Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Contagem de caminhos reticulados no plano

Marina Ribeiro Dias

Orientador: Prof. Dr. Robson da Silva

São José dos Campos

Março, 2017

Título: *Contagem de caminhos reticulados no plano*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Março, 2017

Dias, Marina Ribeiro

Contagem de caminhos reticulados no plano, Marina Ribeiro Dias – São José dos Campos, 2017.

viii, 49f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Counting of lattice path in the plane

1. Princípios de Contagem. 2. Caminhos Reticulados. 3. Plano cartesiano. 4. Bijeções.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Carlos Marcelo Gurjão de Godoy

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

MARINA RIBEIRO DIAS

CONTAGEM DE CAMINHOS RETICULADOS NO PLANO

Presidente da banca: Prof. Dr. Robson da Silva

Banca examinadora:

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Grasiele Cristiane Jorge

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Mari Sano

Prof. Dr. Tiago Rodrigues Macedo

Data da Defesa: 20 de março de 2017

"Não é a sorte que realiza sonhos. É a sintonia entre o querer e o agir".

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus pela oportunidade de cursar o tão sonhado mestrado e por ter me dado força para continuar diante das dificuldades encontradas.

Quero agradecer também, sem dúvida, meu pai, minha mãe e minha irmã, as pessoas mais importantes da minha vida, minha família, minha base, que sempre estiveram junto comigo nas horas que mais precisei, me apoiando e incentivando.

A Fundação CAPES e Unifesp por oferecerem a oportunidade de aprendizado. Aos professores do curso pelos ensinamentos. Em especial, ao meu professor orientador, que teve muita paciência, e sempre disposição para contribuir e apoiar no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos do PROFMAT, por horas de estudos, mais horas de risadas e pela troca de conhecimentos.

Um agradecimento especial aos meus amigos de trabalho, por várias vezes me verem desanimada, e me darem força, incentivo para concretizar meu sonho.

RESUMO

Neste trabalho estudamos as principais ferramentas da combinatória enumerativa para aplicá-las a problemas envolvendo contagem de caminhos reticulados no plano cartesiano. Dentre as técnicas, além daquelas já vistas no curso de Matemática Discreta, destacamos as provas bijetivas e o Princípio da Inclusão e Exclusão. Nossa intenção é aplicar as principais técnicas de contagem na enumeração de caminhos reticulados no plano cartesiano e, assim, abordarmos de uma só vez temas tratados no ensino de Combinatória e a familiarização com o plano cartesiano, sendo este último um tópico onde os alunos do Ensino Médio apresentam grandes dificuldades.

Palavras-Chave: Princípios de Contagem, Caminhos Reticulados, Plano cartesiano, Bijeções

ABSTRACT

In this work we studied the main tools of enumerative combinatorics in order to apply them to problems involving enumeration of lattice paths in the Cartesian Plane. Among the tools, besides the ones already studied in the Discrete Mathematic course, we highlight the bijective proofs as well as the inclusion and exclusion principle. Our intention is to apply the main counting techniques to enumerate lattice paths in the Cartesian Plane. Thus, to approach at once topics covered in the teaching of combinatorics and get the students to be more familar with the Cartesian Plane, the latter being a topic where high school students have great difficulties.

Keywords: Principles of Enumeration, Lattice Paths, Cartesian Plane, Bijections

SUMÁRIO

1

INTRODUÇÃO

Para dar início a este trabalho, procuramos um assunto que nos fosse interessante tanto para o aprendizado das técnicas de combinatória enumerativa quanto para a elaboração de uma proposta didática, que ao mesmo tempo, sirva para fixar os conceitos de combinatória e relembrar o plano cartesiano, tópico em que os alunos apresentam grandes dificuldades. A experiência adquirida em sala de aula nos mostra que essa abordagem, de certa forma inovadora, poderá despertar o interesse dos alunos para esses temas.

O objetivo deste trabalho é dar o suporte necessário para que os professores do Ensino Médio tenham conhecimento suficiente para aplicar este assunto em sala de aula, tendo em vista que caminhos reticulados não fazem parte do Currículo do Ensino de Matemática do Estado de São Paulo. Assim, fizemos uma revisão de alguns conteúdos de combinatória enumerativa, incluindo alguns vistos da disciplina Matemática Discreta (ver [2]) e alguns novos: princípio da inclusão e exclusão, e provas bijetivas. Feita esta revisão, a ideia é aplicarmos estas ferramentas de contagem para determinar as cardinalidades de vários conjuntos de objetos. Em seguida, no Capítulo 3, estudamos os caminhos reticulados no plano cartesiano, aplicando os princípios de contagem vistos. Em especial, fazemos uso das chamadas provas bijetivas, onde contamos o número de objetos em um conjunto finito estabelecendo bijeções com outros conjuntos finitos.

Um dos objetivos mais importantes do presente trabalho é apresentar uma proposta didática, no Capítulo 4, baseada nos capítulos anteriores, que colabore com o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio e ajude os alunos em sua defasagem em relação ao plano cartesiano. A proposta didática feita aqui busca partir do conteúdo básico de combinatória visto em sala de aula e aplicá-lo, para uma melhor fixação dos conceitos, à contagem de caminhos reticulados, objetos não usualmente utilizados no Ensino Médio. Espera-se que esta proposta didática possa ser desenvolvida com os alunos do 2ª série do Ensino Médio após o professor ter lecionado os conteúdos básicos de Análise Combinatória.

2

CONTAGEM BÁSICA

Neste capítulo trataremos dos princípios básicos de enumeração e discutiremos estruturas combinatoriais, tais como: palavras, permutações, subconjuntos, funções. Trata-se da fundamentação teórica necessária para que os professores possam abordar em sala de aula, de uma maneira mais simples, o tema deste trabalho - contagem de caminhos reticulados no plano cartesiano.

2.1 PRINCÍPIO ADITIVO

Definição 2.1 (Cardinalidade)**.** *Para qualquer conjunto A e um número inteiro $n \geq 1$, escrevemos $|A|= n$ se existe bijeção $f : A \to \{1, 2, \cdots, n\}$. Escrevemos $|A| = 0$ se $A = \emptyset$.*

Se A e B são conjuntos finitos e com intersecção vazia, temos $|A \cup B| = |A| + |B|$. Uma maneira simples de provarmos esta afirmação é simplesmente contarmos quantas vezes um elemento $x \in A \cup B$ é contado em cada lado da igualdade, o que é bem simples neste caso.

A condição de que não haja elementos em comum é necessária, já que, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$, então $|A \cup B| = |A| + |B| = 3 + 2 = 5$, mas, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, d\}$, então $|A \cup B| = 4$. Este resultado será generalizado a seguir.

Dados conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ com intersecção vazia dois a dois, então:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_k|. \tag{1}$$

Vamos provar esta afirmação por indução em k:
- Para $k = 1$ é trivial que $|A_1| = |A_1|$
- Para $k = 2$, temos que $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$, como foi visto anteriormente.
- Seja $k > 2$ e suponha a afirmação verdadeira para $k - 1$ conjuntos, isto é, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{k-1}| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_{k-1}|$, vamos mostrar que é verdadeira para k conjuntos, ou seja, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_k|$. Seja $A = A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$ pela hipótese de indução, temos $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{k-1}| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_{k-1}| = |A|$. Assim, pelo caso $k = 2$, como

A_k não tem elementos em comum com os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}$, então $|A \cup A_k| = |A| + |A_k| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_{k-1}| + |A_k|$.

A expressão em (1) é chamada de Princípio Aditivo, uma vez que esta expressão nos fornece a número de possibilidades de escolhermos um elemento dentre os elementos de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$.

Uma consequência interessante deste resultado é o Princípio da Diferença, que fornece a cardinalidade da diferença entre dois conjuntos finitos. Se A e B são conjuntos finitos tais que $A \subseteq B$, então $|B \sim A| = |B| - |A|$, onde $B \sim A$ representa o conjunto dos elementos de B que não estão em A.

Note que o conjunto B é a união dos conjuntos disjuntos A e $B \sim A$, ou seja, $B = A \cup (B \sim A)$ e $A \cap (B \sim A) = \emptyset$. Assim, pelo Princípio Aditivo temos $|B| = |A| + |B \sim A|$. Subtraindo $|A|$ em ambos os lados, temos: $|B \sim A| = |B| - |A|$.

2.2 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Nesta seção vamos usar o Princípio Aditivo para deduzir o Princípio Multiplicativo para conjuntos.

Admita, por hipótese, que $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ são conjuntos finitos com $|A_i| = n_i$, para $1 \leq i \leq k$. Lembrando que $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) | a_i \in A_i\}$, então $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k| = n_1 n_2 \cdots n_k$. Vamos provar por indução em k:

- Para $k = 1$ não há o que provar.
- Para $k = 2$, seja $A_2 = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_2}\}$. O conjunto $A_1 \times A_2$ é a união dos n_2 conjuntos dois a dois com intersecção vazia: $A_1 \times \{x_1\}, A_1 \times \{x_2\}, \cdots, A_1 \times \{x_{n_2}\}$. Cada um desses conjuntos tem cardinalidade $|A_1| = n_1$ e eles são dois-a-dois disjuntos. Pelo Princípio Aditivo segue que $|A_1 \times A_2| = \sum_{i=1}^{n_2} |A_1 \times x_i| = \sum_{i=1}^{n_2} n_1 = n_1 n_2$.
- Para $k > 2$, suponhamos válido o resultado para $k - 1$ conjuntos, ou seja, $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_{k-1}| = n_1 n_2 \cdots n_{k-1}$. Vamos mostrar que é verdade para k conjuntos, ou seja, $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k| = n_1 n_2 \cdots n_k$. Seja $A = A_1 \times \cdots \times A_{k-1}$ pela hipótese de indução, temos: $|A| = |A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_{k-1}| = n_1 n_2 \cdots n_{k-1}$. Pelo caso $k = 2$, temos $|A \times A_k| = |A||A_k|$.

Seguem alguns exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo.

Exemplo 2.2 (Gabaritos)**.** *Quantos são os gabaritos possíveis para um teste de 10 questões de múltipla escolha com 5 alternativas por questão?*

Seja o conjunto $Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_{10}$, *no qual* $Q_i = \{a, b, c, d, e\}$, $1 \leq i \leq 10$, *é o conjunto de possíveis respostas. Deste modo,* $|Q| = 5^{10} = 9.765.625$.

Exemplo 2.3 (Senha de desbloqueio de celular). *Quantas são as senhas possíveis de desbloqueio de celular, sabendo que estas são sequências de quatro dígitos, sem restrição?*

Podemos definir $S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$, *onde* $S_i = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $1 \leq i \leq 4$. *Deste modo,* $|S| = 10.000$.

Podemos interpretar o Princípio Multiplicativo da seguinte maneira. Admita que cada elemento do conjunto finito A pode ser obtido por uma sequência de k escolhas independentes. Suponha que a primeira escolha pode ser feita de a_1 maneiras, a segunda escolha pode ser feita de a_2 maneiras, e assim por diante, independente das escolhas anteriores, até a k-ésima escolha de a_k maneiras, Então $|A| = a_1 a_2 \cdots a_k$.

Exemplo 2.4. *Quantos são os números pares com* 3 *dígitos que têm o algarismo* 5 *mas não têm o algarismo* 6*?*

Tomemos o conjunto P *de todos esses números. Podemos separar* P *em três subconjuntos* A, B *e* C, *tais que não há elementos em comum, onde* A *é o conjunto formado pelos elementos de* P *que têm os dois primeiros dígitos iguais a* 5, B *é o conjunto formado pelos elementos de* P *que possuem apenas o primeiro dígito igual a* 5 *e* C *é o conjunto formado com os demais elementos de* P, *isto é, números pares em que apenas o segundo dígito é igual a* 5. *Assim temos:*

- Para o conjunto A *existe apenas uma opção para os dois primeiros dígitos* $\{5\}$ *e quatro opções para o último dígito,* $\{0, 2, 4, 8\}$, *lembrando que não podemos usar o algarismo* 6. *Logo* $|A| = 4$.

- Para o conjunto B *existe apenas uma opção para o primeiro dígito* $\{5\}$, *oito opções para o segundo dígito,* $\{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$, *e quatro opções para o último dígito,* $\{0, 2, 4, 8\}$. *Então,* $|B| = 1 \cdot 8 \cdot 4 = 32$.

- Para o conjunto C *existem sete opções para o primeiro dígito,* $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$, *apenas uma opção para o segundo dígito, e quatro opções para o último dígito,* $\{0, 2, 4, 8\}$. *Logo* $|C| = 7 \cdot 1 \cdot 4 = 28$.

Portanto, usando o Princípio Aditivo, obtemos $|P| = |A| + |B| + |C| = 4 + 32 + 28 = 64$.

2.3 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Pelo Princípio Aditivo, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos com intersecção dois a dois vazia, então $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$. Vamos analisar agora o caso em que os conjuntos podem ter elementos em comum.

Inicialmente, mostramos que se A e B são conjuntos finitos, então $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Dado um elemento $x \in A$ e $x \in B$, na soma $|A| + |B|$ ele foi contado duas vezes. Temos três possibilidades para os elementos de $A \cup B$. Verifiquemos que cada elemento é contado apenas uma vez pelo lado direito da igualdade:

- se $x \in A$ e $x \notin B$, então $x \notin (A \cap B)$, então x é contado uma vez em $|A| + |B| - |A \cap B|$.
- se $x \notin A$ e $x \in B$, então $x \notin (A \cap B)$, então x é contado uma vez em $|A| + |B| - |A \cap B|$.
- se $x \in A$ e $x \in B$, então $x \in (A \cap B)$, logo x é contado uma vez em $|A|$, uma vez em $|B|$ e subtraído uma vez em $|A \cap B|$.

Portanto $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Agora vamos considerar três conjuntos finitos A, B e C. Na soma das cardinalidades desses conjuntos, $|A| + |B| + |C|$, um elemento que a mais de um conjunto será contado mais do que uma vez, ultrapassando assim sua contagem na união deles $|A \cup B \cup C|$. Para corrigirmos isso, subtraímos as contribuições dos elementos em comum em A e B, A e C, B e C, ou seja, $-|A \cap B|$, $-|A \cap C|$ e $-|B \cap C|$. Agora, para um elemento $A \cap B \cap C$, contamos ele três vezes em $|A| + |B| + |C|$ e subtraímos três vezes em $-|A \cap B|$, $-|A \cap C|$ e $-|B \cap C|$, ficando sem contar esse elemento. Para que esse elemento seja então contado apenas uma vez, adicionamos $|A \cap B \cap C|$. Em resumo:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Generalizando o raciocínio acima, chegamos na fórmula de inclusão e exclusão: admita $n > 0$ e que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então:

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ \textstyle - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + \cdots \\ + (-1)^{n-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.\end{gathered}$$

Note que podemos reescrever o somatório acima como:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|. \tag{2}$$

Para demonstrarmos (2), considere um elemento pertencente a n conjuntos, $x \in A_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Ele é contado n vezes em $\sum_{k=1}^{n} |A_k|$, ou seja, é contado C_n^1 vezes. Em $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$ será contados em todas as combinações 2 a 2, ou seja, C_n^2 vezes. Em $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$ será contado C_n^3 vezes.

E assim sucessivamente até $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$. Logo temos $C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n$, e como queremos contar a cardinalidade de $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$, sabemos que $C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n$ tem que ser igual a 1. Isso segue pela conhecida relação $C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n = 1$ (Ver Exemplo 3.19 em [4]).

Vejamos algumas aplicações deste princípio.

Exemplo 2.5. *Quantos inteiros entre* 1 *e* 10.000*, inclusive, não são divisíveis por* 3*,* 5 *e* 7*?*

Podemos separar os números entre 1 *a* 10000 *em três conjuntos. O conjunto dos números divisíveis por* 3 *(A), o conjunto dos números divisíveis por* 5 *(B) e o conjunto dos números divisíveis por* 7 *(C). Temos que:*

$|A| = \lfloor \frac{10000}{3} \rfloor = 3333$

$|B| = \lfloor \frac{10000}{5} \rfloor = 2000$

$|C| = \lfloor \frac{10000}{7} \rfloor = 1428$

$|A \cap B| = \lfloor \frac{10000}{15} \rfloor = 666$

$|A \cap C| = \lfloor \frac{10000}{21} \rfloor = 476$

$|B \cap C| = \lfloor \frac{10000}{35} \rfloor = 285$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor \frac{10000}{105} \rfloor = 95,$

onde $\lfloor x \rfloor$ *é o maior inteiro que é menor do que ou igual a* x*. Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos:* $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3333 + 2000 + 1428 - 666 - 476 - 285 + 95 = 5429$*. Segue que* 5429 *é a quantidade de números entre* 1 *a* 1000 *que são divisíveis por* 3*,* 5*, e* 7*. Porém o enunciado pede quantos são os números não divisíveis por* 3*,* 5 *e* 7*. Portanto a quantidade de números de* 1 *a* 10000 *não divisíveis por* 3*,* 5 *e* 7 *é* $10000 - 5429 = 4571$*.*

Exemplo 2.6. *Dados* $|S| = 15$*,* $|T| = 13$*,* $|U| = 12$*,* $|S \cap T| = 6$*,* $|S \cap U| = 3$*,* $|T \cap U| = 4$ *e* $|S \cap T \cap U| = 1$*, encontrar*

a) $|S \cup T|$

b) $|S \cup T \cup U|$

c) o número de objetos em exatamente um dos conjuntos S, T e U.

a) Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$*. Logo* $|S \cup T| = 15 + 13 - 6 = 22$*.*

b) Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos $|S \cup T \cup U| = |S| + |T| + |U| - |S \cap T| - |S \cap U| - |T \cap U| + |S \cap T \cap U|$*. Logo* $|S \cup T \cup U| = 15 + 13 + 12 - 6 - 3 - 4 + 1 = 28$*.*

c) Observe o diagrama de Venn:

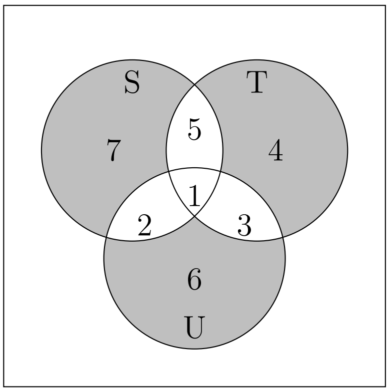

Figura 1: Diagrama de Venn de S, T e U.

O número de objetos do conjunto S que pertencem apenas ao conjunto S é $|S \cup T \cup U| - |T \cup U|$. *Como* $|S \cup T \cup U| = 28$, *vamos calcular* $|T \cup U|$. *Temos que* $|T \cup U| = |T| + |U| - |T \cap U| = 13 + 12 - 4 = 21$. *Concluímos então que* $28 - 21 = 7$ *é o número de elementos que pertencem apenas a* S.

O número de objetos do conjunto T que pertencem a apenas ao conjunto T é dado por $|S \cup T \cup U| - |S \cup U|$. *Como* $|S \cup T \cup U| = 28$, *vamos calcular* $|S \cup U|$. *Temos que* $|S \cup U| = |S| + |U| - |S \cap U| = 15 + 12 - 3 = 24$. *Concluímos então que* $28 - 24 = 4$ *é o número de elementos que pertencem apenas a* T.

O número de objetos do conjunto U que pertencem a apenas ao conjunto U é $|S \cup T \cup U| - |S \cup T|$. *Sendo* $|S \cup T \cup U| = 28$, *vamos calcular* $|S \cup T|$. *Temos que* $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| = 15 + 13 - 6 = 22$. *Concluímos então que* $28 - 22 = 6$ *é o número de elementos que pertencem apenas a* U.

Portanto a quantidade de elementos que pertence a apenas um dos conjuntos S, T, ou U é: 17.

2.4 PERMUTAÇÕES

Seja A um conjunto finito com n elementos. Uma palavra de tamanho k é uma sequência $w_1w_2w_3 \cdots w_k$ onde $w_i \in A$. Uma permutação dos elementos de A é uma palavra $w = w_1w_2w_3 \cdots w_n$, onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Dizemos que duas palavras $w = w_1w_2w_3 \cdots w_p$ e $y = y_1y_2y_3 \cdots y_q$ são iguais se, e somente se, $p = q$, $w_i = y_i$ para $1 \leq i \leq p$.

Exemplo 2.7. *Seja* $A = \{b, c, d, \ldots, z\}$ *o conjunto das consoantes minúsculas do alfabeto, então bdc, cdb e ccdb são palavras distintas (de comprimentos* 3*,* 3 *e* 4*),* *respectivamente. Se $B = \{2, 5\}$, as 8 palavras de tamanho* 3 *que podemos formar de B são:* 222*,* 225*,* 252*,* 522*,* 255*,* 525*,* 552*,* 555*.*

Vamos começar pela contagem de palavras para podermos determinar a quantidade de permutações e suas consequências.

Teorema 1 (Contagem de palavras)**.** *Seja A um conjunto finito e $k \geq 0$. Se $|A| = n$, então há n^k palavras de tamanho k do conjunto A.*

Demonstração. Podemos construir uma palavra $w = w_1 w_2 w_3 \cdots w_k$ por uma sucessão de escolhas. Primeiro escolhemos uma das n letras do alfabeto para $w_1 \in A$, segundo uma das n letras do alfabeto para $w_2 \in A$, e assim por diante, escolhendo assim $w_i \in A$, uma das n letras do alfabeto, para cada i, tal que $1 \leq i \leq k$. Pelo Princípio Multiplicativo temos: $n \times n \times \cdots \times n$ (k fatores), que é n^k. □

Teorema 2 (Contagem de permutações)**.** *Existem $n!$ permutações de um conjunto A com n elementos.*

Demonstração. Para construirmos uma palavra $w = w_1 w_2 w_3 \cdots w_n$ de A, temos n escolhas para w_1, para w_2 temos $(n-1)$ opções, tal que não pode haver repetição da letra escolhida para w_1, ou seja, $w_1 \neq w_2$, e assim por diante. Até a n-ésima letra w_n, onde $w_1 \neq w_2 \neq \cdots \neq w_n$. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações é $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$. □

Definição 2.8 (k-permutações)**.** *Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$. Uma k-permutação de A, com $k \leq n$, é uma palavra $w = w_1 w_2 w_3 \cdots w_k$ tal que $w_i \neq w_j$, se $i \neq j$.*

Por exemplo, dado o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, todas as 24 possíveis 3-permutações em A são:

abc	abd	acb	acd	adb	adc
bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb
dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

Teorema 3 (Contagem de k-permutações)**.** *Admita que A é um conjunto com n elementos. Para $k \leq n$, o número de k-permutações de A é $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$; para $k > n$, não existe k-permutação de A.*

Demonstração. Para construirmos uma palavra $w = w_1 w_2 w_3 \cdots w_k$ de A, temos n escolhas para w_1. Agora para w_2 temos $(n-1)$ opções, tal que não pode haver repetição das letras, ou seja, $w_1 \neq w_2$, e assim por diante. Como A tem n letras, existem $n-(i-1) = n-i+1$ escolhas possíveis para w_i. Em particular para a k-ésima e escolha final existem $n-k+1$ maneiras de escolhermos w_k. Assim $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$ é o número de k-permutações. Multiplicando essa expressão por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, obteremos o produto dos números inteiros de 1 até n no numerador, ou seja, $n!$. Portanto a resposta é dada pela fórmula $\frac{n!}{(n-k)!}$. $\square$

Definição 2.9 (Conjunto das partes)**.** *Para qualquer conjunto A, denotamos por $P(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A ($Q \in P(A)$ se $Q \subseteq A$).*

Exemplo 2.10. *Dado o conjunto de três elementos $A = \{a, b, c\}$, então $P(A)$ é o conjunto de oito elementos que são os subconjuntos de A, incluindo o vazio, aqueles formados por apenas um elemento de A, dois elementos e o próprio A. Logo, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.*

Teorema 4 (Cardinalidade do conjunto das partes)**.** *Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Em outras palavras, se $|S| = n$, então $|P(S)| = 2^n$.*

Demonstração. Admita que $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto com n elementos. Podemos construir um subconjunto B de A, fazendo uma sequência de n escolhas. Primeiro, estabeleça se $x_1 \in B$ ou $x_1 \notin B$. Isto pode ser feito de 2 maneiras. Segundo, estabeleça se $x_2 \in B$ ou $x_2 \notin B$. De novo existem duas maneiras de fazer isso. Assim, sucessivamente, até que se estabeleça na i-ésima escolha se $x_i \in B$ ou $x_i \notin B$ (duas possibilidades). Essas escolhas determinam unicamente quantos $x_i \in B$. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de subconjuntos é o número dessas escolhas $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n fatores), que é 2^n. $\square$

2.5 FUNÇÕES

Um dos aspectos de maior interesse no que segue são as chamadas provas bijetivas. Com o intuito de tornar a compreensão de tal conceito mais fácil, vamos relembrar as definições básicas envolvendo funções. Além disso, como aplicação do que vimos até agora, vamos contar o número de funções sob certas condições.

Definição 2.11. *Uma função f de X para Y é uma tripla ordenada (X, Y, G) onde G é um subconjunto de $X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe exatamente um $y \in Y$ com $(x, y) \in G$.*

Aqui X é o domínio de f, Y é o contradomínio e G é o gráfico de f. Escrevemos $y = f(x)$ se, e somente se, $(x, y) \in G$, e escrevemos $f : X \to Y$ para expressar que

f é uma função de X para Y. Seja ${}^{X}Y$ o conjunto de todas as funções de X para Y. Em outras palavras, dizemos que uma função f é uma regra que mapeia cada $x \in X$ para um único valor $f(x) \in Y$.

Teorema 5 (Enumerando funções)**.** *Admita que* $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *é um conjunto com* n *elementos e que* $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ *é um conjunto com* m *elementos. Existem* m^n *funções de* X *para* Y*. Em outras palavras,* $|{}^{X}Y| = |Y|^{|X|}$.

Demonstração. Para construirmos uma função f de ${}^{X}Y$, escolhemos uma sequência de comprimento n que determina o gráfico G de f. Primeiro, escolhemos $f(x_1)$ como qualquer um dos m elementos de Y. Segundo escolhemos $f(x_2)$ como qualquer um dos m elementos de Y, e assim por diante até $i \leq n$, escolhendo assim $f(x_i)$ como qualquer m elemento de Y. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de funções que podemos construir é $m \times m \times \cdots \times m$ (n fatores), que é m^n. □

Vamos relembrar cada tipo de função: injetora, sobrejetora e bijetora.

Definição 2.12 (Função injetora)**.** *Uma função* g: $X \to Y$ *é injetora se para todo* $x, x' \in X$, $x \neq x'$ *resulta* $g(x) \neq g(x')$.

Teorema 6 (Enumerando funções injetoras)**.** *Admita que* $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *é um conjunto com* n *elementos e* $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ *é um conjunto com* m *elementos. Se* $n \leq m$*, o número de funções injetoras é* $m \times (m-1) \times (m-2) \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$*. Se* $n > m$ *não há funções injetoras de* X *para* Y.

Demonstração. Suponhamos $n \leq m$. Obtemos uma função injetora g: $X \to Y$ escolhendo $g(x_i) \in Y \sim \{g(x_1), \ldots, g(x_{i-1})\}$, para $1 \leq i \leq n$. Para cada $i \leq n$, escolhemos um elemento $g(x_i)$ de Y distinto dos elementos $g(x_1)$, $g(x_2)$, …, $g(x_{i-1})$ já escolhidos. Assim, existem $m - (i-1) = m - i + 1$ opções para $g(x_i)$. Pelo Princípio Multiplicativo o número de funções injetoras é $m \times (m-1) \times (m-2) \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$.

Vejamos agora o caso $n > m$. Ao tentarmos obter uma função injetora g escolhendo valores para $g(x_1), g(x_2), \cdots, g(x_m)$ como anteriormente, para $g(x_{m+1})$ não existe elemento de Y distinto dos já escolhidos. Como não é possível completar a construção de g, não existe função injetora de X para Y nesta situação. □

Definição 2.13 (Função sobrejetora)**.** *Uma função* $h : X \to Y$ *é sobrejetora, se para todo* $y \in Y$*, existe* $x \in X$ *tal que* $y = h(x)$.

O próximo teorema nos fornece uma fórmula para contar o número de funções sobrejetoras entre conjuntos finitos. Sua demonstração faz uso do Princípio da Inclusão e Exclusão.

Teorema 7 (Enumerando funções sobrejetoras)**.** *Seja $Sob(m,n)$ o número de funções sobrejetoras de um conjunto de m elementos para um conjunto de n elementos. Se $m \geq n \geq 1$, então $Sob(m,n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$. Se $m < n$, então $Sob(m,n) = 0$.*

Demonstração. Seja X o conjunto de todas as funções $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Pelo Teorema 5 temos que $|X| = n^m$. Para $1 \leq i \leq n$, seja S_i o conjunto de todas as funções $f \in X$ tais que i não está na imagem de f. Note que uma função f é sobrejetora se, e somente se, f não pertence a S_i, para todo $1 \leq i \leq n$. Assim temos que $|X \sim (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)|$ é o número de funções sobrejetoras.

Considere a interseção $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. A função f pertencer a essa interseção é o mesmo que mapear uma função arbitrária de $1, 2, \cdots, m$ para o conjunto com $(n-k)$ elementos $\{1, 2, \cdots, m\} \sim \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$. O número de tais funções é $(n-k)^m$, independente de $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Usando o Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que $Sob(m,n) = |X \sim (S_1 \cup \cdots \cup S_n)| = n^m + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$, que é equivalente a fórmula do teorema, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$. □

Teorema 8 (Injetora × Sobrejetora)**.** *Admita que $f : X \to Y$ é uma função. Se X e Y são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, então $f : X \to Y$ é injetora se, e somente se, f é sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que X e Y tenham n elementos, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Admita que $f : X \to Y$ é injetora. Então o conjunto $T = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ é um subconjunto de Y com n elementos distintos. Como Y tem n elementos, o subconjunto T tem que ter todos os elementos de Y. Isso significa que cada $y \in Y$ tem a forma $f(x_i)$ para algum $x_i \in X$. Logo f é sobrejetora.

Agora admita que $f : X \to Y$ não é injetora. Então existem $i \neq j$ tais que $f(x_i) = f(x_j)$. Assim o conjunto $T = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ contém menos de n elementos. Logo existe pelo menos um elemento duplicado. Deste modo, T é um subconjunto próprio de Y. Sendo y um elemento de $Y \sim T$, vemos que y não tem a forma $f(x)$ para qualquer $x \in X$. Portanto f não é sobrejetora. □

Vale mencionar que o resultado anterior não se estende para conjuntos infinitos. De fato, considere por exemplo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$. Esta função é injetora, mas não sobrejetora. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(2k) = g(2k+1) = k$ para todo $k \geq 0$ é sobrejetora mas não é injetora.

Definição 2.14 (Função bijetora)**.** *Uma função $f : X \to Y$ é dita bijetora se f for injetora e sobrejetora.*

Teorema 9 (Enumerando bijeções)**.** *Suponha que X e Y são dois conjuntos com n elementos. Então existem $n!$ bijeções de X para Y.*

Demonstração. Pelo Teorema 8, uma função $f : X \to Y$ é injetora se, e somente se, ela é sobrejetora. Já sabemos que o número de funções injetoras de X para Y é $\frac{m!}{(m-n)!}$. Então existem $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$ bijeções de X para Y. □

2.6 BIJEÇÕES, CARDINALIDADE E CONTAGEM

Bijeções constituem parte fundamental das técnicas em combinatória enumerativa. A definição de cardinalidade é dada em termos de bijeções. No dia a dia, nós contamos os números de objetos num conjunto finito “apontando para cada objeto”, isto é, fazendo uma bijeção entre um conjunto indicando os elementos do conjunto por um, dois, três, etc. Assim, frequentemente estamos criando uma bijeção entre um conjunto S e outro conjunto $\{1, \cdots, n\}$ de números naturais. Nesta seção iremos explorar mais a fundo tal conceito.

Para quaisquer conjuntos A e B, escrevemos $|A| = |B|$ se existe bijeção $f : A \to B$. Escrevemos $|A| \leq |B|$ se existe uma função injetora $g : A \to B$.

Se A não é vazio então $|A| \leq |B|$ é equivalente a dizer que existe função sobrejetora $h : B \to A$. Essas propriedades são evidentemente intuitivas no caso de conjunto finitos.

Definição 2.15. *Dada duas funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a função composta de g e f é a função $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para $x \in X$.*

O teorema a seguir traz importantes propriedades que utilizaremos mais adiante.

Teorema 10 (Propriedades das bijeções)**.** *Sejam X, Y e Z conjuntos finitos não vazios. Então:*

1. *a identidade $id_X \colon X \to X$, definida por $id_X(a) = a$ para todo $a \in X$, é uma bijeção.*

2. *uma função $f : X \to Y$ é bijetora se, e somente se, existe uma função $f' : Y \to X$ tal que $f' \circ f = id_X$ e $f \circ f' = id_Y$. Se f' existir, f' é única, chamada de função inversa de f e é denotada por f^{-1}. A inversa é também bijetora, e $(f^{-1})^{-1} = f$.*

3. *a função composta de duas bijeções é uma bijeção. Como resultado $|X| = |Y|$ e $|Y| = |Z|$ implica $|X| = |Z|$.*

Demonstração.

- 1 A afirmação em 1. é de verificação imediata.

- 2 Primeiramente verifiquemos a unicidade da inversa. Suponha que $f' : Y \to X$ e $f" : Y \to X$ sejam duas inversas de f satisfazendo $f" \circ f = id_X$ e $f \circ f' = id_Y$. Então:

  $$f" = f" \circ id_Y = f" \circ (f \circ f') = (f" \circ f) \circ f' = id_X \circ f' = f'$$

  de onde segue que a inversa é única.

  Suponhamos agora que f possui inversa f'. Vamos provar que f é bijetora. Primeiro, vamos mostrar que é injetora. Sejam x_1 e x_2 em X tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Então $x_2 = f'(f(x_2)) = f'(y) = f'(f(x_1)) = x_1$. Logo $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetora. Verifiquemos agora que f é sobrejetora. Seja $y \in Y$. Seja $x \in X$ tal que $f'(y) = x$. Então $f(x) = f(f'(y)) = y$. Logo f é sobrejetora. Portanto f é bijetora.

  Queremos agora, partindo do fato de que f é bijetora, mostrar que existe a inversa f' de f. Pela sobrejetividade de f, sabemos que para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Vamos definir $f' : Y \to X$ da seguinte maneira: $f'(y)$ é o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. A injetividade de f garante que f' está bem definida. Segue facilmente que f' é a inversa de f.

- 3 Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções bijetoras. Dados $x_1, x_2 \in X$, temos $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é injetora, esta última igualdade implica $f(x_1) = f(x_2)$, mas sendo f injetora segue que $x_1 = x_2$, logo $g \circ f$ é injetora. Para mostrarmos que $g \circ f$ é sobrejetora, dado $z \in Z$, vamos mostrar que existe $x \in X$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. De fato, g é sobrejetora, então existe $y \in Y$ tal que $z = g(y)$. Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, concluímos então que $z = (g \circ f)(x)$.

□

Teorema 11. *Se $|A| = n$, $|B| = m$ e $A \cap B = \emptyset$, então $|A \cup B| = n + m$.*

Demonstração. Observemos que $|A| = n$ significa que existe bijeção $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ e $|B| = m$ significa que existe bijeção $g : B \to \{1, 2, \ldots m\}$. Definimos a função $h : A \cup B \to \{1, 2, \ldots, m + n\}$ por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in A \\ g(x) + n & \text{se} \quad x \in B. \end{cases}$$

A hipótese $A \cap B = \emptyset$ é necessária para garantir que h seja uma função bem definida.

Para verificar se h é bijetiva, vamos exibir sua função inversa $h' : \{1, 2, 3, \cdots, n + m\} \to A \cup B$, definida por:

$$h'(i) = \begin{cases} f^{-1}(i) & \text{se} \quad 1 \leq i \leq n \\ g^{-1}(i-n) & \text{se} \quad n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

Seja $i \in \{1, \ldots, n+m\}$. Então:

- Se $1 \leq i \leq n$, então $h \circ h'(i) = h(h'(i)) = h(f^{-1}(i)) = f(f^{-1}(i)) = i$.
- Se $n + 1 \leq i \leq n + m$, então $h \circ h'(i)$=$h(h'(i)) = h(g^{-1}(i - n))$= $g(g^{-1}(i-n)) + n$=$i - n + n = i$.

Segue que $h \circ h'$ é uma identidade. Analogamente mostra-se que $h' \circ h$.

□

2.6.1 *Princípio Multiplicativo Formal*

Nesta subseção, partindo da definição de bijeção vamos provar o Princípio Multiplicativo enunciado de uma maneira mais formal:

Teorema 12. *Suponha que existe bijeção* $f : \{1, 2, \cdots, n_1\} \times \{1, 2, \cdots, n_2\} \times \cdots \times \{1, 2, \cdots, n_k\} \to S$. *Então* $|S|$=$n_1 n_2 \cdots n_k$.

Demonstração. Basta observar que, devido a bijeção f, S tem a mesma cardinalidade que o produto cartesiano dos conjuntos. □

Vamos comparar o Princípio Multiplicativo formal com o dado anteriormente. Na construção do Princípio Multiplicativo visto na Seção 2.2, construímos objetos do conjunto S por uma sequência de k escolhas, onde existem n_i maneiras de fazermos a i-ésima escolha. A entrada para a bijeção f no Princípio Multiplicativo formal é uma sequência $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$, onde $1 \leq c_i \leq n_i$ para todo $i \leq k$. Evidentemente, c_i marca qual escolha foi feita no i-ésimo componente. Na prática, f é descrita como um algoritmo que nos mostra como combinar as escolhas c_i para construir um objeto em S. A chave para o Princípio Multiplicativo intuitivo é que para cada objeto em S só existe uma maneira de ser construído, fazendo as escolhas devidas. Isto corresponde ao proposto no Princípio Multiplicativo formal para que f seja bijeção para S.

Exemplo 2.16. *Quantas palavras de* 4 *letras podemos formar com pelo menos uma letra E?*

Pode se tentar construir tais palavras escolhendo a posição da letra E (4 escolhas), e preenchendo o resto das posições com qualquer uma das 26 letras para cada posição. O Princípio Multiplicativo teria como resultado $4 \times 26^3 = 70.304$. *Porém o resultado está incorreto, pois contaremos mais de uma vez palavras como* $AEBE$, *uma vez quando colocamos a letra E na segunda posição e outra ao considerarmos ela na quarta posição.*

Vamos determinar a cardinalidade desse conjunto de outra maneira. Para encontrar a resposta correta, podemos combinar os Princípios Multiplicativo e da Diferença. Existem 26^4 *palavras de tamanho 4, e existem* 25^4 *palavras de tamanho 4 sem a letra* E, *logo* $26^4 - 25^4 = 66.351$ *são todas as palavras que contém pelo menos uma letra* E.

Outra solução possível é obtida ao decompormos X *em conjuntos disjuntos:* X_1, X_2, X_3 *e* X_4, *onde* X_i *é formado pelas palavras que têm obrigatoriamente a letra E na i-ésima posição e não nas posições anteriores. Fazendo a união destes conjuntos obteremos o resultado desejado. Temos que:*

- $X_1 = 1 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^3$
- $X_2 = 25 \times 1 \times 26 \times 26 = 25 \times 26^2$ *(não pode aparecer a letra E na primeira posição).*
- $X_3 = 25 \times 25 \times 1 \times 26 = 25^2 \times 26$ *(não pode aparecer a letra E na primeira e na segunda posição).*
- $X_4 = 25 \times 25 \times 25 \times 1 = 25^3$ *(não pode aparecer a letra E na primeira, na segunda e na terceira posição).*

Portanto, $|X| = |X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 26^3 + 25 \times 26^2 + 25^2 \times 26 + 25^3 = 66.351.$

2.7 SUBCONJUNTOS, PALAVRAS BINÁRIAS E COMPOSIÇÕES

O método fundamental para a contagem via bijeções envolvendo um conjunto A finito de objetos é fazer uma bijeção entre A e outro conjunto B do qual a cardinalidade é conhecida. Vamos ilustrar esse princípio básico revendo enumeração de subconjuntos e palavras binárias e enumerando novos objetos combinatórios, chamados composições.

Seja $X = \{x, y, z\}$ e considere $P(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Definimos uma bijeção $f : P(X) \to \{0,1\}^3$, onde $\{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, colocando:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= 000, & f(\{x\}) &= 100, & f(\{y\}) &= 010, \\ f(\{z\}) &= 001, & f(\{x,y\}) &= 110, & f(\{x,z\}) &= 101, \\ f(\{y,z\}) &= 011, & f(\{x,y,z\}) &= 111. \end{aligned}$$

Esses valores seguem a seguinte regra: dado $S \subseteq X$, fazemos $f(S) = w_1 w_2 w_3$ onde $w_1 = 1$ se $x \in S$, $w_1 = 0$ se $x \notin S$, $w_2 = 1$ se $y \in S$, $w_2 = 0$ se $y \notin S$, $w_3 = 1$ se $z \in S$, $w_3 = 0$ se $z \notin S$. Observando as imagens de f, vemos que f é bijetora. Assim $|P(X)| = |\{0,1\}^3| = 2^3 = 8$.

Vamos introduzir uma notação que será usada durante o trabalho.

Definição 2.17 (Função verdade). *Se P é qualquer declaração lógica, denotamos $\chi(P) = 1$ se P é verdadeiro, e $\chi(P) = 0$ se P é falso.*

Teorema 13 (Subconjuntos versus palavras binárias). *Seja X um conjunto com n elementos. Existe bijeção $f : P(X) \to \{0,1\}^n$. Portanto $|P(X)| = 2^n$.*

Demonstração. Dado $S \subseteq X$ definimos $f(S) = w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i = \chi(x_i \in S)$. Por exemplo: se $X = \{1, 2, \cdots, 8\}$, então $f(\{2,5,7,8\})$=01001011 e $f'(10000011)$=$\{1,7,8\}$.

Para ver que f é bijetora, definimos $f' : \{0,1\}^n \to P(X)$ como $f'(w_1 \cdots w_n) = \{x_i \in X : w_i = 1\}$. É imediato que f' é inversa de f, vice-versa. □

Definição 2.18 (Composições). *Uma composição de um número inteiro $n > 0$ é uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, onde cada α_i é um número inteiro positivo e $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$. O número de partes de α é k. Seja $Comp_n$ o conjunto de todas as composições de n.*

Exemplo 2.19. *As sequências $(1,2,2)$ e $(2,1,2)$ são duas composições de 5, compostas por três partes cada. As quatro composições de 3 são:*

$$(3), \quad (2,1), \quad (1,2) \text{ e } (1,1,1).$$

Teorema 14 (Enumerando composições). *Para todo $n > 0$, existem 2^{n-1} composições de n.*

Demonstração. Definiremos uma bijeção $g : Comp_n \to \{0,1\}^{n-1}$. Dada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in Comp_n$, definimos $g(\alpha) = 0^{\alpha_1 - 1} 1 0^{\alpha_2 - 1} 1 \cdots 1 0^{\alpha_k - 1}$. A notação 0^j representa a sequência de j zeros consecutivos, e 0^0 é uma palavra vazia. Por exemplo: $g((3,1,3)) = 0^{3-1} 1 0^{1-1} 1 0^{3-1} = 0^2 1 0^0 1 0^2 = 001100$.

Como $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1) = n - k$ e existem $k-1$ uns, vemos que $g(\alpha) \in \{0,1\}^{n-1}$. Agora definimos $g' : \{0,1\}^{n-1} \to Comp_n$ como segue: podemos escrever qualquer palavra $w \in \{0,1\}^{n-1}$ na forma $w = 0^{b_1}10^{b_2}\cdots 10^{b_k}$, onde $k \geq 1$, cada $b_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} b_i = (n-1)-(k-1) = n-k$ uma vez que existem $(k-1)$ uns. Definimos $g'(w) = (b_1+1, b_2+1, \ldots, b_k+1)$, que é composição de n.

Por exemplo, seja $w = 100100 = 0^{b_1}10^{b_2}\cdots 10^{b_k} = 0^0 10^2 10^2$ então $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, logo se $g'(w) = (b_1+1, b_2+1, b_3+1)$ então $g'(100100) = (0+1, 2+1, 2+1) = (1,3,3)$.

Temos que g' é a inversa de g, e vice-versa, então g é bijetora. Logo segue que $|Comp_n| = |\{0,1\}^{n-1}| = 2^{n-1}$. □

As bijeções nas demonstrações anteriores são melhores entendidas através de figuras. Representamos um número inteiro $i > 0$ como sequência de i quadrados alinhados horizontalmente. Visualizamos a composição $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$ desenhando quadrados para $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ numa linha, separado por espaços. Por exemplo, a composição de $(1,3,1,3,3)$ é representada pela Figura 2.

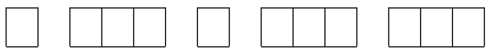

Figura 2: Um exemplo de representação gráfica de composições

Agora, lemos a figura da esquerda para a direita e registramos o que acontece entre cada dois quadrados consecutivos: se dois quadrados estão juntos, registramos 0, se existe espaço entre 2 quadrados, registramos 1. A Figura 2 de uma composição de 11 corresponde à palavra $1001100100 \in \{0,1\}^{10}$. Por outro lado, a palavra $010000011 \in \{0,1\}^{10}$ é representada por:

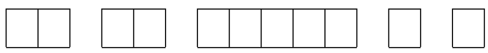

Figura 3: Representação da palavra 0101000011

e corresponde à composição $(2,2,5,1,1)$.

Observe que a figura descreve precisamente f e f' da demonstração acima.

Para $n = 3$, temos

2.8 SUBCONJUNTOS DE TAMANHO FIXO

Agora vamos enumerar subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos. Por exemplo, existem 10 subconjuntos de 3 elementos de $\{a,b,c,d,e\}$:

{a,b,c}, {a,b,d}, {a,b,e}, {a,c,d}, {a,c,e},
{a,d,e}, {b,c,d}, {b,c,e}, {b,d,e} e {c,d,e}.

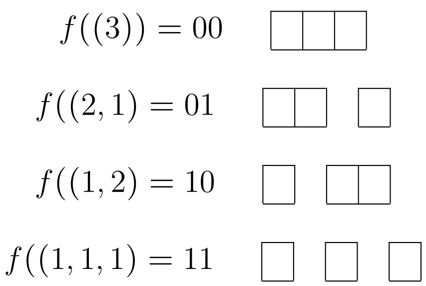

Figura 4: As imagens de f

Neste exemplo, listamos os elementos entre chaves. Esta notação nos força a listar os elementos em uma ordem particular (alfabeticamente neste caso). Observe que, se listarmos os elementos em diferente ordem, o conjunto não muda. Por exemplo, os conjuntos $A_1 = \{a, c, d\}$, $A_2 = \{c, d, a\}$ e $A_3 = \{d, c, a\}$ são iguais. Em contrapartida, a ordem dos elementos numa sequência (ou palavra) faz diferença. Por exemplo, as palavras *cad* e *dac* são diferentes embora usem as mesmas letras.

Para dar ênfase ao fato de os elementos do conjunto não terem uma ordem, podemos representar o conjunto finito em círculos com os elementos dentro em qualquer posição:

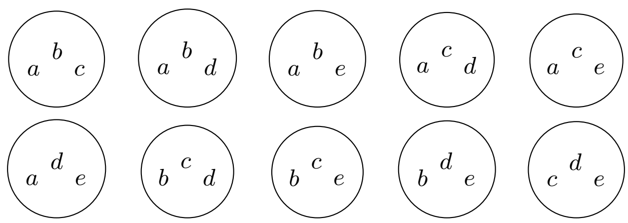

Figura 5: Representação alternativa para conjuntos

Vamos tentar enumerar os subconjuntos de k elementos dado um conjunto de n elementos usando Princípio Multiplicativo. Relembrando que o Princípio Multiplicativo necessita que construamos objetos fazendo uma sequência ordenada de escolhas. Poderíamos tentar construir um subconjunto escolhendo o primeiro elemento de n maneiras, então o segundo elemento de $n - 1$ maneira, e assim sucessivamente, o que nos levaria a uma resposta incorreta: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. O problema aqui é que em um subconjunto os elementos não estão ordenados. Na verdade esta construção gerou cada subconjunto várias vezes, um para cada possível ordem de seus elementos. Existem $k!$ tais ordenações, então obtemos a resposta correta ao dividirmos a fórmula anterior por $k!$.

Teorema 15 (Enumerando conjuntos com k elementos)**.** *Para $0 \leq k \leq n$, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos é dado por* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Demonstração. Fixamos n e k, com $0 \leq k \leq n$. Seja A um conjunto com n elementos e seja x o número de subconjuntos com k elementos de A. Relembrando que os elementos do conjunto S das k-permutações são sequências ordenadas $w_1 w_2 \cdots w_k$, onde w_i são elementos diferentes de A. Contamos $|S|$ de duas maneiras. Primeiro, já vimos que $|S| = \frac{n!}{(n-k)!}$, Teorema 3. Usando o Princípio Multiplicativo - escolhemos w_1 de n maneiras, então w_2 de $n-1$ maneiras, etc, e finalmente escolhemos w_k em $n-k+1$ maneiras. Por outro lado, uma segunda maneira para obtermos uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_k$ de S é começarmos escolhendo um subconjunto com k elementos de qualquer x maneiras. Então, fixado um subconjunto $B \subseteq A$ com k elementos, todos os elementos de S são uma permutação de B. Pelo Teorema 2, existem $k!$ permutações de B. Pelo Princípio Multiplicativo:

$$x.k! = |S| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Resolvendo x, obtemos a fórmula desejada. □

Definição 2.20 (Coeficientes binomiais)**.** *Para $0 \leq k \leq n$, o coeficiente binomial é definido por $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Para $k < 0$ ou $k > n$, definimos $\binom{n}{k} = C_n^k = 0$.*

Deste modo, para todo $n \geq 0$ e todo k, $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos. Em particular, $\binom{n}{k}$ é sempre um número inteiro não negativo.

2.9 ANAGRAMAS

Definição 2.21 (Anagramas)**.** *Admita que $a_1, a_2, \cdots, a_k$ são letras distintas de algum alfabeto A e que $n_1, n_2, \cdots, n_k$ são números inteiros não negativos. Seja $R(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k})$ o conjunto de todas as palavras $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ que são formadas por permutações de n_1 cópias de a_1, n_2 cópias de a_2, …, n_k cópias de a_k (de modo que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$).*

Exemplo 2.22.

1. *$R(0^2 1^3)$={00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100}.*

2. $R(a^1b^2c^1d^0)$=\{*abbc, abcb, acbb, babc, bacb, bbac, bbca, bcab, bcba, cabb, cbab, cbba*\}.

Teorema 16 (Enumerando anagramas)**.** *Admita que $a_1, \ldots, a_k$ são letras distintas, $n_1, \ldots, n_k$ são números inteiros não negativos e que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Então: $|R(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_k})| = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.*

Demonstração. Definimos um novo alfabeto contendo n letras distintas atribuindo expoentes diferentes para cada cópia das letras dadas $a_1, \ldots, a_k$:

$$A = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_1^{(n_1)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_2^{(n_2)}, \cdots, a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \cdots, a_k^{(n_k)}\}.$$

Seja $x = |R(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_k})|$. Seja S o conjunto de todas as permutações w de A. Vamos determinar $|S|$ de duas maneiras. Por um lado, sabemos que $|S| = n!$. Por outro lado, temos um método diferente para construir cada permutação de A exatamente uma vez. Primeiro escolhemos uma palavra $v \in R(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_k^{n_k})$. Existem x maneiras de fazer esta escolha. Segundo, atribua o expoente 1 até n_1 para as n_1 cópias de a_1 em v de qualquer $n_1!$ maneiras. Terceiro, atribua o expoente 1 até n_2 para as n_2 cópias de a_2 em v de qualquer $n_2!$ maneiras, e assim sucessivamente, até atribuir o expoente 1 até n_k para as n_k cópias de a_k em v de qualquer $n_k!$ maneiras. Pelo Princípio Multiplicativo: $xn_1!n_2!\cdots n_k! = |S| = n!$. Resolvendo x, obtemos a fórmula desejada. □

Definição 2.23. *Dados $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ tais que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, definimos o coeficiente multinomial $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ como:*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Em particular observe que $\binom{a+b}{a,b} = \binom{a+b}{a}$.

3 CAMINHOS RETICULADOS

Este capítulo se dedica a *caminhos reticulados*, que são os objetos que nos darão o suporte para o desenvolvimento de uma nova estratégia para o aprendizado, no Ensino Médio, dos conceitos de análise combinatória.

3.1 INTRODUÇÃO

Apesar de podermos falar em caminhos reticulados em qualquer dimensão, estamos interessados aqui apenas em caminhos no plano, isto é, bidimensionais, conforme a definição a seguir.

Definição 3.1 (Caminhos reticulados)**.** *Um caminho reticulado no plano é uma sequência* $P = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k))$*, onde, para todo* $1 \leq i \leq k$*,* $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ *satisfazem uma das seguintes condições:* $(x_i, y_i) = (x_{i-1} + 1, y_{i-1})$ *ou* $(x_i, y_i) = (x_{i-1}, y_{i-1} + 1)$*. Neste caso dizemos que* P *é um caminho de* (x_0, y_0) *a* (x_k, y_k)*.*

Geralmente tomamos (x_0, y_0) como a origem $(0, 0)$. Representamos P desenhando um segmento de tamanho 1 de (x_{i-1}, y_{i-1}) a (x_i, y_i) para cada i. Por exemplo, a Figura 6 mostra os dez caminhos reticulados de $(0, 0)$ a $(3, 2)$.

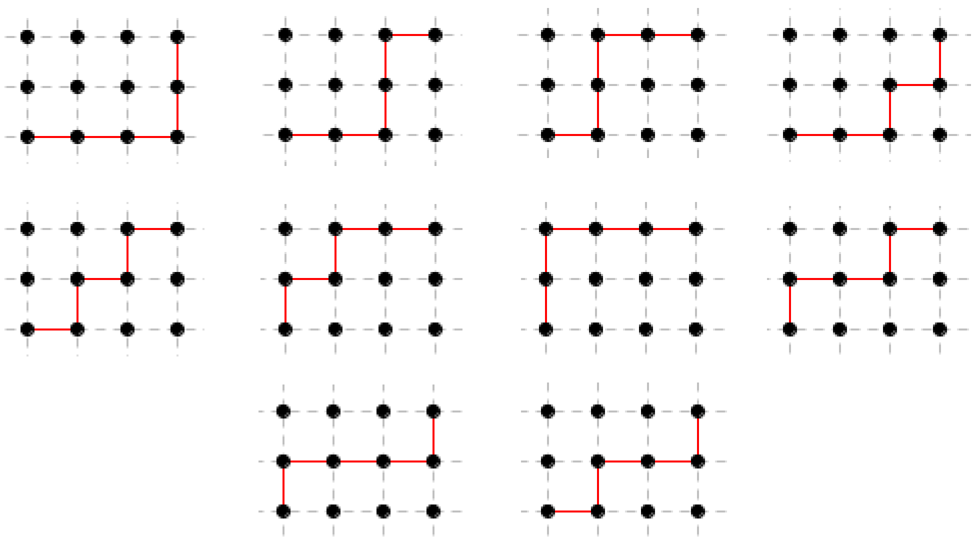

Figura 6: Os caminhos reticulados de $(0, 0)$ a $(3, 2)$

Neste capítulo iremos contar caminhos reticulados satisfazendo certas restrições. Para iniciarmos, vamos contar a quantidade de caminhos de $(0,0)$ a (a,b).

Teorema 17 (Enumerando caminhos reticulados em um retângulo)**.** *Dados os inteiros $a,b \geq 0$, existem $\binom{a+b}{a,b}=\frac{(a+b)!}{a!b!}$ caminhos reticulados de $(0,0)$ a (a,b).*

Demonstração. Podemos representar o caminho reticulado de $(0,0)$ a (a,b) como uma palavra $w \in R(L^aN^b)$ colocando $w_i = L$ se $(x_i, y_i) = (x_{i-1}+1, y_{i-1})$ e $w_i = N$ se $(x_i, y_i) = (x_{i-1}, y_{i-1}+1)$. Aqui, L significa passo "para leste" e N significa "passo para norte". Como o caminho termina em (a,b), w deve ter exatamente a passos para leste (L) e b passos para norte (N). Assim temos uma bijeção entre o conjuntos dos caminhos reticulados e o conjunto $R(L^aN^b)$, pelo Teorema 16 cuja cardinalidade é dada por $|R(L^aN^b)| = \binom{a+b}{a,b}$. □

Exemplo 3.2. *As palavras associadas aos caminhos reticulados de $(0,0)$ a $(3,2)$, exibidos na Figura 6, são descritas na Figura 7.*

LLLNN	LLNNL	LNNLL
LLNLN	LNLNL	NLNLL
NNLLL	NLLNL	NLLLN
	LNLLN	

Figura 7: Palavras associadas aos caminhos exibidos na Figura 6

Definição 3.3 (Caminhos de Dyck)**.** *Um caminho de Dyck de ordem n é um caminho reticulado P de $(0,0)$ a (n,n) tal que $y_i \geq x_i$ para todo $(x_i, y_i) \in P$, isto é, o caminho P nunca fica abaixo da reta $y = x$.*

Exemplo 3.4.

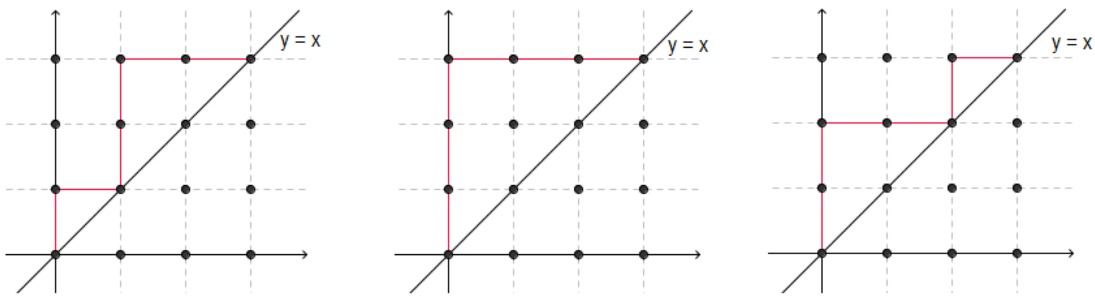

Figura 8: Alguns caminhos de Dyck de ordem 3

Definição 3.5 (Números de Catalan)**.** *Para $n \geq 0$, o n-ésimo número de Catalan é definido por:* $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n,n}= \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+1,n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}= \binom{2n}{n,n}$ - $\binom{2n}{n+1,n-1}$.

Os números de Catalan são famosos por possuírem mais de 200 interpretações combinatórias. A este respeito sugerimos a referência [5].

Teorema 18 (Enumerando Caminhos de Dyck)**.** *Para $n \geq 0$, o número de caminhos de Dyck de ordem n é igual ao n-ésimo número de Catalan.*

Demonstração. Considere os seguintes conjuntos:

- A: conjunto formado por todos os caminhos reticulados de $(0,0)$ até (n,n);
- B: conjunto formado por todos os caminhos reticulados de $(0,0)$ até $(n+1,n-1)$;
- C: conjunto formado por todos os caminhos de Dyck de ordem n;
- D: conjunto formado por todos os caminhos reticulados de $(0,0)$ até (n,n) com ao menos um ponto abaixo da reta $y=x$.

Observe que $D = A \sim C$. Logo, $|C| = |A| - |D|$. Como $|A| = \binom{2n}{n,n}$, resta mostrar que $|D| = \binom{2n}{n+1,n-1}$. Faremos isso exibindo uma bijeção $f : D \to B$, pois $|B| = \binom{2n}{n+1,n-1}$.

Seja $P \in D$. Tome $(x^*, y^*) \in P$ o ponto de P abaixo da reta $y = x$ com maior coordenada x (se houver mais do que um ponto com essa maior coordenada x, tome aquele com maior coordenada y dentre esses). Observe que necessariamente este ponto (x^*, y^*) está sobre a reta $y = x - 1$. Por exemplo, na Figura 10 temos $(x^*, y^*) = (6,5)$, as retas $y = x$ e $y = x - 1$.

Observe que P é a concatenação dos caminhos P_1 e P_2: P_1 vai de $(0,0)$ até (x^*, y^*) e P_2 vai de (x^*, y^*) até (n,n). Notemos que todos os pontos de P_2 estão estritamente acima da reta $y = x - 1$. Seja $P_2^{'}$ o caminho de (x^*, y^*) até $(n+1, n-1)$ obtido pela reflexão de P_2 em torno da reta $y = x - 1$. Definimos $f(P)$ como a concatenação de P_1 e $P_2^{'}$. Assim, $f(P) \in B$ e (x^*, y^*) é o único ponto de $P_2^{'}$ sobre a reta $y = x - 1$.

A imagem por f do exemplo acima é

A inversa $f^{-1} : B \to D$ é obtida de forma semelhante. Dado $Q \in B$, escolhemos o ponto (x^*, y^*) de Q sobre a reta $y = x - 1$ de maior coordenada x (tal ponto existe porque qualquer caminho de $(0,0)$ até $(n+1, n-1)$ necessariamente passa pela reta $y = x - 1$). Escrevemos $Q = Q_1 Q_2$, onde Q_1 é um caminho reticulado de $(0,0)$ até (x^*, y^*) e Q_2 de (x^*, y^*) até $(n+1, n-1)$. Seja $Q_2^{'}$ a reflexão de Q_2 com relação à reta $y = x - 1$. Agora, basta tomar $f^{-1}(Q) = Q_1 Q_2^{'}$. $\square$

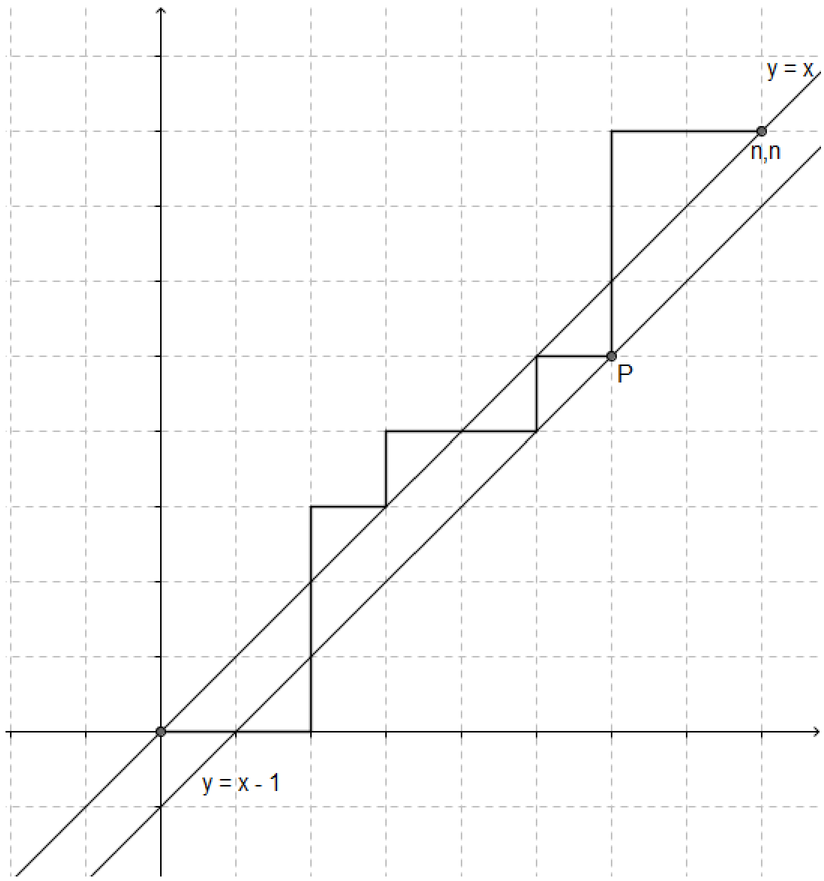

Figura 9: Caminho Reticulado da origem a (n,n)

3.2 PROVAS COMBINATÓRIAS

Considere o problema de provar uma identidade do tipo $A = B$, onde A e B são fórmulas que podem envolver fatoriais, coeficientes binomiais, etc. Uma maneira de provarmos tal identidade é dar uma demonstração algébrica usando ferramentas como o Teorema Binomial[1] ou outras técnicas algébricas. Outra maneira de provar tal identidade é encontrar uma prova combinatória. Esta última estabelece a igualde de duas fórmulas exibindo um conjunto de objetos na qual a cardinalidade é dada por ambas as fórmulas. Logo, os principais passos para uma prova combinatória de $A = B$ são:

- definir um conjunto S de objetos;
- dar um argumento de contagem (Princípio Aditivo, Princípio Multiplicativo, bijeções, etc) para provar que $|S| = A$;

[1] $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

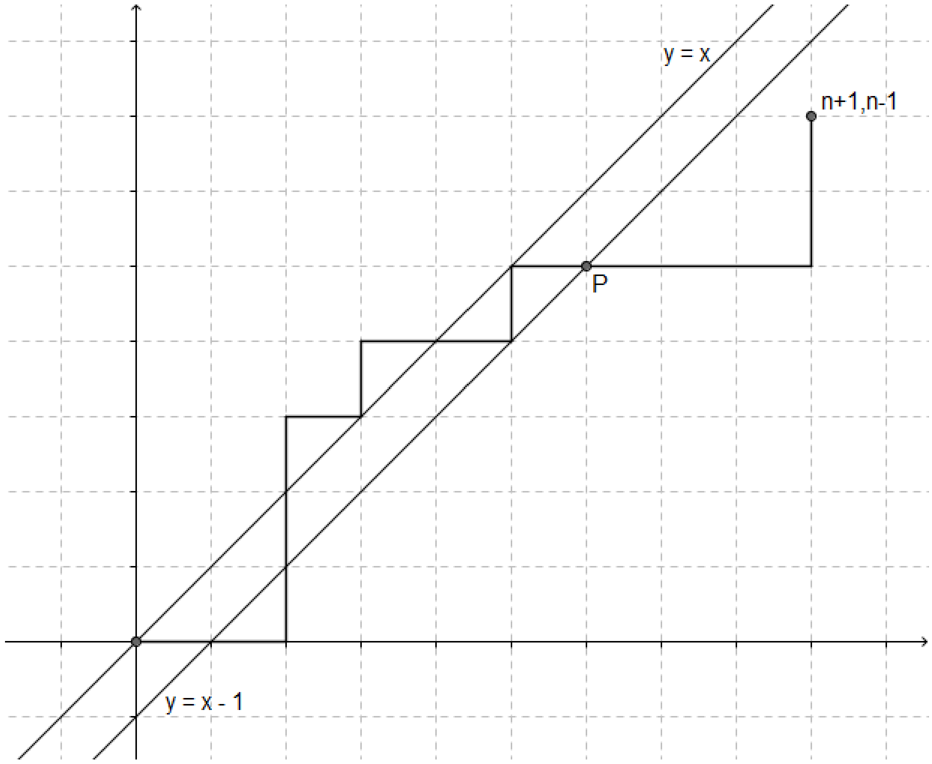

Figura 10: Caminho Reticulado da origem a (n+1,n-1)

- dar um argumento de contagem diferente para provar que $|S| = B$;
- Concluir que $A = B$.

Vamos ilustrar essa poderosa ferramenta nos próximos resultados.

Teorema 19. *Para* $0 \leq k \leq n$*,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{3}$$

Demonstração. Defina S como o conjunto de todos os subconjuntos com n elementos de $X = \{1, 2, \dots, 2n\}$. Esta escolha de S foi motivada por sabermos que $|S| = \binom{2n}{n}$, que é o lado direito da igualdade desejada (3). Para completar a prova, contamos S de uma nova maneira. Seja $X_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ e $X_2 = \{n+1, \cdots, 2n\}$. Para $0 \leq k \leq n$, definimos:

$$S_k = \{A \subseteq S : |A \cap X_1| = k, |A \cap X_2| = n - k\}.$$

Temos que S é a união dos subconjuntos S_k, onde $S_k \cap S_\ell = \emptyset$ para todo $k \neq \ell$.

Para determinarmos $|S_k|$, vamos construir um subconjunto $A \subseteq S_k$ de duas maneiras. Primeiramente, escolhemos um subconjunto com k elementos de $A \cap X_1$ de $\binom{n}{k}$ maneiras. Depois, escolhemos um subconjunto com $(n-k)$ elementos de $A \cap X_2$ de $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ maneiras. Podemos ver que $S_k = \binom{n}{k}^2$ pelo Princípio Multiplicativo. Logo $|S| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, completando a prova.

□

Podemos encontrar uma prova combinatória diferente para a identidade dada. Por exemplo, temos uma prova alternativa de (3) usando caminhos reticulados. Seja S o conjunto de todos os caminhos reticulados da origem até (n,n). Sabemos que $|S| = \binom{2n}{n,n} = \binom{2n}{n}$. Para $0 \leq k \leq n$, seja S_k o conjunto de todos os caminhos em S passando por $(k, n-k)$ na reta $x + y = n$. Cada caminho em S deve passar exatamente em um tal ponto para algum k entre 0 e n. Então S é a união de $S_0, S_1, \ldots, S_n$, onde $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Para construir um caminho em S_k, primeiro escolhemos um caminho de $(0,0)$ até $(k, n-k)$ de $\binom{n}{k,n-k} = \binom{n}{k}$ maneiras. Segundo, escolhemos um caminho de $(k, n-k)$ até (n,n). Este é um caminho num retângulo de largura $(n-k)$ e altura $n-(n-k) = k$, então existem $\binom{n}{n-k,k} = \binom{n}{k}$ maneiras de fazer a segunda escolha. Pelos Princípios Aditivo e Multiplicativo, concluímos que $|S| = \sum_{k=0}^{n} |S_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

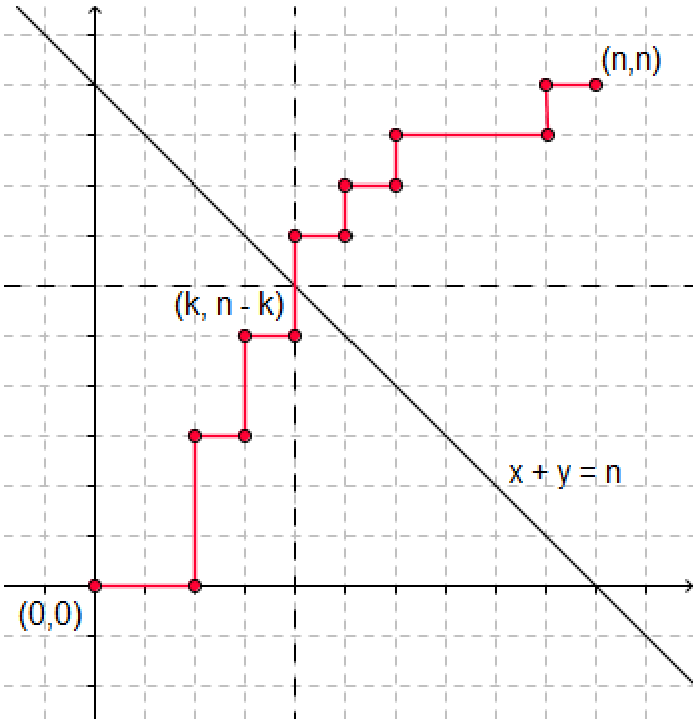

Figura 11: Uma prova combinatorial usando caminhos reticulados

Teorema 20. *Dados $a \geq 0$ e $b \geq 1$, temos que*

$$\binom{a+b}{a,b} = \sum_{k=0}^{a} \binom{k+b-1}{k,b-1}.$$

Demonstração. Seja S o conjunto de todos os caminhos reticulados da origem até (a,b). Já sabemos que $|S| = \binom{a+b}{a,b}$. Para $0 \leq k \leq a$, seja S_k o conjunto de caminhos $\pi \in S$ tais que o último passo norte de π esteja na reta $x = k$. Podemos construir um caminho em S_k escolhendo qualquer caminho reticulado da origem até $(k, b-1)$ de $\binom{k+b-1}{k,b-1}$ maneiras e acrescentando um passo para norte e $a-k$ passos para leste. Assim, a identidade dada segue do Princípio Aditivo. $\square$

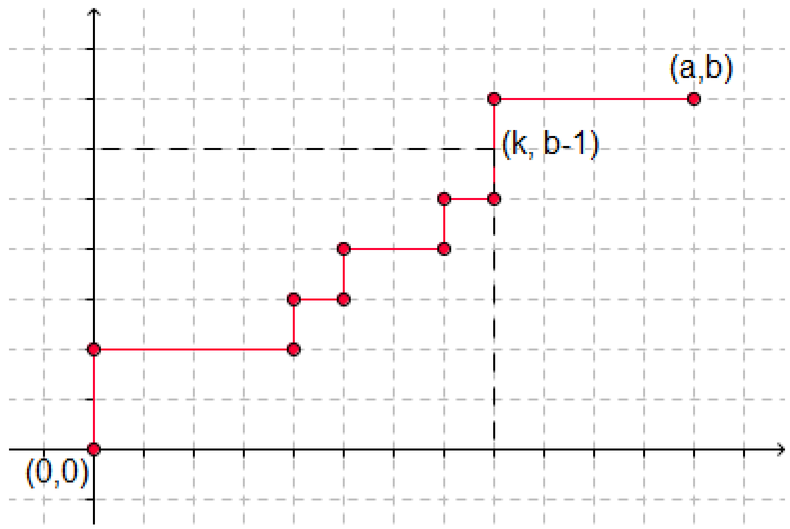

Figura 12: Outra prova combinatorial usando caminhos reticulados

Teorema 21 (Identidade de Chu-Vandermonde)**.** *Dado $a, b, c \geq 0$, temos que*

$$\binom{a+b+c+1}{a,b+c+1} = \sum_{k=0}^{a} \binom{k+b}{k,b}\binom{a-k+c}{a-k,c}$$

Demonstração. Seja S o conjunto de todos os caminhos reticulados da origem até $(a, b+c+1)$. Sabemos que $|S| = \binom{a+b+c+1}{a,b+c+1}$. Para $0 \leq k \leq a$, seja S_k o conjunto dos caminhos $\pi \in S$ que contêm passos para o norte de (k,b) a $(k, b+1)$. Como cada caminho em π deve cruzar a reta $y = b + \frac{1}{2}$ dando passos ao norte entre as linhas $x = 0$ e $x = a$, vemos que S é a união dos conjuntos $S_0, S_1, \ldots, S_n$, onde $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Agora podemos construir um caminho S_k como segue: primeiro, escolhendo um caminho reticulado da origem a (k,b) de $\binom{k+b}{k,b}$ maneiras; segundo, acrescentando passos ao norte neste caminho; terceiro, escolha um caminho reticulado de $(k, b+1)$ a $(a, b+c+1)$. Este é um caminho num retângulo de largura $a-k$ e altura c, então existem $\binom{a-k+c}{a-k,c}$ maneiras de fazer essa escolha. Assim $|S_k| = \binom{k+b}{k,b} \times 1 \times \binom{a-k+c}{a-k,c}$ pelo Princípio Multiplicativo. A identidade agora segue do Princípio Aditivo. □

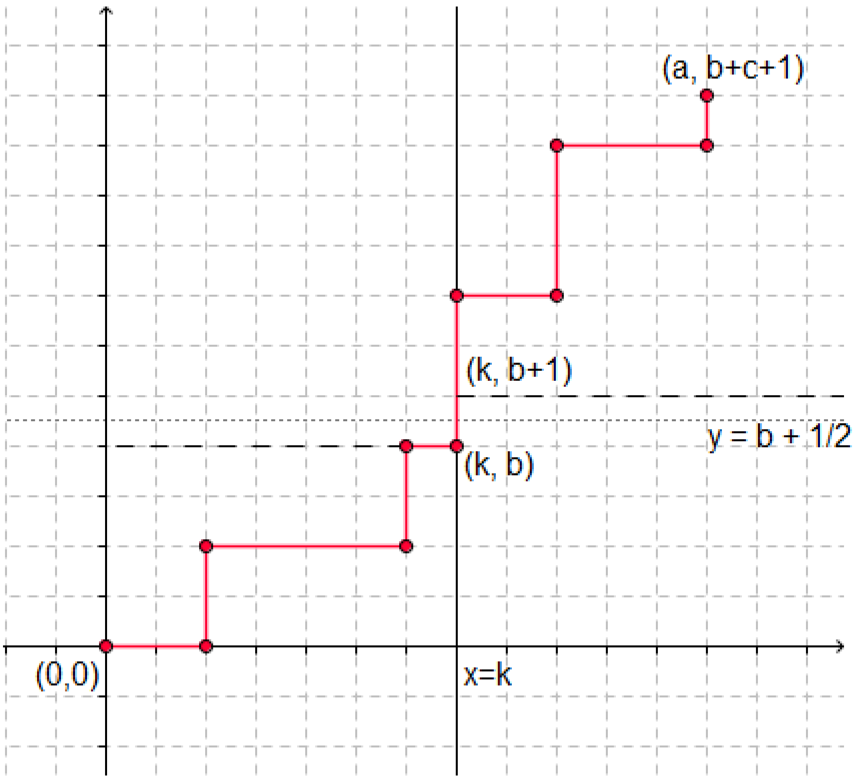

Figura 13: Uma terceira prova combinatorial usando caminhos reticulados

O Teorema 20 é um caso especial do Teorema 21, obtido quando $c = 0$ e substituindo b por $b-1$.

3.3 RECURSÕES PARA CAMINHOS RETICULADOS

Técnicas recursivas nos permitem contar caminhos reticulados através de relações de recorrência. Primeiro vamos considerar a situação de caminhos reticulados em um retângulo.

3.3.1 *Recursão para caminhos reticulados em um retângulo*

Para $a, b \geq 0$, seja $L(a, b)$ o número de caminhos reticulados da origem até (a, b). Temos que $L(a, 0) = L(0, b) = 1$ para todo $a, b \geq 0$. Se $a > 0$ e $b > 0$, note que qualquer caminho reticulado terminando em (a, b) tem como último passo ou um passo leste ou passo norte. Obtemos caminhos reticulados do primeiro tipo por tomarmos qualquer caminho reticulado terminando em $(a-1, b)$ e adicionando um passo ao leste. Obtemos qualquer caminho reticulado em $(a, b-1)$ e adicionando um passo ao norte. Assim, pelo Princípio Aditivo:

$$L(a, b) = L(a-1, b) + L(a, b-1), (a, b > 0).$$

Agora podemos mostrar (por indução em $a+b$) que

$$L(a, b) = \binom{a+b}{a, b} = \frac{(a+b)!}{a!b!}, (a, b \geq 0),$$

que é o resultado que obtivemos no Teorema 17.

Podemos visualizar e calcular o número $L(a, b)$ indicando em cada ponto (a, b) do caminho reticulado o número $L(a, b)$. A condição inicial diz que os pontos reticulados sobre os eixos são identificados como 1. A recursão diz que o índice de um ponto (a, b) é a soma dos índices dos pontos $(a-1, b)$, a sua esquerda imediata, e $(a, b-1)$, imediatamente abaixo dele. Ver Figura 14.

Modificando as condições limites, $L(a, 0) = L(0, b) = 1$, podemos adaptar a recursão no exemplo anterior para contar caminhos reticulados mais complicados.

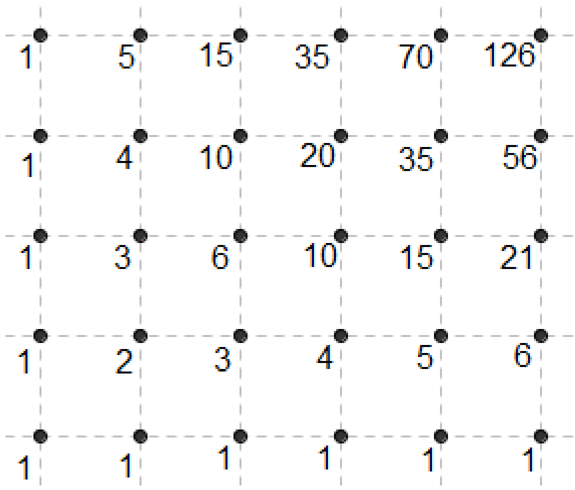

Figura 14: Malha de valores para $L(a, b)$

3.3.2 *Recursão para caminhos reticulados em um triângulo*

Para $b \geq a \geq 0$, seja $T(a, b)$ o número de caminhos reticulados da origem até (a, b) que nunca ficam abaixo da reta $y = x$. (Em particular, $T(n, n)$ é o número de Caminhos de Dyck de ordem n). Pelo mesmo argumento usado anteriormente, temos que $T(a, b) = T(a-1, b) + T(a, b-1)$ $(b > a > 0)$. Ver Figura 15

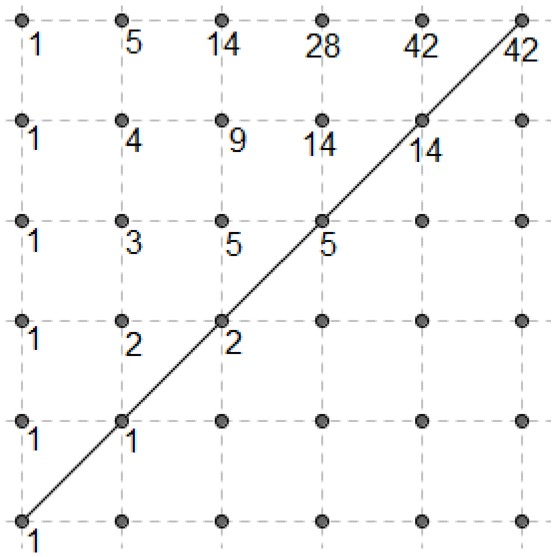

Figura 15: Malha de valores para $T(a, b)$ acima da reta $y = x$

Por outro lado, quando $a = b > 0$, um caminho reticulado só pode chegar a $(a, b) = (a, a)$ tomando passos leste, já que o ponto $(a, b-1)$ está abaixo da reta $y = x$. Deste modo, $T(a, a) = T(a-1, a)$, $(a > 0)$. A condição inicial é $T(0, b) = 1$ para todo $b \geq 0$. A Figura 15 mostra alguns números $T(a, b)$.

Estamos agora em condições de provar a fórmula fechada para os números $T(a, b)$.

Teorema 22 (Números de votos)**.** *Para $b \geq a \geq 0$, o número de caminhos reticulados da origem até (a, b) que nunca ficam abaixo da reta $y = x$ é $\frac{b-a+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}$. Em particular, o número de Caminhos de Dyck de ordem n é $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = C_n$*

Demonstração. Mostraremos que $T(a, b) = \frac{b-a+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}$ por indução em $(a + b)$. Se $a + b = 0$, então $a = b = 0$, assim $T(0, 0) = 1 = \frac{0-0+1}{0+0+1}\binom{0+0+1}{0}$. Agora assumimos que $a + b > 0$ e $T(c, d) = \frac{d-c+1}{d+c+1}\binom{c+d+1}{c}$ sempre que $d \geq c \geq 0$ e $c + d < a + b$.

Para provar a fórmula desejada para $T(a, b)$, consideramos casos baseados em recursões e condições iniciais. Primeiro, se $a = 0$ e $b \geq 0$, temos $T(a, b)=\frac{b-0+1}{b+0+1}\binom{0+b+1}{0}$ $= 1$. Segundo, se $a = b > 0$, temos:

$$T(a, b) = T(a, a) = T(a-1, a) = \frac{2}{2a}\binom{2a}{a-1} = \frac{1}{a}\frac{(2a)!}{(a-1)!(a+1)!}$$

Multiplicando por $1 = \frac{a!(2a+1)}{a!(2a+1)}$, temos

$$T(a, b) = \frac{a(a-1)!(2a+1)(2a)!}{a(2a+1)a!(a-1)!(a+1)!} = \frac{1}{2a+1}\frac{(2a+1)!}{a!(a+1)!} = \frac{1}{2a+1}\binom{2a+1}{a}$$

Como $a = b > 0$, podemos concluir que

$$T(a, b) = \frac{1}{2a+1}\binom{2a+1}{a} = \frac{b-a+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}.$$

Terceiro, se $b > a > 0$, temos $T(a, b) = T(a-1, b) + T(a, b-1)$, logo

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \tfrac{b-(a-1)+1}{b+(a-1)+1}\tbinom{(a-1)+b+1}{a-1} + \tfrac{(b-1)-a+1}{(b-1)+a+1}\tbinom{a+(b-1)+1}{a} \\ &= \tfrac{b-a+2}{a+b}\tbinom{a+b}{a-1} + \tfrac{b-a}{a+b}\tbinom{a+b}{a} \\ &= \tfrac{b-a+2}{a+b}\tfrac{(a+b)!}{(a-1)!(b+1)!} + \tfrac{b-a}{a+b}\tfrac{(a+b)!}{a!b!} \\ &= \tfrac{(a+b+1)!}{a!(b+1)!}\left[\tfrac{a(b-a+2)}{(a+b)(a+b+1)} + \tfrac{(b-a)(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\right] \\ &= \tfrac{b^2-a^2+a+b}{(a+b)(a+b+1)}\tbinom{a+b+1}{a} \\ &= \tfrac{b-a+1}{a+b+1}\tbinom{a+b+1}{a} \end{aligned}$$

□

Os números $T(a, b)$ no teorema anterior são chamados *números de votos*, pela seguinte razão. Seja $\pi = \pi_1 \cdots \pi_{a+b} \in \{N, L\}^{a+b}$ um caminho reticulado contado por $T(a, b)$, isto é, um caminho de $(0, 0)$ até (a, b) que nunca fica abaixo da reta $y = x$. Imagine que $a + b$ pessoas estão votando para 2 candidatos (Candidato N e candidato L) escolhendo uma sequência ordenada de $a + b$ votos. O caminho π registra esta sequência de votos como segue: $\pi_j = N$ se a j-ésima pessoa votou para o candidato N e π_j=L se a j-ésima pessoa votou para o candidato L. A condição de que π não fica abaixo da reta $y = x$ significa que o candidato N sempre tem pelo menos tantos votos quanto o candidato L a cada estágio do processo de votação. A condição de que π termina em (a, b) significa que o candidato N tem b votos e candidato L tem a votos no final da eleição.

Retornando para caminhos reticulados, suponha que substituamos a reta limite $y = x$ por $y = mx$ (onde m é qualquer número inteiro positivo). Podemos então obter um resultado mais geral.

Teorema 23 (Número de m-votos)**.** *Seja m um número inteiro positivo fixo. Para $b \geq ma \geq 0$ o número de caminhos reticulados da origem a (a, b) que sempre estão acima da reta $y = mx$ é $\frac{b-ma+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}$. Em particular, o número de tais caminhos terminando em (n, mn) é $\frac{1}{(m+1)n+1}\binom{(m+1)n+1}{n}$.*

Demonstração. Seja $T_m(a, b)$ o número de caminhos terminados em (a, b) que nunca está abaixo de $y = mx$. Como anteriormente, temos $T_m(0, b) = 1$ para todo $b \geq 0$, $T_m(a, b) = T_m(a-1, b) + T_m(a, b-1)$ sempre que $b > ma > 0$, e $T_m(a, ma) = T_m(a-1, ma)$ desde que o ponto $(a, ma-1)$ esteja abaixo da reta $y = mx$. Agora provemos que $T_m(a, b) = \frac{b-ma+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}$ por indução em $(a + b)$.

$$
\begin{aligned}
T_m(a,b) &= T_m(a-1,b) + T_m(a,b-1)\\
&= \frac{b-m(a-1)+1}{b+a}\binom{a+b}{a-1} + \frac{b-ma}{b+a}\binom{a+b}{a}\\
&= \frac{b-ma+m+1}{a+b}\frac{(a+b)!}{(a-1)!(b+1)!} + \frac{b-ma}{a+b}\frac{(a+b)!}{a!b!}\\
&= \frac{b-ma+m+1}{(a+b)(a+b+1)}\frac{(a+b+1)!}{(a-1)!(b+1)!} + \frac{b-ma}{(a+b)(a+b+1)}\frac{(a+b+1)!}{a!b!}\\
&= \left[\frac{(b-ma+m+1)a}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{(b-ma)(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\right]\frac{(a+b+1)!}{a!(b+1)!}\\
&= \left[\frac{ab-ma^2+a+b^2-mab+b}{(a+b)(a+b+1)}\right]\binom{a+b+1}{a}\\
&= \frac{(a+b)(b-ma+1)}{(a+b)(a+b+1)}\binom{a+b+1}{a}\\
&= \frac{b-ma+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}
\end{aligned}
$$

□

Agora, quando a inclinação m da reta limite $y = mx$ não é um número inteiro, não podemos usar a fórmula do teorema anterior.

3.4 OUTROS TIPOS DE CAMINHOS RETICULADOS NO PLANO

Nesta seção vamos tratar de problemas de enumeração simples para outros tipos de caminhos reticulados. Dado um conjunto S de movimentos, então o número de caminhos começando na origem e usando n movimentos de S é $|S|^n$. Se fixarmos o ponto final, então não podemos esperar uma fórmula razoável nesta generalidade. No entanto, no caso de movimentos unitários (positivos), o número de caminhos no plano reticulado inteiro $\mathbb{Z}^2$ de (a, b) a (c, d) considerando movimentos unitários horizontais e verticais na direção positiva é

$$|L((a,b) \to (c,d))| = \binom{c+d-a-b}{c-a}. \tag{4}$$

Generalizando, o número de caminhos reticulados em dimensão d, isto é, em $\mathbb{Z}^d$, de $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ a $e = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$ dependendo de movimentos unitários na direção positiva dos eixos coordenados é dado pelo coeficiente multinomial

$$\begin{aligned} |L(a \to e)| &= \binom{\sum_{i=1}^{d}(e_i - a_i)}{e_1 - a_1, e_2 - a_2, \cdots, e_d - a_d} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{d}(e_i - a_i)\right)!}{(e_1 - a_1)!(e_2 - a_2)! \cdots (e_d - a_d)!}, \end{aligned}$$

para maiores detalhes ver [6].

Outro caso especial, para o qual podemos escrever uma fórmula fechada para o número de caminhos entre dois pontos dados com um número fixo de movimentos: o número de caminhos com n movimentos horizontais e verticais, na direção positiva ou negativa, ou seja, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, de (a, b) a (c, d) é dado por

$$|L((a,b) \to (c,d))| = \binom{n}{\frac{n+c+d-a-b}{2}}\binom{n}{\frac{n+c-d-a+b}{2}},$$

ver [6].

Se considerarmos outros conjuntos de movimentos, então poderemos possivelmente obter fórmulas. Um exemplo específico neste caso é considerarmos caminhos reticulados no plano com três tipos de movimentos, movimento unitário horizontal $(1, 0)$, movimento unitário vertical $(0, 1)$ e movimento na diagonal para cima $(1, 1)$. Seja $S = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ o conjunto de movimentos. Se queremos saber quantos caminhos existem de (a, b) a (c, d) utilizando movimentos de S, encontramos

$$|L((a,b) \to (c,d))| = \sum_{k=0}^{c-a} \binom{c+d-a-b-k}{k, c-a-k, d-b-k}$$

uma vez que, se fixarmos o número de movimentos na diagonal em k, então o número de maneiras de combinarmos k movimentos na diagonal, $c - a - k$ movimentos horizontais e $d - b - k$ movimentos verticais é dado pelo coeficiente multinomial na fórmula acima. Em casos especiais, onde $(a, b) = (0, 0)$, os números correspondentes são chamados Números Delannoy e se $(c, d) = (n, n)$, Números Centrais Delannoy (ver Seção 10.2 de [1]).

Queremos agora enumerar os caminhos reticulados de (a, b) a (c, d) tais que $a \geq b$ e $c \geq d$, que nunca ficam acima da reta $y = x$.

Teorema 24. *Sejam $a \geq b$ e $c \geq d$. O número de caminhos reticulados de (a, b) a (c, d) que nunca ficam acima da reta $y = x$ é dado por*

$$|L((a, b) \to (c, d)|x \geq y)| = \binom{c + d - a - b}{c - a} - \binom{c + d - a - b}{c - b + 1}$$

Demonstração. Primeiramente observamos que o número em questão é o total de caminhos reticulados de (a, b) a (c, d) menos o número daqueles caminhos que ficam acima da reta $y = x$, ou seja,

$$|L((a, b) \to (c, d)|x \geq y)| = |L((a, b) \to (c, d))| - |L((a, b) \to (c, d)| \text{ existe } x < y)|$$

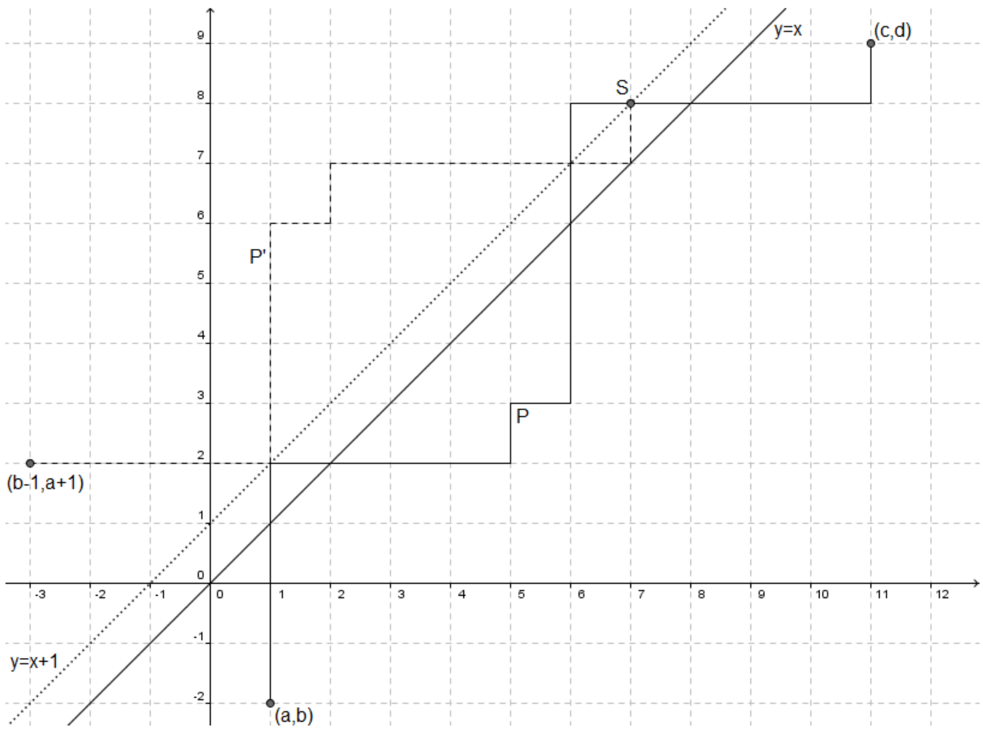

Figura 16: Um exemplo para ilustrar a bijeção da demonstração do Teorema 24

Pela fórmula dada no início desta seção (4), sabemos o valor de $|L((a, b) \to (c, d))|$. Através de reflexões observamos que os caminhos de (a, b) a (c, d) que cruzam $y = x$ estão em bijeção com os caminhos de $(b-1, a+1)$ a (c, d). Isto implica que

$$\begin{aligned} |L((a,b) \to (c,d)|x \geq y)| &= |L((a,b) \to (c,d))| - |L((a,b) \to (c,d)|\text{existe } x < y)| \\ &= |L((b-1,a+1) \to (c,d))|. \end{aligned}$$

Como resultado, utilizando (4), temos a fórmula desejada.

Para finalizar a demonstração, vamos descrever a bijeção utilizada acima. Considere o caminho P de (a, b) a (c, d) cruzando a reta $y = x$ exibido na Figura 16 como exemplo. Então P deve encontrar a reta $y = x + 1$. Entre todos os pontos de encontro de P e $y = x + 1$ escolha o mais a direita. Indique este ponto por S. Agora reflita a parte de P de (a, b) a S em relação à reta $y = x + 1$, não alterando a parte de S a (c, d). Desta maneira obtemos um novo caminho P' de $(b-1, a+1)$ a (c, d). Para construir o mapeamento inverso temos que observar somente qualquer caminho de $(b-1, a+1)$ a (c, d) que encontra $y = x+1$, já que $(b-1, a+1)$ e (c, d) estão em lados diferentes de $y = x + 1$. De novo escolhendo o ponto de encontro mais a direita, indique-o por S e reflita a parte de $(b-1, a+1)$ a S em relação à reta $y = x + 1$, ou, equivalentemente, cruza a reta $y = x$.

Em particular, para $a = b = 0$ obtemos:
Se $c \geq d$ temos

$$|L((0,0) \to (c,d)|x \geq y)| = \frac{c+1-d}{c+d+1}\binom{c+d+1}{d}$$

e

$$|L((0,0) \to (n,n)|x \geq y)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

Os números $\frac{c+1-d}{c+d+1}\binom{c+d+1}{d}$ são chamados Números de Votos, ver Teoremas 22 e 23. Já os números $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ são chamados Números de Catalan, ver Definição 3.5.

Para finalizar, vamos analisar caminhos reticulados que consistem em movimentos $(1, 1)$ diagonal para cima, $(1, -1)$ diagonal para baixo e $(1, 0)$ ou $(2, 0)$ movimentos para direita em uma ou duas unidades e não fica abaixo do eixo x. Se o único movimento para direita permitido for unitário $(1, 0)$ então os caminhos correspondentes são chamados [1] de Caminhos de Motzkin. Se o único movimento para direita permitido for duplo $(2, 0)$ então os caminhos correspondentes são chamados [1] de caminhos de Schröder. Chamamos de caminhos especiais que consistem em apenas movimentos na diagonal para cima ou para baixo de Números de Catalan (ver Definição 3.5). Em casos especiais, onde os caminhos começam e terminam no eixo x, são chamados caminhos de Dyck, ver Definição 3.3 e Teorema 18.

Sejam $M = \{(1,1),(1,-1),(1,0)\}$ e $S = \{(1,1),(1,-1),(2,0)\}$ tais que M são caminhos de Motzkin (ver Figura 17) e S são Caminhos de Schröder (ver Figura 18).

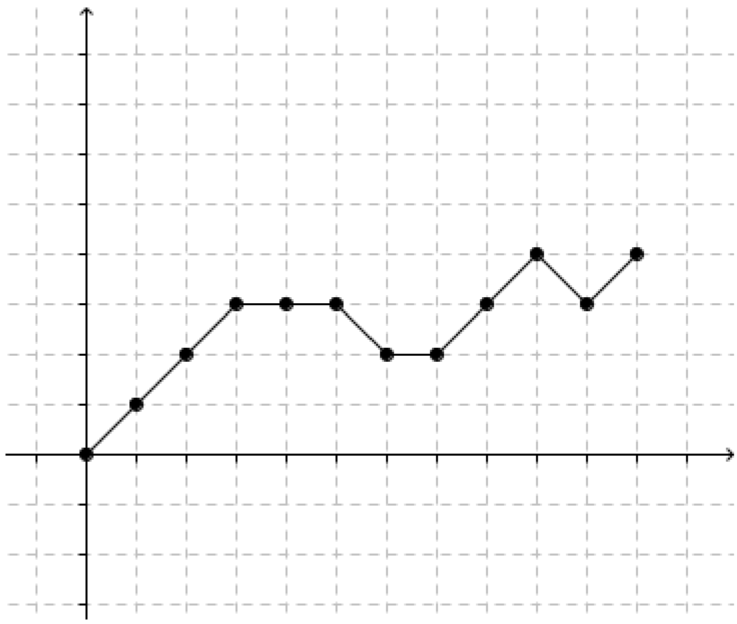

Figura 17: Exemplo de Caminho de Motzkin

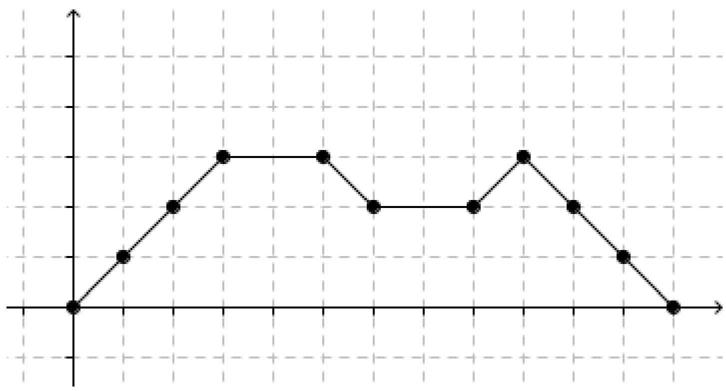

Figura 18: Exemplo de Caminho de Schröder

Uma alternativa para visualizarmos caminhos de Schröder é refletindo a Figura 18 com relação ao eixo x, girando em 45 graus o resultado e finalmente multiplicando tudo pelo fator $\frac{1}{\sqrt{2}}$, então os movimentos $(1,1),(1,-1),(2,0)$ serão substituídos pelos movimentos $(1,0),(0,1),(1,1)$ nesta ordem. A Figura 19 abaixo mostra o resultado dessa translação aplicada no caminho de Schröder na Figura 18, o que traduz o caminho de Schröder em caminho que consiste em movimentos unitários horizontais e verticais e movimentos na diagonal para cima e que ficam abaixo da reta $y = x$.

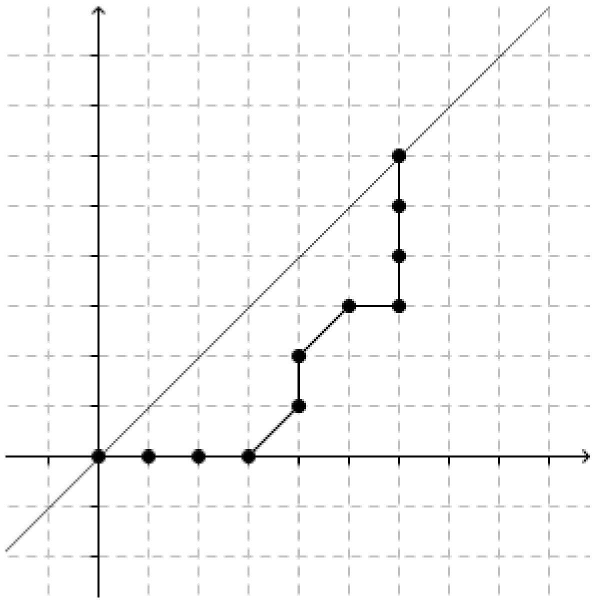

Figura 19: O caminho de Shröder da Figura 18

Finalizamos este capítulo apresentando um teorema de enumeração de Caminhos de Motzkin.

Teorema 25. *Sejam $b \geq 0$ e $d \geq 0$. O número de caminhos de (a, b) a (c, d) que consistem em movimentos de $M = \{(1,1),(1,-1),(1,0)\}$ e não passam abaixo do eixo x (Caminhos de Motzkin) é dado por*

$$|L((a,b) \to (c,d); M|y \geq 0)| = \sum_{k=0}^{c-a} \binom{c-a}{k} \left(\binom{c-a-k}{\frac{c+d-k-a-b}{2}} - \binom{c-a-k}{\frac{c+d-k-a+b+2}{2}} \right). \tag{5}$$

Além disso, o número total de caminhos de (a, b) a (c, d) que consistem em movimentos de $S = \{(1,1),(1,-1),(2,0)\}$ e não passam abaixo do eixo x (caminhos de Schröder) é dado por

$$|L((a,b) \to (c,d); S|y \geq 0)| = \sum_{k=0}^{\frac{c-a}{2}} \binom{c-a-k}{k} \left(\binom{c-a-2k}{\frac{c+d-2k-a-b}{2}} - \binom{c-a-2k}{\frac{c+d-2k-a+b+2}{2}} \right) \tag{6}$$

onde, por convenção, o coeficiente binomial é zero se o parâmetro debaixo não for um número inteiro.

Demonstração. Pela descrição dos movimentos de reflexão e rotação acima, um caminho de Motzkin de (a, b) a (c, d) com exatamente k movimentos para direita é transformado em um caminho de $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$ a $(\frac{c+d}{2}, \frac{c-d}{2})$, que consiste em movimentos de $\{(1,0),(0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ entre eles exatamente k movimentos na diagonal $y = x$. Claramente se removermos os k movimentos diagonais e ligarmos os pedaços dos caminhos restantes, obtemos um caminho simples de $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ a $\left(\frac{c+d}{2} - \frac{k}{2}, \frac{c-d}{2}\frac{k}{2}\right)$ que fica abaixo da reta $y = x$. A quantidade desses últimos caminhos foi determinada no Teorema 24. Por outro lado, existem $\left(\binom{c-a}{k}\right)$ maneiras de inserirmos os k movimentos diagonais. Assim, obtemos (5). A prova de (6) é análoga. $\square$

4

PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo vamos propor uma sequência didática para os alunos da 2ª série do Ensino Médio, sobre enumeração de caminhos reticulados simples, com duração de 5 aulas de 50 minutos cada. A ideia central desta proposta é trabalhar de maneira conjugada os conceitos de combinatória e de plano cartesiano (pares ordenados), sendo este último um tópico em que os alunos desta série encontram grandes dificuldades. Esta sequência didática pode ser aplicada após o professor ter trabalhado o conteúdo básico de análise combinatória.

Assim vamos considerar o plano cartesiano:

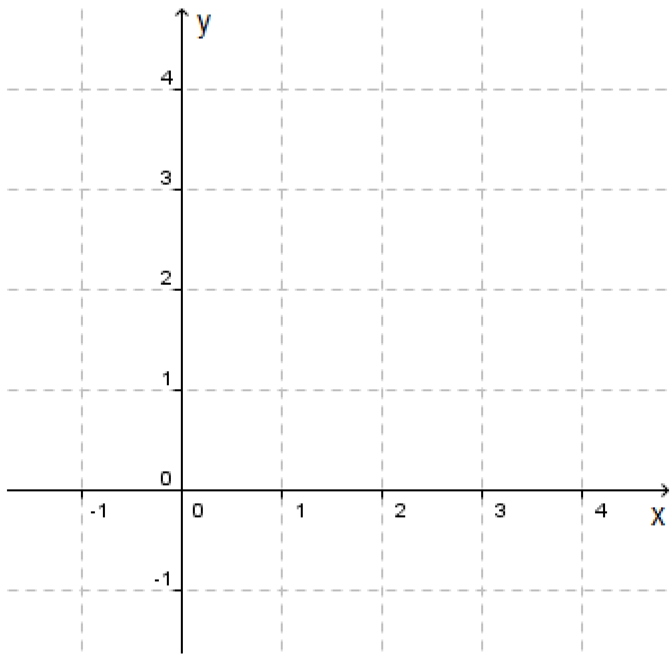

Figura 20: O plano cartesiano

Agora vamos traçar todos os caminhos reticulados, da origem até o ponto $(2,4)$ percorrendo uma unidade apenas no sentido x positivo (para a direita - D) ou no sentido y positivo (para cima - C). Cada caminho traçado chamamos de caminho reticulado (CR). A Figura 21 exibe os caminhos reticulados obtidos.

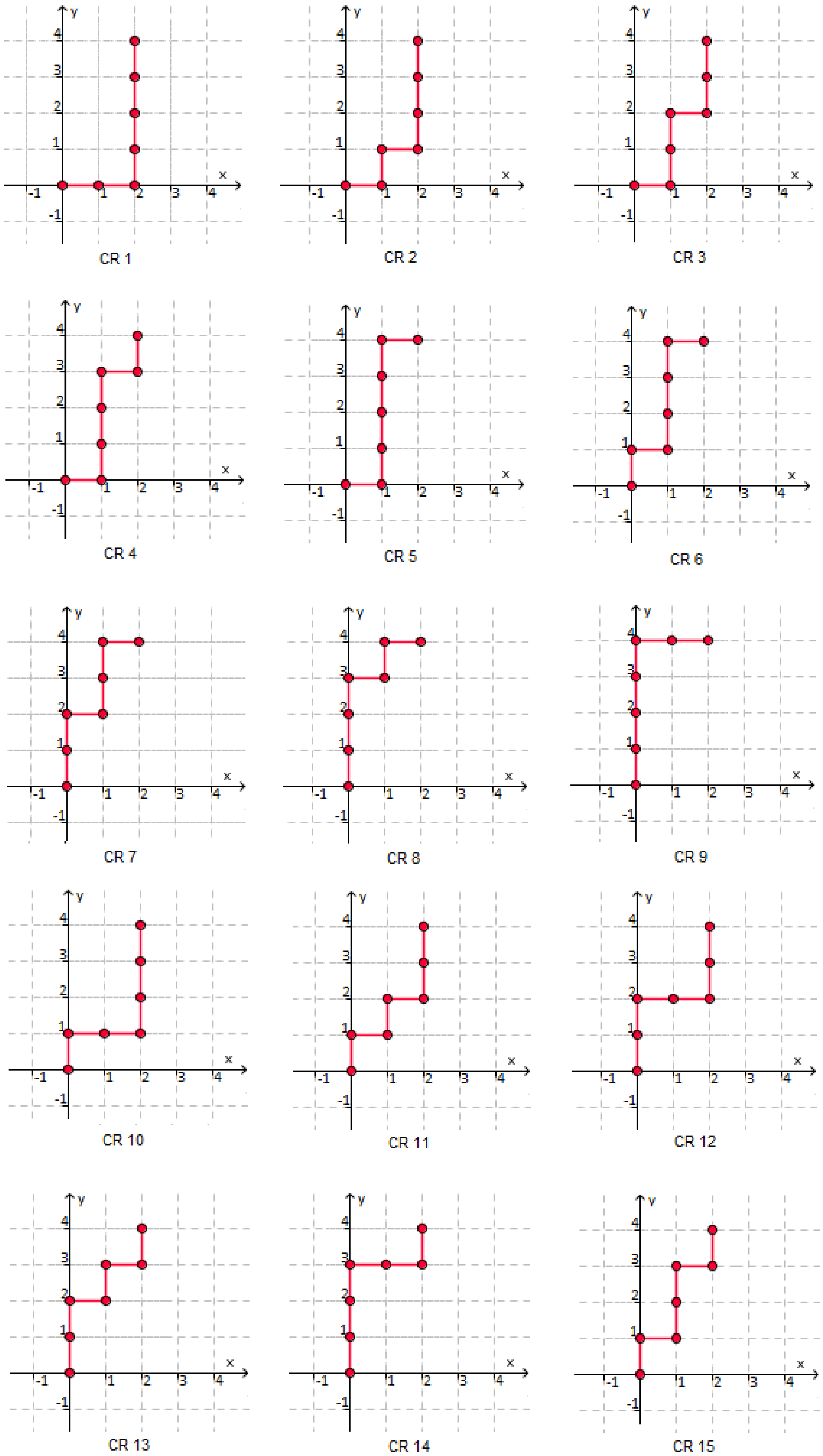

Figura 21: Caminhos reticulados de $(0, 0)$ a $(2, 4)$

Podemos identificar cada caminho reticulado (CR) por sua sequência de movimentos, ver Figura 22.

CR 1: DDCCCC	CR 2: DCDCCC	CR 3: DCCDCC
CR 4: DCCCDC	CR 5: DCCCCD	CR 6: CDCCCD
CR 7: CCDCCD	CR 8: CCCDCD	CR 9: CCCCDD
CR 10: CDDCCC	CR 11: CDCDCC	CR 12: CCDDCC
CR 13: CCDCDC	CR 14: CCCDDC	CR 15: CDCCDC

Figura 22: Sequências de movimentos correspondentes aos caminhos reticulados

Vamos colocar em análise as figuras e os movimentos listados, para que os alunos percebam algumas características em comum entre eles. Espera-se que o aluno perceba que a quantidade de movimentos feitos para a direita é o número correspondente ao eixo x no plano cartesiano e a quantidade de movimentos feitos para cima é o número correspondente ao eixo y no plano, ou seja, o par ordenado (x, y) onde os caminhos reticulados terminam. Esperamos também que o aluno perceba que a quantidade de movimentos feitos é a soma das entradas do par ordenado final (x, y), ou seja, $x + y$. Assim, com os conhecimentos prévios, podemos chegar na quantidade dos caminhos reticulados da origem a $(2, 4)$ e conferir com as figuras feitas.

Sabendo que da origem ao ponto $(2, 4)$, os caminhos reticulados têm que fazer seis movimentos, sendo que dois são para direita e quatro são para cima. Temos que formar palavras com seis letras, duas cópias da letra D e quatro da letra C. Logo pelo Teorema 16 (Enumerando Anagramas), podemos determinar a quantidade desses caminhos:

$$|R(D^2C^4)| = \frac{(2+4)!}{2!4!} = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

Podemos ainda induzir o aluno a identificar outras maneiras de determinar a quantidade desses caminhos reticulados da origem a $(2, 4)$, observando que podemos determinar a quantidade de caminhos reticulados de (a, b) a (c, d), contando quantos movimentos devem ser dados no total $(c - a) + (d - b)$, quantos para direita $c - a$ e quantos movimentos para cima $d - b$, onde $a \leq c$ e $b \leq d$.

Vamos agora analisar outros caminhos reticulados, de $(-1, 1)$ a $(1, 3)$. Traçamos os caminhos reticulados no plano cartesiano e listamos seus movimentos, como feito anteriormente. Primeiro vamos aos desenhos dos caminhos reticulados (Figura 23).

Agora vamos listar os movimentos feitos por cada caminho:

CR 1: DDCC	CR 2: DCDC	CR 3: CDDC
CR 4: DCCD	CR 5: CDCD	CR 6: CCDD.

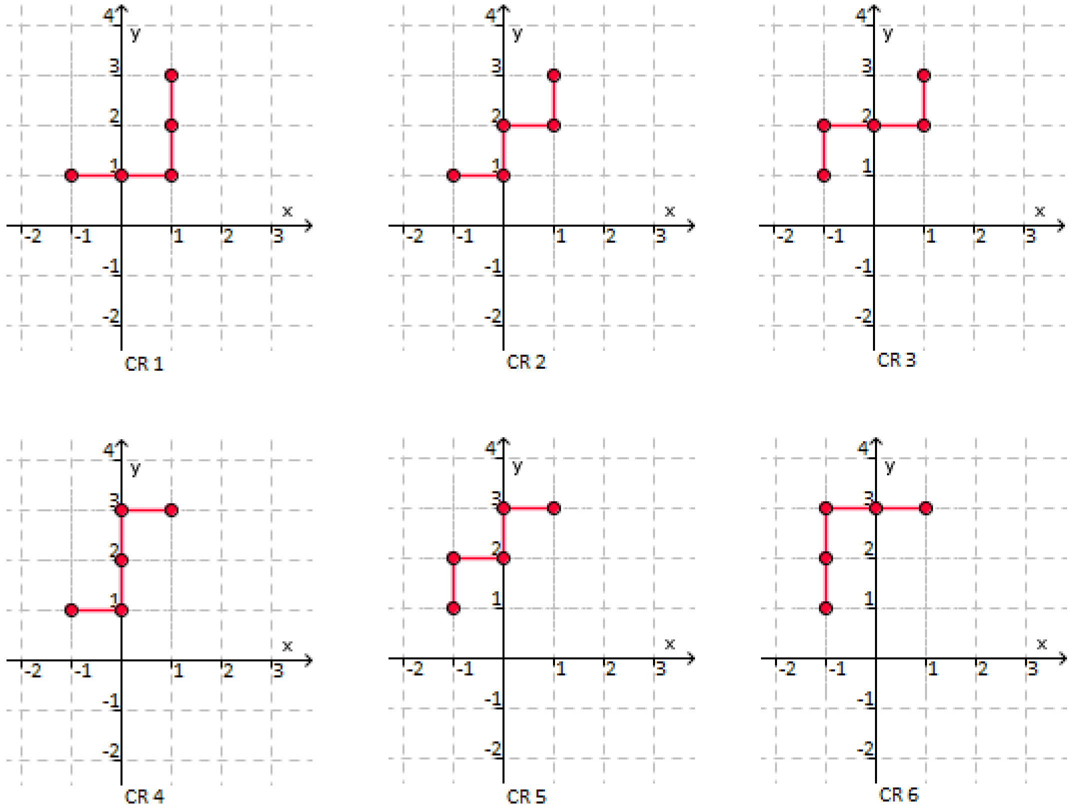

Figura 23: Caminhos reticulados entre $(-1, 1)$ e $(1, 3)$

Para podermos contar quantos caminhos reticulados existem de $(-1, 1)$ a $(1, 3)$, precisamos observar quantos movimentos foram feitos no total, $(1-(-1))+(3-1)=2+2=4$, quantos movimentos foram feitos para direita, $(1-(-1))=2$, e quantos movimentos foram feitos para cima, $(3-1)=2$, logo $|R(D^2C^2)|=\frac{4!}{2!2!}=6$.

Após a explicação e discussão desses exemplos, alguns exercícios serão propostos aos alunos para que resolvam sozinhos, dando-lhes autonomia para trabalhar com os conceitos para que, assim, possam estruturar melhor o que foi aprendido. Exibimos a seguir um exemplo de exercício.

Exemplo 4.1. *Determine a quantidade de caminhos reticulados de* $(-2, -1)$ *a* $(3, 1)$*, desenhando-os no plano, listando seus movimentos, usando* D *para direita e* C *para cima e fazendo os cálculos para justificar sua resposta.*

Exemplo 4.2. *Considere o mapa do Bairro Cidade Morumbi, São José dos Campos/SP (Figura 24).*

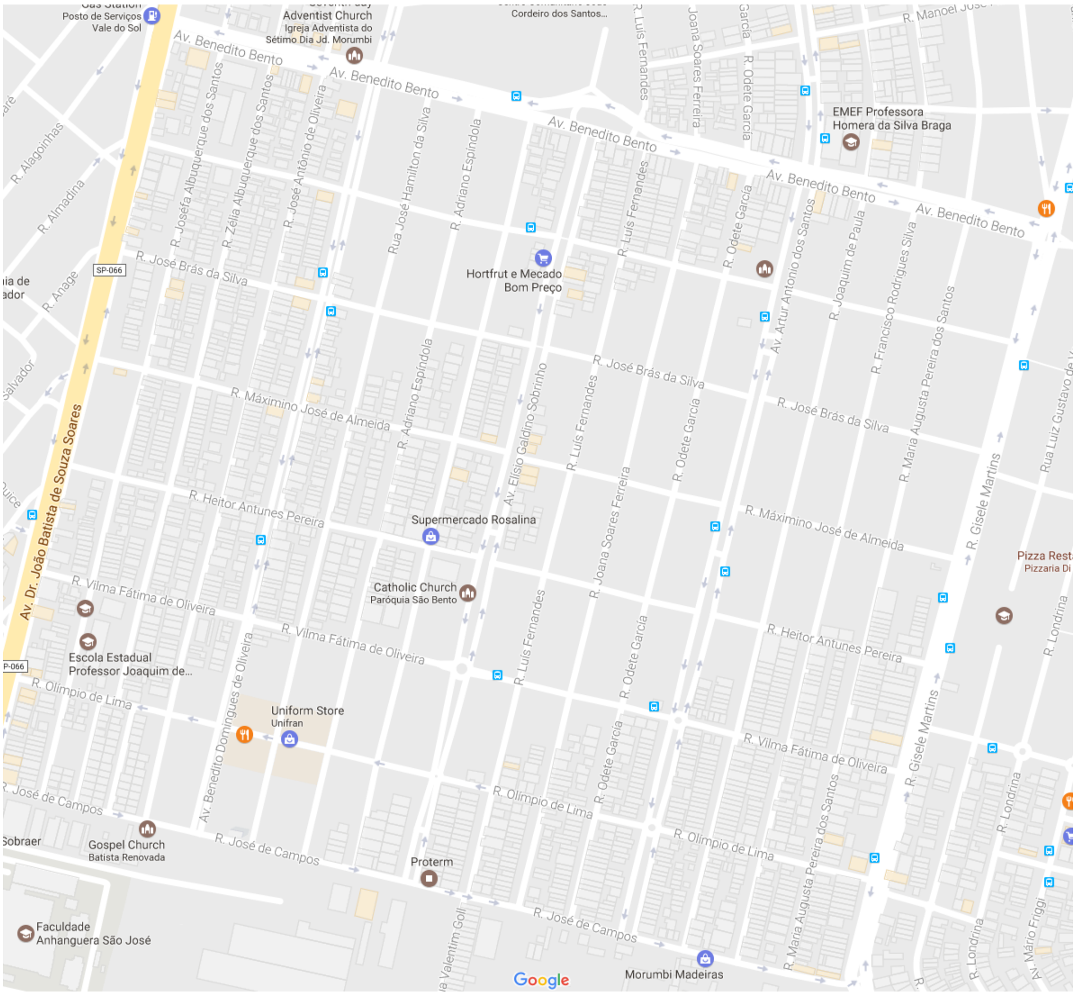

Figura 24: Mapa Bairro Cidade Morumbi, São José dos Campos/SP

Vamos colocá-lo sobre um plano cartesiano (conforme Figura 27), e supor que uma pessoa está no cruzamento da Rua Olímpio de Lima com a Rua Josefá Albuquerque dos Santos e vai se encontrar com um amigo no cruzamento da Rua Heitor Antunes Pereira com a Avenida Benedito Domingues de Oliveira, e dali os dois irão buscar o carro que está no conserto. Sabendo que o carro está no cruzamento da Rua José Brás da Silva com a Av. Elísio Galdino Sobrinho, de quantas maneiras eles podem chegar até lá a pé?

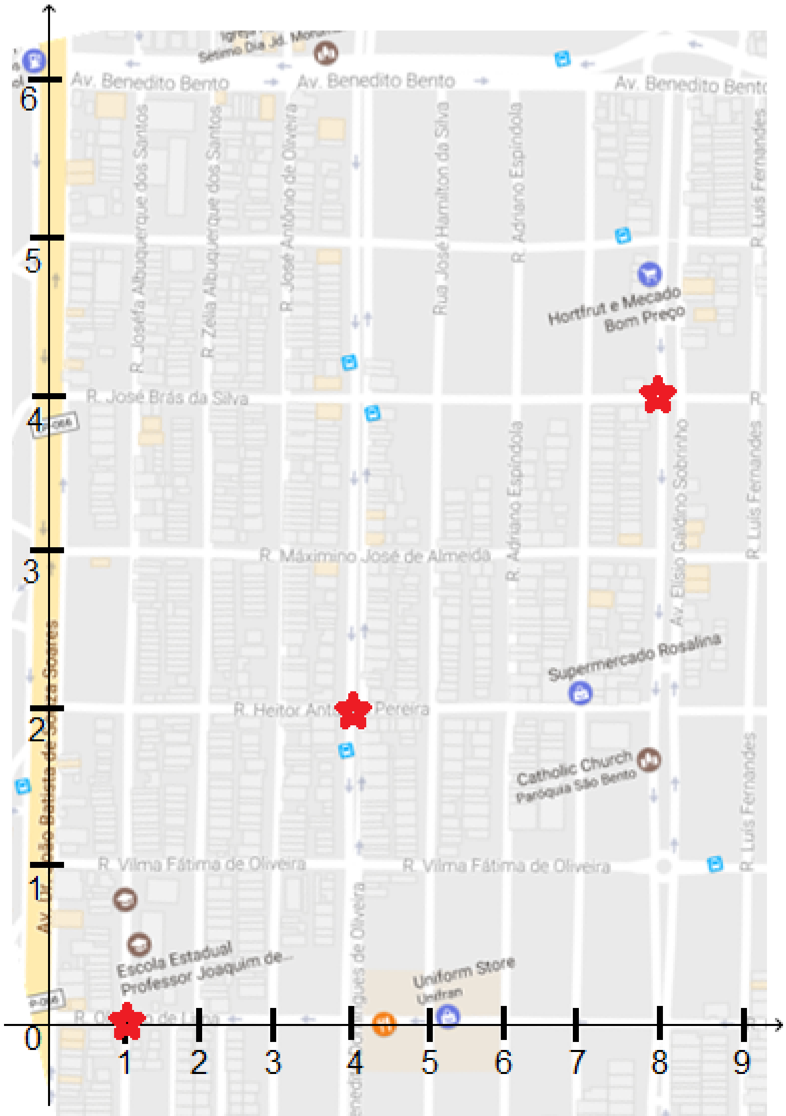

Figura 25: Mapa Bairro Cidade Morumbi sobre o Plano Cartesiano

Exemplo 4.3. *Determine o número de caminhos reticulados da origem até* $(7, 3)$ *que não passam pelo ponto* $(5, 2)$*?*

Exemplo 4.4. *Suponha que as ruas do mapa abaixo (Jardim Catarina, São Gonçalo/RJ) são de mão dupla.*

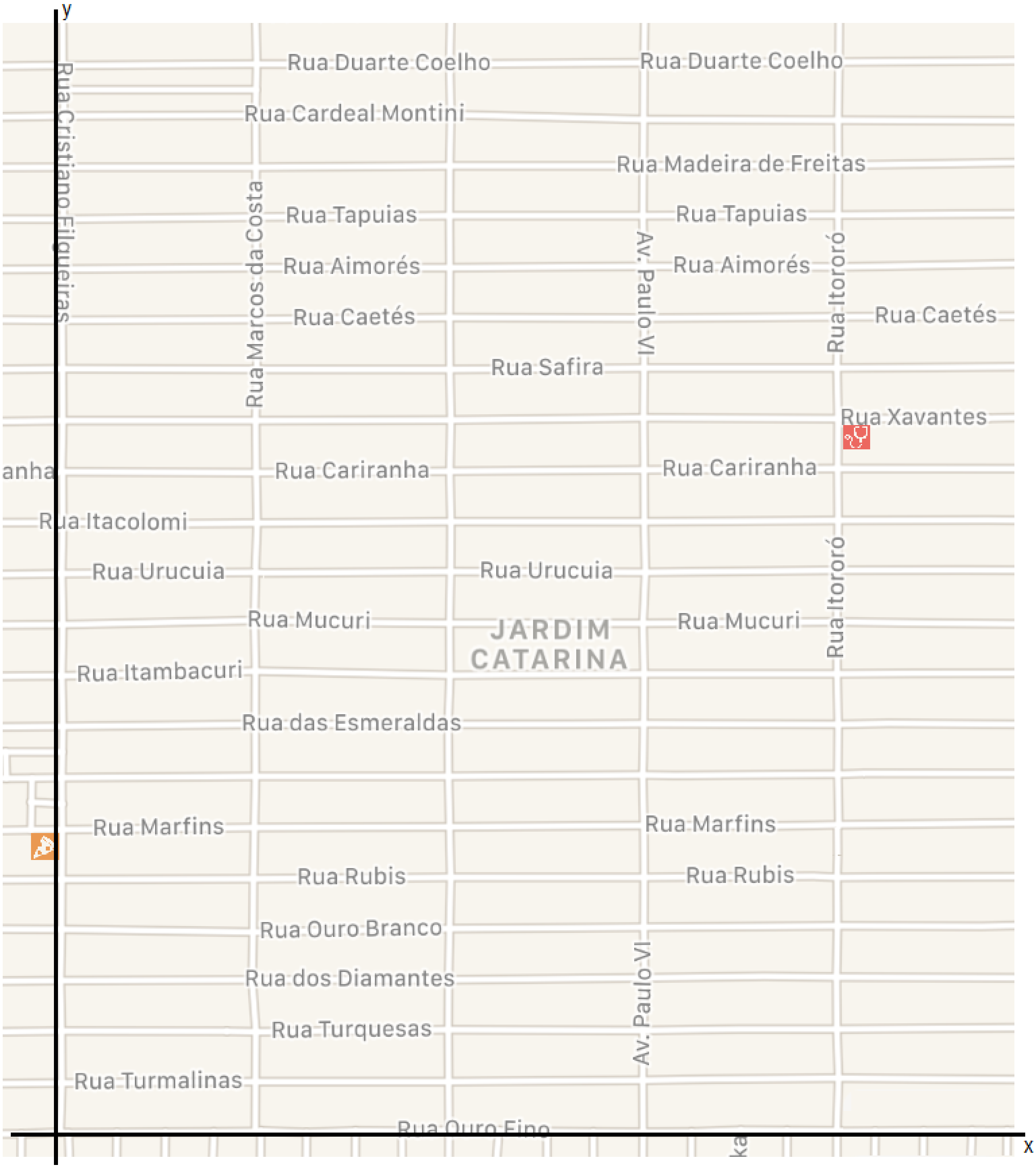

Figura 26: Mapa Jardim Catarina sobre o Plano Cartesiano

a) De quantas maneiras Ana pode ir de carro da sua casa, que fica do lado da pizzaria - cruzamento da Rua Martins com a Rua Cristiano Figueiras, até onde trabalha no cruzamento da Rua Xavantes com a Rua Itororó? (pontos em destaque no gráfico).

b) No dia seguinte, ao sair de casa para trabalhar ouviu no rádio que a Rua Urucuia está interditada (reta em vermelho). De quantas maneiras ela pode ir para o trabalho?

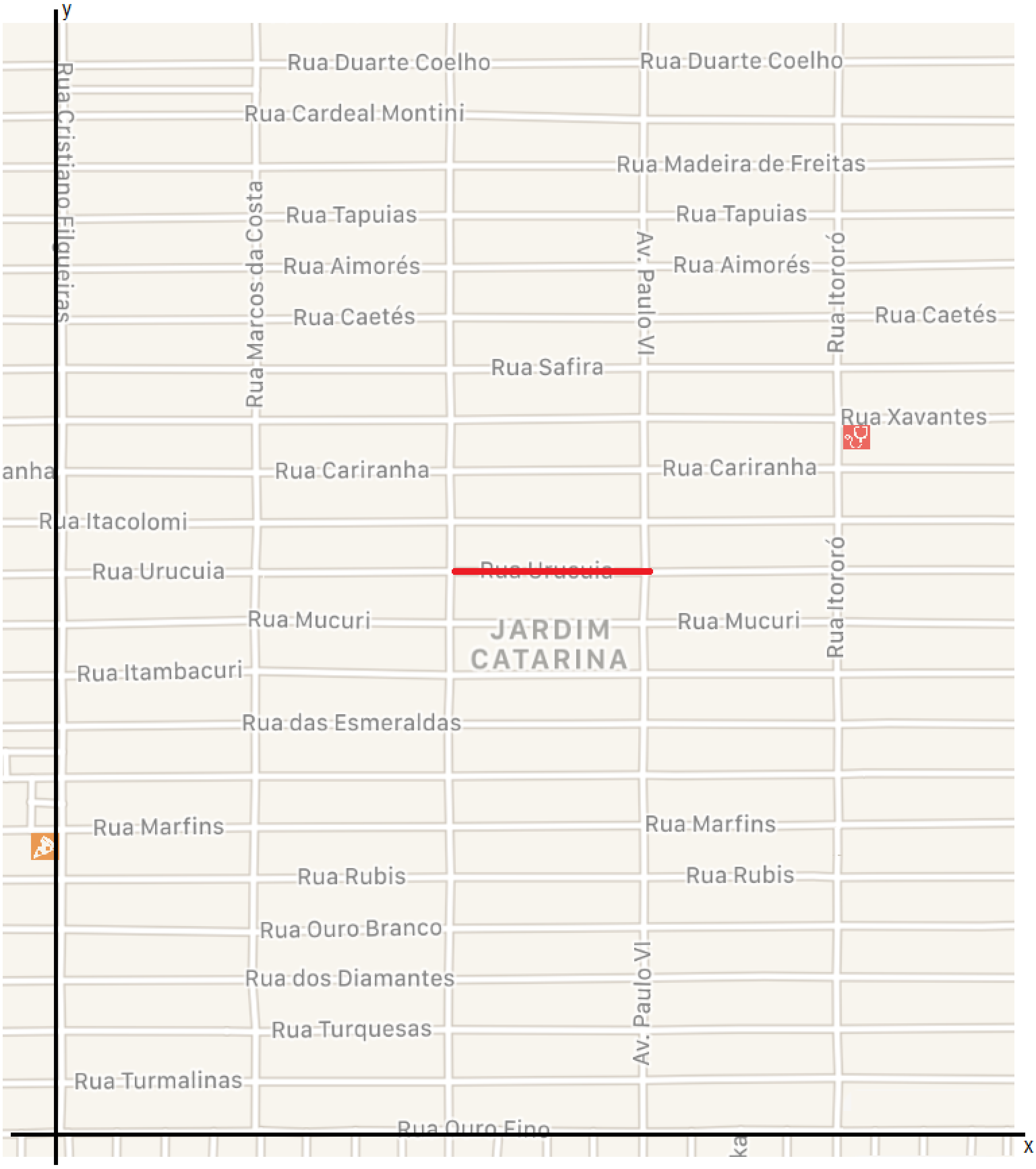

Figura 27: Mapa Jardim Catarina sobre o Plano Cartesiano

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos uma revisão dos conteúdos de combinatória enumerativa, incluindo alguns vistos na disciplina Matemática Discreta. Pudemos nos familiarizar com algumas técnicas ainda não vistas: Princípio da Inclusão e Exclusão e provas bijetivas. Aplicamos estas ferramentas de contagem para determinar as cardinalidades de vários conjuntos de objetos.

No Capítulo 3 estudamos os caminhos reticulados no plano cartesiano, procurando aplicar os princípios de contagem vistos no Capítulo 2. Em especial, fizemos uso sistemático das chamadas provas bijetivas.

Um dos objetivos mais importantes do presente trabalho foi pensar numa proposta didática que colaborasse com o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio e ajudasse o discente em sua defasagem em relação ao plano cartesiano. A proposta didática feita aqui busca partir do conteúdo básico de combinatória visto em sala de aula e aplicar, para uma melhor fixação dos conceitos, a contagem de caminhos reticulados, algo não presente em salas de aula do Ensino Médio. Esperamos que isso cumpra um triplo objetivo: fixar os conceitos de combinatória, ajudar os alunos a relembrar como trabalhar no plano cartesiano e, por fim, mostrar-lhes algo interessante e novo (caminhos reticulados) na esperança de incentivar a curiosidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Bóna, *Handbook of Enumerative Combinatorics, Discrete Mathematics and its applications*, Series Editor Miklós Bóna, 2015.

[2] P. C. P. Carvalho, A. C. Morgado, *Matemática discreta.* SBM, 2013.

[3] N. A. Loehr, *Bijective Combinatorics, Discrete Mathematics and its applications*, Series Editor Kenneth H. Rosen, 2011.

[4] J. P. O. Santos, M. P. Mello, I. T. C. Murari, *Introdução à Análise Combinatória*, Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2007.

[5] R. P. Stanley, Catalan addendum, versão de 25 de maio de 2013. http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf. último acesso em 27-01-2017.

[6] R. K. Guy, C. Krattenthaler, B. E. Sagan, *Lattice Paths, Reflections, & Dimension-Changing Bijections.* Ars Combinatoria, 34 (1992), 3–15.

[7] São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*, Secretaria da Educação; 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2011.72 p.