Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Algumas observações sobre continuidade de funções

Helba Alexandra Hermini

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli

2017

516 Hermini, Helba Alexandra
H554a Algumas observações sobre continuidade de funções / Helba Alexandra Hermini. - Rio Claro, 2017
47 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Elíris Cristina Rizziolli

1. Geometria. 2. Espaços métricos. 3. Transformações geométricas. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Helba Alexandra Hermini

ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Alice Kimie Miwa Libardi
Departamento de Matemática - Unesp - Rio Claro

Prof. Dr. Sérgio Tsuyoshi Ura
Autônomo

Rio Claro, 09 de Março de 2017

A Deus e aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus, o Grande Arquiteto do Universo.

Ao Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro, pela iniciativa desafiadora de promover o PROFMAT no campus de Rio Claro.

A Profª. Drª. Alice Kimie Miwa Libardi, por todo apoio e inspiração na realização desta dissertação.

A Profª. Drª. Elíris Cristina Rizziolli, pela total dedicação e apoio.

A minha mãe, Profª Priscilla Lucia Ghirotti Hermini, que me acompanhou durante todas as etapas da minha vida.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram com a realização deste trabalho.

Disse a flor para o Pequeno Príncipe: é preciso que eu suporte duas ou três larvas se quiser conhecer as borboletas.

Antoine de Saint-Exupéry.

Resumo

Este trabalho consiste em estudar a continuidade de funções do ponto de vista topológico. Além disso, exploramos as diferentes métricas em $\mathbb{R}^2$ e através de transformações geométricas neste espaço analisamos qual tipo de ação exerce em bolas abertas usando métricas diferentes no domínio e contradomínio.

Palavras-chave: Geometria, Espaços Métricos, Transformações Geométricas.

Abstract

In this work we study the continuity of maps from the topological point of view. In addition, we explore different metrics in $\mathbb{R}^2$ and by using geometric transformations we analyze what kind of action carries in open balls using different metrics in the domain and in the codomain.

Keywords: Metric space, Continuity, Geometric transformations.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Nesta dissertação faremos um estudo sobre continuidade de funções, sob o ponto de vista da Topologia.

Inicialmente, apresentaremos os espaços vetoriais com suas respectivas propriedades, bem como as transformações lineares, com ênfase em $\mathbb{R}^2$. Ainda neste capítulo abordaremos norma, produto interno e suas aplicações em $\mathbb{R}^2$.

O segundo capítulo deste trabalho abordará os espaços métricos, com ênfase nas métricas d, d' e d'' para $\mathbb{R}^2$. Também relacionaremos o conceito de bola aberta, bola fechada e esfera com as diferentes métricas.

No terceiro capítulo trataremos o estudo da continuidade e das aplicações contínuas bijetoras, cujas inversas também são contínuas: o homeomorfismo.

Na sequência apresentaremos métricas equivalentes no plano $\mathbb{R}^2$, suas propriedades e relações com os espaços métricos estudados no segundo capítulo.

Para finalizar relacionaremos esse estudo em uma classe especial de aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$: as transformações geométricas. Iniciaremos a referida abordagem considerando $\mathbb{R}^2$ como um espaço métrico munido da distância euclidiana e, concomitantemente, verificando quais as transformações geométricas que constituem isometrias.

Além disso, exploraremos as transformações geométricas de $\mathbb{R}^2$ em que o domínio e o contradomínio são munidos de métricas distintas e verificaremos suas particularidades.

1 Espaços Vetoriais

Neste capítulo faremos um estudo dos espaços vetoriais, com ênfase no plano $\mathbb{R}^2$, abordando também as transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, norma e produto interno.

Definição 1.1. *Um espaço vetorial real é um conjunto $(V,+,.)$ não vazio, com duas operações: soma $(+)$, $V \times V \longrightarrow V$, e multiplicação por escalar $(.)$, $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades sejam satisfeitas:*

i) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

ii) $u+v = v+u$;

iii) $\exists\, 0 \in V$ *tal que* $u+0=u$ *(0 é chamado vetor nulo);*

iv) $\forall u \in V, \exists\, -u \in V$ *tal que* $u+(-u)=0$;

v) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$;

vi) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$;

vii) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

viii) $1u = u$.

Exemplo 1.2. O conjunto dos vetores do espaço $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2); x_i \in \mathbb{R}\}$ tem estrutura de um espaço vetorial real em que as operações soma $(+)$ e multiplicação por escalar $(\cdot)$ são definidas como segue:

$$\begin{array}{cccc} +: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & (x_1,x_2)+(y_1,y_2) \end{array}$$

em que $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2)$.

$$\begin{array}{cccc} .: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda,(x_1,x_2)) & \longmapsto & \lambda.(x_1,x_2) \end{array}$$

em que $\lambda.(x_1,x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

Verifiquemos que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um *espaço vetorial real*.
De fato: $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2), w = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Propriedade Associativa).
De fato,

$$\begin{aligned}(u+v)+w = ((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2) &= \\ ((x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2)) &= \\ ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2) &= \\ (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2)) &= \\ ((x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2)) &= \\ ((x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2)) &= u+(v+w).\end{aligned} \tag{1.1}$$

ii) $u + v = v + u$ (Propriedade Comutativa).
Com efeito,

$$\begin{aligned}u+v = (x_1,x_2)+(y_1,y_2) &= \\ (x_1+y_1,x_2+y_2) &= \\ (y_1+x_1,y_2+x_2) &= \\ (y_1,y_2)+(x_1,x_2) &= v+u.\end{aligned} \tag{1.2}$$

iii) $\exists\, 0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + 0 = u$ (0 é chamado vetor nulo).
Pois:

$$\begin{aligned}u+0 = (x_1,x_2)+(0,0) &= \\ (x_1+0,x_2+0) &= \\ (x_1,x_2) &= u.\end{aligned} \tag{1.3}$$

iv) $\exists\, -u \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + (-u) = 0$.
Seja:

$$\begin{aligned}-u &= (-x_1,-x_2) \\ u+(-u) = (x_1,x_2)+(-x_1,-x_2) &= \\ (x_1-x_1,x_2-x_2) &= (0,0).\end{aligned} \tag{1.4}$$

v) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.
Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha(u+v) = \alpha((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = \\ \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2) = \\ (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2)) = \\ (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = \\ ((\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2)) = \\ (\alpha(x_1,x_2) + \alpha(y_1,y_2)) = \alpha u + \alpha v. \end{aligned} \tag{1.5}$$

vi) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$.
De fato,

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)v = (\alpha+\beta)(y_1,y_2) = \\ ((\alpha+\beta)y_1, (\alpha+\beta)y_2) = \\ (\alpha y_1 + \beta y_1, \alpha y_2 + \beta y_2) = \\ (\alpha y_1, \alpha y_2) + (\beta y_1, \beta y_2) = \\ \alpha(y_1,y_2) + \beta(y_1,y_2) = \alpha v + \beta v. \end{aligned} \tag{1.6}$$

vii) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
Com efeito,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)v = (\alpha\beta)(y_1,y_2) = \\ ((\alpha\beta)y_1, (\alpha\beta)y_2) = \\ (\alpha(\beta y_1), \alpha(\beta y_2)) = \\ \alpha(\beta y_1, \beta y_2) = \\ \alpha(\beta(y_1,y_2)) = \alpha(\beta v). \end{aligned} \tag{1.7}$$

viii) $1u = u$.
Pois

$$\begin{aligned} 1u = 1(x_1,x_2) = \\ (1x_1, 1x_2) = \\ (x_1,x_2) = u. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Definição 1.3. *Sejam V e W dois espaços vetoriais reais quaisquer. Uma transformação linear é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

i) $\forall u, v \in V$: $F(u+v) = F(u) + F(v)$;

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v \in V$: $F(\lambda v) = \lambda F(v)$.

Exemplo 1.4. A transformação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$F(x_1, x_2) = (3x_1 - 5x_2, 4x_1 + 7x_2)$ é uma transformação linear.
Podemos verificar que tanto a condição da soma como a do produto por um escalar preservam-se.
Consideramos os vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Temos que:

i) $F(u) = F(x_1, x_2) = (3x_1 - 5x_2, 4x_1 + 7x_2)$
$F(v) = F(y_1, y_2) = (3y_1 - 5y_2, 4y_1 + 7y_2)$
Desta forma,
$F(u+v) = F((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = F(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$
$= (3(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2), 4(x_1 + y_1) + 7(x_2 + y_2)) =$
$= (3x_1 + 3y_1 - 5x_2 - 5y_2, 4x_1 + 4y_1 + 7x_2 + 7y_2) =$
$= (3x_1 - 5x_2 + 3y_1 - 5y_2, 4x_1 + 7x_2 + 4y_1 + 7y_2) =$
$= (3x_1 - 5x_2, 4x_1 + 7x_2) + (3y_1 - 5y_2, 4y_1 + 7y_2) =$
$= F(u) + F(v)$.
$\therefore F(u+v) = F(u) + F(v)$.

ii) $F(\lambda u) = F(\lambda(x_1, x_2)) = (\lambda x_1, \lambda x_2) =$
$= (3\lambda x_1 - 5\lambda x_2, 4\lambda x_1 + 7\lambda x_2)$
$= \lambda(3x_1 - 5x_2, 4x_1 + 7x_2) =$
$= \lambda F(u)$
$\therefore F(\lambda u) = \lambda F(u)$

Portanto, como as condições da soma e do produto por um escalar foram satisfeitas, F é uma **transformação linear**.

Exemplo 1.5. Considere a aplicação T, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x + 2, y + 1) = (x, y) + (2, 1)$$

não é uma transformação linear.
De fato, $T(u+v) = T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$
$= ((x_1 + y_1) + 2, (x_2 + y_2) + 1)$.
Por outro lado,
$T(u) + T(v) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = (x_1 + 2, x_2 + 1) + (y_1 + 2, y_2 + 1) =$
$= ((x_1 + y_1) + 4, (x_2 + y_2) + 2)$. Portanto, $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$. Como veremos mais adiante, tal aplicação é denominada **translação**.

Observe que:

Definição 1.6. *Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o **módulo de** x (ou valor absoluto de x) e indicamos por $|x|$, como segue:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0, \\ -x, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Definição 1.7. *Seja E um espaço vetorial real, qualquer. Uma norma em E é uma função real $\| \quad \| : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado **norma de x**, de modo a serem cumpridas as condições a seguir:*
$\forall x, y \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

i) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.8. *Um espaço vetorial normado é um par $(E, \| \quad \|)$ onde E é um espaço vetorial real e $\| \quad \|$ é uma norma em E.*

Frequentemente se designa o espaço vetorial normado com E, deixando a norma subentendida.

Exemplo 1.9. Temos que $(\mathbb{R}, | \quad |)$ é um espaço vetorial normado em que
$| \quad |: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação módulo usual de $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.10. A aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \| \quad \|' : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & \|(x_1, x_2)\|' := |x_1| + |x_2| \end{array}$$

é uma norma para $\mathbb{R}^2$, pois:

i) Para $x = (0, 0)$ temos:
$\|(0,0)\|' = |0| + |0| = 0$

ii) $\|\lambda(x_1, x_2)\|' = \|(\lambda x_1, \lambda x_2\|' = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| =$
$= |\lambda| \cdot |x_1| + |\lambda| \cdot |x_2| = |\lambda| \cdot (|x_1| + |x_2|) = |\lambda| \cdot \|(x_1, x_2)\|'$.

iii) $\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\|' = \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\|' =$
$= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \|(x_1, x_2)\|' + \|(y_1, y_2)\|'$
Ou seja, $\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\|' \leq \|(x_1, x_2)\|' + \|(y_1, y_2)\|'$.

Vimos que as três condições de norma foram cumpridas. Logo, a aplicação é uma norma para $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.11. A aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \|\quad\|'': & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & \|(x_1, x_2)\|'' := \max\{|x_1|, |x_2|\} \end{array}$$

é uma norma para $\mathbb{R}^2$, pois:

i) Para $x = (0, 0)$ temos:
$\|(0, 0)\|'' = \max\{|0|, |0|\} = |0| = 0$

ii) $\|\lambda(x, y)\|'' = \|(\lambda x, \lambda y)\|'' = \max\{|\lambda x|, |\lambda y|\} =$
$= \max\{|\lambda||x|, |\lambda||y|\} = = |\lambda| \cdot \max\{|x|, |y|\} = |\lambda| \cdot \|(x, y)\|''$

iii) $\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\|'' = \|(x_1 + y_1), (x_2 + y_2)\|'' = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\}$
Suponha que: $\max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} = |x_1 + y_1|$ $(*)$
Observe que:
$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1| \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\} = \|(x_1, x_2)\|'' + \|(y_1, y_2)\|''$ $(**)$
Consequentemente, de $(*)$ e $(**)$, temos:
$\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\|'' \leq \|(x_1, x_2)\|'' + \|(y_1, y_2)\|''$
De modo análogo, segue o resultado caso $\max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} = |x_2 + y_2|$

Definição 1.12. *Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função $\langle \quad , \quad \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $u, v \in E$ um número real $\langle u, v\rangle$, chamado produto interno de u por v, de modo a serem cumpridas as condições a seguir: para $u, v, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários;*

P1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

P2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \cdot \langle u, v\rangle$;

P3) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

P4) $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle > 0$.

Exemplo 1.13. Verifiquemos que a aplicação dada por

$$\begin{array}{rccl} \langle \quad \rangle : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & \langle u, v\rangle := \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 \end{array}$$

é um produto interno para $\mathbb{R}^2$.

Considerando: $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2), w = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, temos:

P1) $\langle u + v, w\rangle = \langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle =$
$= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)\rangle =$
$= (x_1 + y_1) \cdot z_1 + (x_2 + y_2) \cdot z_2 =$

$= x_1 \cdot z_1 + y_1 \cdot z_1 + x_2 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_2 =$
$= (x_1 \cdot z_1 + x_2 \cdot z_2) + (y_1 \cdot z_1 + y_2 \cdot z_2) =$
$= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle =$
$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle;$

P2) $\langle \lambda u, v \rangle = \langle \lambda (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle =$
$\langle (\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2) \rangle =$
$\lambda x_1 \cdot y_1 + \lambda x_2 \cdot y_2 =$
$\lambda (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2) =$
$= \lambda \cdot \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle =$
$= \lambda \cdot \langle u, v \rangle;$

P3) $\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle =$
$= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 =$
$= y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 =$
$= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle = \langle v, u \rangle;$

P4) $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle = \langle 0, 0 \rangle > 0.$

Lema 1.14. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \quad , \quad \rangle$. A aplicação $\| \quad \| : V \to \mathbb{R}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ é uma norma para V, denominada norma proveniente de um produto interno $\langle \quad , \quad \rangle$.*

Demonstração: Precisamos verificar se as três condições da definição de norma são satisfeitas. A saber:

(i) $\forall v \in V$, temos: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Se $v = 0$, então $\langle v, v \rangle = 0$ e, consequentemente, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{0} = 0;$
Se $v \neq 0$, então, pela propriedade P4:
$\langle v, v \rangle > 0$, assim, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} > 0$, isto é, $\|v\| \neq 0$.
Portanto, $\|v\| = 0$ implica que $v = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$, pelas propriedades P2 e P3, temos:
$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = | \lambda | \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} = | \lambda | \cdot \|v\|.$

(iii) Para demonstrarmos a validade de (iii), primeiramente precisamos mostrar a seguinte desigualdade, conhecida como **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**:
$\forall u, v \in V, \ | \langle u, v \rangle | \overset{(*)}{\leq} \|u\| \cdot \|v\|$
De fato, se $v = 0$, então $< u, 0 > \leq \|u\| \cdot 0$.
Para $v \neq 0$, suponhamos que $\lambda = \dfrac{\langle u, v \rangle}{|u|^2}$ e verificamos que o vetor $w = v - \lambda \cdot u$ é perpendicular a u. Em outras palavras, $\langle w, u \rangle = 0$.
Tomamos o produto interno de $v = w + \lambda \cdot u$ por si mesmo:
$|v|^2 = |w|^2 + \lambda^2 \cdot |u|^2 \Rightarrow \lambda^2 \cdot |u|^2 \leq |v|^2$

Como $\lambda^2 \cdot |u|^2 = \dfrac{\langle u, v\rangle^2}{|u|^2}$, teremos $\langle u, v\rangle^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2$, que é a desigualdade que buscávamos.

Pois, observe que das propriedades P1 e P3, temos:
$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\cdot\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle =$
$= \|u\|^2 + 2\cdot\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\cdot\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \overset{(*)}{\leq} \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 =$
$= (\|u\| + \|v\|)^2$.
Assim, $(\|u+v\|)^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$.
Consequentemente: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
Portanto, tal aplicação é uma norma.

■

Se $\|v\| = 1$, isto é, $\sqrt{\langle v, v\rangle} = 1$, v é chamado vetor unitário. Dizemos também, neste caso, que v está **normalizado**. Observe que todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, tomando-se $u = \dfrac{v}{\|v\|}$.

Exemplo 1.15. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\langle\quad,\quad\rangle$ o produto interno usual. Então, se $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, é o comprimento do vetor v.

Por exemplo, tome $v = (1, 2)$

Então
$u = \dfrac{v}{\|v\|} \Longrightarrow u = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} \Longrightarrow u = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{1+4}} \Longrightarrow u = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}$.
Portanto, $u = (\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$ é unitário.

Nem toda norma num espaço vetorial E provém de um produto interno. Quando isso ocorre, vale a chamada *Lei do Paralelogramo*: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, que decorre da definição $\|x\|^2 =< x, x >$. Por exemplo, a norma $\|x\|' = |x_1| + |x_2|$ em $\mathbb{R}^2$ não provém de um produto interno porque ela não cumpre a lei do paralelogramo, já que se tomarmos $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$, podemos verificar que:
$\|x+y\|'^2 + \|x-y\|'^2 = \|(1,0)+(0,1)\|'^2 + \|(1,0)-(0,1)\|'^2 =$
$= \|(1,1)\|'^2 + \|(1,-1)\|'^2 = (|1|+|1|)^2 + (|1|+|-1|)^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$
Enquanto que: $2\cdot(\|x\|'^2 + \|y\|'^2 = 2\cdot(\|(1,0)\|'^2 + \|(0,1)\|'^2) =$
$2\cdot(|1|+|0|)^2 + (|0|+|1|)^2 = 2\cdot(1+1) = 2\cdot 2 = 4$
Como $8 \neq 4$, ocorre que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
Sendo assim, não é válida a *Lei do Paralelogramo*.

A título de informação, a lei do paralelogramo também é condição suficiente para que uma norma seja proveniente de um produto interno.

A saber:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\}$$

2 Espaços Métricos

Abordaremos neste capítulo elementos básicos da Topologia de Espaços Métricos, tendo como objetivo explorar $\mathbb{R}^2$ com as métricas euclidiana, da soma e do máximo.

Definição 2.1. *Uma* ***métrica*** *num conjunto M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a* ***distância*** *de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

i) $d(x, x) = 0$;

ii) *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os postulados (i) e (ii) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

O postulado (iii) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica nas variáveis x, y. A condição (iv) chama-se **desigualdade triangular**.

Um **espaço métrico** é um par (M, d), em que M é um conjunto e d é uma métrica em M. Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente *o espaço métrico M*, deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada. Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc.
Mas os chamaremos sempre *pontos* de M.

Exemplo 2.2. A métrica "zero-um". Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira simples. Basta definirmos a métrica $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. As condições i a iv são facilmente verificadas. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, *bastante trivial*, embora seja útil para contra-exemplos.

Exemplo 2.3. Pelas propriedade de módulo $|\quad|$, o par $(\mathbb{R}, d)$, com $d(x, y) = | x - y |$, é um espaço métrico em que tal métrica é chamada **métrica usual da reta**. A menos que digamos o contrário, em $\mathbb{R}$ sempre adotamos tal métrica de forma implícita.

Para cada conjunto M é possível definirmos mais de uma métrica. A seguir apresentaremos as três métricas usuais para $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.4. Métricas em $\mathbb{R}^2$. Dados os pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, as seguintes funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são métricas em $\mathbb{R}^2$:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.1}$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \tag{2.2}$$

$$d''(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \tag{2.3}$$

Este fato decorre da observação de que $d(x,y) = \|x-y\|$, $d'(x,y) = \|x-y\|'$ e $d''(x,y) = \|x-y\|''$ em que $\| \quad \|$, $\| \quad \|'$ e $\| \quad \|''$ são as normas para $\mathbb{R}^2$ vistas no capítulo anterior.

O próximo exemplo ilustra como definir uma métrica para o espaço cartesiano de dois espaços métricos a partir das métricas dos espaços envolvidos.

Exemplo 2.5. Pode-se mostrar que se (M, d_M) e (N, d_N) são espaços métricos quaisquer, então cada aplicação de $(M \times N) \times (M \times N)$ para $\mathbb{R}$ abaixo é uma métrica para o produto cartesiano $M \times N$: $\forall (a,b), (x,y) \in M \times N$,

1. $D((a,b),(x,y)) := \sqrt{{d_M}^2(a,x) + {d_N}^2(b,y)}$.
2. $D'((a,b),(x,y)) := d_M(a,x) + d_N(b,y)$.
3. $D''((a,b),(x,y)) := \max\{d_M(a,x), d_N(b,y)\}$.

Definição 2.6. *Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:*

*A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\} \tag{2.4}$$

*A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto a. Ou seja,*

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\} \tag{2.5}$$

*A **esfera** de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) = r$. Assim:*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\} \tag{2.6}$$

Veja que: $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$

Exemplo 2.7. No plano $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B(a;r)$ é o interior de um círculo de centro a e raio r, ou o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$. Estes casos corresponde a usarmos em $\mathbb{R}^2$ as métricas d, d'' ou d' respectivamente. A esfera $S(a;r)$ é o bordo da figura correspondente e $B[a;r]$, evidentemente, é igual a $B(a;r) \cup S(a;r)$.

Definição 2.8. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M.*

i) *Um ponto $a \in X$ diz-se um ponto interior a X quando é centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que se $d(x,a) < r$, então $x \in X$. Chama-se interior de X em M o conjunto $intX$ formado pelos pontos interiores a X;*

ii) *Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se* ***aberto*** *em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $intA = A$.*

Definição 2.9. *Um subconjunto E de um espaço métrico M é fechado quando este é o complementar de um subconjunto aberto de M, a saber, $F \subset M$ é um subconjunto fechado se $F = M - A$, em que A é um subconjunto aberto de M.*

3 Continuidade e Homeomorfismo

Trataremos neste capítulo o estudo da continuidade, bem como das aplicações contínuas bijetoras, cujas inversas também são contínuas: os homeomorfismos.

Definição 3.1. *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é **contínua** no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$$

Equivalentemente, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = (f(a); \epsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a; \delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

Exemplo 3.2. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$. As aplicações: $p_1 : X \to \mathbb{R}$ dada por $p_1(x, y) = x$ e $p_2 : X \to \mathbb{R}$ dada por $p_2(x, y) = y$ são aplicações contínuas.

De fato: seja $(a, b) \in X$, qualquer.

$\forall \varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ temos:

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow \\ |x - a| \leq \|(x, y) - (a, b)\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \\ |p_1(x, y) - p_1(a, b)| = |x - a| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ou seja: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |p_1(x, y) - p_1(a, b)| < \varepsilon$.

Portanto, p_1 é uma aplicação contínua.

De modo análogo segue a continuidade de p_2.

Proposição 3.3. *Se $f : M \to N$ e $g : M \to P$ são aplicações contínuas então a aplicação $h : M \to N \times P$ dada por $h(x) := (f(x), g(x))$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ e $a \in M$, quaisquer.

Da continuidade de f em a segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Por outro lado, da continuidade de g em a segue que existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow d(g(x), g(a)) < \varepsilon.$$

Assim, tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue que

$$\begin{aligned} d(x,a) < \delta \Rightarrow d(h(x), h(a)) = d((f(x), g(x)), (f(a), g(a))) = \\ \max\{d(f(x), f(a)), d(g(x), g(a))\} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ou seja: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x,a) < \delta \Rightarrow d(h(x), h(a)) < \varepsilon.$

■

Proposição 3.4. *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, se $f : M \to N$ é contínua no ponto a e $g : N \to P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \to P$ é contínua no ponto a.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ qualquer. A continuidade de g no ponto $f(a)$ nos permite obter $\lambda > 0$ tal que, para $y \in N$

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

Por sua vez, para tal $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ tal que, para $x \in M$

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda.$$

Consequentemente: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon$$

■

Definição 3.5. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos quaisquer. Dizemos que $f : M \to N$ é uma **função lipschitziana** quando existe uma constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x,y), \forall x, y \in M. \tag{3.3}$$

*A constante c é denominada **constante de Lipschitz**.*

Proposição 3.6. *Toda função lipschitziana é contínua.*

Demonstração: Seja $f : M \to N$ uma função lipschitziana do espaço métrico (M, d_M) no espaço métrico (N, d_N), com constante de Lipschitz $c > 0$.
Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$.
Então, $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \delta = \epsilon$

■

Exemplo 3.7. A aplicação norma $\| \quad \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua. De fato, basta observar que para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\|(x_1, x_2)\| - \|(y_1, y_2)\|| \leq \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|.$$

Ou seja, tal aplicação é lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1 e portanto, pela proposição anterior, segue a continuidade.

Exemplo 3.8. Sejam M um espaço métrico e $Y \subset M$ subespaço de M. A aplicação inclusão $i : Y \to M$ definida por $i(y) = y$ é uma aplicação lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1, já que $d(i(y_1), i(y_2)) = d(y_1, y_2)$. Logo, a aplicação inclusão é uma aplicação contínua.

Consequentemente, se $f : M \to N$ é uma aplicação contínua então, pelo teorema 3.4, a aplicação restrição $f|_Y : Y \to N$ dada por $f|_Y(y) = f(y)$ é também uma aplicação contínua pois $f|_Y = f \circ i$, com f e i aplicações contínuas.

Teorema 3.9. *Se (M, d) é um espaço métrico então a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Consideremos $M \times M$ um espaço métrico munido da métrica D' do exemplo 2.5, a saber, $D'((a, b), (x, y)) = d(a, x) + d(b, y)$, $\forall$ $(a, b), (x, y) \in M \times M$.

Veja que a métrica d é uma aplicação lipschitziana:

$$|d(a, b) - d(x, y)| \leq D'((a, b), (x, y)).$$

De fato, $\forall (a, b), (x, y) \in M \times M$:
$|d(a, b) - d(x, y)| = |d(a, b) + d(a, y) - d(a, y) - d(x, y)| = |d(b, a) + d(a, y) - (d(a, y) + d(y, x))| \leq |d(b, a) + d(a, y)| + |d(a, y) + d(y, x)| \leq |d(b, y)| + |d(a, x)| = d(a, x) + d(b, y) = D'((a, b), (x, y))$.

∎

Teorema 3.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$, se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas então também são contínuas as seguintes aplicações de X em $\mathbb{R}$: $f + g$, $f - g$ e $f.g$.*

Ainda, se $g \neq 0$ então a aplicação $\dfrac{f}{g}$ também é contínua.

Demonstração: Vide Proposição 3 da página 35 de [1]. ∎

Exemplo 3.11. A aplicação $f : (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ definida por $f(x, y) = \dfrac{(x, y)}{\|(x, y)\|}$ é uma aplicação contínua.

Pois, observe que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ em que $f_1(x, y) = \dfrac{x}{\|(x, y)\|}$ e $f_2(x, y) = \dfrac{y}{\|(x, y)\|}$. Pela proposição 3.3, se f_1 e f_2 forem contínuas segue a continuidade da f.

Agora, cada f_i é dada por $f_i(x,y) = \dfrac{p_i(x,y)}{\|(x,y)\|}$, $i = 1,2$. Pelos exemplos 3.2 e 3.7, $p_i(x,y)$ e $\|(x,y)\|$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e portanto, pelo exemplo 3.8, também contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Nestas condições, como $\|(x,y)\| \neq 0$, segue pelo teorema 3.2 a continuidade de cada f_i, $i = 1,2$. Portanto, f é contínua.

Definição 3.12. *Sejam M e N espaços métricos. Definimos **homeomorfismo** de M sobre N como uma bijeção contínua $f : M \longrightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são **homeomorfos**.*

Ao contrário do que ocorre com a Álgebra Linear, onde a inversa de uma transformação linear bijetiva também é linear, ou na Teoria dos Grupos, onde o inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo, em Topologia ocorre o fenômeno de existirem funções contínuas bijetivas $f : M \longrightarrow N$ tais que $f^{-1} : N \longrightarrow M$ é descontínua.

Exemplo 3.13. Seja M a reta com a métrica zero-um. A aplicação identidade $i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com a métrica usual não é um homeomorfismo, pois embora i seja contínua, sua inversa $j := i^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow M$ (que também é dada por $j(x) = x$) é descontínua em cada ponto $a \in \mathbb{R}$.
Com efeito, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, temos $B(j(a); \frac{1}{2}) = \{j(a)\} = \{a\}$ em M.

Mas não existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset \{a\}$, ou seja, não existe $\delta > 0$ tal que $j(B_{\mathbb{R}}(a;\delta)) = j(a - \delta, a + \delta) \subset \{a\} = B_M(j(a); \frac{1}{2})$.

É possível mostrar, com a proposição 3.4, que se $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ são homeomorfismos então $g \circ f : M \longrightarrow P$ e $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também são homeomorfismos.

4 Métricas Equivalentes em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo mostraremos a equivalência entre as métricas d, d' e d'' para $\mathbb{R}^2$, as quais já foram abordadas no segundo capítulo.

No que segue, dadas as métricas d_1 e d_2 no mesmo conjunto M, escreveremos, por simplicidade, $M_1 = (M, d_1)$, $M_2 = (M, d_2)$, $B_1(a; r)$ = bola de centro a e raio r segundo a métrica d_1 etc. Em geral, usaremos os índices 1 e 2 para distinguir objetos definidos com auxílio das métricas d_1 ou d_2 respectivamente.

Definição 4.1. *Diremos que d_1 é mais fina do que d_2, e escreveremos $d_1 \succ d_2$, quando a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \longrightarrow M_2$ for contínua.*

Observação 4.2. Como $i_{12}(x) = x$ para todo $x \in M$, a definição de continuidade fornece diretamente a seguinte condição necessária e suficiente para que d_1 seja mais fina do que d_2: para todo $a \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \varepsilon)$. Ou seja, $d_1 \succ d_2 \Leftrightarrow$ *toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1.*

Exemplo 4.3. Se o espaço métrico (M, d_1) é discreto (diz-se, neste caso, que d_1 é uma métrica *discreta*) então d_1 é mais fina do que qualquer outra métrica d_2 em M. Por outro lado, se d_2 for mais fina do que a métrica discreta d_1 então, para todo $a \in M$, existe uma bola $B_2(a; \delta)$ contida na bola $\{a\} = B_1(a; \varepsilon)$. Logo $B_2(a; \delta) = \{a\}$ e portanto d_2 também é discreta.

Proposição 4.4. *Sejam $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$ espaços métricos sobre o mesmo conjunto M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $d_1 \succ d_2$; (isto é, a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \to M_2$ é contínua)

(2) Para todo espaço métrico N, se $f : M_2 \to N$ é uma aplicação contínua então $f : M_1 \to N$ é também contínua; (isto é, toda aplicação contínua segundo d_2 é contínua segundo d_1)

(3) Se $f : M_2 \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f : M_1 \to \mathbb{R}$ é contínua;

(4) Para todo $a \in M$, a função $d_{2a} : M_1 \to \mathbb{R}$, definida por $d_{2a}(x) = d_2(a, x)$ é contínua no ponto $a \in M$;

(5) *Toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1;*

(6) *A função $d_2 : M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração: $(1) \Rightarrow (2):$ Inicialmente denotemos por f_1 a aplicação f em que M está munido da métrica d_1 e por f_2 esta mesma aplicação mas com M munido por d_2. Neste contexto, observe que $f_1 = f_2 \circ i_{12}$, em que $i_{12} : M_1 \to M_2$ é a aplicação identidade.

Agora por hipótese $d_1 \succ d_2$ consequentemente a aplicação i_{12} é contínua. Também por hipótese temos que f_2 é contínua. Nestas condições, pelo teorema 3.4, da composição $f_1 = f_2 \circ i_{12}$ segue a continuidade de f_1.

$(2) \Rightarrow (3):$ Basta considerar $N = \mathbb{R}$ em (2).

$(3) \Rightarrow (4):$ Observe que sendo $M_2 = (M, d_2)$ um espaço métrico, pela proposição 3.9, a aplicação $d_2 : M_2 \times M_2 \to \mathbb{R}$ é contínua. Deste fato segue que a aplicação $f : M_2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d_2(a, x)$ é contínua. Com isso, segue do item (3) que a aplicação d_{2a} é contínua.

$(1) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5):$ Note que as três condições podem ser interpretadas da seguinte maneira: $\forall\ a \in M,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : B_1(a, \delta) \subset B_2(a; \varepsilon)$, em que os índices 1 e 2 usados nas bolas abertas correspondem a métrica que foi considerada.

$(6) \Rightarrow (4):$ Veja que a aplicação d_{2a} é definida a partir de d_2, logo também é contínua.

$(1) \Rightarrow (6):$ Uma vez que de (1) temos que a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \to M_2$ é contínua pode-se mostrar que a aplicação identidade $I : M_1 \times M_1 \to M_2 \times M_2$ também é contínua. Por um argumento análogo ao da demonstração de $(1) \Rightarrow (2)$ segue que a partir da continuidade de $d_2 : M_2 \times M_2 \to \mathbb{R}$ obtemos a continuidade de $d_2 : M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$.

■

Definição 4.5. *Duas métricas d_1 e d_2 em um mesmo conjunto M são equivalentes se dão origem aos mesmos conjuntos abertos.*
Em outras palavras, duas métricas d_1 e d_2 num espaço M chamam-se equivalentes quando cada uma delas é mais fina do que a outra, isto é, quando a aplicação identidade $i_{1,2} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é um homeomorfismo. Escreve-se então $d_1 \sim d_2$.

Observação 4.6. A relação $d_1 \sim d_2$ é reflexiva, simétrica e transitiva.
Por exemplo, duas métricas discretas no mesmo espaço são sempre equivalentes. Se $d_1 \sim d_2$ e d_1 é discreta, então d_2 é discreta.
A fim de que se tenha $d_1 \sim d_2$ em M, é necessário e suficiente que qualquer bola aberta em relação a uma dessas métricas contenha uma bola aberta de mesmo centro em relação à outra.

Proposição 4.7. *Sejam* $M_1 = (M, d_1)$ *e* $M_2 = (M, d_2)$ *espaços métricos sobre o mesmo conjunto* M*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $d_1 \sim d_2$*; (isto é, a aplicação identidade* $i_{12} : M_1 \to M_2$ *é um homeomorfismo)*

(2) Para todo espaço métrico N*,* $f : M_2 \to N$ *contínua, se e somente se,* $f : M_1 \to N$ *contínua; (isto é, toda aplicação contínua segundo* d_2 *é contínua segundo* d_1 *e vice-versa)*

(3) $f : M_2 \to \mathbb{R}$ *é contínua, se e somente se,* $f : M_1 \to \mathbb{R}$ *é contínua;*

(4) Para todo $a \in M$*, as funções* $d_{1a} : M_2 \to \mathbb{R}$*, definida por* $d_{1a}(x) = d_1(a, x)$ *e* $d_{2a} : M_1 \to \mathbb{R}$*, definida por* $d_{2a}(x) = d_2(a, x)$*, são contínuas no ponto* $a \in M$*;*

(5) Toda bola aberta segundo uma dessas métricas contém uma bola aberta de mesmo centro segundo a outra;

(6) As funções $d_1 : M_2 \times M_2 \to \mathbb{R}$ *e* $d_2 : M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ *são contínuas.*

Demonstração: Segue da Proposição 4.4 já que $d_1 \sim d_2$ se, e somente se, $d_1 \succ d_2$ e $d_2 \succ d_1$. ■

Proposição 4.8. *Sejam* d_1 *e* d_2 *métricas em um conjunto* M *arbitrário. Se existirem constantes* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ *tais que:*

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta \cdot d_1(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$*, então as métricas* d_1 *e* d_2 *são equivalentes.*

Demonstração: Basta observarmos que a aplicação identidade $i_{1,2} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ e sua inversa $i_{2,1} : (M, d_2) \to (M, d_1)$ são, neste caso, ambas lipschitzianas. ■

Lema 4.9. *Sejam* d*,* d' *e* d'' *as métricas em* $\mathbb{R}^2$*. Quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}^2$*, tem-se:*

$$d''(x, y) \le d(x, y) \le d'(x, y) \le 2 \cdot d''(x, y)$$

Demonstração: Sejam $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, quaisquer.

$$d''(x, y) \overset{(1)}{\le} d(x, y) \overset{(2)}{\le} d'(x, y) \overset{(3)}{\le} n \cdot d''(x, y)$$

(1) Suponha que:
$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = |x_1 - y_1|$.
Veja que:
$|x_1 - y_1| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2} \le \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(x, y)$
Logo, $d''(x, y) \le d(x, y)$
Se $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = |x_2 - y_2|$, o resultado segue de modo análogo.

(2) Observe que:
$(d'(x,y))^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2|$.
Logo,
$(d(x,y))^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2| =$
$= (d'(x,y))^2$.
Ou seja,
$(d(x,y))^2 \leq (d'(x,y))^2$
$\therefore d(x,y) \leq d'(x,y)$.

(3) $d'(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} =$
$= 2 \cdot \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 2 \cdot d''(x,y)$
$\therefore d'(x,y) \leq 2 \cdot d''(x,y)$.

Por (1), (2) e (3) segue que $d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq 2 \cdot d''(x,y)$

■

Corolário 4.10. *As métricas d, d' e d'' são equivalentes.*

Demonstração: Segue diretamente dos resultados de 4.8 e 4.9 anteriores. ■

A equivalência das métricas d, d' e d'' no plano $\mathbb{R}^2$ pode ser notada também através da configuração das bolas abertas, já que todo disco contém um quadrado com diagonais paralelas aos eixos, o qual contém um quadrado de lados paralelos aos eixos e este, por sua vez, contém um disco, etc., todas essas figuras com o mesmo centro.

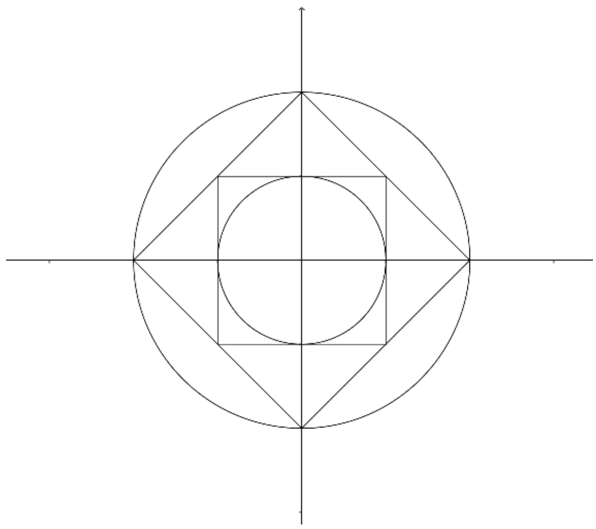

Figura 4.1: Representação da bola $B((a_1, a_2); r)$ segundo as métricas d, d' e d''

De fato, sejam $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$.

- $B_d(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((a_1,a_2),(x,y)) < r\} =$
$B_d(a;r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < r\right\} =$
$B_d(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}$,
que é o interior de uma circunferência de centro em a e raio r.

- $B_{d'}(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d'((a_1,a_2),(x,y)) < r\}=$
  $B_{d'}(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-a_1| + |y-a_2| < r\}$.
  Veja que $|x-a_1| + |y-a_2| < r$ é dada através da análise dos seguintes casos:

  (i) $(x-a_1) + (y-a_2) < r$.

  (ii) $-(x-a_1) + (y-a_2) < r$.

  (iii) $(x-a_1) + (-(y-a_2)) < r$.

  (iv) $-(x-a_1) + (-(y-a_2)) < r$.

  Assim, $B_{d'}(a;r)$ é o interior do paralelogramo delimitado pelas regiões (i), (ii), (iii) e (iv)

- $B_{d''}(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d''((a_1,a_2),(x,y)) < r\}$
  $B_{d''}(a;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-a_1|, |y-a_2|\} < r\}$.
  Veja que sendo $\max\{|x-a_1|, |y-a_2|\} < r$ segue que $|x-a_1| < r$ e $|y-a_2| < r$.
  Logo, $B_{d''}(a;r)$ é o interior do quadrado dado por $|x-a_1| = r$ e $|y-a_2| = r$.

5 Continuidade de Transformações Geométricas

Neste capítulo trataremos de uma classe especial de aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, a saber, as transformações geométricas.

Inicialmente, trabalharemos com as transformações geométricas em que $\mathbb{R}^2$ é visto como um espaço métrico munido da **distância euclidiana** d, tanto no domínio quanto no contradomínio (neste contexto indicaremos $(\mathbb{R}^2, d)$). Entre essas transformações destacamos a translação e a rotação, que como veremos, são exemplos clássicos de isometria em $\mathbb{R}^2$.

Posteriormente, ainda adotando a métrica euclidiana d para $\mathbb{R}^2$ tanto no domínio quanto no contradomínio, abordamos as transformações geométricas de $\mathbb{R}^2$ que não são isometrias, entre estas apresentamos a homotetia e os cisalhamentos horizontal e vertical.

Finalmente exploramos as transformações geométricas de $\mathbb{R}^2$ em que o domínio e o contradomínio são munidos com métricas distintas um do outro, a saber: $(\mathbb{R}^2, d)$, $(\mathbb{R}^2, d')$ e $(\mathbb{R}^2, d'')$.

Para tanto, primeiramente, apresentamos a definição de isometria.

No que segue usamos o sistema de eixos ortogonais OXY.

Definição 5.1. *Uma isometria do plano* $(\mathbb{R}^2, d)$ *é uma transformação* $T : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ *sobrejetora que preserva distâncias. Mais precisamente,* T *é uma isometria quando se tem*

$$d(T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

para quaisquer pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *no plano* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposição 5.2. *Toda isometria é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Seja $T : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ uma isometria, logo:

$$d(T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

para quaisquer pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ou seja, toda isometria é uma aplicação lipschitziana com a constante de Lipschitz $c = 1$ e portanto, contínua. ∎

Proposição 5.3. *Toda isometria é uma aplicação injetiva.*

Demonstração: Se $T(x_1,y_1) = T(x_2,y_2)$ então:
$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(T(x_1,y_1),T(x_2,y_2)) = 0$, logo $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ ■

Definição 5.4. *Seja $a = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ qualquer. A aplicação $T_a : (\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R}^2,d)$ dada por $T_a(x,y) := a + (x,y) = (x_0,y_0) + (x,y)$ é denominada translação.*

Uma translação T_a transforma toda figura F numa figura $T_a(F) = F'$, cujos pontos $(x_1,y_1) + a$ são obtidos transladando-se os pontos de (x_1,y_1) de F por a.

Lema 5.5. *Toda translação é uma isometria.*

Demonstração: Seja T_a uma translação qualquer.

$$\begin{aligned}
d(T_a(x_1,y_1),T_a(x_2,y_2)) &= d(a + (x_1,y_1)),(a + (x_2,y_2)) \\
&= d(((x_0,y_0) + (x_1,y_1)),((x_0,y_0) + (x_2,y_2))) = \\
&= d((x_0 + x_1, y_0 + y_1),(x_0 + x_2, y_0 + y_2)) = \\
&= \sqrt{((x_0 + x_1) - (x_0 + x_2))^2 + ((y_0 + y_1) - (y_0 + y_2))^2} = \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \\
&= d((x_1,y_1),(x_2,y_2)).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 5.6. Considere a aplicação:

$$\begin{array}{rccc}
T: & (\mathbb{R}^2,d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2,d) \\
 & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (3,0) + (x,y) = (x+3,y)
\end{array}.$$

Observe que,

$$B((0,0);1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) < 1\right\} \Rightarrow$$
$$B((0,0);1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\right\} \Rightarrow$$
$$B((0,0);1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Consequentemente,

$$T(B((0,0);1)) = \left\{T(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in B((0,0);1)\right\} \Rightarrow$$
$$T(B((0,0);1)) = \left\{(x+3,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Fazendo $X = x + 3$ e $Y = y$ temos $x = X - 3$ e $y = Y$ e então podemos reescrever o conjunto $T(B((0,0);1))$ como:

$$T(B((0,0);1)) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : (X-3)^2 + Y^2 < 1\right\}.$$

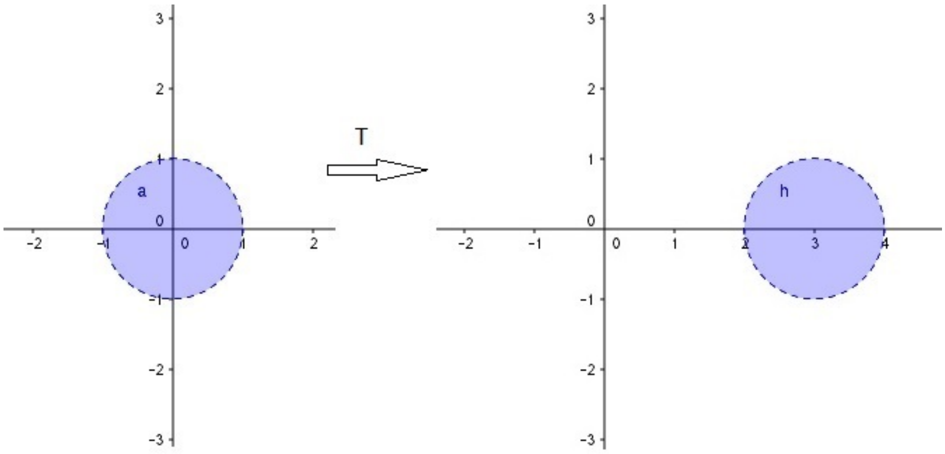

Figura 5.1: Translação

Definição 5.7. *Definimos uma* ***reflexão*** *em relação ao eixo OX, a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} T: & (\mathbb{R}^2, d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d) \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,-y) \end{array}$$

Lema 5.8. *A reflexão em relação ao eixo OX é uma isometria.*

Demonstração: Temos que:

(i) Toda reflexão é uma aplicação sobrejetora. Pois dado qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ocorre:

$$\begin{gathered} (x,y) = (a,-b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que} \\ T(x,y) = (x,-y) \Rightarrow T(a,-b) = (a,-(-b)) = (a,b) \\ \text{Portanto, } T(x,y) = (a,b) \end{gathered}$$

(ii) T preserva distância. De fato,

$$\begin{gathered} d(T(x_1,y_1),T(x_2,y_2)) = d((x_1,-y_1),(x_2,-y_2)) = \\ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + ((-y_1)-(-y_2))^2} = \\ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (-y_1+y_2)^2} = \\ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + ((-1)(y_1-y_2)^2} = \\ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (-1)^2 \cdot (y_1-y_2)^2} = \\ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \\ = d((x_1,y_1),(x_2,y_2)). \end{gathered}$$

$\blacksquare$

Exemplo 5.9. Seja a elipse:

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} \Rightarrow$$

$$T(\mathcal{E}) = \{T(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in \mathcal{E}\} =$$

$$= \left\{T(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} =$$

$$= \left\{(x,-y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}.$$

Considerando: $X = x$ e $Y = -y$, e consequentemente, $x = X$ e $y = -Y$, podemos reescrever $T(\mathcal{E})$ como:

$$T(\mathcal{E}) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{X^2}{4} + \frac{(-Y)^2}{9} = 1\right\} =$$

$$= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1\right\}.$$

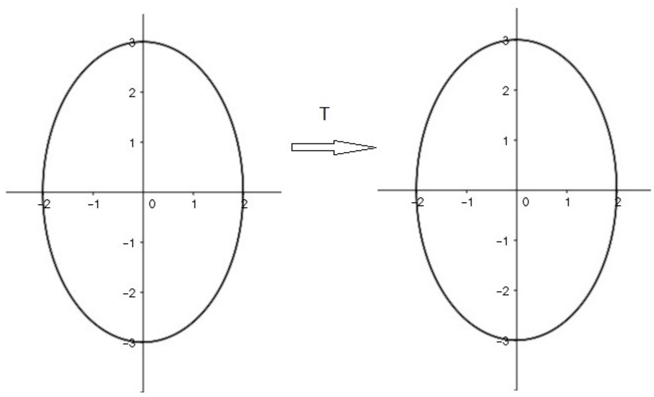

Figura 5.2: Reflexão

Definição 5.10. *Definimos uma rotação de* 90^0 *em* $\mathbb{R}^2$ *com relação à origem* $(0,0)$ *pela aplicação*

$$\begin{array}{rccc} T: & (\mathbb{R}^2, d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d) \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (-y, x) \end{array}$$

Lema 5.11. *Toda rotação de* 90^0 *é uma isometria.*

Demonstração: Temos que

(i) Toda rotação é uma aplicação sobrejetora, pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, tomando $(x,y) = (b,-a) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$T(x,y) = T(b,-a) = (-(-a), b) = (a,b)$$

Portanto, $T(x,y) = (a,b)$

(ii) Toda rotação preserva distância.

$$\begin{aligned} d(T(x_1,y_1),T(x_2,y_2)) = d((-y_1,x_1),(-y_2,x_2)) =\\ = \sqrt{((-y_1)-(-y_2))^2+(x_1-x_2)^2} =\\ = \sqrt{((-1)\cdot(y_1-y_2))^2+(x_1-x_2)^2} =\\ = \sqrt{(-1)^2\cdot(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2} =\\ = \sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2} =\\ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} =\\ = d((x_1,y_1),(x_2,y_2)). \end{aligned}$$

■

Exemplo 5.12. Seja a elipse:

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(\mathcal{E}) = \{T(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\in\mathcal{E}\} =\\ = \left\{T(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\} =\\ = \left\{(-y,x)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}. \end{aligned}$$

Considerando: $X=-y$ e $Y=x$, consequentemente, $x=Y$ e $y=-X$, podemos reescrever $T(\mathcal{E})$ como:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{E}) = \left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{Y^2}{4}+\frac{(-X)^2}{9}=1\right\} =\\ = \left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1\right\}. \end{aligned}$$

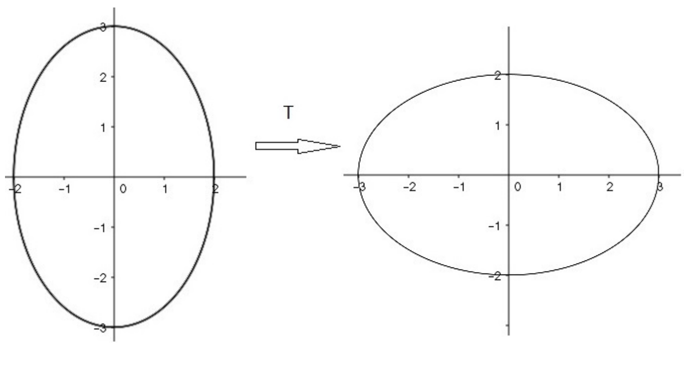

Figura 5.3: Rotação em torno de um eixo

Observação 5.13. As definições 5.7 e 5.10 são casos particulares de um tipo de isometria conhecido como **rotação**.

Além disso, uma vez que as aplicações Translação, Reflexão e Rotação são isometrias segue, pela proposição 5.2, que estas são aplicações contínuas.

A seguir apresentaremos transformações geométricas que não são isometrias.

Definição 5.14. *Definimos* ***Homotetia*** *como sendo uma dilatação ou contração de vetores, dada por*

$$\begin{array}{rccc} T: & (\mathbb{R}^2, d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d) \\ & v & \longmapsto & T(x,y) = \alpha \cdot v \end{array}$$

Essa transformação é chamada de homotetia de razão α, onde para $\alpha = 1$ temos a transformação identidade. A homotetia de razão $\alpha = -1$ coincide com a transformação chamada de reflexão em relação à origem, que leva o vetor v a seu simétrico $-v$.

Podemos perceber também que, para $|\alpha| < 1$, teremos uma contração.

Para $|\alpha| > 1$, teremos uma dilatação do vetor v, ou seja, a imagem dessa transformação corresponde a um vetor de mesma direção e sentido de v, mas com módulo maior, sendo v um vetor não nulo.

Essa transformação é escrita em coordenadas por $T(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$.

Teorema 5.15. *Toda homotetia é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Seja $T : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ uma homotetia dada por $T(x,y) = \alpha(x,y)$, logo: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{gathered} d(T(x_1,y_1), T(x_2,y_2)) = d(\alpha(x_1,y_1), \alpha(x_2,y_2)) = d((\alpha x_1, \alpha y_1), (\alpha x_2, \alpha y_2)) = \\ \sqrt{(\alpha x_1 - \alpha x_2)^2 + (\alpha y_1 - \alpha y_2)^2} = \sqrt{(\alpha^2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)} = \\ |\alpha|\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |\alpha| d((x_1,y_1),(x_2,y_2)). \end{gathered}$$

Portanto, $d(T(x_1,y_1), T(x_2,y_2)) = |\alpha| d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$, ou seja, T é uma aplicação lipschitziana e consequentemente contínua. ∎

Exemplo 5.16. Considere a seguinte homotetia de razão $\alpha = 2$

$$\begin{array}{rccc} T: & (\mathbb{R}^2, d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d) \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = 2 \cdot (x,y) \end{array}$$

Veja que $T(B((0,0);1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x)^2 + (2y)^2 < 1\}$.

Considerando $X = 2x$ e $Y = 2y$, ocorre que $x = \dfrac{X}{2}$ e $y = \dfrac{Y}{2}$, respectivamente.

E portanto podemos reescrever $T(B((0,0);1))$ da seguinte forma:

$$T(B((0,0);1)) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y}{2}\right)^2 < 1\right\} \Rightarrow$$

$$T(B((0,0);1)) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{X^2}{4}\right) + \left(\frac{Y^2}{4}\right) < 1\right\} \Rightarrow$$

$$T(B((0,0);1)) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{1}{4}\right)(X^2 + Y^2) < 1\right\} \Rightarrow$$

$$T(B((0,0);1)) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 + Y^2 < 4\right\}.$$

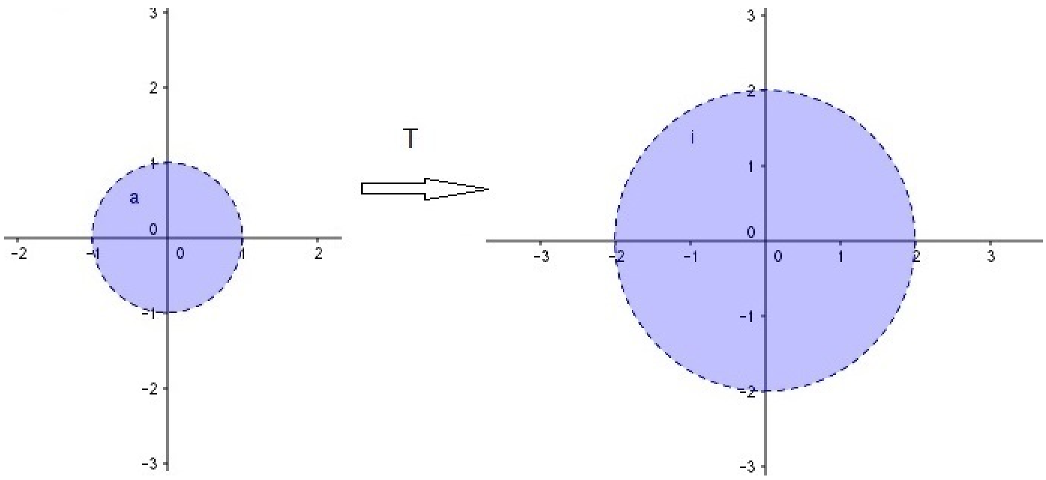

Figura 5.4: Homotetia

Definição 5.17. *Chamaremos de* ***Cisalhamento*** *a transformação geométrica correspondente a um deslizamento. Pode ser em relação ao eixo x ou em relação ao eixo y. No cisalhamento na direção do eixo x, cada ponto (x,y) se movimenta paralelamente ao eixo x de uma distância (designada) cy para a nova posição $(x+cy,y)$. Os pontos sobre o eixo x são mantidos fixos, e cada ponto fora do eixo x se movimenta de uma quantidade proporcional à sua distância em relação ao eixo x.*
O cisalhamento na direção do eixo y é semelhante, e cada ponto (x,y) se movimenta paralelamente ao eixo y de uma distância (de uma quantidade proporcional à sua distância em relação àquele eixo).

Cisalhamento horizontal:

$$\begin{array}{rccc} T_H: & (\mathbb{R}^2,d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2,d) \\ & (x,y) & \longmapsto & T_H(x,y) = (x+\alpha\cdot y, y) \end{array}$$

Cisalhamento vertical:

$$\begin{array}{rccc} T_V: & (\mathbb{R}^2,d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2,d) \\ & (x,y) & \longmapsto & T_V(x,y) = (x, y+\alpha\cdot x) \end{array}$$

Exemplo 5.18. Sejam $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1 \text{ e } |y| = 2\}$ e $T_H(x,y) = (x+3y, y)$.

Assim,

$$T_H(A) = \left\{T(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in A\right\} = \left\{(x+3y,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1 \text{ e } |y| = 2\right\}.$$

Considerando $X = x + 3y$ e $Y = y$ consequentemente, $x = X - 3Y$, $y = Y$ e então podemos reescrever $T_H(A)$ como: $T_H(A) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : |X - 3Y| = 1 \text{ e } |Y| = 2\}$.

Para representar geometricamente a imagem $T_H(A)$ é preciso analisar os casos a seguir:

(i) Se $X - 3Y > 0$ então $1 = |X - 3Y| = X - 3Y$. Com isso,
$-3Y = 1 - X \Rightarrow Y = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{X}{3} \Rightarrow Y = \dfrac{X}{3} - \dfrac{1}{3}$;

(ii) Se $X - 3Y < 0$ então $1 = |X - 3Y| = -X + 3Y$. Desta forma,
$-3Y = -1 - X \Rightarrow Y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{X}{3} \Rightarrow Y = \dfrac{X}{3} + \dfrac{1}{3}$;

(iii) Para $|Y| = 2$ temos $Y = 2$ ou $Y = -2$

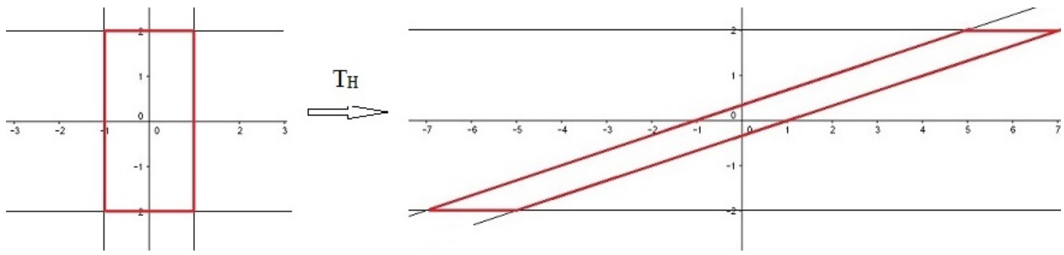

Figura 5.5: Cisalhamento

Observamos que o efeito do cisalhamento vertical nessa mesma figura A é análogo ao que foi feito para o cisalhamento horizontal no sentido de que obteremos novamente um paralelogramo; porém enquanto que no cisalhamento horizontal as retas paralelas ao eixo OX são mantidas, no cisalhamento vertical veremos que as retas mantidas serão as paralelas ao eixo OY.

Para finalizar este capítulo, trataremos de dois exemplos, a saber, o primeiro deles apresenta a forma geométrica da Elipse quando usamos na definição desta cônica a métrica da Soma d' em $\mathbb{R}^2$ e ainda comparamos esta nova configuração com a usual. No segundo exemplo tratamos de uma aplicação em que o domínio e o contradomínio estão munidos de métricas distintas um do outro.

Exemplo 5.19. Primeiramente observamos que, em geral, tratamos da cônica Elipse já utilizando sua Forma Canônica dada obtida via Geometria Analítica em que considera-se $\mathbb{R}^2$ munido da distância euclidiana. Entretanto, de modo mais geral, sabemos que a elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 < c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, então $\mathcal{E} := \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$.

A seguir apresentamos um tratamento para a Elipse considerando a métrica d', da soma, e apresentamos sua configuração geométrica via esta métrica.

Com efeito, sejam $c, a \in \mathbb{R}$ tais que $0 < c < a$ e suponha que $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que $P \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $d'(P, F_1) + d'(P, F_2) = 2a$, consequentemente:

$$d'(P, F_1) + d'(P, F_2) = 2a \Rightarrow d'((x, y), (c, 0)) + d'((x, y), (-c, 0)) = 2a \Rightarrow$$

$$(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a.$$

Analisemos cada caso:

1. $x \geq c,\ y \geq 0$ e $x \geq -c$:

   $(|x-c|+|y|)+(|x+c|+|y|) = 2a \Rightarrow x-c+y+x+c+y = 2a \Rightarrow 2x+2y = 2a \Rightarrow y = -x+a.$

2. $x < c,\ y \geq 0$ e $x \geq -c$:

   $(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c + y + x + c + y = 2a \Rightarrow y = a - c.$

3. $x < c,\ y \geq 0$ e $x < -c$:

   $(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c + y - x - c + y = 2a \Rightarrow y = x + a.$

4. $x \geq c,\ y < 0$ e $x \geq -c$:

   $(|x-c|+|y|)+(|x+c|+|y|) = 2a \Rightarrow x-c-y+x+c-y = 2a \Rightarrow 2x-2y = 2a \Rightarrow y = x-a.$

5. $x < c,\ y < 0$ e $x \geq -c$:

   $(|x - c| + |y|) + (|x + c| + |y|) = 2a \Rightarrow -x + c - y + x + c - y = 2a \Rightarrow 2c - 2y = 2a \Rightarrow y = c - a = -(a - c).$

6. $x < c,\ y < 0$ e $x < -c$:

   $(|x-c|+|y|)+(|x+c|+|y|) = 2a \Rightarrow -x+c-y-x-c-y = 2a \Rightarrow -2x-2y = 2a \Rightarrow y = -x-a.$

   Geometricamente,

Por outro lado, quando a distância considerada é a euclidiana já sabemos como abordar este objeto, desde manipulações algébricas para se obter a forma canônica, bem como sua configuração geométrica "oval". Especificamente, para $c = 2$ e $a = 5$, obtemos:

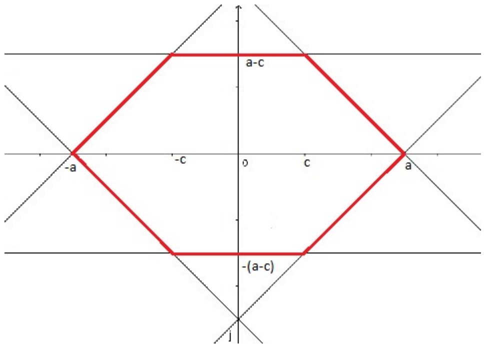

Figura 5.6: Representação da Elipse com a métrica da Soma

$$\mathcal{E}_d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\sqrt{21}} = 1 \right\}.$$

Ou seja,

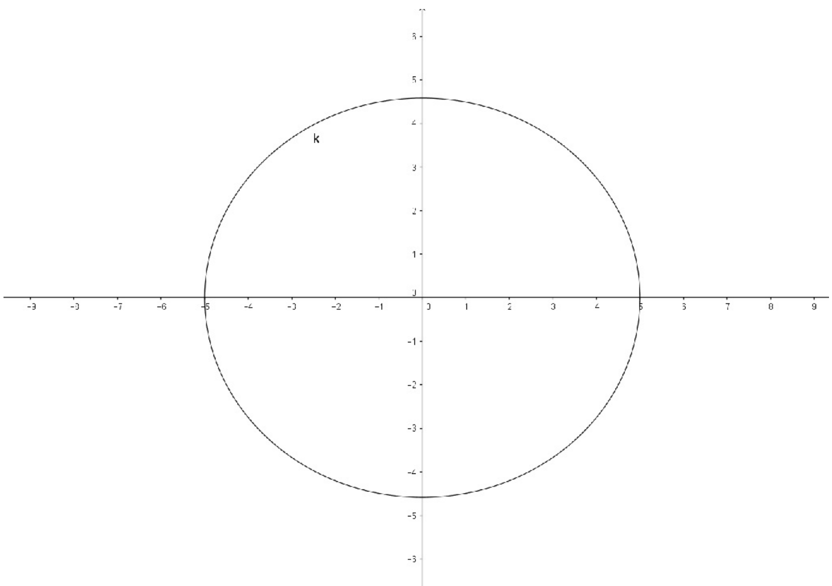

Figura 5.7: Representação da Elipse com a métrica Euclidiana

A figura a seguir apresenta uma comparação da ação de ambas métricas em uma Elipse.

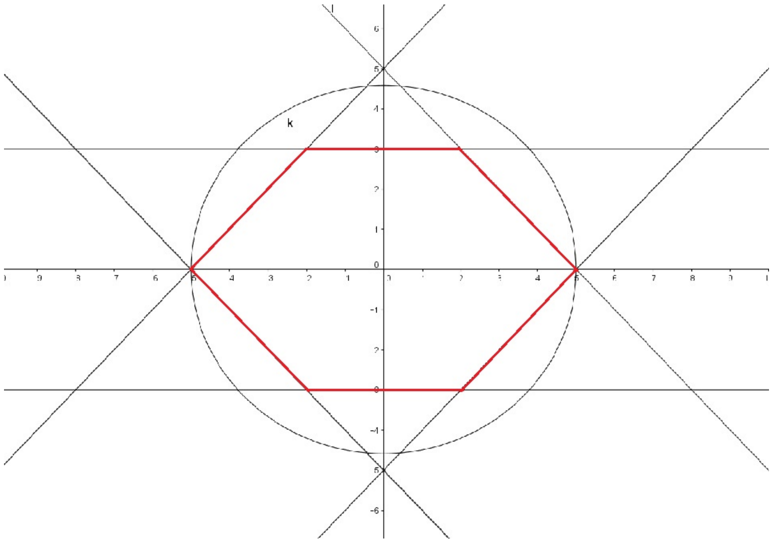

Figura 5.8: Justaposição das representações da mesma Elipse com métricas distintas

Exemplo 5.20. Para apresentar este exemplo, note que geometricamente a esfera unitária com a métrica Euclidiana $S_d((0,0);1)$ em $(\mathbb{R}^2, d)$ é uma circunferência de centro na origem e de raio 1, ou seja,

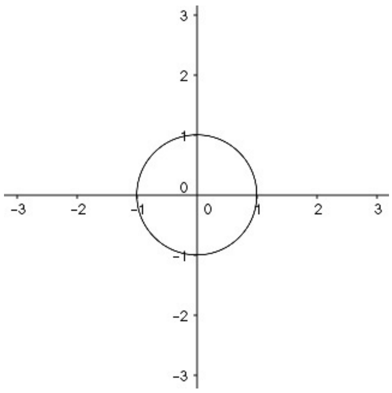

Figura 5.9: Esfera unitária com a métrica d

Por outro lado, a esfera unitária com a métrica do Máximo é $S_{d''}((0,0);1)$ em $(\mathbb{R}^2, d'')$ é dada pelo quadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1 \text{ e } |y| = 1\}$.

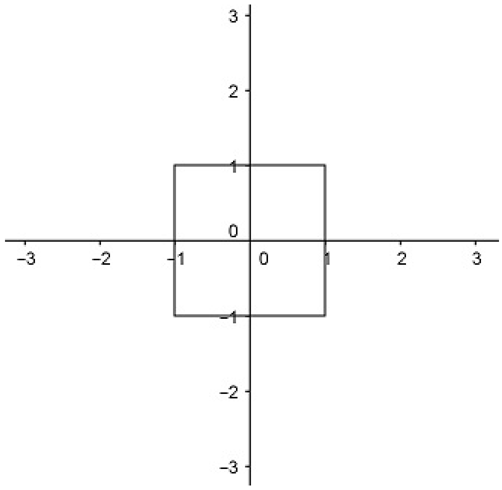

Figura 5.10: Esfera unitária com a métrica d''

Agora, pelo exemplo 3.11, aplicação

$$f : (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$$

definida por $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$ é uma aplicação contínua e é tal que aplica a esfera unitária com a métrica do Máximo, $S_{d''}((0,0);1)$, na esfera unitária com a métrica Euclidiana, $S_d((0,0);1)$.

Ou seja,

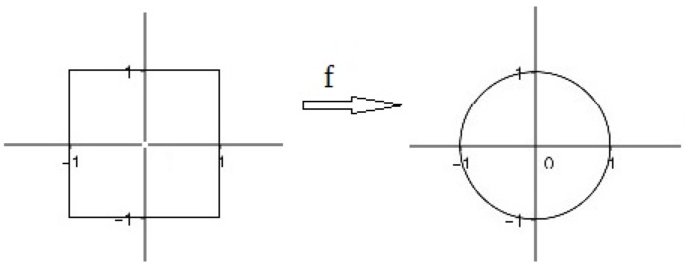

Figura 5.11: Imagem de $S_{d''}((0,0);1)$ por f

Além disso, veja que a aplicação identidade $i_{\{d,d''\}}$ aplica $S_d((0,0);1)$ na própria $S_d((0,0);1)$ porém com este último objeto contido em $(\mathbb{R}^2, d'')$.

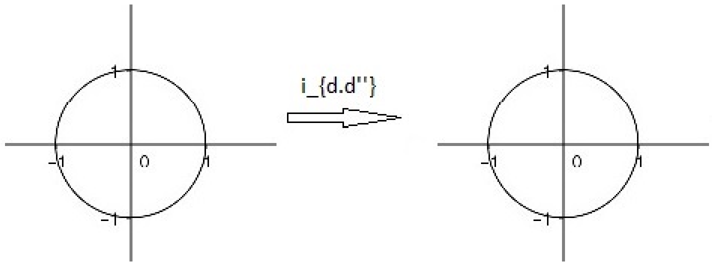

Figura 5.12: Imagem de $S_d((0,0);1)$ por $i_{\{d,d''\}}$

Finalmente, considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} T_a: & (\mathbb{R}^2, d'') & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, d'') \\ & (x,y) & \longmapsto & T_a(x,y) = a + (x,y) = (3,0) + (x,y) = (3+x,y) \end{array}$$

Veja que esta aplicação é uma translação cuja imagem da $S_d((0,0);1)$ é dada por

$$\begin{aligned} T_a(S_d((0,0);1)) &= \{T_a(x,y) : (x,y) \in S_d((0,0);1)\} \Rightarrow \\ T_a(S_d((0,0);1)) &= \{(3+x,y) : x^2+y^2 < 1\} \Rightarrow \\ T_a(S_d((0,0);1)) &= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : (X-3)^2 + Y^2 < 1)\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Logo,

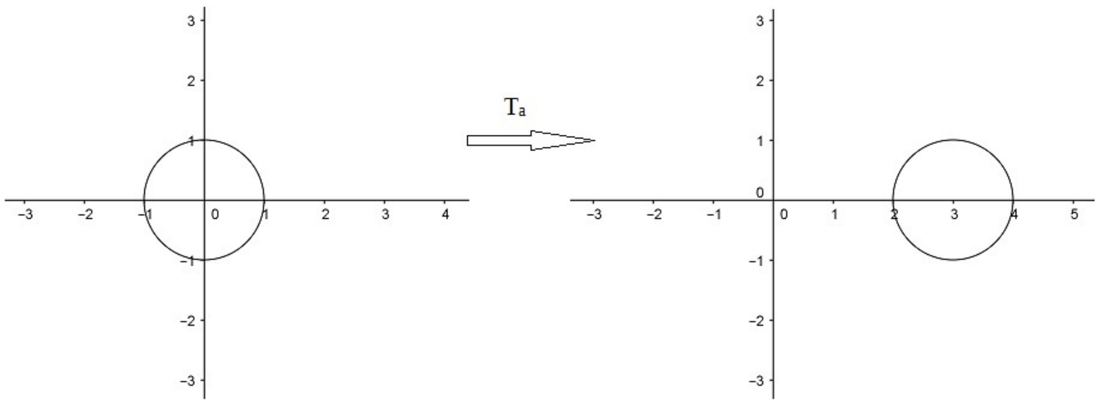

Figura 5.13: Imagem de $S_d((0,0);1)$ por T_a

Fazendo a composição das aplicação anteriores obtemos uma aplicação de $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, d)$ em $(\mathbb{R}^2, d'')$, a saber, a aplicação

$$H = T_a \circ i_{\{d,d''\}} \circ f : (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, d) \to (\mathbb{R}^2, d'')$$

cuja ação em $S_d((0,0);1)$ pode ser observada na figura a seguir:

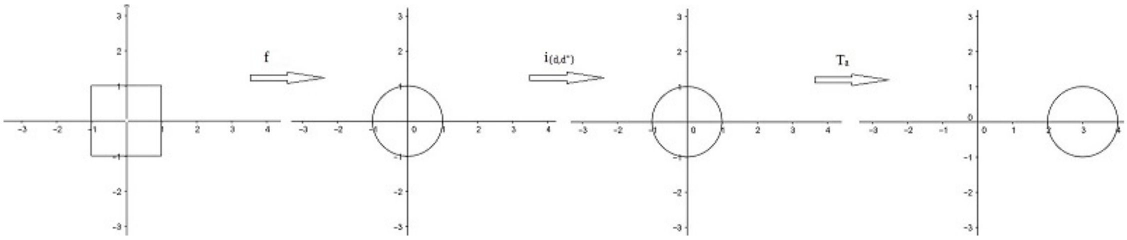

Figura 5.14: Ação da Composição $T_a \circ i_{\{d,d''\}} \circ f$

Ou seja, a ação da H é dada por:

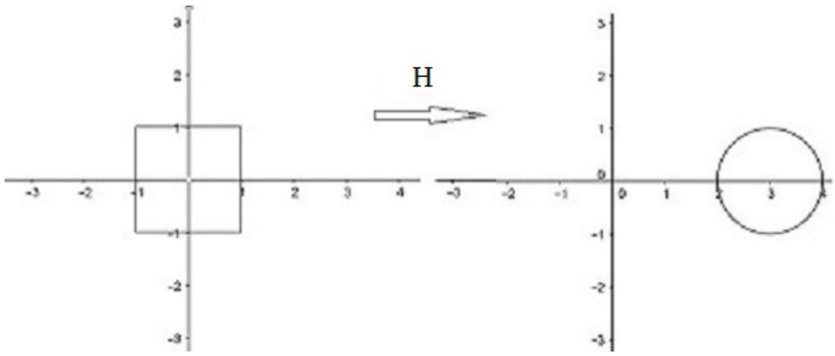

Figura 5.15: Imagem de $S_{d''}((0,0);1)$ por H

6 Viabilidade do Tema em Sala de Aula

Quanto à inserção do tema apresentado neste trabalho para alunos do Ensino Médio podemos afirmar que se trata de uma ferramenta significativa e transformadora no processo de ensino-aprendizagem.

Significativa, diante do fato que poderá ser amplamente aplicada em situações-problema contextualizadas; e transformadora, visto que viabiliza ao estudante maneiras diferentes de se medir, de se tratar distâncias, bem como trabalhar com transformações geométricas. Além do exposto, permite tratar do estudo de funções de forma diferenciada.

Quando trabalhamos em sala de aula com o conceito de medir, sabemos que tal conceito está atrelado ao desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas à comparação de elementos com grandezas e medidas. Logo, ao apresentarmos aos alunos ferramentas que lhes possibilitem "medir" de maneiras diferentes, estaremos estimulando o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de despertar/aprimorar o senso investigativo na resolução de problemas.

Em suma, o desafio de buscar a solução de situações-problema contextualizadas a partir de outras métricas consistirá numa ferramenta de grande valia aos professores que auxiliará no processo de formação de alunos críticos, construtivos e transformadores.

Referências

[1] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1993.

[2] LIMA, E. L. *Coordenadas no Plano*. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, 1992.

[3] BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Editora HARBRA Ltda., 1986.

[4] CARVALHO, J. P. de. *Introdução a Álgebra Linear*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Universidade de Brasilia, 1996.

[5] LOIBEL, G. F. *Introdução a Topologia*. 1. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2007.