UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

O USO DE GEOMETRIA, ANALÍTICA E SINTÉTICA,COMO APOIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Sergio De Stefano

MANAUS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Sergio De Stefano

O USO DE GEOMETRIA, ANALÍTICA E SINTÉTICA,COMO APOIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2016

SERGIO DE STEFANO

O USO DE GEOMETRIA, ANALÍTICA E SINTÉTICA,COMO APOIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 21 de novembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

A meus alunos desde sempre, cuja curiosidade e perseverança desmentiram a todo momento a alegada aridez do aprendizado da disciplina. A meus filhos, Karen, Mirella e Sergio Augusto, fontes de alegria, inspiração e dedicação por todos os dias que com eles compartilhei, ainda que à distância. A minha esposa Omara, cuja inteligência, tenacidade e comprometimento com a causa do Magistério, além do amor que me dedica, e que aqui não cabe, foram o combustível indispensável que utilizei para a conclusão deste trabalho. Aos meus colegas do PROFMAT 2013, que constituíram uma grande família e que sempre mutuamente se (e me) ajudaram em todo o desenvolvimento do curso.

Aos Professores Doutores do PROFMAT, sem nenhuma exceção, pelo comprometimento, dedicação exaustiva, conhecimento indiscutível, paciência absoluta e exigência indispensável. Em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, sempre disposto a elucidar dúvidas sobre quaisquer assuntos que eu pudesse ter, um exemplo a ser seguido por todos os profissionais do Magistério...

RESUMO

A ideia deste trabalho é oferecer aos docentes das últimas séries do Ensino Fundamental e de todas as séries do Ensino Médio, de acordo com as diretrizes gerais estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, datados de 1998, outras ideias de abordagem para o desenvolvimento do conteúdo da disciplina de Matemática promovendo, sempre que possível, vinculações entre capítulos distintos da nobre disciplina, de modo a despertar nos discentes formas outras de enfrentamento de problemas que não aquelas convencionais para que os mesmos tenham uma visão muito mais positiva daquela que historicamente têm. Promovemos ainda, sempre que possível, uma integração entre a Álgebra e a Geometria, sintética ou analítica, para que os alunos tenham em mente que o desenvolvimento de ambos os capítulos não foi de forma alguma dissociado, pelo contrário, há um forte caráter complementar vinculando tão importantes gomos do mesmo fruto, a Matemática.

Palavras-chave: Geometria, Álgebra, Resolução de Problemas, Semelhança, Funções.

ABSTRACT

The idea of this dissertation is to offer teachers of Middle School and High School, accordind to the general guidelines established in the National's Curricular Parameters, from 1998, other ideas for the development of the Mathematics course contents, promoting, whenever possible, links between the several chapters of this noble course, in order to arouse in the studentes other forms of facing the problems, differently from the conventional ones, so that they develop a vision way more positive than the one that historically they have. Still, we promote, whenever posible, an interaction between Algebra and Geometry, sinthetic or analytic, so that studentes have in mind the development of these chapters wasn't at all dissociated, on the contrary, there is a strong complementary feature bonding these two important segments of the same fruit, the Mathematics.

Keywords: Geometry, Algebra, Problem Resolution, Similarity, Function.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
P	Conjunto dos números reais positivos.
$\lvert x \rvert$	Valor absoluto de x.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$	Somatório variando de 1 a n.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$A\widehat{B}C$	Medida do ângulo ABC.
$\operatorname{sen}\theta$	Seno do ângulo θ.
$\cos\theta$	Cosseno do ângulo θ.
S	Área de um Triângulo.
$2\,p$	Perímetro.

Sumário

Introdução

Este trabalho foi inspirado em nossas observações e experiências pessoais no exercício do Magistério e tenta traduzir as análises sobre o ensino da Matemática nos níveis de Ensino Médio e Universitário, mostrando as dificuldades didático - pedagógicas encontradas e apresentando sugestões inspiradas na tendência atual de interdisciplinaridade, que acreditamos ser irreversível.

Tentamos também vincular, na medida das possibilidades dos conteúdos disponibilizados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o desenvolvimento de vários capítulos previstos pelos componentes intrínsecos desses conteúdos utilizando Geometria Analítica e Sintética de modo a manter presentes nos discentes os elementos essenciais deste importante ramo da Matemática, fazendo - o presente durante a maior parte do desenvolvimento do Ensino Médio.

A divisão dos conteúdos foi feita de forma cronológica de acordo com as recomendações dos PCN, embora tais conteúdos possam apresentar pequenas variações regionais, como tivemos a oportunidade de verificar.

No capítulo 1 tentamos mostrar os motivos e diretrizes adotados para o desenvolvimento do tema, mostrando a opinião de educadores e historiadores das mais variadas vertentes sobre o elo invisível porém sensível que existe entre a Álgebra e a Geometria, tentando mostrar a evolução cronológica da disseminação de ambos os tópicos, tendo tal desenvolvimento várias vezes se afastado em essência porém mantendo, ainda que de forma velada, a união dos conhecimentos elementares dos mesmos.

No capítulo 2 tentamos construir uma breve linha do tempo, principalmente a partir dos meados do século passado até nossos dias, de modo a mostrar a modificação da abordagem pedagógica no ensino da Matemática, até ancorar tal abordagem nos anos 1996, nos quais os PCN foram definidos.

Pretendemos também, em algumas situações, mostrar a equivalência, (para não dizer parentesco) entre resoluções algébricas e geométricas, frisando, sempre que nos foi dado observar, a impossibilidade de tal tratamento se estender a todos os capítulos dos conteúdos abordados.

No capítulo 3 apresentamos vários problemas com as soluções habituais encontradas em livros didáticos convencionais apontados na bibliografia e soluções alternativas através de conteúdos outros utilizando ferramentas na maior parte já vistas pelos discentes porém abandonadas à medida que os novos conteúdos surgem para desenvolvimento. Este capítulo, a nosso ver, mostra um caminho para a modernização do ensino que acreditamos ser razoavelmente possível de ser conseguido, a partir de certas mudanças curriculares na formação de professores.

No capítulo 4 tecemos considerações sobre a modernização de currículos constituintes dos programas da grande maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática e sobre a linha do tempo do ensino da Matemática a partir dos conteúdos dos PCN desde a 8ª série do Ensino Fundamental até atingir a 3ª série do Ensino Médio, tentando produzir uma ligação que esperamos possa tornar - se produtiva para todos os graduandos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

No capítulo 5 sugerimos modestamente algumas formas de modificação curricular para a formação de professores, sem deixar de comentar algo certamente conhecido mas oportunamente desconsiderado: o desestímulo de uma pessoa ao pensar em tentar profissionalizar - se na carreira de Magistério, dada a enorme diferença existente em termos salariais entre essa profissão e outras, que dependem, tanto quanto a nossa carreira, de capacidade, estudo, reciclagem e competência.

Essa, em linhas gerais, foi a motivação que nos levou a apresentar este trabalho.

Capítulo 1

A Geometria e a Resolução de Problemas

1.1 A Questão Norteadora

A motivação deste trabalho se inspira em muitos e muitos anos de nossa experiência no Magistério, na maior parte do tempo dedicado ao Ensino Médio nas disciplinas de Física e Matemática.

A totalidade dos conteúdos programáticos adotados nas escolas brasileiras prevê para a primeira série do Ensino Médio, na disciplina de Matemática, o estudo das funções elementares e, para a disciplina de Física o estudo da Cinemática, sendo os dois conteúdos desenvolvidos concomitantemente.

No início da carreira algo nos incomodava: os conhecimentos adquiridos pelos alunos em qualquer uma das disciplinas de forma alguma eram utilizados na outra, como se houvesse uma proibição formal impedindo tal procedimento. FIORENTINI et al [16] explicita nossa sensação ao expor os programas de pós- graduação (mestrado, 46 dissertações); (doutorado, 41 teses) desenvolvidos em 61 universidades de 19 países pesquisados pela Universidade de Bielefeld, na Alemanha, e publicados em 1992 por Batanero et al. A partir dos anos 1990 tornou-se evidente a busca pelo aprimoramento no ensino da disciplina Matemática. Entre os trabalhos citados, 10 (dez) deles vêm ao encontro de nosso incômodo acima referido: quatro deles referem-se à modelagem matemática, três dos mesmos voltam-se para o desenvolvimento de funções, gráficos e pensamento funcional e outros três têm como alvo o ensino interdisciplinar e/ou com aplicações. POSAMENTIER & KRULIK, [2], p. 46, mostram com clareza, ao sugerir o cálculo de π que o concretivismo e o relacionamento com outros capítulos substanciam nosso posicionamento.

A inexperiência do início de carreira nos impediu a visualização do real motivo do hiato: professores de uma ou outra disciplina faziam seu trabalho de forma independente, da melhor maneira possível, como historicamente sempre foi feito.

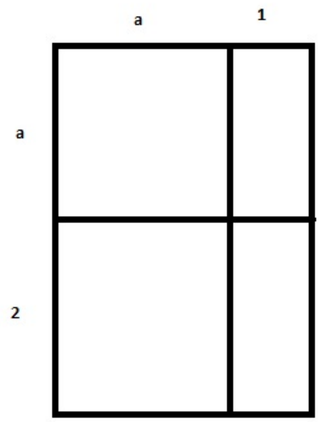
D'AMBROSIO,[4].p.66, preconiza: "Espera-se que a educação possibilite, ao educando, a aquisição e utilização dos instrumentos comunicativos,analíticos e materiais que serão essenciais para seu exercício de todos os direitos e deveres intrínsecos à cidadania."

O resultado da postura ora vigente, conhecido por todos, é o total divórcio entre as aulas e o aprendizado de ambos os conteúdos, o que motiva desde sempre uma falsa ideia de conhecimentos estanques, (ainda D'AMBROSIO[4], p.76: "contextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os *Elementos* de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo - arábica na Europa com o florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV ? E não se pode entender Newton descontextualizado..."), promovendo desperdício de tempo e a perda do evidente concatenamento entre as disciplinas supracitadas, o que, futuramente, para aqueles que viessem a se dedicar ao estudo das Ciências Exatas, causaria imensos prejuízos e atraso no novo nível de aprendizado. Mais ainda: muitos alunos simplesmente desenvolvem verdadeira ojeriza por uma das disciplinas (ou por ambas), tornando extremamente penoso o tempo que passam no Ensino Médio e tornando impermeáveis suas mentes em relação à beleza que envolve esse tipo de conhecimento.

O desenvolvimento da carreira do Magistério foi tornando cada vez mais evidente a necessidade de adotarmos uma nova postura para tentar sanar ou minimizar o fato acima descrito.Este é exatamente o escopo destas palavras, em consonância com os PCN [11], pg 56: *"o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como observação, estabelecimento de relações, comunicação, (diferentes linguagens),argumentação e validação dos processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, dedução, indução ,analogia, estimativa*". Quando de nossos estudos sobre interdisciplinaridade, pudemos ver com clareza ainda maior a magnitude do problema com o qual sempre convivemos, uma vez que muitos doutrinadores pedagógicos têm se debruçado sobre o tema e chegado à inequívoca conclusão de que quanto mais se puder interligar as áreas de conhecimento, melhores resultados serão obtidos, e nosso combalido sistema nacional de ensino terá algo em que se apoiar de modo a atingir patamares superiores tão almejados pela sociedade como um todo.

1.2 Álgebra e Geometria

Doutrinadores e historiadores de várias épocas da História concordam num ponto: a Matemática começa a ser transmitida para gerações futuras de forma escrita e consistente a partir da divulgação dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (325 a.c. - 265 a.c), como afirma HEFEZ[8] , (p.68):"...a contribuição de Euclides à Matemática foi considerável,tendo sido o primeiro matemático a apresentar, de modo coerente, a Geometria e a Aritmética como ciências dedutivas...". Dando voz a Hefez, CARVALHO et al [14] vão mostrar várias vezes em sua obra a concatenação entre as proporções, tratadas tanto algébrica quanto geometricamente com clara intenção complementar. Sabemos também do caráter predominantemente geométrico da obra de Euclides e do desenvolvimento independente da disciplina por séculos e séculos. Não pretendemos aqui falar da História da Matemática, mas, para estabelecer um vínculo que achamos necessário, comentaremos rapidamente sobre o surgimento e evolução da Álgebra, apresentando duas respeitáveis opiniões sobre o tema. De acordo com ROONEY,[1](p.126), *"...torna-se impossível separar a Álgebra Simples da Geometria, em virtude de a primeira ter surgido para auxiliar a resolução de problemas da segunda, principalmente em problemas que envolviam duas e três dimensões "*. A figura abaixo ilustra o fato:



A área do retângulo maior é dada por

$$(a+2).(a+1) = a^2 + 3a + 2$$

A área do retângulo maior é dada por

$$(a+2).(a+1) = a^2 + 3a + 2$$

Sabemos que o caminho percorrido até que a notação acima pudesse ser explicitada foi tortuoso e demorado. Um avanço substancial foi oferecido por François Viéte (1540 - 1603), fazendo com que uma notação consistente pudesse sistematizar e simplificar equações, como no exemplo sugerido por Rooney:

$$x^3 + a.x^2 = b^2.x \rightarrow x^2 + a.x = b^2$$

A Viéte faltava o conhecimento de números negativos e mesmo do zero, o que não lhe permitiu formalizar genericamente soluções gerais como nossa forma atual para equações quadráticas, a conhecida

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

O grande avanço que permitiu a definitiva integração entre Geometria e Álgebra deve - se principalmente a René Descartes (1596 - 1650) e a Pierre de Fermat (1601 - 1665). Não deixa de ser interessante observar que nenhum dos dois gigantes era propriamente um matemático profissional, levando-nos a uma reflexão sobre o item anterior (1.1), no qual se sugere a aversão atual que muitos dos alunos contemporâneos sentem pelas disciplinas que envolvem cálculos ou ciências exatas.

Não se pode deixar de citar as argumentações de ROQUE[3], cuja obra pretende desmistificar conceitos disseminados pela maioria dos estudiosos da História da Matemática: na p.185 a autora cita Zeuthen e van der Waerden, cuja opinião sobre os textos do livro II dos *Elementos* é a de que várias proposições apresentadas seriam na verdade “ propriedades algébricas enunciadas sob uma roupagem geométrica"e logo a seguir conclui que...” na Matemática grega as grandezas propriamente ditas têm autonomia sobre os números ", impossibilitando qualquer certeza sobre a natureza algébrica da obra de Euclides.

Com palavras muito próximas Fermat e Descartes propõem que qualquer relação entre duas variáveis descreve uma curva plana e, a partir do conceito de que um ponto do plano pode ser singularizado pela adoção de dois eixos de referência e, mais adiante, estendendo a utilização de um terceiro eixo para generalizar posições tridimensionais de cada ponto, usar o mesmo conceito para quaisquer curvas no espaço em que vivemos. Devemos ainda a Descartes o refinamento da notação usada à época de Viéte, utilizando as letras iniciais do alfabeto latino para indicar constantes e as últimas para sugerir variáveis, além de criar sobrescritos para que funcionassem como nossos atuais expoentes.

A partir de então o desenvolvimento da Álgebra acoplada à Geometria foi gigantesco, como sabemos, levando - nos a expressões que podem retratar espaços multidimensionais, o que trouxe alicerce para as Geometrias Não Euclidianas e para a Física Moderna. ROONEY [1], p.121 volta a comentar o fato . Vemos então que a Álgebra pode, a partir de uma notável racionalização de notações, desenvolver - se independentemente da Geometria, porém jamais deveremos deixar de levar em consideração suas raízes, basicamente geométricas. A simbiose entre estes dois ramos da Matemática é essencialmente a razão deste trabalho.

1.3 Os conteúdos programáticos segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

De acordo com os PCN estabelecidos a partir de 1998, tendo como alvo os ciclos de aprendizado em Matemática do Ensino Fundamental, deve haver por parte das Instituições de Ensino brasileiras um esforço no sentido de interligar os conteúdos de diferentes disciplinas sempre que for possível, como afirma parte do parágrafo central da p.25 dos PCN, no que tange à Matemática : *O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos - teorias matemáticas - evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas matemáticos euclideano e hiperbólico na Geometria, equivalentes* *do ponto de vista da consistência lógica,são dois possíveis modelos da realidade física.* E mais à frente: *Convém, ainda, ressaltar que, desde seus primórdios, as interrelações entre as várias teorias matemáticas sempre tiveram efeitos altamente positivos para o crescimento do conhecimento nesse campo do saber.*

Os últimos anos, em particular as duas últimas décadas, trouxeram consigo novidades tecnológicas extremamente importantes e que têm se disseminado de forma irreversível com custo financeiro cada vez menor. Referimo-nos às calculadoras científicas e computadores, cada vez mais acessíveis a fatias cada vez maiores da população brasileira. Esta é uma oportunidade sem precedentes para aqueles que, como nós, sonham com o desenvolvimento do ensino (e, portanto, com o aprendizado) em Matemática. GIRALDO et al [15] deixam claro como a Geometria Dinâmica interliga tanto Álgebra como Geometria em ambientes extremamente lúdicos e que tornam praticamente impossível a indiferença de um discente quanto ao assunto apresentado, qualquer que seja a plataforma escolhida. Assim, acreditamos que o construtivismo defendido por Jean Piaget (1896 - 1980) em toda a sua carreira tem, particularmente para a Matemática, a Geometria como a pedra fundamental sobre a qual serão construídos os alicerces seguros para a propagação do conhecimento matemático a partir dos bancos escolares.

A etimologia da palavra *GEOMETRIA* tem basicamente duas vertentes, segundo BRITO et al,[16], p.21,.A primeira, puramente etimológica refere - se provavelmente ao Egito e pode ser traduzida literalmente por *medida da Terra*. A segunda, *Ciência dos Corpos Celestes*, é atribuída aos babilônios, tendo esta versão sido sistematizada pelos Pitagóricos entre os séculos VI e V a.c. Qualquer uma das origens satisfaz amplamente a nossos objetivos, que pretendem evidenciar que a visão, mais do que qualquer outro de nossos sentidos, favorece uma resposta cerebral rápida e completa. Por esta razão acreditamos piamente que qualquer capítulo de Matemática Aplicada deve ser relacionado à Geometria sempre que possível, ainda que motivos pedagógicos e curriculares não façam menção específica a este quesito.

Retomemos D´AMBROSIO [5] em sua outra obra e citemos uma parcela de sua conclusão à p.119: *A educação formal é baseada ou na mera transmissão (ensino teórico e aulas expositivas) ou no* ***adestramento*** *(grifos nossos), (ensino prático com exercícios repetitivos) em técnicas e habilidades. Ambas as alternativas são totalmente equivocadas em vista dos avanços mais recentes do nosso entendimento dos processos cognitivos.*

Talvez este seja o alvo principal de todas as palavras que constituem este trabalho: muita atividade didático - pedagógica, não em salas onde pessoas discutem se esta ou aquela ideia será melhor, mas sim no convívio diuturno entre docentes e discentes.

Capítulo 2

Histórico da Abordagem

2.1 A Razão Fundamental

Nós, humanos, temos cinco sentidos que permitem a interação com o mundo à nossa volta, o que possibilita uma ótima percepção do espaço que nos envolve, permitindo uma quase instantânea familiarização com as situações que se apresentam.

Acreditamos haver uma unanimidade quanto ao sentido humano que oferece uma maior quantidade de informações sobre os objetos matemáticos de nosso interesse: o sentido da visão. Brito, et al [16], p.18, 19, concordam com Duval (1995) quando este distingue entre objeto matemático e sua representação e cita literalmente a obra: *... não é possível haver compreensão se não distinguirmos o objeto de sua representação....* Muito antes dos símbolos matemáticos que determinaram enorme avanço no desenvolvimento da ciência temos vários e vários registros de desenhos que se reportam a tempos há muito idos, objetos estes com um viés claramente matemático. Equacionar, de modo formal, a ideia de uma reta é, do ponto de vista histórico, extremamente recente, porém a noção mental do que significa uma reta é imemorial.

Estas reflexões sugerem que, sempre que possível, a presença de uma imagem fortalece, esclarece, facilita a percepção do assunto relacionado e por esta razão lutamos pelo objetivo da inserção da Geometria Euclidiana, absolutamente visual, no desenvolvimento dos assuntos das séries finais do Ensino Fundamental e de todo o Ensino Médio.

2.2 Evolução do Processo Ensino - Aprendizagem

Os anos 1980 mostraram uma mudança de tendência na maneira de se transmitir conhecimento para os discentes nas séries formadoras de conhecimento. Até então havia a preocupação em generalizar o conteúdo a ser ministrado. Conteúdos mais específicos começaram a ganhar as preferências curriculares dos detentores das tomadas de decisão quanto à abordagem dos assuntos matemáticos.

De acordo com Fiorentini,et al,[16], o foco privilegiado de conteúdos específicos premia o estudo dos processos de contagem, sistemas de numeração, GEOMETRIA, além das operações fundamentais tradicionais ***até mesmo nas séries iniciais de aprendizagem***(grifos nossos).

Esta nova tendência tem o apoio de estudiosos importantes, entre eles JEREMY KILPATRICK, (Kilpatrick,et al[17] - Investigación en educatión matemática: su historia y alguns temas de la actualidad p. 1-18) .Segundo o mesmo, Ensino Médio e até mesmo o Superior abraçaram tais tendências, que se enriquecem à medida que novos conhecimentos se agregam ao conteúdo a ser apresentado, provocando o interesse dos pesquisadores relativamente tanto às estratégias desenvolvidas pelos discentes, quanto aos esquemas cognitivos que os mesmos desenvolvem para a resolução de problemas. O pesquisador afirma ainda que pesquisas sobre aprendizagem individual ainda predominam sobre aquelas cujo foco é o aprendizado em grupos de estudantes, ***tendência que irá predominar por muito tempo nas escolas brasileiras***,(grifos nossos)

2.3 Recomendação dos PCN

A Lei de Diretrizes e Bases, doravante denominada LDB, publicada em 1996, insere nos PCN várias premissas a serem seguidas pelos formuladores de currículos, entre as quais citamos ***(...Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver,de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão do mundo....,p.6)***. Nossa tradução para a instrução acima tem como clara a ligação entre conhecimentos de áreas distintas, ainda que pertençam à mesma raiz, como no caso da Álgebra e da Geometria.

2.4 Amadurecimento da Ideia

Nos tempos antigos, inclusive pré- helênicos, utilizava-se habitualmente um método de composição e decomposição de figuras de modo a obter áreas de figuras mais complexas que as tradicionais. A consistência de tal prática foi validada pela proposição 14 do livro II dos *Elementos* de Euclides e durante muito tempo essa ferramenta foi de extrema utilidade para o enfrentamento de questões como a que apresentamos abaixo, conforme BRITO, et al, p.26 , retirada das tábuas babilônicas de Nippur, datadas de 2500a.c.: ***Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura obtendo assim a área 252. Somei comprimento e largura e obtive 32. Pede-se comprimento e largura.***

Resolução do calculista:

1. Tome a metade de 32 (16);

2. $16 \times 16 = 256$;

3. $256 - 252 = 4$;

4. A raiz quadrada de 4 é 2;

5. $16 + 2 = 18$; este é o comprimento;

6. $16 - 2 = 4$; esta é a largura.

BRITO [15], et al propõem então a seguinte provável sequência para a obtenção dos resultados:

1. A divisão do semiperímetro por 2 sugere a consideração de que o retângulo em questão poderia se tratar de um quadrado;

2. Tal quadrado teria uma área igual a 256 unidades de área, com lado igual a 16 unidades;

3. A área obtida supera a área dada em 4 unidades;

4. Determina -se a medida do lado de um quadrado de área igual a 4 unidades.retira-se este quadrado do anterior, de área 16.
5. A figura restante será um retângulo de lados 18 e 14 unidades de comprimento.

Certamente poderíamos utilizar a Álgebra para equacionar e resolver tal problema, de forma muito mais rápida, o que permite a comparação de ambas as soluções para os alunos de uma classe finalista do Ensino Fundamental, e certamente do Ensino Médio, mostrando como a Álgebra se coaduna perfeitamente com a Geometria e deixando bem clara a equivalência entre as soluções.

Uma observação mais acurada dos PCN reforça nossa ideia: tomando a p.51 dos PCN, do ensino Fundamental, "ESPAÇO E FORMA": *Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática do Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.....".* Mais à frente... "*Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.*"

2.5 Limitações da Interação Entre a Álgebra e a Geometria

De acordo com os currículos oficiais e conteúdos programáticos da imensa maioria dos Estados da Federação, embora sejamos defensores intransigentes do ensino da Geometria o mais cedo possível, utilizá-la para a interação com a Álgebra vai, a nosso ver, merecer especial atenção. Sempre que surge uma novidade em qualquer setor de atividade, pela própria inércia que caracteriza naturalmente os seres humanos, seu implemento depende do convencimento de quem se propõe a adotá-la. Este talvez seja o maior obstáculo enfrentado por aqueles que pretendem, desinteressadamente, contribuir para um melhor rendimento profissional, seja qual for a área de conhecimento a que nos refiramos. Em particular, no caso presente, o educador que abraçar a ideia deverá ser muito claro quanto às partes do programa de Álgebra que poderão ou não interagir com os capítulos facilitadores da Geometria. Por certo este será o detalhe mais importante de nossas palavras de agora em diante.

Para que esta ideia tenha um desenvolvimento sustentado e produtivo torna-se imperativo analisar com profundidade os parâmetros curriculares vigentes e, talvez, modificá-los. Afinal, esta parece ser a essência dos PCN e por nenhuma outra razão os mesmos se estabeleceram: o aprimoramento das técnicas pedagógicas e a melhoria urgente dos conteúdos ministrados, especialmente em Matemática.

Capítulo 3

Resolução de Problemas

3.1 Problemas de oitava e nona séries

.

3.1.1 Explorando o plano cartesiano

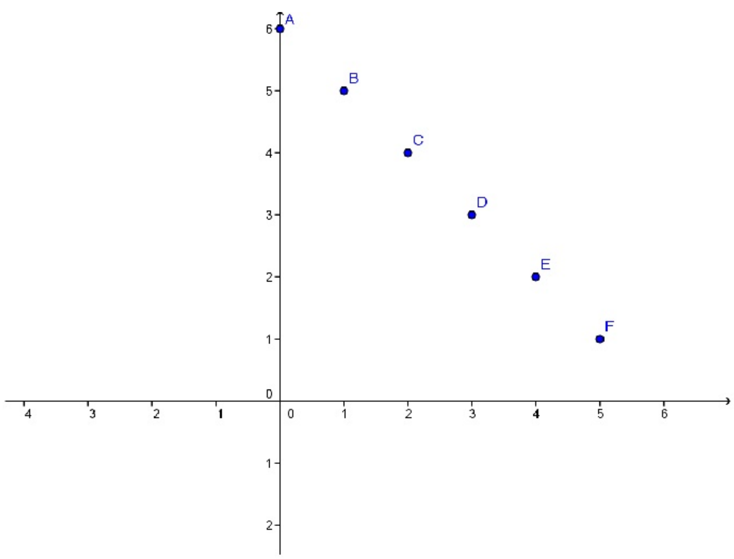
A exploração do plano cartesiano passa por sua apresentação aos alunos, e conforme o conteúdo programático, pode se dar na oitava ou nona séries do Ensino Fundamental. Na maioria das oportunidades isto se dá na nona série e é comum uma certa perplexidade por parte dos discentes quanto à futura utilização de tal ferramenta. Para que serve marcar pontos em um plano? Que vantagem esse método irá trazer, por exemplo, para a visualização de uma expressão como por exemplo

$$x + y = 6$$

,

Um aluno mediano das séries abordadas não terá grande dificuldade para encontrar várias soluções da mesma. Como ele poderia interpretar, vendo, a(s) solução(ões)? Para atingirmos nosso objetivo, que é o de visualizar o conjunto de soluções, deveremos solicitar aos alunos que construam uma tabela de valores com duas colunas atribuindo valores arbitrários para a variável na primeira coluna e calculando o valor obtido por substituição e inserindo-o na mesma linha da segunda coluna, conforme a figura abaixo:

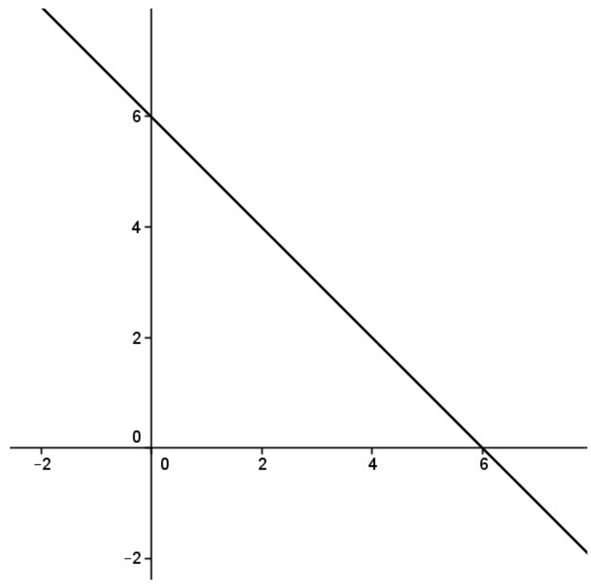
x	y
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1



Como se trata de uma primeira visualização, espera-se a inserção apenas de números inteiros e o aspecto de um gráfico cuja construção será solicitada ao discente,e cujo aspecto será o da figura acima.

As próximas perguntas trariam, a nosso ver, aquilo que se pretende concretizar como o aprendizado da Matemática utilizando nesse caso a Geometria Analítica como ferramenta:

a) apenas soluções inteiras satisfazem a igualdade proposta?
b) o que significa ligar todos os pontos ininterruptamente?
c) qual seria o aspecto do gráfico?
d) quantas soluções tem a expressão apresentada acima? Ligar ininterruptamente os pontos leva o discente a chegar ao gráfico abaixo:



A construção do gráfico de forma contínua certamente mostrará que a equação acima apresentará infinitas soluções, sendo cada par ordenado$(x; y)$ uma delas. O comentário de que se trata da representação geométrica desse tipo de relação, nesse caso uma reta, leva a conjecturas sobre a completeza dos números reais e a uma clara separação entre o conjunto dos números naturais, não denso, e o conjunto dos números reais. Tanto melhor que a separação possa ser *visualizada*.

A seguir apresentaremos um rol de problemas cuja solução será abordada de duas maneiras, uma convencional e a outra, sempre que for possível, de forma geométrica.

3.1.2 Problema 01

(conteúdo relacionado às 8ª e 9ª séries do ensino fundamental, conforme os PCN)
Resolva, no conjunto dos números reais, o sistema de equações :

$$x + y = 12$$

$$6x - 4y = 6$$

Procedimento habitual: escalonamento do sistema. Por exemplo, multiplicando primeira equação por (- 6) e somando -a à segunda, retemos um sistema equivalente ao original da forma

$$-6x - 18y = -72$$

$$6x - 4y = 6$$

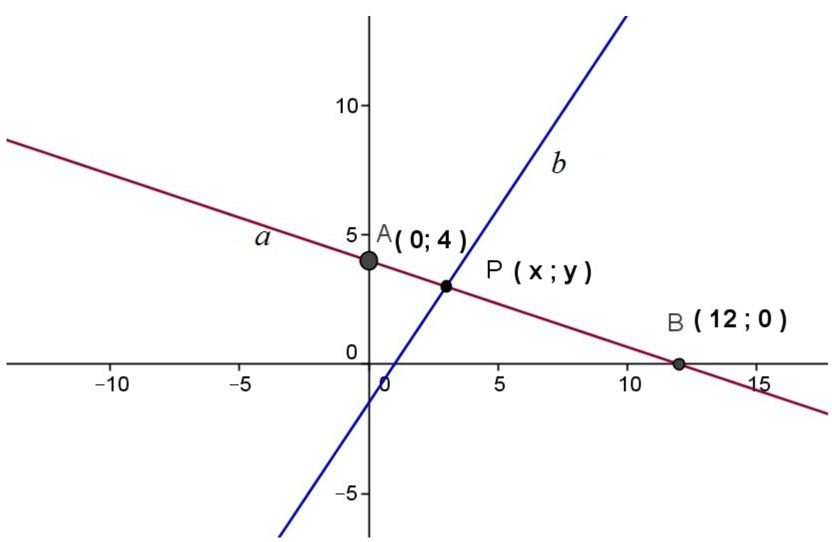
Escalonando em x obtemos $-22y = -66$ e $y = 3$. Fazendo a substituição em qualquer uma das equações descritas, por exemplo a primeira, teremos :
$x + 3.3 = 12$ obtendo $x = 3$

O par ordenado (3 ; 3) é a solução do sistema.

Procedimento funcional e geométrico analítico : A equação$x + 3y = 12$ pode ser vista como a equação de uma reta que, em sua forma reduzida pode ser escrita $y = -\frac{1}{3}.x + 4$ e a equação 6x - 4y = 6 também o é.

Se reescrita na forma reduzida obtemos $y = \frac{3}{2}.x - \frac{3}{2}$.

O gráfico abaixo mostra claramente a unicidade da solução procurada. Este procedimento será, sempre que possível, utilizado na busca da quantidade de soluções de um sistema com duas variáveis, que era uma das conclusões de Descartes:

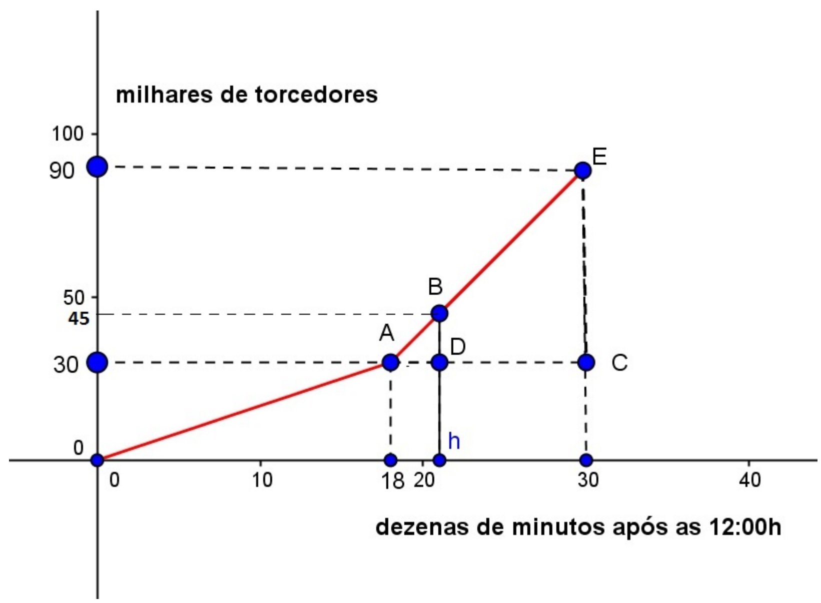


Igualando ambas as expressões que explicitam as imagens obtemos:
$-\frac{1}{3}.x + 4 = \frac{3}{2}.x - \frac{3}{2}$ e $x = 3$. Substituindo tal valor em qualquer uma das funções obtemos $y = 3$ e o par ordenado $(3; 3)$ é a solução procurada.

3.1.3 Problema 02

(conteúdo relacionado à 1ª série do Ensino Médio (PCN)).

(UERJ 2010 adaptado). Em uma partida de futebol, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90000 torcedores.Três portões foram abertos às 12:00h e até às 15:00h entrou um número constante de pessoas por minuto, perfazendo 30.000 torcedores. A partir desse horário abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio estão contidos no gráfico abaixo:



.

Quando o número de torcedores atingiu 45.000, qual era o horário?

Resolução funcional:

A pergunta se refere à segunda parte do gráfico. Como o mesmo nesse trecho é retilíneo, temos uma função afim do tipo $n = a.h + b$, para n em milhares de torcedores e h em horas, onde **a** e **b** são os parâmetros a determinar. Os pontos $(15, 30)e(17, 90)$ pertencem ao gráfico e então $n(15) = 30$ e $n(17) = 90$. Então, fazendo as respectivas substituições obteremos o sistema: $15.a + b = 30$ e $17.a + b = 90$. Substituindo **b** e explicitando **a** obtemos $a = 30$ e $b = -420$. Temos então a sentença que define a função: $n(h) = 30h - 420$. Então se

$n(h) = 45, 45 = 30.h - 420$ e $h = 15, 5$ horas ou 15 horas e 30 minutos.
Comentário: esta forma de resolução é utilizada na grande maioria dos livros didáticos adotados nas escolas e por essa razão é a preferida pelos discentes do 1º ano do ensino Médio.
Resolução geométrica.

Analisando o gráfico acima podemos ver que os triângulos ABD e ACE são obviamente semelhantes e dessa semelhança podemos escrever:

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}.$$

Substituindo as medidas dos segmentos obtemos

$$\frac{15}{60} = \frac{h - 18}{12}$$

então h = 21 dezenas de minutos ou 210 minutos após as 12:00 horas, ou seja, 15 horas e 30 minutos.

Comentário.Tal procedimento, a nosso ver, deve ser bastante incentivado como agente facilitador tanto de raciocínio quanto de cálculo aritmético, além de alicerçar o uso das proporções como sistemática efetiva para aplicação dos problemas cotidianos, uma das metas dos PCN.

3.1.4 Problema 03

Determine a soma dos 100 primeiros termos da progressão: (-2, 3, 8, ...).

Procedimento habitual: aplicação da fórmula da soma dos **n** primeiros termos de uma P.A.,deduzida de várias formas por vários autores, entre eles Lima [6], et al:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Primeiramente obtemos o centésimo termo pela aplicação do termo geral de uma P.A.,deduzida por recorrência:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

No caso temos:

$$a_{100} = a_1 + 99.r = -2 + 99.5 = 493.$$

A partir daí aplicamos a fórmula da soma acima e temos:

$$S_{100} = \frac{(-2 + 493)100}{2}$$

Chegamos então à resposta procurada: $S_{100} = 24450$

Comentário: Este procedimento é o mais comum entre vários possíveis, inclusive a indução vulgar da "fórmula de Gauss "e costuma ser aplicado sem grandes problemas pelos discentes. Entretanto falta um reconhecimento melhor, a nosso ver, do comportamento da soma de vários termos da progressão.

Resolução funcional. Quando do desenvolvimento da teoria das progressões aritméticas é costume enfatizar que a mesma está completamente definida quando dela se conhece o primeiro termo e a razão. Podemos então a partir da expressão do termo geral vista acima e utilizando a expressão para a soma também usada acima, chegar a uma expressão funcional de domínio natural e contradomínio real, com se segue:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}$$

Reagrupando convenientemente, chegamos à expressão

$$S_n = \frac{r}{2}.n^2 + \frac{(2a_1 - r)}{2}.n$$

Sendo a_1 e r parâmetros constantes de cada P.A. e levando ainda em conta que o domínio proposto é o conjunto dos números naturais, a expressão acima permite,sem o uso de quaisquer regras ou memorizações, observar a monotonicidade da mesma que, para ser crescente, decrescente ou constante, depende unica e exclusivamente de **r**. No caso, para os valores pedidos teremos:

$$S_{100} = \frac{5}{2}.(100)^2 + \frac{(2.(-2) - 5).100}{2}$$

Teremos então o resultado $S_{100} = 24550$.

Comentário. Essa linha de conduta permite ainda uma análise das funções de segundo grau, também componentes do currículo da 1ª série do Ensino Médio, cuja importância não precisa ser destacada.

3.1.5 Problema 04

(conteúdo relacionado à 1ª série do Ensino Médio:Matemática Financeira e Funções Exponenciais).

FGV 2009 ADAPTADO. Um comerciante precisa adquirir um estoque com urgência mas está momentaneamente descapitalizado.Procura então uma instituição financeira que lhe oferece a quantia necessária, R$ 20.000,00 , e lhe informa que a taxa costumeira é de 69 por cento ao ano e que ele pode escolher qual sistema de capitalização pretende, simples ou composta, para um período de, no máximo, um ano comercial de 360 dias. O comerciante sabe que em seis meses irá receber com certeza uma herança no valor de R$100 000,00 e escolheu o sistema de juros compostos para elaborar o contrato. Responda, justificando, se a escolha foi acertada.

Procedimento habitual: utilização das expressões de capitalização simples e composta para que se faça a devida comparação.

a) Sistema de capitalização simples:usando a dedução de Morgado, et al [6], a expressão que calcula o montante para juros simples é dada por:

$$M = C(1 + i.n)$$

sendo M o montante da dívida, C o capital tomado, i a taxa de juros e n o número de períodos, ou tempo de capitalização. No caso, $C = 20000$, $i = 0,69$, e $n = 0,5$, (meio ano,meio período de capitalização). Cálculo:

$$M = C(1 + i.n) = 20000(1 + 0,5.0,69)$$

Isto significa que, no sistema simples de capitalização,o montante da dívida será igual a

$$M = R\$26.900,00$$

.

b) Sistema de Capitalização composta: ainda recorrendo a Morgado, a expressão desenvolvida é:

$$M = C.(1 + i)^n,$$

com o mesmo significado para os parâmetros. Então o cálculo será:

$$M = C.(1 + i)^n$$

No caso:

$$M = 20.000.(1 + 0,69)^{0,5} = 20.000\sqrt{1,69},$$

o que nos leva a

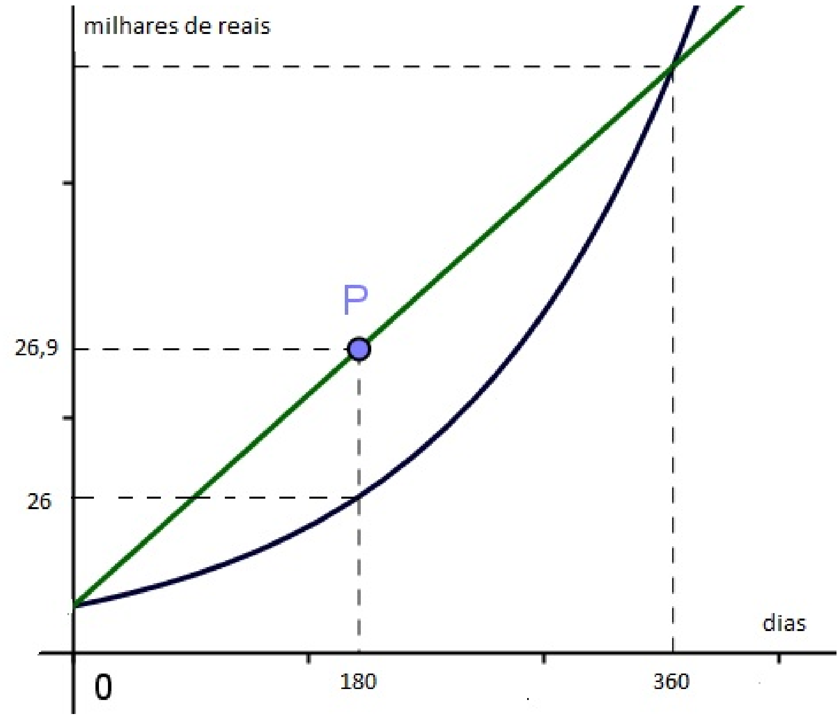
$$M = R\$26.000,00$$

.

Conclusão: a escolha foi acertada porque o montante da dívida contraída por capitalização composta foi menor.

Procedimento por análise gráfica e funcional:

Como C e i são constantes, (parâmetros contratuais) as variáveis são n e i, em ambos os sistemas de capitalização.No caso da capitalização simples temos então uma função afim, cuja imagem gráfica é uma reta com coeficiente angular C,n, positivo e para a capitalização composta teremos uma função exponencial com base $(1+i)$ e, portanto, sendo ambas as funções estritamente crescentes.O gráfico abaixo elucida a comparação que irá se seguir.



A análise do gráfico permite concluir que existe um único valor para n para o qual as imagens (montantes) são iguais a partir do valor inicial. Como isso acontece? As expressões $(1 + i.n)$ e $(1 + i)^n$ somente assumem valores iguais para $n = 1$, no caso um período de capitalização é igual a 1 ano, em razão da taxa aplicada.Para o intervalo $0 < n < 1$ os montantes (imagens) obtidos com capitalização composta são claramente menores que aqueles obtidos com capitalização simples e esse é exatamente o caso, em virtude de a quitação do contrato poder ser feita em menos de um período de capitalização (1 ano). Esse fato mostra o acerto da decisão do comerciante, dando razão ao dito popular "uma imagem vale mais que mil palavras".

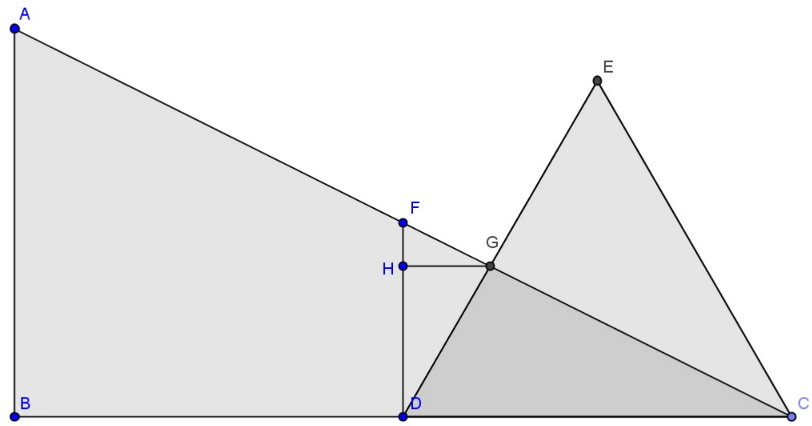
3.1.6 Problema 05

.

(conteúdo relacionado à 1ª ou 2ª séries do Ensino Médio).

O triângulo ABC da figura é retângulo em B e seus catetos medem respectivamente $AB = 6cm$ E $BC = 12cm$. O ponto D é médio do cateto BC e o triângulo DCE é equilátero. Sabemos ainda que os segmentos FD e BC são perpendiculares e que os segmentos GH e BC são paralelos. Determine a área do triângulo DGF em cm^2.

Como, pelas informações do enunciado, temos ΔFHG e ΔABC semelhantes, porque os ângulos $F\widehat{H}G$ e $A\widehat{B}C$ são congruentes, bem como os ângulos $F\widehat{G}H$ e $A\widehat{C}B$.



Resolução utilizando Geometria Sintética e Trigonometria.

Então, seus lados correspondentes são proporcionais e podemos escrever:

$$\frac{FH}{HG} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

e então temos : (1):

$$FH = \frac{1}{2} \cdot HG$$

Por outro lado, como os segmentos GH e BC são paralelos, e o ΔDCE é equilátero, então

$$G\widehat{F}D = G\widehat{D}C = 60^{\text{o}}$$

e

$$\text{tg } 60^{\text{o}} = \frac{\text{HD}}{\text{HG}}$$

temos a relação (2):

$$HD = GH \cdot \sqrt{3}$$

Ainda, da semelhança dos triângulos ABC e FDC temos:

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{CD} = 2$$

relação (3). Como $FH + HD = FD$ fazendo as devidas substituições nas relações (1),(2) e (3) obteremos:

$$\frac{1}{2}.HG + GH.\sqrt{3} = 3$$

Explicitando HG:

$$HG = \frac{6}{1 + 2 \cdot \sqrt{3}}$$

Ocorre que HG é a altura doΔGDF relativa ao lado FD. Então:

$$S_{GDF} = \frac{1}{2}.DF.HG = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{1 + 2.\sqrt{3}} = \frac{9}{1 + 2 \cdot \sqrt{3}} cm^2$$

Resolução utilizando Geometria Analítica.

Adotando um sistema de eixos cartesiano e ortogonal com origem no ponto D e eixos Ox coincidindo com a reta suporte do segmento BC e 0y coincidindo com a reta suporte do segmento DF, temos explícitas as coordenadas dos pontos $D = (0, 0)$ e $F(0, 3)$.

O ponto G é a intersecção da reta AC, definida por sua declividade $m = -tgA\widehat{C}B$=$-\frac{1}{2}$ e que passa pelo ponto $F = (0, 3)$. Então a equação reduzida da reta AC tem a forma $y - y_P = m.(x - x_P)$,o que no caso nos conduz a $y = -\frac{1}{2}.x + 3$, equação (I).

Por outro lado, a reta DE passa pelo ponto $D(0, 0)$ e tem declividade $m' = tg60^o = \sqrt{3}$. A forma reduzida desta nova equação é $y = \sqrt{3}.x$, equação (2).

A intersecção das duas retas ocorre então para a solução $(1) = (2)$:

$$\sqrt{3}.x = -\frac{1}{2}.(x + 3)$$

. Explicitando x teremos $x = \frac{6}{2.\sqrt{} + 1}$,relação (3).A substituição deste valor na equação(2) nos leva a $y = \sqrt{3}.\frac{6}{2.\sqrt{3} + 1}$.

Conhecemos agora as coordenadas do ponto $G = (\frac{6}{2.\sqrt{3} + 1}, \frac{6.\sqrt{3}}{2.\sqrt{3} + 1})$.

Como elegantemente o faz DELGADO et al [6] na obra Geometria Analítica, utilizando vetores para obter a área de um paralelogramo qualquer conhecidos três quaisquer de seus pontos, e lembrando que um paralelogramo pode ser dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos congruentes obtemos a expressão que permite o cálculo da área de um triângulo conhecidos seus três vértices, assemelhando - a ao cálculo de um determinante de terceira ordem cujos elementos são filas paralelas compostas pelas respectivas abscissas, ordenadas, e pelo número 1.A metade do módulo desse determinante irá informar a área do triângulo. Faremos isto neste espaço.

$S_{DEF} = \dfrac{|D|}{2}$. O determinante D é então definido:

$$D = \begin{vmatrix} x_G & y_G & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}$$

Fazendo as devidas substituições teremos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{6}{2.\sqrt{3}} & \dfrac{6.\sqrt{3}}{2.\sqrt{3}+1} & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

desenvolvendo o determinante pelo Teorema de Laplace aplicado à 3ª linha teremos:

$$D = \frac{1}{2}.\frac{6}{2.\sqrt{3}+1}.3$$

e finalmente obtemos a área do triângulo:

$$S_{DEF} = \frac{9.(2.\sqrt{3}-1)}{11}$$

.

Comentário: a escolha adequada do sistema de coordenadas facilita sobremaneira a execução dos cálculos necessários. Ese ponto deve ser enfatizado quando da aplicação do método da Geometria Analítica.

3.1.7 Problema 06.

(conteúdo relacionado à 9ª série do Ensino Fundamental e à 1ª série do Ensino Médio (PCN)).

FUVEST 2011.Dois quintos de meu salário são reservados para o aluguel e a metade do que sobra para a alimentação. Descontado o dinheiro do aluguel e da alimentação, coloco um terço do que sobra na poupança, restando então R $ 1200,00. Qual é o meu salário?

Resolução habitual algébrica, encontrada em várias obras, entre elas IEZZI,et al, Fundamentos da Matemática elementar, vol.1. Seja x o valor procurado. Então:

1ª operação: $x - \frac{2}{5}.x = \frac{3}{5}$. (sobra após o aluguel).

2ª operação: $\frac{3}{5}.x - \frac{1}{2}.x = \frac{6x - 3x}{10} = \frac{3x}{10}$, (sobra após aluguel e alimentação).

3ª operação: $\frac{3x}{10} - \frac{1}{3}.\frac{3x}{10} = \frac{3x - x}{10} = \frac{2x}{10}$, (após poupança).

Então temos: $\frac{2x}{10} = 1200$ e portanto o valor do salário será: x= R$ 6000,00

Resolução por comparação de áreas geométricas - inspirado no processo egípcio citado por ROQUE [2].

Como os primeiros gastos são frações de denominadores 5 e 2, reduzimos o problema à obtenção de frações equivalentes às dadas com denominador igual ao mínimo múltiplo comum entre 5 e 2:

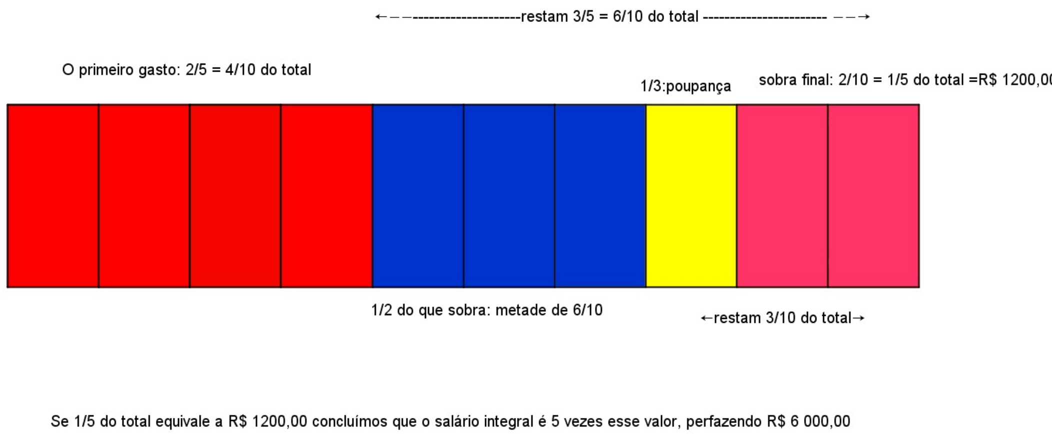
$$mmc(5, 2) = 10$$

O salário é então dividido em 10 partes iguais,sendo cada parte ($\frac{1}{10}$) representada por um retângulo, por exemplo, o que nos leva ao seguinte fato:
1ª operação:$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, sendo consumidos 4 retângulos, com sobra de 6 retângulos.

2ª operação:metade do que sobra: 3 retângulos, sobrando 3 retângulos.
3ª operação: um terço da sobra, 1 retângulo, restando dois deles, que representam R$ 1200,00 e, portanto, cada retângulo tem o "valor"de R$ 600,00, o que nos leva ao salário total de $6000, 00$ reais.
A figura abaixo ilustra o raciocínio.

Comentário: uma vez que a terceira operação envolve uma terça parte e que o numerador até então remanescente tem o 3 como fator,foi necessário apenas obter o $mmc(5, 2)$.Num caso mais geral poder-se-ia obter o mmc entre todas as frações propostas, no caso $mmc(5, 2, 3) = 30$, e fazer a divisão correspondente, que no caso teria 30 retângulos onde cada um deles representaria $\frac{1}{30}$ do salário. Neste caso o "valor"obtido para cada retângulo seria de R$ $200, 00$.

Comentário: uma vez que a terceira operação envolve uma terça parte e que o numerador até então remanescente tem o 3 como fator,foi necessário apenas obter o $mmc(5, 2)$.Num caso mais geral poder-se-ia obter o mmc entre todas as frações propostas, no caso $mmc(5, 2, 3) = 30$, e fazer a divisão correspondente, que no caso teria 30 retângulos onde cada um deles



representaria $\frac{1}{30}$ do salário. Neste caso o "valor"obtido para cada retângulo seria de R\$$200,00$

3.1.8 Problema 07

.

(conteúdo de Cinemática do 1ª série do Ensino médio).

Um objeto é lançado do topo de um edifício cuja altura é igual a $16m$ com velocidade de módulo $20m/s$ e formando com a horizontal um ânguloθ tal que $\sin\theta$= 0,8 e $\cos\theta$ = 0,6 . Despreze efeitos resistivos, adote $g = 10m/s^2$ e responda:
a) qual a altura máxima relativa ao solo atingida pelo objeto?
b) a que distância horizontal da base do prédio o objeto toca o solo?

Resolução cinemática:

A resolução deste tipo de problema para a primeira série do Ensino Médio está apoiada no princípio da superposição de efeitos de Isaac Newton, como é conhecido de todos. Uma vez que a única aceleração presente é a gravitacional, aqui suposta constante e vertical, o movimento é subdividido em duas projeções que irão se superpor de forma concomitante para responder às questões propostas:
a) a projeção horizontal da posição real do movimento do objeto, que irá seguir as expressões do movimento retilíneo uniforme, em virtude da ausência de aceleração escalar. A abscissa

da projeção será representada por uma função afim e uma escolha conveniente dos eixos de projeção permite assumir o termo independente como **zero**, conforme se verá na figura que irá acompanhar a segunda resolução. Teremos então para a posição da projeção horizontal da projeção a função

$$x = V_{0x}.t$$

, onde $V_{0x} = V_0.\cos\theta = (20.0,6)m/s = 12m/s$ e t representa os instantes de tempo a partir do lançamento. Temos então a função das projeções horizontais do objeto : $x = 12.t$.
Já a projeção vertical tem os valores alterados pela ação gravitacional, sendo então tratada como um movimento uniformemente variado vertical e terá a forma de uma função quadrática que, adaptada à simbologia da Cinemática,adquire o formato

$$y = -\frac{g}{2}.t^2 + V_{0y}.t + y_0$$

. Teremos ainda a correspondente função das velocidades escalares, que obedecerá ao modelo cinemático $V_y = V_{0y} - g.t$.
Suas constantes terão então os seguintes significados: g = módulo da aceleração gravitacional ,V_{0y} = componente inicial da velocidade escalar vertical do movimento e y_0 = posição inicial vertical da projeção do objeto.
No caso, teremos: $V_{0y} = V_0.\sin\theta = (20.0,8)m/s = 16m/s$ e ainda $g = -10m/s^2$ e $y_0 = 16m$.
A forma da função que descreve a projeção vertical da posição real do corpo será então dada por:

$$y = -5.t^2 + 16.t + 16,$$

medida em metros, e

$$V_y = -10.t + 16,$$

medida em m/s. O movimento é então estudado com a aplicação conjunta de ambas as equações.
a) A altura máxima é atingida no momento em que o objeto deixa de subir, o que nos impõe $V_y = 0$. Substituindo na função das velocidades da projeção vertical da posição real do objeto teremos: $0 = 16 - 10.t$ e então temos $t = 1,6s$. Como neste instante ocorre a maior altura, para determiná -la basta substituir tal valor na função $y = y(t)$. Então: $y = -5.(1,6)^2 + 16.1,6 + 16$. Explicitando y : $y = 28,8m$, que é a altura máxima atingida.
b) Para obter a distância horizontal solicitada, é necessário obter o tempo de voo, o que será feito igualando a função $y = y(t)$ a zero, (retorno ao solo). Segue então que:

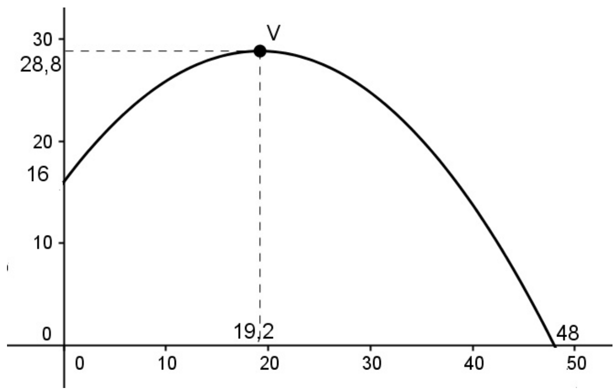
$$0 = -t^2 + 16.t + 16$$

Resolvendo para y temos $t = 4s$, uma vez que o enunciado não permite respostas negativas para os instantes de tempo neste caso. Devemos agora aplicar o valor encontrado na função $x = x(t) : x = 12(m/s).4(s)$,e finalmente $x = 48m$, que é a resposta solicitada.

Resolução por Geometria Analítica: A curva parametrizada a ser descrita pelo objeto é obtida pelas equações paramétricas acima citadas $x = 12.t$ e $y = -5.t^2 + 16.t + 16$. Substituindo o parâmetro t obtido de $x : t = \frac{x}{12}$ na função $y = y(t)$,temos

$$y = -5.(\frac{x}{12})^2 + 16.\frac{x}{12} + 16$$

e portanto $y = -\frac{5}{144}.x^2 + \frac{4}{3}.x + 16$, que mostra claramente a trajetória parabólica descrita pelo objeto, conforme mostra a figura abaixo:



Então, pelo conhecimento anterior da função quadrática respondemos:
a) **altura máxima**: é a ordenada do vértice da parábola. Como é costume quando se estudam as funções quadráticas, sua forma geral é do tipo $y = a.x^2 + b.x + c$, com as constantes reais a, b, c com a sendo um real não nulo e a ordenada do vértice, em função de tais constantes,

(que é o que nos interessa),é dada por: $y_V = -\frac{4.a.c - b^2}{4.a} = c - \frac{b^2}{4.a}$. Então, para o nosso caso :

$$y_V = 16 - \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4.(-5)}{144}} = 16 + \frac{\frac{16}{9}}{\frac{20}{144}}$$

Os cálculos nos levam à resposta: $y_V = 28,8m$, que é a altura máxima atingida pelo objeto.
b) Para determinar a distância horizontal atingida será suficiente impor o contato com o solo

na função obtida.$y = 0 : -\frac{5}{144}.x^2 + \frac{4}{3}.x + 16 = 0.$

Há duas raízes para esta função: uma delas, negativa, que no caso não nos interessa, mas a resposta positiva encerra o problema: $x = 48m$, que é a distância procurada.
Mais uma vez fica claro que a interrelação entre as disciplinas pode e deve ser feita, de modo a

estimular o aluno a procurar tais interrelações.

3.1.9 Problema 08

.

(conteúdo relacionado às 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental (PCN)).
Deduza uma expressão que permita calcular o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.

Resolução por Análise Combinatória: uma diagonal é um segmento de reta com extremos em vértices do polígono, desde que tais vértices não sejam consecutivos (neste caso temos um *lado* do polígono). Como uma diagonal tem dois extremos e não importa como nos refiramos a eles (é indiferente dizer $diagonal AB$ ou $diagonal BA$), e como temos n vértices podemos organizá-los 2 a 2, em qualquer ordem descrita. É, portanto, um caso clássico de Combinações Simples com elementos distintos,como afirma LIMA et al [11].Entretanto, ao calcularmos as combinações dos n vértices agrupados de 2 em 2, estaremos também incluindo os *lados do polígono*, em número de n lados, que deverão ser excluídos das combinações calculadas de modo a restarem apenas as diagonais. Então, se d é o número de diagonais procurado, teremos:

$$d = C_n,^2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 3.n}{2}$$

Finalmente:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

, que é o número de diagonais procurado.

Resolução Geométrica: Tomando um vértice qualquer, a partir dele podemos construir (n-3) diagonais, em virtude de não podermos contá -lo e nem aos dois vértices conjugados (teríamos lados). Como temos n vértices, podemos executar tal operação n vezes, o que acarretaria num total de $n.(n-3)$ diagonais. Mas como cada diagonal se relaciona com dois vértices, o cálculo acima contaria o número de diagonais contado duas vezes e, portanto, deve ser dividido por 2, e então a expressão se reduz a

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

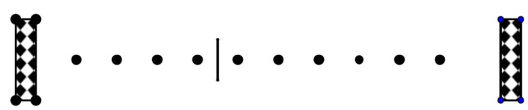
.

Comentário: seria extremamente interessante, ao chegar nessa expressão praticamente empírica,sugerir aos alunos um prova formal da mesma, o que levaria à aplicação do *Princípio da Indução Finita*.

3.1.10 Problema 09

conteúdo programático de 1ª e 2ª séries do Ensino Médio (PCN)

Determine quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação $x + y = 10$
Resolução por Análise Combinatória: de acordo com Hefez [12], uma forma elegante de resolução se apoia no fato de dividir uma quantidade de 10 unidades em duas partes. A figura abaixo mostra uma representação de objetos, cada um deles representando uma unidade e um sinal, representado por uma barra vertical separando as quantidades que, reunidas, perfazem 10 unidades.



No caso acima temos dois grupos de unidades separados pela barra, um deles com 4 objetos e o outro com seis deles, o que mostra que o par ordenado $(4, 6)$ é uma das soluções pedidas.Modificando-se a posição da barra obtém - se outras soluções, sempre com soma igual a 10 unidades. Como cada objeto tem o mesmo valor, trata - se então de permutar com repetições e generalizando - o como é demonstrado na obra acima, genericamente:
$x + y = r$, para n grupos separadores da quantidade r, conduzindo a:

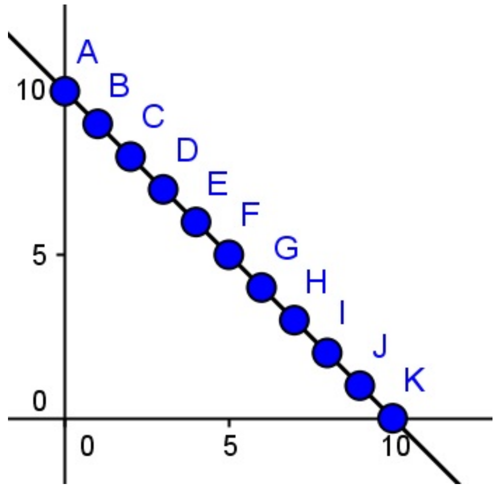
$$P^*_{r,n} = \frac{(r + n - 1)!}{r!.(n - 1)!}$$

.
No caso temos:

$$P^*_{10,2} = \frac{(10 + 2 - 1)!}{10!.1!} = \frac{11!}{10!} = 11$$

Há, então, 11 pares ordenados capazes de satisfazer a questão de soluções inteiras não negativas para a expressão $x + y + 10$.

Solução analítica: A equação $x + y = 10$ representa uma função afim bijetora de domínio e contradomínio reais com imagem gráfica abaixo:



Logo, como qualquer par ordenado que se tome nesse gráfico pertence à relação $x + y = 10$, é suficiente contar quantos inteiros não negativos existem entre 0 e 10 para saber qual o número de soluções disponíveis, que é exatamente a pergunta que foi feita.No caso há 11 pares ordenados que satisfazem ao enunciado.
Comentário: certamente surgirão numa sala com alunos medianos perguntas envolvendo mais de duas variáveis. Caberá ao docente mostrar que a solução combinatória presta -se a quaisquer quantidades de variáveis, e que a solução analítica poderia ser visualizada *apenas com 3 variáveis*, que podemos observar no espaço euclidiano tridimensional.

3.1.11 Problema 10

. Conteúdo relacionado à 3ª série do Ensino Médio, (PCN).
Determine as raízes sextuplas do número 64.
Solução convencional: todo número complexo admite n raízes "*enésimas*", de acordo com Lima,et al [11]. Os autores desenvolvem a chamada *Fórmula de Moivre* a partir da descrição do complexo cujas raízes se quer determinar, na sua forma *trigonométrica*:$z = \rho.(cos\theta + i.sin\theta)$ Moivre:$z_n = \sqrt[n]{\rho.(cos\theta + i.sin\theta)}$. Desenvolvendo:

$$z_n = \sqrt[n]{r}.(cos\frac{\theta + 2.k.\pi}{n} + i.\sin\frac{\theta + 2.k.\pi}{n}).$$

.

Os símbolos utilizados representam respectivamente:
θ: argumento do complexo z; $r = |z|$: módulo do complexo z;n: índice do radical; k é um inteiro não negativo que assume valores desde 0 até $(n-1)$.As raízes sextas de z serão nomeadas z_0, para $k = 0$, z_1, para $k = 1$,......., z_{n-1}, para $k = n - 1$.
Escrevendo z na forma algébrica: se $z = 64$, $z = 64 + 0.i.\rho = \sqrt[6]{64} = 2$; $cos\theta = 1$ e $\sin\theta = 0$

e $\theta = 0$.

Aplicando Moivre sucessivamente:

$$z_0 = \sqrt[6]{64}.(cos\frac{0+2.0.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.0.\pi}{6} = 2.cos(0) + i.sin(0) = 2$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64}.(cos\frac{0+2.1.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.1.\pi}{6} = 2.cos(\frac{\pi}{3}) + i.sin(\frac{\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i.\sqrt{3}$$

.

$$z_2 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0+2.2.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.2.\pi}{6}) = 2.(\cos\frac{2.\pi}{3} + i.\sin\frac{2.\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}$$

.

$$z_3 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0+2.3.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.3.\pi}{6}) = 2.(\cos\pi + i.\sin\pi) = 2.(-1+0) = -2$$

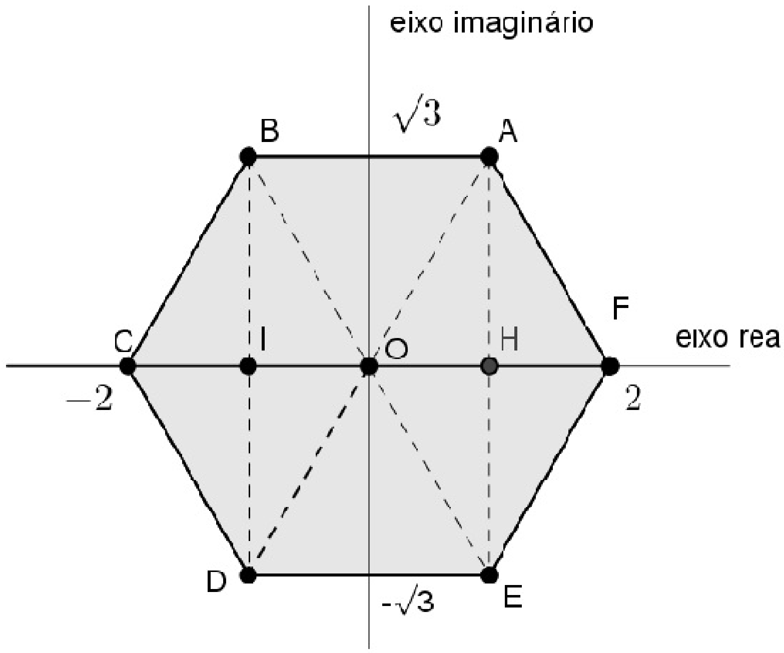
$$z_4 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0+2.4.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.4.\pi}{6}) = 2.(\cos\frac{4.\pi}{3} + i.\sin\frac{4.\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + i.-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - i.\sqrt{3}$$

$$z_5 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0+2.5.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.5.\pi}{6}) = 2.(\cos\frac{5.\pi}{3} + \sin\frac{5.\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + i.-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i.\sqrt{3}$$

Estas são as raízes sextas de 64 obtidas pelo uso tradicional da fórmula de Moivre.

Solução geométrica: como as raízes ênuplas de um número complexo têm todas o mesmo módulo, os afixos das mesmas serão pontos de uma circunferência com centro na origem no plano de Argand - Gauss e cujo raio é obviamente o módulo constante dessas raízes. Como os argumentos dessas raízes formam nesse caso uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{3}$, concluímos que os afixos são vértices de um polígono regular de n lados, no caso um hexágono regular.Basta então determinar uma das raízes e locar o polígono no plano de Argand Gauss, como irá sugerir a figura abaixo:

Se $z = 64$,então$\sqrt[6]{64} = 2$ e a primeira raiz tem afixo em $(2, 0)$. Como a razão da progressão é, no caso, $\frac{\pi}{3}$, os afixos ficam determinados como na figura abaixo. Então temos seis triângulos equiláteros congruentes de lado igual a 2. A altura de um triângulos equilátero de lado *l*, bem o sabemos, é dada por : $h = l.\frac{\sqrt{3}}{2}$. No caso temos: $h = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
A simetria dos triângulos relativamente aos eixos coordenados permite obter de imediato as



coordenadas dos afixos, a saber: $F = (2,0)$,$A = (1,\sqrt{3})$,$B = (-1,\sqrt{3})$, $C = (-2,0)$, $D = (-1,-\sqrt{3})$, $E = (1,-\sqrt{3})$. Estas são exatamente as raízes obtidas pelo primeiro método. Sempre que possível, ou quando os afixos tiverem locação privilegiada, acreditamos ser esta forma sintética a mais indicada pela presteza e visualização dos resultados.

Capítulo 4

Considerações Finais

4.1 O que esperar?

Temos, ao longo deste trabalho, tentado demonstrar a ligação existente entre os diversos ramos da Matemática, o que não é uma prática habitual no desenvolvimento do aprendizado da mesma, infelizmente. Não se pode ignorar de forma alguma que os capítulos dos diversos ramos desta Ciência terminam se integrando de modo indelével e ignorar tal fato remete ao atraso do desenvolvimento da mesma. Fica claro, quando examinamos a História da Matemática ao longo dos séculos passados, que o desenvolvimento de um capítulo reporta quase que imediatamente ao desenvolvimento de outro que, aparentemente, nada tem a ver com o primeiro objetivo pesquisado. Ledo engano. ROQUE [3], p.251 apresenta seis modelos desenvolvidos por Al Khwarizmi de modo retórico e citando o desenvolvimento dos mesmos, a saber:

quadrados iguais a raízes: $a.x^2 = b.x$

quadrados iguais a um número: $a.x^2 = c$

raízes iguais a um número: $b.x = c$

quadrados e raízes iguais a um número: $a.x^2 + b.x = c$

quadrados e um número iguais a raízes: $a.x^2 + c = b.x$

raízes e um número iguais a um quadrado: $b.x + c = a.x^2$

Para cada um dos casos apresentados Al-Khwarizmi apontava as regras de solução e apresentava as correspondentes justificativas geométricas, tendo as mesmas sido extraídas dos *Elementos* de Euclides.Vemos então que o considerado "*pai da Álgebra*"reforça sua argumentação com argumentos científicos anteriores àqueles por ele desenvolvidos.

Se acreditamos que o raciocínio lógico é a essência natural do progresso do conhecimento acadêmico da disciplina vemos que, mais do que possível, é determinante para a evolução da Ciência que mais e mais conceitos aparentemente dissociados se reportem à análise da estrutura indissolúvel do conteúdo. O norteamento proposto pelos PCN, embora já se tenham passado quase duas décadas desde sua divulgação, ainda está muito longe de ser concretizado e, mais preocupante, pouco ou nada se tem feito do ponto de vista prático, tanto na atualização dos currículos eventualmente propostos pelas escolas de licenciatura, quanto no que diz respeito à imprescindível reciclagem dos docentes responsáveis pela disseminação do conhecimento interrelacionado das disciplinas.

Quando FIORENTINI [16], p.42 comenta sobre o processo ensino - aprendizagem da matemática, há sua citação nominal: "*... Só mais recentemente tem sido dada maior atenção ao estudo dos racionais, da álgebra,da geometria, da estatística e das probabilidade...*". Levando em consideração que esta obra teve sua primeira publicação em 2006, passaram - se dez longos anos e muito pouco progresso tem sido observado na absorção de tais conteúdos pela grande maioria dos discentes, conforme corroboram os resultados obtidos pelos mesmos quando se submetem ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

As intermináveis reuniões pedagógicas cujo escopo é o desenvolvimento de sistemas de aprendizagem chegam a conclusões que, se bem fundamentadas do ponto de vista científico, carecem de praticidade quanto à aplicação das mesmas, o que faz com que não se tenha a menor certeza de como e quando tais conclusões serão implementadas com eficácia e na maioria das oportunidades sequer se conheça uma forma dinâmica de auferir o resultado prático obtido por tais eventuais modificações curriculares.Parece muito pouco animador o quadro que se nos apresenta num futuro muito próximo, a menos que realmente as pessoas que têm de fato o poder decisório atuem no sentido de acelerar a modernização dos currículos existentes em nossos dias.

4.2 A integração de fato entre a 8ª e 9ª séries e o Ensino Médio

.

A grande maioria dos currículos de matemática para a 8ª série do atual Ensino Fundamental premia a resolução de problemas utilizando sistemas de equações lineares do 1º grau. A nosso ver seria uma ótima oportunidade de inserir a ideia geral da Geometria Analítica sem grandes preocupações teóricas, uma vez que o mesmo currículo prevê a locação de pontos no plano cartesiano.Quando MENDES[4], p.35, analisa os métodos pedagógicos utilizados por Lagrange, comenta: "*...as questões respondidas e codificadas pelos matemáticos passaram a se tornar instrumentos ou ferramentas matemáticas que se configuram como estratégias e práticas cognitivas a serem utilizadas na busca de soluções para novas dúvidas....*

Não se trata, portanto, de criar a partir de simples opiniões ou experiências individuais, pedagogias inovadoras sem quaisquer suportes, mas sim beber da mesma fonte de onde tantos matemáticos de renome se serviram para disseminar seus conhecimentos. O aprendizado da matemática, a nosso ver, tem mais sinonímia com o conjunto dos números racionais que o dos números inteiros, isto é, há espaços entre capítulos que podem ser estreitados, permitindo saltos não tão amplos, embora concordemos que existem intervalos que aparentemente são irremovíveis. Cabe a nós, docentes, buscar o estreitamento de tais intervalos.

Ainda continuando a observação dos PCN e tomando a interdisciplinaridade mais uma vez, quando do ensino da disciplina CIÊNCIAS, observamos nos capítulos referentes à Química e à Física, extensos e férteis campos de aplicação da matemática, com apoio teórico já do conhecimento dos alunos, tais como razões, proporções, porcentagens, construção de segmentos proporcionais representando grandezas afins, apenas para citar alguns desses conhecimentos, mas que não são utilizados pelos professores específicos das disciplinas supracitadas unicamente em razão da falta de formação acadêmica direcionada para essa integração, o que nos remete a linhas acima, onde defendemos um olhar mais moderno e abrangente da atualização dos currículos definidos nos cursos de Licenciatura.

Chegamos aos Planos de Ensino da 9ª série do Ensino Fundamental e mais uma vez sentimo - nos tentados a comentar sobre a facilitação do entendimento do conteúdo através da Geometria, em particular a Geometria Analítica, seguindo o norte apontado por Fermat e Descartes quanto à visualização de uma relação de duas variáveis. O importantíssimo conceito de funções e por conseguinte a resolução de equações está praticamente oculto no conteúdo curricular mas sabemos da importância desse tópico para todo o restante do Ensino Médio.

TAO [8],p.2, esquematiza os tipos mais frequentes de problemas em três grupos, e mais à frente,p.80, 81, sugere a prova da unicidade do circuncentro de um triângulo, deixando claro que, via de regra, há mais de uma forma de se chegar à solução daquilo que foi pedido. Podemos ver isso se observarmos com algum apuro a situação em pauta e, em particular, tomando o currículo vigente e sugerido pelos PCN para a 9ª série, vemos uma série de situações em que é palpável a escolha de mais de um caminho para a resolução do problema apresentado. Concordamos inteiramente com Terence Tao, e a resolução encontrada pelo discente, se muito extensa, irá merecer uma análise da mesma pelo professor que, a seguir, poderá mostrar um outro caminho indicando qual processo minimiza a resolução, além de poder comentar com todos os presentes como um assunto pode se justapor a outro.

Quando do desenvolvimento da solução dos problemas apresentados no Cap. 3 tentamos por algumas vezes trazer à discussão assuntos costumeiramente presentes na 9ª série para o universo geométrico e esperamos sinceramente ter conseguido sucesso neste quesito.

4.3 O Ensino Médio e seu conteúdo

Chegamos agora à parte mais significativa deste trabalho: o aprendizado da Matemática durante o Ensino Médio e sua posterior aplicação nos meios acadêmicos das Ciências Exatas.

KASNER e NEWMAN [23], na introdução da magnífica obra Matemática e Imaginação, p.14, afirmam: "*A Matemática, em grande parte, permanece ainda velada. O que a maior parte dos livros de Matemática tenta fazer é discutí - la filosoficamente ou tornar claro o assunto que foi aprendido mas já está esquecido*". É exatamente contra esse desperdício de saber e tempo que pretendemos nortear nosso trabalho, além da concatenação de capítulos já anteriormente comentada. Acreditamos piamente que, em se tratando de Matemática, o que é realmente assimilado permanece em estado latente na memória de quem a aprendeu. Tal crença não é desprovida de fundamento científico. Apoiamo - nos no trabalho de Jeremy Kilpatrick para tal afirmação.

4.3.1 Primeira série do Ensino Médio

.

Obedecendo aos PCN os conteúdos ministrados no Ensino Médio, em sua grande maioria, tratam dos conceitos de funções, sequências, logaritmos e, de uma forma mais contemporânea, em virtude do ENEM, tratam também de matemática financeira básica.

Pretendemos mostrar, com uma sequência de exercícios constituintes do Cap.3, que se pode estabelecer uma conexão razoável entre as formas mais comuns na resolução de questões envolvendo o estudo de funções elementares (e que, em nossa opinião devem ser mantidas), e aquelas que se apoiam em teorias desenvolvidas anteriormente, destacando, sempre que possível, a geometria, analítica ou sintética, como apoio e via alternativa para tais resoluções. Muitas vezes, entretanto, a busca por grandezas proporcionais auxilia decisivamente e permite a clara visualização da solução aparentemente dificílima para um problema apresentado. Um exemplo brilhante desse fato é apresentado com maestria por LIMA et al[7], p. 82, 83, problema nº 5.2, em que é utilizado o conceito de proporção e também o de densidade de um corpo para resolver um problema sobre áreas.

Correndo o risco de nos tornarmos repetitivos, destacamos que os conteúdos ministrados nas últimas séries do Ensino Fundamental e a introdução do conceito de função, reservado geralmente para o início do Ensino Médio têm tudo para serem desenvolvidos ao mesmo tempo. Sem grandes aprofundamentos teóricos (o que, a nosso ver, é desnecessário para o momento pedagógico em pauta), a introdução da Geometria Analítica no currículo de Matemática da 1ª série do ensino Médio, além de se adaptar perfeitamente ao conteúdo previsto pelos PCN, irá atuar decisivamente como catalizador do aprendizado de outras tantas disciplinas, sem que grande esforço tenha de ser feito, tanto pelos docentes quanto pelos discentes.

O pesquisador KILPATRICK [17] comenta em sua obra que uma das razões pelas quais ocorre o divórcio entre a necessidade do discente e o currículo formador do licenciado é a total falta de uma formação que vise sistematicamente oferecer ferramentas operacionais aos licenciandos durante todo o curso de graduação. Kilpatrick comenta ainda que infelizmente essa é uma *tendência mundial* observada na formação de professores. Alongamo - nos ainda asseverando que certamente muitos talentos ficam pelo caminho em razão das dificuldades que via de regra um curso de graduação em Matemática *não remove do caminho do discente* apenas por lhe faltar a estrutura curricular compatível com a modernização do curso.

No Cap.3, dedicamo - nos a expor alguns exemplos de como podemos tratar assuntos de várias etapas do aprendizado com formas distintas de solução. Em particular, com foco no currículo habitual (PCN) da 1ª série do Ensino Médio, concatenando -o com quesitos abordados nas 8ª e 9ª séries do Ensino Fundamental. Tentamos mostrar tais propostas nos exercícios 01 (p. 13, 14 , 15), 02 (p. 15, 16), 03 (p.16,17), 04 (p. 18,19),06 (p.23, 24) e 07 (p. 24, 25, 26 e 27). A interligação pretendida entre as disciplinas anteriormente abordadas tenta funcionar como uma ponte geradora de continuidade de conhecimentos entre as mesmas e as novidades com as quais o aluno passa a conviver na 1ª série do Ensino Médio. Sob esta ótica sugere - se também a interdisciplinaridade, a nosso ver fundamental para o sucesso da ideia defendida desde o início deste trabalho. A submissão deste propósito deve certamente ser submetida ao crivo daqueles que realmente têm o poder decisório na elaboração curricular e que certamente dispõem dos requisitos pedagógicos inerentes a suas funções.

4.3.2 Segunda série do Ensino Médio

.

Nos últimos tempos, especialmente no último quinquênio, observa - se nos grandes vestibulares nacionais, em particular no ENEM, uma significativa quantidade de questões cujo conteúdo diz respeito, pelos PCN, à 2ª série do Ensino Médio. Não podemos fugir a uma realidade incontestável, que é a de que os estabelecimentos de ensino têm como alvo preparar alunos para seu ingresso em instituições de Ensino Superior de bom nível.
Embora não seja o desejável, (o ideal seria o aprendizado das disciplinas por elas mesmas, permitindo a absorção dos conteúdos para uma posterior aplicação, uma real utopia). É o que nós, professores, temos de enfrentar, e nos cabe então otimizar tal procedimento tanto quanto possível. Questões que envolvem raciocínio lógico têm surgido em maior número e a introdução recente de quesitos envolvendo Estatística Básica mostra a modernização apresentada na formulação dos problemas. Da mesma forma, problemas que envolvem contagem surgem em bom número e ressaltamos que este tipo de assunto historicamente é visto pelos discentes com grande reserva, uma vez que os cálculos envolvidos são em geral muito simples, mas o raciocínio que leva ao acerto está longe de sê - lo. Quando se pode associar alguma forma auxiliar de entendimento o sucesso ocorre em maior proporção. Um claro exemplo da dificuldade que todos têm com esse assunto é detalhado por KASNER et al,[23], p. 236, tanto que nos per-

mitimos reproduzir o texto **ipsis literis**: "... *D'Alembert, em seu artigo sobre a probabilidade na famosa* ***Encyclopédie****, revelou que ele não tinha entendido o teorema de multiplicar probabilidades independentes. Duvidou que a probabilidade (ao se jogar uma moeda duas vezes, qual a probabilidade de se obter pelo menos uma cara?) ultimamente mencionada fosse* $\frac{3}{4}$*, raciocinando que, se uma cara aparecesse na primeira tentativa, o jogo terminara e que não haveria necessidade de uma segunda. Enumerou então três casos possíveis: cara, coroa - cara e coroa - coroa, chegando então ao resultado igual a* $\frac{2}{3}$*. O que ele deixou de considerar foi que a primeira alternativa era, em si mesma, tão possível de obter quanto uma coroa* ". Fica claro que se um matemático da estirpe de D'Alembert, teve dificuldades em assimilar o conceito de probabilidades, é absolutamente natural que alunos em formação também as tenham.

No Cap.3, exercício 08,(p.27), vemos uma situação que está presente nos últimos anos revestida por enunciados diferentes mas com a mesma finalidade. Nesse caso pode - se apresentar uma ideia geométrica que irá apoiar a primeira solução dando a ela uma forma visual de entendimento que completa a primeira.

Retomando o Cap.3, problema 09, (p. 28, 29), acreditamos mostrar casos em que até mesmo uma ideia geométrica, (no caso, analítica), pode acrescentar subsídios razoáveis de forma a concatenar raciocínios efetuados com apoio de teorias distintas mas que podem conduzir a um melhor entendimento no árido aprendizado da teoria das contagens. Há vários autores que modificam o pensamento inicial das pessoas quanto a isso: LIMA, et al, [] mostram situações em que as probabilidades são calculadas utilizando claríssimo raciocínio em questões que, na aparência, terão de ser resolvidas por intermédio de reflexões extremamente complexas, como no caso de se calcular a probabilidade de duas pessoas numa sala de aula fazerem aniversário no mesmo dia, embora neste caso não tenhamos observado quaisquer modos de resolução que aquele apresentado pelos autores, embora tenhamos tentado.

4.3.3 Terceira série do Ensino Médio

.

Na elaboração deste trabalho escolhemos, não de forma aleatória, mas procurando exemplos do cotidiano escolar, vários assuntos do conteúdo programático sugerido pelos PCN, sem preocupação com quantidade ou grau de dificuldade dos exercícios apresentados, já que este não é um texto didático. Questionamentos feitos pelos leitores certamente serão cabíveis, principalmente quanto à ordem ou objeto tratado, se tal assunto é ou não da série apresentada. Asseveramos que na maioria dos estabelecimentos de ensino a divisão curricular segue nossa proposta.

O núcleo curricular da 3ª série do Ensino Médio é, em geral, o mais diversificado deles e, conforme palavras acima, tenta promover também a revisão dos assuntos das séries iniciais, em função dos exames a que serão submetidos os alunos. Já comentamos que tal postura é inexorável e não vamos nos deter aqui nesta discussão. Queremos com isso dizer que, além das disciplinas constituintes do currículo normal, (em geral Polinômios, Equações Algébricas, Geometria Analítica e Números Complexos), faz parte do dia a dia docente a aplicação de exercícios cujo conteúdo se reporta às séries anteriores e por essa razão acreditamos que os exercícios apresentados no Cap. 3 frequentam habitualmente as aulas do professor da 3ª série do Ensino Médio.

Reservamos para exemplo desta série um exercício que só a ela pertence, problema que envolve números complexos, o problema 10, (p. 29, 30, 31), com solução normal complexa e com forte apelo geométrico, a nosso ver indispensável para que o discente veja uma clara aplicação desta sofisticada teoria.

Expor mais exercícios nesta abordagem certamente seria possível, mas não acreditamos que a quantidade deles enriqueceria o escopo principal deste trabalho, uma vez que não se trata de desenvolvimento teórico, este sim uma obra a ser escrita por pessoas de muito maior competência que a nossa. O que pretendemos o tempo todo foi promover uma integração entre capítulos de nossa maravilhosa Matemática e também entre suas aplicações imediatas em outras disciplinas, como o fizemos no problema 07, Cap. 3, (p.24, 25, 26 27), objetivando a interdisciplinaridade, nosso desejo muito antigo.

Capítulo 5

Conclusões finais

"Ideb: o ensino médio, que já era ruim, conseguiu piorar"- *Mapa do ensino divulgado pelo MEC é um sinal inequívoco de que é preciso repensar o modelo brasileiro.*

"Nos países que primam pela excelência, os anos finais do ciclo escolar consolidam o conhecimento acumulado ao longo do trajeto e mais:preparam os estudantes para se tornar gente pensante, produtiva, inovadora. Oferecer um bom ensino médio é, portanto,crucial para pavimentar o caminho do jovem, seja para a vida acadêmica ou qualquer ofício que lhe dá bom rumo na vida.Essa é a história contada do ponto de vista do ideal.A realidade no Brasil é muito mais árida, como mostra o novo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) divulgado nesta quinta feira. Um dado apenas já dá o tom da catástrofe: a matemática no ensino médio obteve o pior resultado desde 2005.Não avançou um décimo. Ao contrário, retrocedeu. Na última avaliação, referente a 2013, apenas 9 % dos alunos apresentavam aprendizado considerado adequado na disciplina, número que junta as escolas públicas às privadas. Segundo os números de hoje, o porcentual é menor, entre 8% e 9%. Em 1999 eram mais: 12% "...

Ainda no mesmo artigo, palavras do diretor do Instituto Ayrton Senna, Mozart Neves Ramos:*"O Brasil precisa fazer uma mudança radical aí, e já. "*. E completa Priscila Cruz, diretora da ONG Todos pela Educação: *"O retrocesso em matemática significa uma queda no preparo dos alunos para o século XXI,em que as matérias de exatas são fundamentais para inserir o estudante neste mundo."*

O texto acima foi retirado, *ipsis literis*,do sítio eletrônico "veja.com", de 08 de setembro de 2016, assinado por Cecília Ritto, e vem ao encontro daquilo que sempre pretendemos na elaboração deste trabalho de conclusão de curso.

Nosso firme propósito, esperamos tê - lo atingido, é o da interligação entre assuntos e também a facilitação do uso da interdisciplinaridade. Com certeza isso somente será possível com as devidas alterações curriculares nos cursos de licenciatura na área de Matemática.
A modernização do ensino não pode ser totalmente atingida pela aplicação dos avanços tecnológicos. Há que se preparar os licenciandos de modo a que não sejam jogados em sala de aula sem o providencial apoio didático - pedagógico, que, para ser absorvido pelos mesmos, deve fazer parte da grade curricular do curso escolhido.

Existe, na totalidade dos cursos de Licenciatura Plena em Matemática, uma disciplina que, nominada por vários títulos, significa "Prática de Ensino ". O objeto de tal disciplina, é o de promover um estágio do graduando de modo a minimizar os efeitos negativos que a inexperiência certamente apresenta.

O que se vê,infelizmente,na maioria das vezes,é a ausência praticamente total de aulas expositivas para alunos reais, o que de per si torna inócua a disciplina, que poderia ser da mais absoluta utilidade tato para os docentes quanto para os discentes, uma vez que o núcleo de uma escola indubitavelmente é formado por alunos e professores. Para alunos do Ensino Fundamental e também para aqueles do Ensino Médio acreditamos piamente que o convívio de ambos com os graduandos seria de enorme valia em virtude de estes últimos poderem observar de um ângulo privilegiado quais as reais carências dos primeiros, a partir do momento em que tal contato se estabelecesse.

Vamos mais longe: no modelo proposto a disciplina "Prática de Ensino "tornar-se-ia contínua a partir de um período a ser definido pelos órgãos competentes combinando a estrutura curricular de cada Instituição de Ensino com a apresentação dos conteúdos compatíveis com as séries dos ensinos Fundamental e Médio à medida que os conteúdos curriculares fossem sendo cumpridos, nos períodos iniciais.

Modelo similar poderia também ser incrementado para os alunos dos Cursos Superiores de Ciências Exatas a partir do momento em que os graduandos tivessem o domínio das disciplinas correlatas,sendo que neste nível os graduandos atuariam como verdadeiros monitores das disciplinas,subordinando-se aos conteúdos exigidos pelo titular da mesma. Estamos certos de que os Conselhos Pedagógicos das Instituições de Ensino saberiam organizar de forma adequada as grades curriculares de modo a premiar docentes e discentes, graduados e graduandos com prática, experiência e conteúdo indispensáveis à evolução do aprendizado, formação profissional mais adequada e qualidade de ensino finalmente maximizada.

Faz - se a nosso ver imperativo o seguinte raciocínio: do que foi dito até agora pode - se observar que a formação na área de Licenciatura em Matemática certamente irá se tornar mais árdua, complexa e exigente, o que por certo irá obrigar a busca de um curso com esse nível de aprimoramento por pessoas com talentos específicos para o Magistério e com certeza merecedoras de condições profissionais muito mais valorizadas que as que atualmente se oferece para os ingressantes na área.

Como a nosso ver será muito difícil incrementar o ensino de Matemática nos parâmetros salariais atuais e mesmo no desenvolvimento profissional sob a forma de atualização de conhecimento ou reciclagem periódica, é indispensável que se pugne por melhores condições iniciais tanto do ponto de vista da remuneração quanto do ponto de vista do aprimoramento profissional. Sem tais quesitos os cursos de Licenciatura em Matemática continuarão a apresentar uma porcentagem absurdamente grande de postulantes sem o talento ou capacidade que o mesmo exige e o problema continuará a se arrastar por anos e anos.

Deixemos claro que esta é uma análise estritamente pessoal. Sabemos que os responsáveis pelo ensino em geral, e da Matemática em particular, têm total competência para analisar tais aspectos e gostaríamos que estas palavras fossem vistas apenas como uma breve e modesta contribuição cujo único escopo é a melhoria do rendimento escolar em todos os níveis de aprendizado de nossa ciência mais amada: a Matemática.

Apêndice A

Resoluções habituais de alguns problemas apresentados

Problema 1.p.13(Adaptado de EDWALDO BIANCHINI, Matemática, Ed. Moderna Vol.7, 2011). Resolva, no conjunto dos números reais, o sistema de equações :
Resolva, no conjunto dos números reais, o sistema de equações :

$$x + y = 12$$

$$6x - 4y = 6$$

Procedimento habitual: escalonamento do sistema. Por exemplo,multiplicando primeira equação por (- 6) e somando -a à segunda, retemos um sistema equivalente ao original da forma

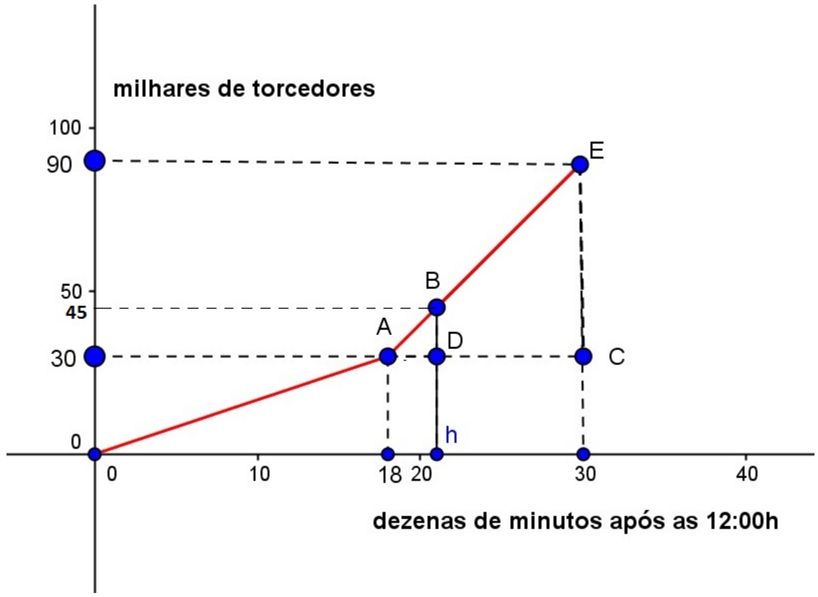
$$-6x - 18y = -72$$

$$6x - 4y = 6$$

Escalonando em x obtemos $-22y = -66$ e $y = 3$. Fazendo a substituição em qualquer uma das equações descritas, por exemplo a primeira, teremos :
$x + 3.3 = 12$ obtendo $x = 3$

O par ordenado (3 ; 3) é a solução do sistema.

Problema 2. conteúdo relacionado à 1ª série do Ensino Médio (PCN).
(UERJ 2010 adaptado). Em uma partida de futebol, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90000 torcedores.Três portões foram abertos às 12:00h e até às 15:00h entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio estão contidos no gráfico abaixo:



.

Quando o número de torcedores atingiu 45000, qual era o horário?

Resolução convencional. (Adaptado de GELSON IEZZI et al; Matemática - Ciência e aplicações, Atual editora, vol. I,2006).

A pergunta se refere à segunda parte do gráfico. Como o mesmo nesse trecho é retilíneo, temos uma função afim do tipo $y = a.x + b$, onde **a** e **b** são os parâmetros a determinar. Os pontos $(15, 30)e(17, 90)$ pertencem ao gráfico e então $n(15) = 30en(17) = 90$. Então, fazendo as respectivas substituições obteremos o sistema: $15.a + b = 30$ e $17.a + b = 90$. Substituindo **b** e explicitando **a** obtemos $a = 30$ e $b = -42$. Temos então a sentença que define a função: $n(h) = 30h - 42$. Então se $n(h) = 45$, $45 = 30.h - 42$ e $h = 15$, 5 horas ou 15 horas e 30 minutos.

Comentário: esta forma de resolução é adotada na grande maioria dos livros didáticos adotados nas escolas e por essa razão é a preferida pelos discentes do 1º ano do ensino Médio.

Problema 3 Determine a soma dos 100 primeiros termos da progressão: (-2, 3, 8, ...).

Procedimento habitual:(adaptado de GIOVANNI & BONJORNO,Matemática Completa, vol I,Editora FTD, 2005). Aplicação da fórmula da soma dos **n** primeiros termos de uma P.A.,deduzida de várias formas por vários autores, entre eles Lima [6], et al:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Primeiramente obtemos o centésimo termo pela aplicação do termo geral de uma P.A.,deduzida pelo mesmo autor por recorrência:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

No caso temos:

$$a_{100} = a_1 + 99.r = -2 + 99.5 = 493.$$

A partir daí aplicamos a fórmula da soma acima e temos:

$$S_{100} = \frac{(-2 + 493)100}{2}$$

Chegamos então à resposta procurada: $S_{100} = 24450$

Problema 4. FGV 2009 ADAPTADO. Um comerciante precisa adquirir um estoque com urgência mas está momentaneamente descapitalizado.Procura então uma instituição financeira que lhe oferece a quantia necessária,R$ 20000,00 , e lhe informa que a taxa costumeira é de 69 por cento ao ano e que ele pode escolher qual sistema de capitalização pretende, simples ou composta, para um período de, no máximo, um ano comercial de 360 dias.O comerciante sabe que em seis meses irá receber com certeza uma herança no valor de R$100 000,00 e escolheu o sistema de juros compostos para elaborar o contrato. Responda, justificando, se a escolha foi acertada.

Procedimento habitual: utilização das expressões de capitalização simples e composta para que se faça a devida comparação.

a) Sistema de capitalização simples:usando a dedução de MORGADO, et al [6], a expressão que calcula o montante para juros simples é dada por:

$$M = C(1 + i.n)$$

sendo M o montante da dívida, C o capital tomado, i a taxa de juros e n o número de períodos, ou tempo de capitalização. No caso, $C = 20000$, $i = 0,69$, e $n = 0,5$, (meio ano,meio período de capitalização). Cálculo:

$$M = C(1 + i.n) = 20.000(1 + 0,5.0,69)$$

Isto significa que, no sistema simples de capitalização,o montante da dívida será igual a

$$M = R\$26.900,00$$

.

b) Sistema de Capitalização composta: ainda recorrendo a Morgado, a expressão desenvolvida é:

$$M = C.(1 + i)^n,$$

com o mesmo significado para os parâmetros. Então o cálculo será:

$$M = C.(1+i)^n$$

No caso:

$$M = 20.000.(1+0,69)^{0,5} = 20.000\sqrt{1,69},$$

o que nos leva a

$$M = R\$26.000,00$$

.

Conclusão: a escolha foi acertada porque o montante da dívida contraída por capitalização composta foi menor.

Problema 5. O triângulo ABC da figura é retângulo em B e seus catetos medem respectivamente $AB = 6cm$ E $BC = 12cm$. O ponto D é médio do cateto BC e o triângulo DCE é equilátero. Sabemos ainda que os segmentos FD e BC são perpendiculares e que os segmentos GH e BC são paralelos. Determine a área do triângulo DEF em cm^2.

Resolução inspirada em GARBI,G.G (C.Q.D. livraria da física)

Como, pelas informações do enunciado, temos ΔFHG e ΔABC semelhantes, porque os ângulos $F\widehat{H}G$ e $A\widehat{B}C$ são congruentes, bem como os ângulos $F\widehat{G}H$ e $A\widehat{C}B$.

Então, seus lados correspondentes são proporcionais e podemos escrever:

$$\frac{FH}{HG} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

e então temos : (1):

$$FH = \frac{1}{2} \cdot HG$$

Por outro lado, como os segmentos GH e BC são paralelos, e o ΔDCE é equilátero, então

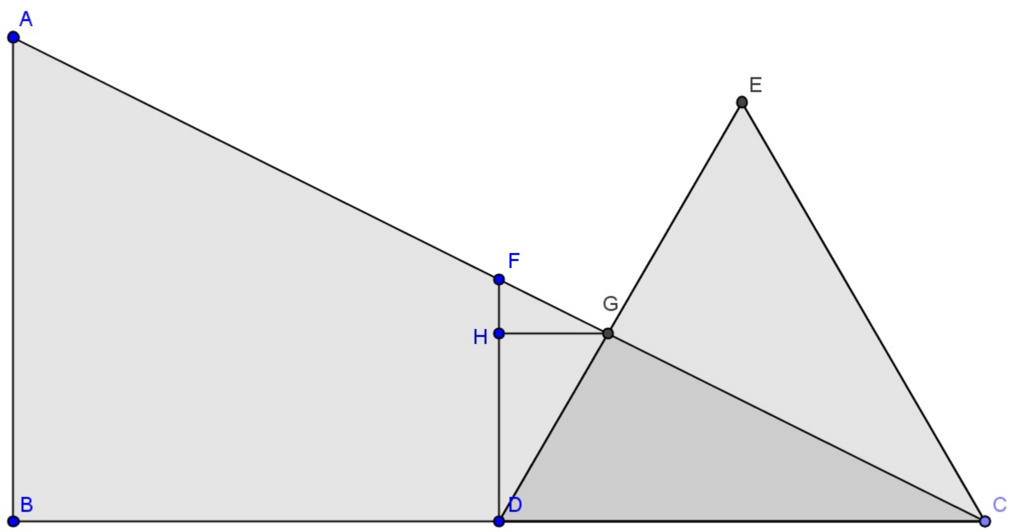
$$F\widehat{G}D = G\widehat{D}C = 60^{\circ}$$

e

$$tg60^{\circ} = \frac{HD}{HG}$$

temos a relação (2):

$$HD = GH \cdot \sqrt{3}$$



Resolução utilizando Geometria Sintética e Trigonometria.

Ainda, da semelhança dos triângulos ABC e FDC temos:

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{CD} = 2$$

relação (3). Como $FH + HD = FD$ fazendo as devidas substituições nas relações (1),(2) e (3) obteremos:

$$\frac{1}{2}.HG + GH.\sqrt{3} = 3$$

Explicitando HG:

$$HG = \frac{6}{1 + 2 \cdot \sqrt{3}}$$

Ocorre que HG é a altura doΔGDF relativa ao lado FD. Então:

$$S_{GDF} = \frac{1}{2}.DF.HG = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{1+2.\sqrt{3}} = \frac{9}{1+2\cdot\sqrt{3}} cm^2$$

Problema 6. Dois quintos de meu salário são reservados para o aluguel e a metade do que sobra para a alimentação. Descontado o dinheiro do aluguel e da alimentação, coloco um terço do que sobra na poupança, restando então R $ 1200,00. Qual é o meu salário?
Resolução habitual algébrica, encontrada em várias obras, entre elas IEZZI,et al, Fundamentos da Matemática elementar, vol.1. Seja x o valor procurado. Então:

1ª operação: $x - \frac{2}{5}.x = \frac{3}{5}$. (sobra após o aluguel).

2ª operação: $\frac{3}{5}.x - \frac{1}{2}.x = \frac{6x-3x}{10} = \frac{3x}{10}$, (sobra após aluguel e alimentação).

3ª operação: $\frac{3x}{10} - \frac{1}{3}.\frac{3x}{10} = \frac{3x-x}{10} = \frac{2x}{10}$, (após poupança).

Então temos: $\frac{2x}{10} = 1200$ e portanto o valor do salário será: x= R$ 6000,00

Problema 7. Um objeto é lançado do topo de um edifício cuja altura é igual a $16m$ com velocidade de módulo $20m/s$ e formando com a horizontal um ânguloθ tal que $\sin\theta$= 0,8 e $\cos\theta$ = 0,6 . Despreze efeitos resistivos, adote $g = 10m/s^2$ e responda:
a) qual a altura máxima relativa ao solo atingida pelo objeto?
b) a que distância horizontal da base do prédio o objeto toca o solo?

Resolução cinemática: (inspirada em BEER, F.P.; JOHNSTON JR, E.R.(Mecânica Vetorial para engenheiros)

A resolução deste tipo de problema para a primeira série do Ensino Médio está apoiada no princípio da superposição de efeitos de Isaac Newton, como é conhecido de todos. Uma vez que a única aceleração presente é a gravitacional, aqui suposta constante e vertical, o movimento é subdividido em duas projeções que irão se superpor de forma concomitante para responder às questões propostas:
a) a projeção horizontal da posição real do movimento do objeto, que irá seguir as expressões do movimento retilíneo uniforme, em virtude da ausência de aceleração escalar. A abscissa da projeção será representada por uma função afim e uma escolha conveniente dos eixos de projeção permite assumir o termo independente como **zero**, conforme se verá na figura que irá acompanhar a segunda resolução. Teremos então para a posição da projeção horizontal da projeção a função

$$x = V_{0x}.t$$

, onde $V_{0x} = V_0.\cos\theta = (20.0,6)m/s = 12m/s$ e t representa os instantes de tempo a partir do lançamento. Temos então a função das projeções horizontais do objeto : $x = 12.t$.
Já a projeção vertical tem os valores alterados pela ação gravitacional, sendo então tratada como

um movimento uniformemente variado vertical e terá a forma de uma função quadrática que, adaptada à simbologia da Cinemática,adquire o formato

$$y = -\frac{g}{2}.t^2 + V_{0y}.t + y_0$$

. Teremos ainda a correspondente função das velocidades escalares, que obedecerá ao modelo cinemático $V_y = V_{0y} - g.t$.
Suas constantes terão então os seguintes significados: g = módulo da aceleração gravitacional ,V_{0y} = componente inicial da velocidade escalar vertical do movimento e y_0 = posição inicial vertical da projeção do objeto.

No caso, obtemos: $V_{0y} = V_0.\sin\theta = (20.0, 8)m/s = 16m/s$ e ainda $g = -10m/s^2$ e $y_0 = 16m$.

A forma da função que descreve a projeção vertical da posição real do corpo será então dada por:

$$y = -5.t^2 + 16.t + 16,$$

medida em metros, e

$$V_y = -10.t + 16,$$

medida em m/s. O movimento é então estudado com a aplicação conjunta de ambas as equações.
a) A altura máxima é atingida no momento em que o objeto deixa de subir, o que nos impõe $V_y = 0$. Substituindo na função das velocidades da projeção vertical da posição real do objeto teremos: $0 = 16 - 10.t$ e então temos $t = 1,6s$. Como neste instante ocorre a maior altura, para determiná -la basta substituir tal valor na função $y = y(t)$. Então: $y = -5.(1,6)^2 + 16.1,6 + 16$. Explicitando y : $y = 28,8m$, que é a altura máxima atingida.
b) Para obter a distância horizontal solicitada, é necessário obter o tempo de voo, o que será feito igualando a função $y = y(t)$ a zero, (retorno ao solo). Segue então que:

$$0 = -t^2 + 16.t + 16$$

Resolvendo para y temos $t = 4s$, uma vez que o enunciado não permite respostas negativas para os instantes de tempo neste caso. Devemos agora aplicar o valor encontrado na função $x = x(t) : x = 12(m/s).4(s)$,e finalmente $x = 48m$, que é a resposta solicitada.

Problema 8. Determine o número de diagonais de um polígono de ***n*** lados.
Solução obtida de CARVALHO et al [12].

. Como uma diagonal tem dois extremos e não importa como nos refiramos a eles (é indiferente dizer $diagonal AB$ ou $diagonal BA$), e como temos n vértices podemos organizá-los 2 a 2, em qualquer ordem descrita. É, portanto, um caso clássico de Combinações Simples com elementos distintos,como afirma ELON et al [].Entretanto, ao calcularmos as combinações dos n vértices agrupados de 2 em 2, estaremos também incluindo os *lados do polígono*, em número de n lados, que deverão ser excluídos das combinações calculadas de modo a restarem apenas as diagonais. Então, se d é o número de diagonais procurado, teremos:

$$d = C_{n,}{}^{2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 3.n}{2}$$

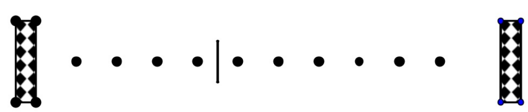
Finalmente:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

, que é o número de diagonais procurado.

Problema 9. Determine quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação $x + y = 10$

Resolução por Análise Combinatória: de acordo com Hefez [], uma forma elegante de resolução se apoia no fato de dividir uma quantidade de 10 unidades em duas partes. A figura abaixo mostra uma representação de objetos, cada um deles representando uma unidade e um sinal, representado por uma barra vertical separando as quantidades que, reunidas, perfazem 10 unidades.



No caso acima temos dois grupos de unidades separados pela barra, um deles com 4 objetos e o outro com seis deles, o que mostra que o par ordenado $(4, 6)$ é uma das soluções pedidas. Modificando-se a posição da barra obtém - se outras soluções, sempre com soma igual a 10 unidades. Como cada objeto tem o mesmo valor, trata - se então de permutar com repetições e generalizando - o como é demonstrado na obra acima, genericamente:
$x + y = r$, para n grupos separadores da quantidade r, conduzindo a:

$$P^{*}_{r,n} = \frac{(r+n-1)!}{r!.(n-1)!}$$

.

No caso temos:

$$P^*_{10,2} = \frac{(10+2-1)!}{10!.1!} = \frac{11!}{10!} = 11$$

Há, então, 11 pares ordenados capazes de satisfazer a questão de soluções inteiras não negativas para a expressão $x + y + 10$.

Problema 10.Determine as raízes sextuplas do número 64.

Solução convencional: todo número complexo admite n raízes "*enésimas*", de acordo com Lima,et al []. Os autores desenvolvem a chamada *Fórmula de Moivre* a partir da descrição do complexo cujas raízes se quer determinar, na sua forma *trigonométrica*:$z = \rho.(cos\theta + i.sin\theta)$ Moivre:$z_n = \sqrt[n]{\rho.(cos\theta + i.sin\theta)}$. Desenvolvendo:

$$z_n = \sqrt[n]{r}.(cos\frac{\theta + 2.k.\pi}{n} + i.\sin\frac{\theta + 2.k.\pi}{n}).$$

.

Os símbolos utilizados representam respectivamente:

θ: argumento do complexo z; $r = |z|$: módulo do complexo z;n: índice do radical; k é um inteiro não negativo que assume valores desde 0 até $(n-1)$.As raízes sextas de z serão nomeadas z_0, para $k = 0$, z_1, para $k = 1$,......., z_{n-1}, para $k = n - 1$.

Escrevendo z na forma algébrica: se $z = 64$, $z = 64 + 0.i.\rho = \sqrt[6]{64} = 2$; $cos\theta = 1$ e $\sin\theta = 0$ e $\theta = 0$.

Aplicando Moivre sucessivamente:

$$z_0 = \sqrt[6]{64}.(cos\frac{0 + 2.0.\pi}{6} + i.\sin\frac{0 + 2.0.\pi}{6} = 2.cos(0) + i.sin(0) = 2$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64}.(cos\frac{0 + 2.1.\pi}{6} + i.\sin\frac{0 + 2.1.\pi}{6} = 2.cos(\frac{\pi}{3}) + i.sin(\frac{\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i.\sqrt{3}$$

.

$$z_2 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0 + 2.2.\pi}{6} + i.\sin\frac{0 + 2.2.\pi}{6}) = 2.(\cos\frac{2.\pi}{3} + i.\sin\frac{2.\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}$$

.

$$z_3 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0 + 2.3.\pi}{6} + i.\sin\frac{0 + 2.3.\pi}{6}) = 2.(\cos\pi + i.\sin\pi) = 2.(-1 + 0) = -2$$

$$z_4 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0 + 2.4.\pi}{6} + i.\sin\frac{0 + 2.4.\pi}{6}) = 2.(\cos\frac{4.\pi}{3} + i.\sin\frac{4.\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + i. - \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - i.\sqrt{3}$$

$$z_5 = \sqrt[6]{64}.(\cos\frac{0+2.5.\pi}{6} + i.\sin\frac{0+2.5.\pi}{6}) = 2.(\cos\frac{5.\pi}{3} + \sin\frac{5.\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + i. - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i.\sqrt{3}$$

Estas são as raízes sextas de 64 obtidas pelo uso tradicional da fórmula de Moivre.

Referências Bibliográficas

[1] ROONEY, ANNE; *A História da Matemática*:*Desde a exploração das pirâmides até a exploração do infinito. M Books do Brasil Editora Ltda,São Paulo, 2012.*

[2] FIORENTINI, DARIO; LORENZATO, SERGIO:*Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos,3^a edição revisada*.Ed.Autores Associados Ltda, Campinas,2009.

[3] MIGUEL, ANTONIO; BRITO, ARLETE DE JESUS; CARVALHO, DIONE LUCCHESI DE; MENDES, IRAN ABREU. *História da Matemática em Atividade Didáticas,2^a edição revisada* :Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2009.

[4] MENDES, IRAN ABREU; *Números: o simbólico e o racional na história*:Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2006.

[5] LAGRANGE, JOSEPH, LOUIS; (TRADUÇÃO, COMENTÁRIOS E NOTAS: MENDES, IRAN ABREU; OLIVEIRA, JEFFERSON LEANDRO R DE) *Lições sobre matemáticas elementares, coleção História da Matemática para Professores* , Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2013.

[6] POSAMENTIER, ALFRED S.; KRULIK, STEPHEN; TRADUÇÃO E REVISÃO TÉCNICA: COSTA, ROBERTO CATALDO; SMOLE, KATIA STOCCO *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática* : 1. Educação. 2. Método de Ensino. AMGH Editora,copyright The Mc Graw-Hill Companies,Inc.,New York, 2012.

[7] ROQUE, TATIANA; *História da Matemática - uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* : Jorge Zahar Editor Ltda., Rio de Janeiro, 2ª reimpressão, 2014.

[8] D AMBROSIO, UBIRATAN *Educação Matemática - da teoria à prática*.Coleção *Perspectivas em Educação Matemática*. Editora Papirus,1996, Campinas SP.

[9] D AMBROSIO, UBIRATAN *Etnomatemática- elo entre as tradições e a modernidade*.Coleção *Tendências em Educação Matemática*. Editora Autêntica, 2007, Belo Horizonte,MG

[10] DELGADO,JORGE; FRENSEL, KATIA; CRISSAF,LHAILLA; *Geometria Analítica*,Coleção Profmat, SBM, 2013.Rio de Janeiro, RJ.

[11] LIMA, ELON LAGES *Números e Funções Reais*,Coleção Profmat, SBM, 2013.Rio de Janeiro, RJ.

[12] HEFEZ, ABRAMO; *Curso de Álgebra, vol.1*. 4ª edição,Coleção Matemática Universitária, segunda impressão.IMPA, 2011. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

[13] TAO, TERENCE *Como resolver problemas matemáticos - uma perspectiva pessoal, tradução de Paulo Ventura*. Coleção do professor de matemática, Rio de janeiro: SBM, 2013.

[14] CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO; LIMA, ELON LAGES; WAGNER, EDUARDO; MORGADO, AUGUSTO CÉSAR; Temas e Problemas Elementares - Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[15] GIRALDO, VICTOR; CAETANO, PAULO; MATTOS, FRANCISCO; *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] BRITO, ARLETE DE JESUS; CARVALHO, DIONE LUCCHESI; MENDES, IRAN ABREU; MIGUEL, ANTONIO; *História da Matemática em Atividades Didáticas, São Paulo, Livraria da Física, 2009.*

[17] FIORENTINI, DARIO; LORENZATO, SERGIO; *Autores Associados, Campinas,SP, 2009 Invesstigando em Educação Matemática*.

[18] KILPATRICK, JEREMY; Investigatión en Educatión matemática: su historia y alguns temas de la acatualidad

[19] KASNER, EDWARD; NEWMAN, JAMES; *Matemática e Imaginação. Zahar Editora, Brasil, 1968*

[20] BIANCHINI, EDWALDO;Matemática, vol.7;Editora Moderna, 7ªed.São Paulo, 2011

[21] GIOVANNI, JOSÉ RUY; BONJORNO, JOSÉ ROBERTO.*Matemática (Ensino Médio)I, Editora FTD, 2005*

[22] GARBI, GILBERTO GERALDO *C.Q.D. explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria; São Paulo,Editora Livraria da Física,2010*

[23] *BEER, FERDINAND P.; JOHNSTON JR,E. RUSSSEL - Mecânica Vetorial para Engenheiros, Editora Makron Books,São Paulo, 5ª edição, tradução de TENAN, MARIO ALBERTO et al, 1994.*