



Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JOÃO ROHAN SILVA DE MEDEIROS

**GEOMETRIA ESFÉRICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA DE
INTERVENÇÃO CURRICULAR.**

Belém-Pará

2017

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Medeiros, João Rohan Silva de

Geometria esférica na educação básica: Uma proposta de intervenção Curricular/ João Rohan Silva de Medeiros; orientador, Augusto César dos Reis Costa.-2017.

74 f.: il. 29 cm

Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Belém, 2017.

1. Geometria- Estudo e ensino. 2. Geometria não-euclidiana. 3. Esfera. 4. Triângulo. I. Costa, Augusto César dos Rei, orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 516.07

JOÃO ROHAN SILVA DE MEDEIROS

GEOMETRIA ESFÉRICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA DE
INTERVENÇÃO CURRICULAR.

Dissertação apresentada, como requisito parcial, para obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, sob orientação do Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa.

Belém - Pará
2017

JOÃO ROHAN SILVA DE MEDEIROS

GEOMETRIA ESFÉRICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA DE
INTERVENÇÃO CURRICULAR

Dissertação apresentada, como requisito parcial, para obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, sob orientação do Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa.

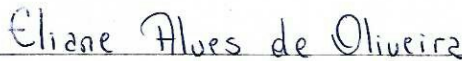
Resultado: APROVADO.

Belém, 07 de Março de 2017.

BANCA EXAMINADORA




Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Faculdade de Matemática / ICEN / UFPA - Presidente



Prof.ª Dr.ª Eliane Alves de Oliveira
Universidade Estadual do Pará - UEPA / Membro Externo



Prof. Dr. João Furtado de Souza
Faculdade de Física / ICEN / UFPA - Membro Externo



Prof. Dr. Valcyr João da Cunha Farias
PROFMAT / ICEN / UFPA

Belém-PA
2017

À minha esposa Luciane e meu filho Yan pelo apoio e compreensão durante todo o tempo.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por me conceder o dom da vida e a capacidade necessária para chegar até aqui.

Agradeço à minha esposa pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis, e pela compreensão e suporte para tornar esse momento possível.

Agradeço aos meus pais, Raimundo e Tânia Medeiros, que foram parte fundamental na minha formação; vocês foram meus primeiros incentivadores, obrigado.

Agradeço à minha irmã Rohana Medeiros Lima que, com uma ação relativamente simples, tornou este trabalho real; sem que você tivesse comprado um computador para mim esse projeto jamais se realizaria em tempo hábil.

Agradeço ao meu orientador, prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa, pelas contribuições que tornaram este trabalho melhor a cada nova sugestão.

Agradeço aos professores que fizeram parte da banca examinadora e cooperaram com importantes considerações, aperfeiçoando ainda mais este trabalho.

Agradeço à Universidade Federal do Pará, por incentivar programas que melhoram a qualidade da formação de profissionais nas mais diversas áreas, neste caso em particular, por viabilizar a qualificação dos professores de Matemática.

Agradeço ao prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias, Coordenador do PROFMAT/UFPA/Belém, pelo suporte no meu processo de transferência.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa de um programa de mestrado que permite o acesso de professores que, em outros programas de pós-graduação, teriam condições mínimas de ingresso.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

*A mente que se abre a uma nova ideia jamais
volta ao seu tamanho original.*

Albert Einstein

Resumo

Este trabalho tem por objeto de estudo uma das geometrias Não-Euclidianas, a Geometria Esférica. É feito um levantamento dos principais nomes que contribuíram para o seu surgimento bem como algumas aplicações como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS - sigla em inglês) para a localização de um ponto na superfície terrestre e na Cartografia, para determinar a melhor rota a ser seguida na navegação; além disso, é feita uma exposição dos principais resultados envolvendo esta Geometria, a ideia no entanto, não foi um aprofundamento teórico mas sim uma abordagem relativamente simples, sem, no entanto, tornar-se superficial para que no fim fossem apresentadas algumas propostas que viabilizem a abordagem da Geometria Esférica ainda na educação básica. Junto às propostas, são apresentadas algumas sugestões de atividades que podem servir como ponto de partida para a inclusão deste conteúdo nas aulas de Geometria.

Palavras-chave: Geometria Esférica; Geometria Não-Euclidiana; Ensino de Geometria.

Abstract

This paper aims to study one of the non-Euclidean geometries, Spherical Geometry. It is made a survey of the main names that contributed to its emergence as well as some applications such as the operation of the Global Positioning System (GPS) to locate a point on the Earth's surface and Cartography to determine the best route To be followed in navigation; In addition, it is made an exposition of the main results involving this Geometry, the idea however, was not a theoretical deepening but a relatively simple approach, without, however, becoming superficial so that in the end some proposals are presented that allow The Spherical Geometry approach still in basic education. Along with the proposals, some suggestions of activities are presented that can serve as starting point for the inclusion of this content in the classes of Geometry.

Keywords: Spherical Geometry; Non-Euclidean Geometry; Teaching of Geometry.

Lista de Figuras

1.1	Modelo euclidiano para o problema proposto	15
1.2	Modelo esférico do problema proposto	16
1.3	János Bolyai	18
1.4	Gauss	19
1.5	Lobachevsky	20
1.6	Riemann	20
2.1	Esfera de centro O e raio r	22
2.2	Superfície esférica	23
2.3	Círculo máximo de uma superfície esférica.	23
2.4	Geodésia: a menor distância entre dois pontos na superfície esférica	24
2.5	Os seguimentos EB e CD são cordas da esfera	24
2.6	Diâmetro = AB	25
2.7	P e P' são pontos antípodas	25
2.8	Elementos notáveis da esfera	26
2.9	Calota formada pela intersecção de um plano com um superfície esférica.	27
2.10	Fuso esférico.	27
2.11	Ângulo esférico.	28
2.12	Triângulo esférico de lados a, b e c e de vértices A, B e C	28
2.13	Prolongamento do lado do vértice α	30
2.14	Construção para os outros lados do triângulo $\alpha\beta\gamma$	30
2.15	Comparativo 1	32
2.16	Comparativo 2	32
2.17	Comparativo 3	33
2.18	Comparativo 4	34
2.19	Classificação dos triângulos esféricos quanto aos lados.	35
2.20	Classificação dos triângulos esféricos quanto aos ângulos.	36
2.21	Projeções do triângulo esférico sobre um plano perpendicular a um de seus lados.	37
2.22	Projeções dos triângulos CPM e CPN	37
2.23	Projeções dos triângulos COM e CON	38
2.24	Ilustração para demonstração do teorema dos cossenos da Geometria Esférica	39
3.1	α é a latitude do ponto P	42
3.2	α é a longitude do ponto P	42
3.3	Acra 5° N e Londres 51° N	43
3.4	Mapa da Região	44
3.5	Representação da posição geográfica de Porto Alegre e Durban.	45
3.6	Representação geométrica da localização de Campo Grande e Natal	46
3.7	Representação geométrica da localização de Porto Alegre e Durban	47
3.8	Mapa da região entre as cidades de Terra Alta, São Francisco do Pará e Castanhal/Pa	48
3.9	Determinando localização pela intersecção das circunferências	49

3.10	A quarta esfera determinará a localização do ponto P	51
3.11	Linha ortodrômica entre dois pontos da superfície esférica.	52
3.12	A loxodrômica na Terra é uma linha espiralada que une os Polos.	53
3.13	α é o azimute da oxodrômica AB	53
3.14	Diferença entre os trajetos pela ortodrômica e pela loxodrômica	54
3.15	Divisão do trajeto oxodrômico em 4 partes iguais.	54
3.16	Rota AB dividida em trechos de loxodrômica.	55
3.17	Representação do trajeto Curitiba-Caucutá, onde A , é o polo Sul, B é Caucutá e C , Curitiba.	55
3.18	Primeira perna do trajeto - w_1	57
3.19	Primeira possibilidade de trajeto do caçador - desenho fora de escala.	59
3.20	Segunda possibilidade de trajeto do caçador - desenhos fora de escala.	59
4.1	Representação do ítem (a): Três retas na superfícies esférica podem dividi-la em 6 ou 8 regiões	62
4.2	Representação do ítem (b): Reta dividida em dois arcos, o menor e o maior	62
4.3	Representação do ítem (c): Duas retas perpendiculares formam 8 ângulos retos, 4 em cada hemisfério (frontal e posterior)	63
4.4	Interface de abertura do Geogebra.	65
4.5	Esfera com centro na Origem e raio 4cm.	66
4.6	Fuso formado pelos arcos CDB e CEB	66
4.7	Retas tangentes ao fuso esférico	67
4.8	Ângulo esférico igual a $58,37^\circ$	67
4.9	Esfera $a = x^2 + y^2 + z^2 = 16$	68
4.10	Pontos B , C , e D sobre a esfera	68
4.11	Arco BD sobre a esfera	69
4.12	Triângulo esférico BCD	69

Sumário

Introdução	11
1 Algumas considerações sobre o ensino de Geometria e um breve comentário histórico	13
1.1 Os axiomas de Euclides	17
1.1.1 Bolyai	18
1.1.2 Gauss	18
1.1.3 Lobachevsky	19
1.1.4 Riemann	20
2 Geometria Esférica: conceitos e definições	22
2.1 Elementos da Geometria Esférica	22
2.1.1 Teoremas	29
2.2 Geometria Plana <i>vs.</i> Geometria Esférica	31
2.2.1 Qual é o polígono com menor número de lados que se pode construir? . .	31
2.2.2 Quantas retas podem ser traçadas passando por dois pontos distintos? . .	32
2.2.3 Qual a posição relativa entre duas retas?	32
2.2.4 Retas concorrentes se intersectam em quantos pontos?	33
2.2.5 Qual a classificação de um triângulo?	34
2.3 Trigonometria Esférica.	36
3 Algumas aplicações envolvendo Geometria Esférica	41
3.1 O Sistema de Posicionamento Global - GPS.	41
3.1.1 Coordenadas Geográficas	41
3.1.2 Distância entre dois pontos na superfície esférica	43
3.1.3 O processo de trilateração	48
3.2 Geometria Esférica na Cartografia.	51
3.3 Revisitando a charada do urso	58
4 Explicitando algumas propostas	61
Considerações Finais	71
Referências Bibliográficas	73

Introdução

O início do pensamento geométrico é algo difícil de ser estabelecido, na verdade, parece coincidir com as necessidades diárias do homem; desde o Egito antigo com a partilha de terras às margens do Nilo, até a Grécia nas tentativas de prever o movimento dos astros percebe-se a importante ferramenta que o conhecimento geométrico representa. A formalização desse conhecimento deve-se a Euclides com a publicação de seu livro *Os Elementos*, onde todo o conhecimento sobre Geometria até aquele momento, é demonstrado a partir de cinco axiomas ¹. Os quatro primeiros foram bem aceitos pela comunidade de matemáticos da época, o quinto, nem tanto; uns dos motivos que levaram a isso foi sua complexa formulação e a insuficiente percepção intuitiva. Isso fez com que através dos séculos diversos matemáticos tentassem deduzi-lo dos demais axiomas fazendo dele um teorema; o resultado desse esforço continuado, que durou cerca de dois mil anos e que resistiu a todas as tentativas de demonstração, foi o surgimento das chamadas Geometrias não-Euclidianas.

Tradicionalmente ensina-se Geometria a partir de relações lógicas e de construções oriundas de uma ciência dedutiva e axiomática, estabelecida na Grécia há cerca de 2700 anos e conhecida hoje como Geometria Euclidiana. No entanto, observando a superfície terrestre, seu relevo, o comportamento das ondas do mar e tantos outros fenômenos da natureza, percebem-se as dificuldades de construir alguns conceitos geométricos que se sustentem por noções primitivas como reta, ponto e plano, conforme afirma Coutinho.

A Geometria Euclidiana, transmitida de geração a geração por mais de dois mil anos, não era a única. As mentes criativas dos matemáticos Bolyai, Lobachevski, Gauss e Riemann lançaram as bases de outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana. Uma dessas geometrias Não-Euclidianas encontra aplicação na Teoria da Relatividade, o que se justifica, pois sendo curvo o Universo Einsteiniano, a Geometria Euclidiana não é adequada. [6].(COUTINHO, 2001)

É fato que, com os avanços teóricos da Matemática, da informática e o desenvolvimento do pensamento científico desde século, a Geometria Euclidiana tenha tornado-se insuficiente para explicar alguns “novos” fenômenos da natureza, sendo necessário então o conhecimentos dessas outras geometrias citadas. O que se propõe neste trabalho é fornecer ao professor (e ao aluno), estratégias que possibilitem a abordagem da Geometria Esférica, estimulando-os através de uma proposta dinâmica e acessível uma vez que nas duas últimas décadas, houveram intensas discussões nos meios educacionais sobre a inclusão desta e de outras geometrias não-euclidianas nos currículos escolares. Membros de associações de profissionais da Matemática, como Kalleff (2004), Cabariti (2006) e Alves (2008), foram alguns a defenderem esse tema.

Devido a universalidade do tema “Geometria”, é importante saber quais os objetivos com ensino deste tema que estão propostos na legislação vigente no País, bem como até onde pode-se

¹premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável, originada, segundo a tradição racionalista, de princípios inatos da consciência ou, segundo os empiristas, de generalizações da observação empírica.

avancar, para por fim apresentar uma proposta de abordagem que contemple o ensino da Geometria Esférica na educação básica. O ponto de partida é através de um resumo histórico sobre os avanços no conhecimento geométrico até o surgimento de outras geometrias e suas aplicações, o segundo passo é adaptar o que já se conhece (conceitos euclidianos) ao novo modelo. A partir daí tabalham-se algumas aplicações da geometria Esférica em outras áreas do conhecimento e por fim, lançam-se as propostas para a abordagem da mesma entre os alunos da educação básica .

No primeiro capítulo são feitas algumas considerações sobre o ensino de Geometria em nosso País, e também um comentário sobre o desenvolvimento histórico desde o quinto postulado de Euclides até a formalização dos conceitos de Geometria Esférica desenvolvido por Riemann. No capitulo dois são explicitados alguns dos principais conceitos da Geometria Esférica bem como alguns teoremas que serão úteis para as aplicações que são tratadas no capítulo três. O quarto capítulo expõe algumas propostas que ajudarão o professor da educação básica que pretende abordar esta Geometria em suas aulas, sendo esse o principal objetivo dete trabalho.

Capítulo 1

Algumas considerações sobre o ensino de Geometria e um breve comentário histórico

A obra de Euclides, Os Elementos, é provavelmente a mais importante sobre o assunto. No período de sua publicação, além de conter toda a matemática da época, também foi um marco orientador das idéias matemáticas que são utilizadas até hoje. É uma obra composta de 13 volumes dos quais os seis primeiros tratam de Geometria Plana, dos volumes VII ao X trata de teoria dos números e os demais, Geometria Espacial.

Para este trabalho, porém, interessa observar o início da obra, onde Euclides traz cinco axiomas. Como por definição trata-se de algo evidentemente verdadeiro sem necessidade de questionamento ou prova, o 5º axioma parece fugir à esta regra. Vejamos:

Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado [6].(COUTINHO, 2001)

Se comparado com os outros, é evidente a complexidade deste postulado e, por este motivo, muitos matemáticos investiram grandes esforços para demonstrá-lo a partir dos demais, porém sem sucesso. Essas tentativas atravessaram séculos e, nessa trajetória, surgem o que hoje chama-se de geometrias não-euclidianas.

A Geometria é um tema muito rico para se trabalhar em sala de aula desde as séries iniciais devido a sua percepção visual, a possibilidade de ilustrações com situações comuns à todos e também por incentivar a criatividade para a resolução de problemas. Toda esta riqueza está acessível aos alunos no estudo da Geometria Euclidiana, mas observa-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a importância de incentivar a descoberta de outras Geometrias como parte do saber matemático.

(...)a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. [3](PCN 3º e 4º ciclos, pág. 25)

Essa pluralidade de modelos geométricos tem cada um suas aplicações e para cooperar no desenvolvimento do saber matemático citado pelo PCN, é importante identificá-las. Na Geometria Esférica, alguns exemplos têm aplicações bastante comuns como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS), presente em quase todos os telefones celulares usados atualmente; também existem as questões referentes às grandes navegações e ao sistema de transporte aéreo entre outras. Com tantas aplicações, porque ela ainda é um tema tão distante de alunos e professores da educação básica? Será o medo do desconhecido? Há muito tempo deixou-se de acreditar que após o horizonte os navios mergulhavam no abismo do fim do mundo; que o Sol gira ao redor da Terra e que nosso planeta está apoiado sobre uma torre infinita de tartarugas¹.

Em contrapartida a isso, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação assegura ao professor o direito de organizar seus conteúdos de acordo com as necessidades de seus alunos e, dada a pluralidade sócio-econômica do País, é razoável aceitar que conteúdos “desconhecidos e pouco aplicáveis” tenderão a ser menos valorizados. Esse ponto de vista começa a ser construído ainda na formação, muitas vezes deficitária do professor, que por não possuir domínio e segurança com relação a Geometria mais básica (a euclidiana) não poderá trabalhar com outros modelos geométricos. Conforme afirma [13] Pavanello (1989), o abandono da Geometria tem consequências: se esse professor não aprendeu Geometria enquanto aluno, certamente não terá segurança para trabalhá-la em suas aulas.

Desde o Ensino Fundamental, a Geometria é um campo muito fértil para trabalhar situações-problema e tende a naturalmente despertar mais interesse dos alunos, além disso é importante explorá-la a partir de materiais concretos como embalagens, brinquedos etc.; permitindo assim sua conexão com outras áreas do conhecimento. O PCN do Ensino Médio nos garante que a Matemática é uma “parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas.” (PCN+ Ciências da Natureza, pág.111)

Para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados. Em todos os ciclos de Ensino o que se espera do aluno é uma razoável interpretação do mundo que o cerca, neste contexto, levar o aluno a descobrir um mundo além do euclidiano certamente contribuirá para essa formação cidadã, atendendo assim a recomendação do PCN-Ensino Médio como segue:

Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante. [2](PCN-Ensino Médio pág. 4)

É bastante provável que a maior parte dos alunos hoje no Ensino Médio responda sem vacilar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Provavelmente também será maioria dos que verão com desconfiança a atitude de um professor caso diga que essa afirmação nem sempre é verdadeira, mais ainda se ele garantir que é falsa, porque? Simplesmente por que esses alunos conhecem “apenas” um mundo geometricamente plano.

Tratando-se agora mais especificamente da Geometria Espacial, é importante observar a relevância desse conteúdo na vida do jovem aluno uma vez que usar as formas geométricas na representação de partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos que serão úteis na solução de problemas. Ainda segundo os [2] PCN-Ensino Médio, é nesse tema estruturador (Geometria e Medidas) que, além das habilidades relativas a

¹em um trecho do livro Uma Nova História do Tempo, de Stephen Halking

grandezas e medidas, o aluno também avança aumentando sua percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, como afirma o PCN + Ciências da Natureza.

é importante destacar que este tema estruturador pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana. [4](PCN+ Ciências da Natureza e suas tecnologias,pág 125)

Esta torna-se portanto a oportunidade do professor apresentar aos seus alunos um mundo novo, não-euclidiano, sem para isso deixar de lado tudo o que se conhece. Há um termo que provavelmente não seja conhecido da maior parte dos alunos que é **cosmovisão**², partindo disso pode-se iniciar uma boa discussão sobre o surgimento de outros modelos (tão logicamente estruturados como o de Euclides) e suas implicações na vida e sociedade do século XXI.

Considere a seguinte situação: *Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor é o urso?*³ Em uma primeira leitura esta pode até parecer uma charada de mal gosto, mas basta mudar a cosmovisão para se chegar a uma solução. As figuras a seguir representam o modelo euclidiano e esférico para esta situação.

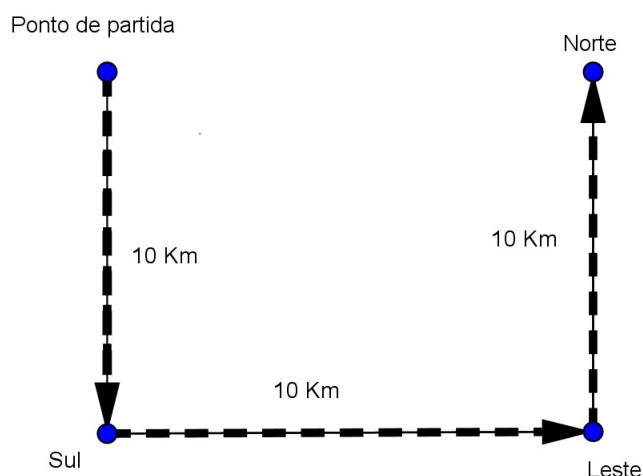


Figura 1.1: Modelo euclidiano para o problema proposto

Fonte: O autor

Se considerarmos o mundo do ponto de vista de Euclides pode-se achar que o problema não tem solução, pois o caçador não voltaria ao ponto de partida. Agora, analisando a situação a partir de um modelo esférico para a superfície, encontramos a resposta correta do problema em questão. Assim a solução está à vista: Andando 10 Km segundo aquelas 3 direções perpendiculares, o caçador só voltará ao ponto de partida se iniciar a sua caminhada no Pólo Norte. Se está então no Pólo Norte, o urso só pode ser Polar, portanto a cor do urso é branca.

²modelo pelo qual encher o mundo

³Adaptação da Fonte: www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/alice/geometria.html, acessado em 08/11/2016

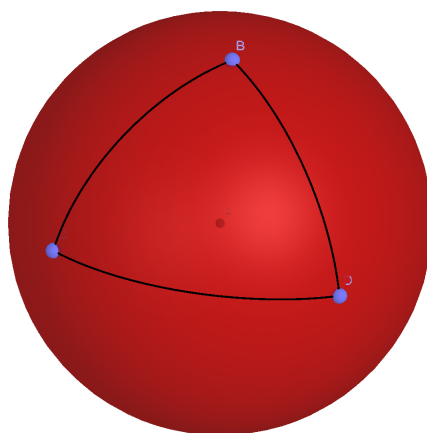


Figura 1.2: Modelo esférico do problema proposto

Fonte: O autor

Problemas desta natureza certamente despertam o interesse dos alunos pelo aspecto desafiador que apresentam e, além disso, estimulam a criatividade, uma vez que impõem a necessidade de pensar além do óbvio. Nesse processo é que o conhecimento tem maior desenvolvimento, surgem novos conceitos e vivenciam-se novas experiências, ou seja, o saber de fato acontece. A resolução de problemas como este são incentivados pelos PCN do Ensino Médio em detrimento daqueles que estimulam apenas a aplicação de conceitos e técnicas, como se lê no trecho abaixo. O problema do urso será revisitado no capítulo 3 para uma discussão mais detalhada da solução

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. [2](PCNEM, pág. 111)

Novos desafios geram novos conceitos que por sua vez resolvem problemas, essa deve ser uma engrenagem em constante movimento no ensino. Deve-se lembrar sempre que o objetivo maior do ensino de Matemática não é formar máquinas cada vez mais ágeis na resolução de equações mas sim fazer que o aluno seja capaz de perceber a relação da disciplina com o mundo a sua volta, nesse sentido é particularmente interessante o conhecimento mais amplo da Geometria uma vez que muitos fenômenos não podem ser explicados no mundo euclidiano.

Uma outra forma de incentivar o interesse pelo tema é através do desenvolvimento histórico⁴; a palavra “geometria”, por exemplo, é originada de dois termos gregos *geo*, “terra” e *metrian* “medida”. Assim, *geometrian* é a ciência que mede a terra. A civilização grega foi a grande formadora do conhecimento geométrico, mas outras civilizações antigas como egípcios, hindus, chineses e babilônios também tinham esse conhecimento.

Manuscritos babilônios datados entre 2.000 e 1.600 A.C. consideravam o comprimento da circunferência como sendo $\frac{1}{3}$ do diâmetro do círculo, ou seja, o valor de $\pi = 3$. Os egípcios,

⁴todo o relato histórico deste trabalho é baseado em [9]

em 1.800 a.C. segundo o papiro de Rhind, tinham uma aproximação $\pi \sim (\frac{16}{9})^2 = 3,1604$. Até mesmo na Bíblia Sagrada encontramos a relação (comprimento/diâmetro) = 3 quando, segundo as escrituras, Deus determina as medidas para a construção do Templo Sagrado daquele povo (I Reis 7:23)

A diferença entre gregos egípcios e babilônios é que os primeiros acreditavam que as demonstrações deveriam ser construídas por raciocínio dedutivo e não pelo método do erro. Aproveitando-se dos resultados de egípcios e babilônios, Tales de Mileto foi um dos pioneiros no método de deduções por raciocínio lógico. Após ele, surge Pitágoras e seus discípulos, que era considerado um religioso por acreditar na imortalidade da alma e na reencarnação. Fundou a chamada Escola Pitagórica, que era uma irmandade com rituais próprios de purificação além de acreditar que música e Matemática uniam o homem a Deus.

Chegando o século IV o destaque foi a fundação da Academia de Ciência e Filosofia de Platão, por volta de 387 a.C. que acreditava ser o universo das ideias mais importante que o mundo material e que erros dos sentidos deveriam ser corrigidos pelo pensamento, sendo a Matemática a melhor ferramenta para isso. Em seus resultados, valia-se da demonstração indireta ou seja, se uma afirmação levar a uma contradição, ela não pode ser considerada verdadeira.

Dessa academia que surge Euclides, que por volta de 300 a.C. produz sua obra prima, Os Elementos, dando um formato final à toda a Geometria grega da época. A forma como ele abordou o tema tem dominado o ensino de Geometria por mais de dois séculos.

1.1 Os axiomas de Euclides

- (i) Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.
- (ii) Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- (iii) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- (iv) Todos os ângulos retos são iguais.
- (v) Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Como dito em outro momento, o quinto axioma (ou postulado) é sem dúvidas o que mais chama a atenção, dada a complexidade do enunciado. Partindo disso, diversos matemáticos buscaram prová-lo como sendo um resultado obtido dos outros quatro, ou seja, fazer dele um teorema e não um axioma. Uma das consequências dessas tentativas de demonstração foi a produção de várias afirmações equivalentes ao quinto postulado, essas afirmações foram chamadas de substitutos. O substituto mais conhecido, e que se perpetua até hoje é o axioma de Playfair⁵: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.

Ao longo do tempo percebeu-se que havia uma família de proposições equivalentes para o quinto postulado, entre eles o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, neste caso, haviam três possibilidades: igual, menor ou maior do que 180° , essas duas últimas hipóteses

⁵Matemático e geólogo escocês (1748-1819). Trabalhou com a física, a geologia e a geometria. Estudou na Universidade de St Andrews – Escócia.

levaram ao surgimento da Geometria Hiperbólica, de Gauss, Bolyai e Lobachewsky e da Geometria Esférica desenvolvida por Riemann.

1.1.1 Bolyai

Farkas Bolyai conheceu Gauss quando eram estudantes na Universidade de Gottingen e costumavam discutir problemas relacionados ao postulado das paralelas. Mesmo depois que deixaram a academia, continuaram mantendo contato; Farkas certa vez enviou uma carta para Gauss acreditando ter demonstrado o postulado das paralelas, Gauss mostrou o erro da demonstração.

János, filho de Farkas, tinha 13 anos e já dominava o cálculo diferencial e integral. Seu pai escreveu a Gauss pedindo que aceitasse o jovem como matemático aprendiz. Talvez por ele mesmo (Gauss) ter sérios problemas com seu filho de 15 anos que havia fugido de casa, ele não pode atender ao pedido de Farkas.



Figura 1.3: János Bolyai

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos_Bolyai

János ficou bastante desapontado; ele até imaginou que seu pai tinha informado seus resultados para Gauss e que este agora tentaria apropriar-se desses resultados como sendo seus. János caiu em depressão mental profunda e acabou nunca mais publicando sua pesquisa.

1.1.2 Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi um matemático alemão considerado como um dos mais renomados de sua geração devido a suas contribuições na Matemática e na Física, incluindo a teoria dos números, a análise, a geometria diferencial, a geodésica entre outros. Foi de grande importância no desenvolvimento das idéias que levaram a descoberta da nova Geometria. Gauss foi o primeiro a usar o termo *não-euclidiano*.

Há evidências de que Gauss já soubesse de algumas das descobertas de J. Bolyai, na verdade, de que Gauss trabalhava com geometria não-Euclidiana desde os 15 anos de idade. Em 1817, Gauss escreveu para W. Olbers dizendo que estava cada vez mais convencido sobre a nossa Geometria (Euclidiana) não poder ser provada (referindo-se ao quinto postulado), “pelo menos não pela razão humana nem para a razão humana. Talvez em outra vida seremos capazes de obter a visão para a natureza do espaço, o que é agora inatingível”, escreveu ele.

Apesar de sua grande reputação, Gauss teve medo de tornar públicas suas descobertas sobre geometria não-euclidiana. Ele escreveu a F. W. Bessel em 1829 que temia “o uivo dos Beócios” caso fosse publicar suas descobertas revolucionárias. Para H. C. Schumacher ele escreveu dizendo



Figura 1.4: Gauss

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

que tinha “uma grande antipatia sobre ser arrastado para qualquer tipo de polêmica.”

Um outro motivo que pode ter levado Gauss a reter suas descobertas foi o fato de que era um perfeccionista. Sua devoção ao trabalho aperfeiçoado foi expressa pelo lema em seu selo, *pauca sed matura* (“poucos, porém maduros”). Há inclusive uma história sobre K.G.J.Jacobi, um matemático da época, que ia mostrar seus resultados para Gauss, mas na verdade seu intuito era apenas vê-lo tirar das gavetas os rascunhos de suas descobertas. Motivo pelo qual ele não teve a oportunidade de publicar seus trabalhos sobre geometria não-euclidiana de forma polida. Após sua morte foram encontrados poucos manuscritos entre seus papéis particulares. Gauss foi chamado de “o príncipe dos matemáticos” por causa da grande contribuição científica de seu trabalho.

1.1.3 Lobachevsky

O matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792- 1856) foi o primeiro a realmente publicar um relato da geometria não-euclidiana, em 1829. Lobachevsky inicialmente chamou sua geometria “imaginária”, mais tarde de “pangeometria”⁶. Seu trabalho atraiu pouca atenção porque foi escrito em russo. O revisor na Academia de São Petersburgo rejeitou a obra, e uma revista literária russa atacou Lobachevsky sobre “a insolência e falta de vergonha de novas invenções falsas” (era o uivo dos beócios que Gauss havia previsto).

Lobachevsky continuou publicando mais artigos em russo e, em seguida, um tratado, em 1840 em alemão, que enviou a Gauss. Em 1846, em uma carta a Schumacher, Gauss reafirmou sua prioridade no desenvolvimento da geometria não-euclidiana, mas admitiu que “Lobachevsky havia realizado a tarefa de uma forma magistral e num espírito verdadeiramente geométrico.”

Lobachevsky foi chamado de “o grande emancipador”. Infelizmente, Lobachevsky não foi tão apreciado durante a sua vida; de fato, em 1846, ele foi demitido da Universidade de Kazan, apesar de 20 anos de excelente serviço como professor e administrador. Ele teve de ditar o seu último livro no ano antes de sua morte, pois já estava velho e cego.

⁶Geometria com n dimensões



Figura 1.5: Lobachevsky

Fonte: https:pt.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky

1.1.4 Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 1826, em Hanover na Alemanha, e morreu em 1866 Salsola in Itália, vítima de tuberculose. Filho de família pobre, seu pai era um pastor luterano e, sua mãe morreu quando ele ainda era criança. Sempre foi uma pessoa tímida e introvertida, de saúde muito frágil.



Figura 1.6: Riemann

Fonte: https:pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Ingressou na Universidade de Gotingen, onde Gauss era professor, aos 19 anos. Após o primeiro ano, Riemann transferiu-se para Berlin, em 1849 retornou para Gotingen para concluir sua tese de doutorado, sob orientação de Gauss, e em 1851 ele tornou-se doutor com um trabalho que apresentou as chamadas Superfícies de Riemann.

Mesmo não conhecendo os trabalhos de Bolyai e Lobachevsky, Riemann propôs uma generalização da geometria que incluía a possibilidade de espaços com mais de três dimensões. Ele deu uma interpretação própria para ponto, reta e plano. O plano escolhido foi a superfície esférica, os pontos eram as posições nessa superfície e as retas são os círculos máximos⁷ de uma esfera.

Contudo, foi no final da década de 1860 e início da década de 1870, com a tradução dos trabalhos de Bolyai e Lobachevsky e Riemann, que as geometrias não-euclidianas começaram a ter

⁷é o círculo traçado sobre a superfície de uma esfera com o mesmo perímetro de sua circunferência, dividindo-a em dois hemisférios iguais.

mais reconhecimento. Isso também ocorreu graças a contribuição de um matemático italiano Eugeni Beltrami (1835-1900), que em 1868 publicou um artigo em que descreveu coerentemente a geometria de Lobachevsky.

Capítulo 2

Geometria Esférica: conceitos e definições

Neste capítulo são apresentados alguns resultados da Geometria Esférica que permitirão melhor domínio sobre o tema.

2.1 Elementos da Geometria Esférica

Inicia-se esta secção com algumas das principais definições da Geometria Esférica, bem como alguns de seus teoremas.

Definição 2.1.1 *Esfera:* Dado um ponto O , e um número real r , com $r \geq 0$, chama-se esfera de centro O e raio r , o conjunto dos pontos P no espaço, cuja distância até O seja menor ou igual que r .

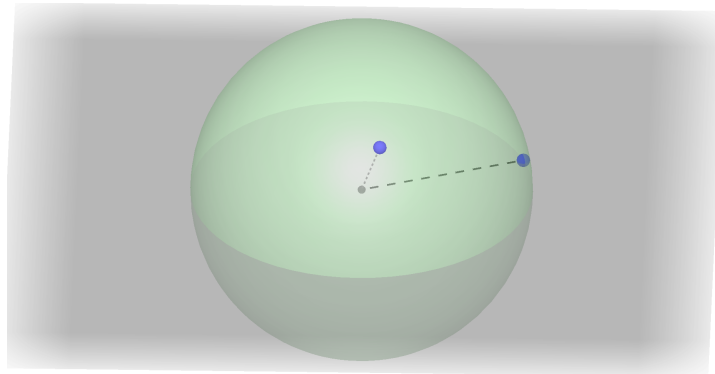


Figura 2.1: Esfera de centro O e raio r
Fonte: O autor

Definição 2.1.2 *Superfície da Esfera:* O conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r .

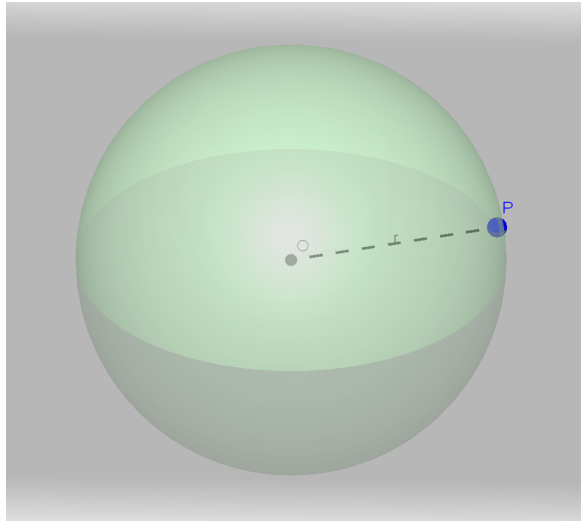


Figura 2.2: Superfície esférica
Fonte: O autor

Definição 2.1.3 *Círculo máximo: É a intersecção da superfície esférica por um plano que contém seu centro. O círculo máximo contém o arco que é a menor distância entre dois pontos na superfície esférica.*

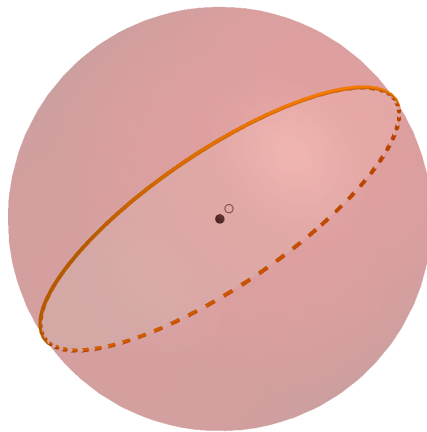


Figura 2.3: Círculo máximo de uma superfície esférica.
Fonte: O autor

Aqui vale uma importante diferenciação: Os círculos máximos são na esfera o equivalente às retas de Euclides. Isto é, as retas esféricas são, literalmente, curvas.

Definição 2.1.4 *Distância entre dois pontos:* Em uma superfície esférica, a distância entre dois pontos é o comprimento do menor arco do círculo máximo que passa por estes pontos.

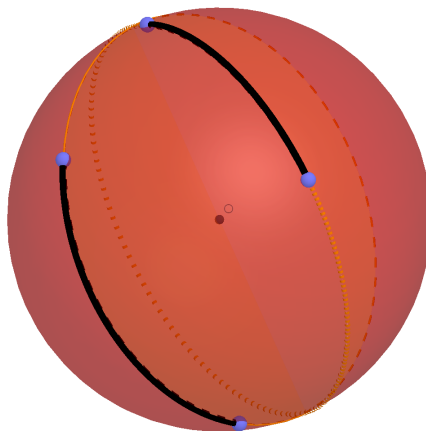


Figura 2.4: Geodésia: a menor distância entre dois pontos na superfície esférica

Fonte: O autor

Definição 2.1.5 *Corda da superfície esférica:* Dada uma superfície esférica, chama-se de corda dessa superfície ao seguimento de reta que une quaisquer dois pontos nessa superfície.

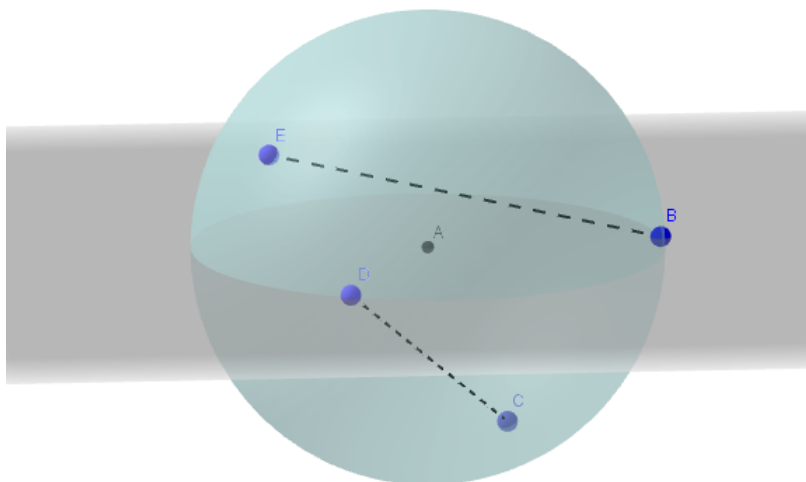


Figura 2.5: Os segmentos EB e CD são cordas da esfera

Fonte: O autor

Definição 2.1.6 *Diâmetro: É toda corda que passa pelo centro da circunferência.*

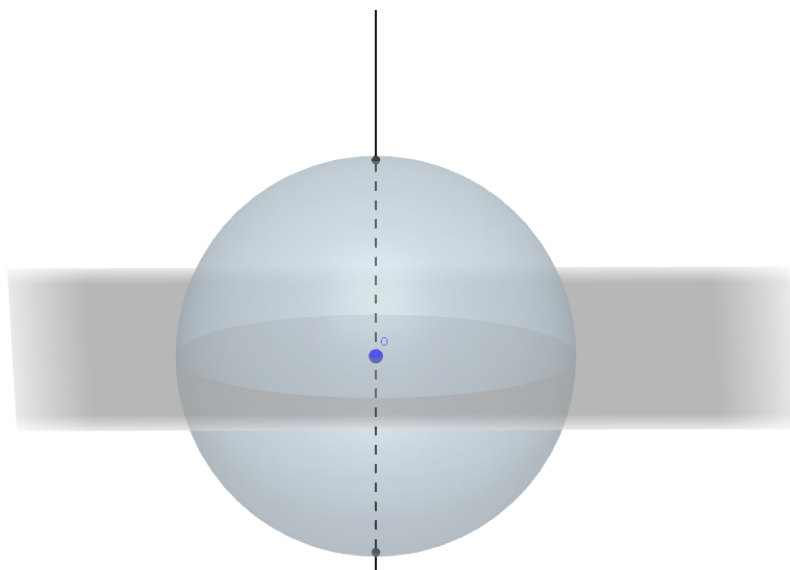


Figura 2.6: Diâmetro = AB

Fonte: O autor

Definição 2.1.7 *Pontos Antípodas: Dado um ponto P na superfície esférica, o antípoda de P - chamaremos P' - é o ponto cujo seguimento PP' contém o centro O .*

obs. Dois pontos são antípodas se e somente se eles são o diâmetro da circunferência, esses pontos também são chamados diametralmente opostos

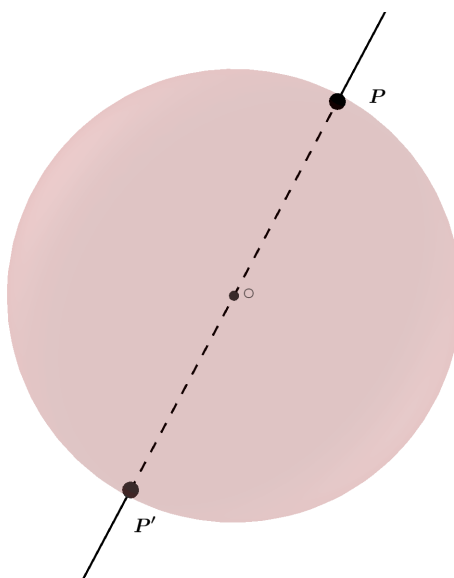


Figura 2.7: P e P' são pontos antípodas

Fonte: O autor

Definição 2.1.8 *Elementos notáveis da esfera:*

1. **Eixo:** É a reta que contém o centro da circunferência
2. **Polos:** São os pontos de intercessão do eixo com a superfície esférica.
3. **Equador:** É a circunferência máximo cujo plano é ortogonal ao eixo.
4. **Paralelo:** É a circunferência, porém não a máxima, cujo plano é perpendicular ao eixo.
5. **Meridiano:** É ma semicircunferência máxima que tem seu plano passando pelo eixo e liga os polos.

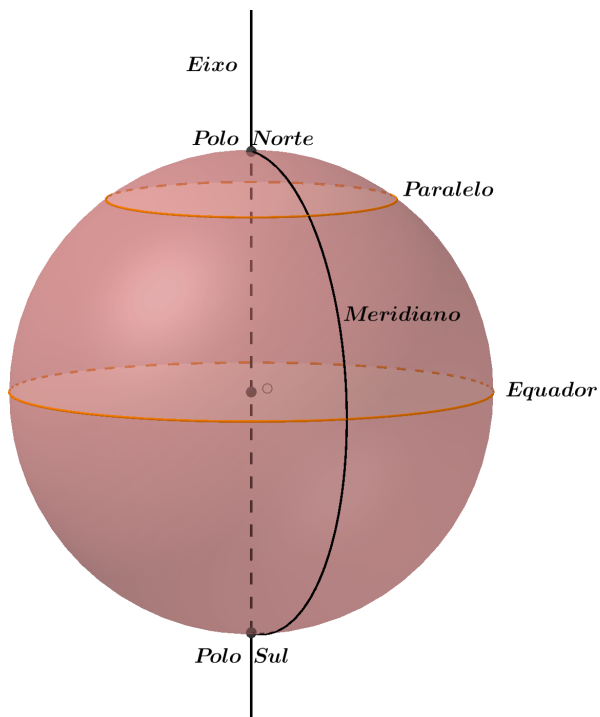


Figura 2.8: Elementos notáveis da esfera
 Fonte: O autor

Definição 2.1.9 *Calota esférica:* Qualquer plano que intersecte a superfície esférica, a divide em duas partes. A cada uma dessas partes, chama-se calota esférica.

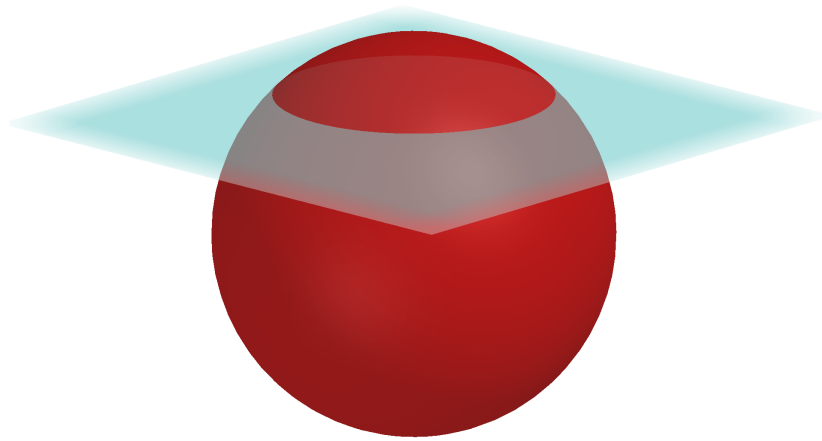


Figura 2.9: Calota formada pela intersecção de um plano com um superfície esférica.
 Fonte: O autor

Definição 2.1.10 *Fuso esférico: É a região da superfície esférica formada por dois meridianos.*

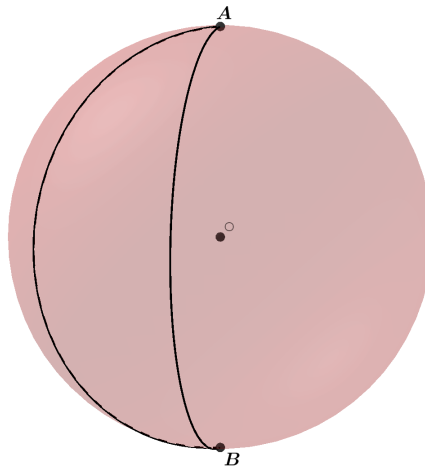


Figura 2.10: Fuso esférico.
 Fonte: O autor

Definição 2.1.11 *Ângulo esférico: É o ângulo formado por duas circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes a estes arcos no seu ponto de intersecção.*

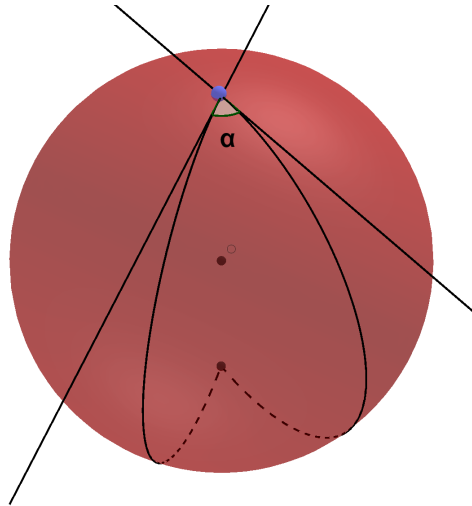


Figura 2.11: Ângulo esférico.
 Fonte: O autor

Definição 2.1.12 *Triângulo esférico: É a figura formada na superfície esférica pela intersecção de três arcos de circunferência máxima. Estes arcos são os lados do triângulo.*

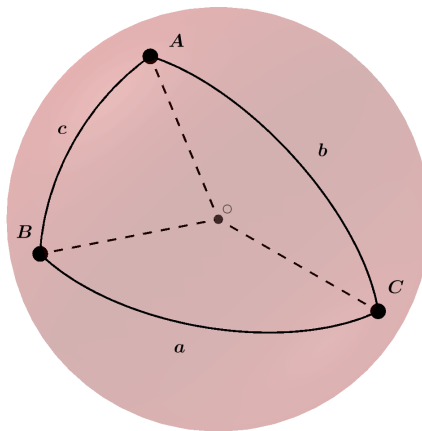


Figura 2.12: Triângulo esférico de lados a, b e c e de vértices A, B e C .
 Fonte: O autor

2.1.1 Teoremas

A seguir serão demonstrados alguns teoremas usados na Geometria plana que servirão como base para alguns resultados sobre a esfera

Teorema 2.1.1 *O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$*

Demonstração: Seja V o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo OX de uma função real contínua e positiva, isto é: $f : [a, b] \Rightarrow \mathfrak{R}$. Sabemos que o volume é:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Então, para obtermos uma esfera, devemos considerar $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, no intervalo $[-r; r]$. Daí segue que

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ V &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 *A área de uma superfície esférica de raio r é $4\pi r^2$*

Demonstração: Do cálculo diferencial sabemos que ao derivar o volume de um sólido obtemos o valor absoluto de sua área correspondente. Considerando a função f demonstrada acima a função volume da esfera de raio r , derivando f , obtemos:

$$A_s = f'(x) = \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)'$$

Onde A_s é a área da superfície esférica. Daí segue imediatamente que

$$A_s = 4\pi r^2$$

Teorema 2.1.3 *A área de um fuso esférico A_f é $2\alpha r^2$*

Demonstração: Basta aplicar uma regra de três simples, isto é

$$A_s \longrightarrow 360^\circ$$

$$A_f \longrightarrow \alpha$$

Como são grandezas diretamente proporcionais, temos que

$$A_f = \frac{\alpha \cdot A_s}{2\pi}, \text{ onde } A_s = 4\pi r^2$$

Daí segue que

$$A_f = \frac{\alpha 4\pi r^2}{2\pi}$$

e, portanto

$$A_f = 2\alpha r^2$$

Teorema 2.1.4 *Em um triângulo esférico a soma dos ângulos internos é maior que 180° .*

Demonstração: Consideremos um dos hemisférios H tal que H contenha um dos lados do triângulo. Prolongando os lados do vértice α até intersectar o hemisfério H teremos um fuso de ângulo α cuja área é $A_{fuso(\alpha)} = 2r^2\alpha$, conforme figura a seguir.

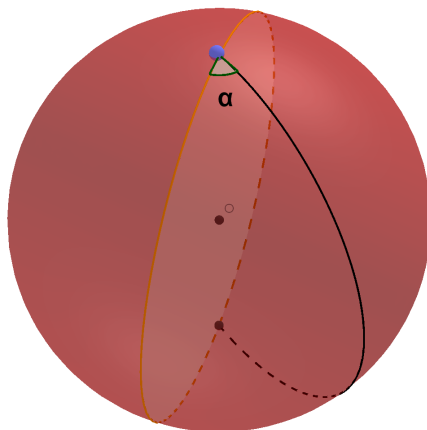
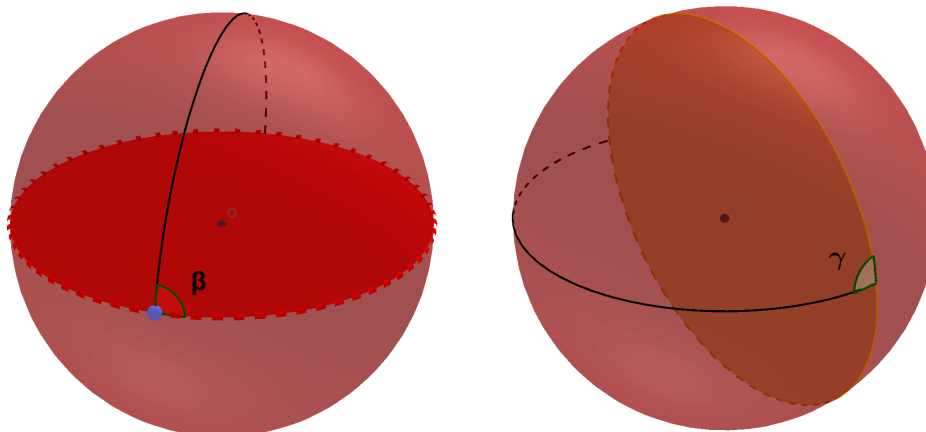


Figura 2.13: Prolongamento do lado do vértice α

Fonte: O autor

Da mesma forma construímos os fusos de ângulo β e γ , com áreas $A_{fuso(\beta)} = 2r^2\beta$ e $A_{fuso(\gamma)} = 2r^2\gamma$ respectivamente.



(a) Prolongamento do lado de vértice β

(b) Prolongamento do lado de vértice γ

Figura 2.14: Construção para os outros lados do triângulo $\alpha\beta\gamma$

Fonte: O autor

Com essa construção, a área dos três fusos cobre todo o hemisfério que contém o triângulo e, além disso, esse triângulo tem sua área contada três vezes, isto é:

$$A_{fuso(\alpha)} + A_{fuso(\beta)} + A_{fuso(\gamma)} - 2A_t = A_H$$

Onde A_t e A_H são as áreas do triângulo esférico e do hemisfério respectivamente. Daí segue que

$$2r^2\alpha + 2r^2\beta + 2r^2\gamma - 2A_t = 2\pi r^2$$

Dividindo toda a equação por $2r^2$ temos que:

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{A_t}{r^2} = \pi$$

De onde concluímos que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_t}{r^2} > \pi$$

Aqui vale uma análise deste resultado: Observe que, quando se considera um triângulo muito pequeno, sua área tende a zero e portanto a soma de seus ângulos internos tende a 180° , que é o conhecido caso Euclidiano; em outras palavras, ao desenhar um triângulo no jardim de sua casa e medir os ângulos internos é certo que se confirmará que em qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos é sempre igual a 180° . Isso porque, se comparado com a superfície terrestre, qualquer jardim doméstico tem área insignificante. Por outro lado, se considerar um triângulo tendo como vértices as cidades de Belém, Pequim e Joanesburgo, não se pode desconsiderar o valor da área deste triângulo. Tem-se ainda que, à medida que tomam-se vértices cada vez mais próximos do hemisfério que contenha o triângulo, mais a área deste se aproxima da área do hemisfério, ou seja, a soma dos ângulos tende a $3\pi = 540^\circ$. Portanto pode-se concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior que 180° e menor do que 540° .

Este provavelmente é um dos resultados mais interessantes da Geometria Esférica pelo choque que causa com o que sempre se considerou fato imutável. Por isso as aulas de Geometria Euclidiana são uma ótima oportunidade para introduzir alguns conceitos também da Geometria Esférica.

2.2 Geometria Plana vs. Geometria Esférica

A seção a seguir fará um comparativo entre alguns dos principais conceitos entre estas duas Geometrias.

2.2.1 Qual é o polígono com menor número de lados que se pode construir?

Definindo polígono como a região interna limitada por retas distintas, temos que:

Geometria Euclidiana: O menor polígono que se pode construir é um triângulo.

Geometria Esférica: Bastam duas circunferências máximas para se construir um *biângulo*, ou como já definido, fuso esférico.

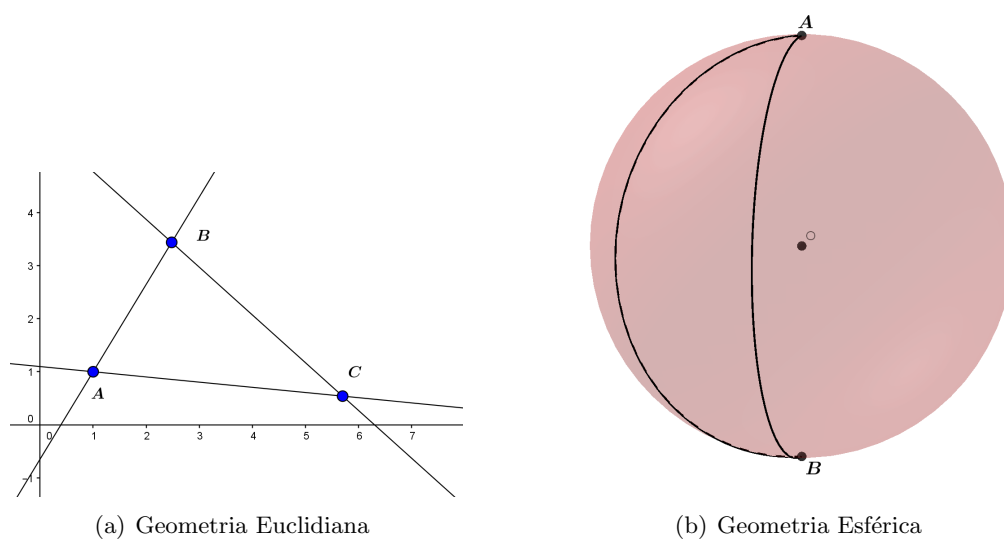


Figura 2.15: Comparativo 1
 Fonte: O autor

2.2.2 Quantas retas podem ser traçadas passando por dois pontos distintos?

Geometria Euclidiana: Por dois pontos distintos pode-se traçar uma única reta.

Geometria Esférica: Por dois pontos antípodas passam infinitas circunferências máximas.

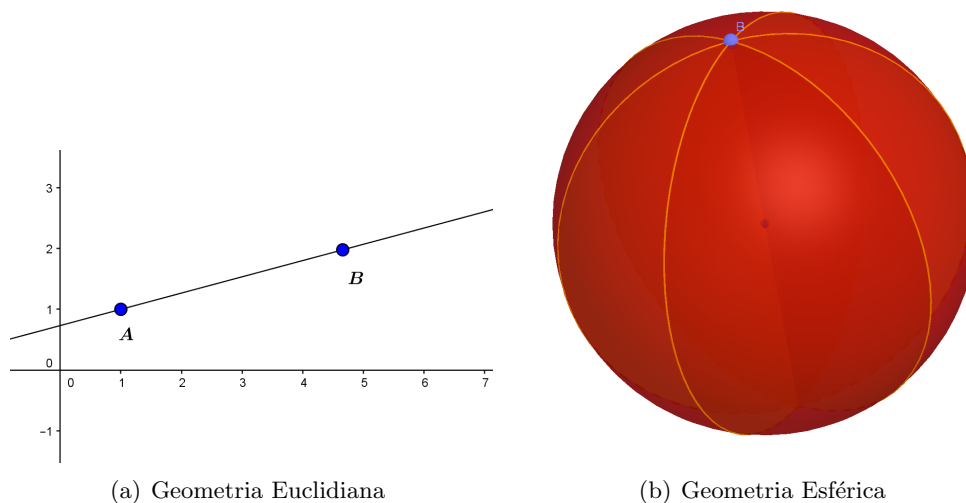
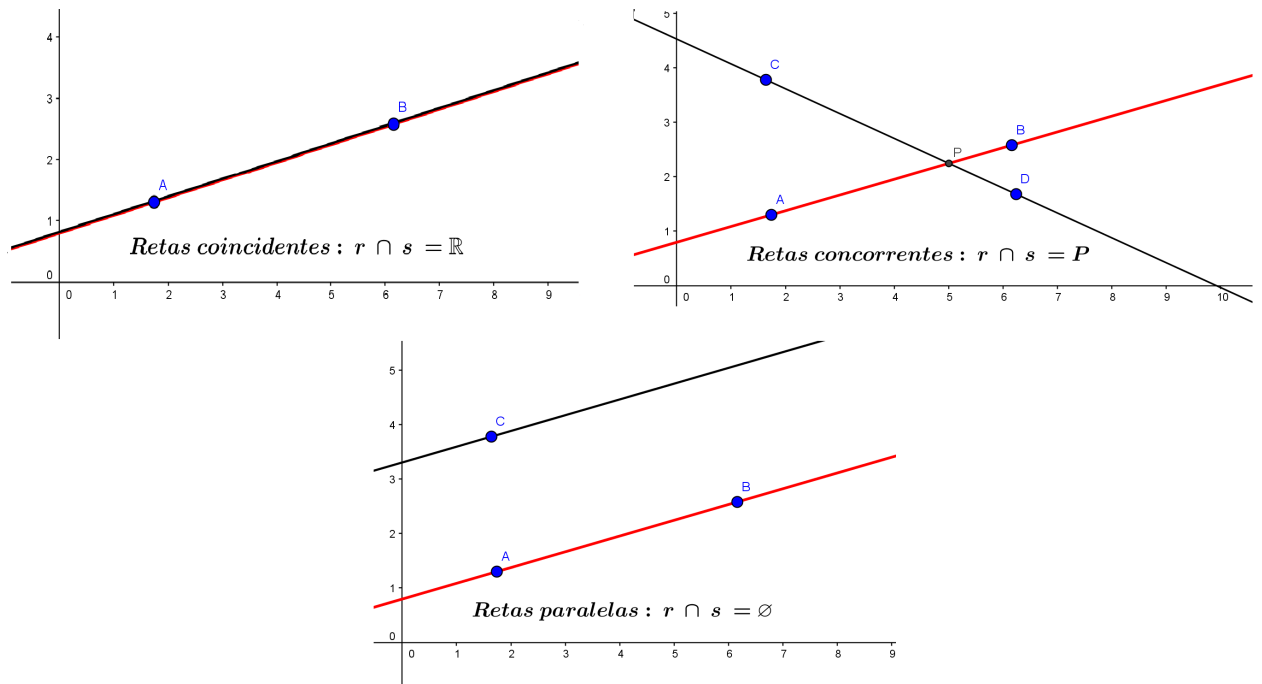


Figura 2.16: Comparativo 2
 Fonte: O autor

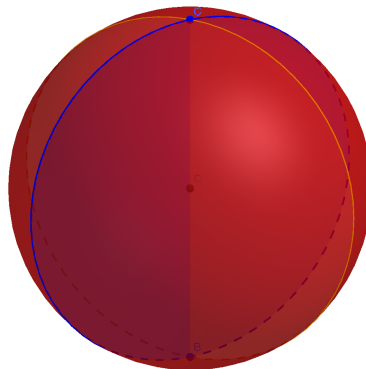
2.2.3 Qual a posição relativa entre duas retas?

Geometria Euclidiana: Se traçadas em um mesmo plano, duas retas podem ser coincidentes, concorrentes ou paralelas.

Geometria Esférica: Se traçadas em uma mesma superfície esférica, duas retas podem ser concorrentes ou coincidentes. Não existem retas paralelas em uma superfície esférica.



(a) Geometria Euclidiana



(b) Geometria Esférica

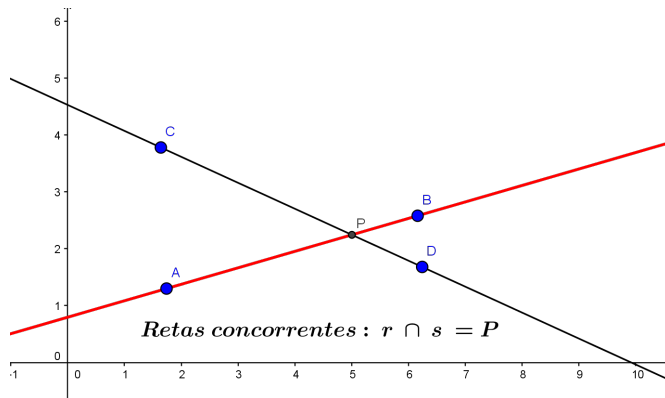
Figura 2.17: Comparativo 3

Fonte: O autor

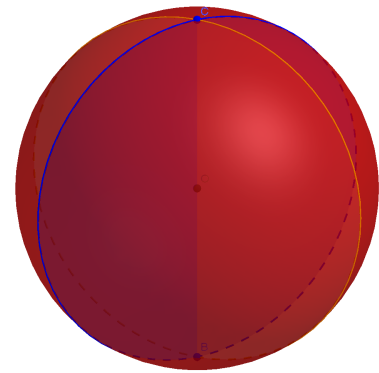
2.2.4 Retas concorrentes se intersectam em quantos pontos?

Geometria Euclidiana: Duas retas concorrentes se intersectam em um único ponto.

Geometria Esférica: Duas circunferências máximas se intersectam sempre em dois pontos (pontos antípodas).



(a) Geometria Euclidiana



(b) Geometria Esférica

Figura 2.18: Comparativo 4

Fonte: O autor

2.2.5 Qual a classificação de um triângulo?

Na **Geometria Euclidiana**, essa classificação é bastante conhecida, a saber:

Quanto aos lados

- i) *Equilátero*: Os três lados com a mesma medida.
- ii) *Isósceles*: Dois lados com a mesma medida.
- iii) *Escaleno*: Os três lados com medidas diferentes.

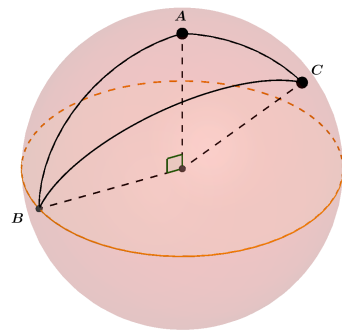
Quanto aos ângulos

- i) *Acutângulo*: Os três ângulos são menores que 90°
- ii) *Retângulo*: Tem um dos ângulos igual a 90°
- iii) *Obtusângulo*: Possui um ângulo maior que 90°

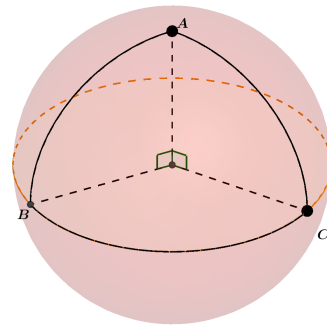
Na **Geometria Esférica**, lembrando que os lados aqui são arcos de uma circunferência máxima, essa classificação é diferente:

Quanto aos lados

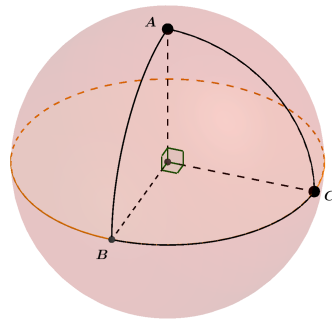
- i) *Retilátero*: Possui um dos lados medindo 90° .
- ii) *Birretilátero*: Dois lados medindo 90° cada um.
- iii) *Trirretilátero*: Se têm os três lados medindo 90° cada um.



(a) Triângulo Retilátero



(b) Triângulo Birretilátero



(c) Triângulo Trirretilátero

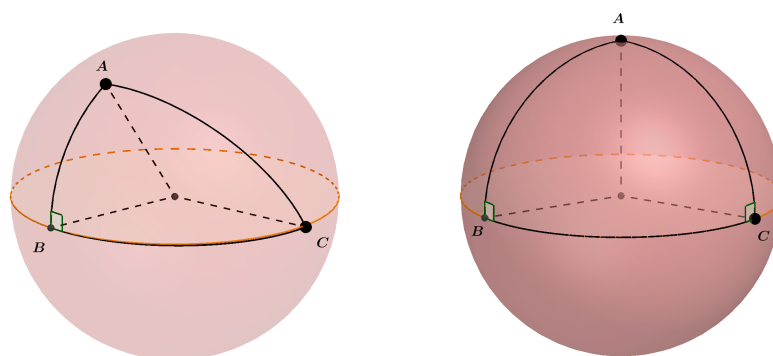
Figura 2.19: Classificação dos triângulos esféricos quanto aos lados.

Fonte: O autor

Quanto aos ângulos

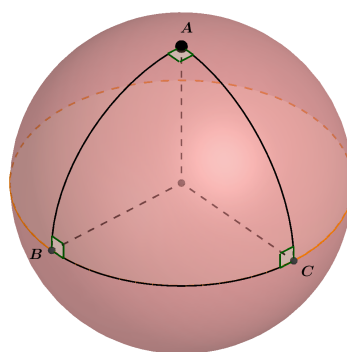
- i) *Retângulo*: Apresenta um ângulo reto.
- ii) *Birretângulo*: Possui dois ângulos retos.
- iii) *Trirretângulo*: Os três ângulos medem 90° .

Observe que um triângulo trirretilátero, também é trirretângulo, e, além disso, esse triângulo corresponde a um oitavo da superfície esférica correspondente.



(a) Triângulo Retângulo

(b) Triângulo Birretângulo



(c) Triângulo Trirretângulo

Figura 2.20: Classificação dos triângulos esféricos quanto aos ângulos.

Fonte: O autor

2.3 Trigonometria Esférica.

A seguir serão apresentados alguns resultados da trigonometria na superfície esférica que serão úteis para resolver as aplicações do capítulo 4.

Teorema 2.3.1 (Lei dos Senos) *Em um triângulo esférico, os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, isto é:*

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Demonstração: Considere o triângulo esférico ABC , façamos a seguinte construção:

- (i) Trace o arco perpendicular ao arco AB , passando por C , esse arco será a altura esférica que chamaremos de h , seja H a intersecção desses arcos.
- (ii) A partir do vértice C trace a projeção P sobre o plano ABO .
- (iii) Faça a projeção de P sobre o seguimento e \overline{OA} , seja N essa projeção.
- (iv) Faça a projeção de P sobre o seguimento \overline{OB} , seja M essa projeção.

Com essas construções, obtém-se os triângulos CPM e CPN , ambos retângulos, pois \overline{CP} é perpendicular ao plano ABO , que por sua vez, contém \overline{NP} , logo $\overline{CP} \perp \overline{NP}$. Da mesma forma, verifica-se que o triângulo CPM é retângulo.

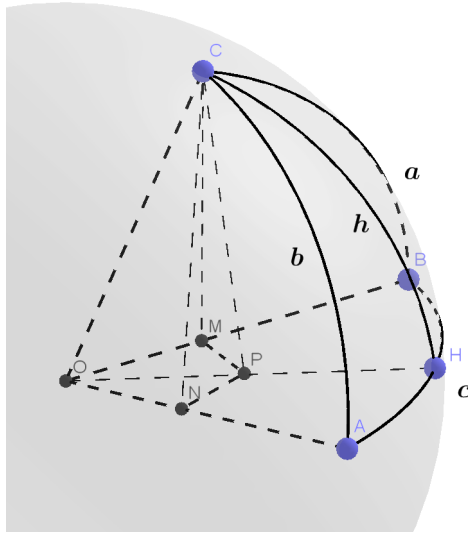


Figura 2.21: Projeções do triângulo esférico sobre um plano perpendicular a um de seus lados.
Fonte: O autor

Fazendo construções análogas às anteriores, observando que o seguimento $\overline{CM} \perp \overline{OB}$, obtém-se que os triângulos CMO e CNO também são retângulos.

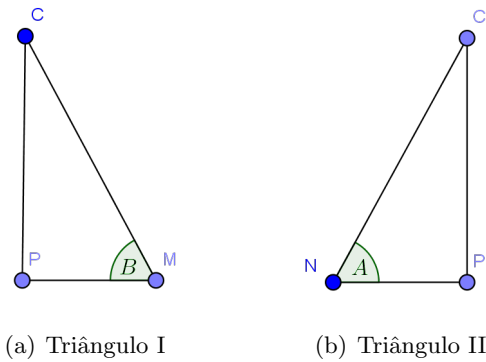


Figura 2.22: Projeções dos triângulos CPM e CPN .
Fonte: O autor

Dos triângulos I e II temos que

$$\text{sen}(B) = \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}}$$

$$\text{sen}(A) = \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}}$$

Daí, isolando \overline{CP} e igualando as equações fica que:

$$\overline{CM} \cdot \text{sen}(B) = \overline{CN} \cdot \text{sen}(A) \quad (1)$$

De forma análoga, temos que, nos triângulos III e IV

$$\text{sen}(a) = \frac{\overline{CM}}{r}$$

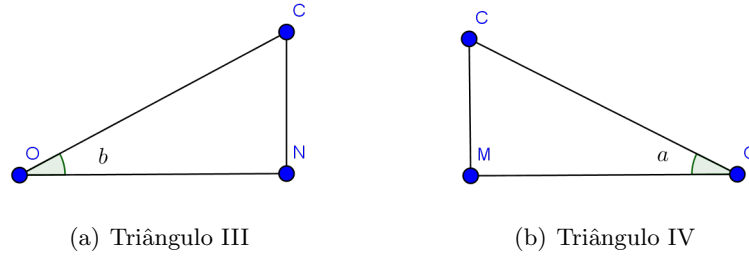


Figura 2.23: Projeções dos triângulos COM e CON .
Fonte: O autor

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{CN}}{r}$$

Onde r é o raio da esfera. Então, fica que $\overline{CM} = r.\text{sen}(a)$ e $\overline{CN} = r.\text{sen}(b)$, substituindo \overline{CM} e \overline{CN} na equação (1), resulta que

$$r.\text{sen}(a).\text{sen}(B) = r.\text{sen}(b).\text{sen}(A)$$

Ou seja,

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)}$$

Traçando a altura esférica sobre o lado a se prova que

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Portanto,

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Teorema 2.3.2 (Lei dos Cossenos) *Em todo triângulo esférico, o cosseno de um lado é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados mais o produto dos senos desses lados pelo cosseno do ângulo entre eles, isto é:*

$$\cos(a) = \cos(b).\cos(c) + \text{sen}(b).\text{sen}(c).\cos(A)$$

$$\cos(b) = \cos(a).\cos(c) + \text{sen}(a).\text{sen}(c).\cos(B)$$

$$\cos(c) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b).\cos(C)$$

Demonstração: Pelo ponto A traçam-se os seguimentos tangentes aos arcos AB e AC , sejam r e s esses seguimentos. Seja A o ângulo formado por estes seguimentos. Traçam-se as semiretas OB e OC até a intersecção com r e s . Chame D e E esses pontos. Como os seguimentos AD e AE são tangentes aos arcos AB e AC , os ângulos DAO e EAO são retos.

Aplicando o lei dos cossenos da Geometria Plana aos triângulos ADE e ODE obtém-se:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2.AD.AE.\cos(A)$$

$$DE^2 = DO^2 + EO^2 - 2.DO.EO.\cos(a)$$

Dessas igualdades resulta que

$$AD^2 + AE^2 - 2.AD.AE.\cos(A) = DO^2 + EO^2 - 2.DO.EO.\cos(a) \quad (1)$$

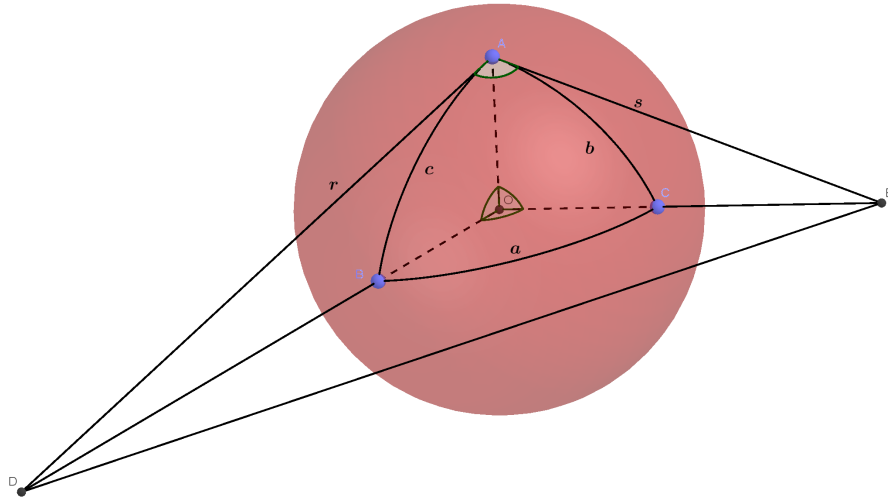


Figura 2.24: Ilustração para demonstração do teorema dos cossenos da Geometria Esférica
Fonte: O autor

Aplicando agora o teorema de Pitágoras aos triângulos DAO e EAO resulta

$$DO^2 = OA^2 + AD^2$$

$$EO^2 = OA^2 + AE^2$$

Mas OA é o raio da esfera, então fica que

$$DO^2 = R^2 + AD^2 \quad (2)$$

$$EO^2 = R^2 + AE^2 \quad (3)$$

Substituindo agora (2) e (3) em (1), tem-se

$$AD^2 + AE^2 - 2.AD.AE.cos(A) = R^2 + AD^2 + R^2 + AE^2 - 2.DO.EO.cos(a)$$

Eliminando os termos semelhantes, fica que

$$-2.AD.AE.cos(A) = 2R^2 - 2.DO.EO.cos(a) \quad (4)$$

Aplicando agora as relações trigonométricas aos triângulos retângulos DAO e EAO, resulta que

$$(i) \quad AD = OD.sen(c)$$

$$(ii) \quad AE = OE.sen(b)$$

$$(iii) \quad R = OE.cos(b)$$

$$(iv) \quad R = OD.cos(c)$$

Substituindo esses valores em (4):

$$-2.OD.sen(c).OE.sen(b).cos(A) = 2OE.cos(b).OD.cos(c) - 2.OD.OE.cos(a)$$

$$\begin{aligned}
-2\operatorname{sen}(c).\operatorname{sen}(b).\cos(A) &= 2\cos(b).\cos(c) - 2\cos(a) \\
2\cos(a) &= 2\cos(b).\cos(c) + 2\operatorname{sen}(c).\operatorname{sen}(b).\cos(A)
\end{aligned}$$

Daí, finalmente segue que:

$$\cos(a) = \cos(b).\cos(c) + \operatorname{sen}(b).\operatorname{sen}(c).\cos(A)$$

O que demonstra o teorema.

Teorema 2.3.3 (das Cotangentes) *Em um triângulo esférico, temos que:*

$$\operatorname{cotg}(a).\operatorname{sen}(b) = \cos(b).\cos(C) + \operatorname{sen}(C).\operatorname{cotg}(A)$$

Demonstração: Dos teoremas dos senos e dos cossenos, pode-se escrever

$$\cos(a) = \cos(b).\cos(c) + \operatorname{sen}(b).\operatorname{sen}(c).\cos(A) \quad (i)$$

$$\cos(c) = \cos(a).\cos(b) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\cos(C) \quad (ii)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(C)} = \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)} \Rightarrow \operatorname{sen}(c) = \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)}.\operatorname{sen}(C) \quad (iii)$$

Agora, substituindo (ii) e (iii) em (i), fica que:

$$\cos(a) = \cos(b).[\cos(a).\cos(b) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\cos(C)] + \operatorname{sen}(b).\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)}.\operatorname{sen}(C).\cos(A) \Rightarrow$$

$$\cos(a) = \cos(a).\cos^2(b) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\cos(b).\cos(C) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\operatorname{sen}(C).\operatorname{cotg}(A) \Rightarrow$$

$$\cos(a) - \cos(a).\cos^2(b) = \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\cos(b).\cos(C) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\operatorname{sen}(C).\operatorname{cotg}(A)$$

Colocando $\cos(a)$ em evidência, no primeiro membro, temos que:

$$\cos(a)[1 - \cos^2(b)] = \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\cos(b).\cos(C) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\operatorname{sen}(C).\operatorname{cotg}(A)$$

Mas, $[1 - \cos^2(b)] = \operatorname{sen}^2(b)$, então

$$\cos(a).\operatorname{sen}^2(b) = \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\cos(b).\cos(C) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).\operatorname{sen}(C).\operatorname{cotg}(A)$$

Agora, dividindo os dois membros por $\operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b)$, finalmente resulta que

$$\operatorname{cotg}(a).\operatorname{sen}(b) = \cos(b).\cos(C) + \operatorname{sen}(C).\operatorname{cotg}(A)$$

Capítulo 3

Algumas aplicações envolvendo Geometria Esférica

Neste capítulo serão mostrados alguns exemplos de aplicação da Geometria Esférica que podem ser utilizados como ferramenta para o ensino desta na Educação Básica.

3.1 O Sistema de Posicionamento Global - GPS.

Estabelecer um processo que facilitasse a localização de um objeto sobre a superfície da Terra sempre foi um desafio; inicialmente usavam-se (no cotidiano várias pessoas ainda usam e nem se dão conta disso talvez) referências simples como árvores, montanhas ou rios, mas esta não era a maneira mais segura de se orientar dada a possibilidade de mudança dos referenciais. A próxima tentativa foi então olhar para os astros celestes, dada a constância de suas posições. Daí surgem então os primeiros instrumentos de localização global como o *astrolábio*, o *quadrante* e depois a *bússola*. Apesar de muito úteis tinham suas limitações, a principal delas é o fato de não mostrar a posição, apenas a direção a seguir.

A partir da segunda guerra mundial, e do pós-guerra com a corrida espacial, grandes avanços tecnológicos permitiram desenvolver sistemas cada vez mais precisos; mas foi apenas na década de 90 que esse sistema revolucionário entrou em pleno funcionamento. Hoje o GPS está integrado a praticamente todos os celulares e smartphones vendidos no mundo; o avanço tecnológico permitiu uma precisão cada vez maior na localização de qualquer objeto na superfície terrestre. Para entender melhor seu funcionamento é necessário conhecer alguns conceitos relacionados a coordenadas geográficas, como ocorre o processo de trilateração e as superfícies esféricas.

3.1.1 Coordenadas Geográficas

Ainda no capítulo 2, quando foram definidos os elementos da esfera, falou-se o que é um Meridiano, um Paralelo e o Equador, vamos retomar aqueles conceitos.

Definição 3.1.1 *Eixo Polar: é a reta que contém o centro d Terra e ao redor da qual esta desenvolve seu movimento de rotação.*

Definição 3.1.2 *Equador: é o plano perpendicular ao eixo polar e que passa pelo centro da Terra. O hemisfério acima do Equador é chamado de Hemisfério Norte e o abaixo de Hemisfério Sul.*

Definição 3.1.3 *Meridianos: são semicircunferências que passam pelos pólos e, evidentemente, são perpendiculares ao Equador.*

É importante deixar bem definidos estes conceitos pois é a partir deles que se determinam as coordenadas geográficas, isto é: *latitude* e *longitude*

Definição 3.1.4 *Latitude*: considere um ponto P sobre a superfície terrestre, e considere o meridiano que passa por P . A latitude de P é a medida do arco (em graus, minutos e segundos) que vai de P até o Equador. P terá latitude N (Norte) se estiver acima do Equador, e latitude S (Sul), se estiver abaixo.

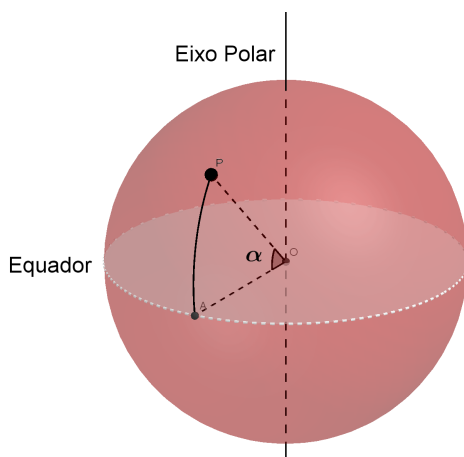


Figura 3.1: α é a latitude do ponto P
Fonte: O autor

Definição 3.1.5 *Longitude*: considere um ponto P sobre a superfície terrestre, e considere o paralelo que passa por P . A longitude de P é a medida do arco (em graus, minutos e segundos) que vai de P até o meridiano de Greenwich¹. P terá longitude E (est - Leste em inglês) se estiver a direita de Greenwich e longitude W (west - Oeste em inglês) se estiver a esquerda de Greenwich.

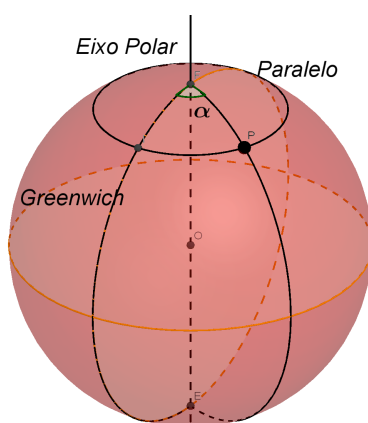


Figura 3.2: α é a longitude do ponto P
Fonte: O autor

¹Este é o meridiano de referência, ou seja de longitude 0° . Ele se chama assim porque passa pelo famoso Observatório Real na localidade de Greenwich, a sudeste de Londres

3.1.2 Distância entre dois pontos na superfície esférica

O que segue agora é o cálculo da distância entre dois pontos na superfície esférica. Para isso será desprezado o fato de que a Terra apresenta um achatamento nos polos, considerando-a portanto perfeitamente esférica e com um raio de 6.400 Km.

Exemplo 3.1.1 *Considere as cidades de Londres e Acra (capital de Gana, no continente africano), elas estão praticamente sobre o mesmo meridiano (o de Greenwich). Qual a distância entre essas cidades? Considere também a latitude de Acra sendo $5^{\circ}33'21''$ N e a de Londres $51^{\circ}30'30''$ N*

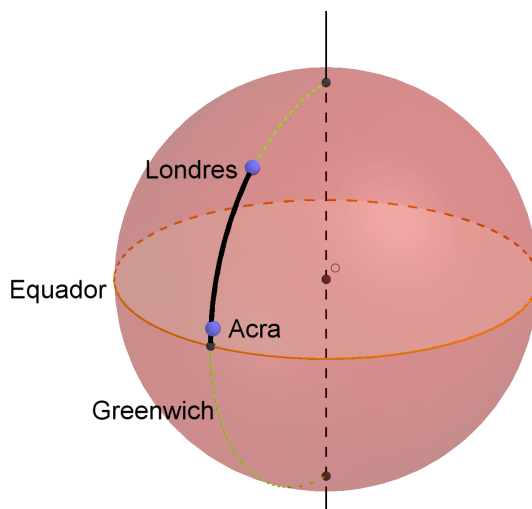


Figura 3.3: Acra 5° N e Londres 51° N

Fonte: O autor

Como estão sobre o mesmo meridiano, isto é, uma mesma circunferência máxima, pode-se estabelecer a distância da seguinte forma: primeiro estabelecemos qual o comprimento do arco de 1° .

$$2\pi r \longrightarrow 360^{\circ}$$

$$x \longrightarrow 1^{\circ}$$

Onde r é o raio da Terra. Então, tem-se que $x = \frac{2\pi \cdot 6.400}{360^{\circ}}$, donde segue que $x \cong 111,7$ km.

Agora, lembrando que $1^{\circ} = 60'$ e $1' = 60''$ obtemos as coordenadas apenas em graus; isto é:

$$1' \rightarrow 60''$$

$$x' \rightarrow 30''$$

Donde segue que $x = 0,5'$, da mesma forma fazemos:

$$1^{\circ} \rightarrow 60'$$

$$y^{\circ} \rightarrow 30,5'$$

Daí vem que $y \cong 1,967$. Portanto, a latitude de Londres, apenas em graus é de aproximadamente $51,967^{\circ}$

Analogamente, encontramos a latitude de Acra, como segue:

$$1' \rightarrow 60''$$

$$z' \rightarrow 21''$$

Que nos dá $z = 0,35$; mas

$$1^\circ \rightarrow 60'$$

$$w^\circ \rightarrow 33,35'$$

$$w = 0,555^\circ$$

E, portanto, temos que a latitude de Acra é de aproximadamente $5,555^\circ$. Finalmente, fazendo a diferença entre as latitudes, encontramos o arco de $46,412^\circ$. Como $1^\circ \cong 111,7 \text{ km}$, concluímos que distância entre Acra e Londres é de $111,7 \cdot 46,412 = 5.184,22 \text{ km}$.

De maneira geral, pode-se transformar as coordenadas da seguinte forma:

$$x^\circ y' z'' = x + \frac{y}{60} + \frac{z}{3600}$$

Com este mesmo raciocínio podemos calcular a distância entre duas cidades que estejam no mesmo paralelo. Se estiverem sobre a linha do Equador, o resultado é obtido seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, pois a linha do Equador também é uma circunferência máxima, assim como qualquer meridiano.

Exemplo 3.1.2 Considere agora as cidades de Macapá localizada a $51^\circ 3' 59'' W$ e de Rorainópolis (em Roraima), localizada a $60^\circ 25' 5'' W$. Qual a distância entre elas, sabendo que ambas estão praticamente na linha do Equador?



Figura 3.4: Mapa da Região

Fonte: Google Maps

Fazendo as devidas transformações de coordenadas apenas para graus, teremos que Macapá está a $51,066^\circ W$ e Rorainópolis a $60,418^\circ W$; daí segue que a diferença entre essas coordenadas é de $9,352^\circ$, e portanto a distância entre as cidade é de $1044,618 \text{ km}$.

Considere agora o caso de dois pontos distintos que estejam sobre um paralelo qualquer.

Exemplo 3.1.3 Calcular a distância entre as cidades de Porto Alegre ($51^{\circ}13'48''$ W) e Durban, na África do Sul ($31^{\circ}01'45''$ E) considerando que eles estão praticamente sobre o mesmo paralelo, 30° S.

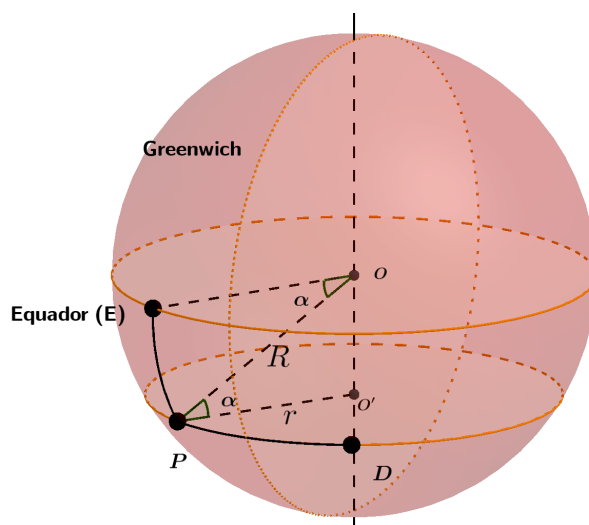


Figura 3.5: Representação da posição geográfica de Porto Alegre e Durban.
Fonte: O autor

Neste caso, é necessário determinar antes a medida do raio desse paralelo. Primeiro, observe que os ângulos EOP e OPO' são congruentes e medem 30° . Como o triângulo OPO' é retângulo, temos que $r = R \cdot \cos \alpha$, onde $\alpha = 30^{\circ}$ é a latitude das cidades e $R = 6.400$ km é o raio da Terra. Logo, $r = 6.400 \times \cos 30^{\circ}$, que nos dá $r = 5.542,56$ km aproximadamente.

Com isso temos que:

$$2\pi r \rightarrow 360^{\circ}$$

$$d \rightarrow \beta$$

Onde β é o menor arco formado pelas cidades ao longo do paralelo 30° S e d é a distância entre elas. daí segue que

$$d = \frac{2\pi r \beta}{360^{\circ}}$$

Transformando as coordenadas, temos que $51^{\circ}13'48'' \cong 51,23^{\circ}$ e $31^{\circ}01'45'' \cong 31,029^{\circ}$. Vale ressaltar que, como estas cidades estão uma a leste e outra a oeste de Greenwich, o arco que elas determinam é a soma e não a diferença das coordenadas; assim temos que, $\beta = 82,259^{\circ}$ e, portanto, a distância entre Porto Alegre e Durban será de:

$$d = \frac{2\pi \times 5.542,56 \times 82,259}{360^{\circ}}$$

Assim, $d = 7.957,4$ km. Essa porém, não é a menor distância entre as cidades.

Esse três exemplos mostram de maneira relativamente simples como encontrar a distância entre duas cidades que estejam em um mesmo paralelo ou meridiano; mas como fazer isso para dois pontos que não se enquadrem nesses casos? Para situações desse tipo pode-se utilizar o teorema dos cossenos da Geometria Esférica.

Agora é possível calcular a distância entre quaisquer duas cidades sendo conhecidas suas coordenadas.

Exemplo 3.1.4 Calcular a distância entre Campo Grande - MS ($20^{\circ}26'34''$ S e $54^{\circ}38'47''$ W) e Natal - RN ($5^{\circ}47'42''$ S e $35^{\circ}12'34''$ W).

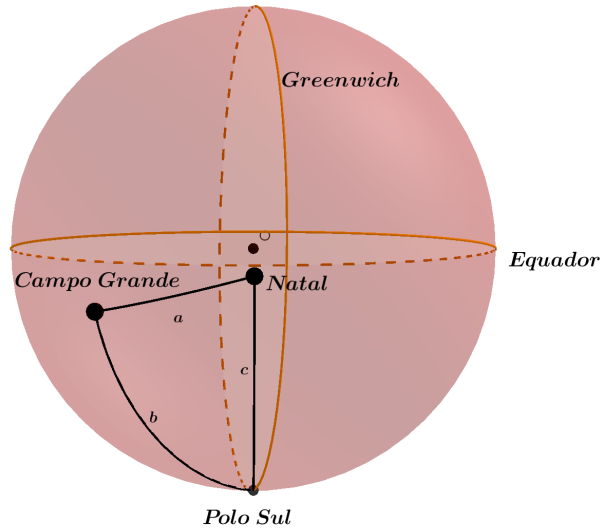


Figura 3.6: Representação geométrica da localização de Campo Grande e Natal
Fonte: O autor

- (1) Transformando as coordenadas apenas para graus.
Campo Grande:

$$\textit{Latitude} \quad 20^{\circ}26'34'' \text{ S} = 20 + \frac{26}{60} + \frac{34}{3600} = 20,44^{\circ} \text{ S}$$

$$\textit{Longitude} \quad 54^{\circ}38'47'' \text{ W} = 54 + \frac{38}{60} + \frac{47}{3600} = 54,64^{\circ} \text{ W}$$

Natal:

$$\textit{Latitude} \quad 5^{\circ}47'42'' \text{ S} = 5 + \frac{47}{60} + \frac{42}{3600} = 5,79^{\circ} \text{ S}$$

$$\textit{Longitude} \quad 35^{\circ}12'34'' \text{ S} = 35 + \frac{12}{60} + \frac{34}{3600} = 35,20^{\circ} \text{ W}$$

- (2) Calculando as medidas de A , b e c .

$$A = 20,44^{\circ} - 5,79^{\circ} = 14,65^{\circ}$$

$$b = 90^{\circ} - 20,44^{\circ} = 69,56^{\circ}$$

$$c = 90^{\circ} - 5,79^{\circ} = 84,21^{\circ}$$

- (3) Aplicando o teorema dos cossenos da Geometria Esférica.

$$\cos(a) = \cos(69,56) \cdot \cos(84,21) + \sin(69,56) \cdot \sin(84,21) \cdot \cos(14,65)$$

Portanto, $\cos(a) = 0,91$.

Logo, $a \cong 27,21^{\circ}$.

(4) Calculando a distância entre as cidades.

Pode-se traçar uma circunferência máxima que passe por essas cidades e, pelo exemplo 4.1.1, a distância é o arco formado por elas multiplicado pela medida do arco de 1° , ou seja:

$$d = 27,21 \times 111,7$$

Então, conclui-se que a distância entre Campo Grande e Natal é de aproximadamente 3.309,35 km.

No exemplo 4.1.2, calculou-se a distância entre Porto Alegre e Durban, considerando que estas cidades estão sobre o paralelo 30° S. Vamos rever esse resultado, utilizando agora o teorema dos cossenos e as coordenadas exatas de cada cidade: Porto Alegre ($30^\circ 01' 59''$ S e $51^\circ 13' 48''$ W) e Durban ($29^\circ 51' 28''$ S e $31^\circ 01' 45''$ E).

Porto Alegre:

$$30^\circ 01' 59'' = 30 + \frac{01}{60} + \frac{59}{3600} = 30,03^\circ \text{ S}$$

$$51^\circ 13' 48'' = 51 + \frac{13}{60} + \frac{48}{3600} = 51,23^\circ \text{ W}$$

Durban:

$$29^\circ 51' 28'' = 29 + \frac{51}{60} + \frac{29}{3600} = 29,85^\circ \text{ S}$$

$$31^\circ 01' 45'' = 31 + \frac{01}{60} + \frac{45}{3600} = 31,02^\circ \text{ E}$$

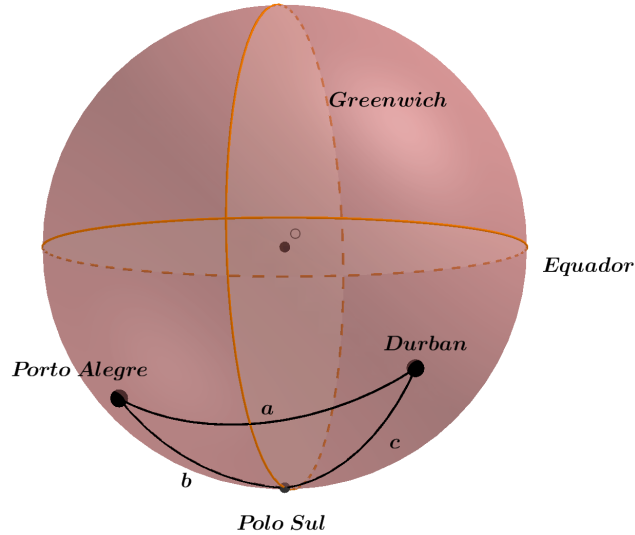


Figura 3.7: Representação geométrica da localização de Porto Alegre e Durban

Fonte: O autor

Aplicando o teorema dos cossenos e lembrando que, neste caso, o ângulo esférico é dado pela soma das longitudes, tem-se que:

$$\cos(a) = \cos(59,97) \cdot \cos(60,15) + \sin(59,97) \cdot \sin(60,15) \cdot \cos(82,25)$$

$$\cos(a) = 0,341$$

Logo, $a = 70,06^\circ$. E, portanto a distância entre as cidades será $70,06 \times 111,7 = 7.825,70 \text{ km}$. Observe que naquele exemplo a distância encontrada foi de $7.957,40 \text{ km}$; ou seja, a distância medida sobre o paralelo *não* é a menor distância entre as cidades.

Definição 3.1.6 *Geodésica: É a menor distância entre dois pontos na superfície esférica. É a medida do menor arco de uma circunferência máxima que contenha esses pontos.*

Atividades como esta são notadamente interessantes para pôr o aluno em contato com os conceitos da Geometria Esférica uma vez que ampliam a visão para cálculos além daqueles usualmente trabalhados na Educação Básica; além disso, usando a superfície terrestre, abrem-se oportunidades de estabelecer, neste caso, relações entre a Matemática e a Geografia, proporcionando interdisciplinidade e contribuindo para compreender melhor o mundo em que se vive.

3.1.3 O processo de trilateração

Até aqui, o que foi visto dá suporte para entender a nomenclatura da localização de pontos na superfície terrestre, bem como, calcular a distância entre dois quaisquer pontos nessa superfície conhecendo-se suas coordenada geográficas. O que se pretende agora é estabelecer a localização de um ponto na superfície esférica; o ponto de partida para isso será o estabelecimento da localização de um ponto no plano. A situação a seguir foi baseada em [11]

Exemplo 3.1.5 *Imagine um grupo de amigos que decidiram fazer uma trilha no interior do Pará e acabaram se perdendo em algum lugar entre os municípios de Terra Alta, São Francisco do Pará e Castanhal. A equipe dispõe de um mapa e de material de desenho geométrico. Suponha que nessas cidades existam igrejas cujos sinos tocam simultaneamente a cada hora e que seus timbres são suficientemente diferentes para diferenciá-los, além de poderem ser ouvidos a grandes distâncias. Considere que a velocidade do som é de 340m/s e desconsidere as perdas pela resistência do ar e pela variação de altitude.*



Figura 3.8: Mapa da região entre as cidades de Terra Alta, São Francisco do Pará e Castanhal/Pa
Fonte: Google Maps

O membros da equipe observaram os relógios e perceberam que faltava alguns minutos para que os sinos soassem 14 h, então, prepararam seus cronômetros para marcar com quanto tempo ouviriam cada sino; $9,02s$ após as 14 h ouve-se o som do sino de São Francisco do Pará, $10,52s$ após 14 h ouve-se o de Castanhal e, após $12,38 s$ o de Terra Alta. Com essas informações o grupo pode calcular a que distância estão de cada uma das cidades.

$$d_1 = 9,02 \times 340 = 3.066,8 \text{ m}$$

$$d_2 = 10,52 \times 340 = 3.576,8 \text{ m}$$

$$d_3 = 12,38 \times 340 = 4.209,2 \text{ m}$$

Assim, eles traçam no mapa, circunferências com centro em São Francisco do Pará e Castanhal e raios d_1 e d_2 respectivamente. Para determinar o ponto exato onde estão, eles desenham a terceira circunferência com centro em Terra Alta e raio d_3 .

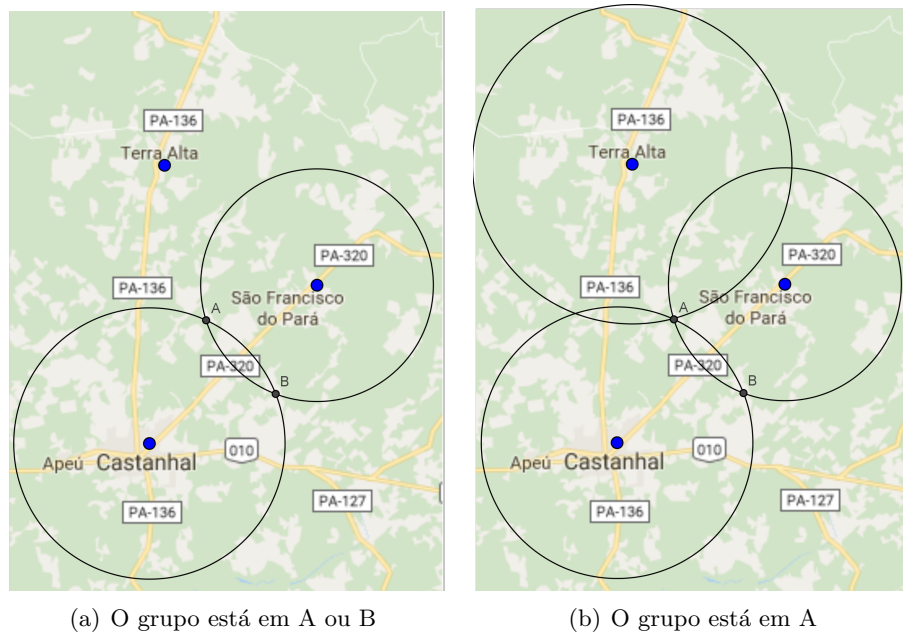


Figura 3.9: Determinando localização pela intersecção das circunferências

Fonte: O autor

Esse exemplo é interessante para entender o teorema a seguir, que garante ser única a localização determinada pelo GPS. Da mesma forma que as três circunferências determinaram a localização do grupo no exemplo acima, tem-se que, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, conhecendo-se as distâncias d_i de um ponto P a outros quatro pontos C_i escolhidos adequadamente no espaço, então a intersecção de quatro esferas de centro C_i e raio d_i determinará a localização do ponto P. Antes desse porém, necessita-se de um outro resultado que será visto agora.

Teorema 3.1.1 *Os pontos A, B, C e D em \mathbb{R}^3 são coplanares se, e somente se:*

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0$$

Onde cada linha representa os vetores \vec{AB} , \vec{AC} e \vec{AD} .

Demonstração:(Baseada em [11] Se quatro pontos distintos A, B, C e D do \mathbb{R}^3 são coplanares, então \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} também são coplanares, logo, algum deste três vetores é combinação linear dos outros dois.

Supondo, sem perder a generalidade, que \overrightarrow{AB} é combinação linear de \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} , então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $B - A = \alpha.(C - A) + \beta.(D - A)$. Então:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha.(C - A) + \beta.(D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha.(C - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta.(D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} \\ &= \alpha \begin{vmatrix} C - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} D - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \alpha.0 + \beta.0 = 0 \end{aligned}$$

Para provarmos a recíproca, temos que:

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0$$

temos então duas possibilidades:

- (i) Um dos vetores (B-A), (C-A), (D-A) é nulo. Supondo que $B - A = 0 \implies B = A$, o que é absurdo pois por hipótese os pontos A, B, C e D são distintos.
- (ii) Um dos vetores é combinação linear dos outros dois; dessa forma fica que $B - A = \alpha.(C - A) + \beta.(D - A)$, de onde conclui-se que os vetores B-A, C-A e D-A são coplanares. Logo, A, B, C e D $\in \mathbb{R}^3$ são coplanares.

Teorema 3.1.2 *Se quatro superfícies esféricas com centros não coplanares se intersectam, então essa intersecção é um único ponto.*

Demonstração: Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \text{ e } (x_4, y_4, z_4)$$

e cujas equações são:

$$\begin{cases} E_1 : x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ E_2 : x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ E_3 : x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ E_4 : x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Tomemos como hipótese que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$, fazendo então $E_1 - E_2$, $E_1 - E_3$, e $E_1 - E_4$ obtemos

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) \end{cases} \quad (3.2)$$

A solução desse sistema é o conjunto dos planos que contém as intersecções das esferas E_2, E_3 , e E_4 com E_1 , e cuja solução também é solução do sistema (4.1). Sabemos que um sistema de equações lineares terá solução única se:

$$D = \begin{vmatrix} (a_1 - a_2) & (b_1 - b_2) & (c_1 - c_2) \\ (a_1 - a_3) & (b_1 - b_3) & (c_1 - c_3) \\ (a_1 - a_4) & (b_1 - b_4) & (c_1 - c_4) \end{vmatrix} \neq 0$$

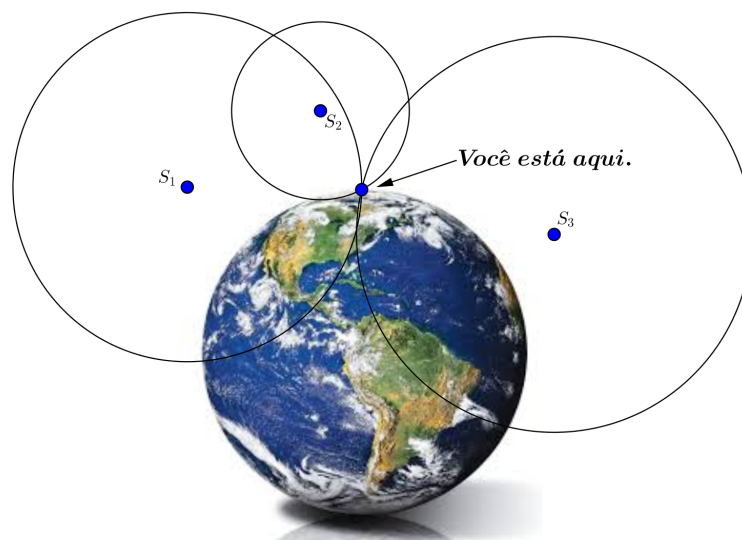


Figura 3.10: A quarta esfera determinará a localização do ponto P
 Fonte: O autor

Da Geometria Analítica, sabemos que a equação de uma esfera é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = d^2$, onde (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas cartesianas do centro da esfera e d é a medida do raio. Desenvolvendo os quadrados, podemos reescrevê-la como $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, onde $a = -2x_0, b = -2y_0, c = -2z_0$ e $d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d^2$, que é a chamada equação geral da esfera.

Comparando as equações do sistema (4.2) com a equação geral da esfera, temos que: $a_i = -2x_i; b_i = -2y_i$ e $c_i = -2z_i$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Então fica que

$$D = \begin{vmatrix} (-2x_1 + 2x_2) & (-2y_1 + 2y_2) & (-2z_1 + 2z_2) \\ (-2x_1 + 2x_3) & (-2y_1 + 2y_3) & (-2z_1 + 2z_3) \\ (-2x_1 + 2x_4) & (-2y_1 + 2y_4) & (-2z_1 + 2z_4) \end{vmatrix}$$

$$D = 8 \cdot \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix}$$

$$D = 8 \cdot \begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix}$$

Logo, pelo teorema anterior, os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 não são coplanares e portanto $D \neq 0$

3.2 Geometria Esférica na Cartografia.

Cartografia é um tema muito amplo e com bastante especificidades, dentre os seus muitos objetos de estudo destaca-se a elaboração de mapas para orientar o facilitar a navegação. O que

será tratado nesta secção são aplicações simples, minimizando as variáveis que interferem nos resultados. A idéia básica é mostrar como é feita a escolha do trajeto que minimize os custos e a distância de navegação, vale ressaltar porém, que o termo *navegação* é utilizado não apenas para o trajeto de navios, mas também de aviões e até mesmo de veículos espaciais . Para isso, serão definidos inicialmente alguns conceitos de Carografia.

Definição 3.2.1 *Ortodrômica: É a linha que une dois pontos distintos na superfície esférica, e corresponde ao caminho mais curto entre eles. Cartograficamente, é uma linha torsa, ou seja, que não pode ser planificada.*

Como visto em um outro momento, a ortodrômica é, em termos de Geometria Esférica, a geodésica, ou seja a menor distância entre dois pontos na superfície esférica.

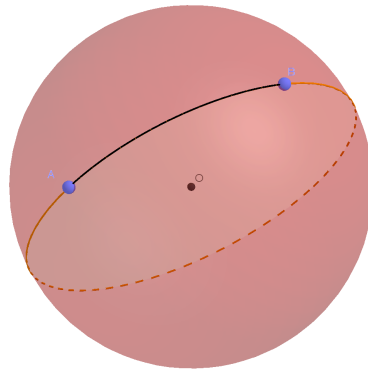


Figura 3.11: Linha ortodrômica entre dois pontos da superfície esférica.

Fonte: O autor

Definição 3.2.2 *Loxodrômica: É a linha da superfície esférica que faz um ângulo constante com todos os meridianos.*

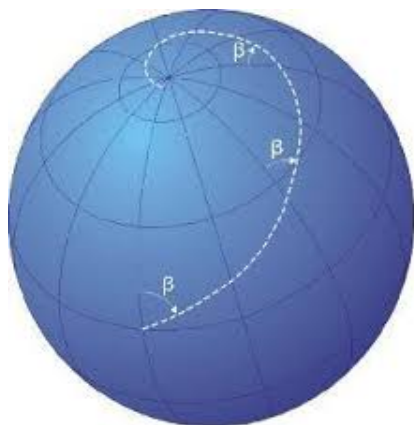


Figura 3.12: A loxodrômica na Terra é uma linha espiralada que une os Polos.

Fonte: <https:pt.wikipedia.org/wiki/Loxodromia>

Definição 3.2.3 *Azimuth*: É o ângulo formado entre o meridiano e a ortodrômica no ponto dado. Em nomenclaturas geométricas, o azimuth é o ângulo entre dois arcos de um triângulo esférico.

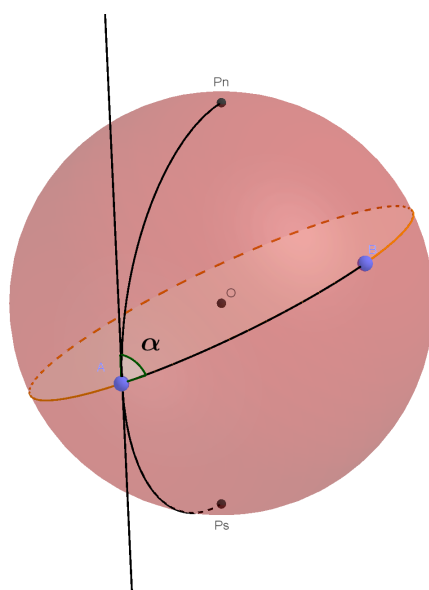


Figura 3.13: α é o azimuth da ortodrômica AB

Fonte: O autor

A forma mais econômica de viajar é se deslocando através da ortodrômica, porém não é tão simples se fazer isso uma vez que esta linha é definida de maneira discreta, ou seja, ponto a ponto. Para simplificar isso pode-se então navegar através da loxodrômica, que nada mais é que uma ortodrômica de azimuth constante, porém isso nem sempre é possível. A maneira encontrada para unir a facilidade à economia foi construir um trajeto sobre uma ortodrômica dividida em trechos de loxodrômicas de comprimento constante.

Observe que, no caso da figura acima, um navio jamais poderia percorrer o trajeto da loxodrômica, pois isso significaria que ele teria que submergir. Para tornar a navegação possível, faz-se então a divisão do trajeto ortodrômico em segmentos de reta de mesmo comprimento;

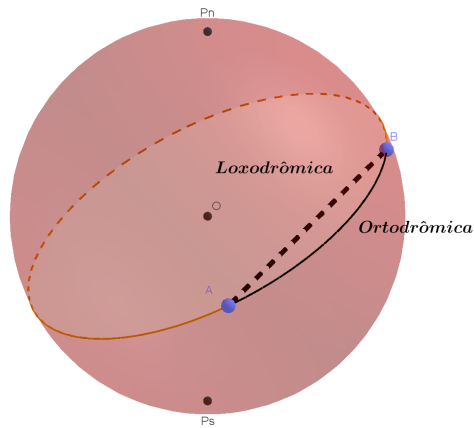


Figura 3.14: Diferença entre os trajetos pela ortodrômica e pela loxodrômica
 Fonte: O autor

para minimizar a diferença é necessário que a divisão da rota seja no maior número de partes possível.

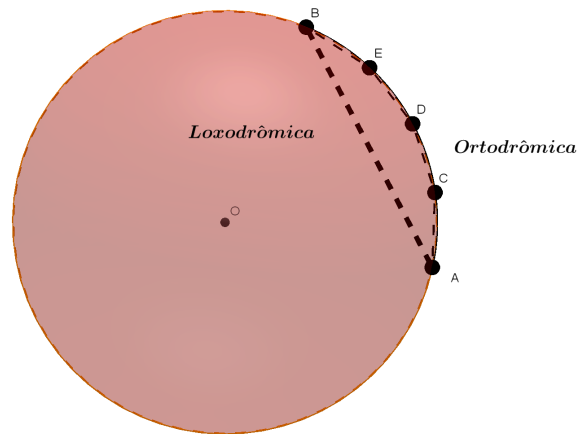


Figura 3.15: Divisão do trajeto oxodrômico em 4 partes iguais.
 Fonte: O autor

Os pontos C , D e E , são os chamados *waypoints*, que são pontos comuns às duas rotas; e cada trecho \overline{AC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EB} são chamados de pernada ou perna da rota. Geometricamente, esse processo é a divisão do triângulo esférico em outros com pelo menos um lado congruente. A figura a seguir mostra a divisão da rota AB em 5 partes de comprimento d , gerando cinco triângulos esféricos. Com isso, é possível calcular as coordenadas dos pontos A até F e dos azimutes dos trechos de loxodrômica, sendo A o azimute inicial da rota.

Resumidamente, pode-se planejar o trajeto de uma navegação da seguinte forma: primeiramente devem ser estabelecidas as coordenadas de partida e destino, bem como o azimute inicial do percurso, com isso é traçada a ortodrômica. Após a divisão da rota, devem ser estabelecidos os *waypoints* para fazer a correção da rota, essa correção é feita encontrando um novo azimute para o percurso, considerando cada *waypoint* como um novo ponto de partida. Procede-se assim, até a chegada ao destino, conforme figura seguir.

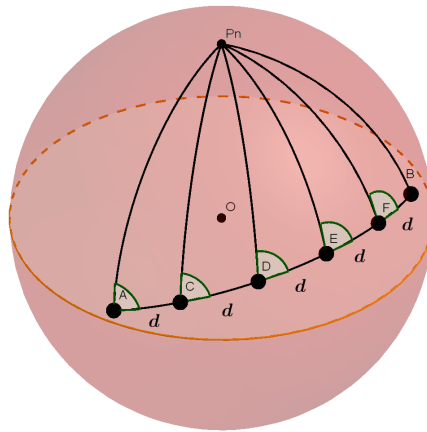


Figura 3.16: Rota AB dividida em trechos de loxodrômica.
Fonte: O autor

Exemplo 3.2.1² Calcular a distância entre as cidades de Curitiba e Caucutá e o azimute inicial do trajeto, sendo dadas as respectivas coordenadas.
Curitiba: $25^{\circ}26'52''$ S e $49^{\circ}13'50''$ W
Caucutá: $22^{\circ}33'25''$ N e $88^{\circ}20'12''$ E.

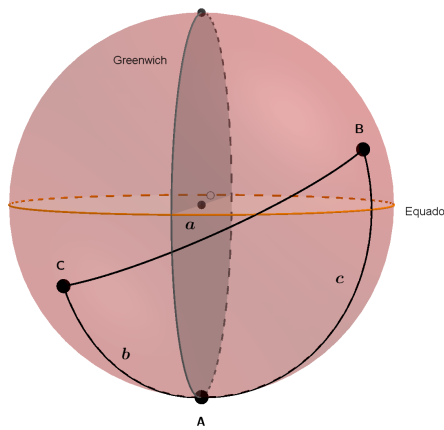


Figura 3.17: Representação do trajeto Curitiba-Caucutá, onde A , é o polo Sul, B é Caucutá e C , Curitiba.

Fonte: O autor

Transformando as coordenadas temos que:

Curitiba:

$$25^{\circ} + \frac{26}{60} + \frac{52}{3600} = 25,44^{\circ} N$$

$$49^{\circ} + \frac{13}{60} + \frac{50}{3600} = 49,23^{\circ} W$$

Caucutá:

$$22^{\circ} + \frac{33}{60} + \frac{25}{3600} = 22,55^{\circ} N$$

²extraído de [12]

$$88^\circ + \frac{20}{60} + \frac{12}{3600} = 88,33^\circ E$$

A distância entre elas é obtida através do teorema dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b).\cos(c) + \text{sen}(b).\text{sen}(c).\cos(A)$$

Substituindo as devidas coordenadas fica que

$$\cos(a) = \cos(90 + 25, 44).\cos(90 - 22, 55) + \text{sen}(90 + 25, 44).\text{sen}(90 - 22, 55).\cos(49, 23 + 88, 33)$$

De onde segue que

$$\cos(a) = \cos(115, 44).\cos(67, 45) + \text{sen}(115, 44).\text{sen}(67, 45).\cos(137, 56)$$

$$\cos(a) = -0,42.0,38 + 0,90.0,92.(-0,73)$$

Logo, $\cos(a) = -0,7596 \Rightarrow a = 139,42^\circ$. Isso significa que a distância entre as cidades é de $139,42^\circ \times 111,7 = 15.574,21 \text{ km}$

Para calcular o azimute inicial, o que se deseja é o valor do ângulo C do triângulo ABC , para isso utiliza-se o teoremas das cotangentes, ou seja:

$$\text{cotg}(c).\text{sen}(b) = \cos(b).\cos(A) + \text{sen}(A).\text{cotg}(C)$$

que pode ser reescrita como

$$\text{tg}(C) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{cotg}(c).\text{sen}(b) - \cos(b).\cos(A)}$$

Substituindo os valores do triângulo esférico em questão, tem-se que

$$\text{tg}(C) = \frac{\text{sen}(137, 56)}{\text{cotg}(67, 45).\text{sen}(115, 44) - \cos(115, 44).\cos(137, 56)}$$

Daí segue que $\text{tg}(C) = 11,6457$. Logo, $C = 85,0921^\circ$, ou ainda $C = 85^{\circ}5'31''$

Exemplo 3.2.2 ³ Calcular a distância entre Curitiba e Foz do Iguaçu, em seguida dividir a rota em trechos de 50 milhas náuticas (para considerá-las como loxodrômicas), calculando em seguida os azimutes e as coordenadas geográficas dos waypoints, sendo dadas as seguintes informações: Curitiba:

$$25^\circ 26' 52'' \text{ S}$$

$$49^\circ 13' 50'' \text{ W}$$

Foz do Iguaçu:

$$25^\circ 32' 45'' \text{ S}$$

$$54^\circ 35' 8'' \text{ W}$$

1 milha náutica⁴ = 1,86 km.

Agora, fazendo as transformações das coordenadas e aplicando o teorema dos cossenos, fica que:

$$\begin{aligned} \cos(d) &= \cos(90 - 25, 447).\cos(90 - 25, 545) + \\ &+ \text{sen}(90 - 25, 447).\text{sen}(90 - 25, 545).\cos(54, 595 - 49, 23055) \Rightarrow \end{aligned}$$

³extraído de [12]

⁴Uma milha náutica é o arco correspondente ao ângulo de 1', ou seja $\frac{1}{60}.111,7 \text{ km}$

$$\cos(d) = 0,99625$$

Daí segue que, $d = 4,9597^\circ$, e portanto $d = 553,99 \text{ km}$.

Para encontrar o azimute inicial, basta aplicar o teorema das cotangentes como no exemplo anterior.

$$\operatorname{tg}(B) = \frac{\operatorname{sen}(A)}{\operatorname{cotg}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) - \cos(c) \cdot \cos(A)}$$

que nos dá

$$\operatorname{tg}(B) = \frac{\operatorname{sen}(5,365)}{\operatorname{cotg}(64,553) \cdot \operatorname{sen}(64,455) - \cos(64,455) \cdot \cos(5,36528)}$$

$$\operatorname{tg}(B) = -0,7824 \Rightarrow B = 38,0405^\circ = 38^\circ 2' 25''$$

Agora, para encontrar as coordenadas do primeiro *waypoint*, basta considerar que, se o trajeto foi dividido em pernas de 50 milhas, seja p cada perna; assim $p = 93 \text{ km} = 0,83^\circ$ (para considerá-lo loxodrômico, isto é, uma reta), então deve-se subtrair esse deslocamento do arco que corresponde a distância entre as cidades:

A figura a seguir representa a primeira perna do trajeto, e W_1 é o primeiro *waypoint*. A latitude permanece a mesma, pois neste caso, o trajeto é praticamente uma linha paralela à do Equador, já a longitude sofre um deslocamento de $0,83^\circ W$. Portanto, as coordenadas do primeiro *waypoint* são: $25^\circ 26' 52'' S$ e $47^\circ 25' 49'' W$; repete-se esse processo para encontrar os demais. O arco d_1 representa o trecho que ainda será percorrido, portanto $d_1 = d - p$; de maneira geral pode-se escrever que $d_i = d_{i-1} - p$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$, o mesmo vale para os ângulos $A_i = A_{i-1} - p$. Observe ainda que no trecho entre as cidades, é possível estabelecer 5 *waypoints* e uma última perna menor que 50 milhas.

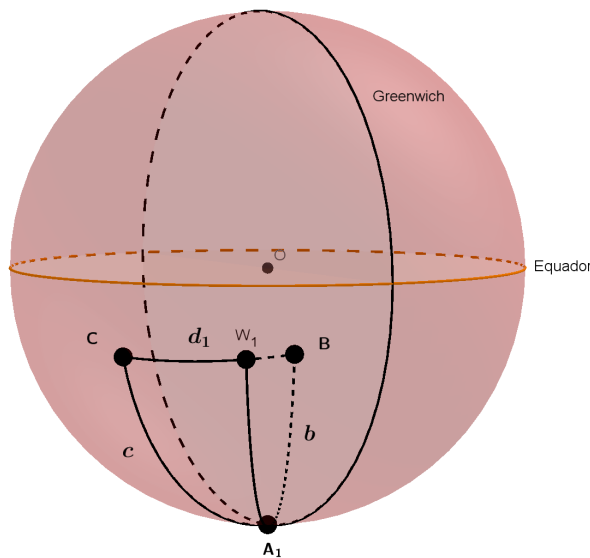


Figura 3.18: Primeira perna do trajeto - w_1

Fonte: O autor

O azimute no *waypoint* é encontrado usando novamente o teorema das cotangentes para o triângulo A_1W_1C , como segue:

$$\operatorname{tg}(W_1) = \frac{\operatorname{sen}(A_1)}{\operatorname{cotg}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) - \cos(c) \cdot \cos(A_1)}$$

onde $A_1 = A - p \Rightarrow A_1 = 4,535^\circ$.

Substituindo devidamente os valores fica que

$$tg(W_1) = \frac{sen(4,535)}{cotg(64,553).sen(64,455) - cos(64,455).cos(4,535)}$$

$$tg(W_1) = \frac{0,079068}{-0,09912} \Rightarrow tg(W_1) = -0,797699$$

Logo, $W_1 = 38,5793^\circ$, ou $W_1 = 38^\circ 34' 45''$.

Os demais azimutes serão obtidos repetindo-se esse processo até a última perna da viagem:

$$tg(W_{i-1}) = \frac{sen(A_{i-1})}{cotg(b).sen(c) - cos(c).cos(A_{i-1})}$$

As longitudes dos *waypoints* também são obtidas repetindo-se o cálculo feito para o primeiro, isto é:

$$W_i = W_{i-1} - p$$

e a latitude permanece a mesma do ponto de partida. Fica como exercício encontrar as demais coordenadas, e azimutes.

3.3 Revisitando a charada do urso

Ainda na introdução deste trabalho citou-se uma charada que consistia em descobrir a cor do urso, sendo dadas algumas orientações, o propósito era, na verdade, estimular a mente a ir além do raciocínio óbvio do mundo Euclidiano, modelo aliás que torna aquela charada sem solução. Agora, já sendo conhecidos alguns conceitos da Geometria Esférica vamos analisar com mais detalhes aquela questão.

Exemplo 3.3.1 *Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor é o urso?*

Naquela ocasião, a solução foi dada ao informar que a única maneira de retornar ao ponto de partida seguindo as orientações dadas é se a saída fosse do Pólo Norte, e portanto o urso será branco. Agora, depois de tudo o que foi exposto sobre Geometria Esférica, pode-se analisar com mais detalhes a solução dada. Considere dois casos possíveis

(i) O caçador parte de um ponto P , caminha por um meridiano para o sul e retorna por outro meridiano para o norte.

Tomando a Terra como uma esfera perfeita, sabe-se que dois meridianos intersectam-se apenas nos polos, então o ponto de partida só poderá ser um deles; como ele se move no sentido norte-sul, então ele de fato partiu do Pólo Norte e lá só existem ursos polares, portanto, branco.

(ii) O caçador parte de um ponto P , caminha por um meridiano para o sul e retorna pelo mesmo meridiano para o norte.

Essa opção é possível desde que ao movimentar-se no sentido leste, o caçador percorra um paralelo cujo comprimento seja no máximo 10 km, mas para isso o ponto de partida deve ser algum ponto próximo do Pólo Sul, e lá não existem ursos. Observe que o caçador pode partir de P , dar uma volta em um certo paralelo de comprimento 10 km e retornar pelo mesmo meridiano;

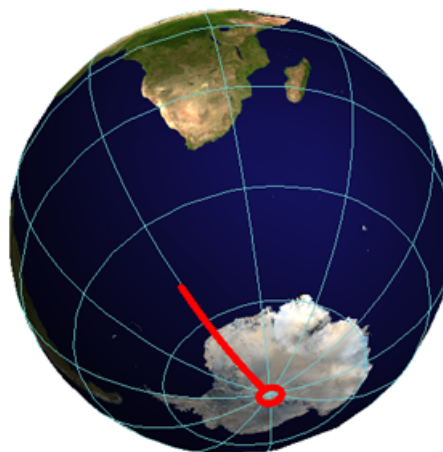


Figura 3.19: Primeira possibilidade de trajeto do caçador - desenho fora de escala.
 Fonte: http://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/saber_urso.htm

mas também pode partir de P , dar duas voltas em um paralelo cujo comprimento seja 5 km e retornar ao ponto de partida. Considerando este caso, o caçador pode dar n voltas em um paralelo de comprimento $\frac{10}{n}$ km; assim são infinitas as latitudes possíveis de P . Após esta análise mais detalhada é possível afirmar que, de fato, o urso é branco.



(a) O caçador dá uma volta em um paralelo de comprimento 10 km



(b) O caçador dá duas voltas em um paralelo de comprimento 5 km

Figura 3.20: Segunda possibilidade de trajeto do caçador - desenhos fora de escala.
 Fonte: http://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/saber_urso.htm

Questões como esta são bastante úteis para instigar o aluno à um pensamento que vá além do óbvio, sem, no entanto, garantir uma unanimidade. Para que a possibilidade de êxito seja maior é fundamental que o professor tenha um entendimento bastante claro do que está trabalhando, caso contrário, a atividade pode ser mal sucedida. Não se trata apenas de acertar a cor do urso, mas sim de entender porque ele só pode ser branco, e nesse ponto cabe uma vasta possibilidade de ligação com outras disciplinas como a Biologia, para um estudo dessa espécie, de seu habitat e etc. Na Geografia, é possível uma discussão sobre o que está acontecendo com as calotas polares

devido o aumento do aquecimento global e os fatores que o geram. É evidente que não se espera de um professor de matemática respostas detalhadas para todas essas perguntas, mas também é inegável que, se trabalhado de forma interdisciplinar, uma atividade como esta promoveria um belo trabalho.

Capítulo 4

Explicitando algumas propostas

Após toda a exposição feita ao longo deste trabalho, o que segue agora são algumas sugestões para que os professores possam trabalhar esse tema em suas aulas. Não se trata porém de uma “receita de bolo” que se seguida ao pé da letra sempre dará certo, deve-se lembrar que alunos são indivíduos e portanto com particularidades que lhe são características. É necessário que o professor tenha domínio da metodologia que será utilizada para que o trabalho tenha um melhor aproveitamento.

Proposta 1 *A utilização de materiais manipuláveis.*

Uma das barreiras para trabalhar Geometria Espacial em sala de aula é a dificuldade que muitos alunos encontram de imaginar as formas com suas secções, inscrições e circunscricões; o professor por sua vez tem o desafio de tentar reproduzir no plano essas formas tridimensionais, o que em muitos casos não é uma tarefa simples. No caso da Geometria Esférica, essa dificuldade fica acentuada por tratar-se de um novo conceito.

A utilização de objetos como bolas de isopor, ligas elásticas e canudos plásticos descartáveis são alguns exemplos de materiais que podem ser utilizados para construir conceitos e estabelecer comparações entre a Geometria Esférica e a Euclidiana. No capítulo 2 foram apresentadas quatro comparações entre as duas Geometrias; tomando isso como referência podem ser construídas outras, isso ajudará o aluno tanto a fixar os conceitos do plano já estudados quanto estabelecer com mais clareza as definições da esfera.

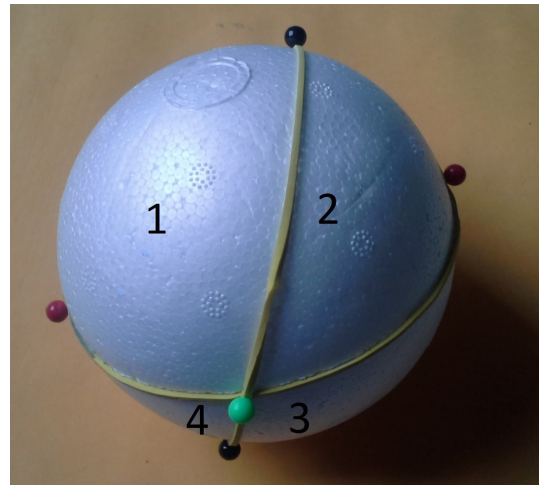
Algumas outras comparações que podem ser feitas entre o plano e a esfera são resultado de perguntas como:

- a) Três retas concorrentes dividem a superfície em quantas regiões?
- b) Dois pontos distintos dividem uma reta em quantas partes?
- c) Duas retas perpendiculares formam quantos ângulos retos?

As imagens a seguir são as construções apenas dos casos esféricos de cada ítem citado acima, as construções Euclidianas podem ser feitas no próprio quadro da sala de aula, ou podem ser utilizados canudos plásticos descartáveis para representar cada uma das situações.



(a) Três retas concorrentes nos mesmos pontos antípodas



(b) Duas retas concorrentes nos mesmos pontos antípodas e outra concorrendo em pontos antípodas diferentes

Figura 4.1: Representação do item (a): Três retas na superfícies esférica podem dividí-la em 6 ou 8 regiões

Fonte: O autor

Observe que na figura 5.1(b), as outras 4 regiões estão no plano posterior ao que está visível.

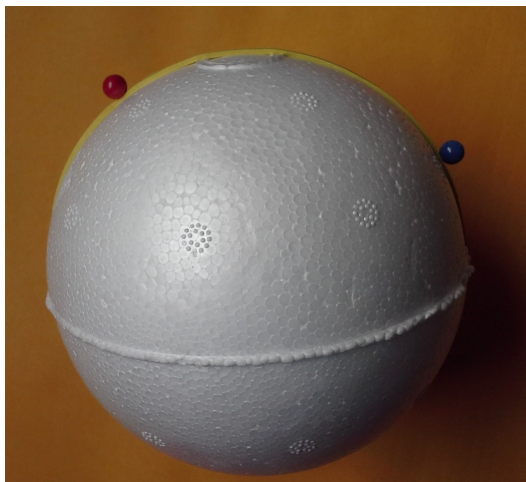


Figura 4.2: Representação do item (b): Reta dividida em dois arcos, o **menor** e o **maior**

Fonte: O autor

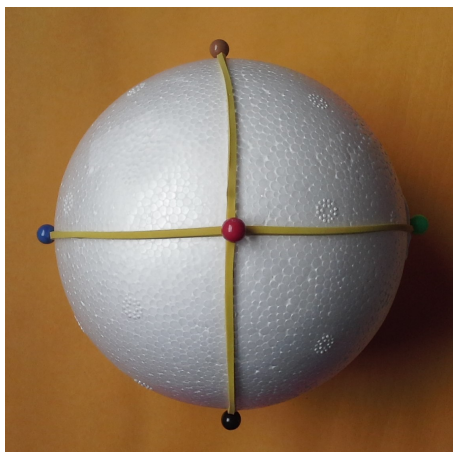


Figura 4.3: Representação do ítem (c): Duas retas perpendiculares formam 8 ângulos retos, 4 em cada hemisfério (frontal e posterior)

Fonte: O autor

Além destas, e das apresentadas no capítulo 2, existem outras comparações que podem ser construídas utilizando esse tipo de material, e por tratar-se de um recurso bastante acessível do ponto de vista financeiro, inclusive; torna quase injustificável os motivos para não utilizá-los. As escolhas de como desenvolver as atividades fica a critério de cada professor, que é quem melhor conhece seus alunos, não cabendo aqui dizer quando aplicar ou não projetos como esse.

Os ganhos com trabalhos dessa natureza são enormes uma vez que contribuem para, em primeira análise, romper com o paradigma que muitos (inclusive professores) têm sobre o ensino de Matemática; tornar uma aula mais informal, com menos “exercícios” a serem resolvidos, sem contudo deixar de ensinar são consequências diretas dessas ações. Há porém uma ressalva a ser feita, nenhuma atividade como essa deve ser aplicada sem ter plena certeza do que se pretende ensinar bem como o domínio da metodologia a ser empregada, assim as chances de êxito serão maiores, como afirmam Fiorentini e Miorim:

o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina [7](FIORENTINI e MIORIM, 1996, p.9).

A intenção dessa proposta é provocar o professor a oferecer ao seu aluno mais que o tradicional; e espera-se como resultado uma maior identificação do aluno com as geometrias e, em maior escala, com a própria Matemática. Com esta atividade pode-se trabalhar diversos conceitos da Geometria Esférica como círculo máximo, distância entre dois pontos e a construção de triângulos esféricos, o que se torna uma boa ferramenta para introduzir essa Geometria em sala de aula.

Proposta 2 *Incentivar a leitura de “ As Aventuras de Anselmo Curioso - Os Mistérios da Geometria”, de Jean-Pierre Petit.*

Trata-se de uma leitura bastante dinâmica, de linguagem acessível e seu estilo de história em quadrinhos torna tudo ainda mais atrativo. Esse livro conta a história de Anselmo, que um dia decidiu esticar um fio (supostamente infinito) para ver até onde era possível chegar e, para sua surpresa, depois de caminhar por muito tempo retorna ao ponto de onde havia saído. É nesse momento que Anselmo começa a investigar o que pode ter causado esse fato tão estranho

e começa uma viagem aos conceitos Euclidianos para tentar explicar o que lhe acontecera.

Depois de tentar aplicar os conceitos de Euclides, porém sem sucesso, inicia sua própria busca; descobre os conceitos de superfície, curvatura, dimensão e espaço, até que por fim depara-se com a realidade: o mundo não é *apenas* Euclidiano, mas também esférico e hiperbólico. Em uma primeira análise, essa não parece ser uma literatura recomendável para alunos da Educação Básica, mas, deixando de lado conceitos pré-definidos, é uma leitura bastante envolvente que motiva o leitor a pensar além de uma “caixa” rígida e lacrada.

O objetivo neste caso é, usando as palavras de Henri Poincaré que diz: “nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente”, mostrar através da leitura deste livro que todas as Geometrias co-existem simultaneamente, basta apenas determinar que superfície será escolhida para definir conceitos de acordo esta ou aquela superfície tomada. Com esse projeto, existe ainda um benefício imediato que é contribuir com o professor de Língua Portuguesa com o incentivo à leitura; esta aliás, é uma parceria pouco imaginada até mesmo pelos professores destas disciplinas mas que é plenamente possível.

Debates sobre a obra podem gerar conclusões bem interessantes e esclarecer que, cada um pode utilizar a Geometria que lhe for mais conveniente; um engenheiro não tem necessidade de utilizar a Geometria Esférica para elaborar a planta de uma casa; um piloto de avião ou navio por sua vez, jamais conseguirá determinar sua rota usando Euclides.

Este projeto pode ser trabalhado ao longo de um ano inteiro ou mesmo em mais de um, é possível reproduzir a maioria das construções de Anselmo em sala de aula para melhor compreensão dos conceitos abordados na obra, e com um cronograma bem definido, existe a possibilidade ainda de produzir material suficiente para exposições, oficinas e até mesmo mini-cursos.

Não há como mensurar o ganho; professores, alunos, escola, pais... Quando se torna o ensino atrativo, os resultados excedem os limites da sala de aula. Experiências marcantes tendem a ficar gravadas mais firmemente na memória de quem as vive, sejam elas boas ou ruins; é por isso que alguém dificilmente esquecerá a perda de um ente querido ou o dia do nascimento de um filho por exemplo. O desafio do professor, em particular o de Matemática, é conseguir marcar positivamente a memória de seu aluno, e embora não seja possível garantir o resultado, propostas como esta representam um passo significativo nesta direção.

Proposta 3 *A utilização de softwares de geometria dinâmica.*

A união entre educação e informática é um caminho sem volta; em um mundo cada vez mais conectado à rede mundial de computadores, estes equipamentos, se utilizados de maneira adequada podem contribuir positivamente para a melhoria na qualidade da educação. Seguindo essa direção, vários *softwares* foram desenvolvidos na tentativa de auxiliar alunos e professores em suas tarefas. No caso da Matemática existem várias opções, entre elas, o Geogebra. Trata-se de um programa com linguagem simples, totalmente gratuito e em português com uma *interface* auto-explicativa e, na versão mais recente, com a opção de visualização em três dimensões.

Para trabalhar Geometria Esférica, este programa torna-se uma boa opção por dois motivos: primeiro por utilizar uma ferramenta cada vez mais comum (o computador) e segundo por facilitar a visualização das construções. Para citar um exemplo inicial, grande parte das imagens contidas neste trabalho foram construídas utilizando esta plataforma. Outro aspecto favorável na utilização deste programa é que ele permite que todas as construções possam ser salvas em formatos reconhecidos pela maioria dos dispositivos além de possuir a opção para rotacionar

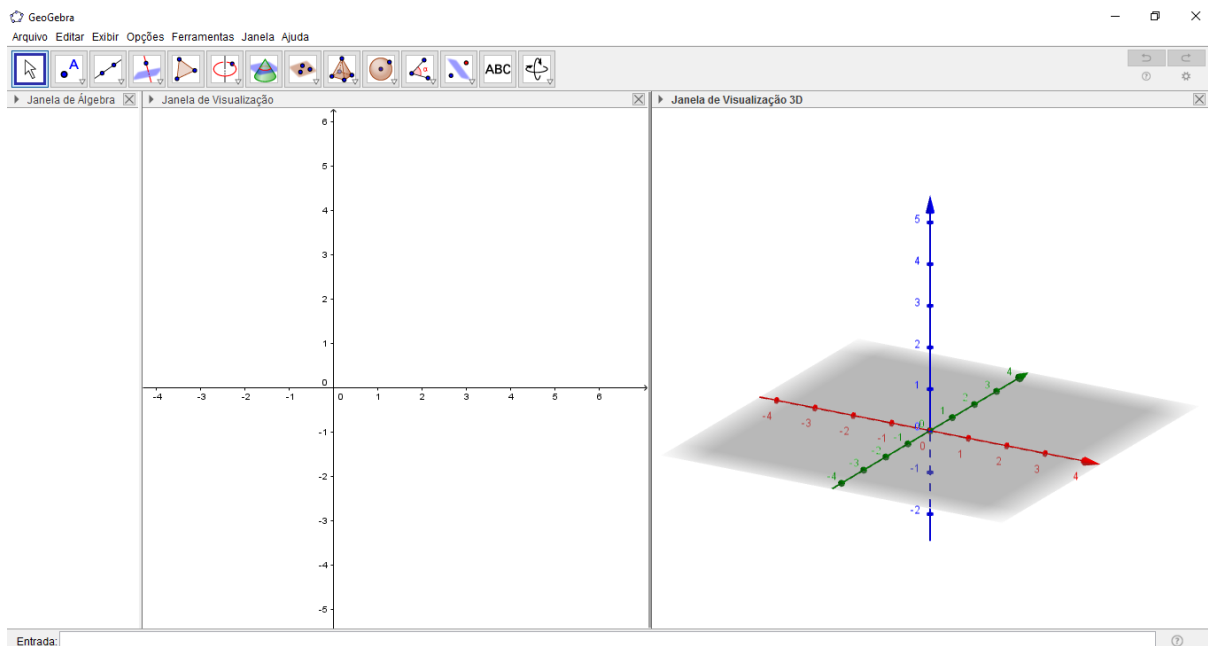


Figura 4.4: Interface de abertura do Geogebra.

Fonte: O autor

uma figura para qualquer ângulo que se queira.

É interessante que, inicialmente, o professor permita aos alunos um tempo para que haja uma identificação dos alunos com os comandos básicos do programa; após isso iniciam-se as atividades. A idéia é começar com construções bem simples como “construa uma esfera de raio 3 u.c.”- este é um dos comandos imediatos do programa. Seguindo os conceitos iniciais apresentados no capítulo 2, pode-se tentar reproduzir aquelas construções.

É bem verdade no entanto, que a realidade da maioria das escolas brasileiras está muito aquém daquela nos países desenvolvidos; internamente as diferenças também são significativas: há uma grande diferença entre as escolas no interior do Nordeste brasileiro e as do Sudeste por exemplo. Este torna-se portanto um fator que contribui negativamente para aplicar ações que envolvam o uso de tecnologias. Em boa parte das escolas sabe-se que nem existe um laboratório de informática, ou naquelas em que existe esse recurso, ele é mal utilizado ou porque encontra-se com problemas técnicos, ou então porque a escola não possui pessoal treinado para auxiliar o aluno. Nesse contexto torna-se ainda mais importante que o professor tenha domínio da tecnologia para usá-la em suas aulas.

Seguem agora os roteiros de algumas construções para incentivar professores e alunos a utilizar esta ferramenta:

- Construir um fuso esférico.
 - i)* No menu “exibir” selecione a janela de visualização 3D.
 - ii)* Na barra de ferramentas selecione “esfera dados Centro e Raio”
 - iii)* Marque o centro no local que preferir e em seguida escolha o valor da medida do raio.

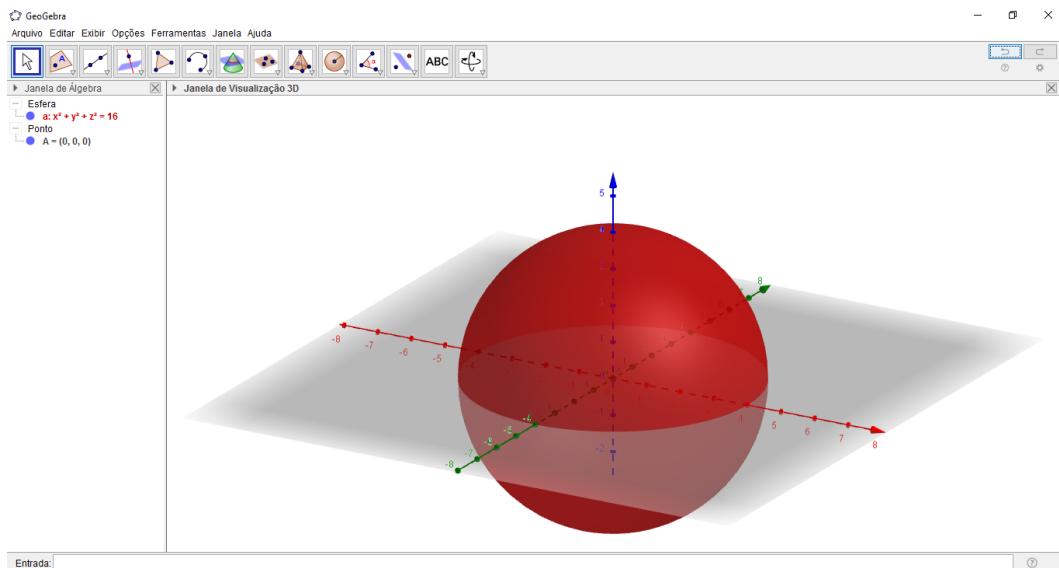


Figura 4.5: Esfera com centro na Origem e raio 4cm.

Fonte: O autor

- iv) Selecione a opção “intersecção de dois objetos” e marque a intersecção entre a esfera e o eixo vertical.
- v) Selecione a opção “Ponto em objeto” e marque dois pontos quaisquer sobre a superfície da esfera.
- vi) Selecione a opção “Arco circular” e marque os três pontos que pertencerão ao arco.

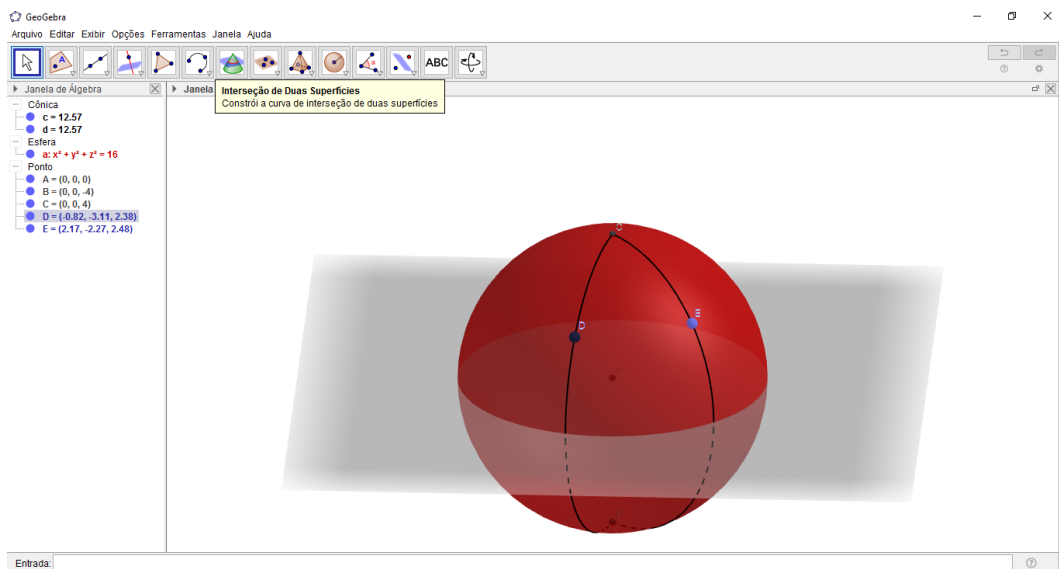


Figura 4.6: Fusão formado pelos arcos CDB e CEB

Fonte: O autor

- Determinar o ângulo esférico de um fuso.
- Primeiro constrói-se um fuso seguindo os passos da construção anterior.
 - Com a ferramenta “Reta tangente” é possível criar as retas tangentes ao fuso em seus vértices.

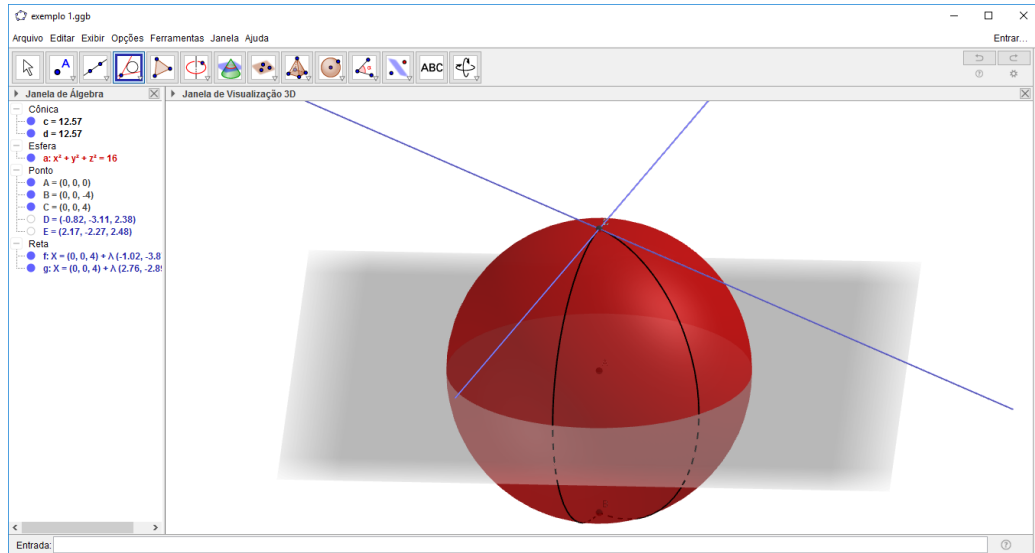


Figura 4.7: Retas tangentes ao fuso esférico

Fonte: O autor

- Selecione a ferramenta “Ângulo” e após isso dê um *click* em cada reta; para que o ângulo fique no local desejado, selecione as retas no sentido anti-horário.

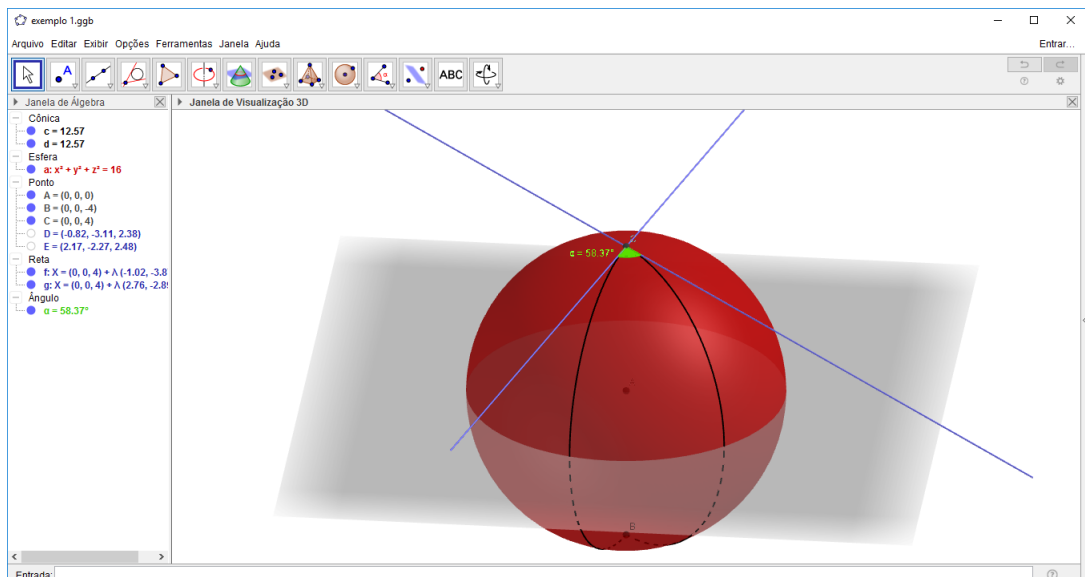


Figura 4.8: Ângulo esférico igual a $58,37^\circ$

Fonte: O autor

- Construção de um triângulo esférico qualquer.

- i) Construa uma esfera (neste exemplo, a construção está centrada na origem e possui raio igual a 4 unidades)

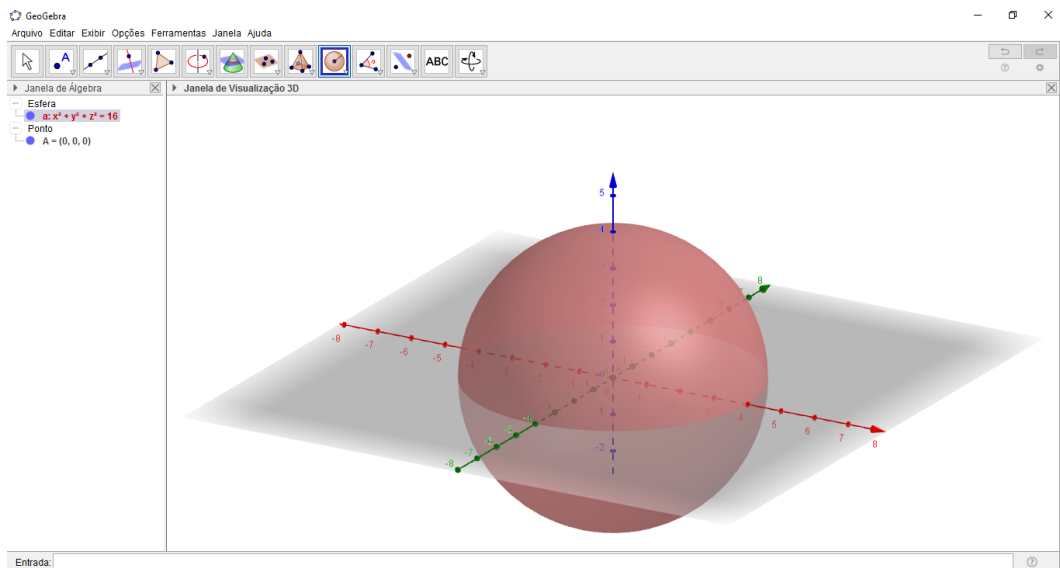


Figura 4.9: Esfera $a = x^2 + y^2 + z^2 = 16$
Fonte: O autor

- ii) Com a ferramenta “Ponto em objeto” marque três pontos quaisquer sobre a superfície da esfera.

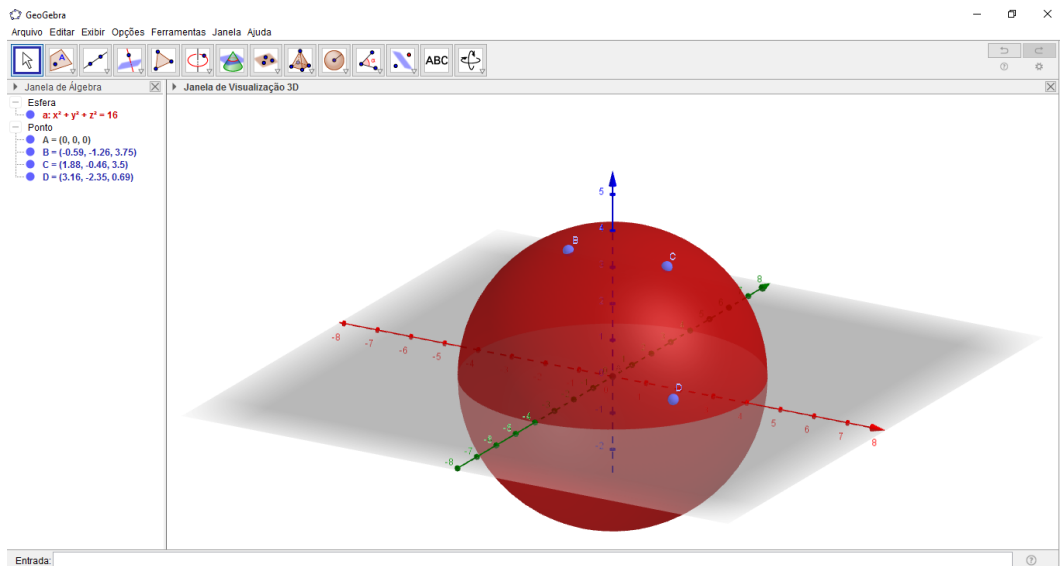


Figura 4.10: Pontos B , C , e D sobre a esfera
Fonte: O autor

- iii) Com a ferramenta “Arco circular” selecione o centro da esfera e em seguida dois pontos quaisquer.

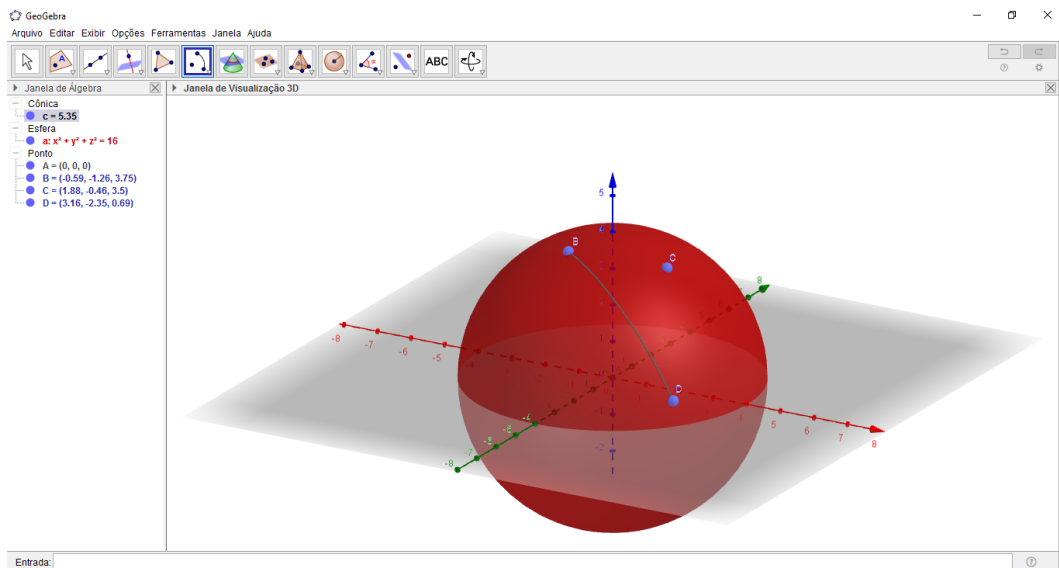


Figura 4.11: Arco BD sobre a esfera

Fonte: O autor

iv) Repita o passo anterior para construir os outros dois lados do triângulo.

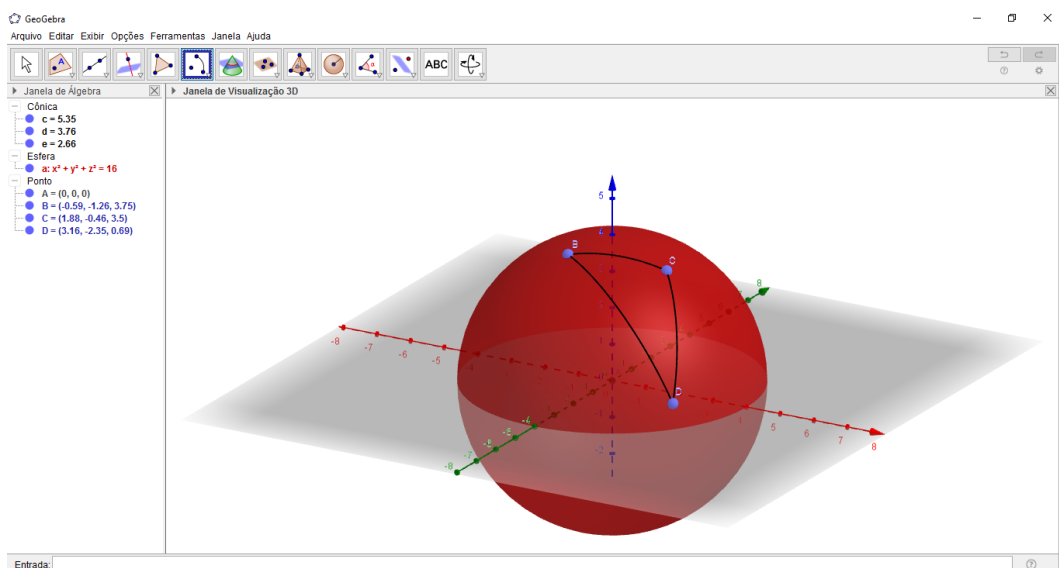


Figura 4.12: Triângulo esférico BCD.

Fonte: O autor

Cabe ainda uma ressalva no sentido de que, esta é uma estratégia que pode ser aplicada onde, evidentemente, hajam os recursos disponíveis, para uma realidade onde isso não seja possível, existem outras opções, a saber, a proposta 1 por exemplo.

Proposta 4 Realização de workshop's para divulgar resultados.

Há uma história a respeito de um matemático chamado Beltrami; dizem que ele costumava encontrar-se com Gauss para mostrar-lhe os resultados de suas pesquisas nas mais diversas áreas;

há que sugira porém que, na verdade, Beltrami via nesses encontros uma oportunidade de ver Gauss abrir suas gavetas e retirar seus manuscritos [9]Greenberg relata isso. Verdade ou não, uma conclusão pode ser deduzida sobre isso: resultados devem ser mostrados ainda que precisem ser aperfeiçoados. Há uma grande chance de que essa história sobre Gauss seja verdade já que, após sua morte, vários manuscritos com resultados bastante interessantes foram encontrados entre seus objetos pessoais, resultados inclusive sobre Geometria não-Euclidiana, que se houvessem sido divulgados antes poderiam ter acelerado o processo de consolidação dessas Geometrias.

Com nossos alunos, essa é uma estratégia que pode funcionar muito bem para motivá-los a continuar suas descobertas pelo mundo não- Euclidiano. Todas as construções e resultados oriundos do que foi proposto acima, ou mesmo de outras metodologias, podem, e devem ser divulgados. Colocar o aluno no papel de construtor do conhecimento certamente gerará um estudante mais autônomo, crítico e consciente de seu potencial. A realidade de sala de aula, sabe-se ser bastante difícil e ações como esta podem soar um tanto quanto utópicas para muitos, mas há de se continuar acreditando no poder transformador que só a educação tem.

Considerações Finais

Escrever este trabalho foi particularmente relevante em diversos aspectos, um deles foi perceber que o incentivo ao ensino de outras Geometrias é algo de certa forma recente; um dos PCN's consultado para referência é datado de 1998, ou seja 19 anos atrás aumentando ainda mais desejo de divulgá-las, embora neste momento apenas uma delas. Também foi interessante confirmar o que eu já supunha como verdadeiro através de observações informais em minha prática docente: o importante papel que a Geometria tem na formação do aluno e a deficiente formação de professores nesta área.

Conhecer a cronologia dos fatos que culminaram na formalização das Geometrias Não-Euclidianas foi muito útil uma vez que deixou evidente duas conclusões: Não se pode sufocar a curiosidade e tão pouco desconsiderar o que outra pessoa pensa a respeito de um tema, isso aliás é válido para muitas outras áreas (inclusive questões pessoais). Enquanto professores, precisamos estimular nossos alunos a lançarem-se em suas curiosidades que podem ser pilares de novas descobertas. Foi assim no passado, pode ser assim no futuro. O relato histórico apresentado torna real as palavras de Roger Von Oech que diz “descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente”

Do ponto de vista conceitual, o mais revelador foi ver que com um domínio razoável da Geometria Euclidiana, as definições da Geometria Esférica são satisfatoriamente entendidas. Com as aplicações, buscou-se mostrar a utilidade desta Geometria; sem aplicabilidade a chance de interesse diminui significativamente em qualquer assunto que se queira trabalhar. Para isso teve-se o cuidado de tentar reproduzir, com a maior precisão que os recursos permitiram, medidas, posições e localizações para que o aluno tenha a noção mais real possível da utilização da Geometria Esférica, mostrando resultados práticos, não apenas aqueles em que se modelam os dados para que se possa utilizar este ou aquele teorema. Esta é uma estratégia bem comum nos livros didáticos: nas questões que envolvem Geometria (para não citar outros temas) observam-se ângulos, medidas e projeções com valores que tornam a contextualização do tema algo que se resume a substituir valores em uma fórmula.

Ainda citando as aplicações da Geometria Esférica, o processo de funcionamento do G.P.S. foi muito interessante de ser estudado, principalmente por mostrar que, com conhecimentos básicos de leitura de mapa e escala, é possível encontrar a localização de um ponto, considerando uma pequena porção da superfície da Terra sendo plana.

Ao final deste trabalho lançaram-se algumas propostas que poderão ajudar os professores que queiram trabalhar com Geometria Esférica. São estratégias relativamente simples e que têm grande potencial para auxiliar os alunos a melhorar seu desempenho escolar. O que buscou-se foi elaborar ações que, de maneira acessível, tornem conhecidos os alicerces da Geometria Esférica. Estas, de forma alguma serão suficientes para atender a todas as necessidades que certamente surgirão; elas têm por objetivo principal servir de ponto de partida. Onde cada um poderá chegar dependerá de diversos fatores, mas cada professor certamente saberá estabelecer este ponto.

Este trabalho nem de longe teve a intenção de esgotar esse assunto, na verdade o desejo foi torná-lo mais uma voz junto as várias outras que já ecoam e assim contribuir para que num futuro (não tão distante - espero) temas como Geometria Esférica sejam comuns a ponto de não parecerem inacessíveis.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, S. **Geometria Não-Euclidiana**. São Paulo: IME-USP: material para oficina; Semana da Licenciatura.2008.
- [2] BRASIL Ministério da Educação.**Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**: Matemática. Brasília: MEC.2000.
- [3] BRASIL Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC.1998.
- [4] BRASIL Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** +:Ciências da Natureza e suas tecnologias. Brasília: MEC. 2002.
- [5] CABARITI, E. A Geometria Hiperbólica na Formação Docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do cabri-géomètre.**III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo.2006.
- [6] COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência.2001.
- [7] FIORENTINI, D. E MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM São Paulo, v.4, n.7.1996.
- [8] FUENTE, M. L. C. ET. AL. **Trigonometría Esférica - Fundamentos**. Unidad Docente de Matemáticas Madrid.2008.
- [9] GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history. Third Edition**. Macmillan New York.1993.
- [10] KALEFF, A. M. Desenvolvimento de Atividades Introdutórias ao Estudo das Geometrias não Euclidianas: Atividades Interdisciplinares para Sala de Aula e Museus Interativos. **Congresso Brasileiro de Extensão Universitária**. Belo Horizonte. 2004.
- [11] LIMA, D. D. **Desvendando a Matemática do GPS**. Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT Universidade Federal de Sergipe.2013.
- [12] NADAL, C.A. **Aplicações da Trigonometria Esférica na Cartografia e na Astronomia**.Terra Esférica – Cálculos – Sistemas de Referência e Tempo Universidade Federal do Paraná.
- [13] PAVANELLO, R.M. **O abandono do ensino da geometria:uma visão histórica** UNICAMP.Campinas,1989. Dissertação de Mestrado