Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

# Construções de Figuras Geométricas com Restrições usando Redes de Pontos: Uma Proposta para o Desenvolvimento da Criatividade Geométrica

Neildes Alves dos Santos

**Salvador - Bahia**
Fevereiro de 2017

# Construções de Figuras Geométricas com Restrições usando Redes de Pontos: Uma Proposta para o Desenvolvimento da Criatividade Geométrica

Neildes Alves dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.**

**Salvador - Bahia**

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor


SA237 Santos, Neildes Alves dos
Construções de figuras geométricas com restrições usando redes de pontos: uma proposta para o desenvolvimento da criatividade geométrica / Neildes Alves dos Santos. -- Salvador, 2017.
101 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2017.

1. Matemática. 2. Geometria - Estudo e Ensino. 3. Geometria Combinatória. 4. Redes de Pontos. 5. Grafos. I. Mello, Prof. Dr. Vinícius Moreira. II. Título.

# Construções de Figuras Geométricas com Restrições usando Redes de Pontos: Uma Proposta para o Desenvolvimento da Criatividade Geométrica

Neildes Alves dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20/02/2017.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco
UFBA

Profª. Drª. Mariana Cassol
UFBA

*À minha família*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos meus pais, irmãos e esposo pelo apoio decisivo nas minhas escolhas, pela ajuda, pelo incentivo e força em diversas ocasiões em que o cansaço e desânimo me abateram não deixando que esses atrapalhassem minha jornada tornando possível a realização de mais um sonho.

Aos meus amigos e companheiros de estudo pela força e incentivo para continuar a luta e não desanimar.

Ao meu orientador pela paciência, motivação, incentivo e dedicação na orientação desse trabalho, pelo interesse e apoio demonstrados ao longo desse caminho.

A toda equipe de professores do PROFMAT pela dedicação e incentivo.

A CAPES pelo apoio financeiro, durante todo o curso, que viabilizou a produção desse trabalho.

*"A mente usa a sua faculdade de criatividade apenas quando a experiência a obriga a fazê-lo." (Henri Poincaré)*

*" Na atividade real, fazer matemática é uma coisa extremamente criativa." (Artur Ávila)*

# Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de atividade criativa de descobrir padrões que respeitem restrições para o ensino de conceitos básicos de Geometria envolvendo construções geométricas em redes de pontos. Ele foi aplicado em um colégio estadual do Ensino Médio na cidade de Salvador - BA. Os trabalhos foram desenvolvidos com turmas de 3ª série do turno matutino. Sendo solicitada nessa atividade construções de objetos geométricos a partir de alguma característica, propriedade, coloração (vértices e arestas) e visitas a teoremas importantes relacionados ao tema. Essa proposta é uma tentativa de tornar a Geometria mais interessante com um desenvolvimento mais criativo e sem excesso no uso de fórmulas. Tem como objetivo investigar e verificar a colaboração dessa abordagem no desenvolvimento da criatividade, na compreensão e percepção dos objetos geométricos e no fortalecimento do ensino ajudando na melhora da visão geométrica dos estudantes com base em conhecimentos desses conceitos, assim como de favorecer a identificação de padrões das formas geométricas e a percepção das diversas possibilidades de construções das figuras geométricas em rede de pontos. Tem a intenção de levar o estudante a brincar ao mesmo tempo em que aguça seu raciocínio e criatividade, despertando seu interesse e vontade de conhecer um pouco mais a Geometria. Para isso, foi realizada uma atividade de verificação com a qual se determinou o conhecimento prévio dos alunos sobre o tema, uma revisão com base nas dificuldades demonstradas pelos estudantes na resolução da atividade de verificação, para depois serem apresentadas malhas com representação de arranjos de pontos para as diversas construções geométricas com aplicação dos conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana utilizando o teorema de Pick, coloração de vértices, arestas e o teorema das quatro cores. Obteve-se um resultado satisfatório, pois se verificou que a maioria deles desenvolveu a iniciativa e persistência na resolução dos problemas propostos e alguns desenvolveram a capacidade de construir os objetos como solicitado.

**Palavras-chave:** Ensino; Matemática; Geometria; Geometria Combinatória; Criatividade; Rede de Pontos; Coloração.

# Abstract

This work presents a proposal of a creative approach for the teaching of basic concepts of Geometry involving geometric constructions using a grid of points. It was applied at a State Senior High School in Salvador-BA with morning shift classes of Grade 12 students. They were requested to construct geometric objects given some characteristics like property and coloration (vertices and edges) while using important theorems related to the subject. This proposal is an attempt to present geometry in a more interesting and creative way without the excessive use of formulas. It aims to investigate and verify the collaboration of this approach in the development of creativity, in the understanding and perception of geometric objects and in the strengthening of teaching techniques, helping to improve the students' understanding of Geometry based on the knowledge of these concepts. It also aims to facilitate the identification of patterns of the geometric forms and the perception of the different possibilities of their construction using a grid of points. It has the intention of making students enjoy the topic while, at the same time, sharpening their reasoning and creativity, arousing their interest and willingness to learn Geometry a little more. To achieve this goal, a test was applied in order to assess the students' previous knowledge about the topic, and a subsequent review was conducted to address the difficulties exposed by it. The students were then presented with meshes where the points were arranged to represent the various geometric shapes. They were requested to construct these geometric objects applying the basic knowledge of Euclidean Geometry while using the Pick's Theorem, the vertices and edges coloring, and the Four-Color Theorem. A satisfactory result was obtained, since most of the students developed the initiative and persistence in solving the problems proposed and some even developed the capacity to construct the objects as requested.



**Key-words:** teaching; Mathematics; Geometry; Geometry Combinatory; Creativity; Grid of points; coloring.

# Lista de Figuras


1.1 Rede para Construindo Ângulos . . . 4
1.2 Uma solução do problema Construindo Ângulos . . . 5
1.3 Regiões angulares no plano . . . 5
1.4 Ângulos agudo, reto e obtuso, respectivamente . . . 6
1.5 Classificando Ângulos . . . 6
1.6 Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas, respectivamente . . . 7
1.7 Rede para Segmentos Paralelos . . . 7
1.8 Solução do problema Segmentos Paralelos . . . 8
1.9 Segmentos Perpendiculares . . . 8
1.10 Ângulos alternos externos, alternos internos e correspondentes, respectivamente . . . 9
1.11 Rede para Ângulos Congruentes . . . 9
1.12 Uma solução para o problema Ângulos Congruentes . . . 10
1.13 Polígono convexo de cinco vértices e sua região poligonal . . . 10
1.14 Polígono não convexo com maior número de lados . . . 11
1.15 Rede para Triângulos Obtusângulos . . . 11
1.16 Soluções do problema Construindo Triângulos Obtusângulos . . . 12
1.17 Rede para Triângulos Semelhantes . . . 13
1.18 Figuras Congruentes . . . 13
1.19 Rede para Caçando Quadriláteros . . . 14
1.20 Soluções para o problema Caçando Quadriláteros . . . 15
1.21 Rede para Contando Diagonais . . . 16
1.22 Solução do problema Contando Diagonais . . . 16
1.23 Teorema de Pitágoras . . . 17
1.24 Rede para Construindo Figuras com Perímetros Iguais . . . 18
1.25 Área de retângulo . . . 19
1.26 Solução de Maior Polígono (Área) . . . 19
1.27 Paralelogramo ABCD . . . 20
1.28 Transformando paralelogramo em quadrado de mesma área . . . 21

1.29 Área de triângulos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
1.30 Área de trapézio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.31 Área de losango . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.32 Área de quadrado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
1.33 Área de polígono côncavo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
1.34 Polígonos simples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
1.35 Polígonos elementares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
1.36 Triângulos elementares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
1.37 Polígonos A, B e C, nessa ordem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

2.1 Pontos e retas em rede de pontos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
2.2 Contando triângulos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
2.3 Triângulos com áreas iguais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.4 Apertos de mãos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
2.5 Grupo de cinco pessoas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
2.6 Seis pessoas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.7 Quadrado de lado 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2.8 Coordenadas inteiras . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
2.9 Retângulo com vértices de mesma cor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
2.10 Triângulo retângulo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
2.11 Triângulo retângulo com vértices de mesma cor . . . . . . . . . . . . . . 39
2.12 Seis pontos em retângulo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
2.13 Grafo de Euler . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
2.14 Sem tirar lápis do papel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
2.15 Relação de amizade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
2.16 Grafo simples $G$ e seu complemento $G^c$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
2.17 Grafo completo e Subgrafo abrangente, respectivamente. . . . . . . . . . 45
2.18 Subgrafo induzido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
2.19 Grafo de ordem 5 e tamanho 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
2.20 Grafo completo de ordem 8 e tamanho 28. . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
2.21 grafos isomorfos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.22 Número cromático de G . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.23 A esquerda, rede de pontos. A direita, uma solução possível . . . . . . . 49
2.24 A direita uma coloração da figura da esquerda . . . . . . . . . . . . . . 50
2.25 Grafo $G$ e sua coloração . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
2.26 Mapa (à esquerda) e seu Grafo (à direita) . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.27 Grafo do Untangle - jogo digital . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

3.1 Rede para a Atividade de Verificação de Conhecimento . . . . . . . . . . . 55
3.2 Estudantes resolvendo os problemas propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
3.3 Rede para o problema Sem Tirar o Lápis do Papel . . . . . . . . . . . . . . 58
3.4 Resultados do problema Sem Tirar o Lápis do Papel . . . . . . . . . . . . . 59
3.5 Rede para o problema Segmentos Paralelos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
3.6 Resultados do problema Segmentos Paralelos . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
3.7 Resultados do problema Segmentos Perpendiculares . . . . . . . . . . . . . 61
3.8 Rede para o problema Construindo Ângulos . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
3.9 Resultados do problema Construindo Ângulos . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
3.10 Rede para o problema Triângulos Obtusângulos . . . . . . . . . . . . . . . . 63
3.11 Uma solução para o problema Triângulos Obtusângulos . . . . . . . . . . . 64
3.12 Resultados do problema Triângulos Obtusângulos . . . . . . . . . . . . . . . 64
3.13 Rede para o problema Maior Polígono . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
3.14 Solução do problema Maior Polígono . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
3.15 Resultados do problema Maior Polígono . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
3.16 Rede para o problema Procurando Quadrados . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
3.17 Uma solução para o problema Procurando Quadrados . . . . . . . . . . . . 67
3.18 Resultados da análise das soluções do problema Procurando Quadrados . . 67
3.19 Rede para o problema Construindo Trapézios . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
3.20 Resultados da análise das soluções do problema Construindo Trapézios . . 69
3.21 Rede do problema Contando Diagonais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
3.22 Gráfico da análise do problema Contando Diagonais . . . . . . . . . . . . . 70
3.23 Rede do problema Perímetro e Área . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
3.24 Gráfico da análise do problema Perímetro e Área . . . . . . . . . . . . . . . 71
3.25 Rede do problema Figuras Congruentes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.26 Gráfico da análise do problema Figuras Congruentes . . . . . . . . . . . . . 73
3.27 Rede do problema Áreas Iguais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
3.28 Gráfico análise do problema Áreas Iguais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
3.29 Rede do problema Formas Distintas, Mesma Área? . . . . . . . . . . . . . . 75
3.30 Gráfico da análise do problema Formas Distintas, Mesma Área? . . . . . . 75
3.31 Rede do problema Construindo Quadrados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
3.32 Gráfico da análise do problema Construindo Quadrados . . . . . . . . . . . 77
3.33 Rede do problema Triângulos Semelhantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
3.34 Gráfico da análise do problema Triângulos Semelhantes . . . . . . . . . . . 78

# Lista de Tabelas

3.1 Resultados da Atividade de Verificação de Conhecimento - reconhecimento de objetos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
3.2 Resultados da Atividade de Verificação de Conhecimento - área e perímetro 56

# Sumário

**Introdução** **1**

**1 Conceitos Geométricos em Rede de Pontos** **3**

1.1 Conceitos Básicos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.2 Área de Polígonos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

1.3 Fórmula de Pick . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**2 Conceitos Combinatórios em rede de pontos** **29**

2.1 Casa de Pombos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.2 Noções de grafos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

2.2.1 Coloração de vértices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

2.2.2 Coloração de arestas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

2.2.3 Coloração de grafos planares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

**3 Atividades em Rede de Pontos** **54**

3.1 Atividade de Verificação de Conhecimento . . . . . . . . . . . . . . . . 54

3.2 Atividade Criativa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

**4 Considerações Finais** **79**

**Referências Bibliográficas** **81**

**A Atividade de Verificação de conhecimento** **83**

**B Atividade Criativa** **85**

# Introdução

Para compreender e apreciar a Geometria é necessário um olhar treinado na percepção de padrões e criatividade, além de outras coisas. Esses aspectos tornam a Geometria, do ponto de vista dos alunos, um tema difícil e pouco apreciado pelos estudantes. As dificuldades encontradas fazem com que, no Ensino de Matemática na Educação Básica, os estudantes geralmente reproduzam as resoluções feitas em sala decorando procedimentos, o que dificulta muito a aprendizagem em Geometria. A maioria se desespera quando encontra um problema geométrico em que precisa buscar por um caminho próprio para resolvê-lo, onde muitas vezes existe a necessidade de criatividade, atitude e persistência para alcançar esse objetivo. Nessa perspectiva, este trabalho envolvendo problemas de construções geométricas com restrições em redes de pontos tem a intenção de auxiliar na compreensão de conceitos geométricos das figuras planas usando coloração de vértices e arestas, buscando uma abordagem mais convincente no ensino da Geometria.

A atividade de construções de figuras geométricas com restrições em rede de pontos está focada nas formas, definições, propriedades e contagem das figuras. Em um arranjo de pontos com as restrições dadas, é possível verificar os tipo de polígonos que podem ser formados, fazer observações, justificar afirmações, verificar se alguns dos polígonos têm perímetros e/ou áreas iguais, calcular perímetro, área e alguns ângulos, verificar semelhanças, etc. Durante a aplicação dessa atividade pode ser possível a observação e análise da atitude dos jovens diante dos problemas propostos. Ela visa, de maneira lúdica e criativa, tornar mais fácil o entendimento de conceitos geométricos, sendo uma tentativa de permitir uma mudança no comportamento dos jovens diante dos problemas exposto.

Portanto, a presente pesquisa se apropria de um conjunto finito de pontos em rede como facilitador de aprendizagem dos conteúdos básicos de Geometria. A partir desse tratamento será verificado se essa atividade permite o desenvolvimento e fortalecimento da atitude de iniciativa, criatividade e persistência diante dos desafios de alguns problemas de Geometria.

Esse trabalho busca uma abordagem diferente, que torne o estudo de Geometria mais rico, atraente e divertido para os estudantes, tendo como objetivo geral utilizar as construções de figuras geométricas com restrições para possibilitar a investigação e a interação no desenvolvimento natural da Geometria no Ensino Médio. Ou seja, fornecer redes com pontos aos estudantes e solicitar que eles busquem por formas geométricas com propriedades específicas. Aqui pretende-se usar um conjunto finito de pontos com arranjo geométrico representados em rede de pontos como modelo na resolução de problemas matemáticos; determinar objetos geométricos que possam ser construídos a partir dos objetos estruturados, satisfazendo um conjunto de restrições dado; identificar problemas que possam ser resolvidos com coloração de vértices e arestas; discutir propriedades das estruturas de grafos e aplicá-las na resolução dos problemas de partição/coloração contrapondo o tratamento inicial de calcular as propriedades do objeto com a abordagem de encontrar objetos que satisfazem certas propriedades. Para o desenvolvimento dessa proposta são abordados alguns tópicos de Geometria conforme distribuição a seguir:

No primeiro capítulo serão tratados os principais conceitos da Geometria Plana e rede de pontos. Aqui serão apresentados algumas definições, teoremas, a fórmula de Pick e problemas de aplicação da teoria desenvolvida.

Os conceitos combinatórios como Princípio da Casa de Pombos, os tópicos de grafos diretamente ligados ao tema, como coloração de vértices, arestas e teorema das das Quatro Cores serão abordados no segundo capítulo.

As atividades desenvolvidas com os estudantes, ou seja, os problemas de construção em rede de pontos propostos, e estudos sobre os mesmos são abordados no capítulo 3.

Em seguida, no capítulo 4, serão realizadas as análises, interpretação e discussão teórica dos resultados e dados obtidos.

# Capítulo 1

# Conceitos Geométricos em Rede de Pontos

No Ensino Médio, a Matemática tem valor formativo que auxilia na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo, além de desempenhar um papel instrumental por ser vista como uma ferramenta que serve para ler e interpretar o mundo e por estar presente em quase todas as atividades desenvolvidas pela humanidade. Gardner [1], afirma que “a capacidade de resolver problemas não está necessariamente relacionada com a rapidez de pensamento.”e “todavia, há certamente uma relação estreita entre discernimentos e criatividade na ciência, nas artes, nos negócios, na política, ou em qualquer outra atividade humana.”

Segundo Chambers [3], a Matemática requer tanta criatividade quanto qualquer outra matéria do currículo. Mas o que é criatividade? Segundo o dicionário Houaiss, uma das definições de criatividade é “inventividade, inteligência e talento, natos ou adquiridos, para criar, inventar, inovar, quer no campo artístico, quer no científico, esportivo, etc.” Criatividade pode ser definida como uma capacidade de sensibilização diante de um problema fazendo com que haja identificação de dificuldades, buscas por soluções a partir da formulação e testes de hipóteses, até que seja encontrada um resultado para o problema em questão. Dessa forma, a criatividade é fundamental para o desenvolvimento da aprendizagem de qualquer conceito matemático, em especial da Geometria.

Os conceitos geométricos foram se formando a partir da percepção humana das diferentes formas encontradas na natureza e de sua necessidade de sobrevivência. As primeiras representações da realidade primitiva encontradas nas paredes de cavernas revelam a necessidade de se registrar, através das formas, tudo que era visualizado no ambiente em que os seres humanos viviam. Hoje, por meio dos conceitos geométricos os estudantes desenvolvem o pensamento geométrico que lhes permite compreender, descrever e representar o mundo. Para Chambers [3], “a natureza visual da Geometria, com sua rica história e origem culturalmente diversa, somada à sua relação com a arte e o desenho, proporciona oportunidades para tornar as aulas interessantes e estimulantes." Já Fomin [4] cita que a "Geometria escolar é uma oportunidade maravilhosa para o desenvolvimento do pensamento lógico e consistente. Podendo ser considerada como jogo com regras axiomáticas."

Infelizmente, a aprendizagem em Geometria tem se mostrado muito sofrida. Embora de fundamental importância para a compreensão do mundo em que vivemos, por estar presente na natureza, em construções humanas e em aplicações e representações científicas diversas, não é lhe dada a ênfase necessária nas escolas públicas e as construções geométricas praticamente não são mais abordadas na educação básica. Em Wagner [6] afirma-se que as construções geométrica, até hoje, têm grande importância na compreensão da Matemática elementar, que seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de Geometria e das propriedades de figuras geométricas.

Um exemplo de atividade envolvendo Geometria é a construção e classificação de ângulo a partir de pontos dispostos em uma rede, conforme o problema a seguir.

**Problema 1.0.1.** *Construindo Ângulos*

*Construa ângulos identificando-os e colorindo os congruentes (dois ângulos são congruentes se têm as mesmas medidas, ou seja, se todos os seus elementos coincidem quando posto um sobre o outro) com a mesma cor.*

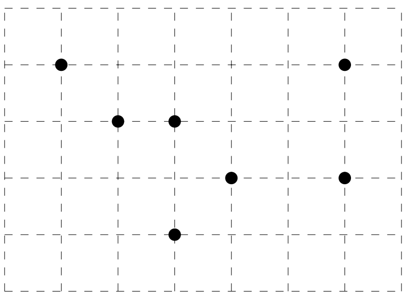


Figura 1.1: Rede para Construindo Ângulos

Essa atividade de construção geométrica é interessante pois consiste em observar a disposição dos pontos em rede combinando os mesmos três a três formando duas semirretas de mesma origem com o propósito de construir ângulos, sendo para isso necessário conhecimento da definição de ângulos. A seguir são fornecidos duas soluções possíveis de construção desses ângulos com a utilização de cores das semirretas na identificação dos ângulos com mesma abertura.

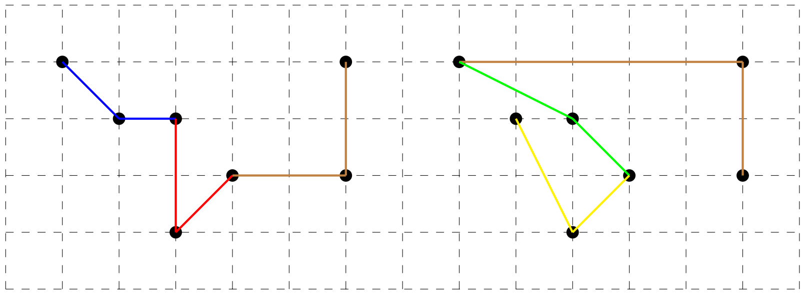


Figura 1.2: Uma solução do problema Construindo Ângulos

As redes de pontos são construídas por grades de pontos equidistantes que facilitam a construção das figuras geométricas com as restrições estabelecidas. Essas redes possibilitam a visualização de ângulos retos, medidas de segmentos, utilização do Teorema de Pitágoras no cálculo de medida de segmentos, cálculo de área com aplicação do Teorema de Pick, com o uso do Teorema da união das áreas ou por contagem de quadrados e suas partes, entre outros.

## 1.1 Conceitos Básicos

**Definição 1.1.1.** *Denomina-se rede de pontos ao conjunto infinito de pontos dispostos de maneira regular de forma que a distância entre dois pontos consecutivos, em retas horizontais ou verticais, é igual a 1.*

**Definição 1.1.2.** *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

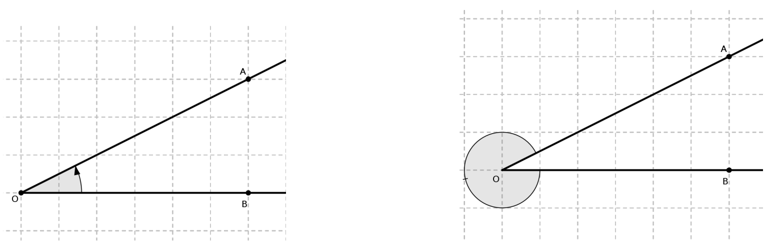



Figura 1.3: Regiões angulares no plano

O ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ pode ser representado de várias maneiras: $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$. Se não houver outro ângulo com o mesmo vértice, ele pode ser identificado pela letra utilizada para designar o vértice: $\widehat{O}$ . Sua unidade de medida é o grau. Este é a fração de $\frac{1}{360}$ que corresponde a 1 grau e é representado por $1^0$. Um ângulo $\widehat{AOB}$ é dito agudo quando $0^0 < \widehat{AOB} < 90^0$, reto quando $\widehat{AOB} = 90^0$ e obtuso quando $90^0 < \widehat{AOB} < 180^0$.

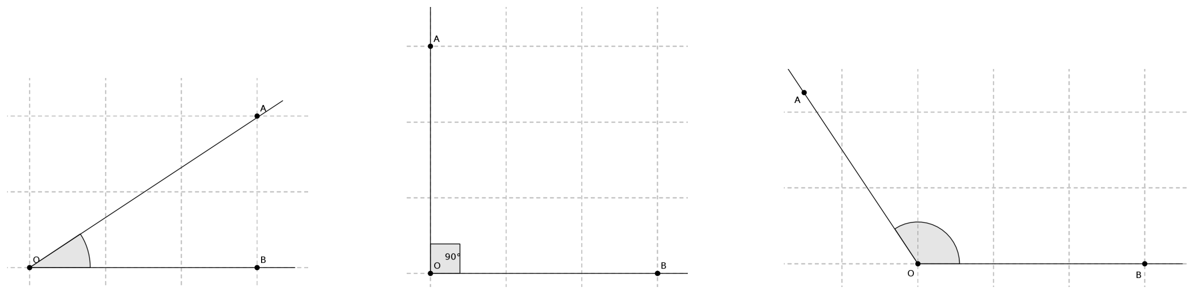


Figura 1.4: Ângulos agudo, reto e obtuso, respectivamente

A seguir um exemplo de problema envolvendo a percepção de forma e medida de ângulos a partir de sua visualização em rede de pontos.

**Problema 1.1.1.** *Construindo e classificando ângulos*

*Faça uma nova coloração nos ângulos construídos no Problema 1.0.1. Depois classifique-os a partir da informação das cores utilizadas na construção dos mesmos.*

Nessa atividade, com os ângulos representados em rede de pontos, os estudantes devem perceber e utilizar com mais facilidade a ideia de ângulos. Para descobrir a medida dos ângulos ou classificá-los se faz necessário a utilização da rede e o conhecimento que os ângulos de quadrado são retos. Assim, eles podem nomear os ângulos conforme sua abertura, classificando-os, por exemplo, conforme figura abaixo, os na cor marrom em reto, notam que os em vermelho têm abertura menor que os em marrom, portanto são agudos e os em azul têm maior abertura que os em marrom, portanto são obtusos.

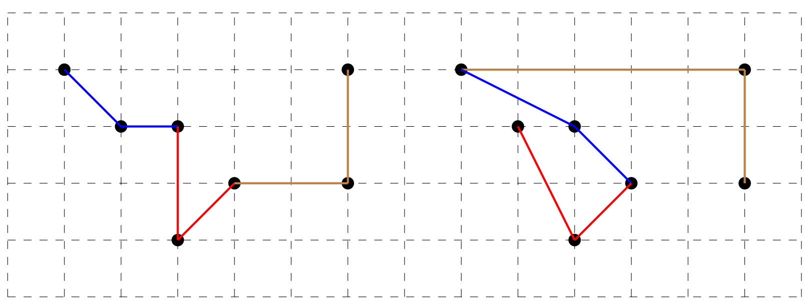


Figura 1.5: Classificando Ângulos

Duas retas $r$ e $s$ no plano são ditas concorrentes se elas têm um ponto em comum;

$r$ é perpendicular a $s$ se tiverem um ponto em comum e nesse ponto formarem um ângulo de $90^0$; e, se $r$ e $s$ não têm nenhum ponto em comum, são ditas paralelas.

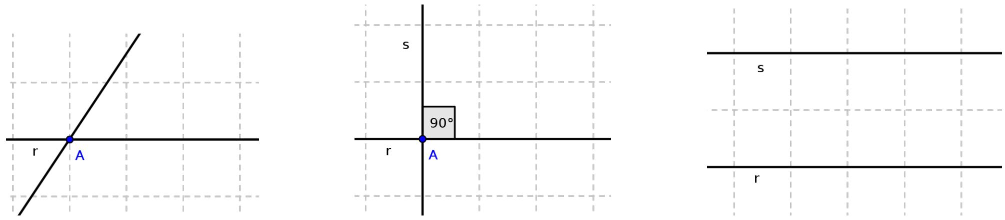



Figura 1.6: Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas, respectivamente

Para exemplificar os conceitos de retas paralelas e perpendiculares são desenvolvidos os dois problemas seguintes envolvendo construções de segmentos em rede de pontos. Com os pontos representados em rede, conforme problema a seguir, pode ser trabalhado e testado conhecimentos sobre segmentos paralelos.

**Problema 1.1.2.** *Segmentos Paralelos*

*Com a menor quantidade de cores possível, construa segmentos paralelos de tal forma que, os segmentos de um mesmo conjunto de segmentos paralelos recebam a mesma cor.*

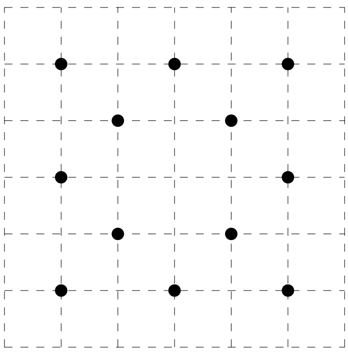


Figura 1.7: Rede para Segmentos Paralelos

Nessa disposição de pontos há quadrados onde os vértices dos seguintes são pontos médios dos anteriores. Sendo uma atividade divertida de construção que consiste na observação da disposição de pontos representados na rede com a intenção de levar o estudante a compreensão de paralelismo. Eles podem verificar nessa rede de pontos que lados de um quadrado são paralelos a diagonal do outro, que segmentos paralelos podem ter comprimentos diferentes e que podem estar em diversas posições, conforme figura abaixo.

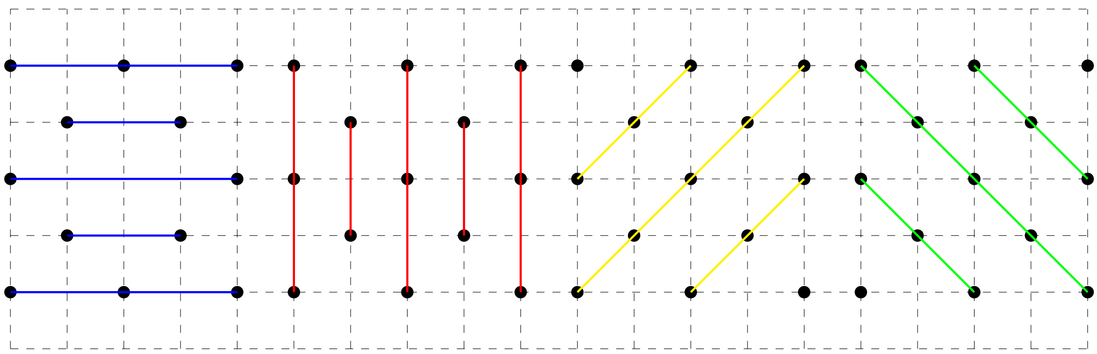


Figura 1.8: Solução do problema Segmentos Paralelos

O problema abaixo, com os pontos representados em rede, é um exemplo de como podem ser trabalhado e testado conhecimentos sobre segmentos perpendiculares.

**Problema 1.1.3.** *Segmentos Perpendiculares*

*Utilizando a construção do Problema 1.1.2, identifique os segmentos perpendiculares presentes na mesma a partir da associação desses segmentos com as cores utilizadas nos mesmos.*

A disposição dos pontos do Problema 1.1.2 e as cores usadas para identificar os segmentos paralelos são utilizadas com o propósito de informar todos os segmentos que são perpendiculares. Aqui, os estudantes podem visualizar que quadrados têm lados perpendiculares e que suas diagonais também são segmentos perpendiculares, conforme figura abaixo.

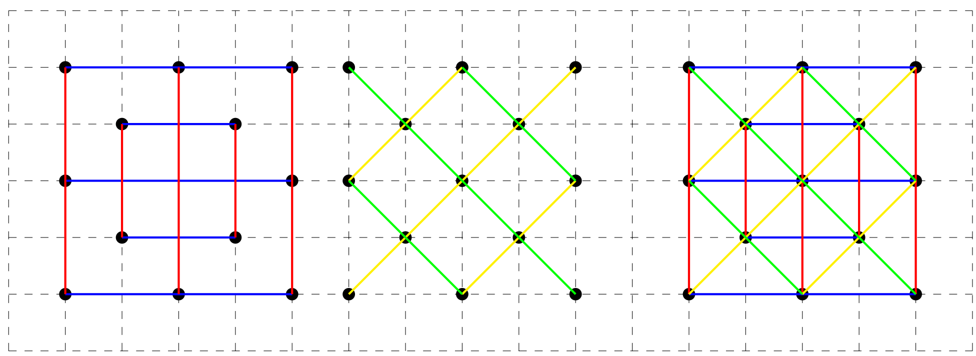


Figura 1.9: Segmentos Perpendiculares

Considere duas retas paralelas distintas $r$ e $s$ e uma reta $t$ (denominada de transversal) que corta as retas $r$ e $s$. Se duas retas paralelas distintas são cortadas por uma transversal, então:

1. os ângulos alternos externos são congruentes.

2. os ângulos alternos internos são congruentes.

3. os ângulos correspondentes são congruentes.

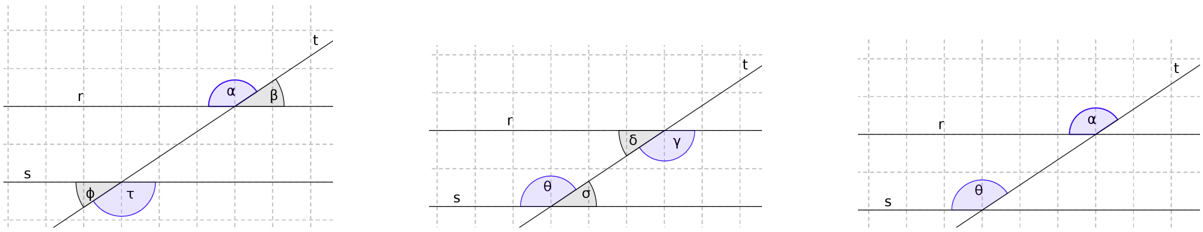



Figura 1.10: Ângulos alternos externos, alternos internos e correspondentes, respectivamente

Uma maneira de tratar esse tema usando rede de pontos está ilustrado com problema a seguir.

**Problema 1.1.4.** *Ângulos Congruentes*

*Construa ângulos que tenham mesma medida.*

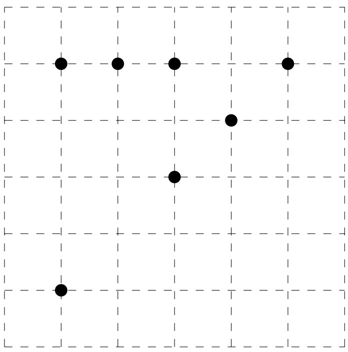


Figura 1.11: Rede para Ângulos Congruentes

Nesta atividade, o estudante pode traçar duas retas perpendiculares a reta horizontal (em vermelho) pelos pontos $A$ e $B$ e paralelas entre si. Assim, os ângulos com origem em A e em B são retos (mesma medida). Os ângulos $C$ e $D$ são correspondentes (mesma medida).

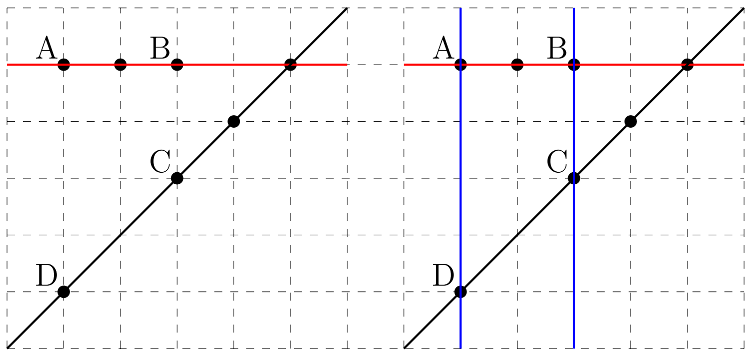



Figura 1.12: Uma solução para o problema Ângulos Congruentes

**Definição 1.1.3.** *Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um polígono se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto $A_j$, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.*

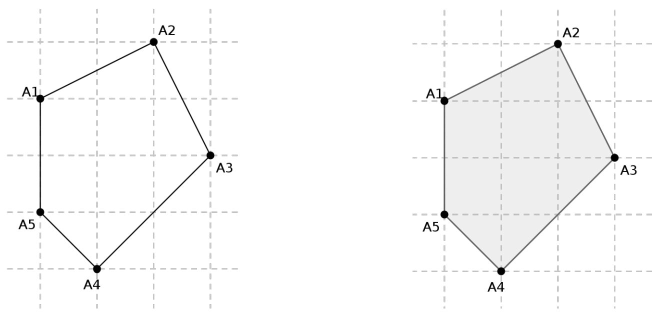



Figura 1.13: Polígono convexo de cinco vértices e sua região poligonal

Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são os vértices do polígono e os segmentos $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ são os seus lados. A região limitada do plano, delimitada pelos segmentos $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ é a região poligonal correspondente ao polígono $A_1A_2...A_n$.

Alguns polígonos recebem nomes especiais, entre eles estão o triângulo se $n = 3$, o quadrilátero se $n = 4$, pentágono se $n = 5$, hexágono, se $n = 6$, heptágono, $n = 7$, octógono se $n = 8$ e decágono se $n = 10$.

Os dois próximos problemas são aplicações envolvendo construção de polígonos com restrições em rede de pontos. Neles são abordados definição de polígonos e identificação de ângulos.

**Problema 1.1.5.** *Maior Polígono*

*Trace segmentos unindo os pontos fornecidos na rede abaixo de tal modo que esses segmentos não se interceptem além das suas extremidades e que seja formando o polígono com maior número de lados possível.*

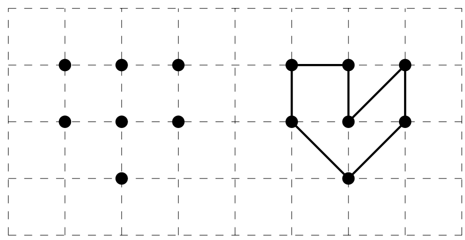


Figura 1.14: Polígono não convexo com maior número de lados

Esse problema consiste em associar a quantidade de pontos com o número de lados de um polígono. Ele exige a noção de polígonos e estratégia para encontrar um caminho para resolver o problema.

**Problema 1.1.6.** *Construindo Triângulos Obtusângulos*

*Construa triângulos que tenham ângulo obtuso.*

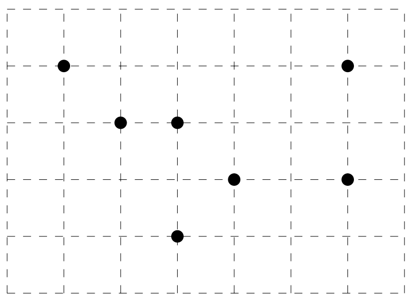


Figura 1.15: Rede para Triângulos Obtusângulos

Construção de triângulo obtusângulo é uma atividade divertida que exige raciocínio, criatividade e estratégia, além do conhecimento das formas triangulares e ângulos obtusos, pois dependem desses conceitos para verificar a possibilidade de construir os triângulos solicitados na atividade. A seguir são fornecidos 7 pontos dispostos em uma rede e nela alguns triângulos obtusângulos identificados por cores dos seus segmentos.

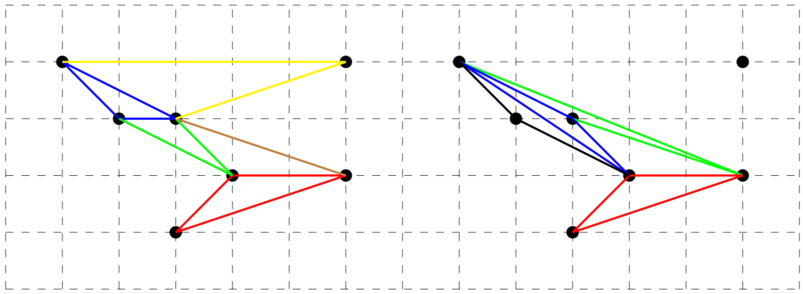


Figura 1.16: Soluções do problema Construindo Triângulos Obtusângulos

**Definição 1.1.4.** *Dois triângulos são congruentes quando existe entre eles uma correspondência tal que os lados correspondentes são iguais e os ângulos correspondentes são, também, iguais.*

**Casos de congruência de triângulos:**

1 Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados respectivamente iguais, compreendendo um ângulo igual.

2 Dois triângulos são congruentes quando têm, um lado igual e os ângulos adjacentes a este lado respectivamente iguais.

3 Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados iguais.

**Definição 1.1.5.** *Dois triângulos são denominados semelhantes quando têm os ângulos correspondentes iguais.*

Quando dois triângulos são semelhantes, os lados correspondentes dos mesmos são proporcionais. Isto pode ser percebido utilizando rede de pontos. Os dois problemas a seguir são exemplos de construções que envolvem essas ideias.

**Problema 1.1.7.** *Triângulos Semelhantes*

*Com os pontos dispostos na rede a seguir, construa triângulos semelhantes.*

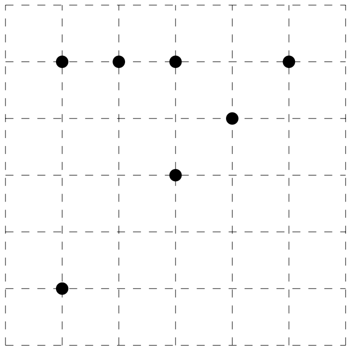


Figura 1.17: Rede para Triângulos Semelhantes

Nesta atividade, o estudante precisa saber a definição de semelhança. Perceber que figuras semelhantes têm a mesma forma e que seus lados correspondentes reduzem ou aumentam na mesma proporção.

**Problema 1.1.8.** *Figuras Congruentes*

*Una os pontos da rede a seguir construindo uma figura de maior área possível. Divida essa figura maior em quatro figuras congruentes entre si e semelhantes a figura maior.*

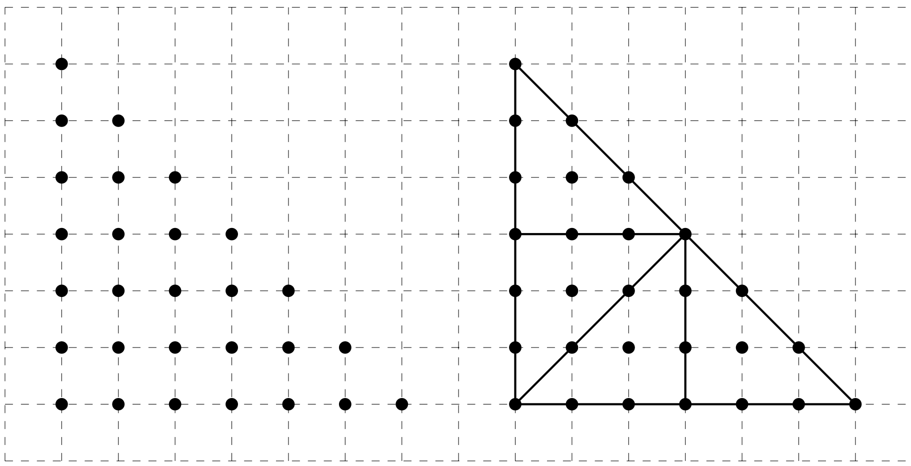


Figura 1.18: Figuras Congruentes

Esse problema é propício para verificação de habilidades lógicas e matemáticas dos estudantes. É uma atividade divertida que envolve estratégia e criatividade. Além dos conhecimentos de congruência, Definição 1.1.4, e de semelhança, Definição 1.1.5.

**Definição 1.1.6.** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.*

**Definição 1.1.7.** *Se um quadrilátero convexo tem todos os ângulos internos iguais é denominado de retângulo.*

**Definição 1.1.8.** *Se um quadrilátero tem todos os lados iguais é denominado de losango.*

**Definição 1.1.9.** *Se um quadrilátero for simultaneamente um retângulo e um losango é denominado de quadrado.*

**Definição 1.1.10.** *Quando um quadrilátero tem somente dois lados opostos paralelos, podendo ser ou não iguais, é denominado de trapézio.*

Essas definições podem ser testadas ou verificadas na construção de quadriláteros em rede de pontos. O próximo problema trata dessas construções.

**Problema 1.1.9.** *Caçando Quadriláteros*

*Construa quadriláteros usando a malha abaixo de modo que eles compartilhem vértices e não haja nenhum destes vértices dentro de uma outra figura ou que compartilhem vértices e haja pelo menos um deles dentro de outra figura.*

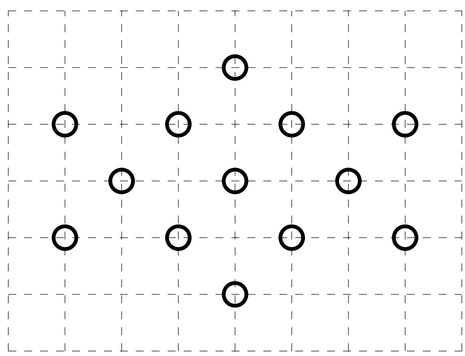


Figura 1.19: Rede para Caçando Quadriláteros

Caçando quadriláteros é uma atividade divertida de construir quadriláteros em rede pontos. Observando a disposição de pontos, o estudante pode ser levado a perceber as possibilidades de construção usando apenas uma das restrições do problema. O desafio proposto no problema pode gerar nos jovens o interesse de resolver o mesmo. Segue abaixo uma possível solução para cada caso.

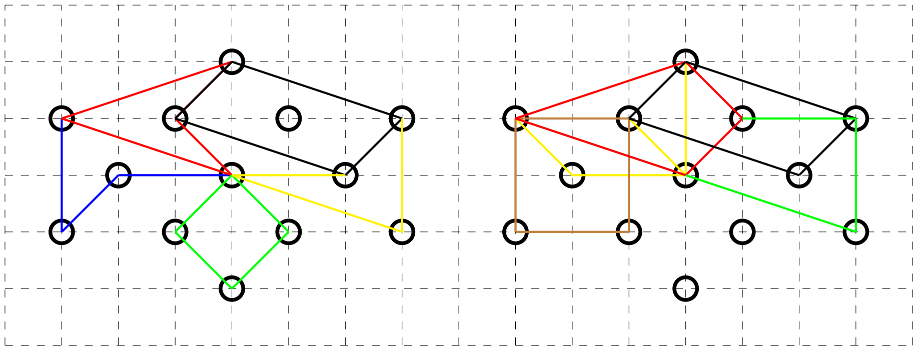


Figura 1.20: Soluções para o problema Caçando Quadriláteros

Uma diagonal de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos do polígono, ou seja, é qualquer segmento que não é lado do polígono.

**Teorema 1.1.1.** *Todo n-ágono convexo possui exatamente* $\frac{n(n-3)}{2}$ *diagonais.*

*Demonstração.* Seja $d$, o número de diagonais e $n$, o número de lados do polígono n-ágono. A expressão $d = \frac{n(n-3)}{2}$ é válida para $n = 3$ pois $d = \frac{3(3-3)}{2} = 0$ e triângulo não tem diagonais. Para $n = 4$, tem-se $d = \frac{4(4-3)}{2} = 2$, a expressão é válida pois, quadrilátero tem duas diagonais. Suponha que a expressão $d = \frac{n(n-3)}{2}$ é válida para $n = k$. Então $d = \frac{k(k-3)}{2} \Leftrightarrow d = \frac{k^2-3k}{2}$. Para provar o teorema basta mostrar que a expressão é válida para $n = k+1$: $d = \frac{(k+1)(k+1-3)}{2} \Leftrightarrow d = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)^2-3(k+1)}{2}$. Pela hipótese de indução, a expressão é válida para $n = k+1$. Logo, todo n-ágono convexo possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

□

Um exemplo de aplicação desse teorema segue com o problema abaixo. Com o auxílio dele o estudante pode melhorar a compreensão de diagonais e polígonos, pois possibilita a contagem de diagonais com o uso do teorema, por diversos outros meios e a comparação desses resultados.

**Problema 1.1.10.** *Contando Diagonais*

*Qual a quantidade de diagonais que tem o polígono formado pela disposição dos pontos na rede a seguir?*

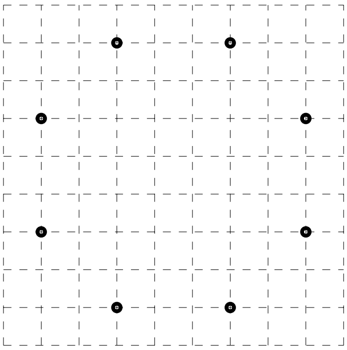


Figura 1.21: Rede para Contando Diagonais

Uma atividade interessante é a contagem de diagonais. Aqui é fornecida uma rede com 8 pontos e solicitado que os estudantes informe a quantidade de diagonais da figura formada. Nessa atividade os alunos precisam ter conhecimento de segmentos, formas geométricas e diagonais podendo usar a fórmula de diagonal, contagem entre outros. A seguir é apresentada a rede citada acima com as diagonais traçadas.

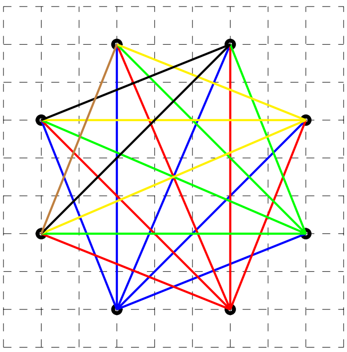


Figura 1.22: Solução do problema Contando Diagonais

Observando a disposição de pontos verifica-se que para cada ponto saem sete segmentos. Procedendo assim é possível contar 56 segmentos. No entanto, a quantidade total de segmentos foi contado em duplicidade. Daí chega-se a conclusão que são 28 segmentos dos quais 8 são lados da figura, restando então 20 segmentos que são as diagonais do polígono. Outra maneira para resolver o problema é contando os segmentos distintos que saem de cada vértice, observando-se assim que o total de segmentos é dado pela soma $7+6+5+4+3+2+1+0 = 28$ dos quais 8 são lados da figura, restando então 20 segmentos que são as diagonais do polígono. Outra forma de resolver o problema é verificando que cada ponto tem dois outros pontos consecutivos e estes formam lados do polígono, assim de cada ponto saem cinco segmentos que são contados em duplicidade. Portanto, o total de diagonais é encontrada pela razão entre o produto do número de pontos pela quantidade de segmentos e 2, ou seja, $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$. Utilizando a fórmula de diagonais: $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20$ diagonais. Este problema ilustra bem a ideia de resolução de problemas com uso mínimo de fórmulas.

**Teorema 1.1.2.** *(Teorema de Pitágoras) No triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

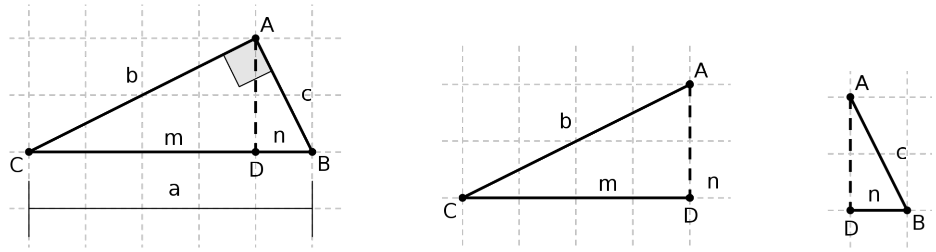



Figura 1.23: Teorema de Pitágoras

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, considere o triângulo $\triangle ABC$ retângulo em $\widehat{A}$ acima. Sejam $AB$ e $AC$ os catetos e $BC$ a hipotenusa do triângulo $\triangle ABC$ retângulo em $\widehat{A}$. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$ são semelhantes pois, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$ e $\widehat{B}$ é comum aos dois triângulos. Daí, vale a relação $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA}$. Como $AB = c$, $BC = a$ e $DB = n$ então $\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c^2 = a \cdot n$. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$ são semelhantes pois, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$ e $\widehat{C}$ é comum aos dois triângulos. Daí, vale a relação $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$. Como $AC = b$, $BC = a$ e $DC = m$ então $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot m$. Somando-se $c^2 = a \cdot n$ com $b^2 = a \cdot m$ tem-se $b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) = a^2$.

□

A soma dos comprimentos dos lados do polígono é o perímetro do mesmo e este é denotado por $2p$. Assim, o perímetro do polígono $A_1A_2...A_n$ é $2p = A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_1$.

Os segmentos construídos em rede de pontos, se são horizontais ou verticais, possuem comprimentos determinados facilmente bastando para isso contar lado de quadrados por onde eles passam. No entanto, se o segmento for inclinado será diagonal de um retângulo e para se determinar o comprimento desse segmento se faz necessário conhecimento do Teorema de Pitágoras ou área.

O problema a seguir é um exemplo de construção de figuras geométricas usando rede de pontos com aplicação de medidas de segmentos e cálculo de perímetro.

**Problema 1.1.11.** *Construindo Figuras com Perímetros Iguais*

*Unindo os pontos da rede fornecida abaixo, construa pelo menos duas figuras que tenham perímetros iguais.*

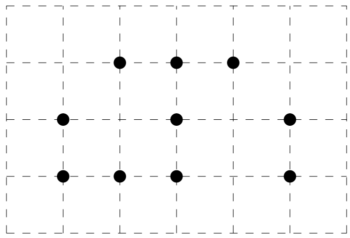


Figura 1.24: Rede para Construindo Figuras com Perímetros Iguais

Essa atividade exige do estudante percepção das formas geométricas e conhecimento de perímetro. Aqui são utilizadas a noção de comprimento de segmento, o conhecimento que a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$, a aplicação do Teorema de Pitágoras ou o cálculo do comprimento de um segmento usando a área do quadrado formado com ele.

## 1.2 Área de Polígonos

Em Boyer [19], há um relato histórico sobre alguns problemas geométricos encontrados no Papiro Ahmes. Esses problemas mostram como era encontrada a área de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros gerais. Os egípcios transformavam triângulos e trapézios isósceles em retângulos e usavam congruências para calcular a área dessas figuras.

Segundo relatos históricos, o cálculo de área originou-se da prática de cobrança de impostos e da observação do revestimento do chão por pedras pelos trabalhadores da época. Os sacerdotes perceberam que podiam calcular a extensão de uma superfície pela comparação desta com a quantidade de pedras iguais sobre a mesma.

Na figura a seguir um exemplo de cálculo de área por mensuração. Nela há um retângulo e um quadrado de lado 1 *u.c.* Usando o quadrado para dividir o retângulo em partes iguais, tem-se a área do mesmo em função do quadrado contando-se a quantidade de quadrados que cabem no retângulo ou multiplicando-se a quantidade de quadrados que formam os lados maior e menor do retângulo. A partir daí, conclui-se que a área de um retângulo é obtida pelo produto do comprimento de seu lado maior pelo comprimento de seu lado menor.

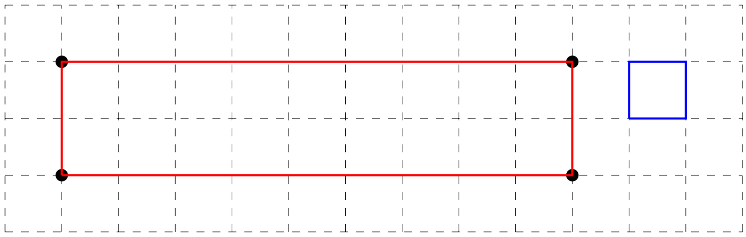


Figura 1.25: Área de retângulo

**Definição 1.2.1.** *Um número positivo associado a uma figura plana usado para quantificar o espaço ocupado por ela recebe o nome de área da figuras planas.*

O problema abaixo é um exemplo de aplicação de construção geométrica em rede de pontos envolvendo conceito de área de polígono. Este problema auxilia o estudante a compreender que área é uma medida de superfície, percebendo que esta é obtida por comparação.

**Problema 1.2.1.** *Maior Polígono*

*Trace segmentos unindo os pontos fornecidos na rede de tal modo que esses segmentos não se interceptem além das suas extremidades e que seja formando o polígono com maior área possível.*

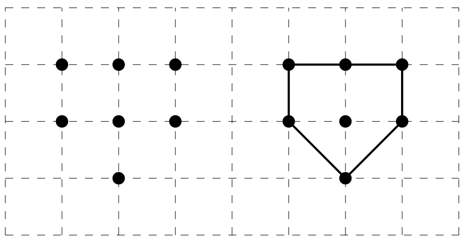


Figura 1.26: Solução de Maior Polígono (Área)

Esse atividade consiste em perceber a forma do polígono que tem maior área. Ela exige noção de polígonos, conhecimento da rede de pontos, de área e dos Axiomas abaixo para resolver o problema.

**AXIOMAS**

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais
2. Se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilhem somente um vértice ou uma aresta, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. A área de um quadrado de lado 1 *u.c.* é igual a 1 *u.a.*

**Proposição 1.2.1.** *A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

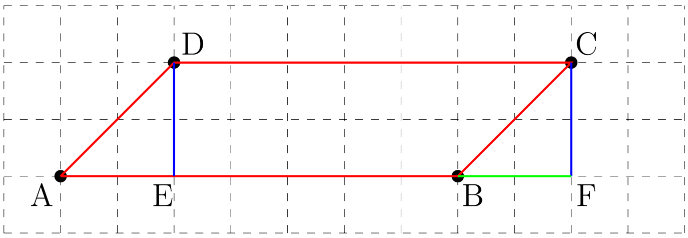



Figura 1.27: Paralelogramo ABCD

*Demonstração.* Dado o paralelogramo $ABCD$ e a reta $r$ suporte ao lado $AB$ do mesmo. Sejam $DE$ e $CF$ segmentos perpendiculares a reta $r$ saindo dos vértices $D$ e $C$, respectivamente. Assim, o quadrilátero formado, $CDEF$, é um retângulo.

Como os segmentos $AB$ e $CD$ são paralelos cortados por uma transversal, $BC$, então $\widehat{BCD} = \widehat{CBF}$ e $\widehat{BCD} = \widehat{DAE}$, pois são ângulos opostos da paralelogramo. Assim, $\widehat{DAE} = \widehat{CBF}$. Pela soma dos ângulos internos de triângulo tem-se que $\widehat{ADE} = \widehat{BCF}$. Como $AD = BC$, pois são lados opostos do paralelogramo, pelo caso A.L.A. os triângulos $ADE$ e $BCF$ são congruentes. Daí, pelo Axioma 1, $A(ADE) = A(BCF)$.

Pelo Axioma 2, $A(ABCD) = A(ADE) + A(BCDE)$ e $A(CDEF) = A(BCF) + A(BCDE)$. Como $A(ADE) = A(BCF)$ então $A(CDEF) = A(ADE) + A(BCDE) = A(ABCD)$. Portanto, assim como no retângulo, a área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pela altura relativa ao mesmo. Se o comprimento do lado $AB$ for igual a $b$ e a medida da altura relativa, $DE$, a este lado for igual a $h$, então $A(ABCD) = b \cdot h$.

□

A rede de pontos auxilia no cálculo de área por meio da comparação entre figuras. O problema a seguir é um exemplo de construção desse tipo, nele o estudante é levado a perceber que o paralelogramo e o quadrados têm áreas iguais.

**Problema 1.2.2.** *Calculando área de paralelogramo*

*Calcule a área do paralelogramo $ABCD$.*

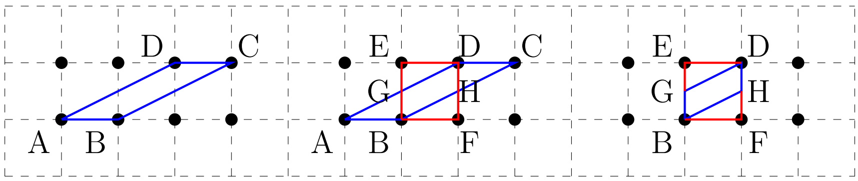



Figura 1.28: Transformando paralelogramo em quadrado de mesma área

A rede garante que $ED = AB = DC = BF = 1u.c$ e $\widehat{ABG} = \widehat{DEG} = \widehat{BFH} = \widehat{CDH} = 90^0$. Os triângulos $ABG$ e $DEG$ são congruentes, pelo caso A.L.A pois, $\widehat{AGB} = \widehat{DEG}$ são opostos pelo vértices e pelo teorema da soma dos ângulos internos de triângulos, $\widehat{BAG} = \widehat{EDG}$. Pelo Axioma 1, $AABG = ADEG$. Da mesma forma, os triângulos $BFH$ e $CDH$ são congruentes. Pelo axioma 1, $ABFH = ACDH$. Assim, $A(ABCD) = A(BFDE)$ e pelo Axioma 3, $A(ABCD) = A(BFDE) = 1u.a.$

Outra maneira de calcular a área do paralelogramo $ABCD$ é usando a Proposição 1.2.1. Daí, $A(ABCD) = AB \cdot BE = 1u.a.$

**Proposição 1.2.2.** *A área de um triângulo é metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa ao mesmo.*

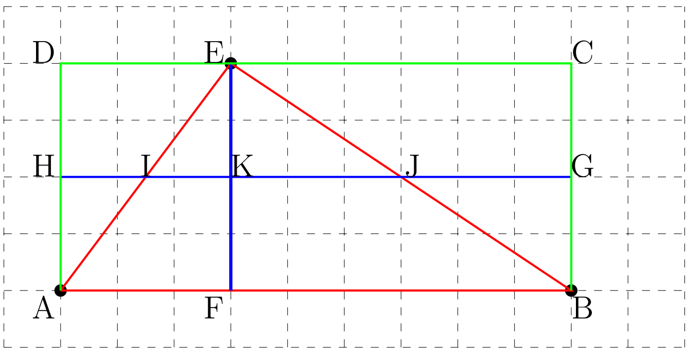



Figura 1.29: Área de triângulos

*Demonstração.* Considere o retângulo $ABCD$ cujos lados maior, $AB$ e $CD$, e menor, $BC$ e $AD$, têm comprimentos $b$ e $h$, respectivamente. Seja $E$ um ponto de $CD$ e o triângulo $ABE$ de altura $EF$ relativa ao lado $AB$.

Sejam os pontos $G$ e $H$, pontos médios dos segmentos $BC$ e $AD$ respectivamente. O segmento $GH$ intersecta o triângulo $ABE$ nos pontos $I$ e $J$ dos lados $AE$ e $BE$ respectivamente. Como os segmentos $GH$ e $AB$ são paralelos e os segmentos $AB$ e $EF$ são perpendiculares então os segmentos $EF$ e $GH$ são perpendiculares.

Nos triângulos $EKI$ e $AHI$, tem-se que $\widehat{EKI} = \widehat{AHI}$ pois são opostos pelo vértice. Como $AD \perp GH$ e $EF \perp GH$ então $\widehat{EKI} = \widehat{AHI} = 90^0$. Pela soma dos ângulos internos do triângulo, $\widehat{KEI} = \widehat{HAI}$. Além disto, $AH = EK$ pois $H$ e $K$ são pontos médios dos segmentos $AD$ e $EF$ respectivamente. Portanto, pelo caso A.L.A, os triângulos $EKI$ e $AHI$ são congruentes, logo, pelo Axioma 1, têm áreas iguais.

Seguindo o raciocínio anterior, tem-se que, pelo caso A.L.A, os triângulos $EKJ$ e $BGJ$ são congruentes. Portanto, pelo Axioma 1, têm áreas iguais.

Pelo Axioma 2, $A(ABE) = A(EKI) + A(AIJB) + A(EKJ)$ e $A(ABGH) = A(AHI) + A(AIJB) + A(EKJ)$. Como $A(EKJ) = A(BGJ)$ e $A(EKI) = A(AHI)$ então $A(ABE) = A(AHI) + A(AIJB) + A(EKJ) = A(ABGH)$.

Como $H$ é ponto médio do segmento $AD$ então $AH = DH$ e $AD = AH + DH$, assim, $AD = 2 \cdot AH$. O retângulo $ABGH$ tem mesma base e metade da altura do retângulo $ABCD$, portanto sua área é metade da área do retângulo $ABCD$.

Assim, como a área do triângulo $ABE$ igual a área do retângulo $ABGH$ então $A(ABE) = \frac{A(ABCD)}{2}$. Portanto, se o comprimento do lado $AB$ for igual a $b$ e a medida da altura relativa, $AD$, a este lado for igual a $h$, então $A(ABE) = \frac{b \cdot h}{2}$.

□

**Proposição 1.2.3.** *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

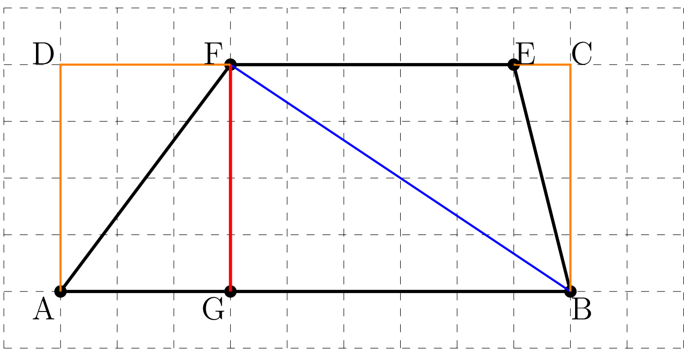



Figura 1.30: Área de trapézio

*Demonstração.* Considere o quadrilátero $ABEF$ um trapézio de bases $AB$ e $EF$. Seja $BF$ uma de suas diagonais. Assim, pelo Axioma 2, $A(ABEF) = A(ABF) + A(BEF)$.

Seja o triângulo $ABF$ de base $AB$ e altura relativa a mesma, $FG$ paralela ao segmento $AD$. Pela Proposição 1.2.2, $A(ABF) = \frac{AB \cdot AD}{2}$.

Dado o triângulo $BEF$ de base $EF$ e altura relativa a mesma, $BC$, paralela ao segmento $AD$. Pela Proposição 1.2.2, $A(BEF) = \frac{EF \cdot AD}{2}$.

Como $A(ABEF) = A(ABF) + A(BEF)$ então $A(ABEF) = \frac{AB \cdot AD}{2} + \frac{EF \cdot AD}{2}$. Daí, $A(ABEF) = \frac{(EF+AB) \cdot AD}{2}$.

Portanto, se o comprimento do segmento $AB$ for igual a $B$, o comprimento do segmento $EF$ for igual a $b$ e a medida da altura, $AD$, for igual a $h$, então $A(ABEF) = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$.

□

**Corolário 1.2.1.** *A área de um losango é a metade do produto do comprimento de suas diagonais.*

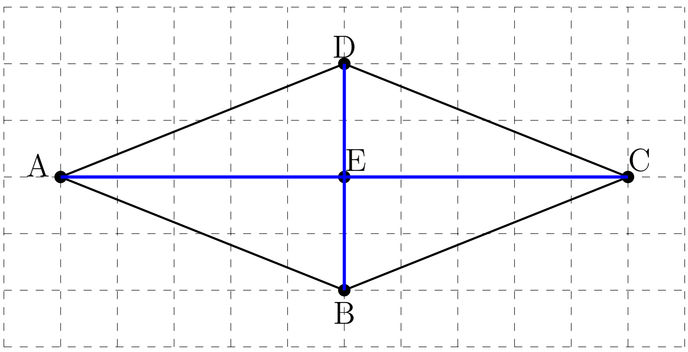



Figura 1.31: Área de losango

*Demonstração.* Sejam $AC$ e $BD$ as diagonais do losango $ABCD$ que se intersectam no ponto $E$. Como $AB = BC = CD = AD$ e $AC$ lado comum, pelo caso L.L.L. os triângulos $ABC$ e $ADC$ são congruentes. Pelos Axiomas 1 e 2, respectivamente, $A(ABC) = A(ADC)$ e $A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC)$. Portanto, $A(ABCD) = 2 \cdot A(ABC)$.

Como $AC$ e $BE$ são perpendiculares então $BE$ é altura relativa ao lado $AC$ do triângulo $ABC$. Pela Proposição 1.2.2, $A(ABC) = \frac{AC \cdot BE}{2}$. Como $BD = BE + DE$ e $BE = DE$ então $BD = 2 \cdot BE$. Assim, $A(ABC) = \frac{AC \cdot BD}{4}$. Portanto, $A(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Logo, se o comprimento do segmento $AC$ for igual a $D$ e o comprimento do segmento $BD$ for igual a $d$, então $A(ABCD) = \frac{D \cdot d}{2}$.

□

A seguir dois problemas envolvendo cálculo de área de figuras em rede de pontos. O primeiro deles é interessante por se tratar de um quadrado com lados de medidas irracionais construído em rede de pontos e a possibilidade de simplificação do mesmo tornando mais fácil o cálculo de sua área. O outro problema envolve o cálculo de área de um polígono côncavo.

**Problema 1.2.3.** *Calculando área de quadrado*

*Calcule a área do quadrado com vértices na rede de pontos.*

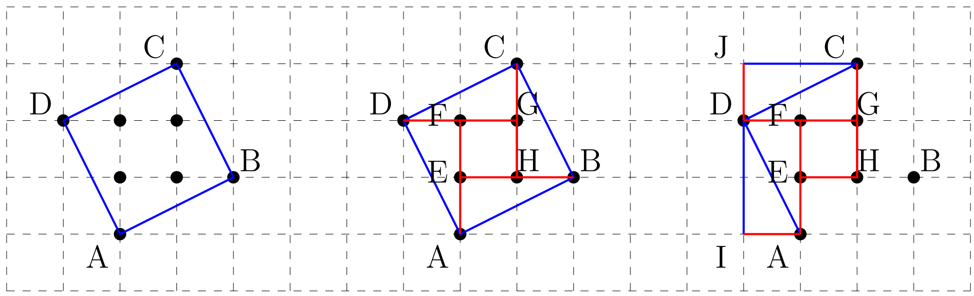



Figura 1.32: Área de quadrado

A rede garante que $DG = EB = HC = AF = 2u.c$, $CG = HB = AE = DF = 1u.c$ e $\widehat{AFD} = \widehat{CGD} = \widehat{AEB} = \widehat{BHC} = 90^0$. Assim, pelo caso L.A.L., os triângulos $AFD$, $CGD$, $AEB$ e $BHC$ são congruentes. Pelo Axioma 1, $A(AFD) = A(CGD) = A(AEB) = A(BHC)$. Pela Proposição 1.2.2, $A(AFD) = A(CGD) = A(AEB) = A(BHC) = \frac{DG \cdot CG}{2} = 1u.a.$. Pelo Axioma 3, $A(EFGH) = 1u.a.$. E, pelo Axioma 2, $A(ABCD) = A(AFD) + A(CGD) + A(AEB) + A(BHC) + A(EFGH) = 4 \cdot A(AFD) + A(EFGH) = 5u.a.$.

Outra maneira de calcular a área do quadrado $ABCD$ é usando a Proposição 1.2.1 e o Teorema de Pitágoras. Daí, $AD = AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ e $A(ABCD) = AB \cdot AD = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5u.a.$

**Problema 1.2.4.** *Calculando área de polígono côncavo*

*Calcule a área do polígono com vértices em rede de pontos.*

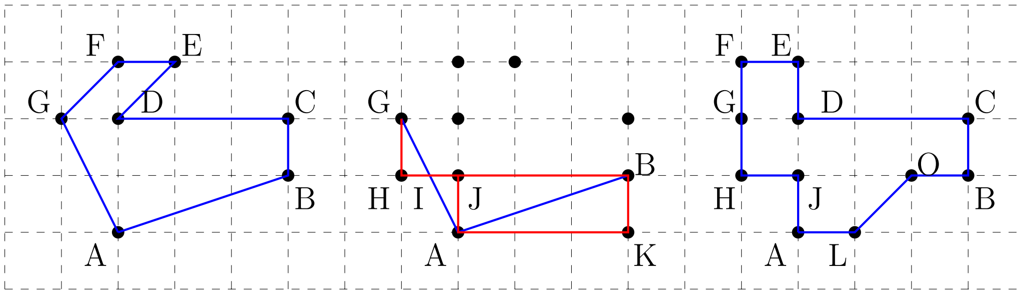



Figura 1.33: Área de polígono côncavo

A rede garante que $DG = EF = DF = 1u.c$ e $\widehat{GDF} = \widehat{DFE} = 90^0$. Assim, pelo caso L.A.L., os triângulos $GFD$ e $DFE$ são congruentes. Pelo Axioma 1 e 2, tem-se que $A(GFD) = A(DFE)$ e $A(DEFG) = A(GFD) + A(DFE) = 2 \cdot A(DFE) = 1u.a.$

Os triângulos $GHI$ e $AJI$ são congruentes, pelo caso A.L.A, pois $\widehat{GHI} = \widehat{AJI} = 90^0$, $\widehat{GIH} = \widehat{AIJ}$, opostos pelo vértices, $\widehat{HGI} = \widehat{JAI}$, pelo teorema da soma dos ângulos internos do triângulo, e $HG = JA$. Daí $A(AGD) = A(DGHJ) = 1u.a.$

Como $A$, $K$, $B$ e $J$ são pontos representados em rede então $BJ = KA = 3u.c.$, $BK = JA = 1u.c.$ e $AB$ lado comum dos triângulos $AJB$ e $BKA$. Assim, $AJB$ e $BKA$ são congruentes e $A(BKA) = A(AJB)$. Portanto, pelo Axioma 2, $A(AKBJ) = A(BKA) + A(AJB) = 2 \cdot A(AJB)$. Daí, $A(AJB) = \frac{A(AKBJ)}{2}$. Como, $A(AKBJ) = AK \cdot BK = 3 \cdot 1 = 3u.a$ então $A(AJB) = 1,5u.a. = A(ALOJ)$.

Pelo Axioma 2, $A(ABCDEFG) = A(EFGD) + A(DGHJ) + A(AJOL) + A(BCDJ) = A(ALOBCDEFHJ) = 1 + 1 + 1,5 + 3 = 6,5u.a.$

Outra maneira de calcular a área do polígono $ABCDEFG$ é dividir o mesmo em um paralelogramo, um triângulo e um trapézio, utilizar as Proposições 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 e o Axioma 2. Daí, $A(ABCDEFG) = A(DEFG) + A(ADG) + A(ABCD) = DG \cdot DF + \frac{AD \cdot DG}{2} + \frac{(BC+AD) \cdot CD}{2} = 1 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{(1+2) \cdot 3}{2} = 1 + 1 + 4,5 = 6,5u.a.$

## 1.3 Fórmula de Pick

Georg Alexander Pick, de família judia, nasceu em 1859 na cidade de Viena, Áustria. Seu primeiro artigo matemático foi publicado em 1876, no ano seguinte a sua entrada na Universidade de Viena. Ele graduou-se em 1879 conseguindo uma qualificação que lhe permitiu ensinar Matemática e Física. Seu doutorado foi premiado pela dissertação "Über eine Klasse abelscher Intégrale". Escreveu sua tese de habilitação "Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen"conseguindo assim, em 1881, o direito de conferência em Praga. Lecionou na Universidade de Leipzig em 1884 e 1885. Na Universidade alemã de Praga, em 1888, foi promovido a professor adjunto de Matemática e em 1892, foi nomeado como professor titular. Escreveu 67 artigos matemáticos abordando tópicos como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo de Integrais e Geometria, entre esses artigos está "Geometrisches zur Zahlenlehre"(Resultados Geométricos sobre a Teoria dos Números) publicado em 1899, em Praga e nesse aparece o Teorema de Pick. Após sua aposentadoria, em 1927, Pick foi nomeado professor emérito da Universidade de Praga. Com a invasão de Hitler e seu exército a República Tcheca e a criação do campo de concentração tcheco de Theresienstadt em Nordboehmen em 24 de Novembro de 1941, os nazistas aprisionaram Georg Alexander Pick nesse campo de concentração, em 1942, onde, após duas semanas, ele veio a falecer aos 82 anos.

O Teorema de Pick foi citado em 1969 numa edição do livro Mathematical Snapshots do matemático polonês Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972) sendo popularizado a partir de então. Esse teorema é um método de cálculo de área de polígono simples, cujos vértices são pontos de uma rede, através da contagem de pontos no interior e na fronteira do mesmo. Ele pode ser aplicado em polígonos côncavos ou convexos, desde que não tenham "buracos".

**Definição 1.3.1.** *Um polígono com vértices na rede de pontos é dito simples quando não tem buracos e quando não há interseção entre suas arestas, ou seja, suas arestas são percorridas sem passar duas vezes pelo mesmo vértice.*

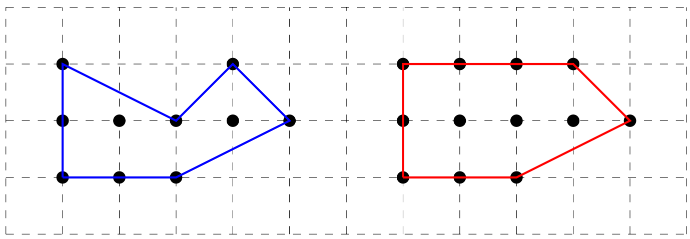


Figura 1.34: Polígonos simples

**Definição 1.3.2.** *Um polígono de rede é dito elementar se seus vértices são inteiros e não contém mais nenhum ponto de rede.*

**Definição 1.3.3.** *Um triângulo é dito elementar quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto sobre a rede.*

**Definição 1.3.4.** *Um paralelogramo é dito elementar quando os quatro vértices são os únicos dos seus pontos que pertencem a rede.*

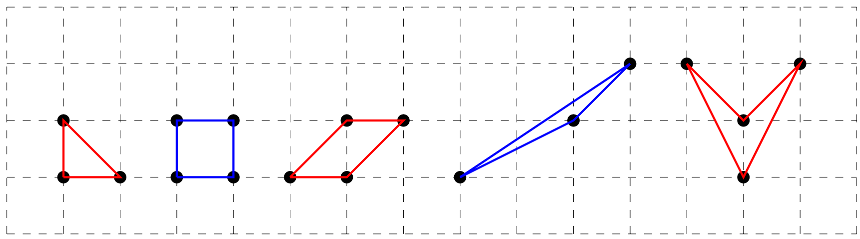


Figura 1.35: Polígonos elementares

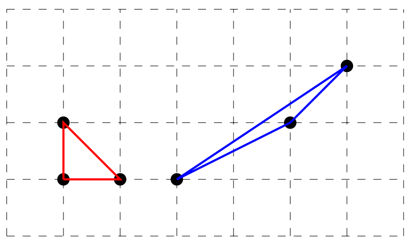
**Teorema 1.3.1.** *A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão* $\frac{F}{2} + I - 1$, *onde* $F$ *é o número de pontos da rede situados sobre o contorno do polígono e* $I$ *é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.*

A prova desse teorema se encontra em Aigner & Ziegler [21], página 66.

A seguir dois problemas envolvendo cálculo de área de figuras com vértices em rede de pontos com aplicação do Teorema de Pick.

**Problema 1.3.1.** *Triângulo elementar*

*Calcule a área dos triângulos elementares abaixo.*



Os triângulos elementares têm área igual a $\frac{1}{2}$.

Figura 1.36: Triângulos elementares

Os dois triângulos têm 3 pontos situados sobre seus contornos e nenhum ponto nos seus interiores. Daí, usando a fórmula de Pick, tem-se que $A = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$.

**Problema 1.3.2.** *Contando pontos*

*Utilize a fórmula de Pick para calcular a área dos polígonos abaixo.*

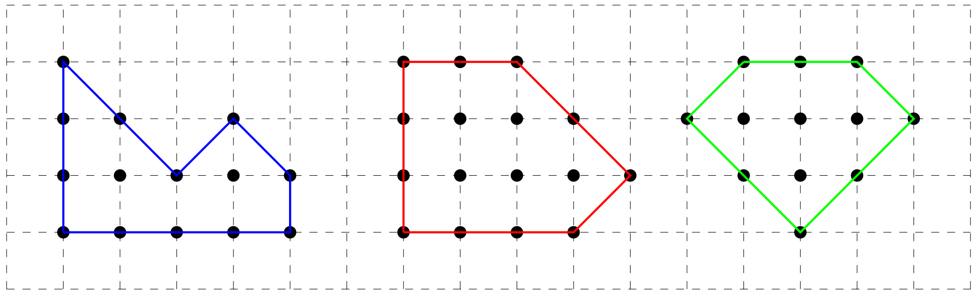


Figura 1.37: Polígonos A, B e C, nessa ordem

Na figura $A$, tem $F = 11$, $I = 2$. Pelo Teorema 1.3.1, $A = \frac{F}{2} + I - 1 = 6,5$.
Na figura $B$, tem $F = 11$, $I = 4$. Pelo Teorema 1.3.1, $A = \frac{F}{2} + I - 1 = 9,5$.
Na figura $C$, tem $F = 8$, $I = 4$. Pelo Teorema 1.3.1, $A = \frac{F}{2} + I - 1 = 7$.

# Capítulo 2

# Conceitos Combinatórios em rede de pontos

A Geometria Combinatória é um tema muito interessante que não é explorado no Ensino Médio. Este é definido por Fomin [4] como o ramo da Geometria que estuda diversas propriedades combinatórias de arranjos de figuras geométricas, como pontos, retas, polígonos, etc., no plano (e no espaço). Ela estuda situações práticas e problemas relacionados a conjuntos finitos que satisfazem propriedades e podem ser expressos como modelos discretos e serem contados.

Para Fomin [4] , devido a sua variedade, os problemas de Combinatória são propícios para desenvolver atividades com os alunos. Um exemplo é descobrir a quantidade de retas que podem ser construídas com 3 pontos. Isso depende da disposição dos mesmos. Se os pontos forem colineares haverá uma única reta contendo eles e em caso contrário serão construídas três retas. A maioria dos alunos no Ensino Médio não irão parar para verificar a disposição de pontos. Isso acontece porque eles, dentro do observado até o momento, decoram procedimentos e não compreendem de fato o assunto estudado. A seguir uma ilustração da disposição dos três pontos em rede de pontos.

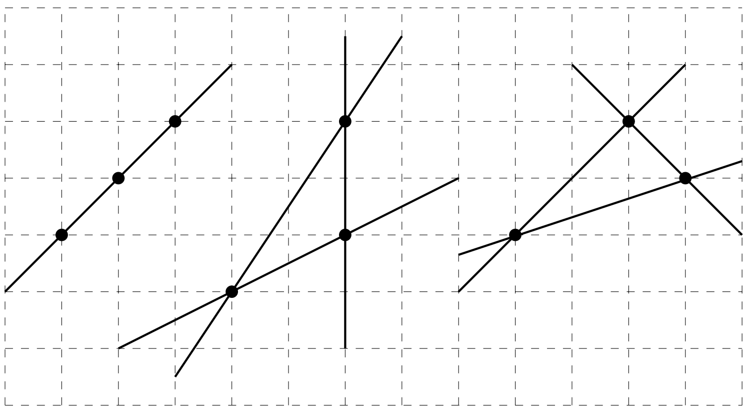


Figura 2.1: Pontos e retas em rede de pontos

Da Geometria plana tem-se o seguinte postulado: “dados dois pontos distintos existe uma, e somente uma, reta que os contém”. Então, em um conjunto de três pontos A, B e C não alinhados, combinando o ponto A aos dois outros serão formadas duas retas distintas, AB e AC. Como todas as combinações possíveis com o ponto A já foram feitas, sobraram somente os outros dois pontos que irão gerar uma única reta, BC. Esse resultado pode ser obtido usando combinação de três objetos contados dois a dois, assim: $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!} = 3$.

**Problema 2.0.3.** *Contando triângulos*

*Com cinco pontos dispostos como na figura abaixo podem ser construídos quantos triângulos?*

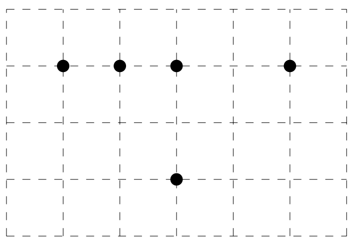


Figura 2.2: Contando triângulos

Inicialmente, alguns diriam que há somente 3 triângulos e outros, que são 4 triângulos. Nesse caso eles precisam perceber que devem contar quantos grupos de três é possível formar com os cinco pontos dados e retirar todos os grupos de três que não formam triângulos. Ou melhor, verificar quantos grupos de dois é possível formar com os quatro pontos alinhados e contar quantos triângulos podem formar usando essas combinações e o ponto restante. Isso não é fácil de ser percebido e se faz necessário traçar cada uma das possibilidade de construção e fazer a contagem para com o tempo ir sendo construído as noções de combinação, o que leva a resolução a seguir: $\binom{5}{3} - \binom{4}{3} = \frac{5!}{2!3!} - \frac{4!}{3!} = 10 - 4 = 6$.

É difícil combinar e observar que há repetição de combinações que precisam ser retiradas, ou seja, que objetos foram contados mais de uma vez. Será que as construções em discussão facilitaria o estudo de Geometria e Combinatória?

Em Munsignatti [7] aparece a afirmação: “a Análise Combinatória é um dos assuntos que mais dificuldades apresentam para os alunos no Ensino Médio. Saber apenas fórmulas de arranjo e combinação não é suficiente.”Infelizmente, no Ensino Médio a Análise Combinatória é apresentada aos alunos a partir da aplicação de fórmulas. Isso dificulta muito a aprendizagem. Como dito em Munsignatti [7], “o principal no estudo desse assunto é o raciocínio”.

Uma das ideias é utilizar construções desse tipo para aprendizagem de conceitos básicos de Geometria e Combinatória simultaneamente. Primeiro forma-se as figuras depois verifica-se a quantidade possível dentro da propriedade ou definição estudada.

**Problema 2.0.4.** *Triângulos áreas iguais*

*Utilizando a disposição de pontos a seguir, quantos triângulos de mesma área podem ser formados?*

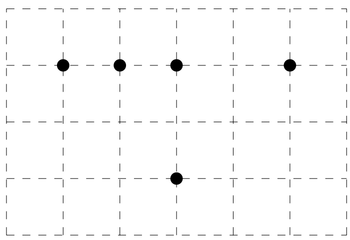


Figura 2.3: Triângulos com áreas iguais

A quantidade possível de triângulos que podem ser construídos foi discutido no Problema 2.0.3. Dos 6 triângulos possíveis, os estudantes precisam verificar que há 2 deles congruentes, portanto têm áreas iguais e 2 triângulos de mesma área apesar das formas distintas. E, precisam também justificar as suas observações. Eles podem verificar os tipo de triângulos formados usando a classificação pela medida de ângulos e lados. E ainda podem verificar se algum deles têm perímetros iguais.

**Problema 2.0.5.** *Apertos de mãos*

*No início de um evento 8 pessoas trocaram apertos de mão. Sabendo-se que cada pessoa cumprimentou todas as outras, quantos apertos de mão foram trocados?*

Essa atividade é bem parecida com a contagem de diagonais. Aqui, o estudante pode representar as pessoas utilizando uma rede com 8 pontos e descobrir a quantidade de segmentos formados na figura ligando cada ponto com todos os outros. Nessa atividade, os estudantes precisam ser criativos na representação do problema, ter conhecimento de segmentos, perceber que cada segmento é contado em dobro. Eles podem usar a fórmula de contagem ou outros para resolver o problema. A seguir é apresentada a rede citada acima.

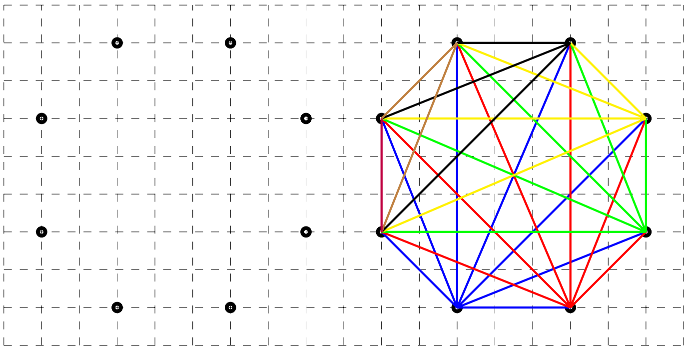


Figura 2.4: Apertos de mãos

Observando a disposição de pontos verifica-se que para cada ponto saem sete segmentos. Procedendo assim é possível contar 56 segmentos. No entanto, a quantidade total de segmentos foi contado em duplicidade. Daí chega-se a conclusão que são 28 segmentos, ou seja, 28 apertos de mãos. Outra maneira para resolver o problema é usando a fórmula de contagem, $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, portanto são encontrados 28 segmentos, ou seja, 28 apertos de mãos.

Em Carneiro [5] afirma que "para a maioria dos problemas da Combinatória não há algoritmos preestabelecidos" e que "cabe ao professor criar oportunidades para que seus alunos possam analisar, discutir em grupos, escrever, expor e, finalmente, resolver de diferentes maneiras muitas e variadas questões, comparando-as e identificando semelhanças e diferenças, até criar a sua forma própria de pensar."

Os problemas de Análise Combinatória não são apenas de contagem mas também de existência. Uma das principais ferramentas na resolução de problemas de existência em contagem é o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos.

## 2.1 Casa de Pombos

O Princípio da Casa de Pombos é uma das principais ferramentas na resolução de problemas cujo objetivo é garantir a existência de configurações de objetos que satisfazem a certas propriedades. Ele foi usando em 1834 por Dirichlet que o denominou de princípio das gavetas (Schubfachprinzip) para resolver problemas na Teoria dos Números, porém é aplicado em diversos ramos da Matemática, entre eles Geometria e Combinatória.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet nasceu em fevereiro de 1805 em Düren, atualmente cidade da Alemanha. Estudou na Alemanha e França sendo aluno do cientista alemão Georg Simon Ohm e dos matemáticos: Pierre Simon(Marquês de Laplace) (1749

-1827), Adrien-Marie Legendre (1752 -1833), Sylvestre François Lacroix (1765 -1843), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830), Louis-Benjamin Francoeur (1773-1849), Jean-Baptiste Biot (1774-1862) e Siméon Denis Poisson (1781 - 1840). Seu primeiro trabalho foi sobre o Último Teorema de Fermat (Para $n > 2$, a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui soluções inteiras, com exceção da solução trivial em que $x$, $y$ ou $z$ é zero) em 1825. Foi nomeado professor na Universidade de Berlim em 1828 na qual ministrou aulas até 1855.

Juntamente com Carl Gustav Jacob Jacobi, Wilhelm Borchardt, Jakob Steiner e Ludwig Schläfli em 1843, Dirichlet recebeu uma bolsa de intercâmbio científico em várias cidades italianas onde participou de palestras e ciclos de estudos científicos. Teve como alunos Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852), Leopold Kronecker(1823-1891) e Rudolf Otto Sigismund Lipschitz(1832-1903). Em 1855, com o falecimento de Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Dirichlet foi indicado para ocupar o lugar Gauss na Universität Göttingen (Alemanha).

Em 1858, durante uma Conferência em Montreux (Suíça), Dirichlet teve um problema cardíaco e por ordens médicas decidiu retornar à cidade de Göttingen para dar continuidade ao tratamento, Vindo a óbito, após o falecimento de sua esposa. Após sua morte, o matemático Richard Dedekind coletou, editou e publicou seus escritos e outros resultados em teoria dos números sob o título "Vorlesungen über Zahlentheorie"(Aulas sobre Teoria dos Números). Dirichlet está sepultado no Bartholomäusfriedlhof em Göttingen.

O enunciado do Princípio das Gavetas de Dirichlet é "se forem dados $n$ objetos, $n > 2$, a serem colocados em, no máximo, $(n - 1)$ gavetas, então uma delas conterá pelo menos dois objetos".

**Proposição 2.1.1.** *( Princípio da Casa de Pombos). Se $n + 1$ pombos são colocados em $n$ casas, então pelo menos uma casa irá conter pelo menos 2 pombos.*

*Demonstração.* Suponha que em cada uma das casas há no máximo um pombo. Como por hipótese tem-se $n$ casas, contando tem-se também no máximo $n$ pombos. Isso é uma contradição, pois por hipótese tem-se $n + 1$ pombo. Logo deve haver pelo menos uma casa com dois ou mais pombos.

□

A principal dificuldade na aplicação do Princípio da Casa de Pombos na resolução de problemas está na identificação de quem faz o papel dos pombos, de quem faz o papel das casas e da relação entre eles.

**Problema 2.1.1.** *Em uma reunião há $n$ pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.*

*Demonstração.* Nesse problema as pessoas são os pombos e as casas são os número de conhecidos. Considere $C_i$ o subconjuntos das pessoas que conhecem $i$ pessoas no grupo de $n$ pessoas, com $0 \leq i \leq n-1$. Assim, $C_0$, é o conjunto cujo elemento são pessoas que não conhecem pessoa alguma do grupo, $C_1$, é o conjunto cujo elemento são pessoas que conhecem uma pessoa do grupo ,..., e $C_{n-1}$ é o conjunto cujo elemento são pessoas que conhecem $n-1$ pessoa do grupo. Se uma pessoa conhece $n-1$ então não há pessoa do grupo que não conhece alguém, assim não haverá pessoa em $C_0$. Se uma pessoa não conhece alguém na reunião então não há pessoa do grupo que conhece todas as pessoas da reunião, assim não haverá pessoa em $C_{n-1}$.

Suponha que em cada um dos subconjuntos $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ ou $C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-2}$ há uma pessoa. Assim, contando tem-se $n-1$ subconjuntos e consequentemente $n-1$ pessoas. Isso é uma contradição, pois por hipótese tem-se $n$ pessoas. Logo, na reunião há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.

□

**Problema 2.1.2.** *Mostre que, em qualquer grupo de cinco pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo.*

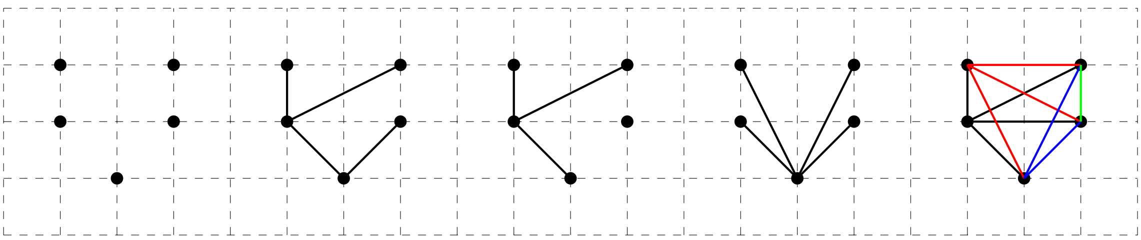


Figura 2.5: Grupo de cinco pessoas

*Demonstração.* Considere $C_i$ o subconjuntos das pessoas que conhecem $i$ pessoas no grupo de 5 pessoas, com $0 \leq i \leq 4$. Assim, $C_0$, é o conjunto cujo elemento são pessoas que não conhecem pessoa alguma do grupo, $C_1$, é o conjunto cujo elemento são pessoas que conhecem uma pessoa do grupo ,..., e $C_4$ é o conjunto cujo elemento são pessoas que conhecem 4 pessoa do grupo. Se uma pessoa conhece 4 então não há pessoa do grupo que não conhece alguém, assim não haverá pessoa em $C_0$. Se uma pessoa não conhece alguém na reunião então não há pessoa do grupo que conhece todas as pessoas da reunião, assim não haverá pessoa em $C_4$.

Suponha que em cada um dos subconjuntos $C_1, C_2, C_3, C_4$ ou $C_0, C_1, C_2, C_3$ há uma pessoa. Assim, contando tem-se 4 subconjuntos e consequentemente 4 pessoas. Isso é uma contradição, pois por hipótese tem-se 5 pessoas. Logo, na reunião há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.

□

**Proposição 2.1.2.** *Se distribuímos $nk + 1$ pombos em $n$ casas, então algumas das casas contém pelo menos $k + 1$ pombos.*

*Demonstração.* Suponha que em cada uma das $n$ casas tem-se $k$ pombos. Assim, da contagem dos pombos nas casas encontram-se $nk$ pombos. Isso é uma contradição, pois por hipótese há $nk + 1$ pombos.

□

**Problema 2.1.3.** *Em qualquer grupo de seis pessoas existe, necessariamente, um conjunto de três pessoas que se conhecem ou que são totalmente estranhos.*

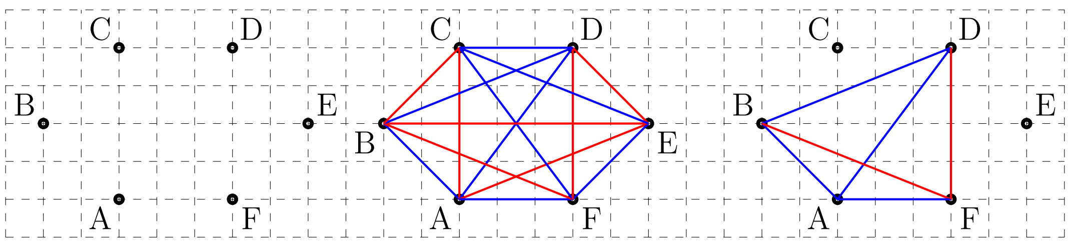



Figura 2.6: Seis pessoas

*Demonstração.* Observe a figura acima. Os pontos representam as pessoas (os pombos) e são os vértices do hexágono. Nela, os segmentos (as casas) na cor vermelha associam pessoas estranhas e na cor azul indica pessoas que se conhecem.

Cada ponto da figura está associado aos outros cinco pontos por cinco segmentos de reta. Pelo Princípio da Casa de Pombos, Proposição 2.1.2, três desses segmentos são azuis ou vermelho. Suponha que do vértice A saiam três segmentos azuis, $AB$, $AD$ e $AF$, se algum dos segmentos $BD$, $DF$ ou $BF$ for azul então formará um triângulo com dois dos outros três segmentos ($AB$, $AD$ e $AF$) que saem do vértice A, tendo assim um conjunto de três pessoas que se conhecem. No entanto, se nenhum deles for azul então irão formar um triângulo de lados vermelhos, existindo assim um conjunto de três pessoas que não se conhecem.

□

**Problema 2.1.4.** *Mostre que se tomamos cinco pontos quaisquer sobre um quadrado de lado 1, então pelo menos dois deles não distam mais que* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

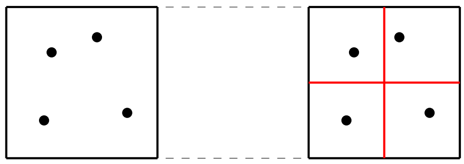


Figura 2.7: Quadrado de lado 1

*Demonstração.* Nesse problema, os pombos são os cinco pontos. Partindo dos pontos médios dos lados do quadrado traça-se dois segmentos perpendiculares, dividindo o quadrado de lado 1 em quatro quadrados de lado $\frac{1}{2}$. Colocando-se um ponto em cada um dos quadrados menores, resta um ponto. Daí, pelo Princípio da Casa dos Pombos, um dos quadrados menores tem pelo menos dois pontos. Pelo teorema de Pitágoras, sabe-se que a medida da diagonal do quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$ e consequentemente, a medida da diagonal do quadrado de lado $\frac{1}{2}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, a maior distância possível entre os dois pontos que estão no mesmo quadrado menor é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

**Problema 2.1.5.** *Seja $C$ um conjunto formado por cinco pontos de coordenadas inteiras no plano. Prove que o ponto médio de algum dos segmentos com extremos em $C$ tem também coordenadas inteiras.*

*Demonstração.* Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ e $E(x_5, y_5)$ do conjunto C. Combinando esses pontos 2 a 2 é possível construir 10 segmentos. Como ponto médio de um segmento é $(\frac{x_i+x_k}{2}, \frac{y_i+y_k}{2})$ com $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq k \leq 5$ então as coordenadas do ponto médio só serão inteiras de as somas $x_i + x_k$ e $y_i + y_k$ precisam ser pares. Daí, as abscissas, assim como as ordenadas, dos pontos extremos do segmento precisam ser ambos pares ou ímpares.

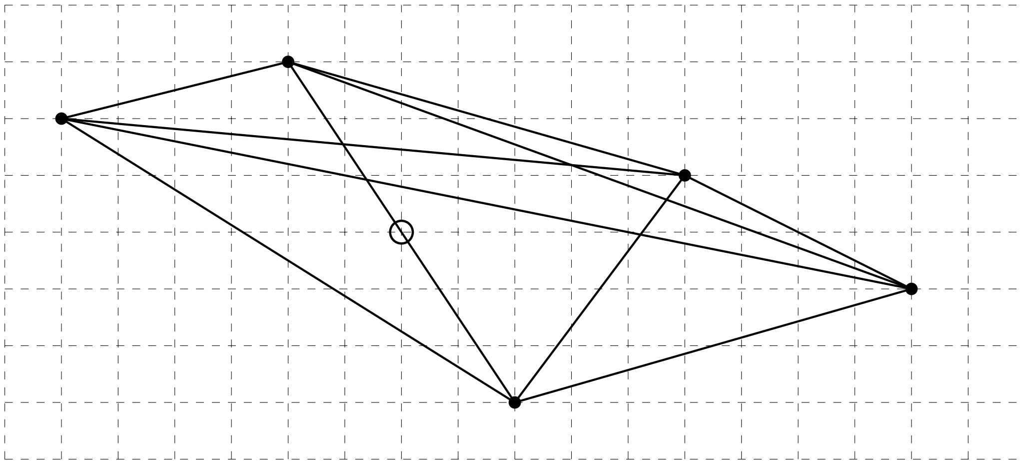


Figura 2.8: Coordenadas inteiras

Usando o Princípio da Casa de Pombos, temos que a paridade dos números são as casas e os cinco números são os pombos. Então $nk + 1 = 5$ assim, entre os cinco valores $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ e $x_5$ há pelo menos três desses números com a mesma paridade. Associando os três valores de mesma paridade de x com os três valores de y há pelo menos dois valores de mesma paridade.

Sejam então $x_r$ e $x_s$ os valores de mesma paridade, assim como $y_r$ e $y_s$ t mesma paridade. Portanto, $(\frac{x_r+x_s}{2}, \frac{y_r+y_s}{2})$ é ponto médio do segmento cujas coordenadas dos extremos são $(x_r, y_r)$ e $(x_s, y_s)$.

□

**Problema 2.1.6.** *Suponha que cada ponto do reticulado plano é pintado de vermelho ou azul. Mostre que existe algum retângulo com vértices no reticulado e todos da mesma cor.*

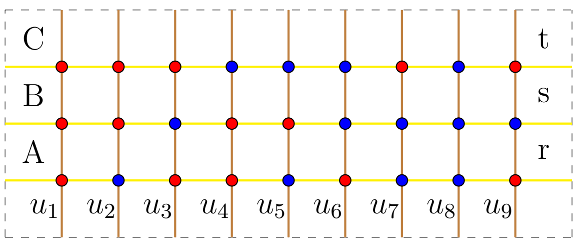



Figura 2.9: Retângulo com vértices de mesma cor

*Demonstração.* No plano há infinitas retas. Trace três dessas retas paralelas entre si, $r$, $s$ e $t$, e uma reta, $u_1$, perpendicular as três retas paralelas. Sejam $A$, $B$ e $C$ os pontos de interseção entre as retas paralelas $r$, $s$ e $t$ e a reta perpendicular $u_1$. Tem-se três pontos e duas cores então, pelo Princípio da Casa de Pombos, há pelo menos dois desses pontos com a mesma cor. Como cada ponto pode ser azul ou vermelho então há $2^3$ combinações possíveis para colorir esses pontos. Assim, traçando-se nove retas, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$ e $u_9$, perpendiculares as três retas paralelas, $r$, $s$ e $t$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, uma das combinações será repetida. Portanto, existirá algum retângulo com vértices no reticulado e todos da mesma cor.

□

**Problema 2.1.7.** *Cinquenta e um ponto estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado. prove que algum conjunto contendo três desses pontos pode ser coberto por um quadrado com 20 centímetros de lado.*

*Demonstração.* Divida o quadrado de 1 metro (100 centímetros) em quadrados de 20 centímetros, ou seja, em 25 quadrados. Assim, os pombos são os cinquenta e um pontos e as casas são os vinte e cinco quadrados de 20 centímetros de lado. Daí, pelo Princípio da Casa dos Pombos, $nk + 1 = 51$, se $n$ quadrados são ocupadas por $nk + 1$ pontos então um quadrado terá $k+1$ pontos. Portanto, $25k = 50$ e $k+1 = 3$. Logo, haverá pelo menos um quadrado de lado 20 centímetros que conterá três pontos.

□

**Problema 2.1.8.** *Os pontos de um plano são pintados usando três cores. Prove que existe um triângulo retângulo cujos vértices têm a mesma cor.*

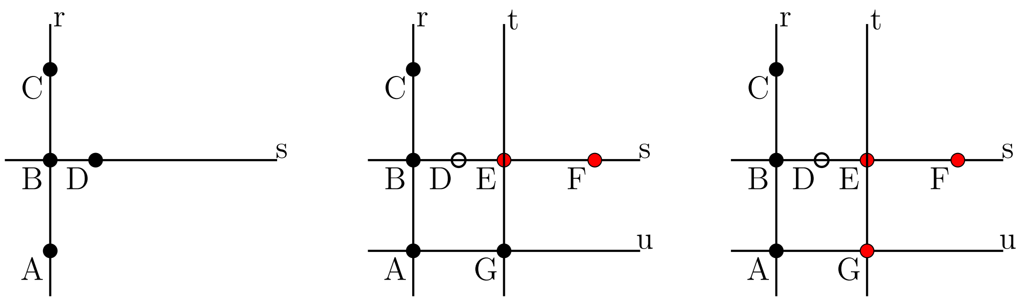



Figura 2.10: Triângulo retângulo

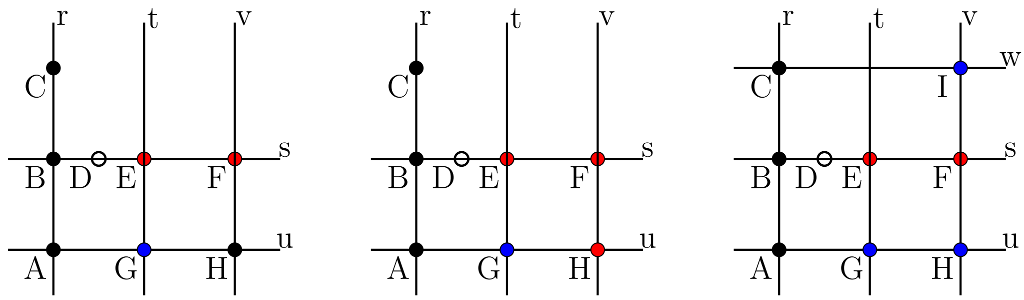



Figura 2.11: Triângulo retângulo com vértices de mesma cor

*Demonstração.* Pelo Princípio das casas de pombos, se há três cores são necessários sete pontos para se ter ao menos três da mesma cor. Para essas pontos serem vértices de um triângulo eles não podem estar alinhados. Então para resolver esse problema será necessário mais de 7 pontos, considerando que os três primeiros estão alinhados e que sejam da mesma cor. Será usado então 9 pontos. Vamos lá.

Considere a reta $r$ e três de seus pontos, A, B e C, de mesma cor, preto. Sejam a reta $s$ perpendicular a reta $r$ e o ponto $B$ de interseção entre elas. Suponha $D \in s$. Se $D$ for na cor preta então existe o $\Delta ABD$ retângulo e com vértices de mesma cor. Se $D$ não for na cor preta, suponha que na reta $s$ há um único ponto na cor preta. Sejam então $E, F \in s$ de mesma cor, vermelha. Considere a reta $t$ perpendicular a $s$ no ponto $E$ e a reta $u$ perpendicular a $r$ no ponto $A$. Daí, as retas $t$ e $u$ são perpendiculares. Seja $G$ ponto de interseção entre as retas $t$ e $u$. Supondo $G$ na cor preta, existe o $\Delta ABG$ retângulo cujos vértices são todos da mesma cor. Se $G$ for na cor vermelha, existe o $\Delta GEF$ retângulo cujos vértices são todos da mesma cor. Se $G$ for azul, considere a reta $v$ perpendicular a reta $s$ e $F$ ponto de interseção entre as retas $v$ e $s$. Daí, as retas $u$ e $v$ são perpendiculares. Seja $H$ ponto de interseção das retas $u$ e $v$. Se $H$ for na cor preta, existe o $\Delta ABH$ retângulo com vértices de mesma cor, no caso preta. Se $H$ for vermelho, o $\Delta EFH$ satisfaz o problema. Se $H$ for na cor azul então considere a reta $w$ perpendicular a reta $r$ no ponto $C$. Daí, as retas $t$ e $w$ são perpendiculares. Seja $I$ ponto de interseção das retas $t$ e $w$. Se $I$ for na cor preta, vermelha ou azul então existem os triângulos $\Delta BCI$,$\Delta EFI$ ou $\Delta GHI$ retângulo cujos vértices são todos da mesma cor, preta, vermelha ou azul respectivamente, satisfazendo o problema.

$\square$

**Teorema 2.1.1.** *Se distribuirmos $t$ pombos em $n$ casas, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos $\lfloor \frac{t-1}{n} \rfloor + 1$ pombos.*

*Demonstração.* Como $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro, menor do que ou igual a $x$, então $\lfloor \frac{t-1}{n} \rfloor \leq \frac{t-1}{n}$ pombos. Suponha que em cada casa há no máximo $\lfloor \frac{t-1}{n} \rfloor$ pombos. Daí, existem no máximo $n \cdot \lfloor \frac{t-1}{n} \rfloor$ pombos. Mas, $n \cdot \lfloor \frac{t-1}{n} \rfloor \leq t-1 < t$. Isso contradiz a hipótese, pois há $t$ pombos.

□

**Problema 2.1.9.** *Na região delimitada por um retângulo de largura quatro e altura três são marcados seis pontos. Prove que existe ao menos um par destes pontos cuja distância entre eles não é maior que $\sqrt{5}$.*

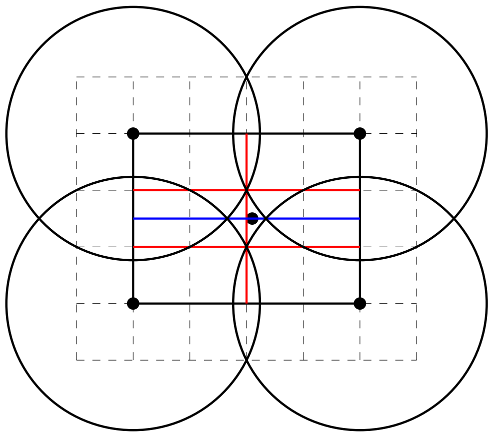


Figura 2.12: Seis pontos em retângulo

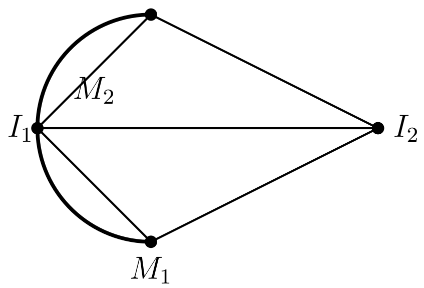
*Demonstração.* Divida o retângulo maior em dois retângulos congruentes de largura dois e altura três. Considere que os seis pontos são os t pombos e que os dois retângulos são as n casas. Pelo teorema 3.0.5., $\lfloor \frac{6-1}{2} \rfloor + 1 = 3$. Daí, pelo menos 3 pontos ocupam um retângulo de largura dois e altura três. Pelo Teorema de Pitágoras, a medida da diagonal dos retângulos de largura dois e altura três é $\sqrt{13}$ e a medida da diagonal do retângulo de largura quatro e altura três é 5. Assim, suponha que quatro dos seis pontos estão posicionados nos vértices do retângulo largura quatro e altura três e que o quinto ponto está em um dos retângulos de largura dois e altura três, próximo a interseção das diagonais do retângulo maior. Daí, a distância entre os pontos do vértice e o quinto ponto é maior que $\sqrt{5}$. Trace então 4 círculos de raio $\sqrt{5} < 2,5$ cada e centro nos vértices do retângulo maior. Suponha que o quinto ponto não esteja dentro de quaisquer um desses círculos, assim distância entre o centro dos mesmos e o quinto ponto é maior que $\sqrt{5}$. Para o sexto ponto, há duas possibilidades: o sexto ponto pode não está dentro ou na fronteira de quaisquer um desses círculos então a distância entre ele e o quinto ponto é menor que $1 < \sqrt{5}$ e se, estiver dentro de qualquer um dos círculos, a distância entre ele e quaisquer um dos quatro outros pontos é menor que $\sqrt{5}$.

□

## 2.2 Noções de grafos

Boaventura [20], afirma que a teoria dos grafos “tem sua origem no confronto de problemas práticos relacionados a diversas especialidades”sendo o primeiro deles o problema das pontes de Königsberg resolvido por Euler.

Em 1736, Euler visitou a cidade de Königsberg. Esta era cortada por um rio e nele haviam duas ilhas que eram ligadas por uma ponte. Essas ilhas também eram unidas as margens do Rio, uma delas era ligada a margem por quatro pontes e a outra, por duas pontes, no total haviam sete pontes. Lá ele foi apresentado a um problema que embora aparentemente simples não havia sido resolvido. Esse consistia em encontrar o percurso para um passeio que partisse de uma das margens e, atravessando uma única vez cada uma das sete pontes, retomasse à margem de partida. Euler representou a ilha e as margens do rio por pontos e as pontes por linhas e observou que o número de passagens de uma margem para uma ilha, ou entre duas ilhas, era sempre ímpar o que indica a possibilidade de passar, mas em algum momento não se conseguirá retornar. Ele provou que o passeio desejado só seria possível se cada massa de terra fosse ligadas à outra por um número par de pontes. Após solucionar o problema, Euler não deu mais importância ao mesmo, a solução desse problema ficou perdido por mais de 100 anos.




Os pontos correspondem as margens do rio e as ilhas, e as linhas, as pontes.

Figura 2.13: Grafo de Euler

O problema das pontes de Königsberg tinha como base um desenho com linhas que devem ser percorrida sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma linha. Ele, provavelmente, foi o primeiro problema a ser resolvido com um conjunto finito de pontos com arranjos geométricos como modelo. Essa abstração matemática deu início a uma nova teoria conhecida como teoria de grafos. Seu desenvolvimento se deu devido a evolução do computador e sua aplicação a diversos problemas em muitas áreas. Em Boaventura [12] a teoria de grafos é citada como "ramo da Matemática aplicado a problemas que vão de transportes à biologia, das telecomunicações à sociologia, das ciências da organização aos jogos recreativos." Assim, grafo é uma abstração matemática que pode ser usado por diferentes áreas na busca e resolução de problemas.

Grafo é compreendido como um conjunto finito de pontos que podem estar ligados por um segmento. É um objeto matemático formado por dois conjuntos, o de pontos, que é denominado de vértices, e o de segmentos, que é chamado de arestas. Um grafo é uma estrutura matemática que auxilia na resolução de problemas de Geometria, Combinatória, entre outros. Para Lima [9] um grafo é "um conjunto finito de pontos, chamados os vértices do grafo, e um conjunto finito de arcos, chamados as arestas do grafo". Uma infinidade de situações podem ser representadas por ele.

A construção de figuras geométricas em rede de pontos permite lidar com grafos na aprendizagem de objetos geométricos e resolução de problemas com base na relação entre vértices e arestas dos mesmos. Em sua pesquisa Ferreira [14] chega a conclusão que o trabalho com grafos valoriza o raciocínio matemático e testa a criatividade dos alunos. Segundo ela, "os grafos se mostram como uma ferramenta poderosa que auxilia a contextualizar problemas de natureza combinatória de forma bastante atrativa aos olhos dos estudantes."

**Problema 2.2.1.** *Sem tirar o lápis do papel*

*Construa uma figura sem tirar o lápis do papel e sem repetir linha.*

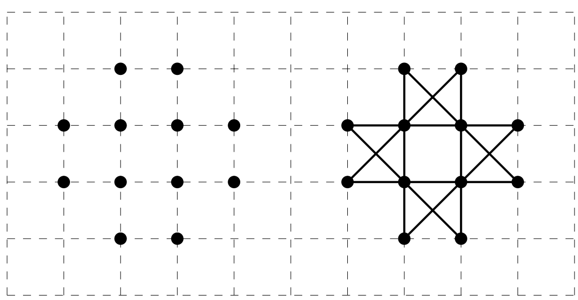


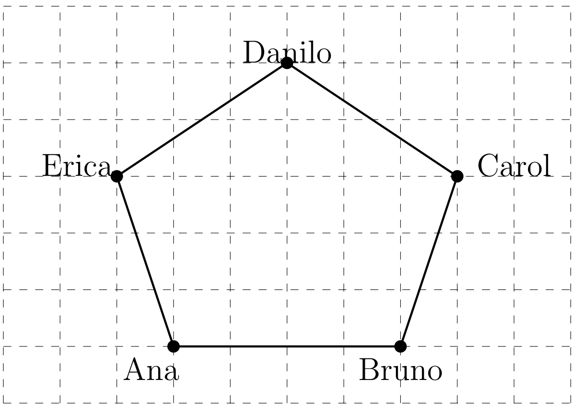
Figura 2.14: Sem tirar lápis do papel

Sem tirar o lápis do papel é uma atividade divertida de construção que requer um pouco de criatividade e conhecimento de segmentos. Existem várias possibilidades de solução, algumas bem simples e outras que necessitam de um pouco mais de criatividade.

A atividade consiste na escolha de um ponto e de uma direção e a partir daí posiciona-se o lápis e percorre todos os pontos formando segmentos sem retroceder ou passar por um segmento já formado por mais vezes.

**Definição 2.2.1.** *Um par de conjuntos $(V, A)$, onde $V = v_1, v_2, ..., v_n$ é o conjunto dos vértices e $A \subset v_i, v_j; v_i, v_j \in V$ é o conjunto de arestas (subconjunto de $V$ com 2-elementos), é denominado de grafos.*

Um grafo pode ser utilizado para representar qualquer situação onde é definida uma relação entre objetos, por exemplo, a relação entre cidades e estradas onde os vértices do grafo são as cidades e as arestas, as estradas. A figura a seguir é um grafo que está sendo usado para representar um grupo de cinco pessoas, onde todas elas têm o mesmo número de amigos no grupo. Nessa situação, cada uma das cinco pessoas estão associadas a cada um dos vértices (pontos) do grafo e a relação de amizade entre elas são indicadas pelas linhas que ligam os pares de vértices(arestas).




A figura indica que Carol, Danilo e Bruno são amigos, assim como Erica, Bruno e Danilo, etc. Ou seja, cada pessoa do grupo é amiga de outras duas.

Figura 2.15: Relação de amizade

Uma aresta existe se dois vértices estão relacionados. Daí, se há uma ligação entre os vértices $v_1$ e $v_2$ de $V$ então existe uma aresta pertencente a $A$ e esta é denominada de $(v_1, v_2)$ ou $v_1v_2$. O número de vértices que um grafo possui é denominado de ordem do grafo. Assim como, o tamanho de um grafo é determinado pelo número de ligações que ele possui.

**Definição 2.2.2.** *O grafo em que cada par de vértices está relacionado por no máximo um segmento é denominado de grafo simples.*

**Definição 2.2.3.** *Seja um grafo $G$ orientado ou não. O grupo que contém as ligações que não estão em $G$ é denominada de grafo complementar de $G$.*

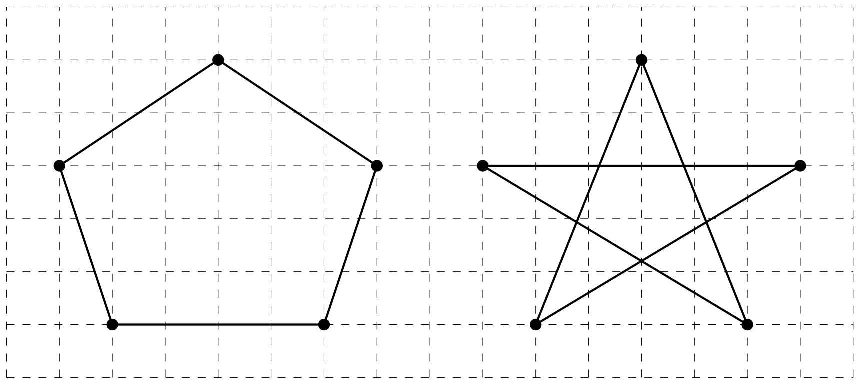


Figura 2.16: Grafo simples $G$ e seu complemento $G^c$

Grafo completo ou clique é a denominação do grafo não orientado que possui o conjunto de todas as arestas possíveis em um grafo com a mesma ordem. Se este grafo tem ordem $n$ é denotado por $K_n$ e seu número de ligações é exatamente $C_{n,2}$ arestas.

**Definição 2.2.4.** *Um grafo é bipartido quando seu conjunto de vértices $V$ puder ser particionado em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$ de modo que não haja ligações entre dois vértices de um mesmo conjunto. A nomenclatura usada para grafos bipartido é $k_{m,n}$.*

Em um grafo, uma sequência de arestas que ligam dois vértices é denominado de caminho. Quando existe um caminho que liga quaisquer dois vértices de um grafo este é dito conexo ou conectado. Um caminho fechado onde apenas os vértices iniciais e finais coincidem é chamado de ciclo.

**Definição 2.2.5.** *Um grafo $H$ é denominado de subgrafo de um grafo $G = (V, A)$ se seu conjunto de vértices e de arestas estão contidos no de $G$ (ou seja, $V(H) \subseteq V(G)$) e $A(H) \subseteq A(G)$).*

**Definição 2.2.6.** *Um grafo que possui todos os vértices de outro, mas não obrigatoriamente todas as ligações é denominado de Grafo abrangente.*

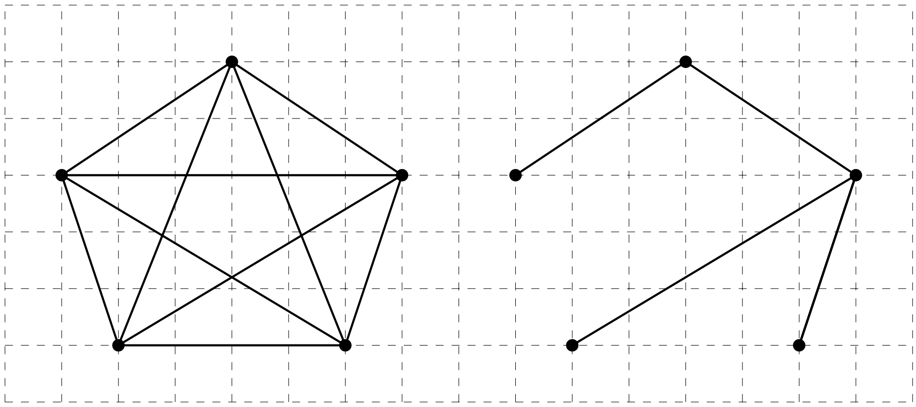


Figura 2.17: Grafo completo e Subgrafo abrangente, respectivamente.

**Definição 2.2.7.** *O grafo que possui um subconjunto de vértices do grafo original e todas as ligações entre eles, que figurem no grafo original é chamado de subgrafo induzido.*

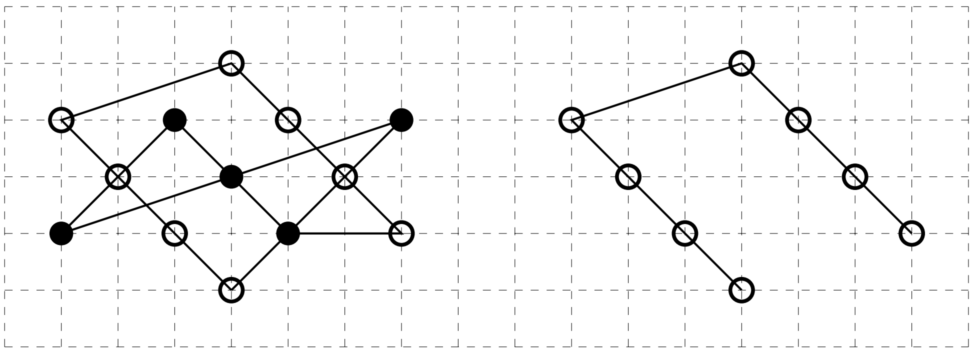
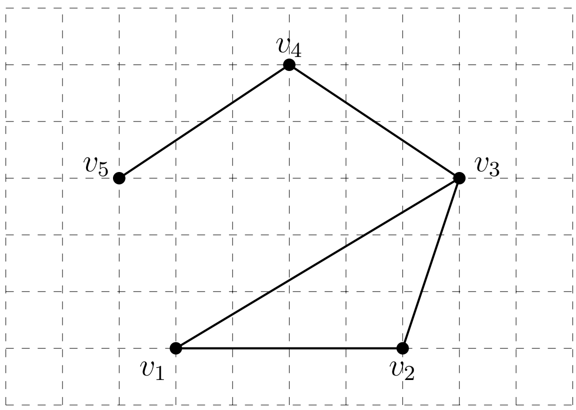


Figura 2.18: Subgrafo induzido

**Definição 2.2.8.** *Dados os vértices $v_1$ e $v_2$ de um grafo $G = (V, A)$ não orientado. Existindo uma aresta $(v_1, v_2)$ de $G$, o vértice $v_2$ é vizinho do vértice $v_1$. E esses vértices conectados por uma aresta são denominados de vértices adjacentes.*

**Definição 2.2.9.** *Dado $G = (V, A)$ um grafo não orientado. O grau de um vértice $v$ de $G$ é o número $d(v)$ de vizinhos que o mesmo possui. O grau máximo e mínimo são denotados, respectivamente, por $\Delta(G)$ e $\delta(G)$.*

**Definição 2.2.10.** *Duas arestas $(v_1, v_2)$ e $(v_1, v_3)$ de $G$ são adjacentes quando possuem um vértice em comum.*




Na figura, os vértices $v_1$, $v_2$ e $v_3$ são adjacentes, as arestas $(v_1, v_2)$ e $(v_1, v_3)$ são adjacentes, $d(v_5) = 1$, $d(v_4) = 2$ e $d(v_3) = 3$.

Figura 2.19: Grafo de ordem 5 e tamanho 5

**Problema 2.2.2.** *Contando segmentos*

*Trace todos os segmentos utilizando os pontos presentes na rede.*

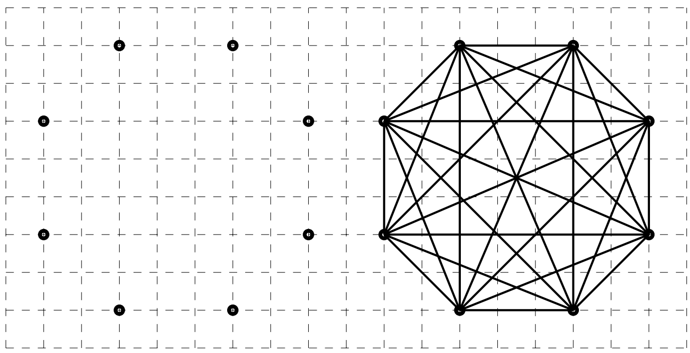


Figura 2.20: Grafo completo de ordem 8 e tamanho 28.

Nessa atividade os estudantes descobrem a quantidade de segmentos que é possível traçar com oito pontos representados em rede sem que haja três em uma mesma reta, utilizando grau dos vértices do grafo. Aqui eles verificam que de cada vértice saem o mesmo número de segmentos e que há uma duplicidade na contagem dos mesmos, já que cada segmento liga dois vértices.

**Problema 2.2.3.** *Em uma turma de 30 estudantes. É possível que nove deles tenham 3 amigos cada, na turma, onze tenham 4 amigos e dez tenham 5 amigos?*

Suponho que cada estudante corresponda a um vértice de um grafo de 30 vértices. De nove desses vértices partem 3 arestas, de onze partem 4 arestas e de dez partem 5 arestas. Assim, nove vértice terão grau 3, onze, grau 4 e dez, grau 5. Portanto o total de arestas desse grafo é $\frac{9 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5}{2} = \frac{121}{2} = 60,5$. Logo, o problema não é possível, pois 60,5 não é inteiro.

Uma maneira de organizar os dados de um grafo $G$ é informar as relações de adjacência entre os vértices do mesmo, ou seja, dizer quais vértices estão ligados a cada um dos vértices do grafo $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\})$.

A seguir dois possíveis diagramas que representam o grafo $G$.

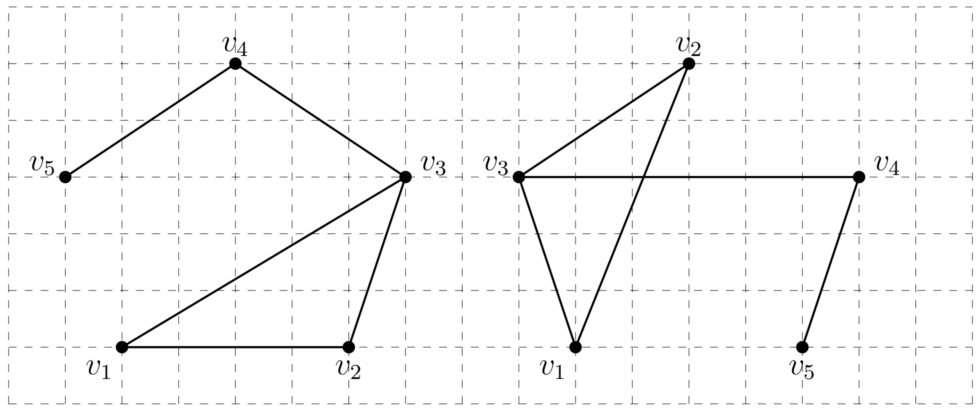



Figura 2.21: grafos isomorfos

**Definição 2.2.11.** *Dois grafos são denominados isomorfos quando são idênticos mas estão desenhados de formas distintas, ou seja, quando os vértices de um deles podem ser rearranjados de maneira que se obtém o outro grafo.*

**Definição 2.2.12.** *Em um grafo, um vértice de grau par é denominado um vértice par e um vértice ímpar se seu grau for ímpar.*

**Teorema 2.2.1.** *(Euler). Em um grafo $G = (V, A)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas.*

*Demonstração.* Como o grau de um vértice $v_i$ de um grafo é definido pela quantidade de arestas ligadas a ele, então em um grafo com $k$ vértices, para cada $v_i$, $d(v_i) = k - 1$. Daí, $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + ... + d(v_k) = (k - 1) \cdot k$. Uma aresta, $a_m$ é o resultado da ligação entre dois vértices daí,$a_m = (v_i, v_j)$. Assim, cada uma das arestas $a_m$ é contada no vértice $v_i$ e depois no vértice $v_j$, ou seja, duas vezes. Portanto, $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + ... + d(v_k) = (k - 1) \cdot k = 2|A|$, onde $|A|$ indica a quantidade de elementos do conjunto $A$, ou seja, quantidade de arestas.

□

**Corolário 2.2.1.** *(Euler). O número de vértice ímpares em um grafo qualquer tem que ser par.*

*Demonstração.* Considere o grafo $G = (V, A)$. Suponha que o grafo $G$ tenha 3 vértices ímpares e que esses vértices tenham graus $2 \cdot n - 1$, $2 \cdot n + 1$ e $2 \cdot n + 3$. Pelo teorema 4.1.1, o número de arestas de $G$ é $2|A| = \sum_{i=1}^{k} d_{v_i}$, ou seja, é múltiplo de dois. Seja a soma de todos os graus de vértices ímpares igual a $(2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 3 \cdot (2n + 1))$ e a soma de todos os graus de vértices pares iguais a $2 \cdot S$, Então $\sum_{i=1}^{k} d_{v_i} = 2 \cdot S + 3 \cdot (2n + 1)$. Daí, $2|A| = 2 \cdot S + 3 \cdot (2n + 1)$. Assim, $|A|$ não é inteiro. Portanto, não existe tal grafo. Logo o número de vértice ímpares em um grafo qualquer tem que ser par.

□

**Problema 2.2.4.** *Em uma turma de 30 estudantes. É possível que nove deles tenham 3 amigos cada, na turma, onze tenha 4 amigos e dez tenha 5 amigos?*

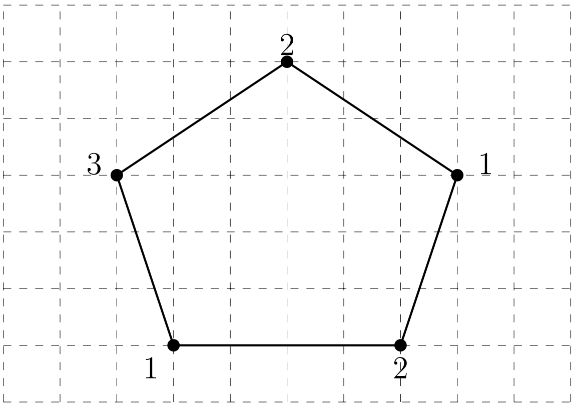
Suponho que cada estudante corresponda a um vértice de um grafo de 30 vértices. De nove desses vértices partem 3 arestas, de onze partem 4 arestas e de dez partem 5 arestas. Assim, dezenove desses vértices tem grau ímpar e onze, grau par. Segundo o Corolário 2.2.1, o número de vértice ímpares em um grafo qualquer tem que ser par, portanto o problema é impossível.

### 2.2.1 Coloração de vértices

Um grafo simples $G = (V, A)$ pode ser rotulado com um conjunto $C$ de cores de tal modo que vértices adjacentes sejam colorido com cores distintas. Esta forma de rotular um grafo é denominada de coloração de vértices.

**Definição 2.2.13.** *Denomina-se número cromático de um grafo $G$, notação $\chi(G)$, ao menor número de cores necessários para colorir os vértices de $G$ de maneira que vértices adjacentes tenham cores diferentes.*

O número cromático depende da quantidade de vértices e de arestas de um grafo. Um grafo de $n$ vértices que não tenha arestas, grau zero, tem número cromático um. Já o número cromático um grafo de $n$ vértices completo é igual ao seu número de vértices, ou seja, $\chi(G) = n$.




Os vértices 1 têm cor A, os vértices 2, cor B e o vértice 3, cor C. Esse grafo tem $\chi(G) = 3$.

Figura 2.22: Número cromático de G

**Problema 2.2.5.** *Colorindo vértices*

*Faça coloração dos pontos, usando uma coloração mínima, de forma que pontos consecutivos tenham cores distintas.*

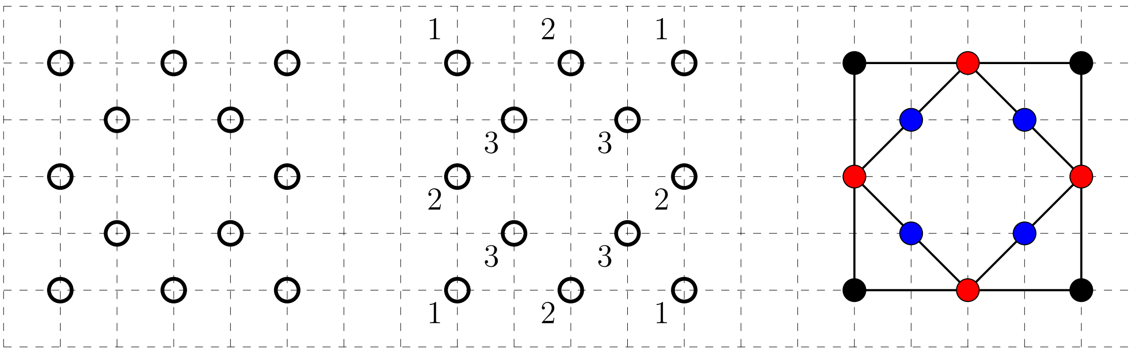



Figura 2.23: A esquerda, rede de pontos. A direita, uma solução possível

Nessa atividade é fornecido ao estudante uma malha com doze pontos disposto em rede. Aqui o estudante tem a liberdade de escolher quais pontos estão ligados por um segmento, arestas. A ideia é que eles exercitem a compreensão que tem sobre vértices adjacentes e usem de criatividade e estratégia para cumprir a tarefa.

Os vértices do subconjunto $V_1$ do grafo bipartido $V$ pode ser colorido todos de mesma cor, pois não há arestas entre eles. Da mesma maneira, os vértices do subconjunto $V_2$ do grafo bipartido $V$. Assim, são suficiente duas cores para colorir um grafo bipartido.

## 2.2.2 Coloração de arestas

**Problema 2.2.6.** *Colorindo Segmentos*

*Use a menor quantidade de cores possível para colorir os segmentos da figura abaixo, de maneira que segmentos adjacentes tenham cores distintas.*

Essa atividade tem como pré requisito que o estudante tenha conhecimento de segmentos adjacentes. Aqui ele irá colorir os segmentos usando uma coloração mínima e a restrição de que segmentos adjacentes tenha cores distintas.

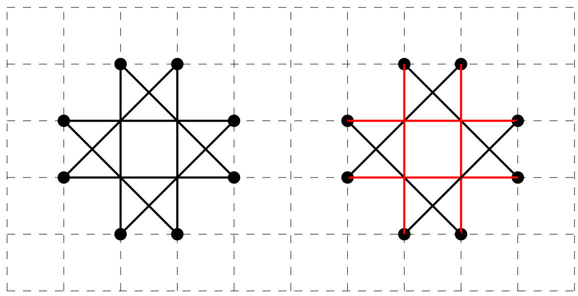


Figura 2.24: A direita uma coloração da figura da esquerda

**Definição 2.2.14.** *Índice cromático de um grafo $G$, notado por $\chi'(G)$, é o menor número de cores que pode ser usado na coloração das arestas de um grafo de maneira que arestas adjacentes recebam cores distintas.*

**Problema 2.2.7.** *Qual o índice cromático de $G$?*

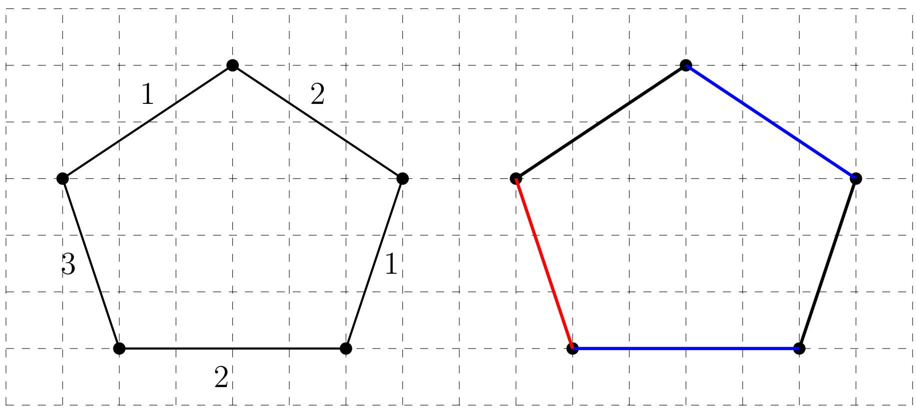



Figura 2.25: Grafo $G$ e sua coloração

O grafo $G$ tem um número ímpar de arestas. Suponha que as cores sejam as casas e que as arestas são os pombos, pela Proposição 2.1.2 se forem usadas duas cores haverá ao menos três arestas com a mesma cor. Se isso acontecer, haverá duas arestas adjacentes com a mesma cor, isso não pode acontecer. Portanto, o índice cromático de $G$ é três.

### 2.2.3 Coloração de grafos planares

Em 1852, Guthrie enquanto estudante de matemática ficou sabendo por intermédio de um irmão, que era cartógrafo, que não eram necessário mais de quatro cores distintas para colorir as regiões representadas em um mapa. Ele apresentou o problema a seu professor Augustus de Morgan que intrigado escreveu para William Rowan Hamilton e contou-lhe sobre o mesmo. A partir daí, vários matemáticos tentaram demonstrar o problema sem êxito.

A. B. Kempe, em 1879, publicou uma prova para esse problema. Ele associou as regiões de um mapa a pontos e uniu as regiões que tinham uma fronteira em comum por linhas. Alguns anos mais tarde foi descoberto erro na sua demonstração. O problema que foi formulado: "provar que, para qualquer mapa, é necessário usar no máximo 4 cores" que aparentava ser simples foi proposto aos estudantes como desafio, em 1886, no Clifton College e tinha como requisito, segundo Lovász [22] , que nenhuma solução podia exceder uma página com 30 linhas de manuscrito e outra com diagramas.

Em 1877, J. J. Sylvester publicou um artigo onde consta o termo grafo como usado atualmente. E, influenciado por ele, em 1891, Julius Petersen escreve e publica um artigo com o título "A teoria dos grafos regulares"onde ele usa estrutura de grafos para resolver o problema dos fatores primitivos.

Na tentativa de provar a Conjectura das quatro cores, surgiu a Teoria dos Grafos, que somente em 1976, foi demostrada por Appel e Haken. Para isso foi necessário o uso de computadores devido ao número muito grande de casos, sendo necessário mais de 1000 horas em processamento e as ideias de Kempe.

Carneiro, em [5] diz que "todo mapa pode ser identificado com um grafo, onde os países são os vértices e uma fronteira entre dois países é representada por uma aresta ligando dois vértices. "

O mapa representado no diagrama a seguir pode ser identificado com grafo ao lado.

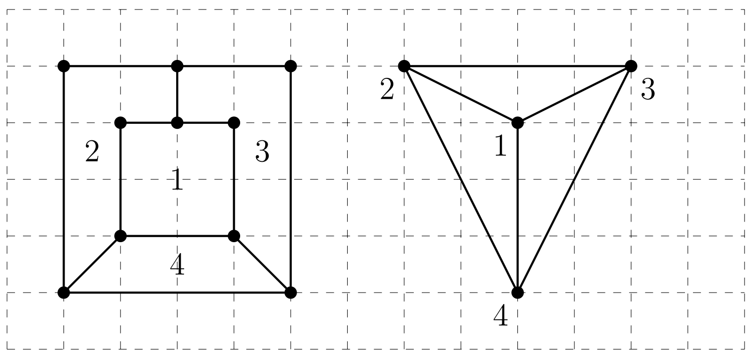



Figura 2.26: Mapa (à esquerda) e seu Grafo (à direita)

Para colorir o diagrama, com a restrição de que regiões adjacentes tenham cores distintas, são necessárias quatro cores. Isso também é observado na coloração dos vértices do grafo $G$, pois cada vértice do grafo $G$ representam uma região do diagrama, conforme ideias de Kempe.

**Definição 2.2.15.** *Um grafo é dito planar quando admite uma representação gráfica,ou seja, pode ser desenhado como um mapa, e nesta, as arestas se encontram nos vértices aos quais são incidentes.*

A figura da esquerda foi retirada do jogo digital Untangle e o da direita é a solução.

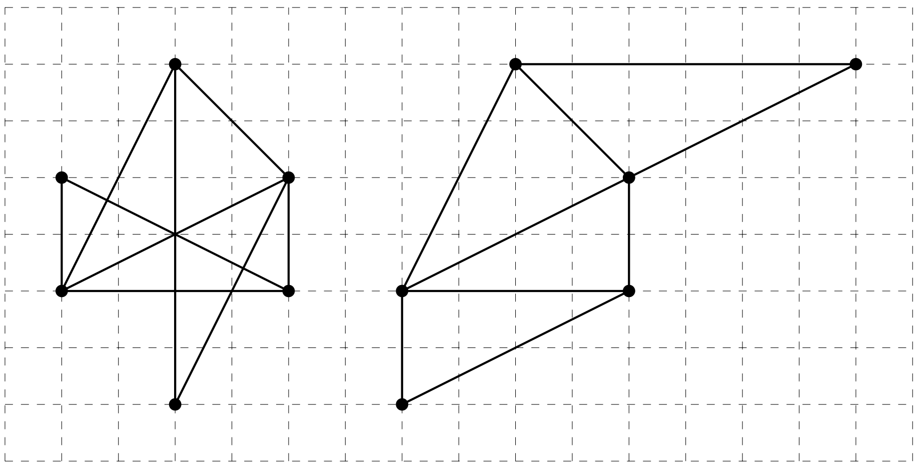


Figura 2.27: Grafo do Untangle - jogo digital

**Teorema 2.2.2.** *(Euler). Em um grafo planar conexo vale $f - m + n = 2$.*

A prova desse teorema se encontra em Lovász [22], página 199.

**Teorema 2.2.3.** *O grafo completo $k_5$ sobre cinco vértices não é um grafo planar.*

*Demonstração.* Suponha que $k_5$ é um grafo planar. Como $k_5$ tem cinco vértices, todos com grau 4, então $k_5$ tem 10 arestas. Por Euler $f - e + v = 2$, $e = 10$ e $v = 5$ então $f = 7$ regiões. Como cada região tem pelo menos três arestas sobre sua fronteira, então $\frac{7 \cdot 3}{2} = 10,5$ arestas, contradição. Portanto, $k_5$ não é planar.

$\square$

**Teorema 2.2.4.** *Um grafo planar sobre $n$ nós tem no máximo $3n - 6$ arestas.*

*Demonstração.* Suponha que o grafo tem $n$ vértices, $a$ arestas e $f$ faces. Pela fórmula de Euler, $n + f = a + 2$. Como cada face tem pelo menos três arestas então $3f \leq a$. No entanto, cada aresta é contada duas vezes. Daí $\frac{3f}{2} \leq a$. Assim, $f \leq \frac{2a}{3}$. Substituindo a segunda expressão na primeira, tem-se $a + 2 = f + n \leq \frac{2a}{3} + n$. Portanto, $a + 2 \leq \frac{2a}{3} + n$. Resolvendo a expressão, tem-se $a \leq 3n - 6$.

$\square$

**Teorema 2.2.5.** *(das 4 cores). Todo grafo planar pode ser colorido com 4 cores.*

Segundo Lovász [22], esse teorema ainda não tem prova matemática “pura”.

# Capítulo 3

# Atividades em Rede de Pontos

Essas atividades foram desenvolvidas com o propósito de verificar se as construções de objetos geométricos com restrições possibilitam e contribuem com o desenvolvimento do raciocínio no estudo de Geometria. Seu surgimento se deu a partir do desenvolvimento em sala de aula no ano anterior, 2015, de uma atividade com construções usando pontos representados em papel milimetrado. Foi pensada com o objetivo de desenvolver a criatividade na resolução de problemas geométricos envolvendo rede de pontos. Todo processo foi desenvolvido em 4 etapas: **apresentação**, momento em que foi levado ao conhecimento dos estudantes sobre as atividades que seriam desenvolvidas nos meses de fevereiro e março; **diagnóstico**, quando foi realizada uma atividade em uma aula de 50 minutos tendo como objetivo a verificação do nível de conhecimentos prévios dos estudantes quanto aos conceitos básicos de Geometria no Plano e tomada de decisão quanto a necessidade de revisão dos objetos em questão; **revisão**, momento em que os conteúdos foram retomados e **aplicação**, onde as atividades em rede de pontos foram resolvidos pelos estudantes durante uma semana de aula (três aulas de 50 minutos cada).

Nas seções a seguir, são tratados os resultados da atividade diagnóstica e os problemas aplicados. Sendo que, para nessa parte foram selecionadas as produções dos estudantes que participaram integralmente de todas as etapas do processo.

## 3.1 Atividade de Verificação de Conhecimento

Para esta atividade foi fornecido uma lista com polígonos representados em uma rede com quadrados de lado 1 cm como unidade de medida, o que descartou o uso de régua ou qualquer outro instrumento usado para medir, onde eles utilizaram cores para identificação dos elementos e da rede para cálculo de área e perímetro dos polígonos em questão. Os estudantes foram orientados a utilizar seus conhecimentos sobre o tema para responder as questões propostas, incluindo o uso de fórmulas.

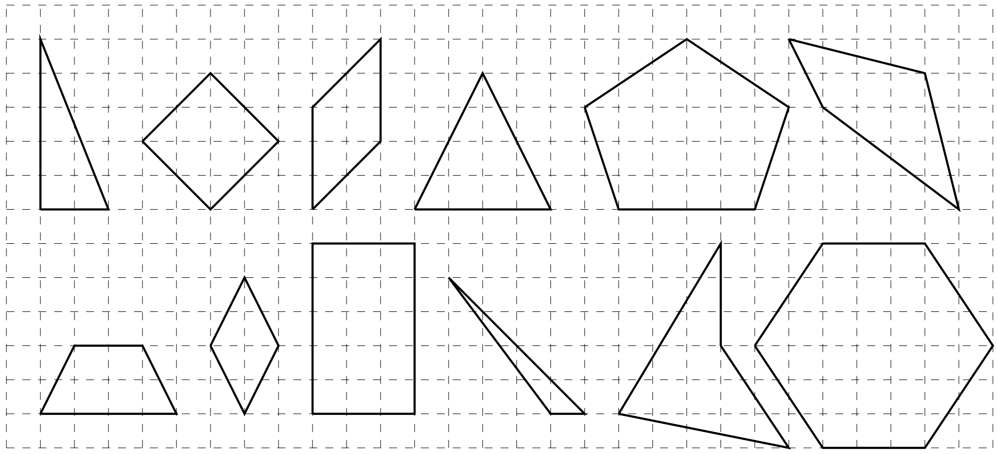


Figura 3.1: Rede para a Atividade de Verificação de Conhecimento

A análise dessa atividade revelou que os estudantes em questão não identificam ângulos, diagonais, paralelogramo, segmentos paralelos e perpendiculares entre outros. Os resultados estão representados na tabela a seguir.

| Reconhece | SIM | NÃO |
|---|---|---|
| vértices | 13 | 30 |
| segmentos | 12 | 31 |
| segmentos paralelos | 0 | 43 |
| segmentos perpendiculares | 0 | 43 |
| triângulo retângulo | 23 | 20 |
| triângulo isósceles | 40 | 3 |
| triângulo obtusângulo | 9 | 34 |
| quadrado com lados oblíquos | 17 | 26 |
| paralelogramo (de ponta) | 0 | 43 |
| pentágono | 35 | 8 |
| quadrilátero | 8 | 35 |
| trapézio isósceles | 22 | 21 |
| losango não quadrado | 18 | 25 |
| retângulo | 35 | 8 |
| hexágono | 34 | 9 |
| diagonais | 1 | 42 |
| ângulos | 1 | 42 |

Tabela 3.1: Resultados da Atividade de Verificação de Conhecimento - reconhecimento de objetos

Com relação ao cálculo de perímetro e de área dos polígonos fornecidos em rede, nenhum dos estudantes calculou perímetros e poucos calcularam área de alguns dos polígonos corretamente. Segue resultado na tabela abaixo.

| Calcula a área de | SIM | NÃO |
|---|---|---|
| triângulo retângulo | 1 | 42 |
| triângulo isósceles | 0 | 43 |
| triângulo obtusângulo | 0 | 43 |
| quadrado com lados oblíquos | 1 | 42 |
| paralelogramo de ponta | 1 | 42 |
| pentágono | 1 | 42 |
| quadrilátero | 0 | 43 |
| trapézio isósceles | 1 | 42 |
| losango não quadrado | 1 | 42 |
| retângulo | 4 | 39 |
| hexágono | 0 | 43 |

Tabela 3.2: Resultados da Atividade de Verificação de Conhecimento - área e perímetro

Após a aplicação e correção da Atividade de Verificação de Conhecimento foi necessário fazer uma revisão dos conceitos. Nessa etapa foram abordados os conceitos geométricos básicos com o propósito de auxiliar o desenvolvimento da etapa seguinte. Essa revisão foi iniciada com alguns questionamentos sobre as dificuldades que os estudantes tiveram ao resolver os problemas da atividade realizada na etapa anterior, se eles tinham consciência delas e por onde deveria ser iniciada a revisão. Esta etapa foi trabalhada em quatro aulas de 50 minutos cada.

Na primeira aula, a partir de um conjunto de ponto foi sendo construída as ideias de retas, de semirretas, de segmentos e a possibilidade de construção de objetos geométricos. Nesse momento foram feitos alguns questionamentos como, por exemplo: Dado um ponto, quantas retas passa por este ponto? Dado dois pontos distintos, quantas retas passa por eles? Dados três pontos distintos, podem ser formados quais objeto geométrico? Dados quatro pontos distintos, não havendo três deles em uma mesma reta, quais objetos geométricos podem ser formados?

Na aula seguinte, foram trabalhados, no plano, as posições relativas entre duas retas e ângulos. Após definição de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares os estudantes foram levados a identificar na sala de aula segmentos paralelos e perpendiculares nas portas, quadros, azulejos e paredes. Usando essas ideias e semirretas trabalhadas na aula anterior foram iniciados os estudos sobre ângulos e sua classificação, como por exemplo: as retas formadas pelo encontro das paredes A e B, B e C da sala de aula formam duas semirretas de mesma origem e a abertura formada por essas duas semirretas é um ângulo de medida $90^0$.

Na terceira aula, foi discutido sobre os polígonos, sua classificação, elementos, propriedades. Essa aula foi iniciada com os vários formatos de triângulos, sendo observado que um triângulo será sempre triângulo não importando sua posição ou comprimento de seus lados. A seguir foram identificados seus elementos mais básicos, e feita a classificação quanto à medida dos lados e quanto à medidas dos ângulos. Depois foi a vez dos quadriláteros côncavos e convexos e a retomada de segmentos paralelos e perpendiculares no estudo de definições e propriedades dos quadriláteros. Foram definidos paralelogramos, retângulos, quadrados, trapézios e losangos sendo suas características comparadas e listadas as suas diferenças. Nesse momento também foram revisados conceitos de congruência e semelhança de polígonos.

Nessa última aula, foram revistos as ideias de área e de perímetro de polígonos. Sendo iniciada com o cálculo da área de um retângulo a partir da medida da sua superfície por comparação com a área de quadrado de lado 1, chegando na dedução da fórmula de retângulo. A partir daí e da propriedade de área (se uma figura for dividida em figuras disjuntas, a área dessa figura será a soma das áreas das figuras disjuntas) foram deduzidas as fórmulas para o cálculo de área dos outros polígonos, como: do triângulo, dividindo o retângulo em dois triângulos congruentes; do trapézio isósceles, dividindo-o em dois triângulos; do losango, dividindo-o em dois triângulos congruentes. Depois dessa abordagem, com os polígonos representados em rede e seus vértices como pontos da rede, foi dada informações sobre o teorema de Pick e este foi utilizado no cálculo de área de polígonos diversos. Nesta aula, também foi revisado o teorema de Pitágoras e o cálculo de perímetros dos polígonos.

## 3.2 Atividade Criativa

Com base nas dificuldades encontradas pelos estudantes na atividade de verificação e após a revisão das dificuldades nos conteúdos mostradas na atividade de verificação de conhecimento foi aplicado os problemas de construção. Aqui será discutida e analisada desses problemas propostos. Sendo que as atividades que estão aqui em discussão são dos participantes que não faltaram a nenhum momento do processo e dos mesmos que fizeram a etapa anterior, discutidos na Seção 3.1.

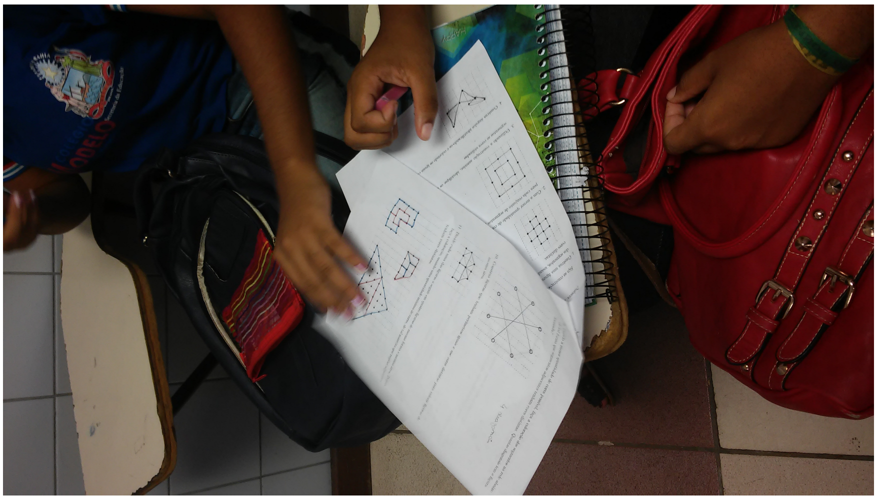


Figura 3.2: Estudantes resolvendo os problemas propostos

A seguir são apresentadas essas malhas e a evolução de cada problema.

**Problema 3.2.1.** *Sem tirar o lápis do papel*

*Construa uma figura sem tirar o lápis do papel e sem repetir linha. Depois faça a coloração dos segmentos, usando uma quantidade mínima de cores, tal que segmentos adjacentes tenham cores distintas.*

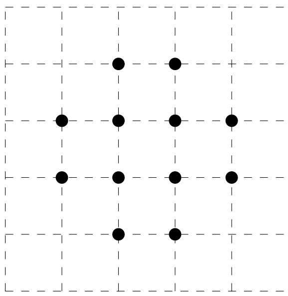


Figura 3.3: Rede para o problema Sem Tirar o Lápis do Papel

Para esse problema existem muitas soluções e cada dupla deverá encontrar a sua. Além disso é uma atividade diferente da que eles estão acostumados a lidar. Sendo assim, não permite que os jovens em questão tentem reproduzir alguma solução vista em aula. A proposta desse problema é levar o estudante a desenhar grafo utilizando os pontos fornecidos na rede e utilizar estratégias para encontrar uma coloração mínima para as arestas do grafo que a depender do traçado feito pelo estudante haverá uma variação na quantidade mínima de cores a ser utilizada pois, conforme figuras abaixo produzida pelos jovens, de um determinado vértice poderá partir duas, três ou quatro arestas e as mesmas, pela Definição 2.2.10, são adjacentes e o grau desses vértices, de acordo com a Definição 2.2.9, são respectivamente 2, 3 ou 4. Assim, como as arestas adjacentes não podem ter mesma cor são necessários 2 cores para vértice de grau 2, 3 cores para vértice de grau 3 ou 4 cores para vértice de grau 4.

No traçado da figura, os estudantes tiveram um bom desempenho pois todos fizeram o grafo e poucos realizaram fora do solicitado. Houveram 16 construções diferentes. Na identificação dos segmentos adjacentes através de cores foi possível perceber que alguns não identificam segmentos adjacentes e nesse grupo tem alguns que não conhecem segmentos. E, na coloração de arestas que deveriam usar a menor quantidade de cores possível para colorir os segmentos da figura formada parece que a maioria não percebeu ou não entendeu. O resultado da análise da produção dos estudantes está registrado gráfico a seguir.

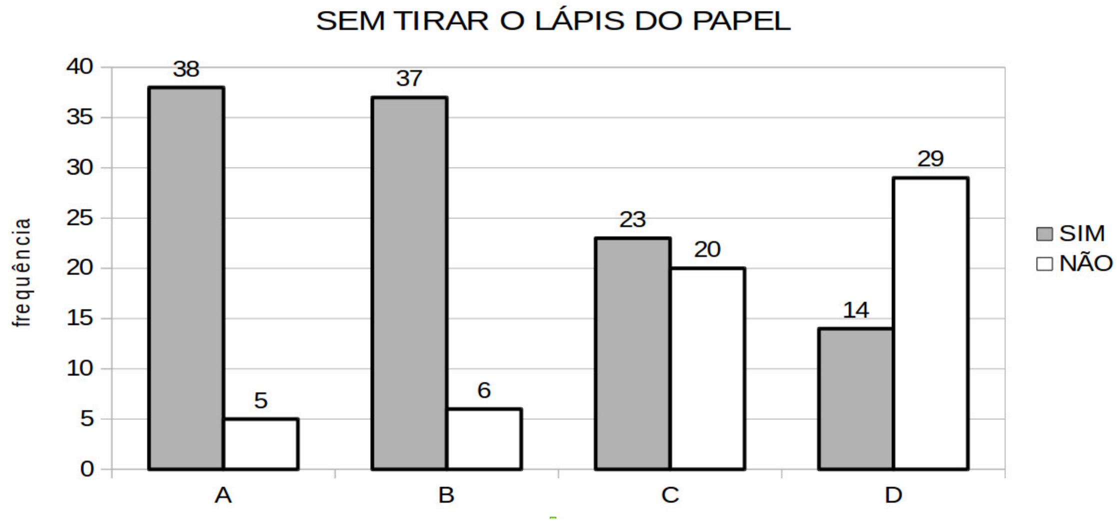



Figura 3.4: Resultados do problema Sem Tirar o Lápis do Papel

A - Construiu a figura conforme solicitação.

B - Identificou segmentos

C - Identificou segmentos adjacentes

D - Utilizou coloração mínima

**Problema 3.2.2.** *Segmentos Paralelos*

*Com a menor quantidade de cores possível construa segmentos paralelos usando a mesma cor para cada conjunto de segmentos paralelos.*

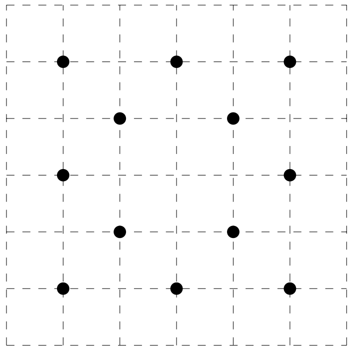


Figura 3.5: Rede para o problema Segmentos Paralelos

Com este problema tem-se a pretensão de fortalecer a definição de retas paralelas, presente na Seção 1.1 , levando o estudante a perceber a independência dos segmentos paralelos em relação a posição em que se encontram e ao comprimento dos mesmos. Para isso foi utilizado coloração de arestas na identificação dos segmentos paralelos. Aqui, os estudantes são levados a analisar a disposição de pontos fornecidos na rede, traçar segmentos usando a mesma cor para todos que são paralelos ao segmento traçado. Nesse processo são necessários 4 cores para completar a tarefa.

Os estudantes tiveram um bom desempenho em perceber quadrados na disposição dos pontos em rede fornecida, desde que seus lados não fossem oblíquos. Nesse caso, somente aproximadamente 20,9 % o fizeram. No entanto, muitos ainda não tem noções de paralelismo. Segue, no gráfico abaixo, o resultado da análise das produções dos estudantes.

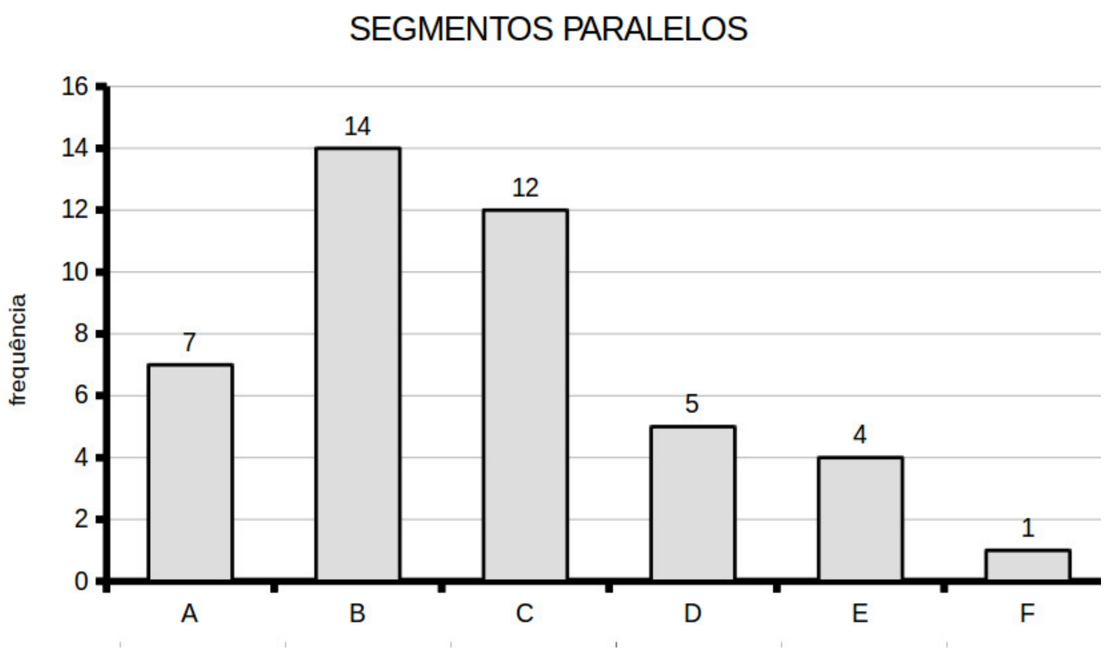



Figura 3.6: Resultados do problema Segmentos Paralelos

A - Não soube.

B - Não identificou segmentos paralelos.

C - Identificou segmentos paralelos de mesmo comprimento.

D - Identificou segmentos paralelos não oblíquos.

E - Identificou segmentos paralelos do quadrado de maior área.

F - Identificou segmentos paralelos oblíquos.

**Problema 3.2.3.** *Segmentos Perpendiculares*

*Utilizando a construção anterior, identifique os segmentos perpendiculares associando esses segmentos as cores utilizadas.*

Este problema é um pouco mais abstrato. Além de depender do anterior, Problema 3.2.2, eles precisam saber a definição de retas perpendiculares e associar as cores para informar o que é pedido. Muitos tiveram dificuldades para resolver esse problemas. Pouquíssimos conseguiram fazer a associação corretamente, em torno de 11,6% das produções analisadas. Isso indica que a maioria dos participantes não tem noções de retas perpendiculares.

Segue, no gráfico abaixo, o resultado da análise das produções dos estudantes.

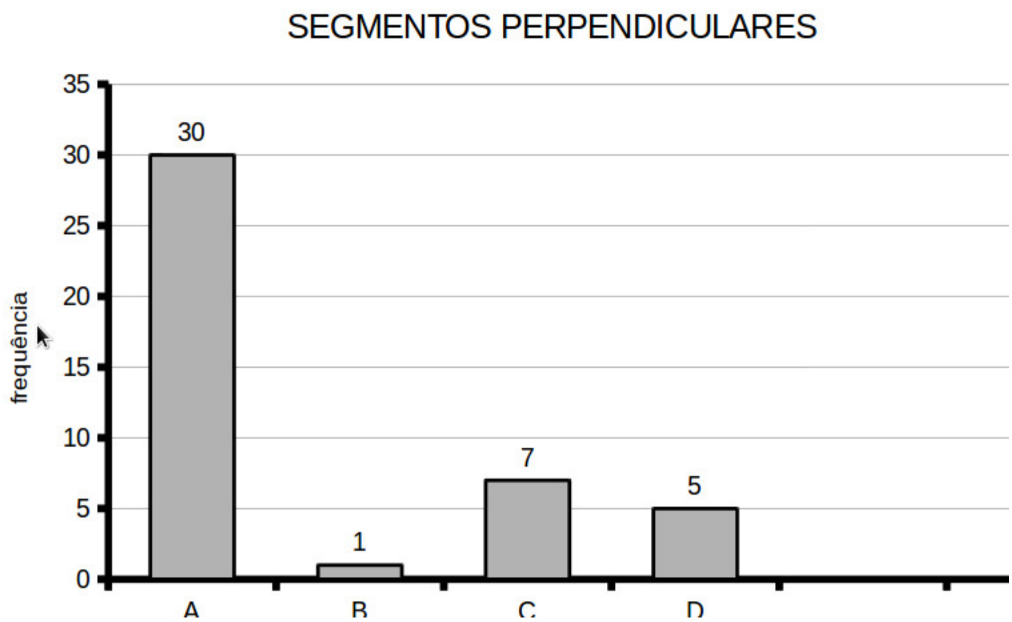



Figura 3.7: Resultados do problema Segmentos Perpendiculares

A - Não fez.

B - Afirmou que não existe segmentos perpendiculares.

C - Resposta sem sentido.

D - Identificou corretamente segmentos perpendiculares.

**Problema 3.2.4.** *Construindo Ângulos*

*Construa ângulos identificando-os e colorindo os iguais com a mesma cor.*

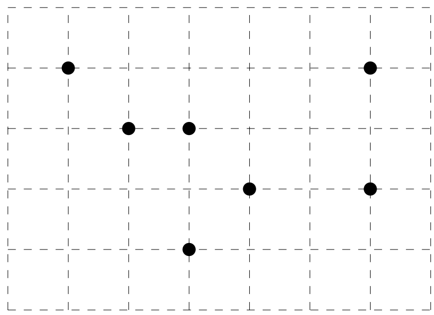


Figura 3.8: Rede para o problema Construindo Ângulos

A proposta desse problema é a utilização dos pontos fornecidos em rede na construção de ângulos, de acordo com a Definição 1.1.2, e o uso de cores para classificar os mesmos em reto, agudo e obtuso. A rede de pontos também pode ser usada para identificação da medida de alguns ângulos, sem necessidade de muita conta.

No enunciado do problema, a palavra **iguais** está sendo usado para indicar ângulos de mesma classificação o que não impede o estudante de informar através das cores os ângulos que têm mesma medida. Da análise das produções foram obtidos os resultados representados no gráfico abaixo.

A - Identificou ângulos.

B - Identificou segmentos como ângulos.

C - Identificou um ponto como ângulos.

D - Não respondeu.

E - Construiu figuras aleatórias.

F - Identificou ângulo reto.

G - Identificou ângulo agudo.

H - Identificou ângulo obtuso.

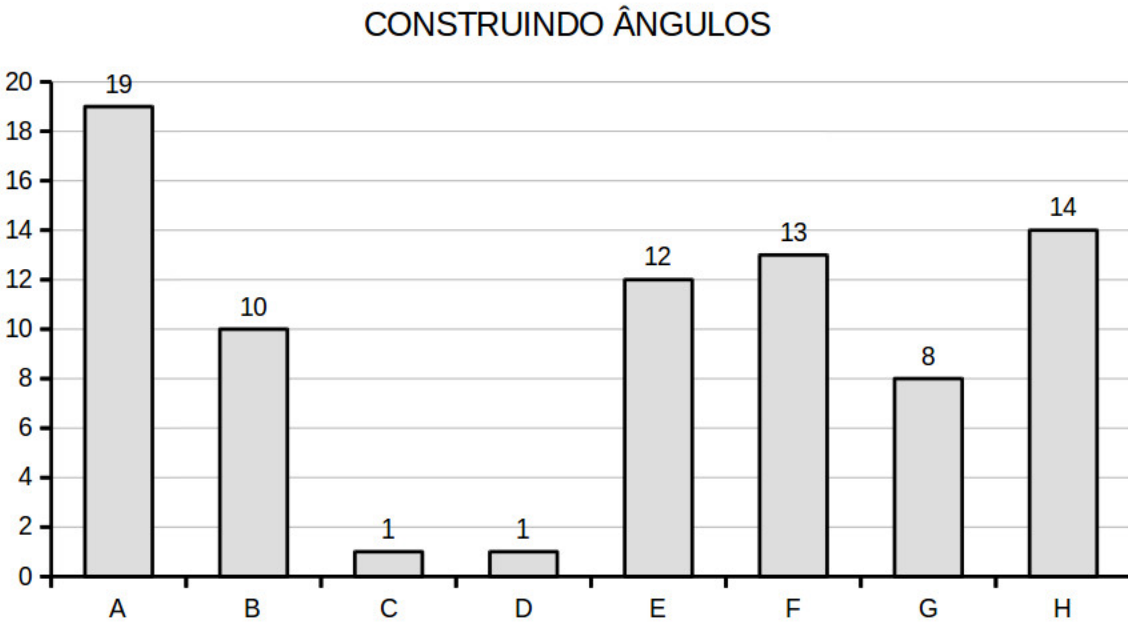



Figura 3.9: Resultados do problema Construindo Ângulos

**Problema 3.2.5.** *Triângulos Obtusângulos*

*Faça coloração dos pontos, usando uma coloração mínima, de forma que pontos consecutivos tenham cores distintas. Construa triângulos que tenham um ângulo obtuso e vértices consecutivos com cores distintas. Depois faça a coloração dos triângulos construídos, usando uma quantidade mínima de cores, de forma que regiões adjacentes tenham cores distintas.*

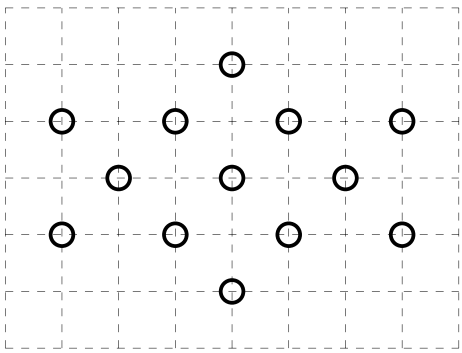


Figura 3.10: Rede para o problema Triângulos Obtusângulos

Nesta atividade, pontos consecutivos são os vértices adjacentes de um grafo. Pela Definição 2.2.8, vértices adjacentes estão ligados por uma aresta. No entanto, foi fornecida uma rede com 13 pontos sem segmentos (arestas) unindo os mesmo com o objetivo de construir triângulos obtusângulos cujos vértices adjacentes tenham cores distintas. Assim, os estudantes precisam descobrir uma forma de colorir os pontos dados usando a menor quantidade de cores possível de forma que consiga construir triângulos que tenham ângulos obtusos. Como descobrir a quantidade mínima de cores? Considerando que os pontos são os pombos e que as cores são as casas de pombos, usando a Definição 2.1.2 , $nk + 1 = 13$. Daí, pode-se ter 2, 3, 4 ou 6 cores. Como cada vértice de um triângulo é adjacente aos outros dois, então duas cores não satisfaz o problema. Assim, a coloração mínima é três. Então, pelo menos cinco pontos têm a mesma cor. A seguir, uma possível solução para o problema.

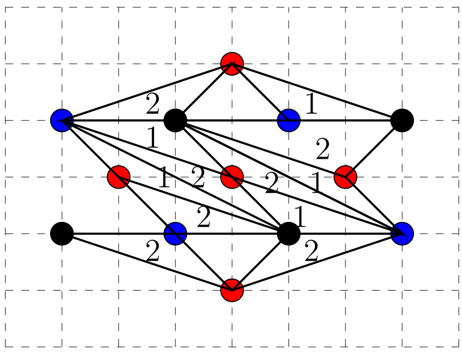



Figura 3.11: Uma solução para o problema Triângulos Obtusângulos

As informações registradas no gráfico a seguir são oriundas da análise das produções dos estudantes.

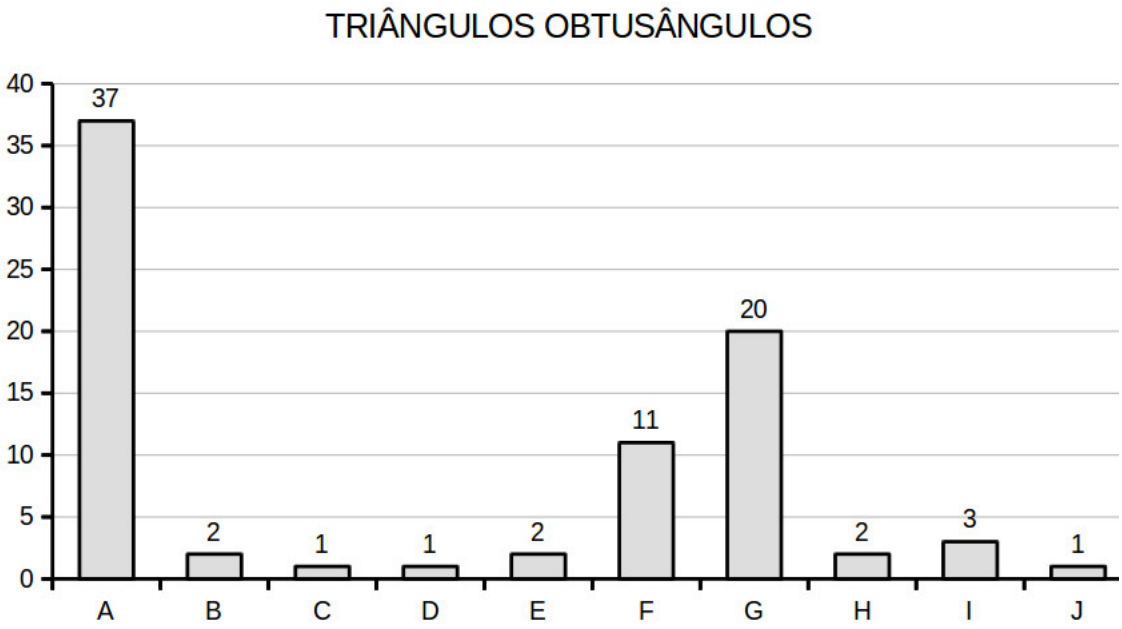



Figura 3.12: Resultados do problema Triângulos Obtusângulos

A - Construiu triângulos.
B - Não fez.
C - Construiu ângulos.
D - Construiu outras figuras.
E - Construiu várias figuras.
F - Construiu triângulos obtusângulos.
G - Coloriu vértices.
H - Usou coloração mínima.
I - Coloriu com 4 cores
J - Coloriu regiões

**Problema 3.2.6.** *Maior Polígono*

*Trace segmentos usando a menor quantidade possível de cores de maneira que segmentos adjacentes tenham cores distintas formando o maior polígono possível.*

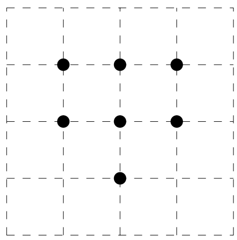
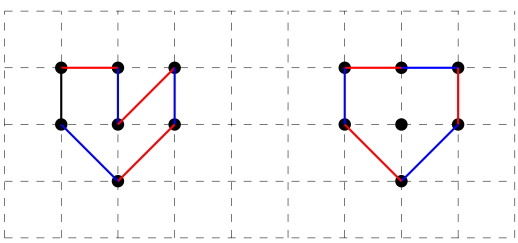


Figura 3.13: Rede para o problema Maior Polígono

Este problema tem como objetivo utilizar os pontos fornecidos em rede para construir o polígono com maior perímetro ou maior área ou maior número de lados possível, com segmentos adjacentes de cores distintas usando coloração de arestas.

Usando a Definição 1.1.3, os pontos podem ser ligados dois a dois formando o polígono de maior número de lados, neste caso um heptágono. Para encontrar o polígono de maior perímetro, os estudantes podem usar o Teorema 1.1.2 e com este calcular a medida dos segmentos não naturais. E, se desejarem construir o polígono de maior área, podem usar o Teorema 1.3.1 para verificar a medida de sua área ou ainda contar os quadriláteros e os triângulos elementares. Assim, existem duas possibilidades de resolução desse problema, conforme figura a seguir.



A figura da esquerda é a de maior perímetro e maior número de lados, a da direita, é a de área maior

Figura 3.14: Solução do problema Maior Polígono

Com relação a coloração das arestas, essas dependem do polígono que for construído. Neste caso, poderá ter duas, se houver um número par de arestas ou três cores, se a quantidade de arestas for ímpar.

Os resultados dos estudantes estão representados no gráfico abaixo.

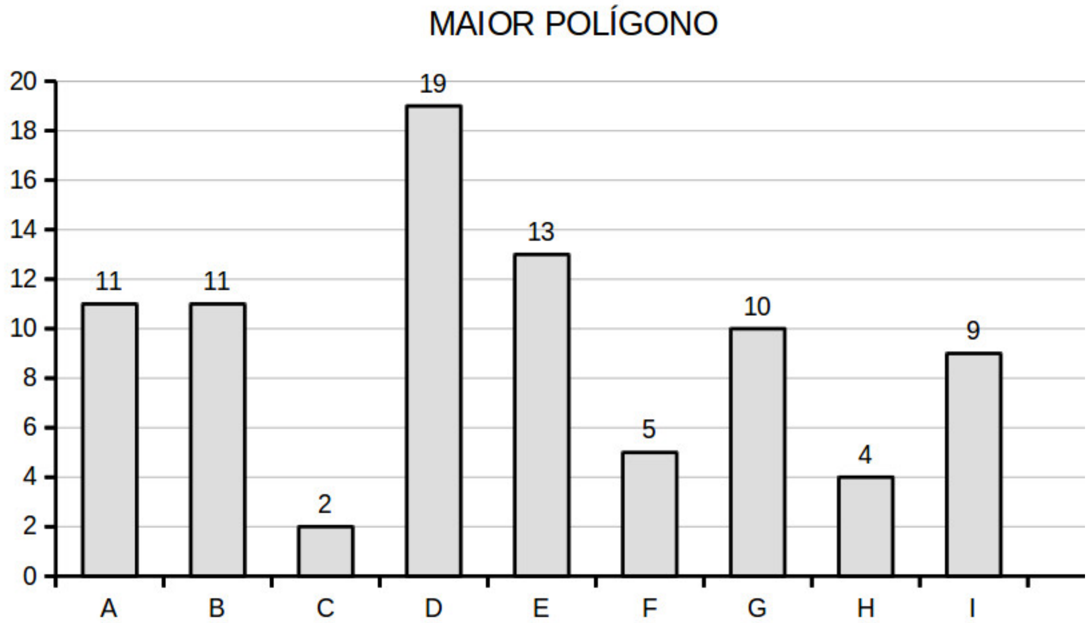



Figura 3.15: Resultados do problema Maior Polígono

A - Polígono de maior área
B - Polígono de 6 lados
C - Não fez
D - Construiu várias figuras
E - Coloriu arestas
F - Não identifica segmentos
G - Usou diversas cores
H - Usou uma única cor
I - Não coloriu

**Problema 3.2.7.** *Procurando Quadrados*

*Usando a menor quantidade possível de cores, faça a coloração dos pontos representados na rede abaixo de maneira que pontos consecutivos tenham cores distintas. Depois construa quadrados cujos vértices consecutivos tenham cores distintas.*

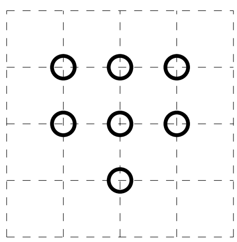


Figura 3.16: Rede para o problema Procurando Quadrados

Esse problema é uma atividade de construção onde o estudante precisa ter conhecimento da forma geométrica do quadrado, identificando o mesmo independente da posição que ele apareça. O propósito desse problema é a identificação de quadrados que podem ser construídos utilizando os pontos representados na rede não esquecendo da restrição que seus vértices adjacentes tenham cores diferentes.

Para encontrar a coloração de vértices, suponha que os pontos fornecidos são pombos, $k$, e que as cores, $n$, as casas de pombos, pela Proposição 2.1.2 , $nk+1 = 7 \Rightarrow nk = 6$. Daí, os pontos fornecidos podem ter duas ou três cores. Se forem usadas duas cores, pela restrição do problema e a disposição dos pontos fornecidos, ficará um quadrado que não poderá ser construído, pois ao menos um dos quadrados ficará com três vértices da mesma cor. Portanto, a coloração mínima utilizada será de três cores, conforme figura a seguir.

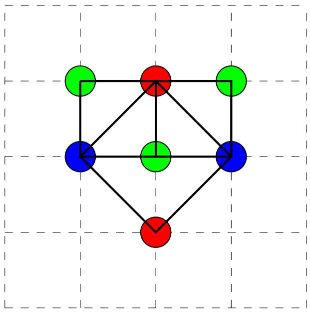


Figura 3.17: Uma solução para o problema Procurando Quadrados

O gráfico abaixo traz a representação da análise das respostas dos estudantes ao problema.

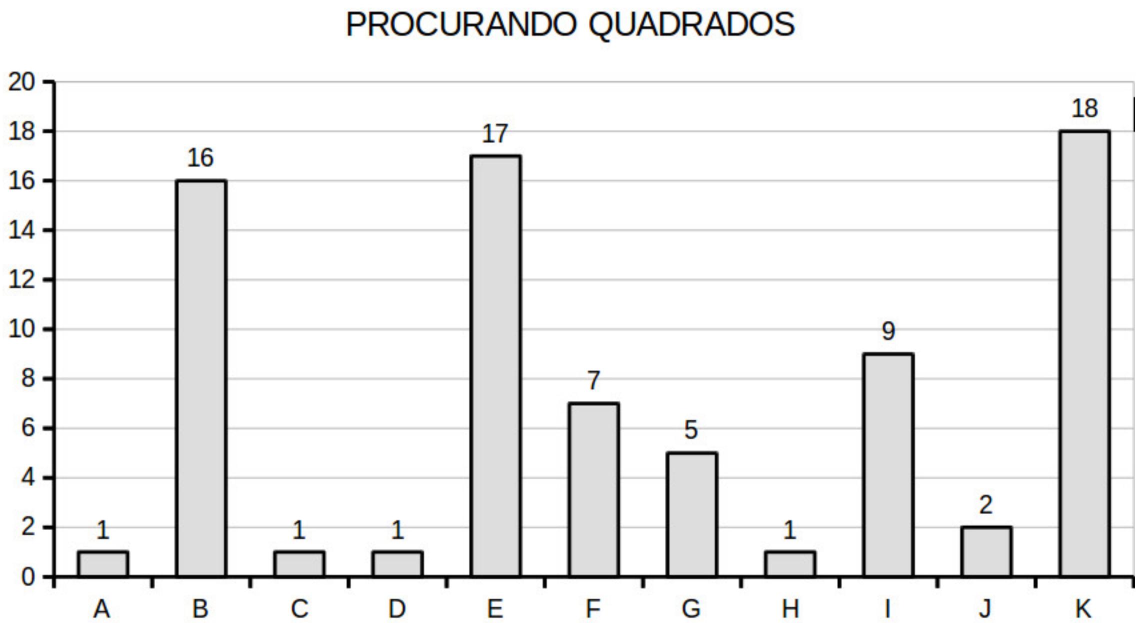



Figura 3.18: Resultados da análise das soluções do problema Procurando Quadrados

A - Construiu um quadrado.
B - Construiu dois quadrado.
C - Construiu quadrado com lado oblíquo
D - Coloriu vértices, sem construção.
E - Construiu outras figuras.
F - Não fez
G - Coloração mínima.
H - Monocromático.
I - Sem coloração.
J - Fez coloração aleatória
K - Coloração diversa

**Problema 3.2.8.** *Construindo Trapézios*

*Usando a menor quantidade de cores possível, faça a coloração dos pontos de tal maneira que pontos consecutivos tenham cores distintas. Construa trapézios que tenham vértices consecutivos com cores distintas*

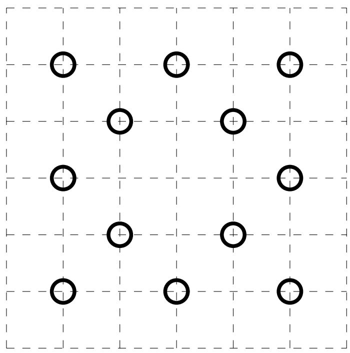


Figura 3.19: Rede para o problema Construindo Trapézios

Esse problema é propício para o desenvolvimento da criatividade e na identificação de padrões. Aqui, o estudante pode exercer sua autonomia na escolha da coloração dos vértices que irá usar para resolver o problema. Há muitos caminhos para se chegar a solução. Assim, essa construção foi pensada com o objetivo de levar o estudante na utilização da disposição de pontos fornecida na rede para identificar quais deles podem ser vértices de trapézios.

A quantidade mínima de cores na coloração dos vértices a ser usada depende da construção, da percepção do estudante quanto a forma a ser construída, sendo possível o uso mínimo de duas cores. Da análise das produções dos estudantes, tem-se que 69,8% aproximadamente desses jovens reconhecem a forma de trapézio e 2,3 % aproximadamente usou coloração mínima, conforme gráfico a seguir.

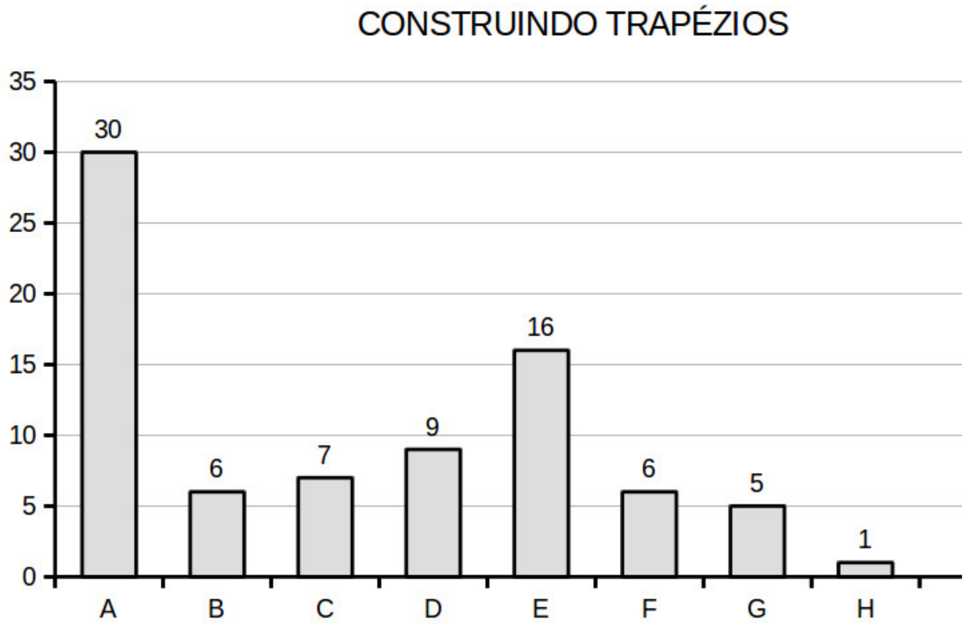



Figura 3.20: Resultados da análise das soluções do problema Construindo Trapézios

| | |
|---|---|
| A - Construiu trapézios | E - Coloriu vértices |
| B - Não fez | F - Coloriu arestas |
| C - Construiu outras figuras | G - Coloriu arestas e vértices |
| D - Não coloriu | H - Usou coloração mínima |

**Problema 3.2.9.** *Contando Diagonais*

*Usando a menor quantidade de cores possível, faça a coloração dos segmentos na rede abaixo de tal forma que segmentos adjacentes tenham cores distintas. Quantas diagonais tem a figura formada?*

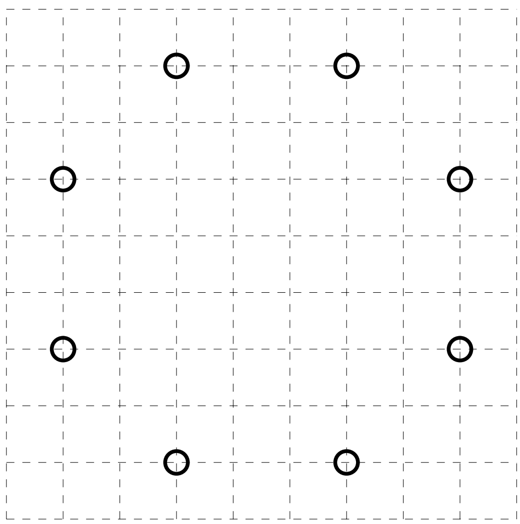


Figura 3.21: Rede do problema Contando Diagonais

Para resolver esse problema, o estudante precisa ter conhecimento de segmentos, da Definição 1.1.3, de polígonos, e do Teorema 1.1.1, que trata da fórmula de diagonais. Essa atividade divertida de coloração de arestas foi elaborada com o propósito de utilizar a disposição de pontos em rede para construir uma figura, polígono, com todas as suas diagonais usando coloração mínima, pois as arestas adjacentes têm cores distintas.

A contagem de segmentos e de diagonais foi discutida anteriormente nos Problemas 2.0.5, 1.1.10 e 2.2.2. Quanto a coloração de arestas, como de cada vértices partem 7 arestas são necessários, no mínimo, 7 cores para colorir as arestas de maneira que as adjacentes tenham cores distintas. O resultado dos estudantes na resolução desse problema está representado no gráfico a seguir.

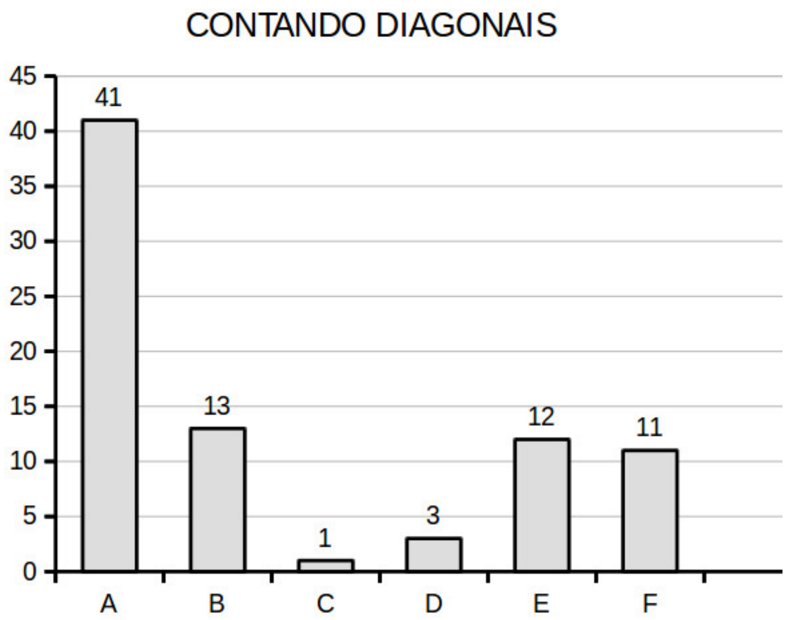



Figura 3.22: Gráfico da análise do problema Contando Diagonais

A - Construiu polígono
B - Identifica diagonais
C - Traçou todas as diagonais
D - Contou diagonais em dobro
E - Coloriu vértices
F - Coloriu arestas adjacentes

**Problema 3.2.10.** *Perímetro e Área*

*Construa figuras que tenham perímetros iguais e use cores distintas para colorir figuras de mesma área.*

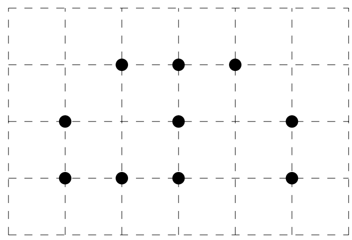


Figura 3.23: Rede do problema Perímetro e Área

Nessa atividade, os estudantes utilizam os pontos fornecidos em rede para construir figuras com mesmo perímetro e dentre estas identificam as que têm áreas de mesma medida através de coloração de regiões. Para isso, eles precisam saber diferenciar perímetro de área e encontrar um caminho para fazer os cálculos, não sendo necessário a utilização de fórmulas. No entanto, em caso de dúvidas, podem utilizar o Teorema 1.1.2 (Pitágoras) para o cálculo do comprimento de segmentos cujas medidas são irracionais e o Teorema 1.3.1 (Teorema de Pick) no cálculo de área das figuras construídas por se tratarem de polígonos simples, ver Definição 1.3.1.

No gráfico abaixo estão representados as respostas dos estudantes ao problema proposto.

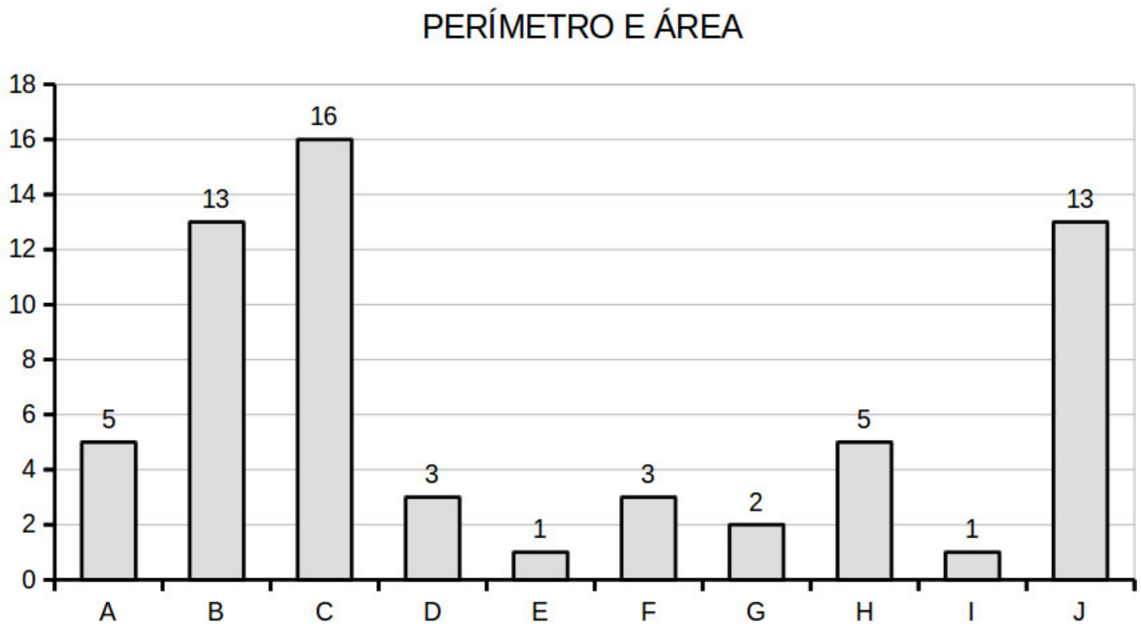



Figura 3.24: Gráfico da análise do problema Perímetro e Área

A - Não fez B - Inconclusivo C - Construiu figuras congruentes
D - Construiu figuras área iguais E - Construiu figuras perímetros iguais

F - Construiu figuras com perímetro e área de medida diferentes

G - Traçou linha poligonal H - Fez coloração de região

I - Fez coloração de vértices J - Fez coloração de arestas

**Problema 3.2.11.** *Figuras Congruentes*

*Divida cada uma das figuras a seguir em quatro figuras de mesma forma e mesma área. Depois faça a coloração, usando uma quantidade mínima de cores, de tal maneira que regiões adjacentes tenham cores distintas.*

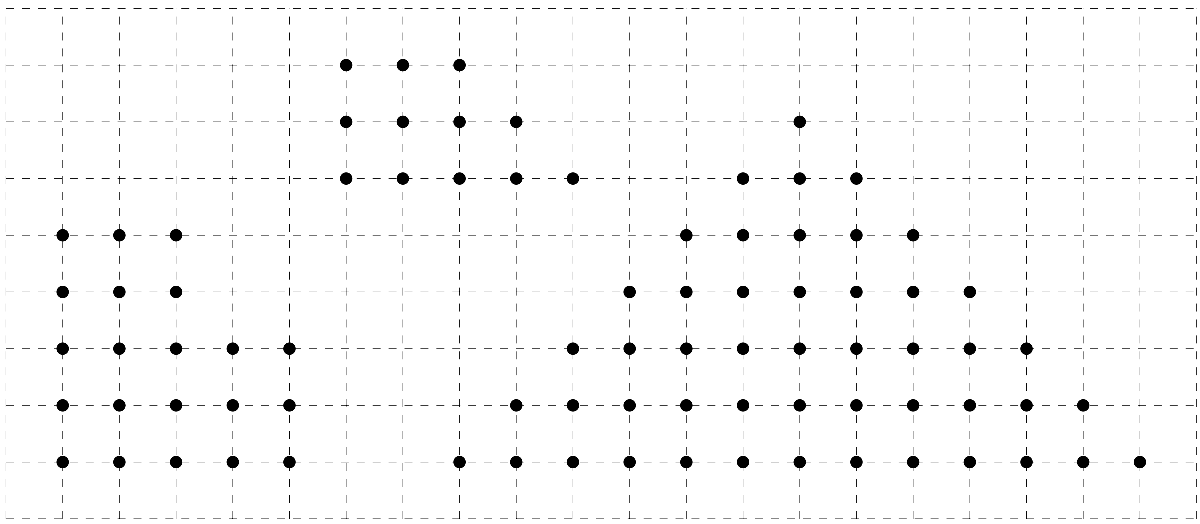


Figura 3.25: Rede do problema Figuras Congruentes

Esse problema é bem interessante pois, além de ser divertida, envolve estratégia e percepção de formas (padrões geométricos). Por traz da resolução do mesmo tem-se o conhecimento de congruência, Definição 1.1.4, de semelhança, Definição 1.1.5, área de polígonos, Seção 1.2, fórmula de Pick, Seção 1.3.

O resultado dos problemas resolvidos pelos estudantes, segue representado no gráfico a seguir.

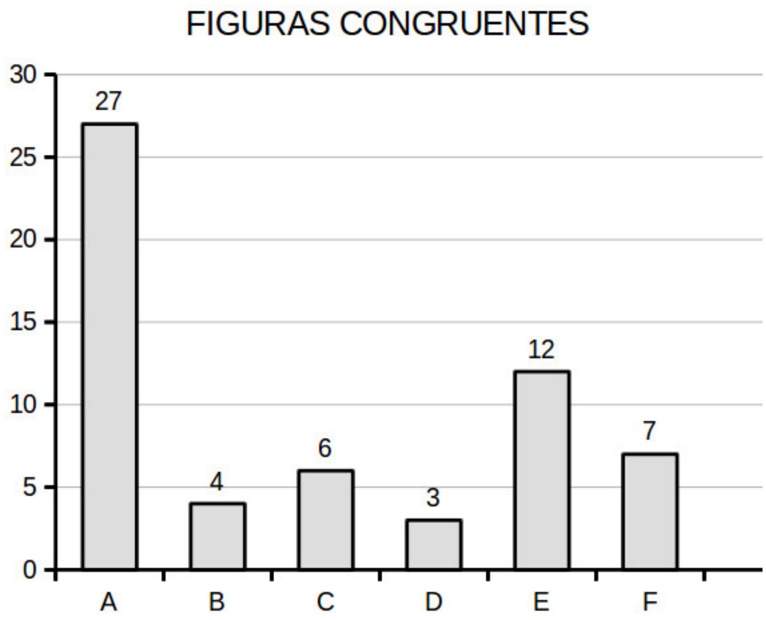



Figura 3.26: Gráfico da análise do problema Figuras Congruentes

A - Figuras quaisquer — B - Não fez
C - Particionou hexágono — D - Particionou trapézio
E - Particionou triângulo — F - Coloriu região

**Problema 3.2.12.** *Áreas iguais*

*Faça coloração dos pontos, usando a menor quantidade possível de cores, de forma que pontos consecutivos tenha cores distintas. Construa figuras que tenham área igual a 4 u.a. e vértices consecutivos com cores distintas.*

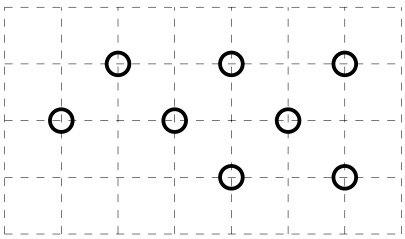


Figura 3.27: Rede do problema Áreas Iguais

Com os oito pontos fornecidos em rede e respeitando as restrições do problema, o estudante irá encontrar um meio de colorir os pontos sem prejudicar a construção das figuras. Para isso precisam ter noções de área, criatividade e perseverança para perceber como deve ser colorido os vértices e quais formas têm área na medida solicitada. Para encontrar a área desses polígonos, eles podem usar o Teorema 1.3.1 (Pick), contar os polígonos elementares, ver Definição 1.3.2 ou as fórmulas próprias de cada forma geométrica. Em relação a coloração dos vértices, o estudante pode utilizar duas ou três cores, pois essa coloração depende da construção feita pelo mesmo.

Devido ao grau de dificuldade desse problema ser um pouco maior que os demais problemas, 25,58% deixaram de tentar resolver o mesmo. Segue, no gráfico abaixo, resultado desse problema.

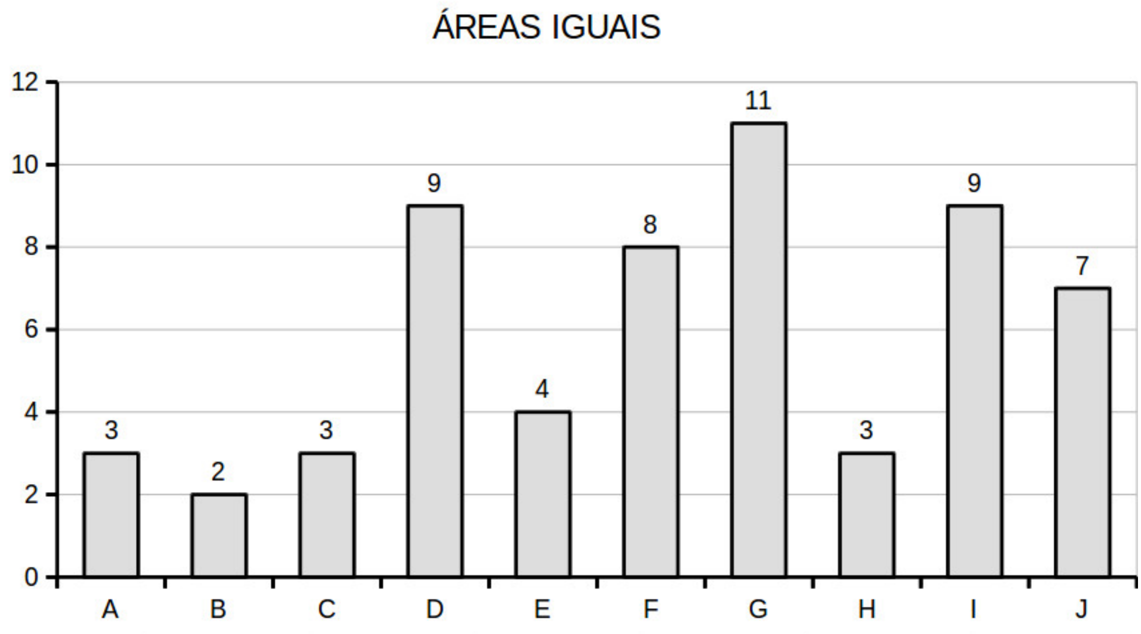



Figura 3.28: Gráfico análise do problema Áreas Iguais

A - Figuras distintas com área 4.
B - Uma figura com área 4.
C - Figuras distintas com área 2
D - Figuras distintas, áreas distintas
E - Uma figura
F - Triângulos área 1
G - Não fez
H - Coloriu vértice, sem construção
I - Fez coloração vértices - muitas cores
J - Fez coloração de vértices e arestas

**Problema 3.2.13.** *Formas Distintas, Mesma Área?*

*Usando a menor quantidade possível de cores, construa figuras distintas que tenha área de medida 2 u.a. e tenha segmentos adjacentes com cores distintas. Identifique cada uma dessas figuras geométricas.*

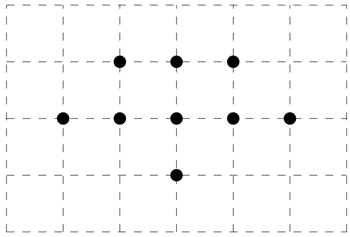


Figura 3.29: Rede do problema Formas Distintas, Mesma Área?

Para esse problema divertido é fornecido nove pontos dispostos em uma rede que exige do estudante a percepção de formas geométricas distintas que têm a mesma medida de área. Nessa rede de pontos é possível traçar triângulos e todos os quadriláteros discutidos na Seção 1.1. Para encontrar a área de cada polígono, o estudante pode contar os polígonos elementares, ver Definição 1.3.2, usar as fórmulas de área discutidas na Seção 1.2 ou o Teorema 1.3.1 (Pick). A coloração das arestas depende da percepção do estudante quanto ao padrão das formas geométricas e suas áreas.

Esse problema tem um grau de dificuldade maior que o Problema 3.2.12. Daí, 34,88% deixaram de tentar resolver o mesmo. No gráfico a seguir tem-se o resultado dos estudantes nesse problema.

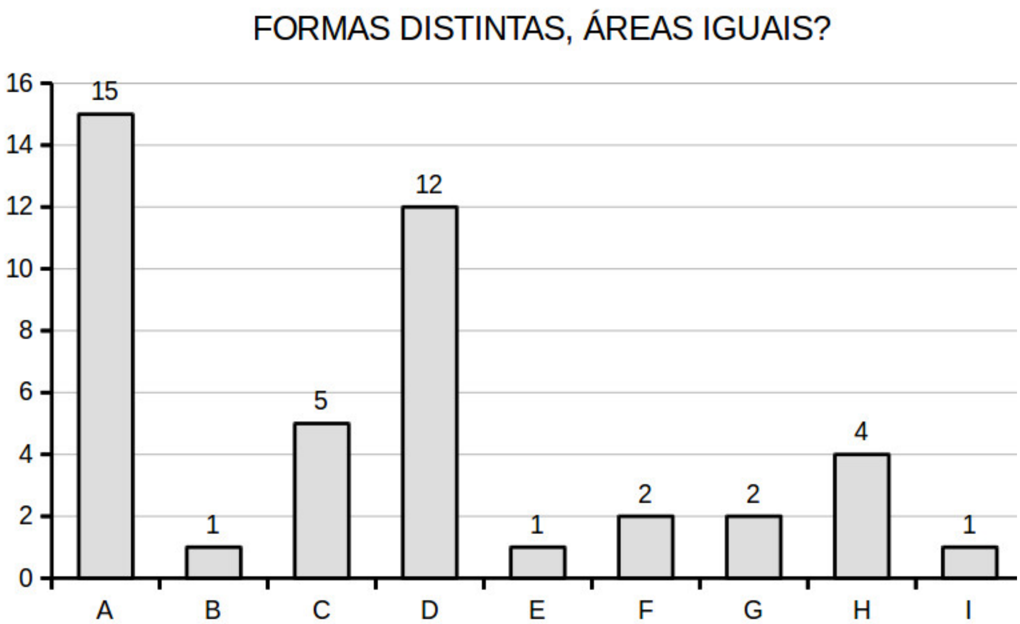



Figura 3.30: Gráfico da análise do problema Formas Distintas, Mesma Área?

A - Não fez.
B - Figuras congruentes, área 2
C - Figuras distintas, área 2
D - Figuras distintas, áreas distintas
E - Uma figura com área 2
F - Uma figura com área diferente de 2
G - Outras construções
H - Figuras distintas, mesma área
I - Fig. congruentes, área diferente de 2

**Problema 3.2.14.** *Construindo Quadrados*

*Usando a menor quantidade de cores possível, faça a coloração dos pontos de tal maneira que pontos consecutivos tenham cores distintas. Construa quadrados que tenham área igual a 2 u.a. e vértices consecutivos com cores distintas.*

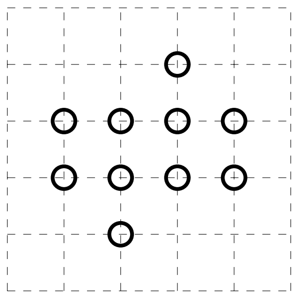


Figura 3.31: Rede do problema Construindo Quadrados

A rede de pontos desse problema consta de 10 pontos dispostos de tal maneira que os quadrados a serem construídos têm lados com medidas irracionais. Aqui é testado se o estudante sabe a Definição 1.1.9, de quadrado. Se os mesmos reconhecem essa forma independente da posição que a figura se encontre. Para encontra a área do quadrado eles podem usar o Corolário 1.2.1, pois todo quadrado é um losango, contar os triângulos elementares ou usar o Teorema 1.3.1 (Pick). Para colorir os vértices são necessários no mínimo três cores.

Esse problema tem um grau de dificuldade alto, 34,88% deixaram de tentar resolver o mesmo e aproximadamente 2,32 % construíram os quadrados com as medida das áreas conforme solicitado. Com relação a coloração de vértices, nenhum dos estudantes fizeram corretamente. A seguir, o resultado dos estudantes nesse problema.

A - Não fez.
B - Quadrado com área 2.
C - Quadrado com área 1.
D - Fez coloração sem construção
E - Construções diversas

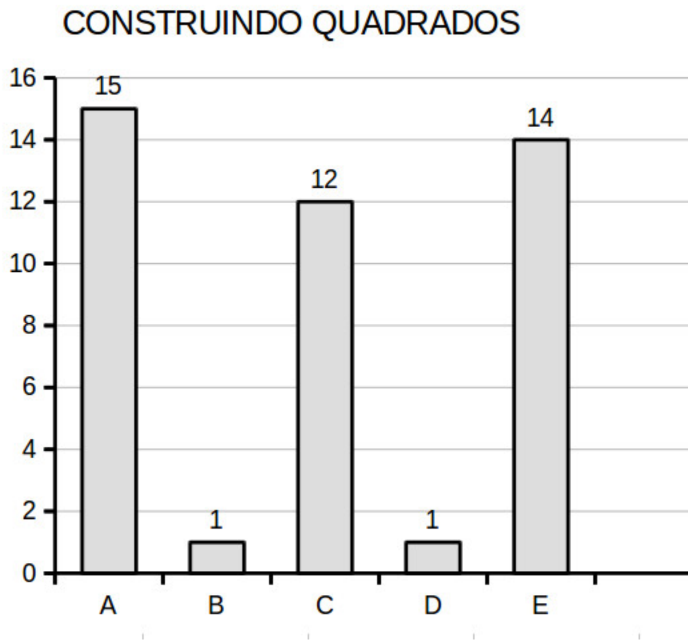



Figura 3.32: Gráfico da análise do problema Construindo Quadrados

**Problema 3.2.15.** *Triângulos Semelhantes*

*Construa triângulos semelhantes cuja razão entre as áreas seja igual a 2.Identifique essas figuras.*

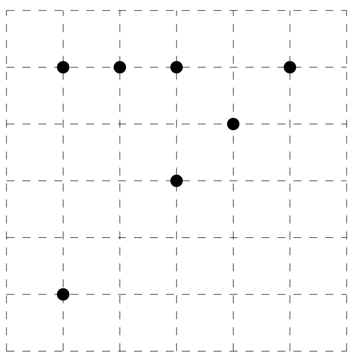


Figura 3.33: Rede do problema Triângulos Semelhantes

Esse problema é um dos mais complexos para os estudantes. Pois, requer dos mesmos conhecimento de semelhança de triângulos, cálculo de área e razão entre áreas. Aqui o estudante precisa ser capaz de visualizar na distribuição de pontos fornecidos na rede triângulos que têm mesma forma e lados correspondentes proporcionais.

Apesar do grau de dificuldade desse problema, somente 18,60% dos estudantes não tentar resolver o mesmo e 4,65 % deles encontraram triângulos semelhantes dentro da restrição do problema. O desempenho dos estudante nesse problema estão registrados no gráfico abaixo.

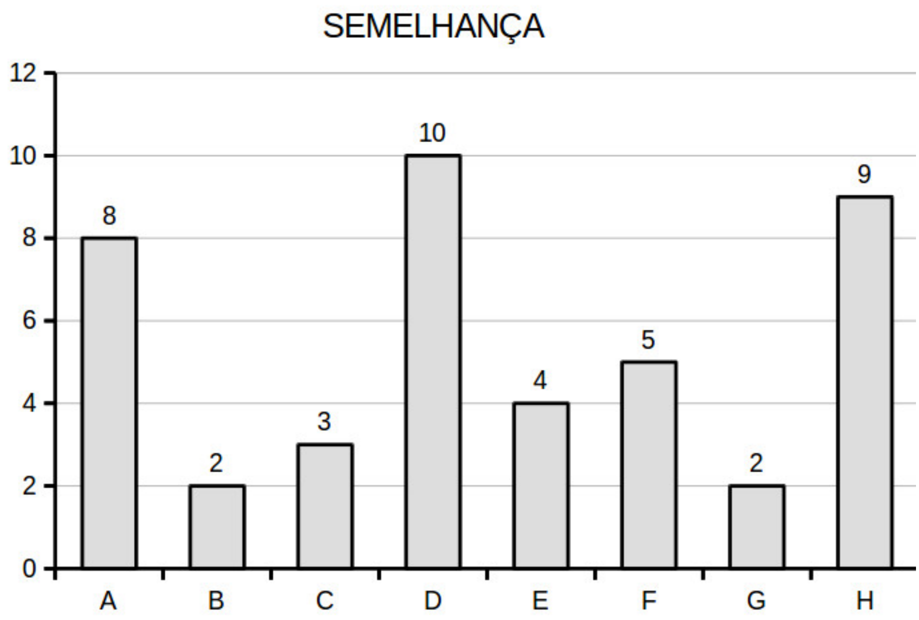



Figura 3.34: Gráfico da análise do problema Triângulos Semelhantes

A - Não fez.

B - Semelhantes com razão 2.

C - Semelhantes com razão 4.

D - Congruentes

E - Não semelhantes.

F - Um triângulo

G - Um ângulo

H - Indefinido

# Capítulo 4

# Considerações Finais

Os primeiros contatos dos estudantes com a Geometria não foram muito agradáveis. A resistência que eles mostraram ao lidar com esse tema foi grande. No método tradicional, como na atividade de verificação de conhecimento, mostraram-se tensos, sem muito interesse e tiveram bastante dificuldade na resolução das atividades propostas, os resultados não foram bons. Nesse primeiro momento eles receberam as formas construídas em rede para identificar nestas os elementos da Geometria básica. Foi uma atividade onde não precisavam de muito esforço para encontrar a medida de área das figuras, por exemplo. Conforme estudo apontado na Seção 3.1, a defasagem com relação a esse tópico da Matemática é elevado e como consequência aumenta o desinteresse, a sensação de desânimo e desespero. O estigma de que "nunca irá aprender Matemática"ou ainda que "Matemática é para gênios", nesse momento, impera e o sentimento de fracasso é gritante. Com esse sentimento aflorando, muitos não tiveram iniciativa ou persistência no embate aos problemas propostos.

No entanto, expressar o entendimento deles sobre o assunto utilizando lápis de cores, para os estudantes, foi novidade. Poucos deixaram de tentar resolver os problemas propostos, mesmo quando tinham dúvidas com relação ao conteúdo vinculado a eles, conforme Seção 3.2. Com exceção do Problema 3.2.3 que não vem acompanhado de rede de pontos, esse tem um nível de abstração mais elevado e 69,77 % dos estudantes deixaram esse problema sem resolver. A atividade criativa tem um grau maior de dificuldade pois, nessa atividade, os estudantes precisam reproduzir as formas solicitadas observando as restrições de cada problema que compõe a atividade, não apenas identificar as mesmas como na atividade de verificação de conhecimento vista na Seção 3.1. Aqui, na atividade criativa, os estudantes precisam conhecer a forma para poder visualizá-la na disposição de pontos fornecidos em rede. Identificar padrão é o forte dessa atividade, divertida, criativa, instigante. Aqui os jovens são levados a construir, unindo os pontos para encontrar uma forma dentro das solicitações.

O lápis de cor trouxe, de forma concreta, o lúdico para a atividade deixando os estudantes bem a vontade com os problemas propostos. Para alguns deles, segundo depoimento dos mesmos, trabalhar com cores foi importante pois, aliviou a tensão que eles sentem diante dos problemas matemáticos. Esse alívio tornou a atividade matemática mais lúdica e os estudantes com mais interesse em investigar os problemas ao mesmo tempo que tentavam encontrar uma solução para os mesmos. Alguns foram capazes de perceber a própria evolução na aprendizagem, segundo depoimento, e a necessidade de se dedicar mais ao estudo de alguns tópicos ao encontrar dificuldades devido a conceitos que ainda não detém. A dificuldade com relação aos conteúdos ainda é o maior obstáculo na questão do desempenho, apesar disso, os resultados foram um pouco melhores que na atividade de verificação de conhecimento.

A interação dos estudantes com a atividade foi bem significativa. A forma de abordar esse tema foi bem aceito por eles que se sentiram motivados a buscar por soluções para os problemas e compreensão dos mesmos, segundo declaração de alguns deles e observações realizadas durante a aplicação da mesma. Ao se interessar por ela, o estudante consegue desenvolver mais e procura buscar por mais informação sobre o tema estudado. A medida que se sentem mais a vontade com a Matemática, eles vão a procura de mais para entender melhor o tema.

Com relação a coloração, a dificuldade foi maior devido ao pouco ou nenhum contato com grafos e casa de pombos. Estes são essenciais para resolução de problema de coloração mínima e contagem. Pois, a primeira dessas ferramentas, grafos, permitem a relação entre vértices e arestas de configurações de objetos geométricos e a outra, Casas de Pombos, garante a existência dessas configurações com padrões que satisfazem a certas restrições facilitando a aprendizagem desses objetos enquanto favorece a resolução de problemas matemáticos. O interesse dos jovens em grafo ficou evidente na resolução do Problema 3.2.1, onde 88,37 % dos participantes encontraram uma solução para o mesmo, sendo que não havia nada parecido em que pudessem se basear e reproduzir. Na resolução desse problema, 32,56% dos envolvidos conseguiram usar o mínimo de cores necessárias para colorir o grafo construído por eles. Nesse problema houve 100 % de participação efetiva. Mesmo sem ter conhecimento desses temas, os estudantes tiveram iniciativa e tentaram, dentro da visão dos mesmos, cumprir as tarefas solicitadas. Esses temas podem ser inseridos no currículo escolar da educação básica, devido a sua importância e essência facilitadora e lúdica para uma abordagem mais eficiente no ensino de Geometria e outros tópicos da Matemática, além de suas aplicações em outras áreas do conhecimento.

# Referências Bibliográficas


[1] Gardner, Martin. Ah, descobrir! - Jogos e Diversões Matemáticos. Lisboa: Gradiva, 1978.

[2] Crowley, Mary L. O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico. In: Aprendendo e Ensinando Geometria, Mary Montgomery Lindquist e Albert P. Shulte. São Paulo: Atual, 1994, pp. 1-20

[3] Chambers, P., Timlin, R. Ensinando Matemática para Adolescentes. Porto Alegre: Penso, 2015 - 2ª edição, pp.216-220

[4] Fomin, D. Genkin, S. Itenberg, I. Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[5] Carneiro, V. C. Colorindo Mapas. Revista do Professor de Matemática nº 29. SBM,

[6] Wagner, E. Uma introdução às construções geométricas. www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf, acessado em 25/06/2016 às 11:43 h.

[7] Munsignatti, M. Combinatória: Números de soluções inteiras e não negativas de uma Equação. Revista do Professor de Matemática nº 73. SBM,

[8] Malagutti, P. Combinatória em Cores. Revista do Professor de Matemática nº 75. SBM,

[9] Lima, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. Revista do Professor de Matemática nº 12. SBM,

[10] Muniz Neto, A. C. Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória, vol. 4. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

[11] Contador, P. R. M. Matemática, uma breve História. São Paulo: Editora LF, 2014 - 5ª edição, vol. 1. pp. 204 - 205.

[12] Boaventura Netto, P. O.; Jurkiewicz, S. Grafos: Introdução e prática. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

[13] Barbosa, R. M. Geoplanos e Redes de Pontos: Conexões e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. V.4.

[14] Ferreira, V. C. S. De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a Matemática. www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=&aluno=veronica+craveiro, acessado em 10/01/2016 às 19:24 h.

[15] Muniz Neto, A. C. Tópicos de Matemática Elementar - Geometria Euclidiana Plana. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[16] Lucchesi, C. L., Simon, I., Simon, I., Simon J. e Kowaltowski, T. Aspectos Teóricos da Computação. Rio de Janeiro: IMPA, 1979

[17] Oliveira, K. I. M., Fernández, A. J. C. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[18] Santos, J. P. O., Mello, M. P., Murari, I. T. C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[19] Boyer, C. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

[20] Boaventura Netto, P.O. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1979.

[21] Aigner, M. e Ziegler, G. M. As provas estão n'O LIVRO, São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002.

[22] Lovász, L., Pelikán, J., e Vesztergombi, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro, 2013.

# Apêndice A

# Atividade de Verificação de conhecimento

Em cada uma das figuras abaixo:

1) Usando a menor quantidade possível de cores, faça a coloração dos segmentos de tal maneira que segmentos adjacentes tenham cores distintas.

2) Identifique os segmentos que são paralelos e os que são perpendiculares.

3) Identifique a figura.

4) Descreva a figura.

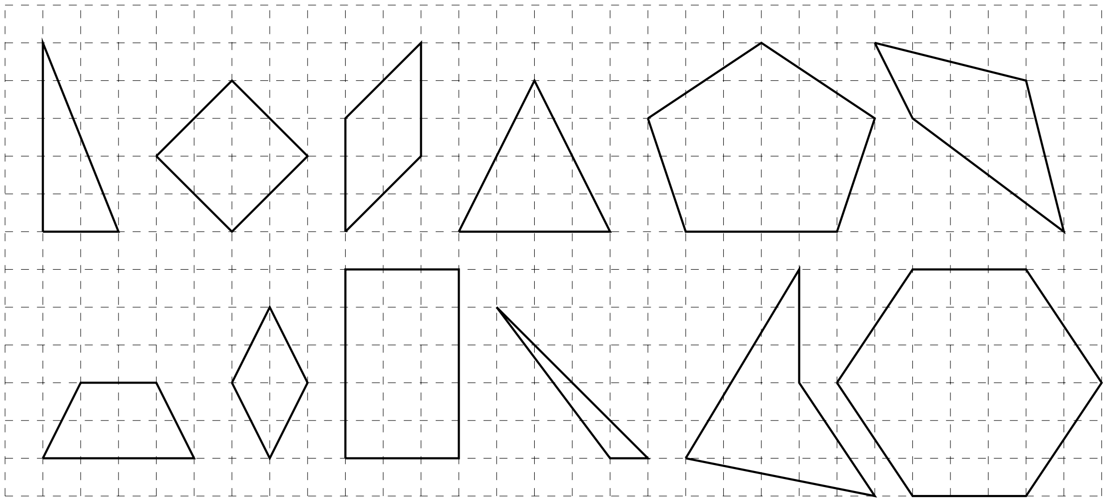
5) Informe o tipo de cada um de seus ângulos.

6) Calcule seu perímetro.

7) Calcule sua área.

8) Informe a quantidade de diagonais.

9) Usando a menor quantidade possível de cores, faça a coloração dos vértices de tal maneira que vértices consecutivos tenham cores distintas.

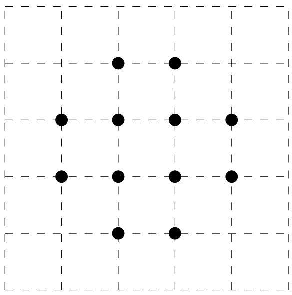


# Apêndice B

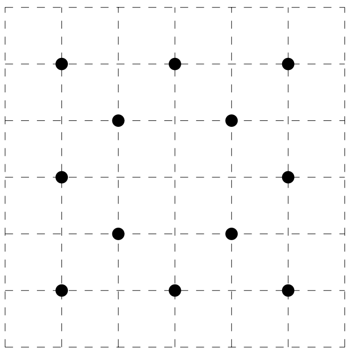
# Atividade Criativa

Faça as construções abaixo e justifique sua resposta:

1. Construa uma figura sem tirar o lápis do papel e sem repetir linha. Depois faça a coloração dos segmentos, usando uma quantidade mínima de cores, tal que segmentos adjacentes tenham cores distintas.

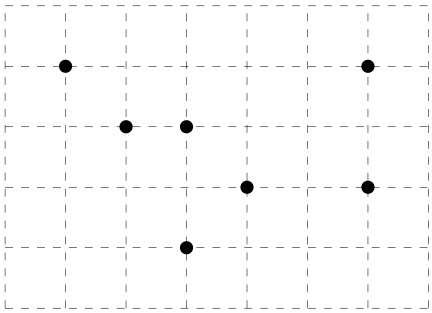


2. Com a menor quantidade de cores possível construa segmentos paralelos usando a mesma cor para cada conjunto de segmentos paralelos.

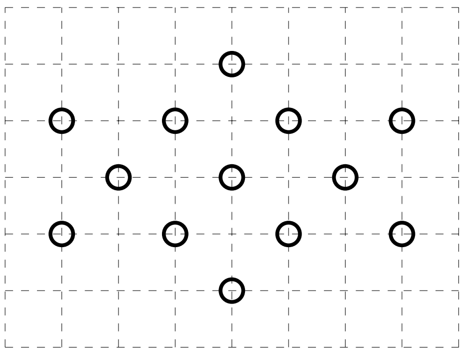


3. Utilizando a construção anterior, identifique os segmentos perpendiculares associando esses segmentos as cores utilizadas

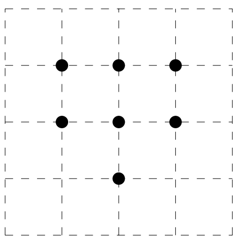
4. Construa ângulos identificando-os e colorindo os iguais com a mesma cor.



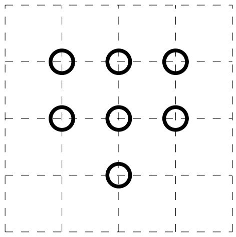
5. Faça coloração dos pontos, usando uma coloração mínima, de forma que pontos consecutivos tenha cores distintas. Construa triângulos que tenham um ângulo obtuso e vértices consecutivos com cores distintas. Depois faça a coloração dos triângulos construídos, usando uma quantidade mínima de cores, de forma que regiões adjacentes tenham cores distintas.



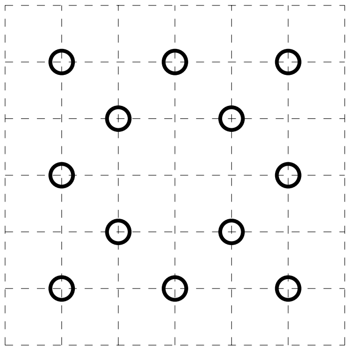
6. Trace segmentos usando a menor quantidade possível de cores de maneira que segmentos adjacentes tenham cores distintas formando o maior polígono possível.



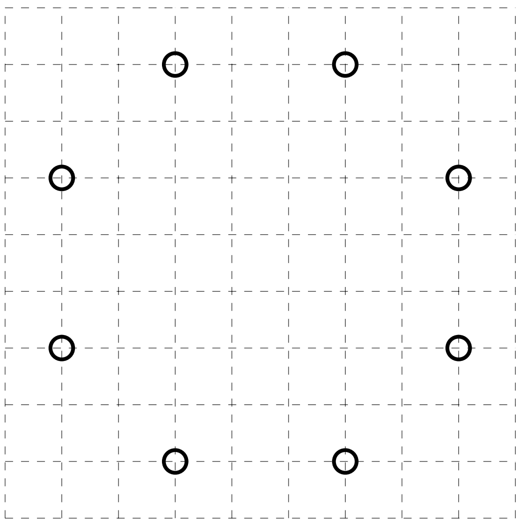
7. Usando a menor quantidade possível de cores, faça a coloração dos pontos representados na rede abaixo de maneira que pontos consecutivos tenham cores distintas. Depois construa quadrados cujos vértices consecutivos tenham cores distintas.



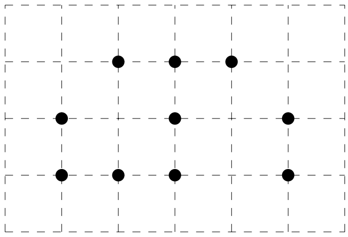
8. Usando a menor quantidade de cores possível, faça a coloração dos pontos de tal maneira que pontos consecutivos tenham cores distintas. Construa trapézios que tenham vértices consecutivos com cores distintas



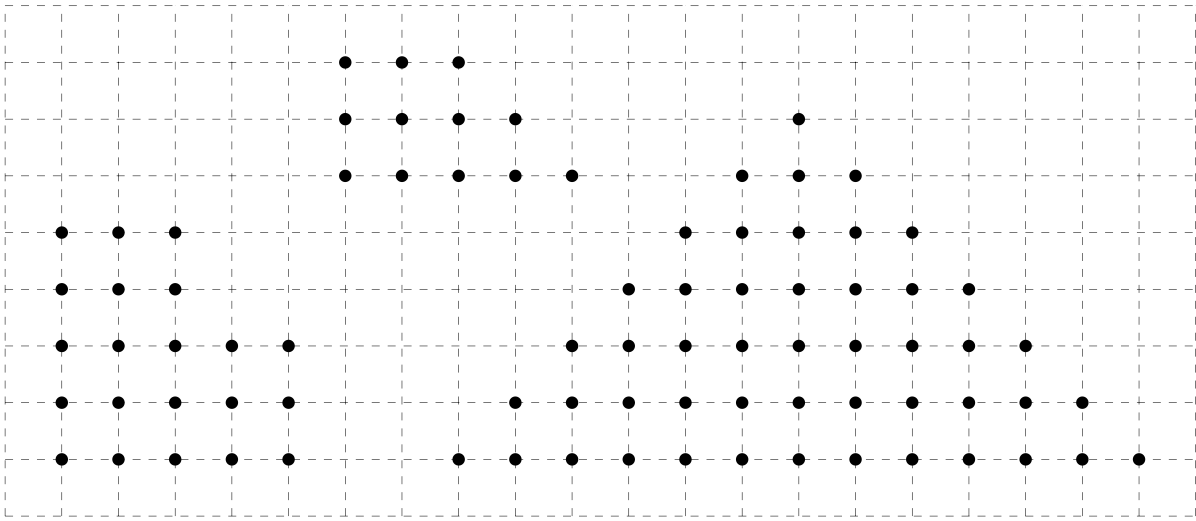
9. Usando a menor quantidade de cores possível, faça a coloração dos segmentos na rede abaixo de tal forma que segmentos adjacentes tenham cores distintas. Quantas diagonais tem a figura formada?



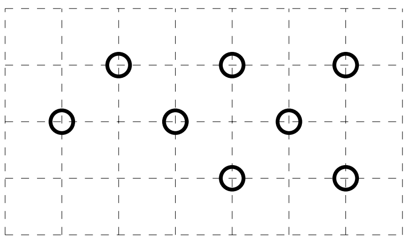
10. Construa figuras que tenham perímetros iguais e use cores distintas para colorir figuras de mesma área.



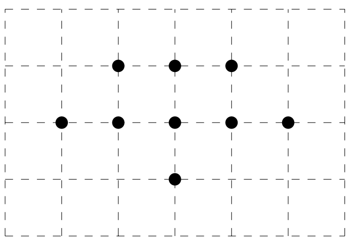
11. Divide cada uma das figuras a seguir em quatro figuras de mesma forma e mesma área. Depois faça a coloração, usando uma quantidade mínima de cores, de tal maneira que regiões adjacentes tenham cores distintas.



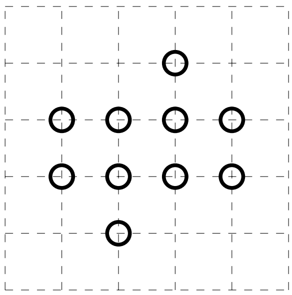
12. Faça coloração dos pontos, usando a menor quantidade possível de cores, de forma que pontos consecutivos tenha cores distintas. Construa figuras que tenham área igual a 4 u.a. e vértices consecutivos com cores distintas.



13. Usando a menor quantidade possível de cores, construa figuras distintas que tenha área de medida 2 u.a. e tenha segmentos adjacentes com cores distintas. Identifique cada uma dessas figuras geométricas.



14. Usando a menor quantidade de cores possível, faça a coloração dos pontos de tal maneira que pontos consecutivos tenham cores distintas. Construa quadrados que tenham área igual a 2 u.a. e vértices consecutivos com cores distintas



15. Construa triângulos semelhantes cuja razão entre as áreas seja igual a 2.Identifique essas figuras.