Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Uma proposta de Estudo de funções quadráticas mediada pela tecnologia.

Fabiano Santana Reis

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2017

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

SA232 Reis, Fabiano Santana
Uma proposta de estudo de funções quadráticas mediada pela tecnologia / Fabiano Santana Reis. -- , 2017.
63 f.

Orientadora: Joseph Nee Anyah Yartey.
Dissertação (Mestrado -) -- Universidade Federal da Bahia, , 2017.

1. Função Quadrática. 2. GeoGebra. 3. Cônicas. 4. Proposta Pedagógica. 5. Parábola. I. Nee Anyah Yartey, Joseph. II. Título.

Uma proposta de estudo de funções quadráticas mediada pela tecnologia.

Fabiano Santana Reis

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. **Orientador**:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Salvador - Bahia

Fevereiro de 2017

Uma Proposta de Estudo de Funções Quadráticas mediada pela Tecnologia

Fabiano Santana Reis

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 15/02/2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (orientador)
UFBA

Rita de Cássia de Jesus Silva

Profª. Drª. Rita de Cassia de Jesus Silva
UFBA

Simone Sousa Ribeiro

Profª. Drª. Simone Sousa Ribeiro
UFBA

Á minha familia

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família, base de minha formação. Em especial aos meus pais, irmas e sobrinhos que sempre mim apoiaram nessa jornada.

As minhas meninas Carla e Camila, minha fonte de inspiração. Sem vocês nada teria sentido.

Aos meus colegas de curso, excelentes profissionais da educação, apaixonados pela Matemática, que mim proporcionaram riquíssimas discussões em sala de aula. Em especial aos Ninjas Cristiano Daiane, Eduardo, Fabíola, Lígia e Tamara que tornaram os sábados mais leves.

Aos meus professores de curso, pela dedicação em especial a meu orientador Joseph pela paciência e apoio.

"A álgebra é generosa:
frequentemente ela dá mais do que lhe
pediu."
Jean Le Rond d' Alembert

Resumo

O presente trabalho é fruto da necessidade de desenvolver metodologias para o estudo da Matemática que promova a formação de cidadãos independentes, capazes de inovar e aprender continuamente. Sendo assim foi desenvolvida uma proposta pedagógica composta por atividades exploratória e investigativa que conduzem o aluno a construir seu conhecimento e o professor assumi assim o papel de condutor e facilitador desse processo.

Devido ao grande número de aplicações relevante a vida contemporânea, foi selecionado o conteúdo de funções quadrática, focando em sua representação gráfica. As atividades propostas instiga os alunos a observar a parábola e a utilizar o software Geo Gebra para explorar suas propriedades e investigar as relação entre sua representação gráfica com sua equação.

Propõe-se também a introdução do estudo das cônicas, dando enfase a parábola, explorando sua propriedade refletora que justifica algumas de suas aplicações praticas.

Palavra chave: Função Quadrática, Parábola, Cônicas, Geo Gebra e Proposta pedagógica.

Abstract

The present work is a result of the need to develop methodologies for the study of mathematics that promotes the formation of independent citizens, able to innovate and continually learning. So we developed a pedagogical proposal which consists of activities and exploratory research that lead the student to build his own knowledge and the teacher the role of a facilitator of this process.

Due to the large number of applications relevant to contemporary life, was selected the contents of quadratic functions, focusing on its graphical representation. The proposed activities encourages students to observe the graph of the parabola and to use the software GeoGebra to explore it's properties and to investigate the defining equation.

It is also proposed the introduction of the study of conics giving emphasis on the parabola, exploring it's reflective property that justifies some of its practice applications.

Keyword: quadratic function, Parabola, Conic, GeoGebra and pedagogical proposal.

Conteúdo

Introdução

Em minha experiência como docente venho notando o aumento do desinteresse por grande parte dos alunos pelos estudos. A maioria não vê funcionalidade em estudar álgebra, geometria, funções entre outros tópicos matemáticos. Por outro lado é impressionante como os celulares e smartphones atraem sua atenção. Muitos professores atribuem a esses aparelhos o papel de vilão na educação, pois desconcentram os alunos na hora da aula gerando assim a indisciplina.

> "Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual.Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática"
>
> [5]

É importante notar que metodologias que deu certo no passado, não terão os mesmos resultados nos dias atuais e, por isso, é necessário buscar novos recursos que tornem o ambiente escolar mais atraente. Dessa forma as novas tecnologias podem ser um grande aliado no processo de ensino-aprendizagem.

> "Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico"
>
> [6]

> "No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional"
>
> [7]

Nesse sentido proponho uma proposta pedagógica para o estudo da função quadrática, composta por atividades contextualizadas e investigativas em que o uso do Geo Gebra auxilia o aluno na construção de seu conhecimento e tornando o professor um orientador e facilitador desse processo.

> "Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação"
>
> [7]

Nos dois primeiros capítulos apresento os referenciais teóricos necessários para elaboração, aplicação, análise da proposta pedagógica e conclusão. Em especial o segundo capítulo faz-se um estudo das seções cônicas. Um conteúdo que geralmente não é abordado no 1^{o} ano do ensino médio, porem pode ser apresentado dando enfase a sua importância histórica e suas aplicações no cotidiano, deixando para estudos posteriores o seu aprofundamento.

No terceiro capítulo é feito um detalhamento da proposta pedagógica com cronograma, atividades e objetivos de cada etapa.

No quarto capítulo é feito uma análise da proposta nos três anos de sua aplicação, trazendo erros e acertos, bem como propostas de aperfeiçoamento das atividades e inclusão de novas etapas necessárias para elaboração da proposta apresentada no capítulo anterior. Por fim no quinto capítulo apresento as considerações finais da pesquisa.

Capítulo 1

Função Quadrática

1.1 Noções

Definição 1.1.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se* ***quadrática*** *quando existem números reais a, b e c com $a \neq 0$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. [2]*

A situação a seguir exemplifica uma aplicação da função quadrática.

Exemplo 1.1.1. *Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$20,00 mais R\$2,00 por lugar vago. [2]*

Pode-se observar que a receita R da empresa depende do número de passageiros x em que $x \in \mathbb{N}$ e $x \leq 40$.

Desta forma o número de lugares vazios é igual a $40 - x$. Sendo assim o valor V pago por cada passageiro é dado em função de x pela expressão:

$$\begin{aligned} V(x) &= 20 + 2(40 - x) \\ V(x) &= 100 - 2x \end{aligned}$$

Dessa forma a receita da empresa é representada pela função:

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot V(x) \\ R(x) &= x(100 - 2x) \\ R(x) &= 100x - 2x^2 \end{aligned}$$

$R(x)$ representa uma função quadrática. Sua analise pode responder inúmeros questionamentos, como determinar o número de passageiros para que a receita seja máxima.

O gráfico da função do 2º grau é de fundamental importância para sua análise. Agora será estudado esse gráfico, relacionando seu comportamento com os coeficientes da função e determinando seus pontos notáveis.

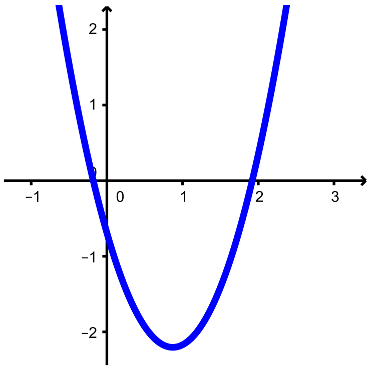
1.2 Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função é uma parábola com eixo de simetria vertical se, e somente se, essa função é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais, com $a \neq 0$.[3]

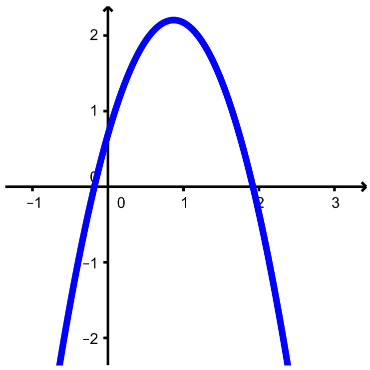
Como o eixo de simetria da parábola que representa uma função quadrática é vertical, paralelo ao eixo das ordenadas, então sua concavidade poderá ser voltada para cima ou para baixo dependendo do coeficiente a.

Se $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima, como mostra a Figura 1.1(a) .

Se $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo, como mostra a Figura 1.1(b).



(a) parábola com concavidade para cima $a > 0$



(b) parábola com concavidade para baixo $a < 0$

Figura 1.1: Concavidade da parábola

1.2.1 Pontos Notáveis do Gráfico de uma Função Quadrática

Para esboçar o gráfico da função quadrática além de analisar sua concavidade, é necessário determinar alguns pontos que facilitam essa construção. Os pontos de intersecção com os eixos coordenados e o vértice determinam uma parábola. Esses pontos podem ser observados na Figura 1.2

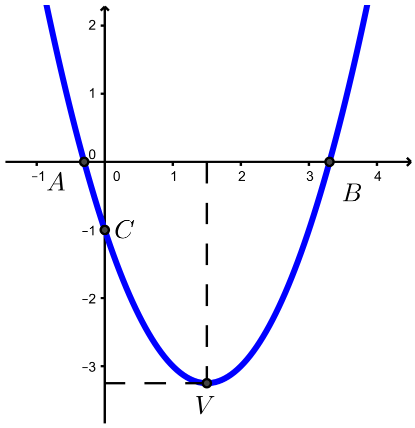


Figura 1.2: Pontos Notáveis do Gráfico da Função Quadrática

Para iniciar esse estudo analítico mais detalhado da função quadrática, é conveniente transformá-la na forma canônica. $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c pertencentes a $\mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, também conhecido como discriminante do trinômio do 2º grau, temos a forma canônica.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \tag{1.1}$$

Intersecção com o Eixo das Ordenadas

Para obter o ponto de intersecção do gráfico da parábola com o eixo das ordenadas deve-se atribuir o valor zero à variável x na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtendo:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$f(0) = c.$$

Logo, o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas é $(0, c)$.

Intersecção com o Eixo das Abscissas

O gráfico da função quadrática intercepta o eixo das abscissas nos pontos $A = (x, 0)$. Esses pontos são obtidos através do zero da função.

$$f(x) = 0.$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando a forma canônica, ver Equação 1.1 temos que:

$$\begin{aligned}
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= 0, \quad \text{com} \quad a \neq 0 \\
\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \\
\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

Dessa forma as raízes da função quadrática podem ser calculadas pela fórmula :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{1.2}$$

com $\varDelta = b^2 - 4ac$

Na fórmula 1.2, o termo $\varDelta = b^2 - 4ac$ é chamado de descriminante da função quadrática. Dependendo do seu valor é possível saber se a função do 2ºgrau possui ou não raízes reais e caso possua raízes reais se elas são distintas ou iguais.

De fato, existem três casos possíveis:

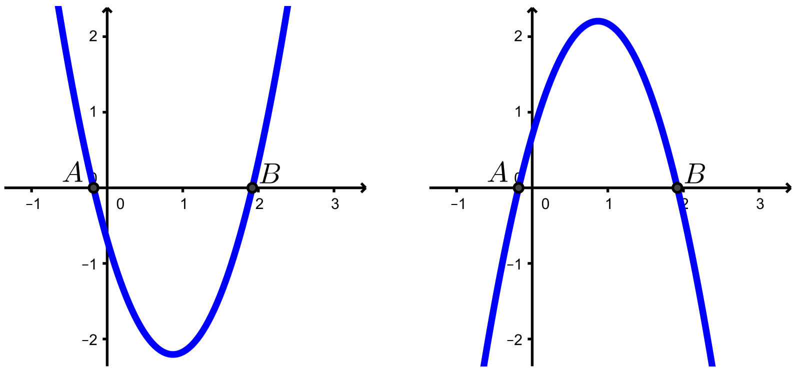
- Se $\Delta > 0$, a função quadrática tem duas raízes reais e distintas.

  Se $\Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

  Logo:

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Neste caso o gráfico da função intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, como mostra a figura 1.3 .



(a) Coeficiente $a > 0$ e $\Delta > 0$ (b) Coeficiente $a < 0$ e $\Delta > 0$

Figura 1.3: Parábola com duas raízes reais

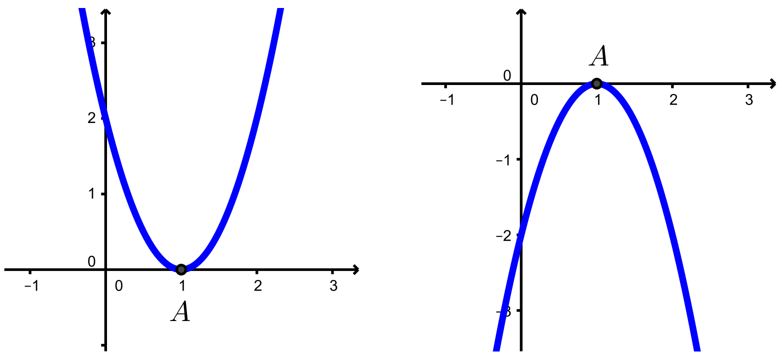
- Se $\Delta = 0$, a função quadrática tem duas raízes reais e iguais.

  Se $\Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$

  Logo,

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} \text{ , dai}$$
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

  Neste caso o gráfico da função intersecta o eixo das abscissas em apenas um ponto, como mostra a Figura 1.4.



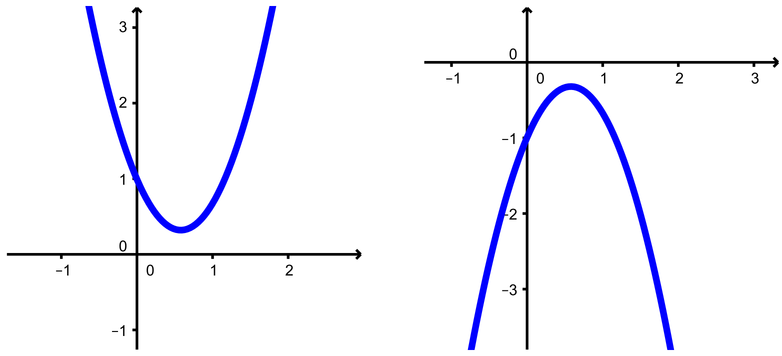
(a) Coeficiente $a > 0$ e $\Delta = 0$ (b) Coeficiente $a < 0$ e $\Delta = 0$

Figura 1.4: Parábola com duas raízes reais e iguais

- Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais.

  Se $\Delta < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

  Neste caso o gráfico da função não intersecta o eixo das abscissas, como mostra a figura 1.5.



(a) Coeficiente $a > 0$ e $\Delta < 0$ (b) Coeficiente $a < 0$ e $\Delta < 0$

Figura 1.5: Parábola sem raízes reais.

Vértice da Parábola

Para determinar as coordenadas do vértice da parábola, será feita uma analise da função quadrática em sua forma canônica.

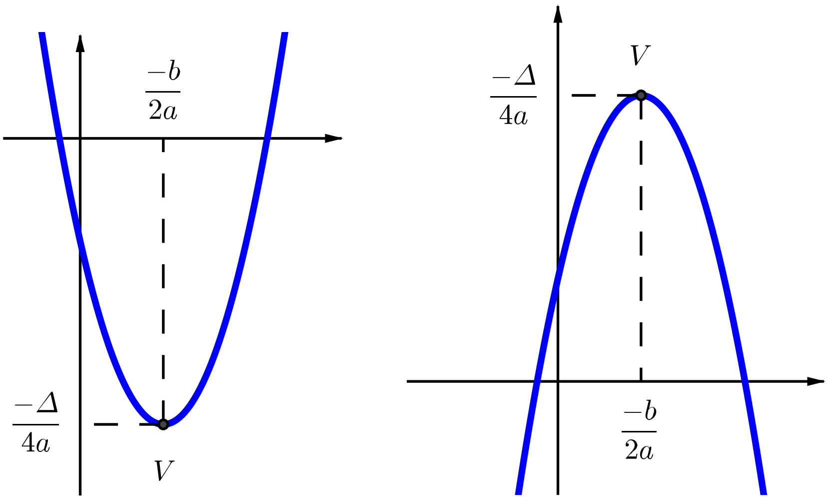
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Sem perda de generalidade vamos considerar que $a > 0$, neste caso tem-se que o termo $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ é sempre positivo e assume valor mínimo igual a zero, quando $x + \dfrac{b}{a} = 0$, ou seja $f(x)$ assume valor mínimo quando $x = -\dfrac{b}{a}$.

Consequentemente, o valor mínimo da função quadrática é igual a $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$, como mostra a figura 1.6(a).

De forma análoga, se $a < 0$ a função quadrática assume valor máximo $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$, quando $x = -\dfrac{b}{a}$, como mostra a Figura 1.6(b).

O ponto $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ é chamado de vértice da parábola. Veja Figura 1.6



(a) Se $a > 0$, a função quadrática possui um valor mínimo

(b) Se $a < 0$, a função quadrática possui um valor máximo

Figura 1.6: Vértice da parábola

1.2.2 Coeficientes da Função Quadrática

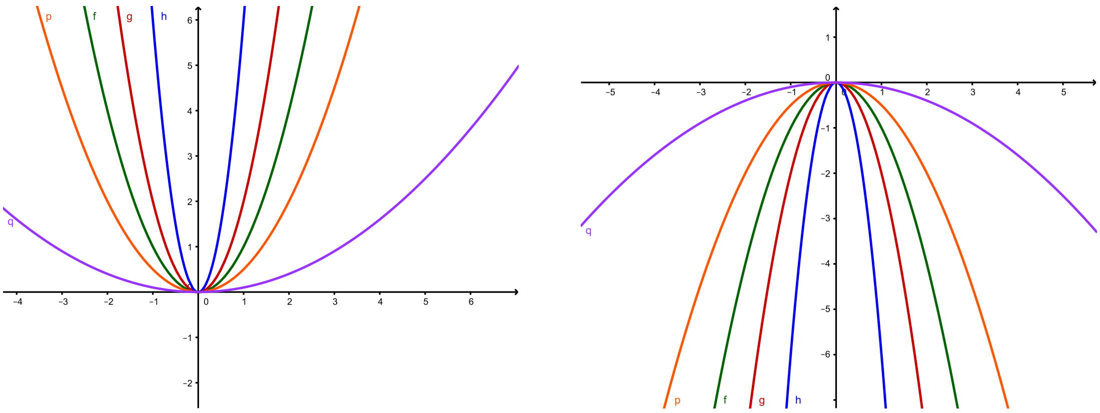
Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, seus coeficientes a, b e c são números reais com $a \neq 0$. A análise desses coeficientes, fornece informações que nos auxiliam a esboçar o gráfico dessa função.

Não é objetivo deste trabalho a demonstração detalhada da analise dos coeficientes de uma função quadrática com sua representação gráfica. Mas, tais resultados podem ser observados intuitivamente. Para maiores detalhes sobre essas relações, recomenda-se a leitura Sousa, Fábio Antonio Leão. Funções quadráticas [8]

Coeficiente a

Como já foi visto o coeficiente a verifica se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo. Alem disso analisando o coeficiente a podemos obter informações sobre a abertura da parábola.

Pode-se verificar que, quanto maior for o valor absoluto do coeficiente a, menor será a abertura da parábola, independentemente da concavidade, veja Figura 1.7.[2]



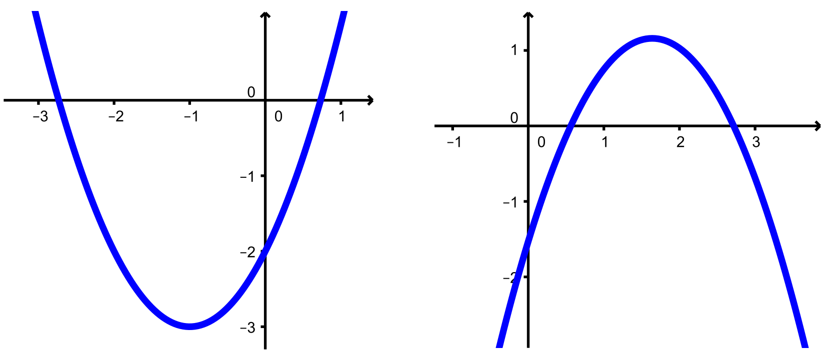
(a) (b)

Figura 1.7

Coeficiente b

O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ramo crescente ou decrescente.

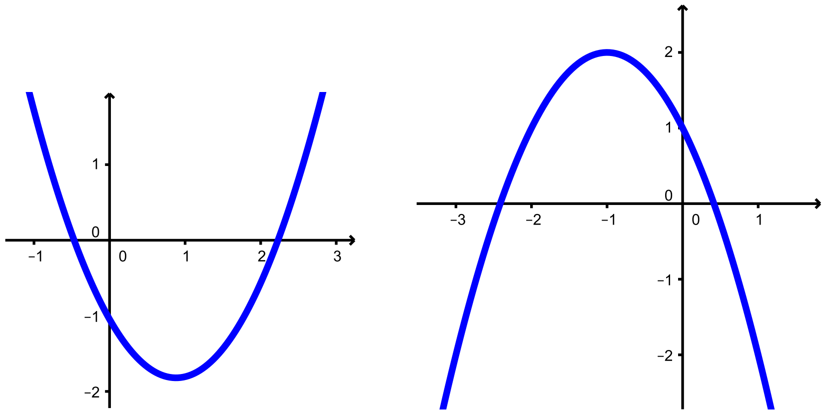
- Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ramo crescente, como mostra a Figura 1.8.



(a) Coeficiente $a > 0$ (b) Coeficiente $a < 0$

Figura 1.8: Coeficiente $b > 0$

- Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ramo decrescente, como mostra a figura 1.9.

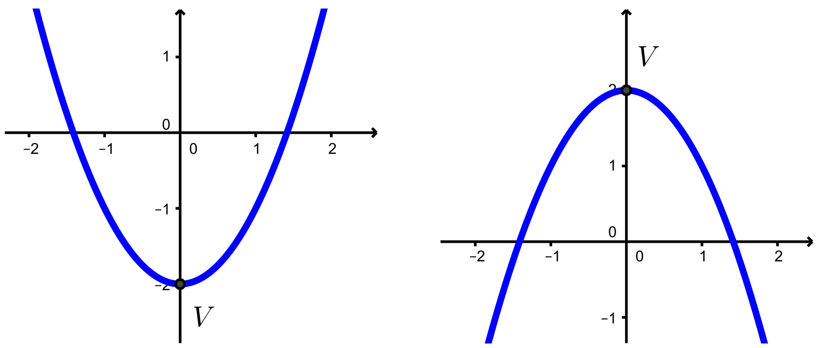


(a) Coeficiente $a > 0$ (b) Coeficiente $a < 0$

Figura 1.9: Coeficiente $b < 0$

- Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo das ordenadas no vértice, como mostra a Figura 1.10

[2]



(a) Coeficiente $a > 0$ (b) Coeficiente $a < 0$

Figura 1.10: Coeficiente $b = 0$

Coeficiente c

Como ja foi visto o coeficiente c indica a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo Y.

1.3 Vértice da Parábola, Imagem e Valor Máximo ou Mínimo da Função Quadrática

O vértice de uma parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ pode ser calculado por $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$. Esse ponto alem de ser um ponto notável da parábola, também permite determinar a imagem da função bem como seu valor máximo ou mínimo. O exemplo a seguir mostra uma aplicação que pode ser resolvida com esse recurso.

Exemplo 1.3.1 (ENEM 2000). *Um boato tem um público alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhece o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhece. Em outras palavras, sendo* R *a rapidez de propagação,* P *o público-alvo e* x *o número de pessoas que conhece o boato, tem-se:*$R(x) = kx(P - x)$ *, em que* k *é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:*

a) 11000 b) 22000 c) 33000 d) 38000 e) 44000

Solução:

Sendo $P = 44000$, tem-se que $R(x) = kx(44000 - x)$, dai

$$R(x) = 44000kx - kx^2$$

Para se obter o número de pessoas onde ocorrerá a máxima rapidez de propagação, basta utilizar $x_V = \dfrac{-b}{2a}$

$$x_V = \frac{-44000k}{-2k} = 22000$$

O boato irá se propagar com o máximo de rapidez, quando ficar conhecido por 22000 pessoas.

Capítulo 2

Seções Cônicas

2.1 Introdução

Conta a lenda que uma delegação consultou o oráculo de Apolo em Delfos, para saber como poderiam se livra de uma peste que castigava os gregos, então foram orientados a dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo. Nascia então um dos principais problemas da antiguidade, a duplicação do cubo também conhecido como problema deliano, que consiste em dada a aresta de um cubo, construir com uso de régua e compasso, a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do primeiro.

Trabalhando na resolução do problema deliano, Meneacmus (380 - 320 a.C.), matemático da Academia de Platão descobre as curvas cônicas, que são obtidas como secções de um cone reto quando cortado por um plano não paralelo à base, que depois foram chamadas de elipse, parábolas e hipérboles. Cerca de um seculo e meio mais tarde Apolônio de Perga (262 -190 a. C.) aprimorou os conhecimentos sobre o assunto e escreveu seu celebre tratado sobre essas curvas "As Cônicas"uma obra de suma importância para o desenvolvimento do assunto.

> "... assim como Os elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive As Cônicas de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-la. Se sobrevivência é uma medida de qualidade, Os elementos de Euclides e As Cônicas de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos."[4]

Apolônio mostrou que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção, o que possibilitou relacionar as três curvas. Provou também que o cone não precisava ser reto para a obtenção das secções e substituiu o cone de uma folha pelo cone duplo, surgindo assim o segundo ramo da hipérbole.

2.2 Seções no Cone

Apesar de Apolônio ter provado que qualquer cone pode gerar as secções cônicas, neste trabalho, serão apresentadas as possíveis secções cônicas que podem ser obtidas pela interseção de um plano com um cone reto duplo infinito.

Secção 1 Um ponto quando o plano intersecta o cone no vértice e é perpendicular ao eixo desse cone, ver Figura 2.1;

Secção 2 Uma reta se o plano contiver dois pontos de uma mesma geratriz e não conter o eixo do cone, ver Figura 2.2;

Secção 3 Duas retas se a secção conter o eixo do cone, ver Figura 2.3;

Secção 4 Uma circunferência se o plano intersectar ortogonalmente o eixo do cone em um ponto diferente do vértice, ver Figura 2.4;

Observação 2.2.1. *As secções 1, 2, 3 e 4 descritas acima são consideradas degenerações das cônicas.*

Secção 5 Uma elipse se o plano formar um ângulo com o eixo do cone maior que o ângulo formado pela geratriz e tal eixo, ver Figura 2.5;

Secção 6 Uma parábola se o plano for paralelo a uma geratriz do cone, ver Figura 2.6;

Secção 7 Uma hipérbole se o plano formar um ângulo com o eixo do cone menor que o ângulo formado pela geratriz e o mesmo eixo, ver Figura 2.7.

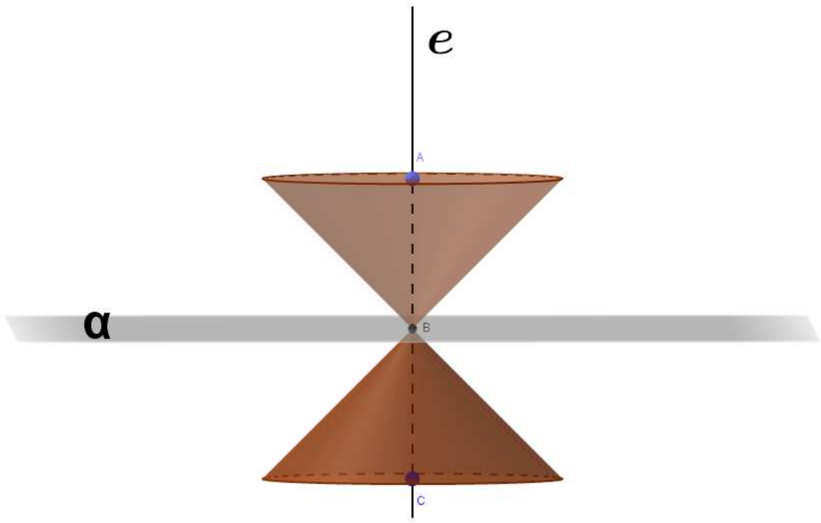


Figura 2.1

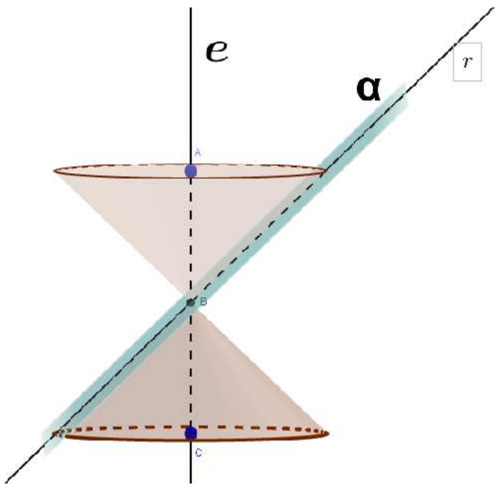


Figura 2.2

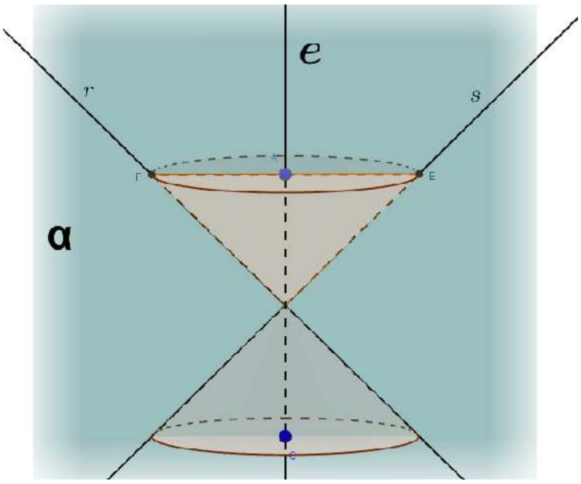


Figura 2.3

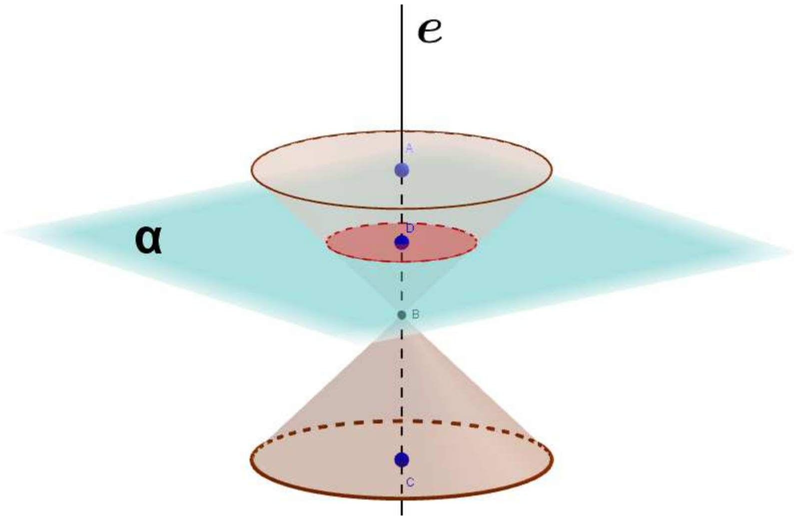


Figura 2.4: Circunferência

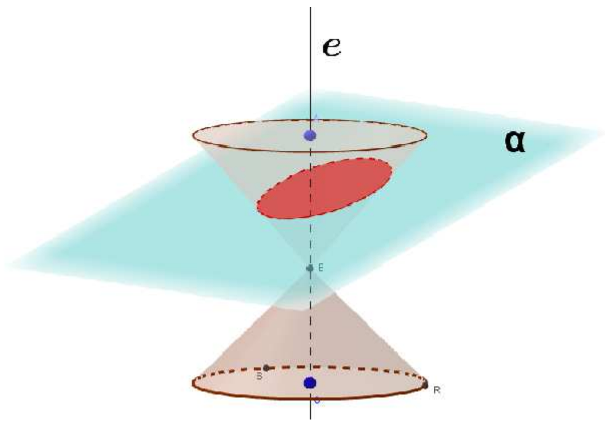


Figura 2.5: Elipse

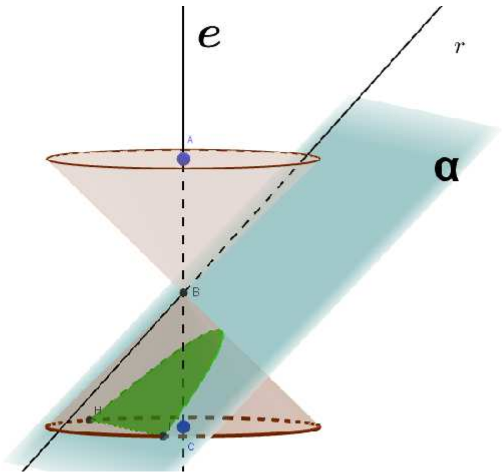


Figura 2.6: Parábola

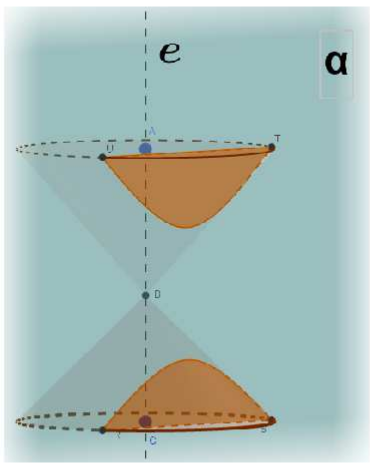


Figura 2.7: Hipérbole

Dentre as cônicas será focado o estudo da parábola, dando uma definição dessa curva como lugar geométrico, apresentar seus elementos, sua representação no plano cartesiano e algumas de suas propriedades.

2.3 Parábola

Definição 2.3.1. *Dada uma reta d e um ponto F, tal que $F \notin d$. O lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distância de d é igual à distância a F é chamado de parábola de foco F e diretriz d. A Figura 2.8 representa a parábola de foco F e diretriz d. [1]*

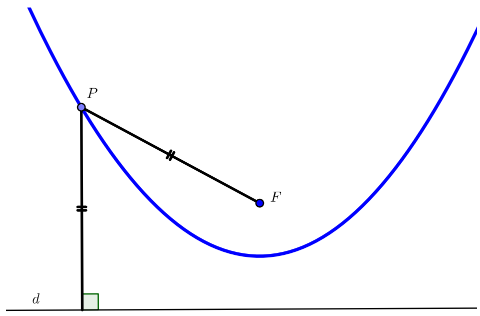


Figura 2.8: $d(P, d) = d(P, F)$

Terminologia

A reta l que contem o foco e é perpendicular à diretriz de uma parábola é chamada de **eixo focal**.

O ponto V interseção do eixo focal com a parábola é chamado de **vértice**. Sendo A o ponto de interseção do eixo focal com a diretriz da parábola, então V é o ponto médio do segmento $\overline{AF}$. Como mostra a Figura 2.9

O número $2p = d(F, d)$ é o parâmetro da parábola. Note que $d(V, F) = d(V, d) = p$.

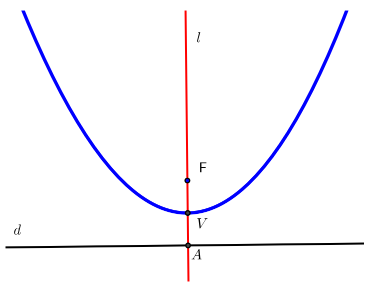


Figura 2.9: Elementos da parábola

Observação 2.3.1. *Toda parábola é simétrica em relação o seu eixo focal.*

Demonstração. De fato, seja $\mathcal{P}$ uma parábola de vértice V, foco F, diretriz d e eixo focal l, como mostra a Figura 2.10.
Seja $P \in \mathcal{P}$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação ao eixo focal l. Desta forma o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular a l no ponto A, que é ponto médio do segmento$\overline{PP'}$.
Analisando os triângulos $\triangle AFP$ e $\triangle AFP'$, temos que $\overline{AP} = \overline{AP'}$, pois A é ponto médio de $\overline{PP'}$, $\overline{AF}$ é o lado comum aos dois triângulos e os ângulos $\widehat{PAF}$ e $\widehat{P'AF}$ são retos, pois P' o ponto simétrico de P em relação ao eixo focal l. Desta forma $\triangle AFP \cong \triangle AFP'$. Consequentemente $d(P,F) = d(P',F)$.
Por outro lado, como P' o ponto simétrico de P em relação ao eixo focal l, temos que $d(P,d) = d(P',d)$, alem disso, como $P \in \mathcal{P}$ pela definição 2.3.1, temos que $d(P,F) = d(P,d)$. Sendo assim $d(P',F) = d(P',d)$, logo $P' \in \mathcal{P}$.

$\square$

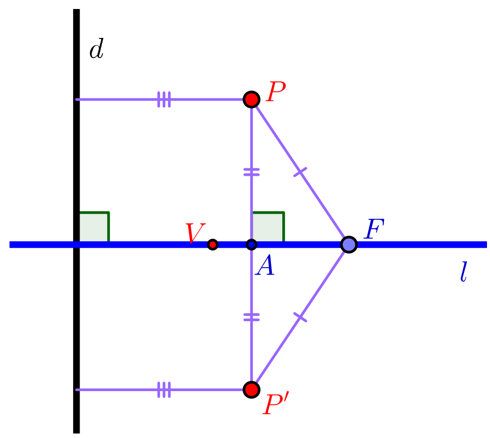


Figura 2.10: Simetria da parábola em relação ao eixo focal l

2.3.1 Representação no plano Cartesiano

Neste momento será feito a representação gráfica da parábola em relação a um sistema de coordenadas. Iniciando com os casos em que o vértice é a origem o eixo focal é um dos eixos coordenados. Por fim será apresentado os casos em que o vértice é um ponto qualquer e o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.

Também será analisado quais dos casos, podem representar o gráfico de uma função.

Parábola com vértice na origem e eixo focal coincidente com o eixo OX.

1º caso O foco F está à direita da diretriz d.

Neste caso, o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é o ponto $V = (0,0)$, o foco $F = (p,0)$ e diretriz $d : x = -p$, com $2p = d(F,d)$. Ver Figura 2.11(a)

Seja $P = (x,y) \in \mathcal{P}$, então:

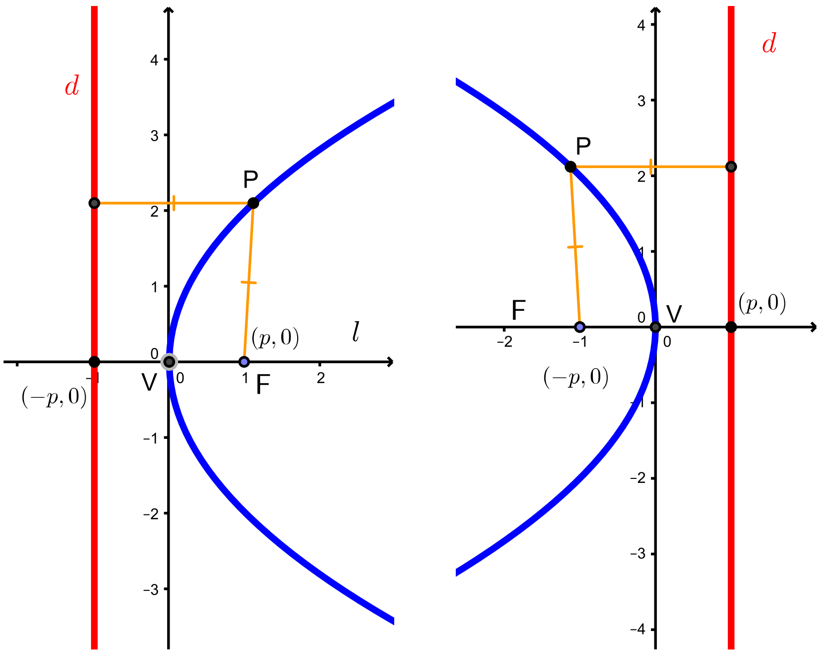
$$\begin{aligned}
d(P,F) = d(P,d) \\
\sqrt{(x-p)^2+y^2} &= |x+p| \\
(x-p)^2+y^2 &= (x+p)^2 \\
x^2-2px+p^2+y^2 &= x^2+2px+p^2 \\
-2px+y^2 &= 2px \\
y^2 &= 4px \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

2º Caso O foco F está à esquerda da diretriz d.

Neste caso, o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é $V = (0,0)$, $F = (-p,0)$ e diretriz $d : x = p$, com $2p = d(F,d)$. Ver Figura 2.11(b)

Seja $P = (x,y) \in \mathcal{P}$, então:

$$\begin{aligned}
d(P,F) = d(P,d) \\
\sqrt{(x+p)^2+y^2} &= |x-p| \\
(x+p)^2+y^2 &= (x-p)^2 \\
x^2+2px+p^2+y^2 &= x^2-2px+p^2 \\
2px+y^2 &= -2px \\
y^2 &= -4px \qquad (2.2)
\end{aligned}$$



(a) parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$ (b) parábola $\mathcal{P} : y^2 = -4px$

Figura 2.11: Parábola com vértice na origem e eixo focal coincidente com o eixo OX.

Parábola com vértice na origem e eixo focal coincidente com o eixo OY.

1º caso O foco F está acima da diretriz d.

Neste caso, o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é $V = (0, 0)$, $F = (0, p)$ e diretriz $d : y = -p$, com $2p = d(F, d)$. Ver Figura 2.12(a)

Seja $P = (x, y) \in \mathcal{P}$, então:

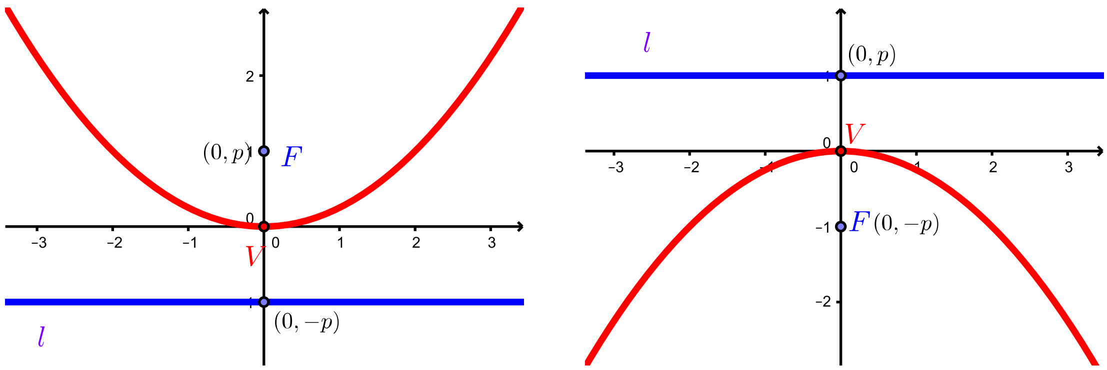
$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, d) \\ \sqrt{x^2 + (y-p)^2} &= |y + p| \\ x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ x^2 + y^2 + 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 - 2px &= +2px \\ x^2 &= +4py \end{aligned} \tag{2.3}$$

2º caso O foco F está abaixo da diretriz d.

Neste caso, o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é $V = (0, 0)$, $F = (0, -p)$ e diretriz $d : y = p$, com $2p = d(F, d)$. Ver Figura 2.12(a)

Seja $P = (x, y) \in \mathcal{P}$, então:

$$
\begin{aligned}
d(P,F) = d(P,d)& \\
\sqrt{x^2+(y+p)^2} &= |y-p| \\
x^2+(y+p)^2 &= (y-p)^2 \\
x^2+y^2+2py+p^2 &= y^2-2py+p^2 \\
x^2+2px &= -2px \\
x^2 &= -4py \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$



(a) parábola $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ (b) parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4px$

Figura 2.12: Parábola com vértice na origem e eixo focal coincidente com o eixo Oy.

Parábola com vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX.

Para obter a forma canônica da parábola$\mathcal{P}$ de vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX, é necessário tomar um sistema de coordenadas auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ com origem $\bar{O} = V = (x_o, y_o)$ e eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

1º caso O foco F está à direita da diretriz d.

De acordo com a equação 2.1 no sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ a parábola $\mathcal{P}$ tem equação:

$$\bar{y}^2 = 4p\bar{x} \qquad (2.5)$$

No sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é o ponto $V = (0,0)$, o foco $F = (p,0)$ e diretriz $d : \bar{x} = -p$, com $2p = d(F,d)$. Ver Figura 2.13(a)

Como $x = \bar{x} + x_o$ e $y = \bar{y} + y_o$, tem-se que a equação da parábola no sistema de coordenadas XOY é:

$$(y - y_o)^2 = 4p(x - x_o) \tag{2.6}$$

Alem disso seus elementos são: Foco $F = (x_o - p, 0)$; vértice $V = (x_o, y_o)$; diretriz $d : x = x_o - p$ e eixo focal $l : y = y_o$.

2º caso O foco F está à direita da diretriz d.

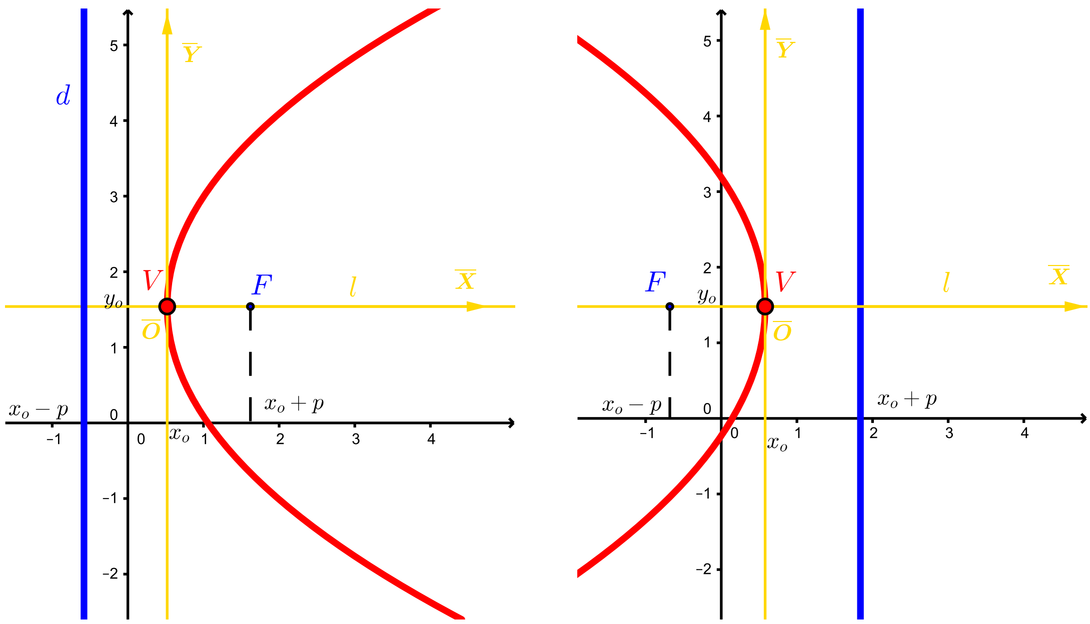
De acordo com a equação 2.2 no sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ a parábola $\mathcal{P}$ tem equação:

$$\bar{y}^2 \quad = \quad -4p\bar{x} \tag{2.7}$$

No sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é o ponto $V = (0, 0)$, o foco $F = (-p, 0)$ e diretriz $d : \bar{x} = p$, com $2p = d(F, d)$. Ver Figura 2.13(b)

Como $x = \bar{x} + x_o$ e $y = \bar{y} + y_o$, tem-se que a equação da parábola no sistema de coordenadas XOY é:

$$(y - y_o)^2 = -4p(x - x_o) \tag{2.8}$$



(a) parábola $\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$ (b) parábola $\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = -4p(x - x_o)$

Figura 2.13: Parábola com vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX.

Parábola com vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo OY.

Para obter a forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ de vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo OY, é necessário tomar um sistema de coordenadas auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ com origem $\bar{O} = V = (x_o, y_o)$ e eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

1º caso O foco F está acima da diretriz d.

De acordo com a equação 2.4 no sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ a parábola $\mathcal{P}$ tem equação:

$$\bar{x}^2 = 4p\bar{y} \tag{2.9}$$

No sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é o ponto $V = (0, 0)$, o foco $F = (0, p)$ e diretriz $d : \bar{y} = -p$, com $2p = d(F, d)$. Ver Figura 2.14(a)

Como $x = \bar{x} + x_o$ e $y = \bar{y} + y_o$, tem-se que a equação da parábola no sistema de coordenadas XOY é:

$$(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o) \tag{2.10}$$

Alem disso seus elementos são: Foco $F = (0, y_o - p)$; vértice $V = (x_o, y_o)$; diretriz $d : y = y_o - p$ e eixo focal $l : x = x_o$.

2º caso O foco F está abaixo da diretriz d.

De acordo com a equação 2.3 no sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ a parábola $\mathcal{P}$ tem equação:

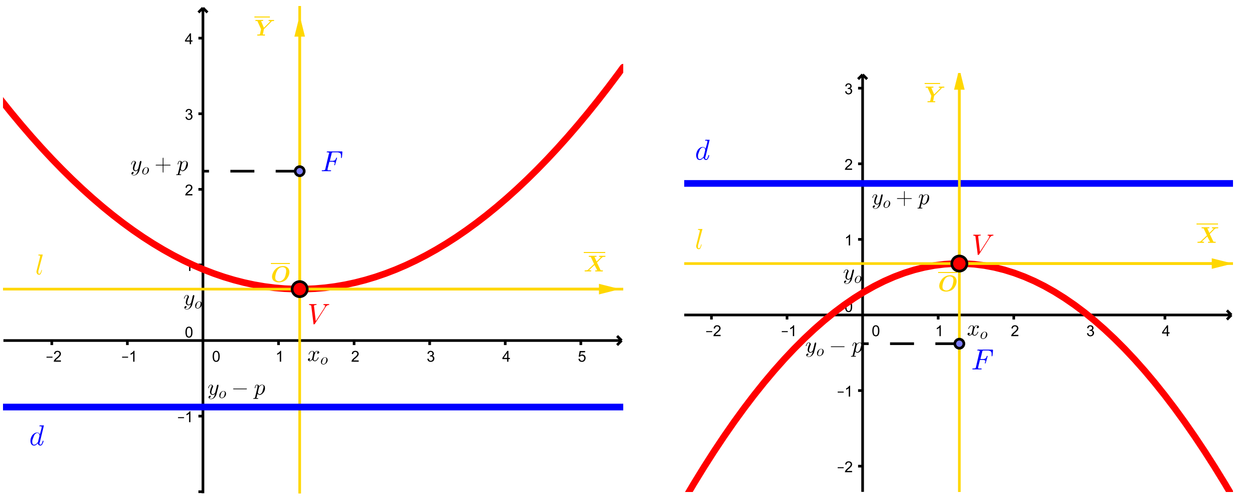
$$\bar{x}^2 = -4p\bar{y} \tag{2.11}$$

No sistema auxiliar $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é o ponto $V = (0, 0)$, o foco $F = (0, -p)$ e diretriz $d : \bar{y} = p$, com $2p = d(F, d)$. Ver Figura 2.14(a)

Como $x = \bar{x} + x_o$ e $y = \bar{y} + y_o$, tem-se que a equação da parábola no sistema de coordenadas XOY é:

$$(x - x_o)^2 = -4p(y - y_o) \tag{2.12}$$

Alem disso seus elementos são: Foco $F = (0, y_o - p)$; vértice $V = (x_o, y_o)$; diretriz $d : y = y_o + p$ e eixo focal $l : x = x_o$.



(a) parábola $\mathcal{P} : (x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)$

(b) parábola $\mathcal{P} : (x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)$

Figura 2.14: Parábola com vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo OY.

Observação 2.3.2. *Analisando as representações gráficas acima, pode-se observar que, os casos em que a Parábola com vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo ao eixo das abscissas, não representa o gráfico de uma função.*

Demonstração. Sem perda de generalidade considere a $\mathcal{P} : (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$, cujo vértice é o ponto $V = (x_o, y_o)$ e eixo focal $l : y = y_o$, paralelo ao eixo das abscissas, como mostra a figura 2.15.

Seja $A = (x_1, y_o + k) \in \mathcal{P}$. De acordo com a observação 2.10, pode-se afirmar que o ponto $A' = (x_1, k - y_o)$, simétrico de A em relação ao eixo focal l, também pertence a parábola $\mathcal{P}$.

Considere a relação:

$R = \{(x, y) \in [x_o, +\infty[\ \times \ \mathbb{R} \mid (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)\}$

Essa relação não é uma função pois A e A' pertencem a R e possuem a mesma abscissa.

Desta forma a parábola $\mathcal{P}$ não pode representar o gráfico de uma função. $\square$

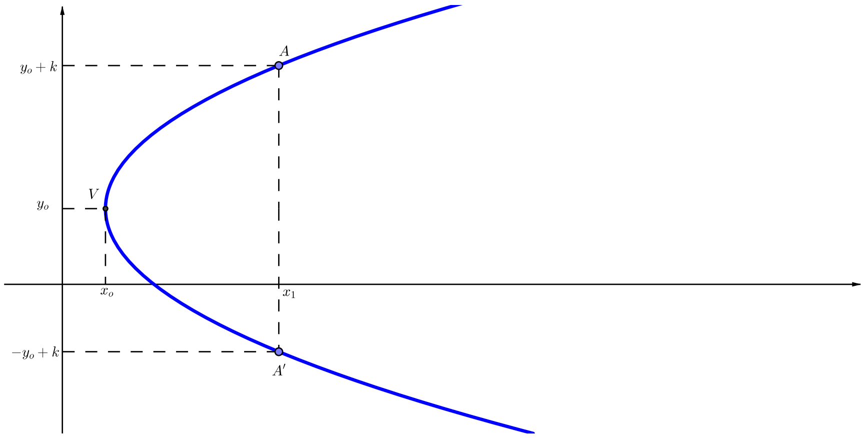


Figura 2.15

2.4 Aplicações práticas das parábola

A parábola foi interesse de estudo de muitos matemáticos, como Meneacmus e Apolônio que estudaram suas propriedades, porem foi Arquimedes de Siracusa, matemático grego (287 - 2012 a. C.) que encontrou as primeiras aplicações práticas para a curva, tendo recorrido a ela para defender Siracusa quando foi cercada pelos romanos. Arquimedes construiu um espelho parabólico com os quais os defensores de Siracusa teriam queimado à distância, pela concentração dos raios solares, os navios romanos.

Galileu Galilei provou que a trajetória de um projétil lançado verticalmente descreve uma parábola. Dando a curva um importante papel nos problemas da Física.

Dentre todas aplicações práticas da parábola, as que mais se destacam,tem como princípio sua propriedade refletora, que antes de ser anunciada, devemos estar atento a definição 2.4.1 e a observação 2.4.1.

Definição 2.4.1. *A reta tangente a uma parábola $\wp$ num ponto $P \in \wp$ é a única reta, não paralela ao eixo focal l, que intersecta a parábola apenas no ponto P.*

Observação 2.4.1. *A reta tangente à parábola $\wp : y^2 = 4px, \ \ p \neq 0$, no ponto $P(x_o, y_o) \in \wp$ é a reta $r : y_o x - 2x_o y = -y_o x_o$,* ***se****, $x_o \neq 0$, e é a reta $r : x = x_o$* ***se****, $x_o = 0$.*

Demonstração. Seja $r : \begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a reta tangente a parábola $\wp$ no ponto $P(x_o, y_o)$.

Como r não é paralelo ao eixo focal (eixo das abscissas), temos que $n \neq 0$. Alem disso $r \cap \wp$ consiste apenas no ponto P, ou seja, a equação do segundo grau

$$\begin{aligned} & (y_o + nt)^2 = 4p(x_o + mt) \\ \Longleftrightarrow \quad & y_o^2 + 2y_ont + n^2t^2 = 4px_o + 4pmt \\ \Longleftrightarrow \quad & n^2t^2 + t(2y_on - 4pm) + (y_o^2 - 4px_o) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & n^2t^2 + t(2y_on - 4pm) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & t[n^2t + (2y_on - 4pm)] = 0 \end{aligned}$$

possui apenas a solução $t = 0$, que corresponde a $P(x_o, y_o)$.

Portanto $2y_on - 4pm = 0$, ou seja, $(m, n) \perp (2p, -y_o)$.

- Se $x_o = 0$ então $y_o = 0$, pois $y_o^2 = 4px_o$

  Neste caso$(m, n) \perp (2p, -y_o)$, isto é, a reta r passa pela origem e é perpendicular ao eixo das abscissas. Logo $r : x = 0$.

- Se $x_o \neq 0$ então $y_o \neq 0$ e $2p = \dfrac{y_o^2}{2x_o}$.

  Neste caso$(m, n) \perp (\dfrac{y_o^2}{2x_o}, -y_o)$, ou seja, $(m, n) \perp (y_o, -2x_o)$.

  Logo como $P = (x_o, y_o) \in r$, temos:

  $r : y_ox - 2x_oy = -y_ox_o$

$\square$

Teorema 2.4.1 (Propriedade Refletora da Parábola)**.** *Sejam as seguintes retas passando por um ponto P da parábola $\wp$:*

r, paralela ao eixo focal l,

n, normal a $\wp$ (isto é, perpendicular à reta tangente a $\wp$ no ponto P),

s, que passa pelo foco F de $\wp$.

Então os ângulos entre r e n e entre s e n são iguais.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\wp : y^2 = 4px$, com $p > 0$.

Como o foco de $\wp$ é o ponto $F = (p, 0)$, o vetor $\overrightarrow{PF} = (p - x_o, -y_o)$ é paralelo à reta s, o vetor $(1, 0)$ é paralelo à r e de acordo com a observação 2.4.1 o vetor $\vec{n} = (y_0, -2x_o)$ é paralelo a reta n normal a $\wp$ no ponto $P = (x_o, y_o)$.

Sejam θ_1 o ângulo entre $\overrightarrow{PF}$ e $\vec{n}$, e θ_2 o ângulo entre $\vec{n}$ e o vetor $(1, 0)$.

Então,

$$\cos\theta_1 = \frac{x_oy_o + py_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}\sqrt{(p - x_o)^2 + y_o^2}} \quad \text{e} \quad \cos\theta_2 = \frac{y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}}.$$

Como $x_o + p > 0$ e

$$
\begin{aligned}
(p - x_o)^2 + y_o^2 &= p^2 - 2px_o + x_o^2 + y_o^2 \\
&= p^2 - 2px_o + x_o^2 + 4px_o \\
&= p^2 + 2px_o + x_o^2 \\
&= (p + x_o)^2,
\end{aligned}
$$

Dai $x_o + p = \sqrt{(p - x_o)^2 + y_o^2}$
Logo,

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{x_o y_o + p y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}\sqrt{(p - x_o)^2 + y_o^2}} \\
&= \frac{(x_o + p) y_o}{(x_o + p)\sqrt{y_o^2 + 4px_o^2}} \\
&= \frac{y_o}{\sqrt{y_o^2 + 4x_o^2}} \\
&= \cos\theta_2
\end{aligned}
$$

Portanto $\theta_1 = \theta_2$

$\square$

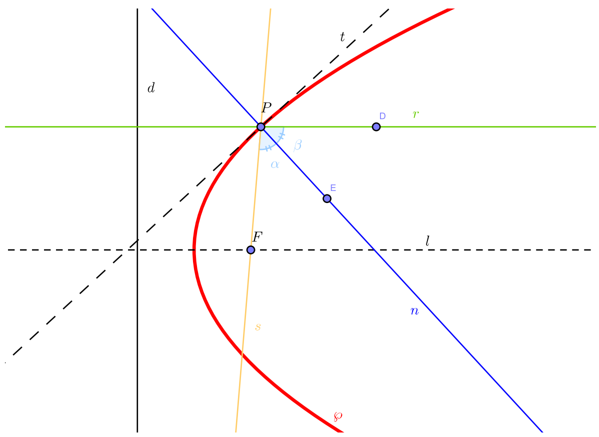


Figura 2.16: Propriedade refletora da parábola

Para entender a aplicação desse teorema é importante conhecer algumas propriedades da óptica geométrica.

O desvio de um feixe de luz quando colide com uma barreira descreve a reflexão da luz, que acontece no limite de dois meios, por exemplo, ar-vidro, ar-água entre outros.

A lei da reflexão afirma que o raio da luz quando atinge uma espelho plano forma um ângulo com a normal do espelho, esse ângulo, é chamado de ângulo de incidência.

Mas esse raio de luz tocando no espelho ele volta para o 1º meio formando outro ângulo com a mesma normal que é o ângulo de reflexão. Sendo que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

A lei da reflexão também é aplicada nas superfícies curvilíneas, onde a reta tangente à curva num certo ponto, representa um espelho plano perfeito.

A propriedade refletora da parábola e a lei da reflexão da luz, garante que o espelho parabólico é capaz de refletir raios paralelos e concentrá-los em um único ponto. Esse ponto de concentração de raios vai ser o foco da parábola, onde as retas paralelas ao seu eixo de simetria vão passar pelo foco ou aqueles que chegarem ao seu foco vão se dirigir de modo paralelo ao eixo de simetria. Esse princípio explica inúmeras aplicações como as antenas parabólicas, os fornos solares entre outros, os quais será apresentada uma breve descrição.

Parabolóide

Ao girar uma parábola em torno do seu eixo de simetria, obtem-se uma figura chamada parabolóide de revolução.

Nos objetos que tem a forma de um parabolóide, os raios de luz que atingem a superfície côncava, paralelamente ao eixo de simetria, refletem-se passando pelo foco da paraboloide e, reciprocamente, os raios de luz gerados no foco são refletidos pela superfície côncava paralelamente ao eixo de simetria. Essa propriedade é consequência da propriedade refletora da parábola.

Faróis de Carro:

Nos faróis dos automóveis, a lâmpada está localizada no foco de um espelho parabólico. Assim os raios de luz emergentes da lâmpada são refletidos pelo espelho paralelamente ao eixo de simetria do parabolóide, ver Figura 2.17.

Figura 2.17: Farol de automóvel (imagem retirada do site: https://estudandomatematicasite.wordpress.com

Centrais solares térmicas:

Em algumas centrais solares térmicas utilizam discos parabólicos para captação da energia solar. Esses discos coletam a radiação solar armazenando-a em um receptor localizado no foco. Essa energia é conduzida a uma central que pode transformá-la em energia elétrica, ver figura 2.18.

Figura 2.18: Centrais solares térmicas (imagem retirada do site:https://pt.solar-energia.net/solar-termica/temperatura-alta, em 12/03/2017)

Forno Solar

Os fornos solares também obedecem ao mesmo princípio das centrais térmicas. função desse forno é concentrar em uma pequena área os raios luminosos através de um espelho parabólico, ver Figura 2.19

Em Odeillo no sul da França, onde a incidência de luz do Sol é intensa, foi construído um grande espelho côncavo, que é usado como "forno solar". Esse forno é formado por 9.500 espelhos planos individuais, com a altura de um edifício de sete andares, focaliza os raios solares em um forno dentro da torre do coletor, fazendo-o alcançar temperaturas de até 3.800°C, o suficiente para abrir um furo de 30 cm de diâmetro numa chapa de aço de 3/8 de polegada de espessura, em apenas 60 segundos. [9]

Figura 2.19: Forno Solar de Odeillo no sul da França (imagem retirada do site:http://sites.unicentro.br/wp/petfisica/2016/03/30/parabolas-as-curvas-misteriosas/, em 12/03/2017)

Antenas Parabólicas

As antenas parabólicas não são espelhos, porém refletem ondas eletromagnéticas para o receptor, que fica localizado no foco, ampliando e otimizando esses sinais, ver Figura 2.20.

Figura 2.20: Receptor parabólico (imagem retirada do site: https://museudinamicointerdisciplinar.wordpress.com, em 12/03/2017)

Concha acústica parabólica

Existem palcos construídos dentro de uma Concha acústica parabólica. Assim, o som produzido no foco, ou em suas proximidades, é refletido pela concha, atingindo todos os pontos do auditório, ver figura 2.21.

Figura 2.21: concha acústica parabólica (imagem retirada do site: https://chrismart211996.wordpress.com/2014/10/18/secciones-conicas-y-matrices-y-sus-aplicaciones-en-la-arquitectura/, em 12/03/2017)

Capítulo 3

Uma proposta para o estudo da função quadrática

Neste capítulo será apresentado uma sequência didática que busca implementar em sala de aula atividades exploratórias e investigativas que desenvolvam os estudos da parábola e da função quadrática para alunos do 1º ano do Ensino Médio. As atividades aqui propostas visam garantir que o aluno seja o principal responsável no processo de construção de seus saberes e não apenas um mero espectador, o qual recebe de forma pronta e acabada todo conhecimento. Neste processo o professor assume o papel de condutor, provocando os alunos por meio de questionamentos e discussões sobre os resultados obtidos e confrontando estratégias diferentes utilizadas pelos alunos, proporcionando assim um aprendizado consistente dos conceitos, por parte dos alunos.

As atividades aqui propostas aborda o estudo das parábolas não apenas como representação gráfica da função quadrática, mas analisa também sua origem, propriedades e aplicações no cotidiano. Dando significado ao assunto estudado, fazendo com que brote no aluno o interesse pela Matemática.

Essa proposta pedagógica foi planejada para um período de 13 horas de aulas em que:

1ª aula Os alunos irão analisar as secções de um cone, utilizando material concreto, dando ênfase à parábola, definindo-a e apresentando seus elementos.

2ª e 3ª Aula Será aplicada a atividade de construção de uma parábola utilizando o GeoGebra e análise de suas propriedades.

4ª e 5ª Aula Será aplicada a atividade de construção e análise dos gráficos de uma função quadrática, relacionando a forma algébrica da função com seu gráfico.

6ª e 7ª Aulas Será apresentado aos alunos algumas aplicações de parábolas no cotidiano e de algumas funções, cujo conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores serão fundamentais em sua analise e tomada de decisão.

8ª Aula Será apresentado aos alunos as orientações necessárias para o reconhecimento de uma parábola. A turma será dividida em grupos com no máximo 5 alunos que deverão fotografar algumas formas parabólicas.

9ª e 10ª Aulas Os grupos irão escolher uma figura que aparenta ser uma parábola e fazer a investigação utilizando o GeoGebra.

11ª Aula Os grupos irão criar uma apresentação de seus resultados para ser apresentado aos demais alunos da turma.

12ª e 13ª Aulas Essas aulas serão reservadas para apresentação dos grupos e discussão a respeito dos métodos utilizados por cada um.

3.1 Apresentação da parábola.

3.1.1 Secção de um cone

A parábola será apresentada através das secções de um cone. Nessa atividade serão observadas as cônicas: circunferência, elipse e parábola, de acordo com o ângulo formado pelo plano que secciona o cone e uma de suas geratrizes, dando ênfase ao estudo da parábola. Ver anexo

3.1.2 Definição de parábola

Nesse momento os alunos deverão construir uma parábola com auxilio do Geogebra usando a definição, definir concavidade e vértice da parábola e analisar sua propriedade de simetria em relação ao eixo focal. Ver anexo 5.1

3.1.3 Parábola como gráfico da função do segundo grau

Nesse momento serão aplicadas atividades que levará o aluno a compreender que o gráfico de uma função quadrática representa uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e que relacione os coeficientes da função com alguns pontos notáveis da parábola como interseção com os eixos coordenados e vértices. Ver anexo 5.2.2

3.2 Algumas aplicações da parábola e da Função quadrática.

É comum entre os alunos do Ensino Médio a ideia de que a importância de um assunto está associada a sua aplicabilidade no cotidiano. Nesse momento será apresentado aos alunos algumas aplicações da parábola e da função quadrática.

3.3 Reconhecimento de uma parábola.

Após conhecer a forma parabólica como o aluno pode ter certeza que não se trata de um arco de circunferência, um arco de uma elipse ou qualquer outra forma?

Pensando nessa questão os alunos foram orientados a fotografar uma forma que possivelmente represente uma parábola e com o auxilio do GeoGebra e dos conhecimentos de funções quadráticas, investigar se realmente é uma parábola. Para alcançar esse objetivo deverá seguir os passos:

1. Tirar uma foto de um objeto ou forma que aparenta ser uma Parábola. É necessário tirar uma fotografia cuja suposta parábola tenha concavidade voltada para baixo ou para cima e que não fique rotacionada(A câmera deve ficar posicionada paralelamente a figura);

2. Inserir essa figura no plano de fundo do GeoGebra e colete três pontos pertencentes à possível parábola;

3. Utilizando os pontos coletados e determinar a forma algébrica de uma função quadrática que contenha esses pontos;

4. Construa o gráfico da função encontrada, a partir daí, verifique se ele é ou não uma parábola, caso o gráfico da função coincida com a figura.

Capítulo 4

Análise da proposta pedagógica

4.1 Turma Piloto

No ano de 2012 foi aplicado aos alunos a atividade utilizando o software GeoGebra para analisar as relações entre coeficientes da função quadrática com o gráfico dessa função. Ver anexo 5.2.1

Os alunos não tiveram dúvidas quanto à primeira questão. Nesse momento aproveitaram para testar algumas ferramentas do GeoGebra, como: mudar a cor e a espessura da parábola utilizando as propriedades, raízes utilizando o comando Raiz[<Polinômio>], coordenadas do vértice utilizando a ferramenta extremum. Dessa forma o aluno se familiarizava com o software.

Na segunda questão os alunos tiveram dificuldade em identificar as transformações decorrente da mudança dos coeficientes, por esse motivo foi necessário uma intervenção do professor, que induziu o aluno a observar as mudanças decorrentes à variação dos coeficientes. O enunciado deixou inúmeras opções de respostas, que foram dadas pelos alunos, tais como:

"Quando varia o coeficiente a, a parábola se abre e se fecha ficando para cima ou para baixo."

"Quando variamos o valor de b, a parábola se desloca para direita ou para esquerda."

"O valor de de c, é responsável por fazer a parábola subir ou descer."

As respostas citadas eram coerentes, porém na folha da atividade não tinha o espaço para tais respostas, então o aluno pensava que estava errando, dessa forma foi de fundamental importância a intervenção do professor no processo de construção das respostas.

As questões 03, 04, 05 e 06 também foram respondidas sem grandes dificuldades. Nesse momento o professor reforçou as propriedades observadas nas questões anteriores, pedindo que os alunos fizesse uma previsão da localização do gráfico da função no plano cartesiano.

As questões 07 e 08, assim como a segunda questão, foram respondidas de formas diferentes pelos alunos. Dessa forma foram necessárias as intervenções do professor para ajustar as respostas para a linguagem matemática.

A atividade no geral valorizou a capacidade dos alunos de analisar e julgar as informações obtidas pelo GeoGebra, de dialogar e construir o conhecimento de forma coletiva. O GeoGebra nesse caso foi utilizado como uma ferramenta que ajuda o aluno a investigar as transformações sofridas pelo gráfico ao variar um dos coeficientes da função quadrática.

A facilidade em analisar o gráfico da função no GeoGebra também otimizou o tempo da aula, pois eram utilizadas 08 aulas para fazer a análise, enquanto que com o uso do softwere foram necessárias 04 aulas.

Analisando as dificuldades de responder algumas questões, foi constatado a necessidade de reformulação de algumas questões, para que os alunos sejam melhor direcionados nas análises, facilitando assim suas conclusões e construção das propriedades.

Outro ponto a salientar é a falta de questões contextualizadas, que mostrem aplicações da função quadrática no cotidiano.

4.2 2ª Turma Ano de 2013

As experiências obtidas na turma piloto mostrou necessário uma reformulação nas questões da atividade que utiliza o software GeoGebra para analisar as relações entre coeficientes da função quadrática com o gráfico dessa função. Dessa forma foram feitos ajustes nas perguntas para que o aluno observasse as diversas transformações sofridas pelo gráfico da função ao variar os valores dos seus coeficientes, que essas observações fossem discutidas em sala de aula e respondidas de forma que os alunos tenham um registro com uma abordagem lógica e didática das transformações obtidas. Ver anexo 5.2.2

Nessa atividade também foi incluída uma questão para analisar a simetria da parábola, propriedade importante que não constava na atividade da turma piloto e difícil de observar sem o auxilio do sofware.

Outra carência identificada na atividade anterior foi o contexto. Por isso foi inserida uma questão contextualizada, onde os alunos puderam aplicar as ferramentas do GeoGebra para analisar um contexto.

O novo formato dado à atividade sanou as dificuldades obtidas na turma piloto, os alunos tiveram um melhor direcionamento para o registro das observações sendo necessárias duas aulas para sua conclusão. A inclusão da questão contextualizada deu significado ao que estava sendo estudado, mostrando sua aplicação no cotidiano.

4.3 3ª Turma Ano de 2014

Após ajustar a atividade de análise do gráfico da função do 2º grau em 2013, houve a necessidade de elaborar uma proposta pedagógica que dê significado ao estudo parábolas, não relacionando-a apenas com o gráfico da função quadrática e sim analisa a sua origem e as suas importantes aplicações, para que o aluno observem a parábola no mundo que vivem. Dessa forma deve ser aplicadas atividades praticas que desperte o interesse do aluno pelo assunto em questão, como foi mostrado no capítulo 3.

Nesse ano após estudar o conceito de função quadrática e mostrar algumas de suas aplicações no cotidiano e da importância da representação gráfica em sua análise foram seguidas as propostas citadas na seção 3.2.

Como nos anos anteriores o GeoGebra facilitou a compreensão dos alunos em relacionar à forma algébrica da função quadrática com sua representação gráfica. Alem disso as três primeiras aulas apresentou ao aluno a parábola como um cônica, sua propriedade refletora, sua simetria em relação ao eixo focal e que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola em que seu eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas.

A avaliação da proposta foi realizada com a atividade de reconhecimento da parábola no cotidiano descrita na 8ª até a 13ª aula.

Das figuras escolhidas pelas equipes apenas $\frac{1}{3}$ representava uma parábola as outras a função encontrada não tinha representação gráfica coincidindo com a figura.

Para determinar a lei de formação da função do segundo grau todas as equipes optaram por colher os pontos em que a figura intersepta os eixos coordenados. Apenas duas estrategias foram utilizadas. Substituir as coordenadas dos pontos encontrados na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e por meio de resolução de sistema de equações determinar seus coeficientes. A outra estrategia utilizada foi determinar os coeficientes utilizando as formulas de soma e produto das raízes da função do 2º grau.

Capítulo 5

Considerações Finais

De acordo com as observações citadas no capitulo anterior podemos afirmar que a proposta pedagógica sugerida neste trabalho, atendeu às expectativas quando o aluno assume o papel de protagonista no processo de ensino aprendizagem, utilizando o GeoGebra como uma ferramenta investigativa, que quando bem orientado por atividades desafiadoras e planejadas para o uso dessa ferramenta, o aluno é capaz de aprender os conhecimentos de forma significativa e otimizar o tempo das aulas.

Foi comprovado também que a introdução do estudo das cônicas no 1º ano do Ensino Médio, lincada com o estudo da representação gráfica da função quadrática, permite ao aluno conhecer a origem da parábola, suas propriedades e aplicações, dando significado a essa curva tão importante para a humanidade.

É proposito desse trabalho disponibilizar aos professores de matemática do ensino médio uma sequência didática simples de ser aplicada e eficiente no estudo da função quadrática, capaz de minimizar problemas enfrentados por docentes e discentes no ensino-aprendizado do tema.

Anexos

5.1 Construção da Parábola no GeoGebra

Segue atividade utilizada nas três primeiras aulas.

Construção da parábola utilizando a definição.

Definição: Dada uma reta d e um ponto F, tal que $F \notin d$. O lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distancia de d é igual à distância a F é chamado de parábola de foco F e diretriz d.

Questão 01: siga o roteiro a seguir para construção de uma parábola no geogebra.

1. construa um reta e um ponto não pertencente a essa reta. Renomeie de d e F, respectivamente e oculte os pontos utilizados para a construção da reta. A reta será a diretriz e ponto F o foco

2. Utilizando a ferramenta *Ponto em Objeto* construa um ponto C pertencente a diretriz e em seguida uma reta que passa por F e C.

3. Construa o ponto médio do segmento FC e chame-o de M

4. Construa uma reta que passa por M e perpendicular a reta FC e outra reta perpendicular a diretriz que passa por C.

5. Utilizando a ferramenta *Intersecção de Dois Objetos*, determine o ponto de intersecção entre as retas construídas no item anterior e chame-o de P.

6. Clique no ponto P com o botão direito do mouse e depois em Habilitar Rastro.

7. Utilize a ferramenta *Mover* e depois arraste o ponto C sobre a reta diretriz. O ponto P será rastreado formando a parábola.

Analise o triangulo $\triangle PFC$ e mostre que $FP = PC$.

Questão 02: siga o roteiro a seguir para construção de um modelo que analisa a propriedade refletora da parábola no geogebra.

1. Construa uma reta, oculte os pontos utilizados para sua construção e a chame de d. Em seguida construa um ponto não pertencente a d e chame-o de F.

2. Utilizando a ferramenta *Parábola*, construa a parábola de foco F e diretriz d.

3. Utilizando a ferramenta *Ponto em Objeto* construa um ponto pertencente a parábola e chame-o de P. Em seguida determine a reta tangente a essa parábola passando por P, utilizando a ferramenta *Reta Tangente* e a chame de t.

4. construa a retas:

   - Eixo focal l : perpendicular a d que passa por F
   - Reta normal n : Perpendicular a t que passa por F.
   - r: paralela ao eixo focal que passa por P.
   - s: reta que passa pelos pontos F e P.

5. Construa o ângulo formado entre as retas r e n, e o ângulo formado entre as retas s e n. Em seguida chame-os de α e β.

6. Utilizando a ferramenta *mover*, movimente o ponto P e observe os valores das medidas dos ângulos α e β na Janela de Álgebra.

   Complete o teorema a seguir de acordo com as observações feitas anteriormente.
   Sejam as seguintes retas passando por um ponto P da parábola $\wp$:
   r, paralela ao eixo focal l,
   n, normal a $\wp$ (isto é, perpendicular à reta tangente a $\wp$ no ponto P),
   s, que passa pelo foco F de $\wp$ e P .
   Então os ângulos entre r e n e entre s e n são.

5.2 Analisando a função do 2º grau no GeoGebra

Segue atividades aplicadas na 4ª e 5ª aula. A primeira foi aplicada no ano de 2012. A segunda atividade nos anos posteriores, após reformulação necessária para sanar as deficiencias constatadas na primeira atividade.

5.2.1 Atividade de 2012

Analisando a função do 2º grau no GeoGebra

Questão 01: Insira as funções no geogebra.

a) $f(x) = x^2$
b) $g(x) = x^2 + 3x$
c) $h(x) = -6x^2 - 2x + 1$
d) $d(x) = 0{,}5x^2 - 8$
e) $v(x) = x^2 - 3x + 10$

Observando os gráficos das funções, qual o formato do gráfico de uma função quadrática?

____

Questão 02: Construa o gráfico da função f(x) = ax^2+bx+c no campo de entrada e insira três seletores a, b e c. Movimente os seletores e observe o aspecto da parábola.

Com base nessa construção faça uma análise das principais modificações em função da movimentação dos valores a, b e c (posítivos, negativos e iguais a zero).

Coeficiente a

Se a < 0 ____
Se a > 0 ____
Se a= 0 ____

Coeficiente b

Se b < 0 ____
Se b > 0 ____
Se b = 0 ____

Coeficiente c

Se c < 0 ____
Se c > 0 ____
Se c = 0 ____

Questão 03: Construa o gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x - 5$. Análise o gráfico e responda:
a) Quais são as raízes da função?
b) Qual o ponto que o gráfico da função intersecta o eixo das ordenadas?
c) Em qual intervalo a função é positiva?
d) Em que intervalo a função é negativa?
e) Quais as coordenadas do vértice dessa função? Essa função admite valor máximo ou mínimo?
f) Em que intervalo essa função é crescente? E decrescente?

Questão 04: Construa o gráfico da função $g(x) = -x^2 + 12x$. Análise o gráfico e responda:
a) Quais são as raízes da função?
b) Qual o ponto que o gráfico da função intersecta o eixo das ordenadas?
c) Em qual intervalo a função é positiva?
d) Em que intervalo a função é negativa?
e) Quais as coordenadas do vértice dessa função? Essa função admite valor máximo ou mínimo?
f) Em que intervalo essa função é crescente? E decrescente?

Questão 05: Construa o gráfico da função $g(x) = x^2 + 25$. Análise o gráfico e responda:
a) Quais são as raízes da função?
b) Qual o ponto que o gráfico da função intersecta o eixo das ordenadas?
c) Em qual intervalo a função é positiva?

d) Em que intervalo a função é negativa?
e) Quais as coordenadas do vértice dessa função? Essa função admite valor máximo ou mínimo?
f) Em que intervalo essa função é crescente? E decrescente?

Questão 06: Construa o gráfico da função $g(x) = x^2 - 12x + 36$. Análise o gráfico e responda:

a) Quais são as raízes da função?
b) Qual o ponto que o gráfico da função intersecta o eixo das ordenadas?
c) Em qual intervalo a função é positiva?
d) Em que intervalo a função é negativa?
e) Quais as coordenadas do vértice dessa função? Essa função admite valor máximo ou mínimo?
f) Em que intervalo essa função é crescente? E decrescente?

Questão 07: Analisando as funções das questões anteriores e suas representações gráficas, estabeleça um critério para determinar o intervalo em que uma função do 2º grau é decrescente ou crescente.

Questão 08: Calcule o valor do discriminante das funções das questões anteriores e faça uma relação entre o valor de Δ e as raízes das funções:

Se $\Delta > 0$, então ____

Se $\Delta = 0$, então ____

Se $\Delta < 0$, então ____

5.2.2 Atividade de 2013 e 2014

Colégio Soledade

Aluno(a): ____

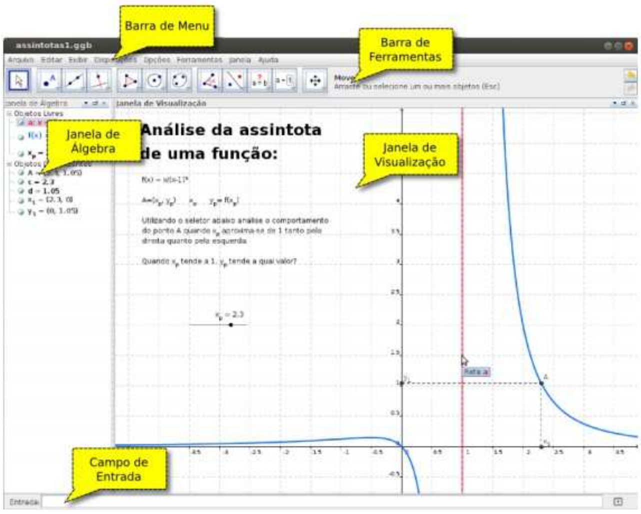
Série: 1ª Turma: ____ Nº: ____ Data: ___/___/___

Profº: ________________________

Ensino Médio Unidade: II

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

Analisando uma Função do 2º grau:



Analisando uma função do 2º grau no software Geogebra.

a) Insira três seletores a, b e c.
b) Construa o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. No campo de entrada digite (f(x) = a*x² + bx + c).
c) Movimente os seletores e observe o aspecto da parábola.
d) Faça uma análise das principais modificações em função da movimentação dos valores a, b e c (positivos, negativos e iguais a zero).

Conclusões

Coeficiente a

Se a > 0, a concavidade da parábola é voltada para _______________.
Se a < 0, a concavidade da parábola é voltada para _______________.
Quando o valor do coeficiente a se aproxima de zero, pela esquerda ou pala direita, a parábola se torna mais ___________________.
Quando o valor do coeficiente a se afasta de zero, pela esquerda ou pala direita, a parábola se torna mais ___________________.

2

Coeficiente b

Se b >0, a parábola corta o eixo y no ramo ___________________.
Se b <0, a parábola corta o eixo y no ramo ___________________.
Se b =0, a parábola corta o eixo y no ________________________.

Coeficiente c

O coeficiente c indica a __________________ do ponto que a parábola intersecta o eixo das __________________.

Raízes ou Zeros da Função.

As raízes da função determinam o ponto de interseção da parábola com o eixo ___________.

Determine as raízes da função. Para isso, use a ferramenta “interseção de dois objetos”.

Vértice

1. Determine o ponto médio localizado entre as raízes da função e chame-o de M. (Use a ferramenta “Ponto Médio ou Central”).
2. Construa a reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto M, troque sua cor e chame-a de r.
3. Determine o ponto de interseção entre a parábola e a reta r. Chame-o de V.
   V é o vértice da parábola.

Simetria na Parábola

1. Use a ferramenta “Ponto em Objeto” e marque alguns pontos em um dos ramos da parábola.
2. Use a ferramenta “Reflexão em relação a uma Reta” e determine os pontos simétricos dos pontos criados acima em relação a reta r.

Conclusão.

Os pontos encontrados no item 2 acima pertencem a _________________.
A reta r de equação _______ é chamada de eixo de simetria da parábola.

Construa o gráfico da função $= \; - 6 \; + 5$. Com base nessa construção:

a) Quais são as raízes da função? (Use a ferramenta interseção de dois objetos).
b) Em que ponto o gráfico da função intersecta o eixo-y? (Use a ferramenta interseção de dois objetos).
c) Determine o vértice da parábola. Use as formulas e verifique os valores de e .
d) Em qual intervalo a função é positiva?
e) Em qual intervalo a função é negativa?
f) A função assume valor máximo ou mínimo?

Resolva a situação-problema no software Geogebra.

(UNESP) Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão $h(t) = 3t - 3t^2$, onde h é a altura atingida em metros.

a) Em que instante t o grilo retorna ao solo?

b) Qual a altura máxima em metros atingida pelo grilo?

5.3 Apresentação dos resultados

Segue as apresentações dos alunos de reconhecimento da parábola no cotidiano descrita na 8ª até a 13ª aula.

5.3.1 1ª Equipe

A equipe é formada pelos alunos: Alan, Caio e Lucas, que decidiram fotografar a água que jorra do bebedouro.

Após definir a foto como fundo de tela do Geo Gebra e coletar alguns pontos, os componentes decidiram utilizar as fórmulas de soma e produto das raízes para determinar os coeficientes da função quadrática que passa por esses pontos e conseguiram confirmar

Passos

- 1 passo : observar e tirar a foto
- 2 Passo:Encontrar o Valor de A e B
- X’ = -1,36
- X’’=4,42 soma= 3,06
- Produto=-6.0112
- C/a =-6.0112

Valor de B

- -b/a=3.06
- -b/-0.33=3.06

Função Final

- Por fim nossa função foi completa
- F(x)=-0.33x²+1.02x+2

Nossa duvida foi tirada com sucesso!

5.3.2 2ª Equipe

A equipe é formada pelos alunos: Icaro e Lucas, que decidiram fotografar a estrutura de metal de uma carteira escolar.

Após definir a foto como fundo de tela do Geo Gebra e coletar alguns pontos, os componentes decidiram utilizar as fórmulas de soma e produto das raízes para determinar os coeficientes da função quadrática que passa por esses pontos e conseguiram confirmar que a figura escolhida não é uma parábola.

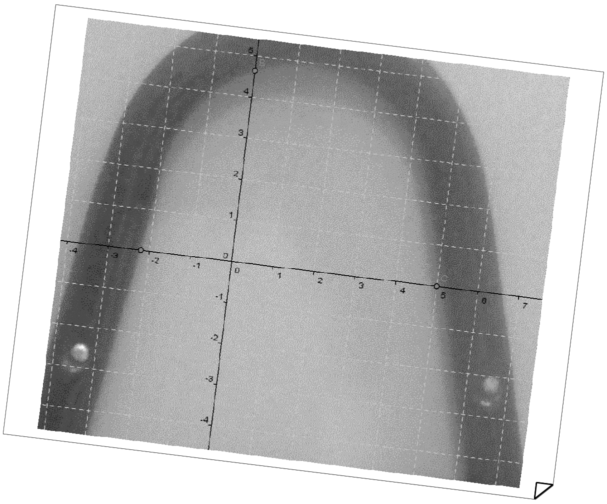
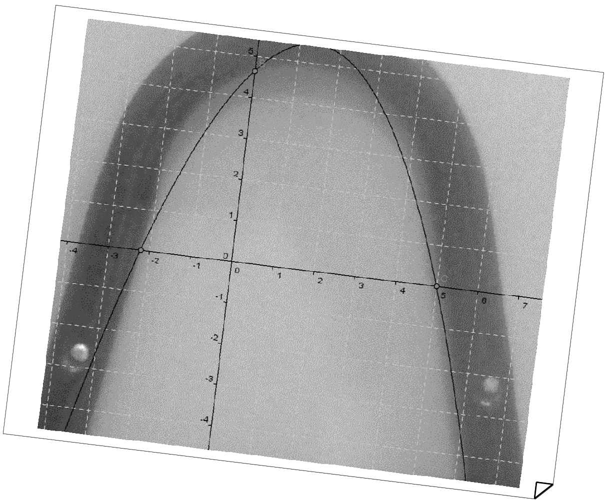


Imagem no plano cartesiano

Colocando no plano cartesiano achamos os pontos A =(-2,2,0) B = (0 , 4,64) C= (5, 0).Substituimos nessas formulas $x^1 + x^2 = -b/a$; $x^1 * x^2 = c/a$



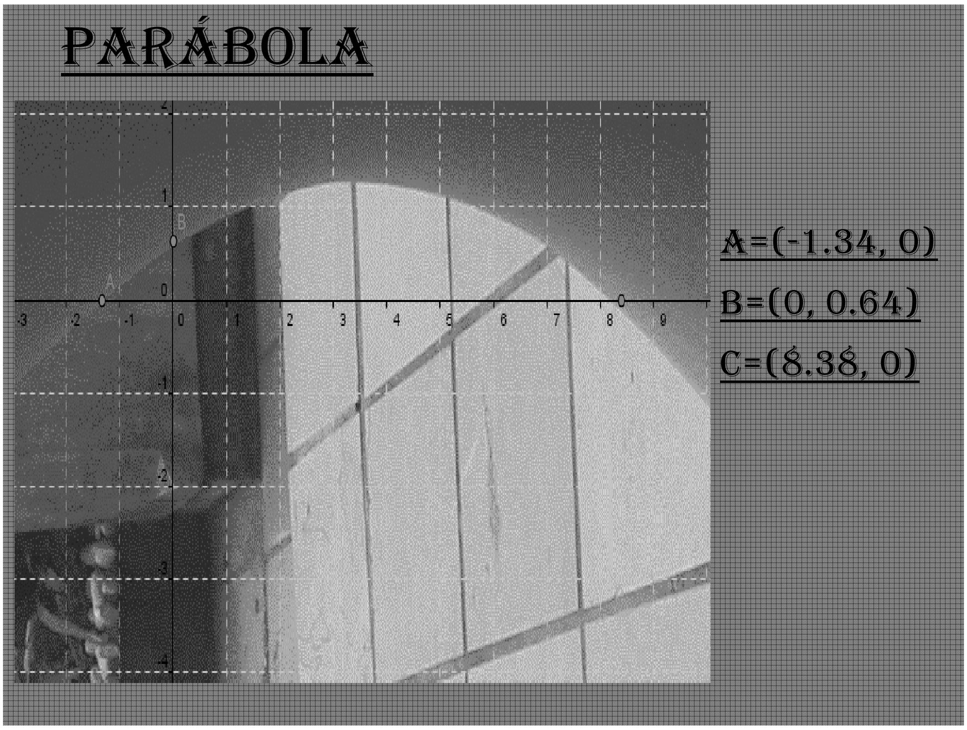
A confirmção da parabola

Após fazermos os calculos encontramos os valores de A = -0,42 , B= 1,17 , C = 4,64 e colocamos na função $f(x)=-0{,}42x^2 + 1{,}17x+ 4{,}64$

5.3.3 3ª Equipe

A equipe é formada pelos alunos: Abnê, Emille, Luã, Maria e Pedro, que decidiram fotografar a lateral de um jarro de plantas no jardim.

Após definir a foto como fundo de tela do Geo Gebra e coletar alguns pontos, os componentes decidiram utilizar as fórmulas de soma e produto das raízes para determinar os coeficientes da função quadrática que passa por esses pontos, porem não concluíram se a figura escolhida é uma parábola. No momento da apresentação fizeram o teste e verificaram que não é uma parábola.



CALCULO

A=(-1.34, 0) B=(0, 0.64) C=(8.38, 0)

b / a= x1 . X2

0,64 / a= -1,34 . 8,38

0,64 / a= -11,18

-11,18a= 0,64

a= 0,64 / -11,18

a= -0,057

-b / -0,057= 8,38 – 1,34

-b / -0,057= 7,04

b= 0,057 . 7,04

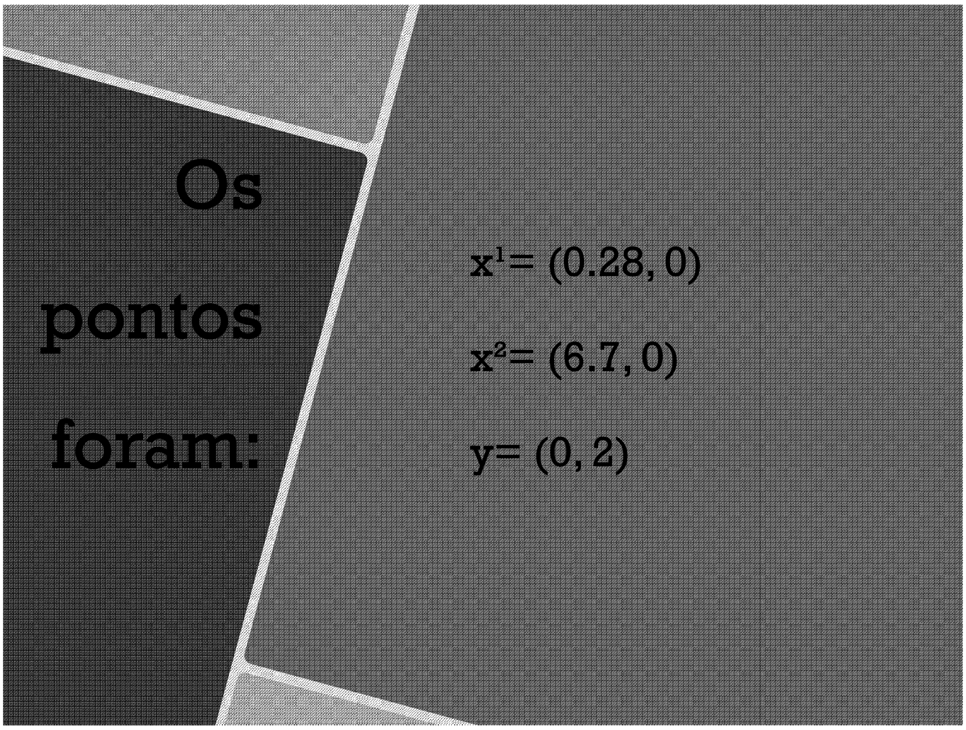
b= 0,41

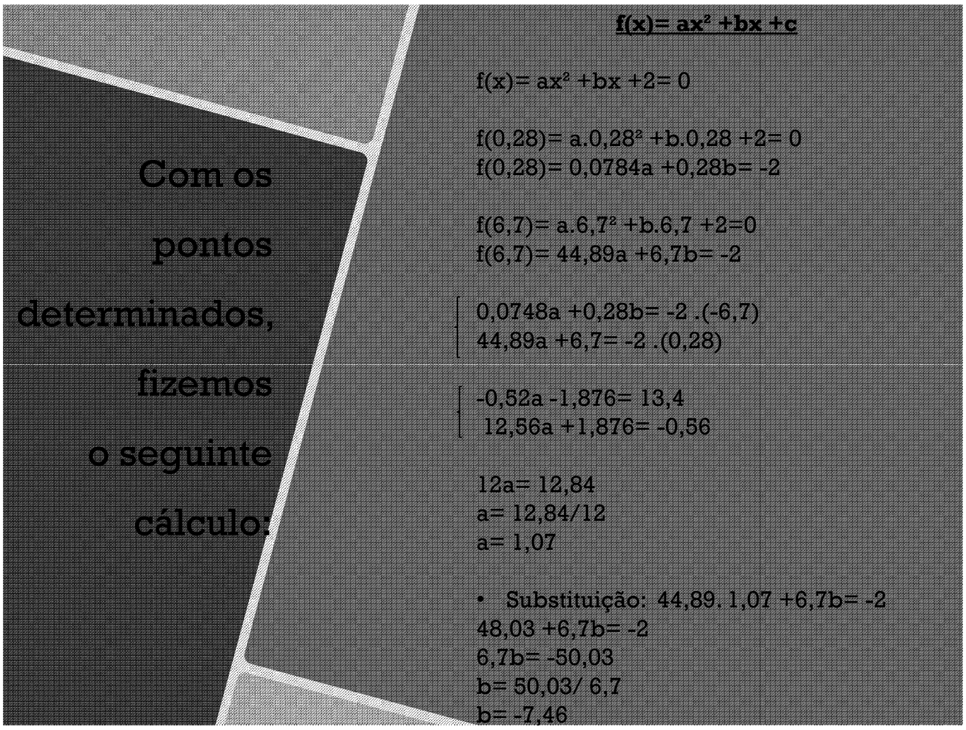
$$-0,057x^2 + 0,41x + 0,64$$

5.3.4 4ª Equipe

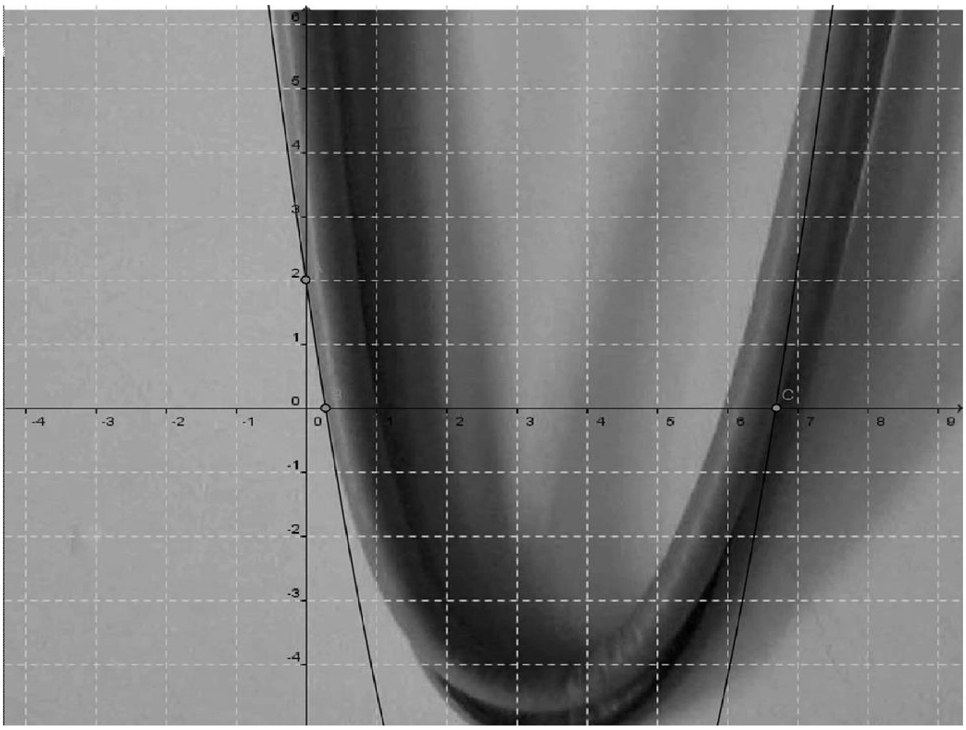
A equipe é formada pelos alunos: Milene, Nathalia, Larissa e Sued, que decidiram fotografar a alça de uma bolça.

Após definir a foto como fundo de tela do Geo Gebra e coletar alguns pontos, os componentes decidiram um sistema de equações, para determinar os coeficientes da função quadrática que passa por esses pontos e conseguiram confirmar que a figura escolhida não é uma parábola.




Com os pontos determinados, fizemos o seguinte cálculo:
f(x)= ax^2 +bx +c
f(x)= ax^2 +bx +2= 0
f(0,28)= a.$0,28^2$ +b.0,28 +2= 0
f(0,28)= 0,0784a +0,28b= -2
f(6,7)= a.$6,7^2$ +b.6,7 +2=0
f(6,7)= 44,89a +6,7b= -2
0,0748a +0,28b= -2 .(-6,7)
44,89a +6,7= -2 .(0,28)
-0,52a -1,876= 13,4
12,56a +1,876= -0,56
12a= 12,84
a= 12,84/12
a= 1,07
• Substituição: 44,89. 1,07 +6,7b= -2
48,03 +6,7b= -2
6,7b= -50,03
b= 50,03/ 6,7
b= -7,46


Assim,
nós digitamos a lei da função no Geogebra, junto com a imagem de fundo para ela se encaixar no plano cartesiano.


-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4
B
C

Bibliografia

[1] Jorge Delgado, Katia Frensel, Lhaylla Crissaff **geometria analítica Coleção PROFMAT** Rio de Janeiro: SBM, 2013

[2] Dante, Luiz Roberto. **Matemática:contextos aplicações Vol. 1**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. 295p.

[3] Paiva, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva/ Manoel Rodrigues Paiva Vol. 1**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010. 600p.

[4] Boyer, Carl Benjamin. **Historia da Matemática: Tradução; Elza F. Gomide** . 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

[5] Secretaria de Educação Básica, 2006. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2) **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília MEC, 2006. 135p.

[6] Secretaria da Educação Média e Tecnológica **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.**. Brasília: MEC, 2002.

[7] BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio**. – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

[8] Sousa, Fábio Antonio Leão **Funções quadráticas: estudo do gráfico das funções quadráticas** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013(Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/465/2011_00355_FABIO_ANTONIO_LEAO_

[9] Machado, Mirtes Tamy Gomes **Parábolas – As curvas preciosas (Disponível em: http://gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br)**