - r < x$.

Demonstração: Suponhamos que u é o supremo de A, então u é cota superior de A, portanto satisfaz a primeira condição.
Se existisse um $r_0 > 0$ tal que $u - r_0 \geq x$, $\forall x \in A$, então $u - r_0$, que estritamente menor que u seria cota superior de S o que contradiria a minimalidade de u. Portanto, pra cada $r > 0$, existe $x \in S$ tal que $u - r < x$.
Reciprocamente, suponhamos que u satisfaz a) e b). Seja t uma outra cota superior de S. Se fosse $t < u$ tomaríamos $r = u - t < 0$ e, por b) existiria $x \in S$ com $u - (u - t) < x$. isto é, $t < x$, que contradiria a hipótese de t ser cota superior de S. Portanto $u \leq t$, donde $\sup S = u$ ■

Teorema 3.1 (Propriedade do Supremo) *Existe um corpo ordenado $\mathbb{K}$, tal que todo subconjunto A de $\mathbb{K}$ limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{K}$.*

Propriedade 1 *Se $r < s$, então $r < \frac{r+s}{2} < s$.*

Demonstração: Se $r < s$, temos que, $2r < r + s$ e $r + s < 2s$, daí,

$$2r < r + s < 2s$$

, isto é,

$$r < \frac{r+s}{2} < s$$

. ■.

Proposição 3.2 *Sejam a e b números reais com $a < b$. Então, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.*

Demonstração: Vamos separar a demonstração em 3 casos:
Caso 1: $0 < a < b$
Pela propriedade Arquimediana existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $k(b-a) > 1$, de modo que temos, $\frac{1}{k} + a < b$. Seja $A = \{m \in \mathbb{N}; m > ka\}$. Novamente pela propriedade Arquimediana segue que $A \neq \emptyset$.
Usando o príncipio da Boa Ordenação [1] de $\mathbb{N}$ (que afirma que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento), temos que o conjunto A possui um menor elemento, digamos n_0. Então,

$$\frac{n_0}{k} > a \quad e \quad \frac{n_0 - 1}{k} \leq a.$$

Portanto,

$$a < \frac{n_0}{k} \leq \frac{1}{k} + a < b$$

Assim,

$$r = \frac{n_0}{k} \in \mathbb{Q} \;\; e \;\; a < r < b$$

.
Caso 2: $a \leq 0 < b$
Outra vez pela propriedade Arquimediana existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $kb > 1$. Neste caso $0 < r = \frac{1}{k} < b$ e, portanto, $a < r < b$.
Caso 3: $a < b \leq 0$
Neste caso temos $0 \leq -b < -a$ que se enquadra nos casos anteriores, logo existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $-b < r < -a$ ou seja, $a < -r < b$.

■

Corolário 3.1 *Sejam a e b números reais com $a < b$. Então, existe $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $a < t < b$.*

Demonstração: Sendo $a < b$ então $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Assim, $t = r\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é tal que $a < t < b$, como queríamos mostrar. ■

Definição 3.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que D é* **denso** *em $\mathbb{R}$ se para todo intervalo aberto (a, b) de $\mathbb{R}$ temos $D \cap (a, b) \neq \emptyset$.*

[1]Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.

A Proposição 3.2, juntamente com seu Corolário, afirmam exatamente que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$. O fato de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, juntamente com o fato de ser enumerável, conforme veremos na próxima seção, conferem a $\mathbb{R}$ uma "estrutura topológica"importante chamada de Espaço Topológico Separável.

3.0.1 Aplicações da densidade dos racionais e irracionais nos reais

Nesta seção apresentaremos algumas questões, juntamente com as suas soluções que já fizeram parte do exame de acesso do Profmat, assim como questões da disciplina MA11, envolvendo o conceito de densidade.

Exemplo 3.1 (AVI MA11 2011) *Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, prove que existe um número racional α tal que $0 < \alpha < \epsilon$.*

Solução: Pela propriedade Arquimediana, como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, exite $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}$, Então,

$$n > \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por $\sqrt{2}$, temos:

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < \epsilon.$$

Exemplo 3.2 (AVI MA11 2011) *Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$ contém algum número irracional*

Solução: Se a ou b for irracional, não há o que provar. Se a for racional, subtraindo a de todos os números do intervalo $[a, b]$, ficamos com o intervalo $[0, b - a]$. Tomando $\epsilon = b - a$, obtemos o irracional $\alpha < b - a$ e maior que zero. Então, $a + \alpha$ é irracional.

Exemplo 3.3 (ENQ - 2014.2) *Sejam x e y dois números racionais com $x < y$.*
(a) prove que $x < \dfrac{x+y}{2} < y$ e que $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$.
(b) Mostre que entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos um número racional e um irracional.

Solução: (a) Como $x < y$ por hipótese, somando x em ambos os lados desta desigualdade tem-se $2x < x + y$, logo $x < \dfrac{x+y}{2}$.
De modo análogo, somando y em ambos os lados de $x < y$ tem-se $x + y < 2y$, ou seja, $\dfrac{x+y}{2} < y$. Portanto segue-se que $x < \dfrac{x+y}{2} < y$.
Por outro lado,

$$x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow \frac{y-x}{\sqrt{2}} > 0$$

e somando x em ambos os lados desta última desigualdade, obtém-se $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}$. Para demonstrar a segunda parte da desigualdade, observe que $x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$ equivale a $\sqrt{2}x + y - x < \sqrt{2}y$ ou ainda, $(\sqrt{2}-1)x < (\sqrt{2}-1)y$ que nos dá $x < y$. Portanto, usando argumento de volta, pode-se concluir que $x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$ e, juntando as duas partes chega-se a desigualdade desejada, $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$.

(b) A primeira parte do item (a) nos diz que o número $z_1 = \dfrac{x+y}{2}$ está situado entre os números racionais x e y e como soma e produto de números racionais é um número racional, segue que z_1 satisfaz a condição requerida.
A segunda parte de (a) nos diz que o número $z_2 = x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}$ também está situado entre os números racionais x e y e para concluir, basta ver que z_2 é irracional.
Sabemos que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é irracional e que produto de irracional por racional não nulo é irracional. Como $y - x > 0$ é racional, segue que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y-x) = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

é irracional. A soma de um racional com um irracional também é irracional e portanto

$$z_2 = x + \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

é irracional e está situado entre os números racionais x e y.

Exemplo 3.4 (AV1 MA11 2014) *Considere o conjunto dos números racionais diádicos* $D = \left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\right\}$
(a) Prove que se a e b são números reais com $a < b$, então existe $d \in D$ tal que $a < d < b$.
(b) A partir do item (a) conclua que em qualquer intervalo (a, b) existem infinitos números racionais diádicos.

Solução: (a) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{2^n} < b - a$. Logo $2^n b - 2^n a > 1$. Como $2^n b$ e $2^n a$ estão a uma distância maior que 1, segue que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2^n a < m < 2^n b$. Portanto $a < \dfrac{m}{2^n} < b$.
(b) Seja n_0 um número natural tal que $0 < \dfrac{1}{2^{n_0}} < b - a$. Usando o item (a), existe um número diádico $\dfrac{m}{2^{n_0}} \in (a, b)$. Tomando $n > n_0$ temos $0 < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^{n_0}} < b - a$ e desta forma, seguindo a construção do item (a),para cada $n > n_0$ existe um número diádico pertencente ao intervalo (a, b). Portanto, existem infinitos números diádicos no intervalo (a, b).

Capítulo 4

Isomorfismo

Nesta seção mostraremos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, pois veremos que $\mathbb{R}$ é isomorfo a um corpo $\mathbb{K}$, o qual é ordenado completo.

Teorema 4.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Então existe um isomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de corpos ordenados, ou seja, uma bijeção que satisfaz as propriedades seguintes.*

(i) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

(ii) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$;

(iii) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$, então $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Assim, podemos identificar $\mathbb{R}$ com $\mathbb{K}$ via $x \equiv \varphi(x)$

Demonstração: Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ definida por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \overline{(a_n)}, \end{array}$$

onde α é um corte, isto é, $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ sendo r o supremo de α, e $\overline{(a_n)} = \{(x_n) \in \mathbb{Q} : (x_n) \sim (a_n)\}$.

Notemos que φ está bem definida

Sejam α, β cortes tais que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ e $\beta = \{y \in \mathbb{Q} : y < s\}$. Queremos mostrar que

$$\alpha = \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta).$$

onde $\overline{(a_n)} = \{(x_n) \in \mathbb{Q} : (x_n) \sim (a_n)\}$ com $(x_n) \in \alpha$ e $\overline{(b_n)} = \{(y_n) \in \mathbb{Q} : (y_n) \sim (b_n)\}$ com $(y_n) \in \beta$.

De fato, seja $\alpha = \beta$. Então, $\varphi(\alpha) = \overline{(a_n)}$, donde temos que, para todo $x_n \in \overline{(a_n)}$ implica $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e $(x_n) \sim (a_n)$. Assim, $\overline{(x_n)} = \overline{(a_n)}$.

Por outro lado, $x_n \subset \alpha = \beta$, logo $x_n \subset \beta$ isto implica que $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e $(x_n) \sim (b_n)$. Logo $\overline{(x_n)} = \overline{(b_n)}$ e portanto,

$$\overline{(a_n)} = \overline{(b_n)} \Rightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta).$$

Mostremos agora que φ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. De fato, temos: $\varphi(\alpha + \beta) = \overline{(a_n + b_n)} = \overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$.

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$. Com efeito,

$\varphi(\alpha \cdot \beta) = \overline{(a_n \cdot b_n)} = \overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$.

(iii) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha < \beta$, então $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$.

Dados $\alpha < \beta$ escolhemos $r, s \in \mathbb{Q}$, tais que $\alpha < r < s < \beta$. Então, como $\varphi(r) < \varphi(s)$, resulta $\varphi(\alpha) < \varphi(r) < \varphi(s) < \varphi(\beta)$.

• Mostremos que φ é injetora. Considere $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \overline{(a_n)} = \overline{(b_n)}$, ou seja, para todo $(x_n) \subset \alpha$, $(x_n) \sim (a_n) \Rightarrow (x_n) \sim (b_n)$, logo $\alpha \subset \beta$ da mesma forma, para todo $(y_n) \subset \beta$, $(y_n) \sim (b_n) \Rightarrow (y_n) \sim (a_n)$, logo $\beta \subset \alpha$ e portanto $\alpha = \beta$.

• Por fim, Mostraremos que φ é sobrejetora.

Dado $\overline{a_n} \in \mathbb{K}$, existe $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $x_n \sim a_n$. Considere o conjunto $\alpha = \{x_n \in \mathbb{Q} : x_n < r\}$ Temos que, $(x_n) \in \mathbb{Q}$ e (x_n) é limitada, pois é de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Seja $r = \sup\{x_n : x_n \in \mathbb{Q}\}$, tal r existe pelo Teorema de Dedekind. Logo, $\varphi(\alpha) = \overline{a_n}$. ■

Capítulo 5

Equivalência

Nesta seção mostraremos a equivalência das duas formas de obter $\mathbb{R}$, isto é, que a construção via cortes implica na construção via sequência de Cauchy e que a construção via sequência de Cauchy resulta na construção via cortes.

Teorema 5.1 (Teorema de Dedekind) *Suponha que $\mathbb{R}$ se escreve como uma união de dois subconjuntos disjuntos não vazios A e B tais que para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$ vale que $a < b$. Então, existe um único $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a \leq c$ para todo $a \in A$ e $c \leq b$ para todo $b \in B$.*

Demonstração: Para a demostração do teorema 5.1, sugerimos o leitor ver [8]. ■

Definição 5.1 *Uma sequência (a_n) é denominada sequência de Cauchy se, para cada $\epsilon > 0$ existe um $N = N(\epsilon)$ tal que*

$$m, n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$$

Nos capítulos anteriores fizemos a construção dos reais através de Cortes de Dedekind e também através de Classes de Equivalências de Sequências de Cauchy. Nosso intuito neste capítulo é mostrar a equivalência entre as construções dos números reais via Cortes e Sequência de Cauchy.

Vimos que toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{R}$ e vamos mostrar que isto determina um corte em $\mathbb{R}$.

• Com efeito, sejam $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$. Se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$. Sejam

$$c = \sup A \;\text{ e }\; d = \inf B$$

que existem pela Proposição 2.7. Suponha $c < d$.
Considere $x = \frac{c+d}{2}$. Tem-se $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ resulta que que c não é supremo de A, pois $c < x$. Se $x \in B$ resulta que d não é o ínfimo de B, Pois $x < d$. Assim $c \geq d$.

Considere $y = \frac{c+d}{2}$. Note que pela definição de ínfimo e de supremo de um conjunto, existem $b \in B$ e $a \in A$ tal que

$$d < b < y < a < c$$

o qual é um absurdo, pois se $y \in A$ resulta $b < y$ e se $y \in B$ resulta $y < a$. Assim $a \geq c \geq d$, para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$.

• Reciprocamente, seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Logo, (x_n) é limitada. Pela caracterização do supremo, 3.1, todo conjunto limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$. Também pela demonstração do teorema de Bolzano-Weierstrass 2.3, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que (x_{n_k}) é monótona. Suponha que (x_{n_k}) é monótona crescente. Então

$$\lim x_{n_k} = \sup\{x_{n_k}; k \in \mathbb{N}\} = a$$

Seja $\epsilon > 0$. Então, existem $m, n > N$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Também existe k, tal que

$$|x_{n_r} - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad r > k.$$

Para n_r, com $r > k$, $n_r > N$ e $n > N$ resulta das últimas desigualdades

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_r}| + |x_{n_r} - a| < \epsilon$$

Capítulo 6

Considerações finais

Este estudo é direcionado basicamente ao professor de matemática, com o objetivo de oferecer uma base mais refinada, para que o ensino do conteúdo abordado seja feito com mais clareza e segurança. Com este pensamento, foi feito um trabalho de construção dos números reais, usando duas linhas de pensamentos bem distintas.

Num primeiro momento construímos os números reais através de Cortes de Dedekind, mostramos as propriedades da adição, multiplicação e a distributiva da adição em relação à adição, mostrando assim que os números reais, definidos como cortes formavam um corpo. Determinamos também uma relação de ordem. Chegamos a conclusão que os reais era um corpo ordenado. Num segundo momento construímos os números reais através de Classes de equivalência, que passou pelas mesmas etapas, e chegamos a um resultado análogo sobre os números reais.

Foi realizado também um isomorfismo entre um corpo ordenado completo e os números reais, chegando-se a conclusão que os números reais é um corpo ordenado completo.

Após as construções foi feita uma equivalência entre as mesma, mostrando assim que um corte era equivalente à uma sequência de Cauchy.

Finalizando, nosso intuito é poder contribuir para uma melhor compreensão e entendimento do conteúdo abordado, e que nosso trabalho possa ajudar o professor, oferecendo-lhe uma base mais aprofundada, para facilitar o aprendizado do seu alunado.

Referências Bibliográficas

[1] **Boyer**, Carl B.; MERZBACH, Uta C..*História da Matemática.* 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.

[2] **Doering**, Claus I. *Introdução à Análise Matemática na Reta* Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[3] **Guidorizzi**, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo* 5^a edição. ed. LTC. Rio de Janeiro - RJ.

[4] **Hairer**, Ernst. **Wanner**, Gerhard. *Analysis by its history* Ed. Springer. 2008 - NY

[5] **Lima**, Osmundo Alves. **Maciel**, Aldo Bezerra. *Introdução à Análise na Reta* 1^a edição. ed. EDUEPB. - 2004.

[6] **Monteiro**, Luiz Henrique Jacy. *Elementos de Álgebra*. Volume único. Ao livro técnico S.A.

[7] **Nilo**, Kühlkamp, N. *Introdução à Topologia Geral* 2^a edição. ed. UFSC. - 2002.

[8] **Rudin**, Walter. *Principles of Mathematical Analysis* McGraw-Hill international editions.