UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS – UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – FACET

RENATA MONTEIRO DE FREITAS CARNEIRO

A EXPONENCIAL COMPLEXA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS – MS
MARÇO - 2017

RENATA MONTEIRO DE FREITAS CARNEIRO

A EXPONENCIAL COMPLEXA

ORIENTADOR: PROF. RAFAEL AFONSO BARBOSA

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

DOURADOS – MS

MARÇO - 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

C289e Carneiro, Renata Monteiro de Freitas.

A exponencial complexa. / Renata Monteiro de Freitas Carneiro. – Dourados, MS : UFGD, 2017.

59f.

Orientador: Prof. Rafael Afonso Barbosa.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados.

1. Séries de Taylor. 2. Exponencial complexa. 3. Identidade de Euler. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central – UFGD.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"A Exponencial Complexa"**, de autoria de **Renata Monteiro de Freitas Carneiro**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Rafael Afonso Barbosa

Prof. Me. Rafael Afonso Barbosa (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Craveiro

Profª. Dra. Irene Magalhães Craveiro
Membro Examinador (UFGD)

Maristela Missio

Profª. Dra. Maristela Missio
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 24 de março de 2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu esposo Rodrigo que sempre acreditou em mim. As minhas filhas Rafaela, Ana Beatriz, Alice e Caroline. E aos meus pais Ademar e Fátima que sempre me incentivaram a estudar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, que me deu vida, perseverança e inteligência para que eu pudesse concluir este trabalho.

Agradeço a meu esposo Rodrigo, que sempre me incentivou nos estudos, me dando apoio em todas as atividades.

Agradeço a meus pais, que me apoiaram e estiveram presentes nos momentos em que precisei.

Agradeço a minhas filhas Rafaela, Ana Beatriz, Alice e Caroline por compreenderem minha ausência durante esta etapa de nossas vidas.

Agradeço a minhas colegas mestrandas, Aline, Mariana e Graciele, pelo apoio, compartilhamento e incentivo nos momentos de estudos.

Agradeço a toda equipe do PROFMAT-UFGD, especialmente aos professores que compartilharam conosco o conhecimento que nos proporcionou sucesso.

Ao Professor Rafael, meu muito obrigada. Seu apoio, incentivo e orientação foram primordiais no desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, obrigada a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram comigo neste trabalho. Sem o apoio, a compreensão e a dedicação de todos eu não teria forças para prosseguir na caminhada.

Muito obrigada!

RESUMO

O foco principal deste trabalho é apresentar uma maneira natural de definir a exponencial de um número complexo. Para isso, apresentaremos a definição de números Complexos, suas diferentes representações, operações, propriedades e teoremas, fundamentados no autor Gelson Iezzi. Usaremos a expansão em série de Taylor de algumas funções elementares do cálculo de uma variável real. Além disso, deduziremos a relação conhecida por Identidade de Euler e apresentaremos alguns outros interessantes usos da exponencial complexa.

Palavras-chave: Séries de Taylor. Exponencial complexa. Identidade de Euler.

ABSTRACT

The main focus of this paper is to present a natural way of defining the exponential of a complex number. For this, we will present the definition of Complex numbers, their different representations, operations, properties and theorems. It will be used the Taylor series expansion of some elementary functions of calculating a real variable. Besides that, it will be deduced the relation known as Euler's Identity and some other interesting uses of the complex exponential will be introduced.

Keywords: Taylor series. Complex exponential. Identity of Euler

SUMÁRIO

GRÁFICOS

INTRODUÇÃO

O surgimento dos números complexos remonta ao século XVI com a busca de soluções de equações algébricas de grau 3. Por um longo tempo, os números complexos não foram considerados como números legítimos, mas existentes apenas na imaginação humana. É interessante observar que ainda hoje chamamos o número complexo $i = \sqrt{-1}$ de "algarismo imaginário". O primeiro matemático a operar com números complexos foi G. Cardano (1.501 – 1.576). Resolvendo o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou (multiplicando) que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$são raízes de $x^2 + 40 = 10x$.

No capítulo 1, definimos de modo rigoroso os números complexos e apresentamos suas propriedades aritméticas básicas. Além disso, definimos o algarismo imaginário i e explicamos como a definição formal de número complexo se relaciona com a representação desses números na forma $x + yi$ (x e y reais), normalmente é a forma como trabalhamos com números complexos. Definimos os conceitos de parte real, parte imaginária, conjugado e valor absoluto de um número complexo. Definimos também o conceito de argumento e apresentamos a forma polar de um número complexo. Consideramos o problema de extração de raízes de números complexos. Mostramos que todo número complexo não nulo possui exatamente *n* raízes *n*-ésimas distintas, para cada $n \in N^*$, e exibimos uma fórmula para o cálculo dessas raízes.

No capítulo 2, apresentaremos os conceitos de expansão em Taylor para funções de uma variável real. Este capítulo dedica-se também a representação de uma função por meio da soma parcial de sua série de Taylor (polinômio de Taylor) acrescida de um resto e do qual enunciamos um resultado importante, a Fórmula de Taylor. Encerramos o capítulo calculando a expansão em série de Taylor das funções e^x, $\cos x$ e $sen\ x$, com o objetivo de posteriormente relacioná-las em uma única equação.

No capítulo 3, definimos a exponencial de um número complexo usando os estudos do capítulo 2. Desenvolvemos algumas de suas propriedades e mostramos que a exponencial complexa, como aqui definimos, é uma estenção da exponencial real.

No capítulo 4, apresentaremos algumas aplicações da exponencial complexa, a saber, a equação de Euler e a identidade de Euler, igualdade que relaciona cinco números fundamentais (e, π, i, 1 e 0) por meio das três operações básicas (adição, multiplicação, potenciação) e da relação de igualdade: $e^{\pi i} + 1 = 0$, apareceu no livro *A Introdução de*

Euler, publicado em Lausanne em 1.748, conforme apontam Conway e Guy (1996), e também relatam que esta é justamente celebrada como uma das mais notáveis identidades em matemática. Colman (2015) explica que Euler foi um dos matemáticos mais eminentes do século 18, e é considerado um dos maiores da história. Ele também é amplamente considerado o matemático mais prolífico de todos os tempos. Seus trabalhos coletados enchem 60 a 80 volumes, mais do que qualquer um no campo. Ele passou a maior parte de sua vida adulta em São Petersburgo, Rússia, e em Berlim, então a capital da Prússia.

Ainda dentro das aplicações da exponencial complexa, apresentemos o logaritmo de um número complexo, a função exponencial complexa e as funções trigonométricas complexas.

NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 Definição

Chama-se conjunto dos números complexos e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais são definidos a igualdade, a adição e a multiplicação à seguir:

I) Igualdade: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundos termos iguais.

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d \qquad (1.1)$$

II) Adição: a soma de dois pares ordenados é o par ordenado cujo primeiro termo é a soma dos primeiros e o segundo, a soma dos segundos termos dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.2)$$

III) Multiplicação: o produto de dois pares ordenados é o novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares ordenados dados e cujo o segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) . (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad (1.3)$$

Representa-se cada elemento (x, y) $\in \mathbb{C}$ com o símbolo $Z, Z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow Z = (x, y)$, sendo $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

a) Dados Z_1= (1, 2) e $Z_2 = (0, 3)$, vamos calcular $Z_1 + Z_2,\ Z_1.Z_2 \ e \ Z_2^2$.

Solução:

$Z_1 + Z_2 = (1,2) + (0,3) = (1 + 0, 2 + 3) = (1, 5)$

$Z_1.Z_2 = (1,2).(0,3) = (1.0 - 2.3, 1.3 + 2.0) = (-6, 3)$

$Z_2^2 = Z_2.Z_2 = (0, 3).(0, 3) = (0.0 - 3.3, 0.3 + 3.0) = (-9, 0)$

b) Dados $Z_1 = (2, -3)$ e $Z_2 = (1, 5)$, vamos calcular Z tal que $Z_1.Z = Z_2$.

Solução:

$Z_1.Z = Z_2 \Leftrightarrow (2, -3) . (x, y) = (1, 5) \Rightarrow (2x + 3y, 2y - 3x) = (1, 5)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2y - 3x = 5 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos $x = -1$ e $y = 1$. Portanto $Z = (-1, 1)$.

1.2. Teorema: A operação de adição define $\mathbb{C}$ em uma estrutura de grupo comutativo, ou seja, valem as seguintes propriedades:

1) Propriedade associativa

$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3), \ \forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$. De fato,

$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f)$

$= [(a, +c) + e, (b + d) + f] = [a + (c + e), b + (d + f)]$

$= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

2) Propriedade comutativa

$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1, \forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$. De fato,

$Z_1 + Z_2 = (a, b) + (c, d)$

$= (a + c, b + d)$

$= (c + a, d + b)$

$= (c, d) + (a, b)$

$= Z_2 + Z_1$

3) Existência do elemento neutro

Existe $e \in \mathbb{C} | Z + e = Z, \ \forall Z \in \mathbb{C}$, seja $Z = (a, b)$, vamos mostrar que existe $e = (x, y)$ tal que $Z + e = Z$:

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto $e = (0,0)$.

4) Existência do elemento simétrico

Existe $Z' \in \mathbb{C} | Z + Z' = e$

Seja $Z = (a, b)$ vamos mostrar que existe $Z' = (x, y)$ tal que $Z + Z' = e$:

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

Portanto $Z' = (-a, -b)$

1.3. Subtração

Dados os complexos $Z_1 = (a,b)$ e $Z_2 = (c,d)$ segue do teorema 1.2 que existe um único $Z \in \mathbb{C}$ tal que $Z_1 + Z = Z_2$, pois:

$Z_1 + Z = Z_2$

$\Rightarrow Z_1' + (Z_1 + Z) = Z_1' + Z_2$

$\Rightarrow (Z_1' + Z_1) + Z = Z_2 + Z_1'$

$\Rightarrow e + Z = Z_2 + Z_1'$

$\Rightarrow Z = Z_2 + Z_1'$

Esse número Z é a diferença entre Z_2 e Z_1, ou seja, $Z_2 - Z_1 = Z$.

Portanto $Z_2 - Z_1 = \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_1' = (\mathrm{c}, \mathrm{d}) + (-\mathrm{a}, -\mathrm{b}) = (\mathrm{c} - \mathrm{a}, \mathrm{d} - \mathrm{b})$, onde Z_1' é o elemento simétrico de Z_1.

Exemplo:

(5, 2) – (1, 3) = (5, 2) + (-1, - 3) = (5 – 1, 2 – 3) = (4, -1)

1.4. Teorema

A operação de multiplicação define em $\mathbb{C}$ uma estrutura de grupo comutativo, ou seja, verifica as propriedades:

1) Propriedade associativa

$(Z_1.Z_2).Z_3 = Z_1.(Z_2.Z_3),\ \ Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

$(Z_1.Z_2).Z_3 = [(a,b).(c,d)].(e,f) = (ac - bd, ad + bc).(e,f)$

$= [(ac - bd).e - (ad + bc).f, (ac - bd).f + (ad + bc).e]$

$= [(ace - bde - adf - bcf), (acf - bdf + ade + bce)]$

$= [a\,(ce - df) - b(de + cf), a(cf + de) + b(ce - df)]$

$= [(a,b).(ce - df, cf + de)]$

$= (a,b).[(c,d),(e,f)]$

$= Z_1.(Z_2.Z_3)$■

2) Propriedade comutativa

$Z_1.Z_2 = Z_2.Z_1, \forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

$Z_1.Z_2 = (a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

$= (ca - db, cb + da) = (c,d).(a,b) = Z_2.Z_1$

3) Existência do elemento neutro

Existe $e \in \mathbb{C}$ tal que $Z.e = Z, \forall\, Z \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

Seja $Z = (a,b)$, vamos mostrar que existe $e = (x,y)$, tal que $Z.e = Z$:

$(a,b).(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (a,b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases}$$

i) Para a ≠ 0 e b ≠ 0, temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} -bax + b^2y = -ab \\ \quad abx + a^2y = ab \end{cases}$$

$b^2y + a^2y = 0 \Rightarrow y(b^2 + a^2) = 0 \quad \Rightarrow y = 0$

E, $ax - by = a \Rightarrow ax - b.0 = a \Rightarrow ax = a \Rightarrow x = \frac{a}{a} \Rightarrow x = 1$.

ii) Para a = 0 e b ≠ 0, temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -by = 0 \\ +bx = b \end{cases} \Rightarrow y = 0 \; e \; x = 1$$

iii) Para a ≠ 0 e b = 0, temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = a \\ ay = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \; e \; y = 0$$

iv) Para a = b = 0, temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.x - zy = 0 \\ 0.y + 0.x = 0 \end{cases}$$

Portanto (x,y) é solução, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Logo, (1, 0) é solução do Sistema $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

4) Existência do elemento inverso

Existe $Z'' \in \mathbb{C} | Z.Z'' = e$. Seja $Z = (a, b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, vamos mostrar que existe $Z'' = (x, y)$ tal que $Z.Z'' = e$:

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = 1 & (1) \\ bx + ay = 0 & (2) \end{cases}$$

Se $a = b = 0$, não existe (x, y). Devemos ter $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Vamos supor $a \neq 0$, daí $x = \frac{1+by}{a}$, substituindo em (2) temos:

$$b.\left(\frac{1 + by}{a}\right) + ay = 0$$

$$\frac{b + b^2y}{a} + ay = 0$$

$$b + b^2y + a^2y = 0$$

$$y(b^2 + a^2) = -b$$

$$y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Assim,

$$x = \left[1 + b.\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)\right].\frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{(a^2 + b^2)a} = \frac{a^2+b^2-b^2}{a(a^2 + b^2)} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Analogamente para $b \neq 0$, temos $y = \frac{-1+ax}{b}$ e $x = \frac{a}{a^2+b^2}$

Portanto $Z'' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

1.5. Divisão

Segue do *teorema 1.4* que, dados os complexos $Z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$ e $Z_2 = (c, d)$, existe um único $Z \in C$ tal que $Z_1.Z = Z_2$:

$$Z_1.Z = Z_2 \Rightarrow Z_1''.(Z_1.Z) = Z_1''.Z_2$$

$$\Rightarrow (Z_1''.Z_1).Z = Z_2.Z_1''$$

$$\Rightarrow e.Z = Z_2.Z_1'' \Rightarrow Z = Z_2.Z_1''$$

Esse número Z é o quociente entre Z_2 e Z_1, $Z = \frac{Z_2}{Z_1}$.

Portanto $\frac{Z_2}{Z_1} = Z_2.Z_1'' = (c, d).\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, onde Z_1'' é o elemento inverso de Z_1.

Exemplo:

$$\frac{(3,5)}{(1,2)} = (3,5).\left(\frac{1}{1^2+2^2}, \frac{-2}{1^2+2^2}\right) = (3,5).\left(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{10}{5}, \frac{-6}{5} + \frac{5}{5}\right) = \left(\frac{13}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

1.6. Propriedade Distributiva

Nos complexos, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$Z_1.(Z_2 + Z_3) = Z_1.Z_2 + Z_1.Z_3, \forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}.$$

***Demonstração*:**

Dados $Z_1 = (a, b)$, $Z_2 = (c, d)$ e $Z_3 = (e, f)$,

$$Z_1.(Z_2 + Z_3) = (a, b).[(c, d) + (e, f)] =$$

$$= (a, b).(c + e, d + f) = [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] =$$

$$= [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be]$$

$$= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)]$$

$$= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)$$

$$= (a, b).(c, d) + (a, b).(e, f)$$

$$= Z_1.Z_2 + Z_1.Z_3 \blacksquare$$

1.7. Forma Algébrica

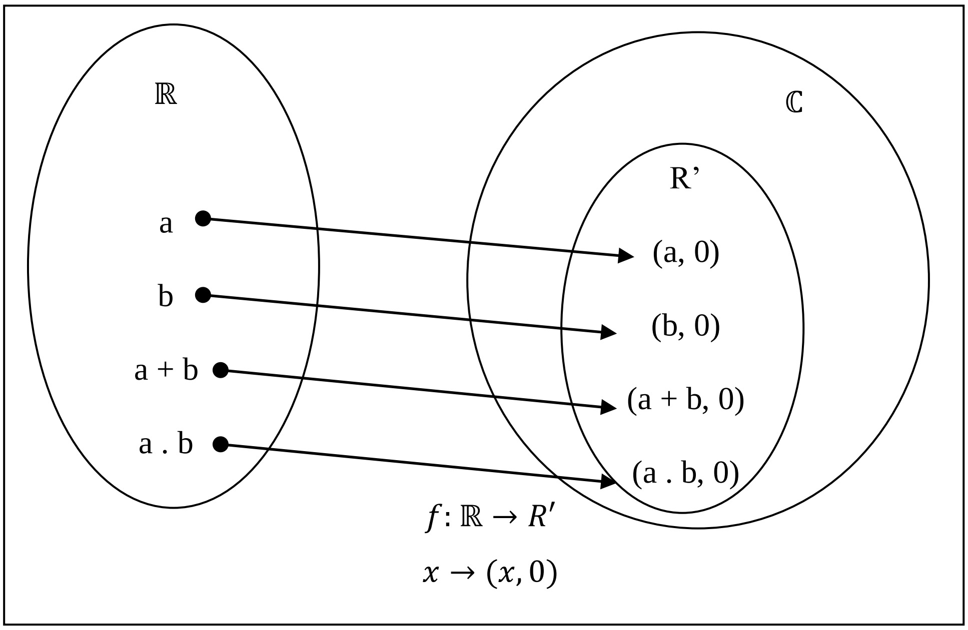
1.7.1 Imersão de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{C}$

Consideremos o subconjunto R' de $\mathbb{C}$, formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero:

$R' = \{(a, b) \in \mathbb{C} | b = 0\}$

Pertencem, por exemplo, a R' os pares $(0,0), (1,0), (a,0), (b,0), (a+b,0)$, $(a.b,0)$, etc.

Consideremos agora a aplicação f, de R em R', que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par (x, 0) ∈ R'.



Primeiramente notemos que f é bijetora, pois:

1) Todo par $(x, 0)$ ∈R' é o correspondente, segundo f, de x ∈ $\mathbb{R}$ (ou seja, f é sobrejetora);

2) Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com x ≠ x', os seus correspondentes (x, 0) ∈ R' e (x', 0) ∈ R' são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados (ou seja, f é injetora).

Em segundo lugar, notemos que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

1) À soma $a + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a + b,\ 0)$, é a soma dos pares (a, 0) e (b, 0), correspondentes de a e b, respectivamente, isto é:

$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$

2) Ao produto ab, com a ∈ ℝ e b ∈ ℝ, está associado o par $(ab, 0)$, que é o produto dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b, respectivamente, isto é:

$f(a.b) = (ab, 0) = (ab - 0, a.0 + 0.b) = (a, 0).(b, 0) = f(a).f(b)$

Como $f: \mathbb{R} \rightarrow R'$ é bijetora e conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que ℝ e R' são isomorfos. Daí operar com $(x,\ 0)$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com x, logo $x = (x, 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Então, temos $0 = (0, 0), 1 = (1, 0)$ e $\mathbb{R} = R'$. Assim, o corpo ℝ dos números reais passa a ser considerado subconjunto do corpo ℂ dos números complexos: ℝ ⊂ ℂ.

1.7.2 Unidade Imaginária

Note que $(0, 1)^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1$, ou seja, o número -1 possui "raiz quadrada" em ℂ. O número (0, 1) é denotado por i e é chamado de Unidade Imaginária. Assim, temos $i^2 = -1$.

Então, dado um número complexo $Z = (x, y)$, temos,

$Z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0).(0, 1) \Rightarrow Z = x + yi$, é a forma algébrica de Z, onde o número real x é chamado parte real de Z e o número real y é chamado parte imaginária de Z. Em símbolo indica-se: $x = Re\,(Z)\ e\ y = Im(Z)$

Chama-se real todo número complexo cuja parte imaginária é nula e chama-se imaginário puro todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não.

Daí, $Z = x + 0i = x$ é real e $Z = 0 + y.i = yi$ $(y \neq 0)$ é imaginário puro.

Vejamos agora como ficam as definições de igualdade, adição e multiplicação de complexos usando a forma algébrica:

Igualdade: $a + b.i = c + d.i \Leftrightarrow a = c\ e\ b = d$;

Adição: $(a + b.i) + (c + d.i) = (a + c) + (b + d).i$;

Multiplicação: $(a + b.i).(c + d.i) = (ac - bd) + (ad + bc).i$, resultado do desenvolvimento de $(a + bi).(c + di)$:

$(a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$, como $i^2 = -1$,

$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

1.7.3 Conjugado de Z

Chama-se conjugado do complexo $Z = x + yi$ o complexo $\bar{Z} = x - yi$, isto é,

$\mathrm{Z} = \mathrm{x} + \mathrm{yi} \Rightarrow \bar{Z} = x - yi$

Exemplos:

a) $\mathrm{Z} = -5 + 3\mathrm{i} \Rightarrow \bar{Z} = -5 - 3i$

b) $\mathrm{Z} = 6 - 4\mathrm{i} \Rightarrow \bar{Z} = 6 + 4i$

1.7.4 Teorema: **Para todo** $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{C}$ **temos** :

I) $\mathrm{Z} + \bar{Z} = 2 \,. Re(Z)$

II) $\mathrm{Z} - \bar{Z} = 2. Im(Z). i$

III) $\mathrm{Z} = \bar{Z} \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

Demonstração:

Seja $Z = x + y. i$, temos:

I) $\mathrm{Z} + \bar{Z} = (x + yi) + (x - yi) = 2\,x = 2. Re(Z)$

II) $\mathrm{Z} - \bar{Z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2. Im(Z). i$

III) $\mathrm{Z} = \bar{Z} \Leftrightarrow (x + yi) = (x - yi) \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$. ■

1.7.5 Teorema

Se Z_1 e Z_2 são números complexos quaisquer, temos:

I) $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

II) $\overline{Z_1 \,.\, Z_2} = \bar{Z}_1 \,.\, \bar{Z}_2$

Demonstração:

Façamos $Z_1 = x_1 + y_1 i$ e $Z_2 = x_2 + y_2 i$ temos:

I) $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

$\Rightarrow \overline{Z_1 + Z_2}$

$= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$

$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ ■

II) $Z_1.Z_2 = (x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i) = (x_1.x_2 - y_1.y_2) + (x_1.y_2 + x_2.y_1)i$, logo:

$\overline{Z_1.Z_2} = (x_1.x_2 - y_1.y_2) - (x_1.y_2 + x_2.y_1)i$

$= (x_1.x_2 - x_1.y_2 i) + (-x_2.y_1 i + y_1.y_2 i^2)$

$= x_1(x_2 - y_2 i) - y_1 i(x_2 - y_2 i)$

$= (x_1 - y_1 i).(x_2 - y_2 i)$

$= \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$ ■

1.8 Forma Trigonométrica

Chama-se norma de um número complexo $Z = x + yi$ o número real e não negativo:

$$N(Z) = x^2 + y^2 \qquad (1.4)$$

Denomina-se módulo ou valor absoluto de um número complexo $Z = x + yi$ o número real e não negativo:

$$|Z| = \sqrt{N(Z)} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.5)$$

Exemplos:

a) Z = 3 + 2i $\Rightarrow$ N(Z) = $(3)^2 + (2)^2$ = 13 e $|Z| = \sqrt{13}$

b) Z = - 3i $\Rightarrow$ N(Z) = $(0)^2 + (-3)^2$ = 9 e $|Z| = 3$

1.8.1 Teorema

Se $Z = x + yi$ é um número complexo qualquer, então:

I) $|Z| \geq 0$

II) $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

III) $|Z| = |\bar{Z}|$

IV) $Re\,(Z) \leq |Re(Z)| \leq |Z|$

V) $Im\,(Z) \leq |Im(Z)| \leq |Z|$

Demonstração:

I) $\left.\begin{matrix} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow |Z| \geq 0$

II) $|Z| = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

III) $|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |\bar{Z}|$

IV) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } x \geq 0 \Rightarrow x = |x| \\ \text{Se } x < 0 \Rightarrow x < |x| \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq |x|$, como:

$x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |x| \leq |Z|$, daí de $x \leq |x|$ e $|x| \leq |Z|$ segue que: $x \leq |x| \leq |Z|$.

V) Análogo ao IV

Chama-se argumento de um número complexo $Z = x + yi$, não nulo, ao ângulo θ tal que $\cos\theta = \frac{x}{|Z|}$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{y}{|Z|}$.

Note que:

1) $Z \neq 0 \Rightarrow |Z| \neq 0$

2) Existe pelo menos um ângulo θque satisfaz a definição pois:

$$cos^2\theta + sen^2\theta = \left(\frac{x}{|Z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|Z|}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{|Z|^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

3) Fixado o complexo $Z \neq 0$, estão fixados $cos\,\theta$ e $sen\,\theta$ mas o ângulo θpode assumir infinitos valores, congruentes módulo 2π. Assim o complexo $Z \neq 0$ tem argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, onde θ_0, chamado argumento principal de Z, é tal que:

$\cos\theta_0 = \frac{x}{|Z|}$ e $\text{sen}\,\theta_0 = \frac{y}{|Z|}$ e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

Exemplo:

1) $Z = \sqrt{3} + i \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|Z|} \\ sen\,\theta = \frac{y}{|Z|} \end{cases}$

$|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Daí $\cos\theta = \sqrt{13}$ e $sen\,\theta = \frac{1}{2}$, então $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

2) $Z = -1 - i \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|Z|} \\ sen\,\theta = \frac{y}{|Z|} \end{cases}$

$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Daí $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

1.8.2. Plano de Argand-Gauss

Representamos os números complexos $Z = x + yi = (x, y)$ pelos pontos do plano cartesiano XOY, marcamos a parte real sobre o eixo OX e a parte imaginária de Z sobre o eixo OY.

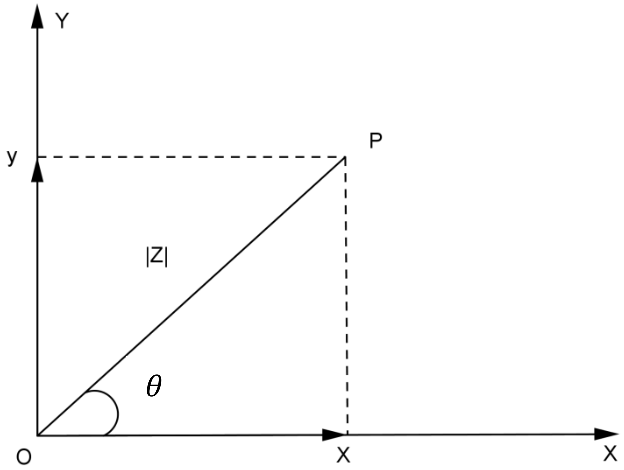
Assim, cada número complexo $Z = (x, y)$ corresponde único ponto P do plano XOY.

XOY = plano de Argand-Gauss

OX= eixo real

OY = eixo imaginário

P = afixo de Z



Observe que a distancia entre P e O é o módulo de Z:

$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$

O ângulo formado por $\overrightarrow{OP}$ com o eixo real é θ, $\cos\theta = \frac{x}{|Z|}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|Z|}$, é o argumento principal de Z.

Agora, dado um número complexo Z = x + yi, não nulo, temos:

$Z = x + yi = |Z|\,.\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) \Rightarrow Z = |Z|.(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta)$

Chamada forma trigonométrica (ou polar) de Z.

Exemplo:

1) $Z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + i^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{|Z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{|Z|} = \frac{1}{2}$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, então $Z = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,sen\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Vamos mostrar que dados $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ é verdade que $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

Solução:

Dados os números complexos:

$Z_1 = |Z_1|.(cos\theta_1 + isen\theta_1)$

$Z_2 = |Z_2|.(cos\theta_2 + isen\theta_2)$

Segue que,

$Z_1 + Z_2 = (|Z_1|.cos\theta_1 + |Z_2|.cos\theta_2) + i.(|Z_1|.sen\theta_1 + |Z_2|sen\theta_2)$

$|Z_1 + Z_2| = \sqrt{(|Z_1|.cos\theta_1 + |Z_2|cos\theta_2)^2 + (|Z_1|.sen\theta_1 + |Z_2|sen\theta_2)^2}$

Note que,

$(|Z_1|.cos\theta_1 + |Z_2|.cos\theta_2)^2 + (|Z_1|.sen\theta_1 + |Z_2|sen\theta_2)^2 =$

$= |Z_1|^2.\cos^2\theta_1 + 2|Z_1||Z_2|.cos\theta_1.cos\theta_2 + |Z_2|^2.\cos^2\theta_2 + |Z_1|^2sen^2\theta_1 + 2|Z_1||Z_2|.sen\,\theta_1.sen\,\theta_2 + |Z_2|^2.\text{sen}^2\,\theta_2$

$= |Z_1|^2(\cos^2\theta_1 + \text{sen}^2\,\theta_1) + |Z_2|^2(\text{sen}^2\,\theta_2 + \cos^2\theta_2) + 2|Z_1||Z_2|\,(cos\theta_1cos\theta_2 + sen\,\theta_1sen\theta_2)$

$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Daí,

$|Z_1 + Z_2| = \sqrt{|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1|.|Z_2|.\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

Como $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ é no máximo 1, temos:

$|Z_1 + Z_2| \leq \sqrt{|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1|.|Z_2|} = \sqrt{(|Z_1| + |Z_2|)^2} = |Z_1| + |Z_2|$

1.9. Potenciação

1.9.1. Teorema

O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente a soma dos argumentos dos fatores.

Demonstração:

Dados os números:

$Z_1 = |Z_1|.(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $Z_2 = |Z_2|.(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$. Calculemos módulo e argumento de Z.

$Z = Z_1.Z_2 = |Z|.(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$.

Temos :

$Z = Z_1.Z_2 = |Z_1|.|Z_2|\,(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1).(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

$=|Z_1|.|Z_2|.(\cos\theta_1 . \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1 . \text{sen}\,\theta_2)$

$=|Z_1|.|Z_2|.[(\cos\theta_1 . \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\, sen\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_1 . \cos\theta_2)]$

$= |Z_1|.|Z_2|.[\cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

Portanto

$Z = |Z|\,(\cos\theta + i\,sen\,\theta) = (|Z_1|.|Z_2|).[\cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$, então:

$$|Z| = (|Z_1|.|Z_2|),\ \theta = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi, k \in Z. \blacksquare \qquad (1.6)$$

Essa fórmula estende-se ao produto de n fatores ($n > 2$), aplicando a propriedade associativa da multiplicação.

$Z = Z_1.Z_2.Z_3 \ldots Z_n = |Z|\,(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$

Então,

$Z = |Z_1|.|Z_2|.|Z_3| \ldots |Z_n| = [\cos\ (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\,sen\ (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$

1.9.2. Primeira fórmula de Moivre

Teorema: Dados o número complexo $Z = |Z|\,(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$, não nulo, e o número inteiro n, então:

$$Z^n = |Z|^n\,(\cos n\,\theta + i\,sen\,n\,\theta) \qquad (1.7)$$

***Demonstração*:**

Vamos verificar que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$, por indução:

i) Se $n = 0$ então:

$Z^0 = 1$ e $|Z|^0\,(\cos 0 + i\,sen\,0) = 1$

ii) Vamos supor válido para n – 1, ou seja:

$Z^{n-1} = |Z|^{n-1}\,(\cos\,(n-1)\theta + i\,sen(n-1)\,\theta)$, e vamos mostrar que é válido para n:

$Z^n = Z^{n-1}.\ Z =$

$= |Z|^{n-1}\,(\cos\,(n-1)\theta + i\,sen(n-1)\,\theta).\,|Z|\,(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$

$= |Z|^{n-1}.\,|Z|^n[(\cos(n-1)\theta.\theta) + i(sen\,(n-1)\theta.\theta]$

$= |Z|^n.\,(\cos n\,\theta + i\,sen\,n\,\theta)$

Vamos estender a propriedade para n ∈ Z. Se n < 0, então $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$, portanto a m se aplica a fórmula:

$$Z^n = Z^{-m} = \frac{1}{Z^m} = \frac{1}{|Z|^m.\,(\cos m\,\theta + i\,sen\,m\,\theta)}$$

$$= \frac{1}{|Z|^m}.\frac{\cos m\,\theta - i\,sen\,m\,\theta}{(\cos m\,\theta + i\,sen\,m\,\theta)\,.\,(\cos m\,\theta - i\,sen\,m\,\theta)}$$

$$= \frac{1}{|Z|^m}.\frac{\cos m\,\theta - i\,sen\,m\,\theta}{(\cos^2 m\,\theta + sen^2\,m\,\theta)}$$

$= |Z|^{-m}.\cos(-m\,\theta) + i\,sen(-\,m\,\theta)$, pois cosseno é função par e seno é função ímpar.

$= |Z|^n.\,(\cos n\,\theta + i\,sen\,n\,\theta).\ \blacksquare$

Exemplo:

Expresse $sen\ 3\theta$ e $cos\ 3\theta$ em função de $sen\ \theta\ e\ cos\ \theta$.

Solução:

$Z^n = [|Z|.(\cos\ \theta + i\,sen\ \ \theta)]^n = |Z|^n.(\cos\ \theta + i\,sen\ \ \theta)^n$ e

$Z^n = |Z|^n.(\cos \mathrm{n}\ \ \theta + i\,sen\,n\,\theta)$ daí:

$\cancel{|Z|^n}.(\cos\ \theta + i\,sen\ \ \theta)^n = \cancel{|Z|^n}.(\cos n\,\theta + i\,sen\,n\ \ \theta)$

$(\cos\ \theta + i\,sen\ \ \theta)^n = (\cos n\,\theta + i\,sen\,n\ \ \theta)$, para $n\ =\ 3$ temos:

$(\cos\ \theta + i\,sen\ \ \theta)^3 = (\cos 3\ \theta + i\,sen\,3\ \ \theta)\ \Rightarrow$

$cos^3\theta + 3cos^2\theta.\,i\,sen\,\theta + 3i^2sen^2\theta.\,cos\theta + i^3sen^3\theta = cos\ 3\ \theta + i\ sen\ 3\ \theta \Rightarrow$

$(cos^3\theta - 3sen^2\theta.\,cos\ \theta) + i(3cos^2\theta.\,sen\ \theta - sen^3\theta) =\ cos\ 3\ \theta + i\ sen\ 3\ \theta$

Portanto, $cos\ 3\ \theta = cos^3\theta - 3sen^2\theta.\,cos\ \theta$ e $sen\ 3\ \theta = 3\ cos^2\theta\ .sen\ \theta - sen^3\ \theta$.

1.10 Radiciação

Definição:

Dado um número complexo Z, chama-se raiz enésima de Z e denota-se $\sqrt[n]{Z}$, a um número complexo Z_K tal que $Z_k^n = Z$:

$$\sqrt[n]{Z} = Z_R \Leftrightarrow Z_k^n = Z$$

Teorema:

Dados o número complexo $Z = |Z|.(\cos\theta + i\ sen\ \theta)$ e o número natural n $(n \geq 2)$, então existem n raízes enésimas de Z que são da forma:

$$Z_k = \sqrt[n]{|Z|}\,.\left[cos\ \left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen\ \left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right], \text{ em que } \sqrt[n]{|Z|} \in \mathbb{R}_+\ e\ k\ \in Z. \quad (1.8)$$

***Demonstração*:**

Vamos determinar todos os complexos Z_k, tais que $\sqrt[n]{Z} = Z_K$.

Se $Z_k = r(\cos w + i.sen\ w)$, nossas incógnitas são r e w. Apliquemos a definição de $\sqrt[n]{Z}$: $\sqrt[n]{Z}\ = Z_k \Leftrightarrow Z_k^n = Z$, então $r^n(\cos nw + isen\ nw) = |Z|.(\cos\theta + i\ sen\ \theta)$, daí:

i) $r^n = |Z| \Rightarrow r = \sqrt[n]{|Z|}, (r\ \in \mathbb{R}_+)$

ii) $cos\ nw\ =\ cos\ \theta$

iii) $sen\ nw\ =\ sen\ \theta, então\ nw\ =\ \theta\ +\ 2k\pi \Rightarrow w = \frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}$

Supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de w compreendidos entre $0\ e\ 2\pi$:

$k = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{\theta}{n}$

$k = 1 \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{\theta}{n} + 2.\dfrac{2\pi}{n}$

$\vdots$

$k = n - 1 \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{\theta}{n} + (n-1).\dfrac{2\pi}{n}$

$k = n \quad \Rightarrow \quad w = \frac{\theta}{n} + 2\pi$ (mesmo valor obtido para k = 0)

Então para obtermos valores de Z_k é suficiente fazer $K\ =\ 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

Portanto, todo número complexo Z não nulo admite n raízes enésimas distintas, as quais todas têm o mesmo módulo $\left(\sqrt[n]{|Z|}\right)$ e argumentos principais formando uma progressão aritmética (P.A) de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Exemplo:

Vamos determinar as raízes quartas de $Z = -8 + i8\sqrt{3}$.

Solução:

$$|Z| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + (64.3)} = 16$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|Z|} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|Z|} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$$Z_k = \sqrt[4]{16}\,.\left[\cos\left(\frac{2\pi/3}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right) + i.sen\left(\frac{2\pi/3}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z_k = 2\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Daí segue que:

K = 0 $\Rightarrow Z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2.i.\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

K = 1 $\Rightarrow Z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2.i.\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$

K = 2 $\Rightarrow Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2.i.\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

K = 3 $\Rightarrow Z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2.i.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

1.11 Interpretação Geométrica

Vimos que $\left(\sqrt[n]{Z}\right)$ pode assumir n valores distintos, porém todos com o mesmo módulo. Assim os afixos das n raízes enésimas de Z são pontos da mesma circunferência, com centro na origem de plano de *Argand-Gauss* e raio $\left(\sqrt[n]{|Z|}\right)$.

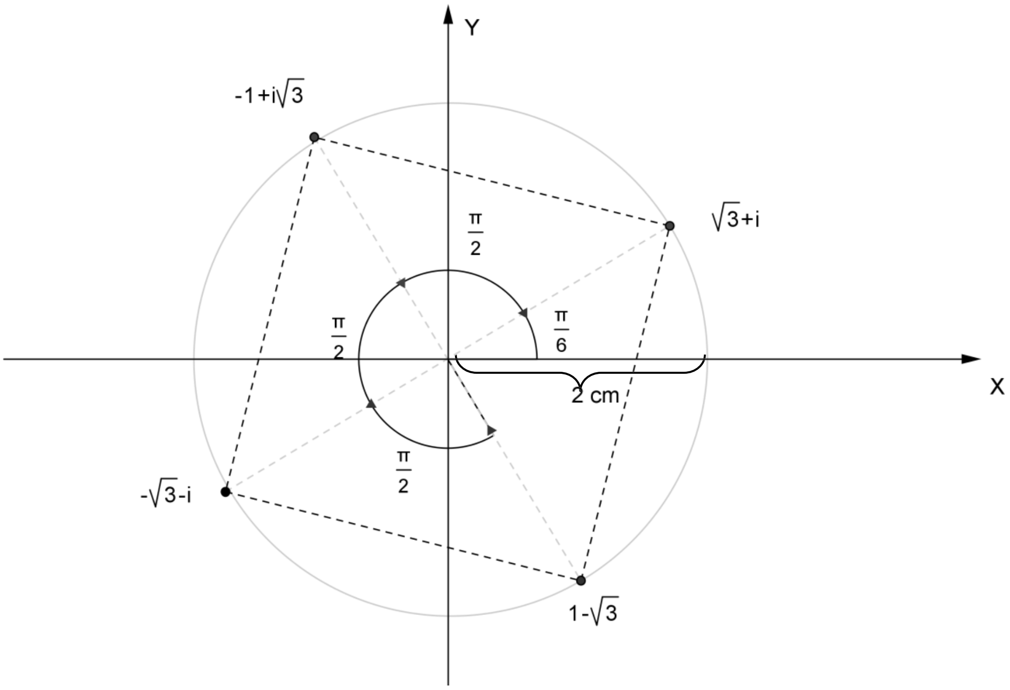
Também vimos que os argumentos principais de ($\sqrt[n]{Z}$) formam uma P.A que começa com $\frac{\theta}{n}$ e tem razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim, os afixos das n raízes enésimas de Z dividem a circunferência de centro (0, 0) e raio r = $\sqrt[n]{|Z|}$ em n partes congruentes.

Se $n = 2$ são pontos diametralmente opostos.

Se $n \geq 3$ são vértices de um polígono regular inscrito na circunferência.

Retornando o exemplo anterior, raízes quarta de $-8 + i8\sqrt{3}$.

$Z_k = 2 \,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\,\frac{\pi}{2}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + k\,\frac{\pi}{2}\right)\right]$



Os afixos de $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$ são vértices do quadrado inscrito na cirncunferência de centro (0, 0) e raio 2, sendo os vértices: $\sqrt{3} + i$, $-1 + i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} - i$ e $1 - i\sqrt{3}$.

SÉRIES DE TAYLOR

2.1. Fórmula de Taylor

Seja $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada (ou derivada de ordem n) de uma função f no ponto a indicada com a notação $f^n(a)$ é definida indutivamente:

$f'''(a) = (f')'(a)$

$f''''(a) = f3\ (a) = (f'')'(a)$

$\dots$

$f'^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$

Às vezes é conveniente fazer f como sua própria derivada de ordem zero, $f^{(0)}\ (a) = f(a)$.

Exemplos:

Vamos determinar as derivadas de ordem n das funções $f = e^x\ e\ g = sen\ x$.

Solução:

$f^{(0)}(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

...

$f^{(n)}\ (x) = e^x$

e

$g^0(x) = sen\ x \Rightarrow n = 2.0$

$g'(x) = cos\ x \Rightarrow n = 2.0 + 1$

$g''(x) = -sen\ x \Rightarrow n = 2.1$

$g'''(x) = -cos\ x \Rightarrow n = 2.1 + 1$

$g^4(x) = sen\ x \Rightarrow n = 2.2$

...

$$g^n\ (x) = \begin{cases} (-1)^t sen\ x, & n = 2t \\ (-1)^t\ cos\ x, & n = 2t + 1 \end{cases} \blacksquare$$

Diremos que $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I quando existir $f^{(n)}(x), \forall x \in I$. Quando x for uma das extremidades de I, $f^{(n)}(x)$ é uma derivada lateral.

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no ponto $a \in I$ quando houver um intervalo aberto J contendo a, tal que f é $n - 1$ vezes derivável em $I \cap J$ e $\exists\, f^n(a)$.

Diremos que $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe c^n, e escrevemos $f \in c^n$, para significar que f é n vezes derivável em I e $x \to f^n(x)$ é uma função contínua em I.

Em particular, $f \in c^0$ significa que f é contínua.

Exemplo:

Para cada $n = 0, 1, 2$ ... consideremos a função:

φ_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi_n(x) = x^n|x|$.

Para $x \geq 0$, temos que $\varphi_n(x) = x^{n+1}$ e se $x < 0$ vale $\varphi_n(x) = -x^{n+1}$.

Temos $\varphi'_n = (n+1).\varphi_{n-1}$.

De fato, se $x \geq 0$, $\varphi' = (x^{n+1})' = (n+1).x^n$, como $\varphi_{n-1} = x^{(n-1)}.x$, segue que $\varphi'_{(n)} = (n+1).\varphi_{n-1}$.

Se $x < 0$, $\varphi'_n = (-x^{n+1})' = -(n+1).x^n$, como $\varphi_{n-1} = -x^{(n-1)}.(-x)$, segue que $\varphi'_{(n)} = (n+1).\varphi_{n-1}$.

Logo a n-ésima derivada de φ_n é igual a (n + 1)! φ_{00}. Pois,

$\varphi'_n = (n+1).\varphi_{n-1}$

$\varphi''_n = (n+1).\varphi'_{n-1} = (n+1).n.\varphi_{n-2}$

$\varphi'''_n = (n+1).\varphi'_{n-2} = (n+1).n.(n-1)\varphi_{n-3}$

$\vdots$

$\varphi_n^{(n)} = (n+1).n.(n-1)\ldots 3.2.\varphi_0 = (n+1)!\,\varphi_0$

Como $\varphi_0(x) = |x|$ é contínua mas não possui derivada no ponto zero, concluímos que cada uma das funções φ_n é de classe C^n, mas não é $n + 1$ vezes derivável. Em particular, $\varphi_n \notin C^{n+1}$. ■

Diremos que $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em I quando $f \in C^n\ \forall n = 0, 1, 2, 3 \ldots$. Em outras palavras, quando se pode derivar f tantas vezes quantas se deseje, em todos os pontos de I.

Exemplo:

Todo polinômio é uma função C^∞ em $\mathbb{R}$. Uma função racional (quociente de polinômios) é de classe C^∞ em todo intervalo onde é definida. As funções trigonométricas também são de classe C^{∞}, em cada intervalo onde são definidas. O mesmo pode se dizer para logaritmo e para função exponencial.

2.2 Definição

Seja $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. O polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é o polinômio:

$$P(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h_2 + \ldots + a_n h \text{ (grau} \leq n)$$

Cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $h = 0$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a, isto é, $P^i(0) = f^i(a), i = 0, 1, 2, \ldots, n.$

Note que, as derivadas $P^0(0)$, $P'(0)$, $P''(0), \ldots, P^n(0)$ determinam de modo único o polinômio P(h), pois $P^i(0) = i!\ a_i$. De fato,

- $P(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n$

$P^0(h) = P(h) \Rightarrow P^{(0)}(0) = 0!\, a_0$

- $P'(h) = a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 + \cdots + n\, a_n h^{n-1}$

$\Rightarrow P'(0) = 1!\, a_1$

- $P''(h) = 2.1a_2 + 3.2a_3 h + \cdots + n.(n-1).a_n h^{n-2}$

$\Rightarrow P''(0) = 2.1.a_2$

$P''(0) = 2!\, a_2$

- $P'''(h) = 3.2.1a_3 + \cdots + n.(n-1).(n-2).a_n h^{n-3}$

$\Rightarrow P'''(0) = 3.2.1.a_3$

$P'''(0) = 3!\, a_3$

Portanto o polinômio de Taylor de ordem n da função *f* no ponto *a* é:

$P(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + f^n(a).\frac{h^n}{n!}$, já que $P^i(0) = f^i(a) \Rightarrow$

$f^i(a) = i!\, a_i \Rightarrow a_i = \dfrac{f^i(a)}{i!}$.

Se P(h) é o polinômio de Taylor de ordem *n* da função $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in I$, então a função $r(h) = f(a + h) - p(h)$, definida no intervalo J = $\{h \in \mathbb{R} / a + h \in I\}$, é n vezes derivável no ponto $0 \in J$, com $r\,(0) = r'(0) = \ldots = r^n(0) = 0$.

2.3. Lema

Seja $r: J \to \mathbb{R}$, n vezes derivável no ponto $0 \in J$. A fim de que seja $\boldsymbol{r^{(i)}(0) = 0}$ para $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n}$ é necessário e suficiente que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

***Demonstração*:**

Suponhamos inicialmente que as derivadas de r no ponto 0 sejam nulas até a ordem n.

Para *n = 1*, isto significa que $r(0) = r'(0) = 0$. Então,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)-r(0)}{h-0} = \mathrm{r}'(0) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Para $n = 2$, temos $r(o) = r'(0) = r''(0) = 0$. Daí,

$$\lim_{x\to 0} \frac{r'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{r'(x) - r!\,(0)}{x - 0} = r''(0) = 0.$$

O teorema do valor médio assegura que $\forall h \neq 0\ \exists\, x \in (o, h)$ tal que:

$r'(x) = \frac{r(h)-r(o)}{h-o} = \frac{r(h)}{h}$, assim,

$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{r\prime(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{r\prime(x)}{x} . \frac{x}{h}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$, pois $h \to 0$ implica $x \to 0$, e além disso $\frac{x}{h} \leq 1$. O mesmo argumento permite passar de *n = 2* para *n = 3* e assim por diante.

Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Daí resulta, para:

$i = 0, 1, 2, \ldots, n$, que: $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^i} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^i} . \frac{h^n}{h^n} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{r(h)}{h^n} . h^{n-i}\right) = 0$.

Pois $\left|h^{n-i}\right| \leq 1$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$ e $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Portanto, $r^0(0) = r(0) = \lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^0} = 0 \Rightarrow r^0(0) = 0$.

Além disso, $r'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)-r(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \Rightarrow r'(0) = 0$

Para $r''(0)$, consideremos a função auxiliar $\varphi: J \to R$, definida por

$\varphi(h) = r(h) - \frac{r''(o)h^2}{2}$. Note que, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, pois:

- $\varphi(0) = r(0) - \frac{r''(0).0^2}{2} = 0$
- $\varphi'(0) = r'(h) - r''(0).h \Rightarrow \varphi'(0) = r'(0) - r''(0).0 = 0$
- $\varphi''(h) = r''(h) - r''(0) \Rightarrow \varphi''(0) = r''(0) - r''(0) = 0$

Pela parte já demonstrada do lema segue que $\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{h^2} = 0$. Como $\frac{\varphi(h)}{h^2} = \frac{r(h)}{h^2} - \frac{r''(0)}{2}$, segue que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{r(h)}{h^2} - \frac{r''(0)}{2}\right) \Rightarrow 0 = 0 - \frac{r''(0)}{2} \Rightarrow r''(0) = 0$$

O mesmo argumento permite passar de r''(0) para r'''(0) e assim por diante.■

Lembrete: Teorema de valor médio:

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b) $\exists c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

2.4. Teorema: (Fórmula infinitesimal de Taylor)

Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável em $a \in I$. A função $r\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R} | a + h \in I\}$ dada pela igualdade:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^n(a).h^n}{n!} + r(h)$$

Cumpre: $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$ (2.1)

Reciprocamente, se *P(h)* é um polinômio de grau ≤ n tal que:

$r(h) = f(a + h) - P(h)$

Cumpre $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$, então $P(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a, isto é,

$$P(h) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^i(a)h^i}{i!} \qquad (2.2)$$

***Demonstração*:**

A função r, definida pela fórmula de Taylor, é n vezes derivável no ponto 0 e tem derivadas nulas nesse ponto, até ordem n. Logo, pelo Lema 2.3, vale $\lim_{n\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Reciprocamente, se $r(h) = f(a + h) - p(h)$ é tal que $\lim_{n\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$, então novamente pelo Lema 2.3, as derivadas de r no ponto o são nulos até ordem n, logo $P^{(i)}(0) = f^i(a)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, ou seja, $P(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a.

A fórmula infinitesimal de Taylor é assim chamada porque só afirma algo quando $h \to 0$. A seguir daremos outra versão dessa fórmula, onde é feita uma estimativa do valor $f(a+h)$ para h fixo. Ela é uma extensão do teorema do valor médio.

Lembrete: Teorema de Rolle

Seja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $(a,b), \exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

2.5 Teorema: (Fórmula de Taylor com resto de lagrange)

Seja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável em (a,b), com $f^{(n-1)}$ contínua em [a, b]. Existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(b-a)^n$$

Fazendo $b = a + h$, isto quer dizer que existe θ com $0 < \theta < 1$, tal que,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.h^{n-1} + \frac{f^n(a+\theta h).h^n}{n!}.$$

***Demonstração*:**

Seja φ: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x).(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}.(b-x)^{n-1} - \frac{k(b-x)^n}{n!}$$

Onde a constante k é escolhida de modo que $\varphi(a) = 0$. Então φ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b), com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Note que:

$$\varphi'(x) = -f'^{(x)} - f''(x).(b-x) + f'(x) - \frac{f'''(x)}{2}.(b-x)^2 + f''(x).(b-x) \ldots$$

$$-\frac{f^{(n)}(x).(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n-1)}(x).(b-x)^{n-2}}{n!} + \frac{k}{(n-1)!}.(b-x)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\varphi'(x) = \left[\frac{k - f^n(x)}{(n-1)!}\right].(b-x)^{n-1}$$

Pelo teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b)$ tal que φ'(c) = 0. Daí,

φ'(c) = 0 $\Rightarrow \left[\frac{k-f^n(c)}{(n-1)!}\right](b-c)^{n-1} = 0$, $b \neq c \Rightarrow k = f^n(c)$.

Logo, fazendo $x = a$ na definição de φ e lembrando que $\varphi(a) = 0$ temos o Teorema■.

2.6 Séries de Taylor e Funções analíticas:

Seja $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{∞}. Se a é ponto interior de I e $a + h \in I$, então podemos escrever $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a).(h)^{n-1}}{(n-1)!} + r_n(h)$ onde,

$r_n(h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_n h!)}{n!}h^n$, com $0 < \theta_n < 1$.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a).h^n}{n!}$, chama-se a série de Taylor em cada ponto interior $a \in I$.

Mas tal série pode convergir ou divergir, e mesmo quando converge, sua soma pode ser diferente $f(a + h)$.

Uma função $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I, chama-se analítica quando, para cada $a \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a).h^n}{n!}$, converge para $f(a + h)$ desde que $|h| < \varepsilon$.

Uma observação elementar, porém crucial, é a seguinte:

A fim de que a série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(a).h^n}{n!}$ convirja para $f(a + h)$ é necessário e suficiente que $\lim_{n\to\infty} r_n(h) = 0$.

Daremos agora alguns exemplos com série de Taylor.

Exemplo 1:

Seja $f(x) = sen\, x$. As derivadas sucessivas de $sen\, x$ são iguais a $cos\, x, -sen\, x, -cos\, x, sen\, x, etc.$ A fórmula de Taylor em torno de 0 fornece:

$sen\, x = sen\,(0) + sen'(0)(x-0) + \frac{sen''(0)(x-0)^2}{2!} + \cdots + \frac{sen^{n-1}(0)(x-0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{sen^{n}(C)(x-0)}{n!}$, com $|C| < |x|$.

Daí $sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{sen^{2n+2}(c).x^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Onde,

$r_{2n+2}(x) = \frac{sen^{2n+2}(c).x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ e $|c| < |x|$.

Note que

$$|r_{2n+2}(x)| = \left|\frac{sen^{2n+2}(c).x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right| = \underbrace{|sen^{2n+2}(c)|}_{\le 1}.\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} r_{2n+2}(x) = 0$.

Concluímos que vale o desenvolvimento em série de Taylor:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \forall x\ \in \mathbb{R} \qquad (2.3)$$

Ou seja, a série de Taylor de *sen x* em torno de 0 converge em toda a reta.■

Exemplo 2:

Seja $f(x) = \cos x$, as derivadas sucessivas de $\cos x$ são iguais $a - sen\ x, - cos\ x, sen\ x, cos\ x$, etc. A fórmula de Taylor em torno de 0 fornece:

$cos\ x = cos\ (o) + cos'(0)(x-0) + \frac{cos''(o)(x-o)^2}{2!} + \cdots + \frac{cos^{n-1}(o)(x-o)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{cos^n(C)(x-o)^n}{n!}$, e $|c| < |x|$.

Daí:

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!} + \frac{cos^{2n+1}(c). x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Onde

$$r_{2n+1}(x) = \frac{cos^{2n+1}(c). x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ e } |c| < |x|.$$

Note que

$$|r_{2n+1}(x)| = \left|\frac{cos^{2n+1}(c). x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = |cos^{2n+1}(c)| . \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} r_{2n+1}(x) = 0$.

Concluímos que vale o desenvolvimento em série de Taylor:

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \forall x\ \in \mathbb{R}. \ (2.4)\ ■$$

Exemplo 3:

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função exponencial f(x) = e^x. Então suas derivadas sucessivas são todas iguais a e^x. A fórmula de Taylor em torno de 0 fica:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c . x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad com\ |c| < |x|$$

Note que, $\forall x \in \mathbb{R}$ fixo, temos $\lim_{n\to+\infty} r_{n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} e^c . \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, logo $\forall x \in \mathbb{R}$ vale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (2.5)$$

Observe que a função exponencial é analítica em toda a reta pois para a e h reais quaisquer, temos:

$$e^{a+h} = e^a . e^h = e^a \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right) =$$

$$= e^a + e^a . h + e^a . \frac{h^2}{2!} + e^a . \frac{h^3}{3!} + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{a+h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a . h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)_{(a)}^{(n)} . h^n}{n!} \qquad \blacksquare$$

EXPONENCIAL COMPLEXA

Como vimos no capítulo anterior, a expansão em série de Taylor de e^t para t real é:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Substituindo t por $iy(y \in \mathbb{R})$ nesta série, sem se preocupar com convergência, obtemos:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

Essas duas últimas séries como vimos no capítulo anterior, são as expansões em série de Taylor de $cos\ y$ e de $sen\ y$ respectivamente. Em outras palavras, $e^{iy} = \cos y + i\ sen\ y$ parece uma boa interpretação para e^{iy}. Além disso, como $e^{s+t} = e^s . e^t$ se $s, t \in \mathbb{R}$, é natural esperarmos que $e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$. Motivados por estas considerações, damos a seguinte definição:

3.1 Definição

Dado um número complexo $Z = x + yi$, definimos a exponencial de Z por:

$$e^Z = e^x . (\cos y + i\ sen\ y) \qquad (3.1)$$

Exemplos:

1) $e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

2) $e^{\pi - \frac{\pi i}{2}} = e^{\pi} . e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\pi}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -e^{\pi} i$

3.2 Propriedades

1) $|e^Z| = e^{ReZ}$ e $\arg(e^Z) = \{Im\, Z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (3.2)

***Demonstração*:**

Seja $Z = x + iy$, temos:

$|e^Z| = |e^x(\cos y + i\, sen\, y)| = \sqrt{[(e^x)^2.\ cos^2 y] + [(e^x)^2.\ sen^2 y]} =$

$= \sqrt{(e^x)^2(cos^2 y + sen^2 y)} = e^x$, portanto $|e^Z| = e^{ReZ}$.

Agora, $\cos(\arg e^Z) = \frac{e^x . \cos y}{|e^Z|} = \frac{\cancel{e^x} . \cos y}{\cancel{e^x}} = \cos y$ ou seja $\cos(\arg e^Z) = \cos y \Rightarrow$ $\arg(e^Z) = y + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $\arg(e^Z) = \{Im\, Z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ■.

2) $e^Z \neq 0, \forall Z \in \mathbb{C}$.

***Demonstração*:**

Seja $Z = x + iy$, temos que $e^Z = e^x(\cos y + i\, sen\, y)$ é sempre diferente de zero, pois e^x é diferente de zero, $cos\, y$ e $sen\, y$ estão entre [-1, 1] e se $cos\, y = 0$, segue que $sen\, y = \pm 1$ daí:

$\cos y + i\, sen\, y \neq 0$ e $e^x.(\cos y + i\, sen\, y) \neq 0$.

Se *sen y = 0*, temos *cos y = ±1*, logo:

$\cos y + i\, sen\, y \neq 0$ e $e^x.(\cos y + i\, sen\, y) \neq 0$.

Portanto $e^Z \neq 0, \forall Z \in \mathbb{C}$. ■

3) $(e^Z)^n = e^{Z^n}$, para quaisquer $Z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

***Demonstração*:**

De fato, para $Z = x + iy$ temos:

$(e^Z)^n = (e^x.(\cos y + i\, sen\, y))^n = e^{nx}.(\cos y + i\, sen\, y)^n$, pela fórmula de *moivre* (1.7), segue que,

$$(e^Z)^n = e^{nx}.(\cos ny + i\, sen\, ny) = e^{nx}.e^{iny} = e^{nx+iny} + e^{n(x+iy)} = e^{nZ}. \blacksquare$$

4) Se $Z = x + iy$ e $w = a + bi$ são dois números complexos, temos:

$e^{z}.e^{w} = [e^{x}.(\cos y + i\,sen\,y)].[e^{a}.(\cos b + i\,sen\,b)]$

$= [e^{x}.cosy + e^{x}senyi].[e^{a}\cos b + e^{a}sen\,bi]$

$= e^{x}.e^{a}.\cos y.cos\,b + e^{x}.e^{a}.\cos y.sen\,bi + e^{x}.e^{a}.\text{sen}\,y.cos\,bi - e^{x}.e^{a}.\text{sen}\,y.sen\,b$

$= e^{x+a}(\cos y.cos\,b - \text{sen}\,y.sen\,b) + e^{x+a}.i(\text{sen}\,y.cos\,b + \cos y.sen\,b)$

$= e^{x+a}[\cos(y+b)] + e^{x+a}.i[\text{sen}(y+b)]$

$= e^{x+a}[\cos(y+b) + i[\text{sen}(y+b)] = e^{Z+w}$

Ou seja, $e^{Z}.e^{w} = e^{Z+w}$ para todo Z, w $\in\ \mathbb{C}$. (3.4)

Lembrete: Ao contrário do que acontece no caso real, é possível termos $e^{Z} = e^{w}$com $Z \neq w$. Por exemplo, $e^{o} = e^{2\pi i} = 1$.

3.3 Proposição

Para quaisquer $Z, W \in \mathbb{C}$, temos que $e^{Z} = e^{w} \Leftrightarrow Z = w + 2k\pi i$, para algum $k \in Z$.

***Demonstração*:**

Seja $Z = x + iy$ e $w = a + bi$ com x, y, a, b $\in\ \mathbb{R}$. Se $e^{Z} = e^{w}$segue que:

$e^{x}.(\cos y + i\,sen\,y) = e^{a}.(\cos b + i\,sen\,b)$

Então,

$e^{x} = e^{a} \Rightarrow x = a\ e\ y = b + 2k\pi = w + 2k\pi i$ para algum k $\in$ Z. Daí:

$Z = a + (b + 2k\pi)i = a + bi + 2k\pi i = w + 2k\pi i$

Se $Z = w + 2k\pi i$ com $k \in Z$, então $e^{Z} = e^{w+2k\pi i} = e^{w}e^{2k\pi i} = e^{w}(cos 2k\pi + i\,sen\,2k\pi) = e^{w}$. ■

Vimos no capítulo 1 que todo número complexo não nulo Z tem uma representação polar $Z = |Z|(\cos\theta + i\,sen\,\theta), \theta$ é um argumento de Z. Com a noção de exponencial, podemos escrever de forma mais simples: $Z = |Z|.e^{i\theta}$.

Observemos também que as n raízes n-ésimas de um número complexo não nulo w, $w_k = \sqrt[n]{|w|}\left[cos\left(\frac{\arg(w)}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right] + i\,sen\left(\frac{\arg(w)}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)$, podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\sqrt[n]{|w|}.e^{i\left(\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}\right)} \text{para } k = 0, 1, ..., n-1 \qquad (3.5)$$

Em particular, as n raízes n-ésimas do número 1(conhecidos como as raízes n-ésimas da unidade) são dadas por $Z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$para $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Notemos também que as n raízes n-ésimas de w podem ser obtidas multiplicando-se a raiz n-ésima principal $\sqrt[n]{|w|}$ de w pelas raízes n-ésimas da unidade.

De fato,

$\sqrt[n]{|w|}.e^{i\left(\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}\right)} = Z_k\sqrt[n]{w}$, $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$. Por exemplo, se $n = 2$, temos:

$Z_0 = e^{\frac{2.0.\pi i}{2}} = e^0 = 1$ e $Z_1 = e^{\frac{2.1.\pi i}{2}} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\,sen\,\pi = -1.$

Logo, as raízes quadradas de w são $\sqrt{w}\ e - \sqrt{w}$.

ALGUMAS APLICAÇÕES DA EXPONENCIAL COMPLEXA

4.1 Equação de Euler

A fórmula de Euler, cujo nome é uma homenagem a Leonhard Euler, é uma fórmula matemática da área específica da análise complexa, que mostra uma relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial.

D'Ambrosio (2009) descreve que Euler, como matemático, físico, engenheiro e educador, foi uma figura central na Europa do século XVIII. Sua vida foi basicamente em Basiléia, Suíça (1707-1727), em São Peterburgo, Rússia, em duas fases (1727-1741 e 1766-1783), e em Berlim, Prússia (1741-1766). Mas sua ação estendeu-se a toda a Europa, e sua excelência acadêmica levou o a ser membro de várias academias em outros países. Destacando a *Académie Royale des Sciences de Paris, a Royal Society of London e a Società Scientifica Privata Torinese*. Sendo um dos matemáticos mais prolíficos de todos os tempos, de acordo com a *US Naval Academy* (USNA), com 886 artigos e livros publicados. Grande parte de sua produção veio durante as duas últimas décadas de sua vida, quando ele estava totalmente cego.

A fórmula de De Moivre é uma consequência direta da fórmula de Euler. Além disso, Euler elaborou a teoria das funções transcendentais superiores através da introdução da função gama e introduziu um novo método para resolver equações quartic. Ele também encontrou uma maneira de calcular integrais com limites complexos, prefigurando o desenvolvimento da análise complexa moderna. Ele também inventou o cálculo das variações, incluindo seu resultado mais conhecido, a equação de Euler-Lagrange.

Vimos que se $\mathrm{Z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy} \in \mathbb{C}$, então $\mathrm{e^z} = \mathrm{e^x}(\cos \mathrm{y} + \mathrm{i\ sen\ y})$. Se $\mathrm{Z} = \mathrm{iy}$ obtemos a fórmula de Euler:

$$e^{iy}(\cos y + i\ sen\ y) \qquad (4.1)$$

A identidade de Euler é um caso especial da fórmula de Euler, dada pela seguinte equação:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (4.2)$$

Segundo Richard P. Feynman, seria a identidade mais bela de toda a matemática. Que é determinada à partir da fórmula de Euler.

Sabemos que, $e^{i\pi} = \cos y + i\ sen\ y$, fazendo $y = \pi$. Temos $e^{i\pi} = \cos \pi + i\ sen\ \pi$, como $\cos \pi = -1$ e $sen\ \pi = 0$, segue que $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$.

A beleza da equação é que ela relaciona cinco números fundamentais da matemática: $e, \pi, i,$ 0 e 1; e as operações base da matemática: adição, multiplicação e exponenciação.

4.2 Visualização geométrica de $e^{i\pi}$

O número real e, que aparece na identidade de Euler, é o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende para o infinito. Com manipulações de limites, é possível deduzir que e^x é o limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ quando n tende para o infinito. Outro resultado que também se demonstra em matemática superior, e que aqui apenas assumiremos como válido, é o de que a definição de e^x como limite também é valida quando x é um numero complexo.

Se x é o número complexo $i\pi$, então, para valores cada vez maiores de n, a expressão $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ se aproxima cada vez mais, e tanto quanto for necessário de $e^{i\pi}$. Usando esse resultado, e tomando a identidade de Euler $e^{i\pi}=-1$, concluímos que os termos da sequência

$$(1+i\pi),\left(1+\frac{i\pi}{2}\right)^2,\left(1+\frac{i\pi}{3}\right)^3,\left(1+\frac{i\pi}{4}\right)^4,\ldots$$

se aproximam cada vez mais, e tanto quanto quisemos, de -1. A seguir ilustraremos a esse resultado geometricamente.

Sendo $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ o *n-ésimo* termo dessa sequência, investigaremos geometricamente a representação, no plano Argand-Gauss, dos complexos

$$\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^1 \left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^2,\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^3,\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^4,\ldots,\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$$

para alguns valores de n.

Recordemos que a forma trigonométrica (polar) complexo $z=a+bi$ é $|Z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ e a da potencia z^n é $|Z|^n(\cos n\,\theta+i\operatorname{sen} n\theta)$, esta segunda usualmente chamada de 1ª fórmula de Moivre. Geometricamente, a representação dos complexos $z, z^2, z^3, \ldots$ nada mais [e do que uma sequência de vetores no plano Argand-Gauss de origem no par ordenado (0, 0), módulos respectivamente iguais a $|z|, |z|^2, |z|^3, \ldots$ e argumentos respectivamente iguais a $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$. Voltando a sequência cujos termos estávamos interessados em representar geometricamente.

Para $n = 1$, chamaremos $1 + i\pi$ de z_1; para $n = 2$, chamaremos $\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right)$ de z_2 e representaremos, nos planos de Argand-Gauss nos gráfico 1 e 2 abaixo, os complexos z_1, z_2 e ${z_2}^2$.

Gráfico 2

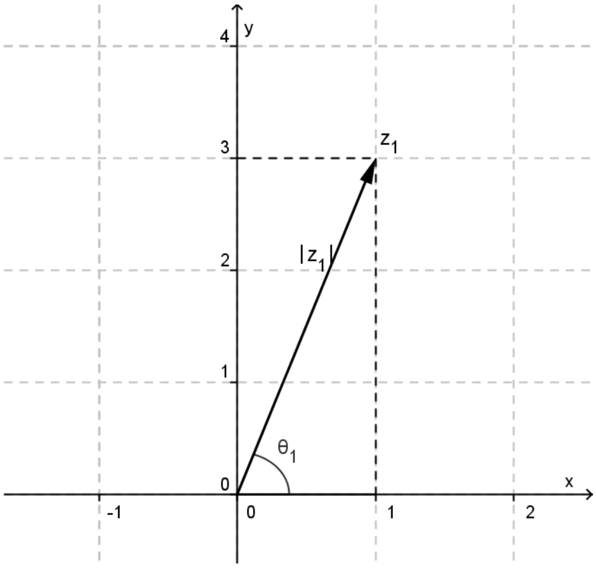


Gráfico 1

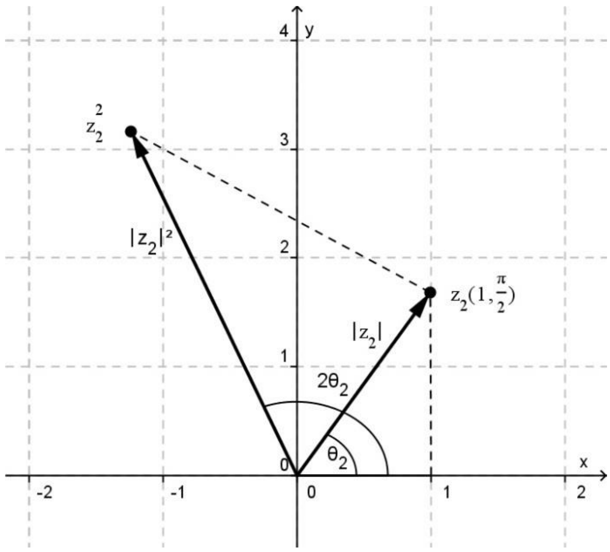
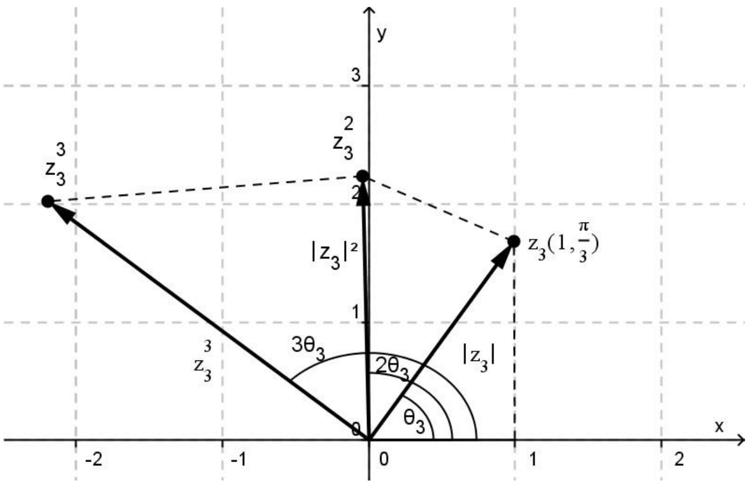


Gráfico 3



Para $n = 3$, chamaremos $\left(1 + \frac{i\pi}{3}\right)$ de z_3 e representaremos os complexos z_3, z_3^2 e z_3^3 que são $.1 + \frac{i\pi}{3}, \left(1 + \frac{i\pi}{3}\right)^2$ e $\left(1 + \frac{i\pi}{3}\right)^3$, conforme gráfico 3.

Estendendo essa investigação para um valor muito grande de n, teremos $|z_n|$ muito próximo de 1, e os n vetores no plano irão percorrer um semicírculo com par ordenado mais à esquerda tendendo para $(-1, 0)$, conforme ilustramos a seguir para o caso de $n = 4$, $n = 5, n = 6$ e $\mathrm{n} = 25$;

Gráfico 5

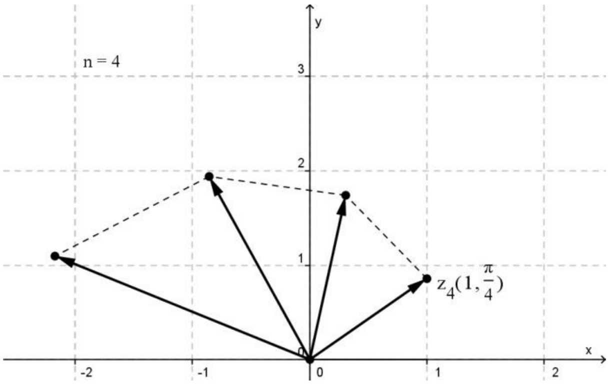


Gráfico 4

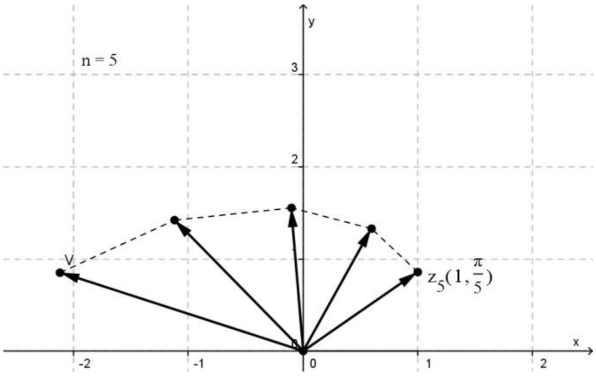


Gráfico 7

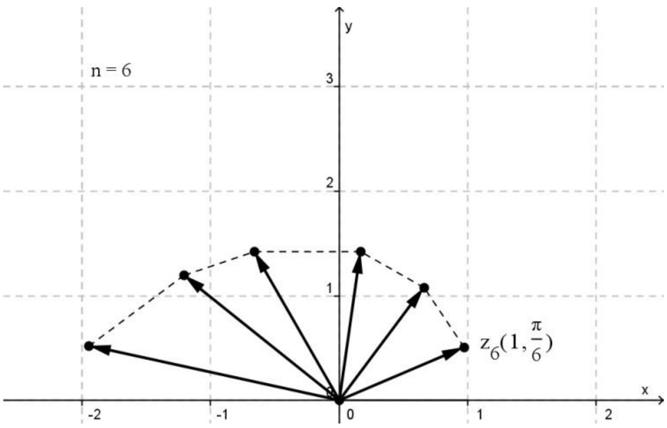
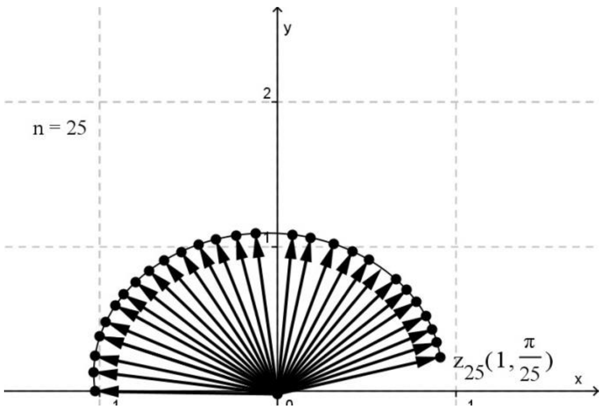


Gráfico 6



Portanto, $e^{i\pi} = -1$ equivale a dizer que, para valores muito grandes de n, a representação dos complexos

$$(1 + i\pi\,),\ \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^3, \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^4, \dots, \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$

no plano Argand-Gauss se aproxima de um semicirculo de centro (0, 0) e raio 1, com o par ordenado mais à esquerda da representação tendendo para $(-1, 0)$. Do ponto de vista geométrico, é notável o surgimento de semicírculo, por isso que o número π está presente na identidade de Euler.

4.3 Logaritmos

Um número real a é dito logaritmo natural (ou o logaritmo na base e) de um número real positivo $b, a = \ln b$, quando $e^a = b$. Seguindo este conceito, dizemos que um número complexo W é um logaritmo de um número complexo não nulo Z se $e^W = Z$.

Existe uma diferença muito importante entre o caso real e o caso complexo. Enquanto no caso real todo número positivo possui um único logaritmo, veremos a seguir que todo número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos. Denotamos por $\log Z$ o conjunto de todos os logaritmos do número complexo $Z \neq 0$.

4.4 Definição

Para todo número complexo não nulo Z:

$$\log Z = \{W \in \mathbb{C}: e^w = Z\} \qquad (4.3)$$

Vamos agora determinar $\log Z$.

Se $W = ln|Z| + i\theta, \theta \in \arg Z$, então:

$e^W = e^{ln|Z|}.e^{i\theta} = |z|.e^{i\theta} = |z|.(\cos\theta + i\ sen\ \theta) = Z$. Por outro lado, suponhamos $W \in \log Z$. Então $e^W = Z$, o que equivale a dizer que:

$e^{Rew} = |e^W| = |Z|\ e\ Im\ W = \arg Z + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, onde:

$W = ln|Z| + i\theta$ com $\theta \in \arg Z$.

De fato, sejam $Z = x + iy$ e $W = a + bi \Rightarrow a = Rew$ e $b = Im\ W$.

$e^w = Z = |Z|(\cos(\arg Z) + i\ sen\ (\arg Z)$ e $e^w = e^a.(\cos b + i\ sen\ b)$ daí:

$e^a.(\cos b + isen\ b) = |Z|.(\cos(\arg Z) + i\ sen\ (\arg Z)) \Rightarrow$

$e^a = |Z|$, isto é, $e^{Rew} = |Z|$ e $b = \arg Z + 2k\pi \Rightarrow Im\ W = \arg Z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Portanto,

$\log z = \{ln|z| + i\theta, \theta \in \arg Z\}$

$\log z = \{ln|z| + i(\arg z + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}\}$ (4.4)

Fazendo $k = 0$, obtemos o logaritmo principal de Z, $Log\ Z$. Assim,

$Log\ Z = \ln|Z| + i\ Arg\ Z$ (4.5).

De (4.4) e (4.5) temos:

$$\log Z = \{Log\ Z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\} \qquad (4.6)$$

Observe que $Log\ x = ln\ x$ para todo real *x*. Escreveremos então *Log x* em vez de *ln x*, quando x for um real positivo.

Exemplos:

1) $Log\ (-1) = \log|-1| + i(\arg z)$, $\cos(\arg z) = \frac{x}{|Z|} = -1$, daí $\arg Z = \pi$ e $Log|-1| = 0$ então $Log\ (-1) = \pi.i$.

2) $Log\ (e^2.i) = \log e^2 + i(\arg z)$, $\cos(\arg z) = \frac{0}{|Z|} = 0$, daí $\arg Z = \frac{\pi}{2}$ e $\mathrm{Log}\, e^2 = 2$ então $Log\ (e^2.i) = 2 + i\frac{\pi}{2}$.

3) $Log\ (1 + i) = log|Z| + i(\arg Z)\,, |Z| = \sqrt{2}, \cos(\arg Z) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, daí $\arg Z = \frac{\pi}{4}$, então $Log\ (1 + i) = Log\ \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$.

Definindo $A - B = \{a - b: a\ \in A$ e $b \in B\}$ e $mA = \{ma: a\ \in A\}$ para $A, B\ \subset \mathbb{C}$ e $m\ \in \mathbb{Z}$, temos:

Dados dois números complexos não nulos Z_1 e Z_2, é verdade que:

a) $\log(Z_1 Z_2) = \log Z_1 + \log Z_2$

b) $\log(Z_1/Z_2) = \log Z_1 - \log Z_2$

c) $\log({Z_1}^m) = m \log Z_1$, para todo $m\ \in \mathbb{Z}^*$

***Demonstração*:**

a) Tomemos $W\ \in \log Z_1 + \log Z_2$. Então $W = W_1 + W_2$ com $W_1 \in \log Z_1$ e $W_2 \in \log Z_2$. Daí $e^W = e^{W_1}.e^{W_2} = Z_1.Z_2$, ou seja, $W\ \in \log(Z_1 Z_2)$. Tomemos agora $W\ \in \log(Z_1 Z_2)$. Então, $W = \mathrm{Log}|Z_1 Z_2| + i\theta, \theta\ \in \arg(Z_1 Z_2)$. Por (1.6) $\theta = \theta_1 + \theta_2$ com $\theta_1 \in \arg Z_1$ e $\theta_2 \in \arg Z_2$.

Assim, $W = Log\ |Z_1| + i\theta_1 + Log\ |Z_2| + i\theta_2$, pois o logaritmo do produto de números reais é a soma dos logaritmos dos fatores reais, daí $w \in log\ Z_1 + log\ Z_2$.

b) Tomemos $W \in \log Z_1 - \log Z_2$. Então $W = W_1 - W_2$ com $W_1 \in \log Z_1$ e $W_2 \in \log Z_2$. Daí $e^w = e^{w_1}.e^{-w_2} = \frac{e^{w1}}{e^{w2}} = \frac{Z_1}{Z_2}$, ou seja, $w\ \in \log\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$. Tomemos agora $W\ \in \log\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$. Então, $W = \mathrm{Log}\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| + i\theta, \theta\ \in \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$. Por (1.6) $\theta = \theta_1 - \theta_2$com $\theta_1 \in \arg Z_1$ e $\theta_2 \in \arg Z_2$.

Assim, $W = (Log\ |Z_2| + i\theta_1) - (Log\ |Z_1| + i\theta_2)$, daí $W \in log\ Z_1 - log\ Z_2$.

c) Tomemos $W \in m \log Z_1, m \in \mathbb{Z}^*$. Então $W = m.W_1$, $W_1 \in \log Z_1$. Daí $e^W = e^{mW_1} = (e^{W_1})^m = Z_1^m$, ou seja, $W \in \log Z_1^m$. Adotemos agora $W \in \log Z_1^m$. Então $W = \mathrm{Log}\, Z_1^m . + i\theta, com\ \theta \in \arg Z_1^m$, $\theta = m\theta_1$, por (1.7), com $\theta_1 \in \arg Z_1$.

Assim, $w = log\,|Z_1|^m + \theta_1^m i = m\ Log\,|Z_1| + m\theta_1 \mathrm{i} \in m\ log\ Z_1$. ■

Lembrete:

Não é sempre verdade que:

$\mathrm{Log}(Z_1 Z_2) = \mathrm{Log}\, Z_1 + \mathrm{Log}\, Z_2$, $\mathrm{Log}(\frac{Z_1}{Z_2}) = \mathrm{Log}\, Z_1 - \mathrm{Log}\, Z_2$ e $\mathrm{Log}\, Z_1^m = m\ Log\ Z_1$.

Exemplos:

1) Tome $Z = W = -i$. Temos que $Log\ (Z.W) = Log\ (Z^2)$. E,

$\log\ (Z.W) = Log\ (Z) + Log\ W = -\frac{\pi}{2} i + \left(-\frac{\pi}{2} i\right) = -\pi i$, mas

$Log(Z^2) = 2\frac{\pi}{2} i = \pi i$, pois $(Z^2) = (-i)^2 = i^2$.

Logo $Log\ (Z.W) = Log\ (Z^2) \neq (Log\ Z + Log\ W)$

2) Tome $Z = -i$ e $W = i$, daí $\frac{Z}{w} = -1\ e\ Log\left(\frac{Z}{W}\right) = \pi i$, agora,

$\mathrm{Log}\, Z - Log\ W = -\frac{\pi}{2} i - \frac{\pi}{2} i = -\pi i$, $Log\left(\frac{Z}{W}\right) \neq Log\ Z - Log\ W$.

4.5 Função Exponencial

4.5.1 Definição

A função exponencial é a função exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por:

$exp\, Z = e^Z$

Como $|e^Z| = e^x$ para todo $Z = x + yi \in \mathbb{C}$ Z, vemos que $exp\, Z \neq 0$ para todo $Z \in \mathbb{C}$. São válidas as propriedades (3.2) e (3.4).

Uma outra propriedade importante da função exponencial é que ela é periódica de período 2πi, isto é, *exp(Z + 2πi) = expZ* para todo $Z \in \mathbb{C}$.

Note que a função exponencial complexa estende a função exponencial real, pois:

$e^{x+io} = e^x(\cos o + i\ sen\ o) = e^x$.

Exemplo:

A função $f(Z) = e^Z$ transforma a reta vertical $R = \{Z \in \mathbb{C}\ |ReZ = a\}$ no círculo $C = \{Z \in \mathbb{C}\ |\ |Z| = e^a\}$ e transforma a reta horizontal $S = \{Z \in \mathbb{C}\ \ |ImZ = b\}$ na semirreta $L = \left\{Z \in \mathbb{C}\ |\ Z = re^{ib} com\, r > 0\right\}$.

***Demonstração*:**

Seja $Z \in \mathbb{C}$, $ReZ = a$. Assim, $|f(Z)| = e^{ReZ} = e^a$ daí $f(Z) \in C$, logo temos que $f(R) \subset C$.

Agora fixamos $W_0 \in C$ e resolvemos a equação $W_o = e^Z$ para Z em termos de W_o. As soluções são $Z = \mathrm{Log}|W_o| + i(\arg W_o + 2k\pi)\,, k \in Z$.

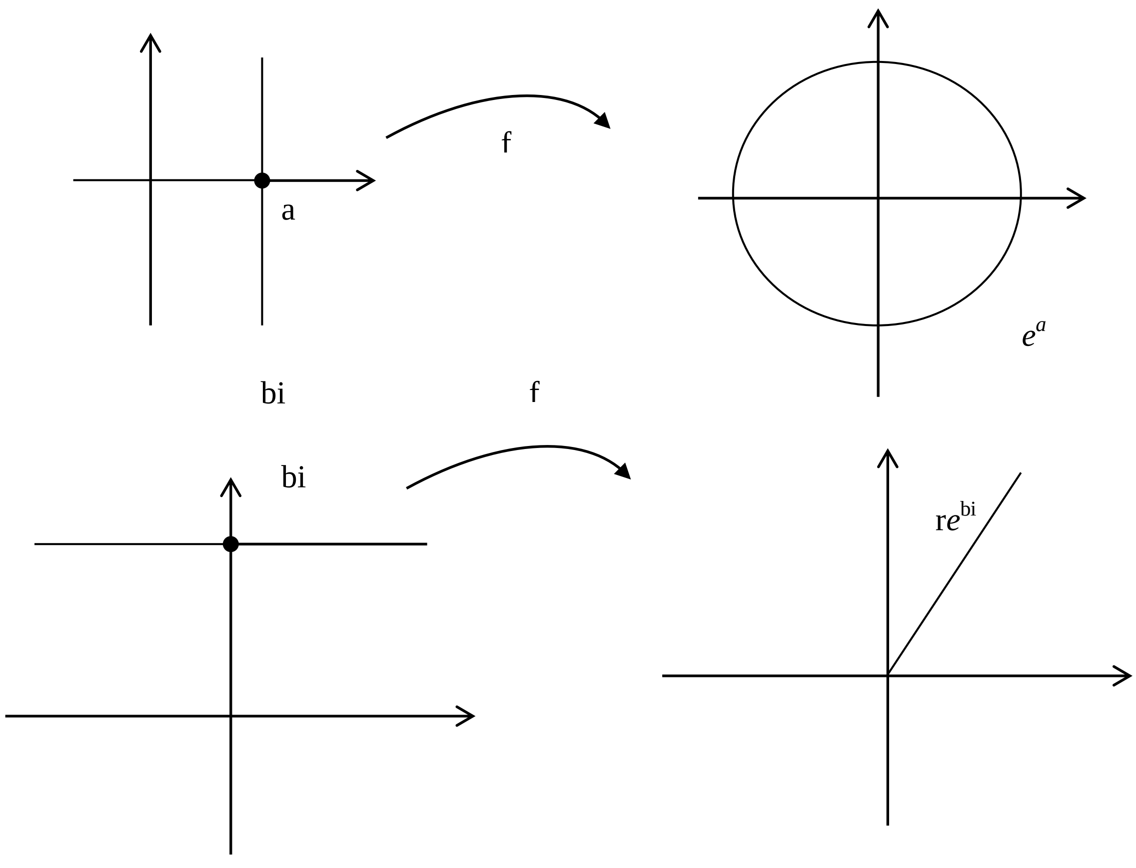
Seja Z_o umas dessas soluções. Então, $Z_o \in R$, pois $Re(Z_o) = Log\ (W_o)$, como $W_o \in C$, temos que $|W_o| = C^a$. Portanto, $Re(Z_o) = Log\, e^a$ e $f(Z_o) = W_o$. Assim, $W_o \in f(R)$. Então, $C \subset f(R)$. Portanto *f(R)*= *C*.

Agora, dado $w_o \in L$, temos que $Z_o = Log\,|w_o| + bi \in S$ e $f(Z_o) = e^{Z_o} = e^{\log|wo|+bi} = e^{\log|wo|}.e^{bi} = |w_o|\,.(\cos b + i\ sen\ b) = w_o$, ou seja, $f(Z_o) = w_o$.

Assim, $L \subset f(S)$. Se $Z \in S$, então $f(Z) = e^Z = e^{ReZ}.e^{iIm\,Z} = e^{ReZ}.e^{bi} \in L$.

Logo $f(Z) \in L$, daí $f(S) \subset L$. Portanto $f(S) = L$.

Gráfico 8



4.6 Funções Trigonométricas complexas

Para $y \in \mathbb{R}$, temos:

(I) $e^{iy} = \cos y + i\, sen\, y$

(II) $e^{-iy} = \cos y - i\, sen\, y$

Somando (I) e (II) temos:

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y \Rightarrow cos\ y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

Agora subtraindo (II) de (I) segue:

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i\, seny \Rightarrow sen\ y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Portanto, é natural definir a função cosseno e a função seno de uma variável complexa por:

$$\cos Z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\, Z = \frac{e^{iz}- e^{-iz}}{2i}\ (Z \in \mathbb{C}).$$

As demais quatro funções trigonométricas são definidas em termos das funções cosseno e seno pelas relações usuais. Assim, $tg\ Z = \frac{sen\ Z}{\cos Z}$ e $\sec Z = \frac{1}{\cos Z}$ estão definidas para $Z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos z \neq 0$, e $cotg\ Z = \frac{\cos Z}{sen\ Z}$ e $\csc Z = \frac{1}{sen\ z}$ e estão definidas para todo $Z \in \mathbb{C}$, tal que, $sen\ Z \neq 0$. Note que as funções trigonométricas complexas estendem as correspondentes funções reais. Pois, por exemplo:

$$\cos\,(x + io) = \frac{e^{i(x+io)} + e^{-i(x+io)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{\cos x + \cancel{i\, sen\, x} + \cos x - \cancel{i\, sen\, x}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cos x}{\cancel{2}} = \cos x$$

As demais prova são feitas de modo análogo.

4.7 Proposição

Temos que $\cos z = 0$ se, e somente se, $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $sen\ Z = 0$, se, e somente se, $Z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Os zeros do cosseno e do seno complexos são os zeros do cosseno e do seno reais, respectivamente.

***Demonstração*:**

Sabemos que o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico de um número real y são definidos por $\cos hy = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$ e sen $hy = \frac{e^y-e^{-y}}{2}$, respectivamente. Seja $Z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Então,

$$\cos Z = \cos(x+yi) = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-y}.(\cos x + i\ sen\ x) + e^{y}(\cos x - i\ sen\ x)}{2}$$

$$= \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\ sen \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

Logo $cos\ Z = cos\ (x + yi) = cos\ x. cos\ hy - i\ sen\ x\ .sen\ hy$. Analogamente obtemos:

$sen\ Z = sen\ (x + yi) = sen\ x \cos hy + i\ cox. sen\ hy$

Daí, $\cos Z = 0 \Leftrightarrow \cos x\ .\cos hy = 0$ e $sen\ x. sen\ hy = 0$. Como $\cos hy > 0 \Rightarrow \cos x = 0$, ou seja, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $x = \frac{\pi}{2}$ em $sen\ x. sen\ hy = 0$ temos $sen\ x\ .sen\ hy = 0$, como $sen\ x \neq 0$ temos $sen\ hy = 0$ e $y = 0$. Portanto, $\cos Z = 0$ se e somente se $Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Analogamente usando $sen\ Z = sen\ (x + yi) = sen\ x\ .\cos hy + i \cos x\ .sen\ hy$ demonstra-se que $sen\ Z = 0$. Se, e somente se, $Z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

A maioria das propriedades validas para as funções trigonométricas reais permanecem válidas no caso complexo. Por exemplo, temos a seguinte proposição:

4.8 Proposição

Para quaisquer $Z, W \in \mathbb{C}$, temos:

a) $sen\ ^2 Z - cos^2 Z = 1$

b) $sen\ (-Z) = -sen\ Z$

c) $\cos(-Z) = \cos Z$

d) $sen\ (Z + W) = sen\ Z. \cos W + \cos Z\ .sen\ W$

e) $cos\ (Z + W) = cos\ Z. \cos W - \text{sen}\ Z\ .sen\ W$

***Demonstração*:**

a) De fato,

$$cos^2 Z - sen^2 Z = \left(\frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iZ} + 2e^{iZ}.e^{-iZ} + e^{-2iZ}}{4} - \frac{e^{2iZ} - 2e^{iZ}.e^{-iZ} + e^{-2iZ}}{4}$$

$$= \frac{4\, e^{iZ}.e^{-iZ}}{4} = 1$$

b) De fato,

$$sen\,(-Z) = \frac{e^{i(-Z)} - e^{-i(-Z)}}{2i} = \frac{e^{-iZ} - e^{iZ}}{2i} =$$

$$= -\left(\frac{e^{-iZ} - e^{iZ}}{2i}\right) = -sen\,Z$$

c) De fato,

$$cos\,(-Z) = \frac{e^{i(-Z)} + e^{-i(-Z)}}{2} = \frac{e^{-iZ} + e^{iZ}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-iZ} + e^{iZ}}{2} = \cos Z$$

d) De fato,

$$sen\,(Z + W) = \frac{e^{i(Z+W)} - e^{-i(Z+W)}}{2i} = \frac{e^{iZ}.e^{iW} - (e^{-iZ}.e^{-iW})}{2i}$$

Note que,

$\cos Z = \frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}$, e

isen $Z = i\left(\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i}\right) = \frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2}$

Daí,

$$\cos Z + i\,sen\,Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ} + e^{iZ} - e^{-iZ}}{2} = e^{iZ}.$$

Logo,

$$sen\ (Z+W) = \frac{e^{iZ}.e^{iW} - \left(e^{-iZ}.e^{-iW}\right)}{2i}$$

$$= \frac{(\cos Z\ +\ i\ sen\ Z).(\cos W +\ i\ sen\ W) - (\cos Z -\ i\ sen\ Z).(\cos W -\ i\ sen\ W)}{2i}$$

$$= \frac{2isen\ Z.\cos W + 2icosZsenW}{2i}$$

$$= sen\ Z\ .\cos W + \cos Z + sen\ W$$

e) $\cos(Z+W) = \frac{e^{i(Z+W)} + e^{-i(Z+W)}}{2}$

$$= \frac{e^{iZ}.e^{iW} +\ e^{-iZ}.e^{-iW}}{2}$$

$$= \frac{\overbrace{(\cos Z + i\ sen\ Z).(\cos W + i\ sen\ W)}^{1} + \overbrace{(\cos Z - i\ sen\ Z).(\cos W - i\ sen\ W)}^{2}}{2}$$

Note que,

(1) $(\cos Z + i\ sen\ Z).(\cos w + i\ sen\ W)$

$$= \frac{\cos Z.\cos W +\ i\cos Z.sen\ W\ + i\ sen\ Z.\cos W - sen\ Z.sen\ W}{2}$$

(2) $(\cos Z - i\ sen\ Z).(\cos W - i\ sen\ W)$

$$= \frac{\cos Z.\cos W -\ i\cos Z.senW\ + i\ sen\ Z.\cos W - sen\ Z.sen\ W}{2}$$

Somando (1) e (2) temos

$$= \frac{\cos Z.\cos W - sen\ Z.sen\ W + \cos Zcos\ W - sen\ Z.sen\ W}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(\cos Z.\cos W - sen\ Z.sen\ W)}{\cancel{2}}$$

$$= \cos Z.\cos W - sen\ Z.sen\ W$$

Portanto,

$$\cos(Z+W) = \cos Z.\cos W - sen\ Z.sen\ W$$

Entretanto, há diferenças entre o caso real e o caso complexo. Por exemplo, sabemos que as funções cosseno e seno são limitados em $\mathbb{R}$.

De fato, $|cos\, x| \leq 0$ e $|sen\, x| \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Contudo elas não são limitadas em $\mathbb{C}$, pois $|\mathrm{Cos}(yi)| = \left|\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \to +\infty$, quando $y \to +\infty$.

CONCLUSÃO

Nesse trabalho nos propusemos a estudar os números complexos, suas diferentes representações, propriedades e operações, apresentando definições, exemplos, teoremas e demonstrações, visto que é um assunto pouco explorado no ensino médio. E assim feito este estudo, possibilitamos ao leitor ampliar seus conhecimentos apresentando em seguida a definição de exponencial complexa, suas propriedades e algumas aplicações.

REFERÊNCIAS

COOLMAN, Robert. **Euler's Identity: 'The Most Beautiful Equation'**. Live Science Contributor | June 30, 2015. Disponível em: http://www.livescience.com/51399-eulers-identity.html. Acesso em: 5 de fevereiro de 2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Euler, um matemático multifacetado**. Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 9 n o 17 (abril/2009 -setembro/2009) – pág. 13-31 Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática. UNICAMP – Brasil.

FERNANDEZ, Cecília S. **Estudo de algumas funções complexas de uma variável complexa: aspectos algébricos e geométricos**. 2011.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. MELLO, José Luiz Pastore. **Olhando novamente a identidade $e^{i\pi}+1=0$**. Revista do Professor de Matemática n. 78. Ano 30 – 2012.

HONIG, Choing Samuel. **Introdução Às Funções de uma Variável Complexa**. 6 Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas, 1967.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 6: complexos, polinômios, equações**. Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real** volume 1. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

SANTOS, Gabriel Tebaldi. **Números Complexos**. Fundamentos da Matemática. Fernando Torres. UNICAMP – IMECC.