Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Ellen Cristinni de Souza Gomes de Melo

UM PEQUENO RETRATO ACERCA DO APRENDIZADO DE NOSSO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Recife, 23 de fevereiro de 2017

Ellen Cristinni de Souza Gomes de Melo

UM PEQUENO RETRATO ACERCA DO APRENDIZADO DE NOSSO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Anete Soares Cavalcanti

Recife, 23 de fevereiro de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

M528p Melo, Ellen Cristinni de Souza Gomes de
Um pequeno retrato acerca do aprendizado de nosso sistema de numeração decimal / Ellen Cristinni de Souza Gomes de Melo. – 2017.
106 f. : il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Aprendizagem 2. Sistema de numeração decimal
I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II. Título

CDD 510

Banca examinadora:

Profa. Dra. Anete Sares Cavalcanti

Prof Dr. Airton T. Gonçalves de Castro - DMAT - UFPE

Prof Dr. Severino Barros de Melo - DED/UFRPE

Prof Dr. Rodrigo José Gondim Neves - PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho ao meu pai Antonio pela sua perseverança em minha educação e por ter sido o primeiro a me apresentar ao mundo matemático pelo qual hoje faço parte, e ao meu filho Pietro por todo seu amor e companheirismo.

(...) mas não sou mais tão criança a ponto de saber tudo.

Renato Russo

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por cada momento que tive durante este curso principalmente pela felicidade de estar concluindo este trabalho. Em segundo a minha orientadora Professora Anete Soares Cavalcanti por suas aulas inspiradoras, por sua energia a cada encontro, demonstrando mais crença em mim do que eu mesma tinha em vários momentos. Por compreender minhas dúvidas e me indicar os caminhos para resolvê-las, enfim por ter aceitado-me de maneira sempre tão gentil inclusive ao corrigir-me. Ao meu Filho Pietro Gomes por toda a paciência, carinho, luz e energia que sempre me transmitiu, inclusive nos momentos em que eu deveria fazê-lo. Ao meu marido Áulus Santos por todas as conversas calorosas que tivemos sobre este trabalho durante quase dois anos, sendo muitas vezes um co-orientador, além de possuir uma infinita paciência e compreensão. Obrigada aos dois homens do meu lar, por tanto companheirismo. A minha mãe Adalzira e sogra Helena assim como a Creuza por terem sido tão presentes em minha vida nestes quatro anos, sem elas este sonho não teria se concretizado. Ao meu Pai Antonio, meu irmão Harrison, meu Sogro Denisaldo, meus cunhados Alexandre e Livia por todo apoio que me deram, muito obrigada. Este trabalho não teria sido possível sem as colaborações dos alunos e professores durante as entrevistas realizadas, e sem o apoio da equipe gestora de cada escola pela qual passei. Muito obrigada a cada um de vocês e a cada conversa que tivemos. Este trabalho só pode ser realizado por conta da boa vontade de todos vocês, que não tiveram receio de se expor. Agradecida estou pelo Espaço Ciência ter me cedido dois experimentos que tornaram a realização do projeto mais interessante para os alunos da Escola Santos Cosme e Damião que acolheu meu projeto em sua escola, tanto a gestão como os alunos da turma 9ºD. Muito Obrigada a todos!

Ellen Crisinni de Souza Gomes de Melo

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o resultado de duas pesquisas, de caráter quantitativo, realizadas em quatro escolas no Centro de Igarassu-PE, cujo objetivo foi o de verificar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Sistemas de Numeração Decimal. Motivado pela comum dificuldade computacional que os alunos possuem, mesmo durante o ensino médio, este apresenta alguns dos possíveis motivos responsáveis por tal situação. Baseando-nos no que é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais verificou-se, através de um questionário e ao longo do Ensino Regular, algumas das dificuldades mais presentes nos alunos em relação ao Sistema de Numeração Decimal; e, também, a maneira como professores e livros abordam este assunto. Após a verificação dos resultados foi realizado um projeto com uma das turmas de 9ž ano entrevistadas, cujo desenvolvimento apresentamos neste trabalho, com o objetivo de exemplificar maneiras de se retomar tal conteúdo. Além disso, encontramos sugestões para trabalhar as características do Sistema de Numeração decimal dentro do Campo numérico ao longo do Ensino regular.

Palavras-chave: Sistemas de Numeração. Sistemas de Numeração Decimal. Dificuldade Computacional.

ABSTRACT

In this work we present the results of two quantitative researches carried out in four schools in the Igarassu-PE Center, whose objective was to verify the teaching and learning process of the contents of Decimal Numbering Systems. Motivated by the common computational difficulty that students have, even during high school, this presents some of the possible reasons responsible for such a situation. Based on what is recommended by the National Curriculum Parameters, we verified, through a questionnaire and throughout the Regular Teaching, some of the most present difficulties in the students in relation to the Decimal Numbering System; And also the way teachers and books approach this subject. After the verification of the results, a project was carried out with one of the 9th grade classes interviewed, whose development we present in this work, with the aim of exemplifying ways tot take up such content. In addition, we find suggestions for working the features of the Numerical Numbering System within the Numeric Field throughout regular Teaching.

Keywords: Numbering Systems. Decimal Numbering Systems. Computational Difficulty.

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de siglas e abreviações

SND	Sistema de Numeração Decimal
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEBPE	Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco
a.E.C.	antes da Era Comum
SN	Sistema de Numeração
SNA	Sistema de Numeração Aditivo
SNP	Sistema de Numeração Posicional
SNIA	Sistema de Numeração Indo-Arábico
SNS	Sistema de Numeração Sumério
SNE	Sistema de Numeração Egípcio
SNB	Sistema de NUmeração Babilônico
SNR	Sistema de Numeração Romano
SNM	Sistema de Numeração Maia
SNI	Sistema de Numeração Inca
SNBi	Sistema de Numeração Binário
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
QVL	Quadro de Valor e Lugar
IQE	Instituto de Qualidade de Ensino
QEA	Quadro de Expectativas de Aprendizagem

Introdução

Uma insistente dificuldade computacional tem convivido com as aulas de matemática. Uma convivência perigosamente aceita, por muitos, como normal, mas até que ponto? É aceitável ver alunos do 6^o Ano do Ensino Fundamental com dificuldade em resolver problemas de divisão com “números grandes", mas será normal ver alunos com esta mesma dificuldade no ensino médio? Por que esta não foi superada ao longo do ensino fundamental? Esta situação gera prejuízos que muito provavelmente não serão compensados durante o ensino médio e ainda farão com que esta modalidade aconteça debilmente, afinal o não saber calcular gera, além do atraso no conteúdo, uma falta de confiança muito grande no aluno que, por sua vez, ficará desestimulado a tentar resolver as questões propostas.

Observando mais de perto tal dificuldade operatória percebemos que muitos alunos não lembram que os algoritmos foram construídos a partir da estrutura de nosso Sistema de Numeração Decimal (SND). Na verdade, o próprio significado dado pelos alunos ao SND é muito vago, tornando-se apenas uma recordação dos tempos da *Tia*. Geralmente foram pouco estimulados a entender o processo de contagem em nosso desenvolvimento ao longo da história e, consequentemente, não sabem argumentar sobre o porquê da nossa escrita numérica. E, independentemente deste conhecimento histórico, também não sabem explicar como o SND funciona.

Fazendo uma rápida leitura sobre como o ensino do Sistema de Numeração Decimal deve acontecer durante o Ensino Regular, observamos que, ao serem iniciados na vida escolar, as crianças tomam conhecimento de nosso SND primeiramente através dos símbolos que usamos para representar uma contagem. Durante os dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental as crianças passam a reconhecer, de maneira escalonada, as suas propriedades, a fim de que haja uma boa execução e entendimento tanto dos algoritmos como da leitura e escrita dos números. Pelos Direitos de Aprendizagem do Ciclo de Alfabetização do Ensino Fundamental [1] as crianças devem ser estimuladas a desenvolver soluções para problemas do campo aditivo(adição e subtração) e multiplicativo(multiplicação e divisão) de maneira pessoal e com o auxílio de recursos como material dourado ou desenhos próprios. Ao final do 3^o ano terão aprendido também o uso de meios convencionais, no caso, os algoritmos para resolver problemas no campo aditivo. Somente no segundo ciclo estas crianças terão contato com os algoritmos usuais da multiplicação e divisão para resolver os problemas propostos e, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN [2], estes algoritmos deverão ser aperfeiçoados através de situações problemas no desenrolar dos 3^o e 4^o ciclos do Ensino Fundamental. Ao chegar no Ensino Médio o professor deverá refinar este conhecimento formalizando-o dentro de uma linguagem apropriada para que os alunos possam tanto amadurecer matematicamente, como usar livremente as propriedades de nosso SND seja em notações, cálculos, comparações, etc.

Como a realidade não satisfaz as expectativas contidas nos documentos oficiais, provavelmente há desencontros na construção dessas vidas escolares, que dependem, em parte e/ou em todo, daqueles que são responsáveis por estas vidas. Ao buscarmos as recomendações dadas pelo PCN, em relação ao desenvolvimento do campo numérico, observamos que muitas de nossas atuais lamentações já se encontram escritas neste documento de quase vinte anos de idade, juntamente com instruções pertinentes a essas situações. Como as dificuldades são as mesmas o questionamento em relação ao uso de tais recomendações é quase inevitável.

Os questionamentos que realizamos até este momento formam o cerne dessa pesquisa, e esta objetiva apontar direcionamentos que nos permitam compreender melhor este cenário, de má aprendizagem no campo numérico e, assim, podermos pensar em mudanças. Num primeiro momento desejamos revisar como o ensino do SND deve acontecer sob as orientações do PCN e dos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco(PEBPE). Portanto este trabalho começa, em seus dois primeiros capítulos, fazendo uma resgate teórico do assunto de Sistemas de Numeração, do ponto de vista matemático e também sob alguns aspectos históricos. A retomada do SND também ocorrerá no capítulo 3 ao acompanharmos a construção do questionário aplicado a alguns alunos da rede pública. Com esta pesquisa pretendemos formalizar, pelo menos quantitativamente, que o mau desenvolvimento do campo numérico não acontece de maneira discreta tanto no Ensino Fundamental como no Médio. Desejamos com isso que as dificuldades operatórias de nossos alunos não sejam tratadas com banalidade, ou seja, precisamos refletir sobre a situação atual para rascunharmos mudanças. Mas mudar o quê? Para que possamos entender como o ensino deste conteúdo vem acontecendo outras duas pesquisas foram realizadas, no caso, uma com professores que lecionam na rede pública e, outra, com os livros didáticos utilizados por eles. As pesquisas foram avaliadas de acordo com o que nos orientam o PCN e o PEBPE. Por fim, realizamos algumas reflexões pertinentes ao esboço que construímos, e trazemos uma sugestão de atividade realizada com alunos que participarão da primeira pesquisa, juntamente com orientações pertinentes do que devemos abordar em relação a este conteúdo ao longo do Ensino Regular.

Este foi o percurso escolhido para encontrar respostas aos questionamentos feitos, contudo este trabalho só pode sugerir reflexões e soluções pois tudo o que foi pesquisado acontece dentro de um cenário particular. As respostas tão esperadas dependerá de cada leitor, de cada sala de aula, de cada escola, de cada comunidade(...). A todos que se incomodam com as dificuldades operatórias presentes em seus estudantes há o desejo de que esta leitura permita reflexões válidas e que mudanças, se possível, aconteçam.

1 Contar e Agrupar

1.1 Como tudo começou

Contar não foi um processo rápido nem fácil, e ainda hoje não existe uma data estabelecida de quando tal processo começou a acontecer. Apesar de existirem ossos marcados que datam de 150.000 anos a.E.C., considerá-los como registro de contagem seria ingênuo, pois não temos nenhum outro fato que valide tal ação. Contudo, o senso numérico já devia estar presente em nossos ancestrais pois a habilidade de reconhecer e comparar pequenas quantidades em um determinado lugar pode ser constatado em boa parte do reino animal, compondo o que conhecemos e chamamos por instinto. Podemos citar três exemplos interessantes que não configuram o ato de contar mas expressam o fato de que os animais conseguem comparar quantidades e assim decidir o que é melhor para sua sobrevivência. O primeiro, muito conhecido, diz respeito aos pássaros que determinam a segurança de seu lar pela quantidade de ovos em seu ninho. Se após um voo, o pássaro constata que de seu ninho foi retirado pelo menos um ovo, a atitude do mesmo é abandonar o ninho, pois reconhece que lá não é mais um lugar confiável. O segundo exemplo diz respeito ao comportamento das leoas que ao regressarem de uma caçada encontram um outro grupo de leoas em seu território. Nota-se que ao chegarem as leoas conseguem comparar rapidamente os elementos de cada grupo para decidirem o que é mais vantajoso: atacar ou fugir. O último exemplo diz respeito a vespa solitária, *genus numenus*, que ao desovar coloca cada ovo em uma célula, e ao lado da célula também coloca, para alimentar a vespa nascida, uma porção de larvas de inseto e seu senso numérico lhe permite colocar exatamente cinco larvas se o ovo corresponder a um macho e 10 larvas se o ovo corresponder a uma fêmea. Esta distinção de sexos não se sabe como é possível, mas a distinção de quantidade de larvas se dá pelo fato da fêmea ser maior que o macho. [3] Estima-se que o senso numérico do ser humano é de até quatro, conclusão tomada em parte por causa da existência de muitos grupos primitivos espalhados pelo mundo que reconhecem o um, o dois, o três e o quatro, mas a partir daqui sempre usam a palavra “muitos"para identificar uma quantidade maior. [4]

Ao visitarmos os sítios arqueológicos, que possuem pinturas rupestres, percebemos registros de pequenas quantidades de pessoas e animais, provavelmente relatando uma caçada ou uma comemoração. Devido a estes registros considera-se que há aproximadamente 40.000 anos a.E.C. nossos ancestrais já conseguiam contar pequenas quantidades. Mas apenas com a descoberta do osso de Ishango que foi possível estabelecer que o homem já estava, de fato, realizando uma correspondência biunívoca entre quantidades e símbolos, o que teria ocorrido há aproximadamente 20.000 anos a.E.C.

Ao observar o osso Ishango notamos dois blocos de 60 marcas que estão agrupadas de maneiras diferentes por vários grupos de quantidades menores e que algumas vezes esses grupos se repetem. [4] Notemos que esse comportamento só é possível se houver a intenção de contar. Também nos indica que foi apenas uma questão de tempo até perceberem que agrupar em quantidades iguais facilitaria o processo de contagem, surgindo a ideia intuitiva de base de um sistema de numeração.

Saber como o homem saiu do senso numérico, passou a estabelecer uma relação biunívoca um a um (um objeto correspondendo a uma marca, em osso ou galho, ou numa pedra) e mais tarde passou a registrar quantidades metodicamente possibilitando a realização de operações e criação de algoritmos, levaram muitos pesquisadores da história da matemática a estudar cada objeto descoberto em escavações arqueológicas, sejam estas realizadas no Egito ou Mesopotâmia. Cada registro possibilitou aos pesquisadores formarem vários quebra-cabeças e assim, muitas teorias foram criadas para podermos compreender como surgiram

Figura 1 – Osso de Ishango

os primeiros signos que permitiram o homem contar quantidades maiores e de forma mais eficiente. Hoje acreditamos que, de fato, a primeira forma de escrita, de que temos notícias, originou-se de um procedimento de contagem [5], e podemos pontuar os acontecimentos históricos como segue no parágrafo abaixo.

Em algum momento, pequenos grupamentos de pessoas conseguiram desenvolver práticas agrícolas e pecuárias levando-os a se tornarem sedentários. E para que tais práticas fossem possíveis era necessário que houvessem desenvolvido habilidades suficientes para reconhecer a existência das estações do ano, seja através da observação das constelações, ou seja da percepção das fases da lua. Enfim, aprenderam a contar as regularidades. Além disso possuíam condições favoráveis nos lugares em que se encontravam, como água em abundância, solo fértil, recursos de fauna e flora disponíveis. Esta é a fase citada pela grande maioria de nossos livros didáticos como o início da contagem um a um ou seja, os pastores que contavam seu rebanho de ovelhas com pedrinhas, ou com marcas em ossos ou galhos, ou com sementes, ou até com nós em cordas.

O desenvolvimento da agricultura possibilitou o armazenamento de alimentos e com o tempo construiu-se relações de troca desses mantimentos dentro dos próprios grupamentos e posteriormente entre comunidades distintas. Quando estas encontravam vantagens em suas relações geralmente firmavam-se uniões e com o tempo o desenvolvimento destas possivelmente surgiam pequenas cidades. Porém, para que estas fossem bem sucedidas, ou seja, administradas adequadamente, fazia-se necessário certos conhecimentos matemáticos como realizar cobranças de impostos, calcular os bens acumulados e a distribuição do mesmo, demarcar territórios, desenvolver relações comerciais. Estes primeiros passos para administrar tamanha aglomeração de pessoas não seria possível com o uso de riscos em galhos, ossos, ou guardando pedrinhas em uma bolsa. Foi neste turbilhão de necessidades que símbolos que representavam quantidades específicas surgiram, antes mesmo das civilizações.

Na região atual do Iraque escavações encontraram diversas tábuas e diferentes objetos, ambos de argila, datando aproximadamente de 3000 a.E.C., uma data que nos remonta a cidade de Uruk da antiga civilização Suméria. Esses objetos encontrados possuem diversos formatos: cones, esferas, discos, cilindros, etc., que são chamados de *tokens*.

Estes eram utilizados para realizar contagens, porém cada objeto era utilizado para contar um tipo de insumo, ou seja, associar o token, que representava a quantidade um, tanto para uma ovelha como para uma jarra de óleo não era possível, pois esta associação requer uma abstração da qual não possuíam. Pela falta desta abstração este momento de contagem é classificado como Contagem Concreta [5]. Da necessidade de

(a) TOKENS (b) BOLSA DE ARGILA

Figura 2 – Objetos de Argila encontrados em Uruk

guardar os registros, os tokens eram guardados em pequenas bolsas de argila, e como não era possível verificar o que havia dentro posteriormente, utilizavam um outro token para realizar marcas no exterior da bolsa.

A medida que a abstração foi desenvolvida perceberam que não era preciso guardar os tokens dentro da bolsa para se realizar o registro e esta também não era necessária ocorrendo a troca da bolsa por tábuas de argila. Todavia, para que estes primitivos registros comunicassem quantidades foi necessário acordar um conjunto de regras, entre seus usuários, para que não houvessem contradições nas suas representações numéricas. Estas regras e este processo de contagem, que aconteceu nos grupamentos que formaram a Civilização Suméria, será retomado com mais detalhes no capítulo 2 ao estudarmos Sistemas de Numeração.

Muitos historiadores [5] acreditam que o início do processo de contagem aconteceu dessa maneira, lembrando que toda esta teoria baseia-se nos achados arqueológicos da região da Suméria. É coerente acreditar que da mesma forma que o processo de contagem não se deu de maneira uniforme no mundo, é possível que outras civilizações tenham passados por processos diferentes, para estabelecer seus sistemas de contagem, mas essas dúvidas vão perdurar por algum tempo, se é que um dia serão respondidas.

1.2 Base

Antes de entendermos o conceito de base numérica precisamos primeiro definir número, numeral e algarismo.

Tomaremos como **número** um ente abstrato utilizado para dar a ideia de quantidade, por **numeral** a representação dessa ideia, e por **algarismo** os símbolos para escrever o numeral. Historicamente, como abordaremos em 2.5, o termo algarismo foi criado para se referir aos símbolos do SND, porém neste texto tomaremos o termo algarismo como definido acima, assim como é utilizado por Georges Ifrah em seu livro Os Números a história de uma grande invenção. também utilizar esta palavra para nos referirmos aos símbolos de outros Sistemas de Numeração. Para ilustrar tais definições imaginemos um prato com dez doces, ou uma sala com dez cadeiras, ou uma fila com dez pessoas, o número dez é um ente abstrato utilizado para expressar a quantidade de um grupo de mesmos objetos seja qual forem esses objetos. Podemos representar a idéia de dez pelos numerais presentes em sistemas de numeração com seus respectivos algarismos. No nosso sistema de numeração usamos o numeral 10 e utilizamos os algarismos 1 e 0 na sua formação.

Na seção anterior comentamos sobre a ideia intuitiva de base que no exemplo em questão, osso de Ishango, nada mais era que contar uma quantidade maior tentando agrupar em quantidades menores. Para entender este processo vamos citar como alguns povos primitivos realizam contagens. Os nativos de Queensland (norte da Austrália) contam utilizando até quatro números: “um, dois, dois e um, dois e dois". Percebemos que para contar qualquer quantidade eles utilizam dois signos, no caso, “um"para o 1, e “dois"para o 2, e com estes eles escrevem o 3: “dois e um"e o 4: “dois e dois", qualquer outra quantidade era contada como muitos. Os pigmeus africanos contam utilizando até três signos: “a"para o 1, “oa"para o dois, e “ua"para o três, mas usavam apenas dois destes signos para escreverem os outros números: “oa-oa"para o 4, “oa-oa-a"para o 5, e “oa-oa-oa"para o 6. [6]

Este costume de agrupar quantidades pequenas para auxiliar na contagem de uma quantidade maior deu origem ao conceito de base numérica. Podemos então dizer, que uma base b surge sempre que

> ao dispor um número em grupos básicos convenientes, de maneira que cada grupo seja composto por uma mesma quantidade de unidades b, de tal forma que b é determinado pelo processo de correspondência empregado que, na maioria das vezes, consiste em atribuir nomes as quantidades $1, 2, 3, ..., b$, para que os números maiores que b sejam combinações dos nomes que já existem. [6]

Desta definição temos então que os nativos de Queesland possuíam um sistema de contagem de base 2 enquanto os pigmeus teriam base 3.

No Brasil também temos a presença de diferentes bases nos sistemas de contagem das tribos indígenas, criadas a partir das linguagem nativas de cada aldeia. Assim, linguagens diferentes, que também representam culturas distintas, teriam uma base diferente para efetuar sua contagem, como as tribos que falam Kampa (Aruák) que utilizam a base 1 pois a correspondência biunívoca é feita um a um. Por exemplo, uma mãe que vai cozinhar ovos para os seus três filhos, não vai pensar em pegar três ovos, ela pensará em pegar um ovo para um filho, um ovo para outro filho e mais um ovo para seu outro filho. E neste sistema de contagem não é necessário muitos signos para representar números tanto que usam apenas três números tendo em um de seus dialetos as palavras: “aparo"para 1, “apite"para o 2 e “mava"para o 3. [7]

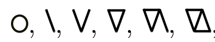
Estes exemplos apenas ilustram um modo mais primitivo de contar, ou seja, utilizam poucos signos, e poucos números, pois, em todas as tribos primitivas, a partir de uma certa quantidade eles utilizavam a palavra “muitos". Na próxima seção definiremos Sistemas de Numeração e abordaremos os sistemas com as bases mais usadas ao longo do desenvolvimento da humanidade, no caso, as que usavam o 5, o 10, o 12, o 20 e o 60 como unidades de agrupamento.

1.3 Sistemas de Numeração

Entendemos que um Sistema de Numeração (SN) é um conjunto finito de símbolos que junto a uma lei de formação nos permite representar qualquer quantidade. Neste trabalho abordaremos os Sistemas de Numeração Aditivo (SNA) e Sistemas de Numeração Posicionais (SNP).

Os **Sistemas de Numeração Aditivo** são queles cuja lei de formação é dada pela soma do valor de cada algarismo, ou seja, os números são formados ao escrevermos os algarismos de maneira consecutiva de forma crescente ou decrescente, até obtermos o número desejado. Criemos um SNA para ilustrar tal situação. Precisamos então escolher uma base numérica b, e, no caso do SNA, precisamos escolher também símbolos para representar os valores de $1, b, b^2, b^3$, etc. Foi desta maneira que surgiram os primeiros SN como nos mostra os artefatos encontrados até hoje. Então como exemplo escolheremos $b = 6$ e para nos referirmos a este SN o chamaremos de SNA*. Para representar o 1 tomemos nosso famoso traço: |, para 6 tomemos o símbolo , para 6^2 tomemos , para 6^3 tomemos o , para 6^4 tomemos , para 6^5 tomemos  e assim sucessivamente, de forma que os algarismos sempre sejam construídos através da adição de um ponto no quadradinho já existente, ou pela adição de um novo quadradinho em torno da barra vertical, sempre no sentido horário. Se for de nosso interesse criar mais algarismos para outras quantidades maiores, poderemos continuar este procedimento após completar os $360°$. Basta-nos agora repetir a mesma construção contornando o quadrado 2×2 já existente, obtendo um quadrado 4×4, que ao ser contornado gerará um quadrado 6×6, e assim por diante. Acabamos de “criar"um SNA de base seis que diferentemente dos que vamos apresentar, não possui um último símbolo, ou seja, a lei de formação deste SNA já nos permite escrever os algarismos de forma infinita, e não finita como sugere os SN de muitas civilizações já que os algarismos eram criados de acordo com a necessidade. Assim, para escrever, por exemplo, o número quatrocentos e oitenta e quatro “basta-nos"escrever: . Notemos que precisamos apenas escrever os símbolos de maneira consecutiva, de forma que **a soma destes símbolos corresponda ao número desejado e sua escrita seja única e da maneira mais simples possível**, ou seja, com a menor quantidade de algarismos possíveis. Em nosso SN usual (indo-arábico) representamos por 484, e notemos que $216 + 216 + 36 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1$, é a maneira mais simples de escrever uma soma que resulte em 484 tendo o 6 como base. Vale ressaltar que neste esboço de SN escrevemos os numerais na horizontal e da esquerda para a direita. Os Sistemas de Numeração dos Egípcios, dos Sumérios e dos Romanos, que abordaremos no capítulo 2 são tidos como Sistemas de Numeração Aditivo. Cada um deles possui sua peculiaridade seja nas bases que escolheram, na forma de escrever e ler seus números, ou os símbolos que adotaram e, apesar de terem a mesma estrutura, todos esses aspectos os fazem ser únicos.

O **Sistema de Numeração Posicional** (SNP) é aquele onde a lei de formação se dá através de algarismos cujo valores mudam de acordo com sua posição no numeral. Podemos ver o SNP como uma evolução do SNA, pois apesar de parecerem bastante diferentes, o primeiro provavelmente surgiu de um aprimoramento do segundo devido a necessidades de manipular números grandes. Não é por acaso que as civilizações mais antigas que desenvolveram SNP tinham grande desenvolvimento astronômico, como é o caso dos Babilônios, dos Maias e dos próprios Indianos.

Vamos então construir um SNP nos baseando no SNA* que criamos acima, ou seja, ele terá base 6 e vamos chamá-lo de SNP*. Tomaremos os símbolos: , como algarismos para representar os números zero, um, dois, três, quatro e cinco. Diferentemente de um SNA, cada algarismo do SNP indica quantas vezes são utilizadas determinada potência de sua base. Observemos que o número quatrocentos e oitenta e quatro, , ao ser escrito no SNA*, utilizou duas vezes a potência 6^3, uma vez a potência 6^2, duas vezes a potencia 6^1 e quatro vezes a potência 6^0. Logo se fossemos escrever este número utilizando apenas as quantidades de vezes que as potências de seis aparecem teríamos na ordem decrescente de suas potências: dois um dois quatro, que no SNP* é escrito como . Em nosso SN usual (indo-arábico) temos $(2124)_6 = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 484$, e este é o princípio básico de formação de um SNP, **seus algarismos representam a quantidade de vezes que estamos repetindo uma determinada potência de sua base e são escritos obedecendo uma determinada ordem**. Generalizando podemos descrever a formação dos números em um SNP da seguinte maneira:

Proposição 1. *Escolhida uma base b adotam-se símbolos para $0, 1, 2, ..., b-1$, e qualquer número N pode ser escrito de maneira única na forma:*

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ...a_2 b^2 + a_1 b + a_0 b^0$$

onde $a, n, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $0 \leq a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 < b$ e $b > 1$

Demonstração. Faremos a demonstração através do Princípio da Indução Completa usando também a Divisão Euclidiana. Notemos que se $N < b$ então $N = 0, 1, 2, ..., b-1$, ou seja, basta tomar $n = 0$ e teremos $N = a_0$, cuja escrita é única. Suponhamos então que $N \geq b$ e que esse resultado é válido para todo natural menor que N. Provemos então que também é válido para N.

Pela divisão euclidiana sabemos que exitem r e q únicos tal que $N = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Observemos que $q > 0$, pois $N > b$ e que $q < N$. Assim pela hipótese de indução temos que existem $n > 0$ e $0 \leq a_1, ..., a_{n'+1} < b$ com $a_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, tal que $q = a_1 + a_2b + a_3b^2 + ... + a_{n'+1}b^{n'}$. Como $N = bq + r$ temos $N = b(a_1 + a_2b + ... + a_{n'+1}b^{n'}) + r$ bastando por $r = a_0$ e $n' + 1 = n$ para obter o resultado. [8]

$\square$

Chamaremos a posição que cada algarismo ocupa de ordem e, como de costume, chamaremos de 1^a ordem o número que está à direita de todos, o de 2^a ordem o que está imediatamente à esquerda do de 1^a ordem e assim sucessivamente. Notemos que neste SN utilizaremos no máximo esses seis símbolos para representar todos os números que desejarmos, pois a cada seis grupos de uma potência de seis, teremos uma nova potência de seis gerando uma nova ordem, por isso que dada uma base b tomaremos símbolos para representar os números $0, 1, 2, \cdots, b-1$. Percebamos também que esta maneira de escrever não deixa explícita a base em que se está escrevendo os números e os algarismos passam a ter dois tipos de valores, classificados usualmente como **valor absoluto** e **valor relativo**. O valor absoluto é o valor próprio do algarismo, por exemplo, V vale dois, mas no numeral V\V∇\ o primeiro V vale quatrocentos e trinta e dois e o segundo V vale doze, devido a posição dos algarismos no numeral. Estes diferentes valores que o algarismo pode assumir dependendo da posição em que se encontra chamamos de valor relativo. Tomemos outro exemplo em ambos SN, escrevendo o número cinco mil quatrocentos e oitenta e um. No SNA* temos: , que, em algarismos indo arábicos, podemos escrever como $1296 + 1296 + 1296 + 1296 + 216 + 36 + 36 + 6 + 1 + 1 + 1$. Já no SNP* temos: ∇\\V\∇, que em algarismos indo arábicos fica $(41213)_6 = 4 \cdot 6^4 + 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 6^0$. Neste último exemplo já conseguimos perceber uma das vantagens de um SNP em relação a um SNA: a quantidades de símbolos escritos para escrever o numeral no SNP* é, geralmente, bem menor que a utilizada para escrevê-lo no SNA*.

Como citado anteriormente possuem este tipo de Sistema de Numeração Posicional os Babilônios, os Maias, os Incas e o nosso Indo-Arábico, salvo algumas diferenças, eles terão as propriedades observadas no texto acima. Para uma boa compreensão dos Sistemas de Numeração que estudaremos a seguir, precisamos antes de algum entendimento do nosso. Começamos então o próximo capítulo definindo Sistema de Numeração Indo-Arábico (SNIA), mas não nos ateremos, neste momento, aos acontecimentos históricos.

2 Alguns Sistemas de Numeração

Os Sistemas de Numeração que estudaremos neste capítulo são aqueles que normalmente encontramos nos livros didáticos do 6^o ano do Ensino Fundamental (EF). Também percebemos, ao lermos os PCN, que existe uma atenção maior dada a abordagem histórica deste conteúdo. Sendo assim não poderíamos analisar a aprendizagem dos alunos referente ao conteúdo de Sistema de Numeração Decimal (SND) sem antes retomar este assunto sob o ponto de vista histórico. Contudo, para que as observações matemáticas possam ser realizadas precisamos utilizar um SN como base, assim faremos a seguir uma breve retomada das características matemáticas de nosso SNIA. Os aspectos históricos do SNIA serão abordados posteriormente pois abordaremos os SN de forma cronológica neste capítulo.

Como já falado anteriormente o sistema de Numeração Indo-Arábico é posicional e tem o dez como base. Os algarismos usados atualmente são $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ para representar as quantidades um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, respectivamente. Como agrupamos de dez em dez utilizamos nomes específicos para cada grupo correspondente a uma potência de 10. Para todo a_i onde $a_i \cdot 10^0, a_i \cdot 10^1, a_i \cdot 10^2, a_i \cdot 10^3 ...$ dizemos que a_i representa, respectivamente as unidades, as dezenas, as centenas, as unidades de milhar e assim sucessivamente. Como falado no item 1.3, temos que o algarismo das unidades é o de 1^a ordem, o de 2^a ordem o das dezenas, o de 3^a ordem o das centenas e assim sucessivamente. Para escrever qualquer número o seu numeral obedecerá a mesma lei de formação definida anteriormente em 1.3, ou seja, para escrevermos, por exemplo o número quatrocentos e oitenta e três temos que este pode ser escrito como uma soma de potências de dez da seguinte forma: $4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0$, então escrevendo apenas as quantidades em que as potências de 10 aparecem de forma decrescente de suas potências temos: 483. Portanto qualquer número r do SNIA pode ser escrito como: $r = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, b_1 b_2 ... = a_n \cdot 10^n + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} ...$, para $a, b, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $a_i, b_i < 10$. Tomando, por exemplo, o número oito mil quinhentos e trinta e dois temos: $8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10^0$ formando o numeral 8532.

Após conhecermos outros sistemas de numeração e um pouco dos fatos históricos que compõe o desenvolvimento dos mesmos voltaremos a falar do SNIA abordando alguns fatos históricos, pois assim a ordem cronológica fará mais sentido, além de que ficará mais natural perceber porque ele foi escolhido e continua sendo usado até hoje.

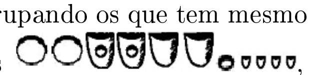
2.1 Sistemas de Numeração dos Sumérios

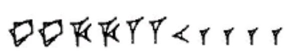
Descendentes de pastores nômades, os sumérios estabeleceram-se ao sul da Mesopotâmia, próximo ao golfo Pérsico, entre o rio Tigre e Eufrates por volta de 8.500 anos a.E.C. [11]. Acredita-se que a regularidade das cheias de ambos os rios juntamente com a segurança proporcionada naturalmente, por ser uma região cercada pelo deserto e por formações montanhosas, levaram os sumérios a se fixarem neste local. De maneira descentralizada os sumérios se organizaram em várias comunidades cuja agricultura desenvolveu-se com técnicas de irrigação e drenagem de solo e para controlar as enchentes desenvolveram a construção de canais, diques e reservatórios. Todas essas construções foram possíveis graças a invenção da roda que utilizaram tanto em instrumentos de tração animal, para seus feitos cotidianos, como em seus carros de combate. Por volta de 4.000 a.E.C muitas aldeias tinham ampliado seu sistema de agricultura propiciando o desenvolvimento do comércio e o surgimento de novas atividades ligadas as áreas de transporte, manufaturados e comércio. A partir deste momento muitas comunidades passaram a ser Cidades-estados que eram governadas por um sacerdote, e um por um civil. Estas possuíam templos, de elaborada arquitetura chamados de zigurate, construídos na forma de pirâmides terraplanadas onde cada andar tem área menor do que seu andar antecessor, cujas formas podiam ser a de quadrado, retângulo ou ovoides. Construídos de maneira que o templo estivesse no último andar de acesso restrito aos sacerdotes, eram considerados a morada dos deuses e muitos o estimam como um eixo de conexão entre céu, terra e submundo. Também serviam como morada dos governadores civis, depósito de grãos e cereais, observatório do planetas e estrelas e do nível dos rios. Sua economia, se baseou em um sistema de tributação das aldeias, segundo seu excedente agrícola. Este imposto foi criado para ajudar as classes dominantes das cidades em seu programa de obras públicas, particularmente os dedicados à irrigação. Como foi citado anteriormente, as descobertas arqueológicas levaram os pesquisadores a concluir que os Sumérios tiveram como primeira escrita um sistema de contagem concreto. Em um primeiro momento o Sistema de Numeração Sumério (SNS) se utiliza pequenos objetos de argila como algarismos, como os que estão figura 1.2, para realizar contagens e cálculos aritméticos. Tomaremos as gravuras  para representar tais objetos de argila.

Através dos registros pode-se obter o valor de cada algarismo e concluir que seu sistema de numeração é do tipo aditivo possuindo o 60 como base primária e 10 como base secundária. Na tabela 1 podemos observar que existe um objeto para cada potência de 60 e para cada dez grupos de uma potência de 60, um artifício usado provavelmente para facilitar a contagem e evitar a repetição demasiada de símbolos.

Tabela 1 – Símbolos Sumérios

Contagem Concreta	Escrita Cuneiforme	SNIA
 ou		1
		10
 ou 		60
 ou 		600
		3600
		36000
-		216000

Para representar seus números dispunham seus algarismos da esquerda para a direita, um ao lado do outro na horizontal, do maior para o menor, agrupando os que tem mesmo valor para facilitar a visualização. Por exemplo, ao escrever o número 8534 temos , pois $8534 = 3600 + 3600 + 600 + 600 + 60 + 60 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1$. Com o desenvolvimento da contagem abstrata, descrito na secção 1.1, os sumérios passaram a realizar seus registros em tábuas de argila através de estiletes de bambu. Dependendo da inclinação do estilete e da força aplicada nele eram produzidas diferentes marcas denominadas cunhas, gerando o que conhecemos hoje por escrita cuneiforme. Seus algarismos passaram a ser representados como na tabela 1.

O mesmo número 8534 seria escrito da seguinte forma:  Esta nova maneira de representar os números nos mostra uma característica muito forte e presente na construção dos sistemas de numeração ao longo do desenvolvimento humano: a mudança. Os símbolos utilizados dentro de uma mesma civilização mudaram muito, e as interpretações a que temos acesso são formadas apenas por alguns retratos da história de cada civilização, baseadas através do estudo dos artefatos encontrados até hoje. O filme composto por estas cenas sempre possuiu, e possuirá, muitas lacunas que só novas descobertas podem preencher. Verifiquemos como uma dessas lacunas pode ser "completada"ao longo da história. Tomemos por exemplo o porquê dos Sumérios terem adotado a base 60, que aparentemente não é nem um pouco natural. A curiosidade entre diversos historiadores e matemáticos, desde tempos muito antigos, fez com que surgissem diversas explicações para o fato. Por exemplo, Teão de Alexandria (no século IV a.E.C.) e John Wallis (1616 - 1703) afirmavam que tal escolha se devia ao fato de que 60 é o menor número possível com a maior quantidade de divisores, tornando mais prático o cálculo de divisões, pois reduziriam o número de dízimas. Kewitsch, em 1904, acreditava que a base 60 teve sua origem na junção de dois povos um que contava na base 10 e outro na base 6. Entretanto, após um estudo mais rigoroso e aprofundado sobre esta origem, que foi feito através de registros do dialeto sumério, Ifrah(1997) acredita que antes dos sumérios se estabelecerem na região, existiriam na baixa mesopotâmia muitas tribos indígenas onde algumas utilizavam a base 5 para contar e outras a base 12. [10]

Com a conquista do território os sumérios devem ter unidos as duas bases, 5 e 12, um processo comum no pós-conquista de território das grandes civilizações antigas. Era comum agregar os principais costumes e crenças dos povos vencidos para que houvesse uma melhor adaptação destes ao novo governo, além de que se achava útil aproveitar ao máximo o desenvolvimento alcançado pela população dominada. Em relação a base 5, 12 e 60 temos as seguintes descrições: A base 5 resumia-se à utilização dos dedos das mãos como processo de contagem, servindo-se de uma mão para contar e da outra como auxílio a contagens de maior dimensão, para “armazenar"a quantidade dos “cincos"contados. A base 12 assentava na utilização das três falanges que compõe cada um dos dedos, usando o polegar como auxiliar de contagem. Apoiava-se o polegar em cada uma das falanges, sendo assim possível a contagem até 12. A base 60 era praticada da seguinte maneira: na mão direita, contam-se as falanges, tal como na base 12, “guardando"o número de contagens na mão esquerda, assim como na base 5. [10] Na figura 2.1 podemos visualizar as regras descritas acima.

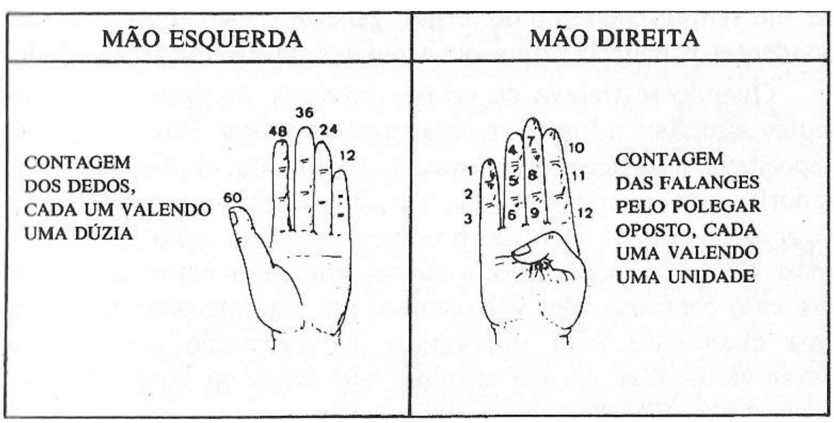


Figura 3 – Contando na Base 60

Fonte:IFRAH(1989,pg.74)

O grande desenvolvimento na agricultura, que possibilitou o cultivo de áreas áridas do deserto, juntamente com sua localização fez com que a Suméria fosse cobiçada por muitos povos. Seu governo descentralizado sucumbiu a dominação dos acádios por volta de 2.350 a.E.C. Estes adotaram a religião, a prática da agricultura e pecuária e até a escrita cuneiforme dos sumérios, que inclusive permaneceu sendo utilizada pelos outros povos que dominavam esta região de intenso conflito. Por volta de 1.900 a.E.C. os amoritas instalaram-se nesta região tendo por capital a cidade de Babilônia. Esta civilização também tinha uma escrita cuneiforme mas apresentou uma evolução no sistema de numeração utilizado que veremos mais tarde. Por hora vamos conhecer uma outra civilização que desenvolveu um outro sistema de numeração que mesmo sendo independente dos sumérios possuía regras parecidas com as do SNS além de terem desenvolvido-o no mesmo período que eles.

2.2 Sistemas de Numeração dos Egípcios

O início da civilização egípcia começou muito parecida com a dos Sumérios quando, há aproximadamente 8.500 a.E.C., fixaram-se no nordeste do continente africano. O protagonista dessa história é nosso conhecido rio Nilo, que por também possuir cheias periódicas, de junho a outubro, permitiu à pequenas comunidades se desenvolverem em suas margens. As primeiras construções civis realizadas são parecidas com as dos sumérios já que precisavam estocar água e ampliar a agricultura. Estas permitiram também o surgimento de novas profissões ligadas ao artesanato, a administração de obras e este constante crescimento fez com que as pequenas aldeias tomassem proporções de cidades, conhecidas por *nomos*. As pessoas que conseguiam posição de destaque dentro dos nomos tornavam-se governadores, nomarcas, que deviam proteger e administrar os nomos além de dialogar com as divindades existentes, já que também eram os representantes dos deuses. Estes nomos possuíam governos independentes mas mantinham relações comerciais, porém conflitos entre esses governos eram muito frequentes ao ponto de se tornarem cidades fragilizadas e de fácil dominação externa, por povos de outras localidades. Diante desta possibilidade estes nomos resolveram unificar-se, por volta de 3.200a.E.C., dando início a civilização Egípcia mantendo a tradição de possuir um nomarca representante do divino, no caso o Faraó, o Deus rei. Esta união possibilitou grandes avanços na engenharia, astronomia, medicina e outras áreas do conhecimento humano. Como já foi citado em 1.1, uma civilização deste porte não seria possível sem um sistema de escrita e um Sistema de Numeração. Pelos registros encontrados calcula-se que os egípcios desenvolveram seu sistema de numeração ao mesmo tempo que os Sumérios, ou seja, a mais ou menos 3000 anos a.E.C., com um sistema de escrita único chamado de hieróglifo, onde se desenha o que se deseja representar. Assim, o Sistema de Numeração Egípcio (SNE) foi composto por hieróglifos que representassem a grandeza de suas respectivas quantidades.

Tabela 2 – Símbolos Egípcios - Hieróglifos

SNE	𓏺	𓏻	𓏼	𓏽	𓏾	𓏿	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
SNIA	1	2	3	4	5	6	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Notemos que os hieróglifos escolhidos para representar as quantidades de 1 a 100, são símbolos do cotidiano dos escravos e camponeses, no caso traços e cordas, pois no dia-a-dia estes eram os instrumentos mais usados na vida deles. Já para a unidade de milhar temos o símbolo do "prazer", concedido com mais frequência aos aristocratas. Para os 10.000 um dedo em riste o que simboliza poder, para os 100.000 símbolo usado para representar uma divindade, que poderia inclusive variar. Para um milhão um servo adorando o faraó, a maior presença de todo o Egito.[4] Observando tais símbolos notamos que a maneira de registrar as quantidades era bem diferente da praticada pelos sumérios. Enquanto estes utilizavam a escrita cuneiforme, apropriada para o uso das tábuas de argila, o outro pintava, desenhava, seus símbolos o que também era condizente com o material utilizado: o papiro. Este é uma espécie de papel primitivo, produzido manualmente, pela prensa de finas tiras, dispostas em camadas, do próprio papiro, planta comum dos pântanos da região.

Observando as características matemáticas que formam o SNE podemos notar um símbolo diferente para cada potência de 10, portanto utilizavam base 10. E, como é de se esperar por ser uma civilização sem precedentes, seu Sistema de Numeração é do tipo aditivo escrevendo seus numerais na horizontal, porém da direita para a esquerda do maior símbolo para o menor, agrupando símbolos semelhantes para facilitar a visualização. Se os números fossem muito grandes escreviam-no na próxima linha da direita para a esquerda. Para exemplificar tomaremos novamente o número 8534, $8534 = 8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$, que em hieroglifos temos . Deste exemplo percebemos como a escrita desse sistema de numeração é cansativo, e trabalhoso, pois além de termos que repetir demasiadamente os símbolos temos a preocupação extra de reproduzir os riscos em detalhes de cada algarismo, deixando a escrita mais enfadonha. Se ao primeiro contato com o SNS o julgamos cansativo, ao conhecermos o SNE o acharemos impraticável. E de fato o era. As pessoas que se dedicavam a registros, como os sacerdotes e o próprio Faraó, abandonaram este tipo de escrita e com o passar do tempo deixaram-na cada vez mais simples e prática. A maior parte dos textos, a que temos acesso atualmente, foram produzidos utilizando a escrita Hierática. Observamos na imagem 2.2 que os números são mais simples e sem tantos detalhes. Mesmo com os números hieráticos o SNE continuou sendo aditivo e apesar de ainda contarem de dez em dez, eles criaram outros algarismos para representar os múltiplos de 10, de 100 e de 1000. [5]

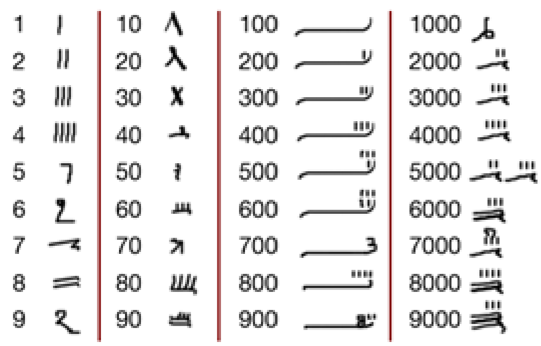


Figura 4 – Escrita Hierática

Fonte: IFRAH (2013,p.209)

Acerca do legado egípcio nos deteremos apenas a comentar sobre como sua relação com os números que, se comparada com a dos Sumérios, evoluiu e possibilitou este desenvolvimento em tantas áreas. Ao que parece, os egípcios foram os primeiros a dar um novo significado ao número: o de medir. O *côvado* cuja medida era baseado no comprimento do antebraço, do cotovelo à ponta do dedo médio, foi determinante para os egípcios realizarem seus grandes feitos na arquitetura e engenharia civil. Criando um sistema de medidas baseado no côvado os Egípcios podiam calcular sem problemas as fronteiras entre as diferentes regiões em que o país estava dividido, além de permitir que se restabelecessem os limites das explorações agrícolas quando aqueles desapareciam anualmente devido às cheias do Nilo. Os arquitetos sabiam calcular a área do quadrado, do retângulo, do triângulo e do círculo, assim como o volume de várias figuras geométricas, em particular da pirâmide. Os escultores e os pintores conheciam as proporções do corpo humano e reproduziam-nas a partir de uma quadrícula, ou régua, enquanto os escribas traçavam planos esquemáticos das povoações. Este é um pequeno comentário sobre os feitos desta civilização que deixa a todos deslumbrados, pois mesmo tendo tão pouca tecnologia conseguiu ser brilhante em todas as áreas que se dispuseram a estudar.

Veremos agora um outro sistema de numeração de base 60 o dos babilônios, que nos permitirá realizar comparações e um melhor entendimento de ambos os sistemas, mas tendo sempre em mente que o que estamos estudando são retratos, ou seja, fatos de um momento histórico de uma dada civilização.

2.3 Sistemas de Numeração dos Babilônios

Como citado anteriormente, a Mesopotâmia foi cenário de guerra inúmeras vezes sendo habitada por diversos povos. Apesar dos danos que esta situação traz não podemos deixar de reconhecer a difusão de conhecimento e cultura proveniente da mesma, que possibilitaram a melhoria dos recursos já utilizados, seja na economia, agricultura ou pecuária, levando a humanidade a evoluir. Em relação ao tema estudado podemos citar a evolução do sistema de numeração cuneiforme utilizado pelos sumérios para o que foi usado pelos babilônios. Sabemos que a escrita cuneiforme utilizada pelos sumérios foi adotada pelos diversos povos que habitaram a Mesopotâmia, porém, ainda não sabemos o exato momento em que o Sistema de Numeração mudou e muito menos como o processo ocorreu. O que temos são evidências arqueológicas mostrando uma mudança na maneira de registrar os números, e através destes fatos criamos algumas possíveis teorias. [11]

As escavações na região Mesopotâmica tiveram início em meados século XVIII e ao longo do tempo diversas equipes de diferentes nacionalidades a realizaram (britânicas, alemãs, francesas, italianas e mais recentemente iraquianas). Estas escavações revelaram diversos artefatos e documentos que proporcionaram algum entendimento da matemática utilizada pelas várias nações que habitaram a mesopotâmia. Mais recentemente, na segunda metade do século XIX, foram encontradas nas colinas artificiais de Mari, localizada na Síria, cerca de 20.000 a 25.000 tabletes que falavam de aspectos cotidianos, administrativos, econômicos e judiciais. Utilizando tijolos de argila cozidos ao sol, as construções civis, que com o tempo erodiam sejam por fatores climáticos ou como consequências dos conflitos sofridos, eram reconstruídas nos mesmos locais, o que, pouco a pouco, elevou o nível do solo. Fato este comprovado pelo sítio arqueológico de Mari que nos mostra a curiosa construção das cidades verticais, grosseiramente falando, cidades que eram construídas uma sobre as outra. [12] De maneira geral, em relação aos registros a que temos acesso atualmente, podemos afirmar que por volta de 1700 a.E.C. os amoritas, que eram os atuais habitantes da região, possuíam um sistema de numeração cuneiforme e de base 60 mas diferentemente dos Sumérios o Sistema de Numeração Babilônico (SNB) era posicional e não aditivo. A primeira diferença que podemos citar é que os símbolos não são o mesmo que algarismos. No SNS a ideia que temos de símbolos e algarismos se confundem pois ambos representam quantidades, porém no SNB utilizamos dois símbolos para gerar os demais algarismos. A saber tais símbolos são os mesmos utilizados pelos sumérios para representar o 1 e o 10: 𒁹 e 𒌋. Tendo em mente a definição dada para um sistema de numeração posicional temos que o SNB possui 59 algarismos para escrever qualquer número e não 60 pois em seu sistema de numeração não há um algarismo para o zero. Segue no quadro abaixo os algarismos babilônicos.

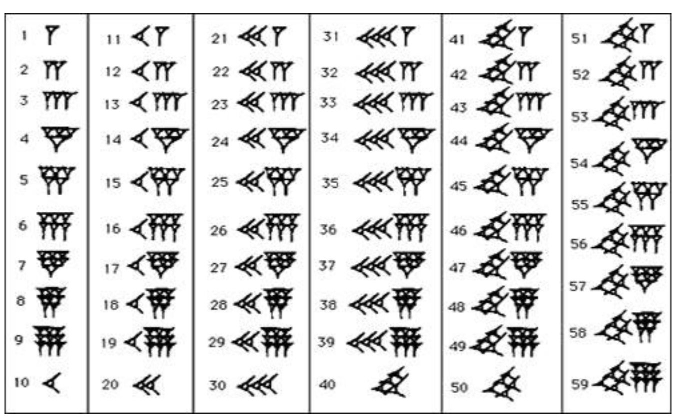


Figura 5 – Símbolos Babilônicos

Fonte: Página History Topics Index

Vale observar que os algarismos babilônicos de 1 a 59 são formados obedecendo um sistema de numeração aditivo com base 10. Dizemos então que o sistema de numeração babilônico possui base primária 60 e base secundária 10. Os números no SNB são escritos da esquerda para a direita, de maneira que qualquer algarismo seja sempre 60 vezes maior que o seu consecutivo a direita. Assim todo número B do SNB pode ser escrito como $B = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0, b_1 ... = a_n \cdot 60^n + ... + a_1 \cdot 60 + a_0 + b_1 \cdot 60^{-1} + ...$, onde $0 \leq a_i, b_i < 60, a_i, b_i \in \mathbb{N}$. Temos por exemplo que o número 4.270 pode ser escrito como , pois $4270 = 1 \cdot 60^2 + 11 \cdot 60 + 10 \cdot 60^0$. Como já comentamos em 1.3 uma das vantagens de um SNP em relação a um SNA é a quantidade de algarismos que utilizamos. De fato, ao representarmos o número 8.534 em SNB temos: , 8 $534 = 2 \cdot 60^2 + 22 \cdot 60^1 + 14 \cdot 60^0$, que apesar de possuir a mesma quantidade de marcas, no caso 11, quando representado no SNS, temos a vantagem de utilizar apenas duas marcas distintas, ou três algarismos distintos enquanto no dos sumérios seriam 4 tipos de marcas. Tomando um número maior, no caso 316.458.210, temos no SNB . Já no SNS temos um numeral extremamente cansativo pois, supondo que o algarismo de maior potência seja o como descrito na tabela 1, teríamos 1.465 dos , 5 dos e por fim 3 dos . Esta absurda diferença reforça o fato de que a necessidade de escrever quantidades maiores de maneira simples deve ter levado a humanidade a aperfeiçoar os SN existentes saindo do SNA para o SNP.

Mas apesar desta maior praticidade existiram situações em que o uso de poucos símbolos trouxe dificuldades na diferenciação de alguns numerais no SNB. Por exemplo, como distinguir os números 1 de 60 ou de 3.600 cujo numeral possui a mesma grafia: ? Algo que também acontecia com os numerais 61 e 2: . Até mesmo o numeral pode ser interpretado como 603 ($10 \cdot 60 + 3$)) ou 36003 ($10 \cdot 60^2 + 3$) ou 36.180 ($10 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60$). Mas como bons matemáticos eles resolveram esses problemas utilizando alguns artifícios. Das escavações percebeu-se que quando a representação originava-se de um problema o contexto deixaria claro qual dos números estava se utilizando. Quando apenas se falava de cálculos aritméticos eram comum as seguintes práticas: nos casos parecidos com o do 61 e 2 percebemos que , e no caso do 2 suas marcas tinham o mesmo tamanho: . Já no caso do 60 e do 3.600, ou do 13 que pode ter infinitas interpretações, temos um grande impasse, pois toda essa confusão acontecia pela inexistência do zero. Em nosso sistema de ensino é comum ao começamos nossa escolarização termos logo cedo contato com o algarismo zero, e que este é o símbolo para representar a ausência de quantidade. Mas nem os sumérios, nem os babilônios, nem tão pouco os egípcios, acharam natural contar o que não existe. Em sistemas de numeração aditivo não há, de fato, a necessidade da existência do zero, mas em um SNP é necessário indicarmos a ordem de cada algarismo, caso contrário a interpretação do numeral será ambígua. Para resolver o problema da ordem dos algarismos observou-se em registros [5] que eles ora tentavam um espaçamento maior entre os algarismos e ora utilizavam dois tracinhos na diagonal para indicar a ordem vazia. Porém este último recurso só era utilizado no meio do numeral, nunca no final dele, ou seja, os dois tracinhos não representava de fato um algarismo, pois só era usado convenientemente. Por exemplo no caso do numeral poderíamos ter 603 escrito de duas formas: ou .

Devido as suas vantagens SNB está presente em nossas vidas até hoje em nossas unidades de medida do tempo e dos ângulos. Em nosso cotidiano utilizamos as unidades hora, minuto e segundo onde $1h = 60min$ e $1min = 60s$ para medir o tempo. Já para medir os ângulos podemos utilizar o grau, que surgiu da divisão da circunferência em exatamente seis grupos de 60 (base numérica) totalizando 360^0. E antes de toda a facilidade que a era da informática nos proporcionou, esta base foi muito utilizada para realizar cálculos por aqueles que se dedicavam a estudar astronomia que preferiam escrever na base 60 já que os numerais possuem grafia menor facilitando os cálculos além de que há menos dízimas periódicas do que na base 10. [13]e [5]

2.4 Sistema de Numeração dos Romanos

Pouco se sabe sobre os povos primitivos que habitaram a península itálica desde os tempos da idade da pedra lascada mas acredita-se que por volta de 2.000a.E.C. foram subjugados por tribos de origem indo-europeia conhecidos por italiotas [14]. Estas pequenas tribos se estabeleceram ao longo da península através do uso do rio Tibre, que possibilitou seu avanço econômico, agro-pecuário, assim como acompanhamos nas civilizações anteriores. No milênio I a.E.C. os etruscos, povo originário, provavelmente da Ásia, estabeleceu-se na região central da Península. Temendo uma possível invasão duas das tribos italiotas, a saber, os samnitas e os latinos uniram-se construindo uma fortaleza nas proximidades do mar Tirreno. Porém, em meados do século VII a.E.C. os etruscos conseguiram invadir a região do Lácio, unificando as várias aldeias latinas, dando origem a uma cidade-Estado: Roma. Este foi o primeiro passo de 1.200 anos de conquistas territoriais, por conta de sua forte estratégia militar, deixando-nos um grande legado em diversas áreas: direito, arte, literatura, arquitetura, tecnologia, religião, governo. Um de seus legados são os Algarismos Romanos, utilizados em relógios, capítulos de livros, títulos de reis e Papas e para representar séculos, como usamos bastante neste mesmo texto. O que poucos comentam é que nem sempre seguiram as mesmas regras com a qual estamos acostumados. Também não costuma-se comentar no dia-a-dia da escola que diversos povos, tribos, também criaram sistemas de contagem muito parecidos com os dos romanos. Através de registros encontrados em diversos locais pode-se afirmar que diversos povos pastores utilizavam o *entalhe* para registrar suas contagens. Em muitos casos temos uma contagem feita através do entalhe usando a base decimal primária e a base cinco secundária como nos casos dos etruscos (os que deram origem a Roma), dos Zunis (índios da América do Norte), dos pastores toscanos, dos pastores dálmatas (em Dalmácia), entre camponeses e habitantes de pequenos burgos do Tirol Austríaco e dos Alpes Suíços. [10] O curioso é que muitas vezes os símbolos escolhidos para o um, um traço simples, e para o dez, dois traços, às vezes como um x, foi muito comum em boa parte deles. O que mais uma vez nos remete para a ideia de senso numérico do ser humano. Para entendermos esta última afirmação tenhamos primeiro contato com o Sistema de Numeração Romano (SNR).

Como dissemos acima o SNR possui base dez e por se basear em um costume primitivo é de se esperar que seja aditivo. Em nossos livros didáticos nos são apresentados os algarismos romanos geralmente da seguinte maneira:

Tabela 3 – Símbolos Romanos

SNR	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M ou $\bar{I}$
SNIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

Notamos que diferentemente do SNE e do SNS os romanos utilizavam duas regras para a sua escrita: a aditiva e a subtrativa. Aprendemos durante o ensino regular que os números romanos eram escritos da esquerda para a direita sempre do maior para o menor símbolo. Se existe um algarismo de menor valor do que aquele que se localiza imediatamente à sua direita então devemos subtrair do maior aquele que tem menor valor. Por exemplo, o numeral 8.534 é escrito em algarismos romanos como: $\bar{V}\bar{I}\bar{I}\bar{I}$DXXXIV. Notamos o uso de vários artifícios, como o uso da barra e a regra subtrativa, passa a reduzir o tamanho do numeral, mas nem sempre estas atitudes facilitaram a escrita do número. Já que não existia uma única maneira oficial de fazer essas variações. Não eram raras as inconvenientes situações onde um número, devido a sua escrita, era mal interpretado.

Pelo o que já estudamos até aqui fica fácil entender que as regras do Sistema de Numeração Romano também não foram estáticas ao longo do Império, pois tudo muda de acordo com a necessidade. É possível encontrar registro em lápides de números utilizando a regra subtrativa de maneira que não nos é ensinada na escola, por exemplo, o número dezoito hoje é escrito como XVIII, mas em um outro momento já foi escrito como IIXX. [9] Em muitos monumentos da Europa, por onde os romanos passaram, é fácil constatar que eles muitas vezes escreviam o quatro como IIII, ou mesmo o nove era diferente: VIIII. Esta atitude provavelmente foi motivada por nossa percepção visual ser de até quatro elementos. Assim, podemos pensar em um pastor que está registrando, através do entalhe, seu rebanho e escreve / para um e percebe que a visualização da gravura //// é fácil e agradável aos olhos. Porém, tal percepção passa a ficar difícil quando temos mais de cinco tracinhos. Então naturalmente ele resolve escolher um outro símbolo para o cinco: *, suponhamos. E o pastor continua sua contagem: */, *//, *///, *////, e para o dez ele poderia usar **, ou simplesmente criar um outro símbolo para o dez, identificando-se com seus dez dedos: #. Com a necessidade de se escrever números cada vez maiores, provavelmente desenvolveram a regra subtrativa pois assim há uma economia de símbolos, e a escrita torna-se menos cansativa [10].

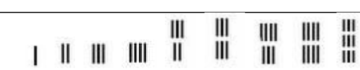
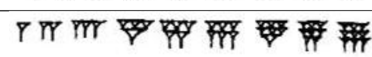
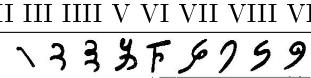
Este sistema de numeração era inviável aritmeticamente assim como o egípcio e o sumério, todos eles dependendo de ábacos, para realizar os cálculos de suas situações problemas diariamente. Nestes três sistemas de numeração os numerais eram utilizados apenas para registrar quantidades. Contudo uma cultura que em seu cotidiano vislumbrava números demasiadamente grandes ou muito pequenos, não poderia limitar-se ao ábaco. O SNB já mostrava esta necessidade, porém não tinha criado o zero, propriamente dito, além de possuir 59 algarismos em seu sistema de numeração. A seguir iremos acompanhar outra evolução dentro da história, que mudaria a maneira como vemos a matemática e consequentemente o mundo.

2.5 O contexto Histórico do Sistema Indo-Arábico

É muito comum nos referirmos ao Sistema de Numeração Indo-Arábico como Sistema de Numeração Decimal, costume herdado dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Mas esta última denominação afasta-nos de um rico contexto histórico que vai desde a criação até a difusão pelo mundo deste novo processo de contagem.

Tudo começou na Índia por volta do século III a.E.C. quando criaram um sistema de numeração decimal, porém aditivo. Por um lado podemos dizer que estes foram superiores que seus antecessores por terem criado símbolos distintos que não remetiam a quantidade que queriam representar. Observemos, por exemplo, como se escreviam os números de 1 a 9 até o presente momento de nosso estudo na tabela abaixo.

Tabela 4 – ALGARISMOS(1 a 9) - Antigas Civilizações

Egípcios	
Babilônios	
Romanos (Roma Antiga)	I II III IIII V VI VII VIII VIIII
Indianos (séc. IIIa.C.)	

Notemos que num primeiro momento o numeral escrito pelos indianos não remete a quantidade desejada assim como acontece nos outros Sistemas de Numeração. Por outro lado eles possuíam símbolos demais, no caso, eles utilizavam um símbolos para cada quantidade do quadro abaixo, tornando-o tão cansativo e inoperável quanto os outros já estudados. [10]

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000
10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000	70.000	80.000	90.000

Porém, aqueles que trabalhavam com números grandes, como os astrônomos, utilizavam uma maneira semelhante a nossa "escrita por extenso"para registrar seus números. Para um exemplo prático peguemos nosso muito usado numeral 8.534, os astrônomos indianos o representariam da seguinte maneira, utilizando seus respectivos vocábulos: QUATRO, TRÊS DEZENAS, CINCO CENTENAS, OITO MILHARES. Podemos observar que eles preferiam escrever de maneira crescente nas potências de 10: $4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3$. Essa escrita, apesar de ser em extenso, já representa uma grande evolução se comparada a anterior pelo fato deles já estarem pré-determinando uma ordem. No século V já encontramos, em registros matemáticos e astronômicos, números escritos sem a necessidade de usar as palavras dezenas, centenas, milhar, etc. Eles passaram a utilizar apenas as palavras já existentes para o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9. Nosso mesmo numeral seria escrito como QUATRO, TRÊS, CINCO , OITO, ou seja, a posição da palavra escrita indicava o seu valor. Neste momento começávamos a ver um esboço de SNP se não fosse a ausência do zero. Mas uma coisa levou a outra, pois era necessário a diferenciação de certas posições, o mesmo problema que acometeu o SNB, afinal como saberiam que a escrita DOIS, UM representará 12 ou 102 ou 1002? A partir desta necessidade que eles criaram uma palavra para representar o vazio: *śūnya*.

> Em 25 de agosto do ano 458 do calendário juliano, o número 14.236.713 está expresso do seguinte modo: (...) *Ou seja, literalmente:*
> ("TRÊS. UM. SETE. SEIS. TRÊS. DOIS. QUATRO. UM")
> Quanto aos números que, como 13.107.200.000, comportam falta de unidades, eles são expressos sem possibilidade de erro graças à palavra *śūnya:*
> *śūnya śūnya śūnya śūnya śūnya* divi sapta *śūnya* eka tri eka
> ("VAZIO. VAZIO. VAZIO. VAZIO. VAZIO. DOIS. SETE. VAZIO. UM. TRÊS. UM")
> E, de fato admirável, cada um desses enunciados é precisado no texto pela expressão em sânscrito:
> *sthānakramād*
> *(literalmente "por ordem de posição").* [10]

Como podemos notar o Sistema de Numeração Indiano já era, de fato, posicional com base dez, porém escrito apenas com palavras que ainda não o deixava aritmético. Por outro lado era amplamente utilizado em poemas e histórias tornando-se popular, o que mais tarde seria muito importante. Seus cálculos ainda eram realizados através de ábacos, como seus antecessores, mas com um diferencial: em vez de pedras ou fichas eles utilizavam os símbolos do 1 ao 9 para representar as quantidades utilizadas. No caso não era necessário posicionar nove pedras em determinada coluna, simplesmente se colocava o símbolo do nove. Apesar de serem muito bons calculistas seus procedimentos eram muito complicados. Mas foi esta representação utilizada no ábaco que possibilitou aos numerais "escritos por extenso"tomarem uma forma mais operacional. Criou-se um símbolo para o zero que na maioria das vezes era um ponto, ou um círculo pequeno, e o ábaco aos poucos foi substituído, visto que em meados do século VII já possuíam processos próprios e mais práticos para efetuar as contas de adição, subtração, multiplicação e divisão. A forma de escrever os numerais também passou a ser feita da maneira que utilizamos atualmente, já que no ábaco essa era a disposição usual. Um outro grande feito da Índia foi popularizar, entre os seus, e em outras partes do mundo, tais descobertas, permitindo que a matemática, e as demais ciências se desenvolvem-se não mais restrita as classes dominantes.

Se não há dúvida do mérito Indiano pela invenção do Sistema de Numeração Decimal Posicional, também não há dúvidas de que sem os árabes todo este conhecimento não seria tão rapidamente difundido pelo mundo. De fato, foi nesta parceria Indo-Arábica que a matemática encontrou grande desenvolvimento. Quanto aos árabes podemos destacá-los como os responsáveis por garimpar todo o conhecimento adquirido e pelo registro dos mesmos durante o Império Romano antes de sua queda e destruição pelos bárbaros. Podemos dizer que foi realmente um garimpo, pois além de procurar e transcrever o material encontrado para a sua língua, eles também tinham o cuidado de confirmar e validar as informações transcritas. Já os Indianos, com seu Sistema de Numeração, também deram uma importante contribuição, na pessoa de Mohammed Ibn Mussa **al-Khowarizmi** (aprox. 780-850) cuja obra reunia toda a aritmética praticada pelos indianos de maneira bastante detalhada e rica em exemplos, popularizando seu uso de tal maneira que seu nome virou sinônimo dos cálculos escritos, eternizando-se através da palavra Algoritmo. Por conta do tamanho de sua civilização e por sua localização geográfica, os árabes tornaram-se os intermediários obrigatórios entre o oriente, o ocidente e até parte do sul (nordeste da África). Consequentemente todos, com quem os árabes possuíam relações comerciais, foram tomando conhecimento destes números e usando-os no seu cotidiano desde o início do século IX. Bastando apenas fazer a ressalva de que a cada nova adoção feita dos números indianos o seu traçado era adaptado a cultura local. Esta mudança de traçados que podemos acompanhar na figura 2.4, é o motivo pelo qual nós os utilizamos na forma atual, principalmente devido a criação da imprensa em 1440. É curioso o fato de que os árabes adotaram o sistema de numeração indiano quase que imediatamente,

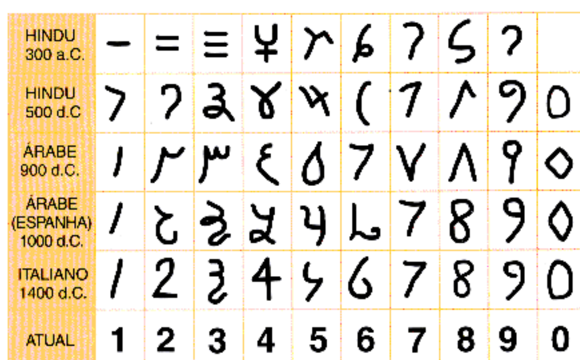


Figura 6 – Evolução da Escrita dos Algarismos Indo-arábicos

Fonte: http://www.programandoomundo.com/Sistema%20Indo-Arabico.htm

mas os europeus levaram quase nove séculos para o aceitarem como definitivo. De fato, enquanto os árabes ampliavam seus conhecimentos matemáticos os europeus passaram bastante tempo(V-XIV) sobrevivendo a várias crises. Para citar algumas temos a invasão e dominação bárbara no século V, e devido a esta a Europa teve que se reestruturar socialmente. Uma sociedade onde apenas os nobres estudavam e mesmo assim sob a supervisão da Igreja Romana. Este foi ainda um período marcado por muitos desajustes climáticos e por volta do século XIV a epidemia da peste negra fez a Europa medieval entrar em colapso. Além desses fatores que marcaram toda a Idade Média também havia a Inquisição, tribunal eclesiástico instituído pela Igreja Romana com a responsabilidade de investigar os considerados *hereges*, aqueles que praticavam crimes contra a fé católica. Porém esta mesma Inquisição marcou a Idade Média com tamanha intolerância que determinados conhecimentos não puderam desenvolver-se. O próprio SNIA sofreu estas acusações já que os métodos de cálculos eram tão rápidos que pareciam mágicos e portanto deveria pertencer ao *"próprio Satanás"* [10]. Na verdade a Igreja não queria perder seu monopólio, e a não aceitação do SNIA também estava relacionada com o fato de que grande parte dos abacistas pertenciam ao clero, e os serviços que eles ofereciam representavam uma importante fonte de renda para a Igreja Romana, afinal pouquíssimas pessoas detinham o conhecimento do funcionamento do ábaco. Em sua última tentativa de expandir sua doutrina e reconquistar Jerusalém a Igreja

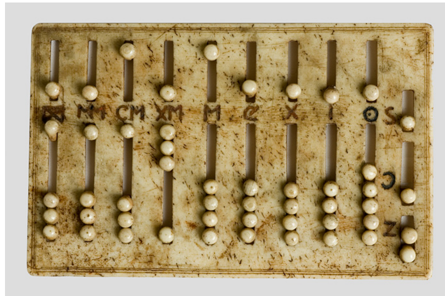


Figura 7 – Ábaco Romano

lançou as Cruzadas (1095-1291), um movimento possibilitou uma ampla troca cultural. Dentre elas podemos citar um importante fruto: Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que ao estudar com muçulmanos, pode redigir no ano de 1202 o livro *Liber Abaci* ("Tratado do ábaco"), que explicava todas as regras do cálculo por algarismos na areia, como era realizado na Índia, aumentando o número de praticantes desse sistema de numeração. Mas como citado anteriormente, a inquisição não permitiria tal proliferação de conhecimento, e este ficou restrito e desenvolvido apenas por alguns de maneira secreta. As últimas Cruzadas tiveram uma repercussão ruim, enfraquecendo a Igreja Romana Oriental, mas por outro lado forneceu material para um novo movimento: o Renascimento (1.300-1600). Movimento de resistência contra as práticas impostas pela Igreja, foi um período de novo crescimento intelectual, em diversas áreas do conhecimento, e por conta disso, o SNIA recomeçou a ser utilizado, porém apenas por algumas pessoas, por conta do monopólio abacista e pela própria ignorância e medo que permeava a população de maneira geral. Durante o Renascimento outro movimento acontecia, a Reforma Protestante, iniciada em 1517, que em reposta provocou a Contra-Reforma, onde a Igreja Católica reformulou alguns de seus parâmetros. Graças a nova classe social em ascensão, a burguesia, a Igreja "teve"que permitir o uso de juros, há muito tempo tido como pecado e sido motivo de muitas mortes e perseguições. [10] Com esse novo cenário econômico o SNIA mostrou-se mais eficiente que os ábacos, pois os abacistas, ao realizarem cálculos com números decimais, fazem arredondamentos em cada etapa de seus cálculos, enquanto os algoristas deixam para fazer o arredondamento apenas no fim dos cálculos. Esta atitude dos algoristas traz um resultado mais real, e na maioria das vezes, mais conveniente que o dado pelos abacistas. [4] Mesmo assim, em pleno século XVIII o ábaco ainda era ensinado nas faculdades e se exigia que os cálculos escritos fossem sempre confirmados com os feitos nos ábacos. Apenas após a Revolução Francesa(1789-1799) o SNIA foi aceito sem maiores entraves. [10]

Enquanto a aceitação do zero e a escrita posicional foram desafiadores na Europa, encontramos duas outras Civilizações, a meio mundo de distância, que utilizavam sem problemas um sistema de numeração posicional bem definido. Nas próximas seções deteremos nossa atenção sobre as representações dos Maias e Incas para seus números.

2.6 Sistemas de Numeração dos Maias

A Civilização Maia foi uma das sociedades americanas que teve grande destaque matemático, assim como os Incas. Pouco se sabe sobre a mesma pois todos os seus livros foram destruídos durante o processo de dominação espanhola, restando-nos apenas: os Códices de Dresden, de Madrid, de Paris e o de Grolier juntamente com uma espécie de calendário do planeta Vênus denominado o Ciclo de Vênus. Este último nos revela um dos motivos de seu desenvolvimento de um sistema de numeração de base 20. Herdeiros de muitos costumes Olmecas, os Maias, assim como os egípcios, escreviam utilizando hieróglifos, e seus registros eram feitos em papeis produzidos a partir das cascas de algumas árvores e cal, inclusive de maior qualidade que os papiros egípcios. A partir destes registros e de outros artefatos, acorda-se que a civilização Maia teve seu início por volta 1.800 a.E.C. e que ocupou regiões entre a Guatemala e o sul do México. Ao contrário das outras civilizações, a escassez de recursos, como água e terra fértil, fez com que seus centros políticos fossem descentralizados(Cidades Estados), e que a sociedade se dispersasse de tempos em tempos, seja por motivos naturais e/ou sociais. Suas técnicas de agricultura desenvolvidas, diferentemente do que já estudamos, foram as de queimadas, construção de terraços, irrigação usando os pântanos, além de ter uma agricultura itinerante pois o solo rapidamente era desgastado. Por ser estrutura em Cidades-Estados a Espanha encontrou grande dificuldade para por fim a civilização Maia guerreando com seus centros políticos durante cerca de 170 anos. Mas a dominação espanhola não significou dizimar a população, tanto que hoje existem muitos de seus descendentes na mesma região que os maias um dia habitaram. Ao olharmos para suas construções não encontramos o requinte egípcio, mas tornam-se incríveis quando nos apropriamos do fato de que não conheciam a roda nem o torno. Faziam partes de suas construções civis as pirâmides escalonadas, que assim como os sumérios serviam como depósito para os grãos, centro de observação astronômica e morada dos governadores, que eram representantes de deuses. Grandes civilizações foram aquelas que se dedicaram ao estudo das regularidades e entre elas, as que estavam presentes no céu, pré-requisito ao sedentarismo, como vimos em 1.1. Como não foram diferentes nesse desejo, os maias registraram minuciosamente o comportamento dos corpos celestes e através dessas observações compuseram calendários baseado no comportamento da Lua, do Sol e de Vênus, este último justificado por admirarem o terceiro corpo celeste a ter mais destaque no céu. Estes calendários regiam toda a sociedade, seja na agricultura ou nos ritos religiosos. Seu desenvolvimento astronômico foi superior a todas as civilizações já conhecidas que não dispunham de objetos ópticos e o calendário utilizado por eles no tempo da invasão espanhola era inclusive superior ao calendário Gregoriano. Se matematicamente seus registros eram tão precisos, necessário se faz entender este processo de contagem. [15]

O sistema de numeração adotado pela civilização pré-colombiana dos Maias é um sistema de numeração posicional de base primária 20 e de base secundária 5, ou seja, contavam de 20 em 20, mas seus algarismos escritos de 0 a 19 eram formados por sistema de numeração aditivo de base 5. No caso temos o ponto • que corresponde a unidade, a barra ▬ que corresponde a cinco unidades, e a concha  que representa o zero. A possível origem desta base de contagem é o número total de dedos que possuímos, somando os dedos das mãos e o dos pés. Abaixo temos os 19 algarismos utilizados no Sistema de Numeração Maia (SNM):

Diferentemente de nossa maneira de escrever na horizontal e de ler da esquerda para a direita, os números maias são escritos geralmente na vertical e são lidos de cima para baixo. A escrita do número é dividida em níveis respectivamente as nossas 1^a ordem (unidades), 2^a ordem (dezenas), 3^a ordem (centenas), etc, de maneira que qualquer algarismo é vinte vezes maior que o algarismo que está imediatamente abaixo. Generalizando todo número M do SNM pode ser escrito como $M = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0, b_{-1} \cdots = a_n \cdot 20^n + \cdots + a_1 \cdot 20 + a_0 + b_1 \cdot 20^{-1} + \cdots$, onde $0 \leq a_i, b_i < 20, a_i, b_i \in \mathbb{N}$. Assim para escrever o número 356 temos: , já que ele possui 17 vintenas e 16 unidades, ou seja, $356 = 17 \cdot 20 + 16 \cdot 20^0 = 1716$. Escrevendo o número

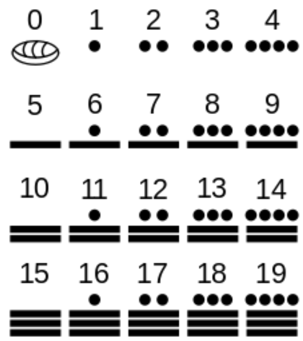


Figura 8 – Algarismos Maias

Fonte: www.wikipedia.org

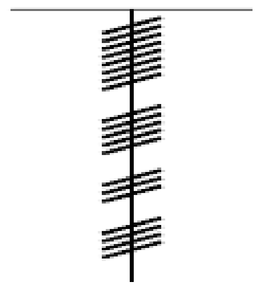
8530, onde $8534 = 1 \cdot 20^3 + 1 \cdot 20^2 + 6 \cdot 20 + 14 \cdot 20^0$, temos: .

O sistema de contagem vigesimal também era influenciado pelo calendário maia sendo o fechamento de um período de vinte anos um momento parecido com o fechamento de uma década para nós. Alguns calendários usavam um sistema modificado de contagem onde o terceiro nível não denotava múltiplos de vinte vezes vinte, mas sim de dezoito vezes vinte pois assim era possível uma contagem aproximada da duração em dias do ano solar dado que dezoito vezes vinte igual a trezentos e sessenta, mas acredita-se que esta base era utilizada apenas pelos sacerdotes. Das civilizações antigas o SNM foi o único que utilizou o zero como algarismo, assim como no SNIA, logo todos os problemas que encontramos no SNB não encontramos no SNM. Se formos eleger desvantagens talvez seja a do espaço utilizado para seu registro justamente por seus algarismos ainda estarem presos as quantidades representadas. Por suas precisões astronômicas acredita-se que os maias desenvolveram seus algoritmos tão bem quanto nós atualmente e inclusive existe um grande esforço empregado por alguns professores de Honduras e demais localidades, para resgatarem, durante a educação primária, a cultura Maia através do uso do SNM e das possíveis técnicas aritméticas usadas por eles. Este trabalho já vem sendo disseminado há alguns anos e têm despertado o interesse das crianças. [16]

2.7 Sistema de Numeração Inca

Um Império de grandes proporções que atingiu seu ápice no século XV, os Incas, originários das montanhas do Peru, foram influenciados por pequenas civilizações que também viveram na região dos Andes por volta 1.800 a.E.C.. Estas provavelmente foram responsáveis pela difusão de conhecimentos relativos a agricultura e construção civil aos povos que já existiam na Cordilheira dos Andes. A civilização Inca começou seu processo de dominação no século I de nossa era, e ao longo de sua história acumulou grande conhecimento agrário podendo ser notabilizado pelas setecentas espécies vegetais que cultivavam em terraços com as adiantadas técnicas de curva de nível e irrigação. E como nas primeiras Civilizações já estudadas, estas técnicas possibilitaram aos Incas desenvolverem-se em um governo centralizado, cuja capital era a cidade de Cuscu, atual Peru, e o imperador Inca também era um representante divino, no caso o rei sol. Muito do que se sabe dos Incas deve-se ao registros escritos feito pelos espanhóis durante o processo de dominação, pois os Incas transmitiam boa parte de sua cultura e história oralmente, através de seus cânticos e histórias, que eram convenientemente escolhidas e reproduzidas. De fato, os poucos registros físicos, próprios dos incas, são pinturas em mantos ou tábuas sobre momentos que desejavam eternizar. Ao contrário dos Maias os Incas não costumavam temporalizar os acontecimentos por isso é muito comum que as lendas retratadas pelos espanhóis se contradigam na questão cronológica. Diante do aspecto da cultura Inca de não possuir um sistema de escrita fonético (escrita que represente a fala), torna-se curioso o seu sucesso administrativo. Afinal este império conquistou e conseguiu gerenciar um vasto território centrado na Cordilheira dos Andes incluindo ainda grande parte do atual Equador e Peru, sul e oeste da Bolívia, noroeste da Argentina, norte do Chile e sul da Colômbia (conquistas territoriais feitas até 1526, ano da chegada dos espanhóis). Percebemos uma nova “reprise"de acontecimentos em cenários diferentes, pois assim como aconteceu na Suméria, os Incas, inventaram um sistema de contagem, conhecido como *Quipo*, antes mesmo de inventarem um sistema de escrita fonético. [17]

(a) Quipo em cordas



(b) Uma representação de quipo

Figura 9 – Quipo

Fonte(a): http://didaticaematematica.weebly.com

Os quipos eram, também, a maneira de registrar, com riqueza de detalhes, tudo o que podia ser quantificado no império inca, ou seja, era um instrumento estatístico. Como percebemos na imagem 2.7 o quipo é composto por diversos cordões verticais paralelos afixados a um cordão central horizontal, ou também por cordões afixados em cordões verticais, como algumas ramificações. Possuem diversas cores que inclusive são as responsáveis pela identificação do quipo, e também podiam ser adornados com penas e pedras. As quantidades eram registradas através da presença ou ausência dos nós que eram feitos um próximo ao outro, utilizando variadas técnicas conforme o registro. Verificamos a eficiência em guardar informações tomando como exemplo os quipos demográficos que além de cores específicas também eram organizados hierarquicamente onde homens ocupavam o primeiro lugar, seguidos das mulheres e, por fim, das crianças, sendo feito também um recenseamento pela idade de cada um. Da mesma maneira temos com os animais, os instrumentos bélicos, os alimentos, etc. Para entendermos matematicamente como funcionavam os registros numéricos dos quipos observemos o número oito mil quinhentos e trinta e quatro utilizando a gravura da figura 2.7 (letra b) onde cada traço representará um nó no quipo. Pela disposição natural dos cordões seus numerais eram registrados na vertical e percebemos que um mesmo espaço é usado para separar determinado grupo de “nós", levando-nos a ler de cima para baixo: 8 “nós", 5 “nós", 3 “nós"e 4 “nós". Observamos que assim como os maias, os incas escreviam seus números em níveis, no caso o 1^o nível (de baixo para cima) corresponde a nossa 1^a ordem, o de 2^o nível corresponde a nossa 2^a ordem, e assim sucessivamente. Porém diferentemente dos maias que possuía base 20, os incas possuíam a base 10 como em nosso SNIA. Portanto, podemos dizer que os nós das extremidades inferiores representam as unidades e acima destas ficam as dezenas, mais acima as centenas e assim sucessivamente. O zero era representado pela ausência de nós naquele determinado nível, por isso eles eram tão detalhistas neste aspecto do espaçamento de seus níveis. [18] e [19]

Culturalmente o domínio Inca dava-se de forma tranquila através de negociações, apenas quando estas não eram possíveis é que os enfrentamentos bélicos aconteciam. Com os Espanhóis não foi diferente, após Francisco Pizarro, responsável pela dominação, ter conquistado parte do litoral do Pacífico, em 1532, o Sapa Inca, Atahualpa, o convidou para negociações. Porém devido a sua impaciência na comunicação, que ainda acontecia de maneira precária, Pizarro sequestrou o Inca e, devido a sua ganância decidiu executá-lo em 1533, o que permitiu aos espanhóis o domínio dos incas rapidamente, que já estavam fragilizados devido a varíola, além de serem inferiores em estratégias bélicas e armamentos.

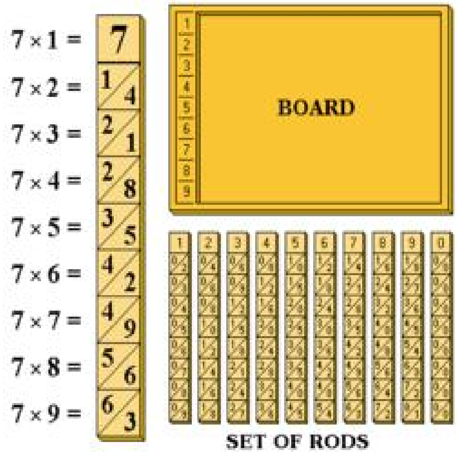
Estas duas últimas civilizações nos complementam e reafirmam a experiência que tivemos no estudo dos Sistemas de Numeração no Velho Mundo. O sistema de numeração desenvolveu-se mais rapidamente que um sistema de escrita fonético, e que a criação daqueles estava intimamente relacionada com a cultura, e as crenças e a necessidade de cada povo.

2.8 O Sistema de Numeração Binário

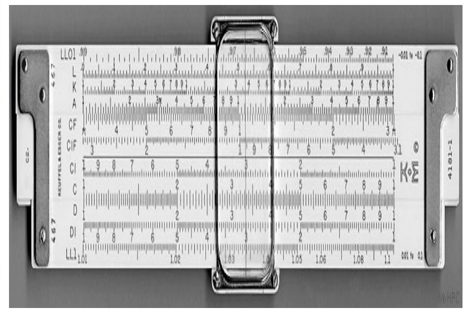
A criação de nosso atual SNIA com certeza mudou a maneira de se fazer matemática e ciência em cada lugar de nosso mundo, mas não tornou a ação de contar mais eficiente, e sim, apenas o seu registro. A medida que a população crescia, os censos, entre eles o demográfico, estavam ficando quase impraticáveis por conta da maneira que era realizado, através de computação humana. Se tomarmos o censo feito nos EUA em 1980 vemos como a invenção da máquina de leitura de cartão perfurado foi um marco, pois enquanto este censo demorou 7 anos para ser concluído, o da década de 1890 levou apenas 2,5 anos com a nova invenção. Se antes nosso problema era registrar e operar de maneira eficiente as quantidades contadas, o grande problema a partir da idade contemporânea era contar rapidamente e sem erros. Neste contexto diversas máquinas foram desenvolvendo-se até o surgimento do computador como o conhecemos hoje. Mas para que isto pudesse acontecer duas coisas eram necessárias: **maquinário** eficiente e **linguagem** adequada para realizar o intercâmbio entre homens e máquinas. Podemos dizer que o primeiro veio desenvolvendo-se naturalmente a medida que o homem procurava métodos para efetuar seus cálculos. Já o segundo iniciou-se sem aspirar este fim, como muitas das teorias matemáticas existentes. Porém quando tornou-se oportuno foi usado, adaptado e ampliado sabiamente. Apesar de não ser o objetivo deste trabalho cometar sobre cada um desses momentos faremos, para não perder o caráter histórico, uma abordagem concisa sobre alguns acontecimentos.

Como percebemos ao longo deste texto, o primeiro instrumento utilizado para efetuar cálculos, que não fossem as partes de nosso corpo humano, foi o ábaco. E tanto sua aparência como a maneira de se “fazer contas"dependeu da cultura de cada povo e do sistema de numeração adotado por eles. E estes últimos fatores também são responsáveis pela existência de outros instrumentos notáveis que auxiliaram muitas pessoas em seus cálculos, como por exemplo as *Tábuas de Napier*, desenvolvidas por John Napier de Merchiston em 1614 e as *Réguas de Cálculo* criadas pelo matemático inglês William Oughtred, em 1622. Ambas foram criadas para facilitar os cálculos de multiplicação e divisão com números de muitas ordens, com o diferencial de que as réguas de cálculo já foram elaboradas para resolver também problemas com logaritmos. Para um aprofundamento maior sugerimos as referências [20], [21] e [22]

As primeiras **máquinas** de calcular que surgiram realizavam apenas contas de somar e subtrair destacando-se a *Máquina de Somar de Leonardo Da Vinci*, criada por volta de 1500, e a *Pascaline*, desenvolvida por Blaise Pascal em 1642. A partir de então começaram a surgir calculadoras mais completas como a *Roda de Leibnitz* (1673) que utilizando o mesmo princípio para efetuar as somas e subtrações da Pacaline, permitiu também realizar multiplicações e divisões. Em 1820 o parisiense Charles Xavier Thomas criou a *Arithmo-*



(a) Tábuas de Napier

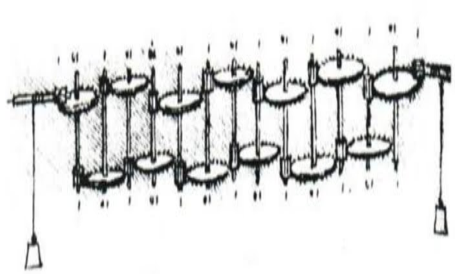


(b) Régua de cálculo

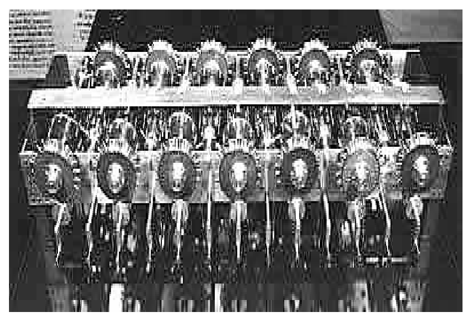
Figura 10 – Instrumentos de cálculos - percursores da calculadora

Fonte: www. wikipeida.org

meter que utilizava o mesmo princípio da calculadora de Leibnitz para efetuar multiplicações e foi a mais comercializada até então.



(a) Máquina de somar de Leonardo Da Vinci (esboço)

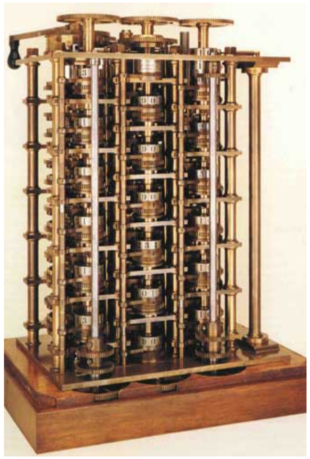


(b) Máquina de Somar de Leonardo Da Vinci construída por Roberto Guatelli em 1967

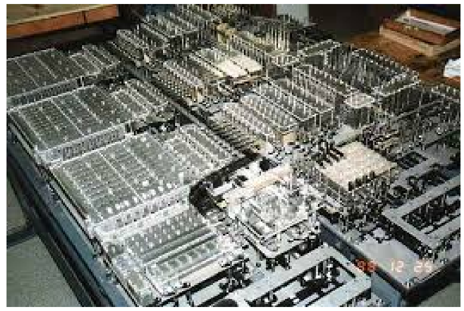
Figura 11 – Máquina de Somar de Leonardo Da Vinci

Em 1823 Chales P. Babbage criou a *Máquina Diferencial* cuja função era a de reproduzir corretamente as tabelas de funções (logarítmicas, trigonométricas, etc.), realizando os cálculos necessários sozinha, restando ao operador humano o ato de iniciar a cadeia de operações. Já em 1833 Babbage formulou a *Máquina Analítica*, que infelizmente não pode ser concluída devido a às limitações tecnológicas da época. Ela seria capaz de mudar o curso de sua programação inicial através dos cartões perfurados que utilizava. Até os seus precursores da 2^a Guerra Mundial a maioria das calculadoras eram mecânicas cujas melhorias eram na questão do tamanho e eficiência. Por outro lado outras máquinas vinham se desenvolvendo o que permitiu um grande florescimento industrial, surgindo máquinas de tear mais sofisticadas, máquina de escrever, a máquina de leitura de cartão perfurado, a televisão, o rádio-telefone, etc.

Várias destas descobertas tornaram possível a construção do primeiro computador eletro-mecânico conhecido por o *Z1* feito na Alemanha em 1935. "Este usava relés que executavam cálculos e dados lidos em fitas perfuradas. Utilizava um sistema binário constituído por 'pinos' cravados numa régua metálica onde podiam ocupar duas posições." [20] Daqui por diante podemos citar muitas destas máquinas eletro-mecânicas



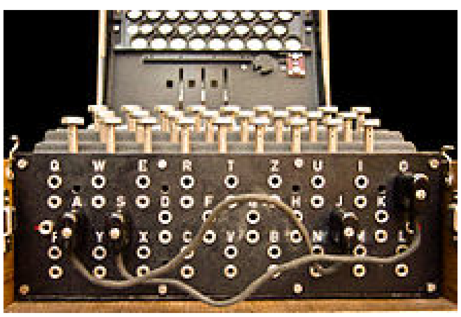
(a) Máquina Diferencial)



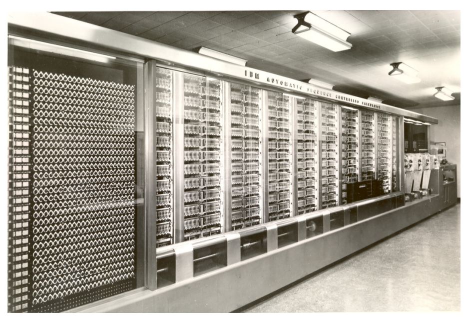
(b) Z1

Figura 12 – Calculadoras

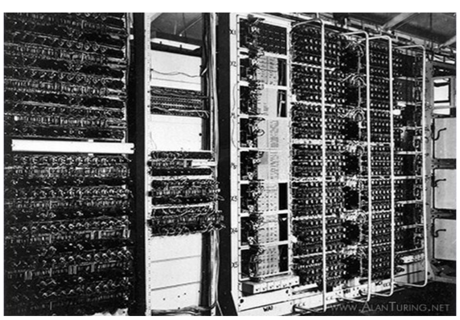
que foram decisivas na 2^a Guerra mundial. Do lado da Alemanha tivemos a *Z3*, e a *Enigma* cujo principal objetivo era o de codificação de mensagens. Em oposição temos na Inglaterra a criação de *Colossus*, que decodificava as mensagens alemãs, e por parte dos EUA temos a *MARK I* desenvolvida para calcular tabelas de trajetória para fazer a pontaria de canhões de longo alcance.



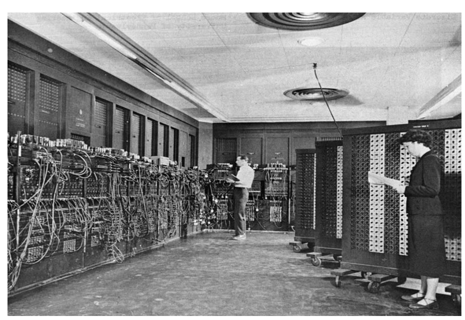
(a) Enigma)



(b) MARKI



(c) Colossus



(d) ENIAC

Figura 13 – Primeiros Computadores

Mas a grande novidade só conseguiu ser completada em 1946, conhecida por *ENIAC*. Ele foi o primeiro computador digital eletrônico do mundo, desenvolvido pelos EUA com o objetivo de calcular a trajetória de mísseis com maior precisão. Não podemos nos esquecer de que estas “milagrosas"invenções eram, se comparados aos computadores atuais, verdadeiros “trambolhos". Por exemplo, o ENIAC possuía 18.000 válvulas termoiônicas, pesava 27 toneladas e ocupava uma área de um grande galpão e podia realizar 5.000 somas por minuto. [23] . A necessidade de reduzir o tamanho era urgente. Os computadores com transistores surgiram em 1951, substituindo aqueles que utilizavam válvulas, e em 1958 Jack Kilby desenvolveu o *Chip*, um conjunto de transistores, resistores e capacitores construídos sobre uma base de silício, de meia polegada de comprimento e com a mesma espessura que a de um palito de dente. A partir deste momento os componentes dos computadores tornaram-se cada vez menores até obterem o atual formato conhecido pela maioria da população mundial. Porém não podemos pensar que o desenvolvimento do hardware dos computadores aconteceu separadamente da linguagem operacional. Na verdade deve-se a esta o melhoramento daquela. A *Aritmética Binária* já construída pelo matemático alemão Gottfried Wihelm Leibnitz em 1673 e o desenvolvimento da *Álgebra Booleana* em 1854 pelo matemático inglês George Boole, na qual as variáveis assumem apenas valores 0 e 1, encontraram, emfim, sua mais notável aplicação. Em 1946 o matemático húngaro John Von Neumann introduziu a linguagem de zeros e uns na codificação das instruções a serem armazenadas na memória do computador, e a partir deste momento a álgebra booleana passou a configurar a programação dos computadores, norteando todas as melhorias posteriores.

Após esta abordagem histórica resta-nos entender como funciona o Sistema de Numeração Binário (SNBi), que se comparado ao funcionamento de nosso SNIA apenas a base utilizada é diferente, no caso 2, utilizando o 0 e o 1 como algarismos. Por exemplo, a quantidade vinte e cinco que em nosso SNIA é escrito como 25 pois conseguimos formar 2 grupos de 10 e um grupo de 5, no binário escrevemos como 11001, pois temos **um** grupo de 2^4 **um** grupo de 2^3 e **um** grupo de 2^0. Através do Quadro de Valor e Lugar (QVL), comumente usado por nós em nosso primeiros anos de ensino, fica fácil perceber a semelhança existente entre o SNIA e o SNBi. Representemos a quantidade setecentos de quarenta e sete em ambos os sistemas utilizando o QVL:

Tabela 5 – Sistema de Numeração Indo Arábico

Ordens	5^a	4^a	3^a	2^a	1^a
Valor Posicional	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Numeral			7	4	7

Tabela 6 – Sistema de Numeração Binário

Ordens	10^a	9^a	8^a	7^a	6^a	5^a	4^a	3^a	2^a	1^a
Valor Posicional	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Numeral	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1

Temos então que $(1011101011)_2 = 1\cdot 2^9+0\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 747$ Devemos reconhecer que para nós humanos este código é impraticável, mas para os computadores onde espaço não é problema, ter associado o 0 a desligado e o 1 ao ligado possibilitou a conexão entre homens e máquinas revolucionando a nossa forma de viver.

No nosso cotiano percebemos cada vez mais a dificuldade de nossos alunos estabelecerem conexões entre conteúdos da própria matemática com de campos de conhecimento diferentes. Contudo, ao olharmos a maneira de como estamos abordando os conteúdos, independente da disciplina, podemos afirmar que fornecemos a nossos alunos essas conexões? **Interdisciplinaridade** e **contextualização** são palavras amplamente utilizadas, mas durante esta pesquisa, os livros didáticos da disciplina de História consultados não forneciam referência à matemática das civilizações antigas, algo que acontecia há alguns anos atrás. Se em nossas aulas de matemática também não fornecermos explicações históricas, como nossos alunos estabelecerão conexões? Nestes primeiros capítulos pudemos ter um panorama histórico e matemático sobre alguns sistemas de numeração com o objetivo de incentivar o uso da História em sala de aula. Estes conceitos também nos permitirão entender a segunda parte deste trabalho na qual queremos verificar, nos caso, perceber como está a aprendizagem de alguns alunos no assunto de Sistema de Numeração Decimal. Observando com atenção como a História está sendo utilizada pelos professores e percebida pelos alunos.

3 A Pesquisa

Como foi dito na introdução as frequentes situações em que o aluno apresenta dificuldades de aprendizagem por não terem desenvolvido as ideias associadas ao Sistemas de Numeração motivaram a realização deste trabalho. Para que essa percepção pudesse ser quantificada e que estes números fossem analisados, mesmo que de forma rápida, foram realizadas atividades com alunos da rede pública do 6^o e 9^o ano do Ensino Fundamental e com alunos do 3^o ano do Ensino Médio na cidade de Igarassu - PE. Quando falamos de aprendizagem não se pode ter uma percepção unilateral e por este motivo também foi solicitada a colaboração dos professores cujas turmas responderam o questionário, e de outros colegas de profissão, para esboçarmos um perfil do professor em relação ao assunto Sistemas de Numeração. Esta pesquisa, apesar de possuir um resultado muito particular, tem por objetivo fornecer material de reflexão em relação ao aprendizado de nossos alunos acerca de alguns aspectos do conteúdo de Sistemas de Numeração durante os últimos anos do Ensino Regular. Não deseja-se motivar uma reflexão leviana, ou seja, não podemos pensar em aprendizado sem levar em conta todas as nossas dificuldades diárias: falta de recursos, falta da participação dos pais na vida escolar do filho, falta de capacitações acessíveis aos professores, falta de medidas que combatam a criminalidade que existe dentro de nossas escolas. Essa rotina, muito comum nas instituições de ensino pública da região metropolitana de Recife, e provavelmente em outros lugares do Brasil, torna a sala de aula, muitas vezes, um ambiente hostil para o aprendizado. Mas entre um momento e outro, um professor sempre consegue fazer pequenas intervenções cujos resultados, geralmente, são grandiosos.

3.1 A Pesquisa com os Alunos

A pesquisa com os alunos foi feita através de um questionário com itens de resposta fechada e dissertativa. Tomemos as definições [24] abaixo:

- *Resposta fechada* é aquela para qual existe uma única resposta correta que deve ser elaborada pelo aluno.
- *Resposta dissertativa* é aquela que o aluno precisará realizar justificativas mais detalhadas, apresentando pontos de vista contrários ou favoráveis as propostas apresentadas.

As questões formuladas não apresentam um enunciado contextualizado, tanto pelo fato do questionário ser um pouco extenso, como também por desejarmos avaliar a capacidade do aluno de realizar certos procedimentos técnicos e rotineiros associados ao conteúdo de Sistemas de Numeração. Como a pesquisa pretende avaliar e analisar o aprendizado dos alunos em Sistema de Numeração Decimal no Ensino Regular foi elaborado um questionário base para o 6^o ano e perguntas foram acrescentadas no do 9^o ano do Ensino Fundamental (EF) e no do 3^o Ano do Ensino Médio (EM), de acordo com a expectativa de aprendizagem esperada pelos alunos até o respectivo ano. Os questionários foram aplicados em quatro escolas do Centro de Igarassu: Escola Estadual Professor Aderbal Jurema, Escola Estadual Santos Cosme e Damião, Escola Municipal Centro de Educação Integrada de Igarassu (CEIG) - Professora Cecília Maria Vaz Curado Ribeiro, Escola Municipal Pastor Isaías Rafael de Alencar. Ao total entrevistamos cinco turmas de 3^o anos do EM da Rede Estadual, nove turmas de 9^o anos do EF, dos quais seis foram da rede estadual, e cinco turmas de 6^o ano do EF, dos quais uma foi da rede estadual. Este quantitativo de turmas nos permitiu ter 532 estudantes. A Pesquisa foi realizada no segundo semestre do ano de 2016. Neste primeiro momento vamos entender o porquê deste questionário, ou seja, os objetivos de cada questão levando em consideração o que nos diz o PCN. Depois vamos apresentar a maneira como os questionários foram avaliados e os resultados gerais dos 6^o e do 9^o do EF e do 3^o ano do EM. Juntamente com a tabela de referência dos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (QEA) [25] iremos comparar estes resultados gerais e fazer algumas ponderações.

3.1.1 O Questionário

No apêndice A encontraremos os três modelos de questionários, que salvo a ordem das perguntas, podemos dizer que o segundo é uma ampliação do primeiro e o terceiro é uma ampliação do segundo. Tomemos então a Versão Aluno (3^o Ano) como base para nossa análise e para a construção das tabelas de resultados.

Nos primeiros anos do EF começamos nosso primeiro contato com as regras do Sistema de Numeração Decimal que é feito, muitas vezes, através do *Quadro de Valor e Lugar* (QVL). Através do QVL a criança começa a entender como lemos e escrevemos as quantidades de nosso cotidiano. Ela perceberá que ao contarmos cada grupo de dez unidades formaremos uma dezena, e que quando nossa contagem chegar a dez dezenas teremos uma centena. Ela deverá perceber que a posição de cada algarismo escrito no numeral é consequência desses agrupamentos. Com o passar do tempo a classe dos milhares será incluída no processo de contagem, e o intuito é fazer com que os alunos percebam que nosso SND é posicional pois o valor do algarismo que forma o numeral terá dois valores: o valor absoluto e o relativo. Também deverá perceber que a base de nosso SN é dez, pois agrupamos de dez em dez, que a cada três ordens formamos uma classe específica. Não se espera uma compreensão madura desses aspectos, mas claro que é a percepção dessas regras que possibilitará a escrita e leitura dos números e como consequência a operacionalidade com os mesmos. [26] São estas regras que também permitirão ao estudante desenvolver as relações de inclusão do SND, sendo pouco provável que até o final do segundo ciclo ele já tenha desenvolvido tais relações por causa da complexidade do assunto. É importante observar que:

> com relação aos números naturais, muitas vezes se considera que o trabalho com eles se encerra no final do segundo ciclo; no entanto, é fundamental que o aluno continue a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números grandes e desenvolver uma compreensão consistente das regras que caracterizam o sistemas de numeração que usam. [27]

Tomando estes aspectos da aprendizagem citado no PCN as três primeiras questões foram redigidas juntamente com a 9^a questão visando avaliar o que o aluno memorizou, ou aprendeu, em relação a leitura e escrita de números grandes como também as regras do SND.

Questão 01. Escreva por extenso o número 1 045 873 002.

Questão 02. Escreva o numeral que representa a quantidade quatrocentos e cinco trilhões duzentos milhões e cinco.

Questão 03. Explique com suas palavras o que é o Sistema de Numeração Decimal.

Questão 09. Quantas dezenas existem em 10.000? E quantas centenas existem em 10 milhões?

Por ser, geralmente, o primeiro conteúdo do livro do 6^o ano, e consequentemente, ser o primeiro assunto ensinado, esperamos que os alunos deste ano apresentem menos dificuldade nas questões 01 e 02, mas provavelmente não terão respostas maduras para a terceira questão. Já no 9^o ano do EF e no 3^o Ano do EM queremos verificar este aprendizado manteve-se durante os outros anos do ensino regular, afinal existem no próprio currículo momentos propícios para a retomada destes aspectos. A Notação Científica que é vista, tanto no 9^o ano do EF como no 1^o Ano do EM, pelas disciplina de matemática e física, é um desses conteúdos que permitem ao aluno ter contato com números grandes e bem pequenos, e permitem ao professor retomar as regras do sistemas de numeração, promovendo tanto uma revisão como um aprofundamento das mesmas. A relação de inclusão é muito abordada pelos livros didáticos em todo o 6^o ano e sempre que falamos de unidades de medida também podemos retomar este tema. Em relação a como abordar este conteúdo tanto o professor como livro didático possuem suas preferências, porém é recomendação do PCN que esta se faça através de uma abordagem histórica. Com as próximas perguntas desejamos verificar se "existe ou não", o reconhecimento das características históricas por parte do aluno.

Questão 04. Ao longo de nosso desenvolvimento, desde a pré-história até os dias aturais, nós sempre utilizamos os símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *para escrever números?*

( )Sim, pois

( )Não, pois

Questão 06. Quando o homem começou a contar na pré-história, você acredita que ele começou pelo 0 (zero) ou pelo 1 (um)? Por quê?

Em pelo menos dois momentos o PCN indica o uso da história para ampliar, aprofundar, o aprendizado das regras do SND:

> Nos terceiro e quarto ciclos os problemas relacionados à evolução histórica dos números podem ser usados como interessantes contextos para ampliar a visão dos alunos sobre os números naturais, não apenas relatando como se deu essa evolução, mas exorando as situações com as quais as civilizações antigas se defrontaram, como as limitações dos sistemas não-posicionais, os problemas com a representação numérica antes do surgimento do zero, os procedimentos de cálculo utilizados pelas civilizações suméria, egípcia, grega, maia, chinesa etc. [2]

e "Também os estudos relacionados ao desenvolvimento histórico dos números podem fornecer excelentes contextos para evidenciar as regras desse sistema e a necessidade de construção de números que não os naturais." [2]

As perguntas acima foram realizadas com o intuito de verificar se eles apresentam conhecimento histórico que justifique o uso de outros símbolos para contar e escrever os numerais e o surgimento do zero posterior ao do um. Espera-se que os alunos do 6^o ano possuam mais facilidade de usar tal recurso pelo fato de que alguns livros, do respectivo ano, utilizarem a História como introdução do conteúdo de Sistemas de Numeração. Mas não se deve achar que tal atitude será menos presente nos demais anos, pois os números romanos são usados em diversos contextos. Durante o Ensino Médio os alunos veem novamente, na disciplina de História, as Civilizações da História Antiga. Conhecer outras formas de registrar quantidades e realizar cálculos com essas quantidades nos ajuda a compreender a nossa própria maneira de fazer matemática, ou seja o uso da história pode também contribuir para uma melhor compreensão dos nossos algoritmos. Quando se fala em compreender as técnicas operatórias estamos nos referendo se o aluno consegue justificar corretamente suas ações, não se prendendo a regras, e este é o objetivo da próxima questão.

Questão 05. O cálculo da soma $346, 82 + 266$ *encontra-se abaixo. Ele está correto? Justifique sua resposta.*

Em relação aos Conceitos e Procedimentos esperados no campo de Números e Operações o PCN nos aponta, por um lado, que a compreensão do SND implica na extensão das regras desse sistema para leitura,

( ) SIM, pois ______	346,82 + 266 349,48	( ) NÃO, pois ______

escrita e representação dos números racionais na forma decimal: "Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal." [2] Por outro lado, nos alerta à "superar a mera memorização de regras e de algoritmos e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma tradicional o ensino tradicional do cálculo." [2]

Nesta questão vamos verificar se o aluno percebe o erro e, mais importante, como ele justificará que está errado. Ele usará argumentos do SND ou simplesmente a velha regra conhecida: "vírgula embaixo de vírgula"? Regras precisam ser compreendidas para que os algoritmos tenham significado e os cálculos, realizados diariamente, a sua devida importância. Contudo, em nosso cotidiano, muitos alunos chegam ao Ensino Médio com muitas dificuldades operatórias, sendo muito comum os alunos pedirem uma revisita aos conceitos de multiplicação e divisão. Em contra partida, sempre há aqueles que julgam um absurdo a proibição do uso da calculadora para realizar estes mesmos cálculos. Fruto dessas expectativas contraditórias, as questões abaixo foram elaboradas:

Questão 07. Hoje em dia é muito fácil ter acesso a uma calculadora, seja no celular, ou no relógio. Você acha importante ter que resolver questões de matemática fazendo contas no papel ou de cabeça?

Questão 11. Arme e efetue as divisões abaixo (sem calculadora):

a) 4321 : 9

b) 4321 : 23

Os objetivos destas questões são, avaliar os alunos em relação às técnicas operatórias e confrontar tal resposta pessoal com seu desempenho ao realizar o algoritmo da divisão. De fato, durante o terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental os alunos precisam aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético. *Certamente, eles ainda não têm domínio total de algumas técnicas operatórias, como da multiplicação e da divisão envolvendo números naturais, compostos de várias ordens, ou aquelas com números decimais, e isso precisa ser trabalhado sistematicamente* [2]. Afinal, se não forem trabalhados cotidianamente ele torna-se uma dificuldade real que passa a atrasar o aprendizado dos outros conteúdos. Por último devemos lembrar o quanto eles são importante para o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno, pois

- possibilita o exercício de capacidades como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização;
- permite a descoberta de princípios matemáticos como a equivalência, a decomposição, a igualdade, a desigualdade e a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal;

- favorece o desenvolvimento da criatividade, da capacidade para tomar decisões e de atitudes de segurança para resolver problemas numéricos cotidianos.

Calculadoras, Smatphones, tablets, etc., não temos dúvida que a tecnologia está presente na vida matemática de nossos alunos e como é bom fazer com que eles percebam que ela não é apenas um dos elementos dessa pintura, mas sim o próprio pincel que construiu o cenário. Como esta linguagem é muito presente na vida de nossos estudantes, mesmo que de maneira indireta, é no mínimo curioso sabermos se o aluno já ouviu falar nos números binários. Esta é a motivação da 8^a pergunta, que segue abaixo.

Questão 08. O que você sabe sobre os números binários?

Apesar de não se encontrar no currículo escolar, poderia ser mais um tema a ser trabalhado em sala de aula, como um projeto interdisciplinar com o objetivo de resgatar as características do Sistema de Numeração Decimal. É pertinente comentar que "ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção" [2] é um dos objetivos do terceiro ciclo no que diz respeito a Grandezas e Medidas. Como procedimento indicam o "reconhecimento e compreensão das unidades de memória da informática, como bytes, quilobytes, megabytes e gigabytes em contextos apropriados, pela utilização da potenciação" [2] Se formos na definição de byte teremos que ela é a menor unidade de mediada de informação que é composta por 8 bits. Se em algum momento formos mais além e explicássemos o que é o bit teríamos que falar sobre números binários, pois o bit é composto por 8 dígitos que podem ser apenas os algarismos 1 ou 0. Mas devemos reconhecer, pelo nosso próprio cotidiano, que esta última parte não é uma prática comum. E por fim, em nossa avaliação desejamos verificar se o aluno possui algum conhecimento, por mais simples que seja, sobre números binários.

Ao lermos o índice de livros do 8^o e 9^o anos percebemos muitos capítulos dedicados ao estudo de polinômios e de potenciação e radiciação. Assuntos que demandam muito tempo pois possuem muitas definições e regras. Já a notação científica, como foi comentado antes, é apresentada tanto no 9^o ano do EF em matemática como no 1^o ano do EM em física, mas geralmente este assunto apresenta mais um conjunto de regras que os alunos devem se apropriar, aparentemente, sem significado. Sabemos que muitos dos nossos estudantes sentem bastante dificuldades nestes assuntos e por isso as questões que seguem foram redigidas.

Questão 10. Resolva as seguintes expressões (não precisa resolver as potências).

a) $2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^3$

b) $3x^3 + 72x^2 - 23x^5 + 45x^3 - 25x^2 - 12x^5$

c) $6\sqrt[3]{10} + 5\sqrt{10} - 20\sqrt[4]{10} + 15\sqrt[4]{10} - 15\sqrt[3]{10} + 10\sqrt{10}$

Questão 12. Escreva os números abaixo em notação científica:

a) $0,000000034$

b) 123457839203700

Na 10^a questão queremos verificar se os alunos somam ou subtraem termos semelhantes ao resolver uma expressão numérica ou algébrica. Por isso está entre parênteses "Não precisa resolver as potências". Porém se o aluno a respondê-la corretamente por outros meios (resolvendo potência por potência, por exemplo) ela será contabilizada como resposta correta de acordo com os parâmetros que veremos em 3.1.2.1. Já na 12^a questão era o de verificar se os alunos *lembram* da escrita em notação científica. O termo *lembram* está assim usado, pois nossa experiência mostra que este é um conteúdo que os alunos "aprendem"com certa facilidade. No momento em que são ensinados os alunos geralmente executam com êxito a escrita em notação científica, porém com o passar do tempo, eles não lembram como fazer essa escrita. O *item a* da 10^a questão e a 12^a questão falam de Potenciação. Uma das sugestões de trabalho sugeridas pelo PCN diz

> Ao desenvolver este conceito o professor pode conduzir o trabalho de modo a que os alunos observem a presença da potenciação no Sistema de Numeração Decimal, Por exemplo:
>
> $$\begin{aligned} 874.615 &= 800.000 + 70.000 + 4.000 + 600 + 10 + 5 \\ 874.615 &= 8 \times 100.000 + 7 \times 10.000 + 4 \times 1000 + 6 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \\ 874.615 &= 8 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 1 \times 10 + 5 \end{aligned}$$

A partir desta construção o próprio professor pode trabalhar com o aluno a soma de termos semelhantes antes mesmo de ver este assunto em polinômios. Verifiquemos o exemplo que segue:

Exemplo 1. *Vamos realizar a soma 456 + 1256 de duas maneiras diferentes. Uma utilizando o QVL e a outra pelos termos semelhantes justificando pelo que já foi feito no QVL*

Tabela 7 – QVL

Um	C	D	U
1	2	5	6
+	4	5	6
1	7	1	2

Termos Semelhantes

$$\begin{aligned} 1.256 + 456 &= (1000 + 200 + 50 + 6) + (400 + 50 + 6) \\ 1.256 + 456 &= (1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6) + (4 \times 100 + 5 \times 10 + 6) \\ 1.256 + 456 &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) + (4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \\ 1.256 + 456 &= 1 \times 10^3 + (2 \times 10^2 + 4 \times 10^2) + (5 \times 10 + 5 \times 10) + 6 + 6 \end{aligned}$$

Percebemos que a soma compreendida nos primeiros parênteses indicam os valores respectivos das centenas e os compreendidos nos segundos parênteses são os valores das dezenas. Portanto podemos efetuar estas somas cujos resultados já nos é conhecido pelo que já foi feito no QVL acima, observando inclusive a passagem da reserva de uma ordem para a outra.

$$\begin{aligned} 1.256 + 456 &= 1 \times 10^3 + (2 \times 10^2 + 4 \times 10^2) + (5 \times 10 + 5 \times 10) + 6 + 6 \\ 1.256 + 456 &= 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 10 \times 10 + 12 \\ 1.256 + 456 &= 1 \times 10^3 + (6 \times 10^2 + 10^2) + (10 + 2) \\ 1.256 + 456 &= 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10 + 2 \\ 1.256 + 456 &= 1.712 \end{aligned}$$

De maneira análoga o aluno faria *no item c* lembrando que a radiciação é uma potência de expoente fracionário não havendo problema em somar radicais semelhantes. Mesmo que a maioria dos alunos não tenham percebido que a soma de termos semelhantes na álgebra obedece o mesmo raciocínio que é feito no campo aritmético, é fato de que a maioria dos livros do 8^o ano traz o conteúdo de monômios e polinômios dando, geralmente, muita ênfase a questão operacional, principalmente a de somar termos semelhantes. Durante o Ensino Médio também existem várias situações onde temos que simplificar expressões algébricas com termos diferentes tanto pela *letra* que o representa como pela potência da *letra*. Tomemos *letra* com os seus quatro significados dados pelo PCN: generalizações de modelo aritméticos, variáveis, incógnitas e símbolo abstrato. Por tudo isso podemos dizer que *o item b* faz parte do convívio matemático dos alunos e esperamos que os mesmos sejam capazes de realizar tais somas.

Pensando nas relações existentes entre a matemática e a vida cotidiana do aluno foi redigia uma última questão disponível no Apêndice A, que foi aplicada apenas nas turmas do 3^o ano, com o objetivo de mostrar algumas conexões provavelmente desconhecidas por eles a fim de que eles pudessem desenvolver um texto expondo seus sentimentos e expectativas em relação a matemática.

3.1.2 A Avaliação e o Resultado da Pesquisa

Como ja citado, o questionário objetiva verificar o aprendizado dos alunos em relação ao conteúdo de SND. Partindo desta verificação iremos classificar o resultado da correção dos 532 questionários em níveis de aprendizado. Esta classificação apenas ocorrerá de forma quantitativa neste momento, apesar de que compreender o porquê de cada erro seja até mais importante. Contudo o objetivo central desta pesquisa é formalizar o que diagnosticamos frequentemente em nossas salas de aula e refletir sobre os possíveis causadores dessa situação. Na seção Avaliação será explanado a maneira como faremos as classificações de níveis de aprendizado. Enquanto na seção Resultado será exposto o resultado da correção de cada turma.

3.1.2.1 Avaliação

Avaliaremos o Questionário utilizando os parâmetros que seguem abaixo.

Para as questões Q1, Q2, Q3, Q9, Q10, Q11, Q12 teremos os critérios

- Não Respondido (NR), para as respostas em branco
- Não Desenvolvido(ND), para respostas que não possuem correlação com a resposta esperada;
- Pouco Desenvolvido(PD), para respostas erradas mas possuem correlação com a resposta esperada;
- Bem desenvolvido (BD), são as respostas com pequenos erros, sejam estes de origem conceitual ou de distrações;
- Desenvolvido (D), respostas corretas.

Para Q4, Q5 e Q6 que são dicotômicas utilizaremos os seguintes parâmetros [28]:

- Não Respondido (NR), para as respostas em branco;
- C1, resposta correta com justificativa válida;

- C2, resposta correta com justificativa inválida;
- C3, resposta incorreta com justificativa válida;
- C4, resposta incorreta com justificativa inválida.

Consideremos as justificativas válidas como aquelas que são coerentes com a pergunta.

E, finalmente, para Q7 e Q8, apenas apontaremos se SIM ou NÃO com os seguintes critérios:

- Não Respondido (NR), para as respostas em branco;
- Q7: **SIM** se acredita na importância do cálculo mental ao manual, e **Não** se não concorda.
- Q8: **SIM** se apresenta alguma conhecimento acerca dos números binários, e **Não** se não apresenta.

Para um bom entendimento dos resultados expressos em Q1, Q2, Q3, Q9, Q10, Q11, Q12, faz-se necessário saber o limiar entre o PD e o BD. Listaremos então o mínimo necessário para que a resposta apresentada seja avaliada com BD.

- Q1: Escrever por extenso o valor relativo de cada algarismo e pelo menos duas das classes corretamente. Por exemplo: Um Bilhão e quarenta e cinco e oitocentos e setenta e três e dois.
- Q2: Escrever os algarismos obedecendo seu valor relativo, mas não necessariamente na sua respectiva ordem. Por exemplo: 405.200.005
- Q3: Citar uma das características que definem o SND. Por exemplo: reconhecer que o SND tem base 10, ou reconhecer que nosso SND é posicional.
- Q9: não respondeu corretamente, mas em sua justificativa apresentou um pequeno erro, seja ele conceitual ou de alguma distração.
- Q10:não respondeu corretamente, mas em sua justificativa apresentou um pequeno erro, seja ele conceitual ou de alguma distração.
- Q11: Resolveu a divisão mostrando que entende o algoritmo mas errou, seja por distração ou ignorância, algum algarismo do quociente.
- Q12: Posicionou a vírgula corretamente mas errou a potência de 10.

3.1.2.2 O Resultado da Pesquisa

Antes de apresentarmos o resultado da pesquisa, e nos determos em seus números, necessário se faz que conheçamos, mesmo que pouco, o contexto na qual a pesquisa foi aplicada.

Em relação ao público entrevistado podemos dizer que é muito diversificado. Dentre as turmas participantes tínhamos aquelas compostas por mais de 50% de alunos repetentes, e outras com este mesmo índice em relação a desistência escolar do referido ano. Ao ser apresentada a proposta da pesquisa os alunos esboçaram certo receio mas todos colaboraram da melhor maneira possível. Apenas duas turmas não foram tão receptivas, talvez por causa da ausência do professor durante a aplicação do questionário. Um dos fatos intrigantes da realização desta atividade foi o de que em todas as turmas os alunos se “assustaram"ao ver as duas primeiras questões, alegando, com frequência, que fazia muito tempo que tinham estudado este assunto, ou que nunca tinham se deparado com um número tão grande. Também foi curioso o sentimento de tristeza por parte dos alunos do 3^o Ano do EM por não conseguirem realizar as atividades como desejariam.

Quanto ao material didático utilizado pelos alunos e professores encontramos duas realidades diferentes. Nas escolas municipais os $6^{\underline{os}}$ anos possuíam livro, porém todo o conteúdo trabalhado, durante todo o Ensino Fundamental, segue o material sugerido pelo Instituto de Qualidade de Ensino (IQE). Sem dúvidas é um excelente material, que fundamenta-se na Base Curricular Comum (BCC), mas diferencia-se um pouco do que geralmente é abordado nos livros. Por exemplo, não é exigido o ensino de polinômios no 8^o ano do EF, como também não é exigido o ensino, mais detalhado, de Potenciação e Radiciação no 9^o ano do EF. Logicamente o professor tem liberdade para ensinar os conteúdos não contemplados pelo material do IQE, porém isto torna-se inviável. Devido a frequente cobrança por bons resultados nos simulados que os alunos fazem a cada bimestre, e por causa do investimento feito para que haja capacitações a cada quinzena com os professores, estes acabam explorando o material oferecido de maneira, praticamente, exclusiva. Já nas escolas estaduais algumas turmas não receberam livros, outras só uma parte da turma recebeu ou foram distribuídos mais de um tipo de livro (coleções diferentes) devido ao pouco quantitativo dos mesmos. As turmas dos $3^{\underline{os}}$ anos não usam livros devido a escolha dos próprios professores, que alegam que o livro não é adequado para a realidade exigida pelo Estado de Pernambuco. Isto segue do fato de que a maioria dos conteúdos que devem ser ensinados não estão presentes nos livros ofertados, sendo assim pouco utilizados. Referente a aplicação do questionário é importante saber que o mesmo foi lido pelo professor aplicador e sempre que surgiam dúvidas as questões eram novamente explicadas. Foi solicitado aos alunos que não usassem celulares ou calculadoras e evitassem conversas, porém sempre existia algum grupo, em cada sala, que conversava mais, comportamento bem corriqueiro em nosso cotidiano.

Nosso resultado terá uma analise quantitativa, pois ela objetiva apontar numericamente a avaliação das respostas dadas pelos alunos no questionário. O quantitativo de cada turma encontra-se no apêndice deste trabalho e é apresentado através de tabelas contendo os conceitos abordados no subitem anterior. Porém não são feitas referências às escolas a qual pertencem e o título dado a cada tabela serve apenas como referencial. Nesta subseção nos determos a apresentar a adaptação do Quadro de Expectativas de Aprendizagem contidas no PEBPE (QEA), e o quantitativo da pesquisa, através de gráficos obtidos dos Somatórios das respostas dadas pelos alunos do 6^o e 9^o Anos do Ensino Fundamental e pelos do 3^o Ano do Ensino Médio. Feito isso poderemos realizar alguns comentários derivados dos próprios gráficos e, juntamente com o QEA verificaremos se a situação avaliada corresponde ao esperado pelos documentos norteadores de nossa educação.

Tabela 8 – Legenda referente ao Quadro de Expectativas de Aprendizagem

a cor branca indica que a expectativa não precisa ser objeto de intervenção pedagógica naquela etapa de escolarização, pois será trabalhada posteriormente;
a cor azul clara indica o(s) ano(s) no(s) qual(is) uma expectativa deve começar a ser abordada nas intervenções pedagógicas, mas sem preocupação com a formalização do conceito envolvido;
a cor azul indica o(s) ano(s) no(s) qual(is) uma expectativa deve começar a ser abordada sistematicamente nas intervenções pedagógicas, iniciando-se o processo de formalização do conceito envolvido.
a cor azul escura indica o(s) ano(s) no(s) qual(is) se espera que uma expectativa seja consolidada como condição para o prosseguimento com sucesso em etapas posteriroes de escolarização.

Tabela 9 – Quadro Resumo das Expectativas de Aprendizagem para a Educação Básica

Expectativa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Contagem de elementos de coleções												
Representação dos números naturais												
Relação de ordem nos números naturais												
Composição e decomposição de números												
Resolução de problemas de adição e subtração por meio de cálculo mental												
Resolução de problemas de multiplicação por meio de cálculo mental												
Relações entre dezenas, centenas, milhares, etc.												
Arredondamentos e aproximações												
Representação simbólica e cálculo mental de adições e subtrações												
Representação simbólica e cálculo mental de multiplicações												
Resolução de problemas de divisão por meio de cálculo mental												
Reconhecimento e representação de números racionais na forma decimal												
composição e decomposição de números racionais na representação decimal												
Representação simbólica e cálculo mental de divisões												
Multiplicação e divisão por potências de dez												
Características do sistema de numeração decimal												
Relação de ordem nos números racionais												
Resolução de problemas com números racionais por meio de cálculo mental												
Multiplicação e divisão de números racionais												
Números em notação científica												
Operações aritméticas por meio dos algoritmos formais												

As cores da tabela 3.21 nos indicam o tipo de avaliação que deve ser realizada em relação a uma determinada expectativa de aprendizagem. Estas expectativas, que compõe o QEA, pertencem ao Campo Numérico (Números e Operações) e foram selecionadas do PEBPE, conveniente por terem maior proximidade com o conteúdo de Sistema de Numeração Decimal. Em 3.22 encontramos o ano ideal, do ensino regular, para realizar tais avaliações. Por exemplo, em relação a expectativa **multiplicação e divisão de números racionais** (antepenúltima linha) temos que começar a cobrá-la a partir do 8^o ano do EF e só a partir do 9^o ano que devemos começar a exigir formalidade. A partir do 1^o Ano do EM, poderemos cobrar tal expectativa como requisito para continuidade dos estudos.

Figura 14 – Resultado do Somatório da Questão 01

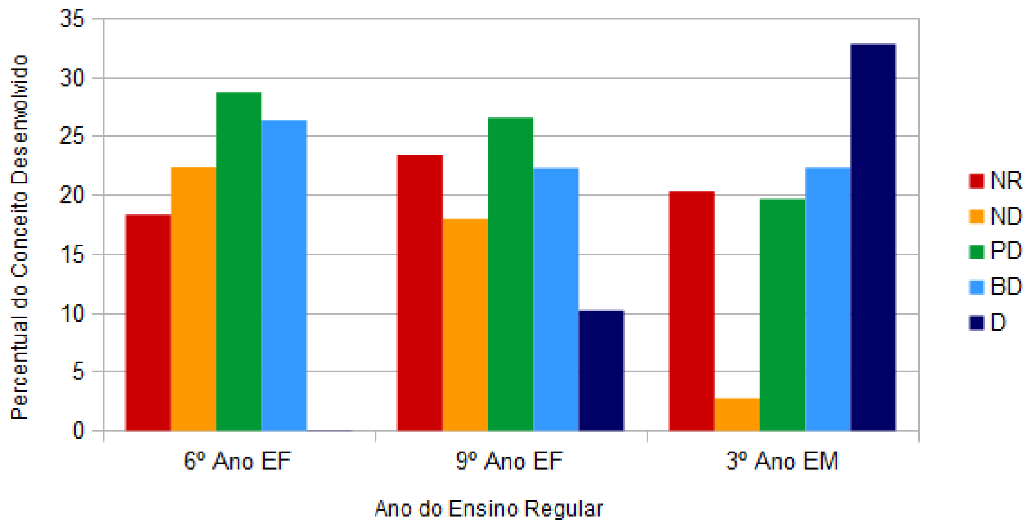


Figura 15 – Resultado do Somatório da Questão 02

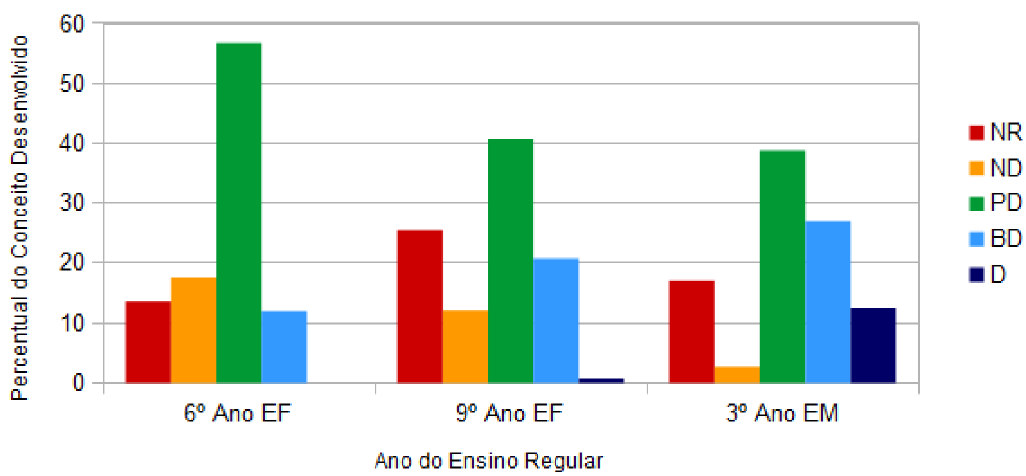


Figura 16 – Resultado do Somatório da Questão 03

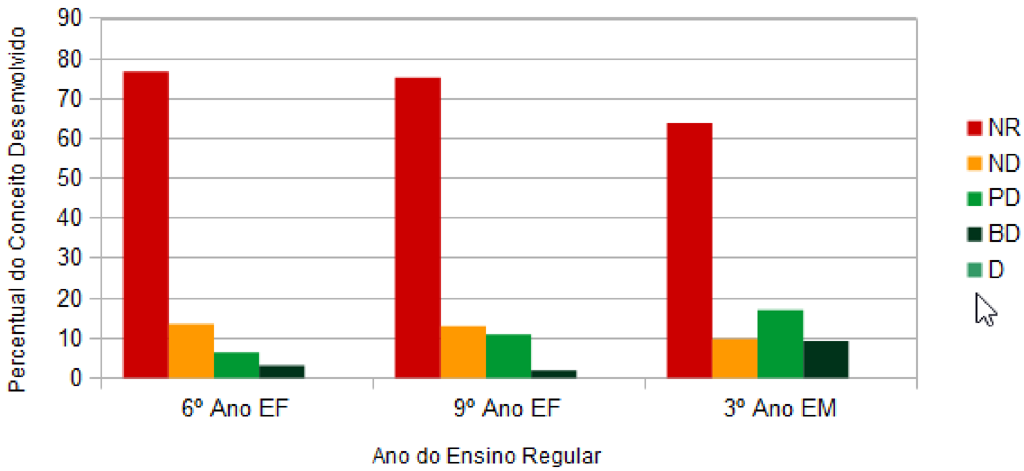
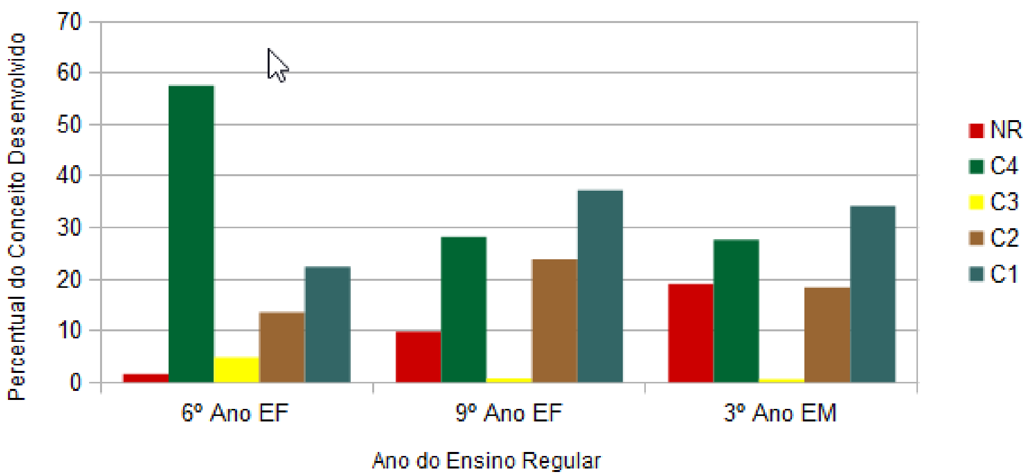


Figura 17 – Resultado do Somatório da Questão 04



Do somatório dos alunos do 6^o ano percebemos que a questão menos desenvolvida foi a 3^a, ou seja, poucos conseguem escrever o que entendem do nosso SND. Este resultado é relativamente esperado já que pelo QEA este é o ano que devemos começar a realizar intervenções pedagógicas, lembrando, contudo, que certos aspectos do SND já vêm sendo abordado desde o 1^o ano. Quanto a leitura e representação de números naturais grandes os alunos estão em desenvolvimento, mas não muito diferente do que se esperaria ao fim do 5^o ano, pois sua leitura e escrita vão até a classe dos milhares, nos mostrando que tal aspecto deve ser bastante abordado durante os outros anos do ensino regular. Geralmente em nossos livros didáticos poucas são as situações, fora do 6^o ano, que aparecem os números grandes. Nas questões 11 e 09 vemos, respectivamente, a aplicação da Divisão e/ou a relação de inclusão do SND. Na questão 11 devemos ter um olhar cuidadoso para termos atitudes cautelosas. Verificamos, durante a correção, que os alunos que tentaram resolver as divisões utilizaram, em sua maioria, o algoritmo mais algum recurso pictográfico, como os pauzinhos e as bolinhas. Mas mesmo assim poucos obtiveram êxito. Em contrapartida mais da metade dos alunos nem tentaram responder a questão alegando que “não sabiam"ou “não lembravam", o que é muito preocupante,

Figura 18 – Resultado do Somatório da Questão 05

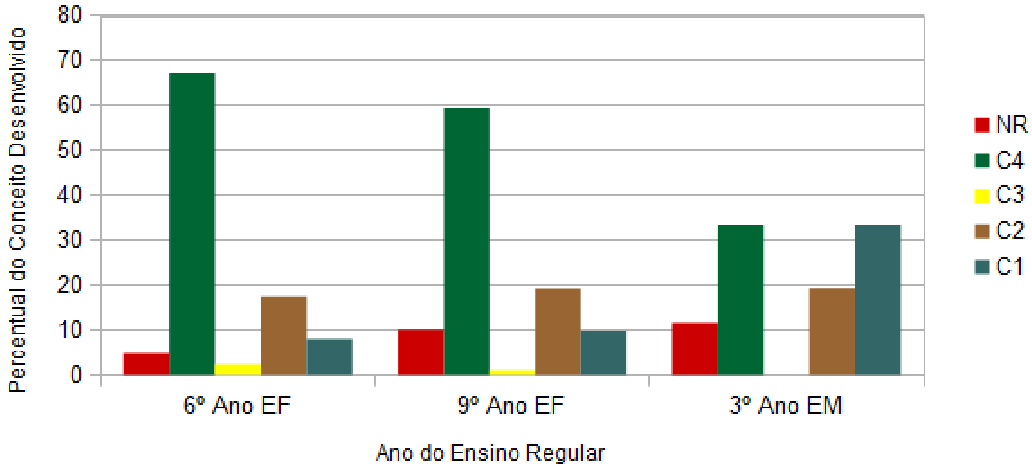
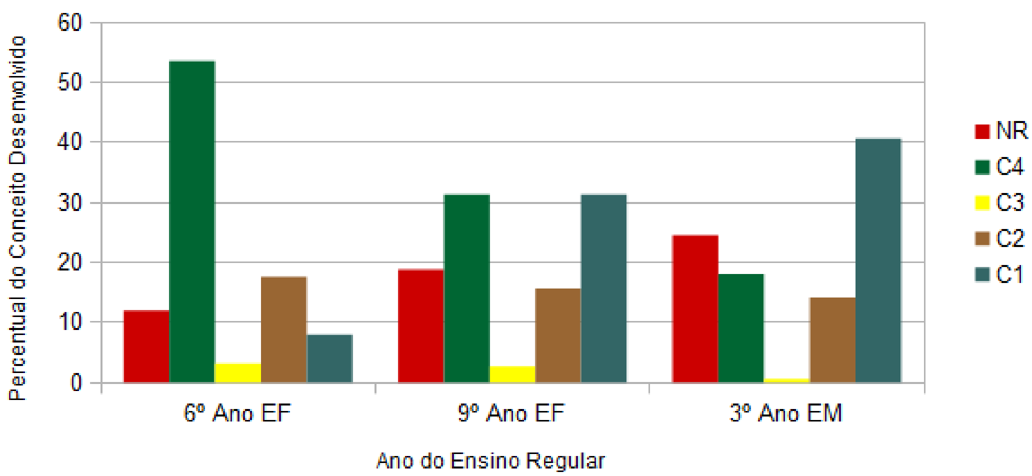


Figura 19 – Resultado do Somatório da Questão 06



pois do QEA vemos que no 6^o ano realizar divisões já deve ser uma aprendizagem adquirida. Contudo, o próprio PCN nos alerta que o 3^o ciclo é um momento de aprimoramento operatório, principalmente o da divisão. Vale observar que do QEA apenas no 8^o ano que devemos "começar"a realizar intervenções no que diz respeito a multiplicação e divisão com números racionais. Quanto ao erro presente na 5^a questão também não conseguiram verificá-lo, porém acreditam na importância dos cálculos mentais e escritos. Analisando turma a turma percebemos o uso da História da Matemática durante as aulas, mas não podemos afirmar se foi usada como uma informação ou material de reflexão e/ou aprofundamento.

Em relação aos nonos anos de maneira geral, não vemos melhora do quadro descrito acima, se compararmos com o QEA. Nas duas primeiras questões o quantitativo é muito pouco. Aproximadamente 40% dos alunos estão em NR ou ND. E na questão 3 poucos tentam responder e desses apenas a metade conseguiu se expressar um pouco sobre o que desenvolveu. Na divisão o resultado não foi muito diferente do obtido no 6^o ano. E na questão 10 (a das expressões) apenas as exceções fizeram. O único aspecto que pareceu bem desenvolvido foi o histórico, pois eles apresentaram um raciocínio mais elaborado para justificar suas

Figura 20 – Resultado do Somatório da Questão 07

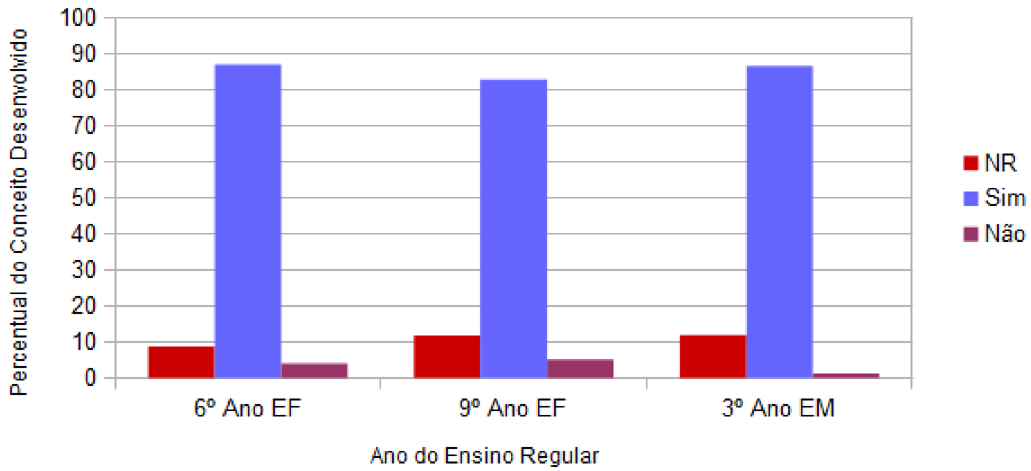
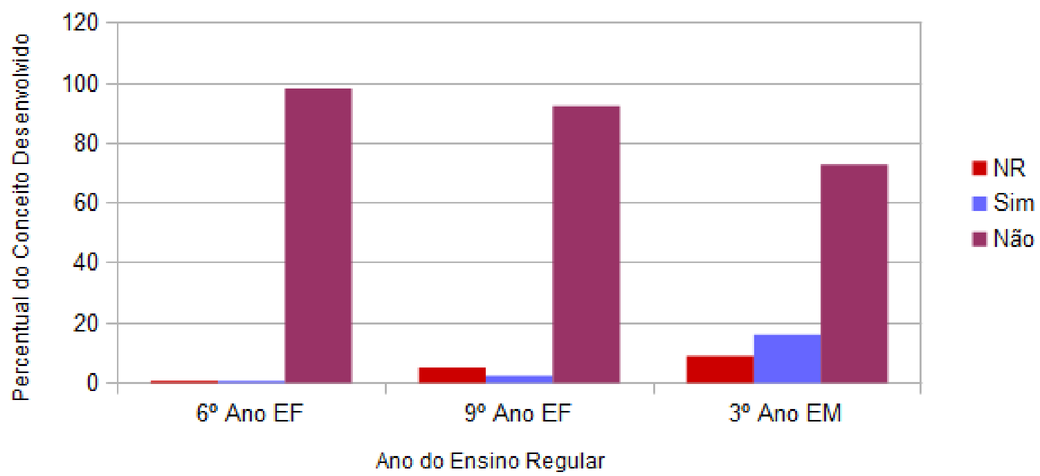


Figura 21 – Resultado do Somatório da Questão 08



respostas nas questões 04 e 06, apesar do perentual dos que atingiram o conceito D ainda ser pequeno. Mas na questão 05 poucos conseguiram justificar corretamente o erro encontrado. Devemos considerar que muitos não tentaram responder, já que 30 dos colaboradores não responderam a 7^a questão, que geralmente foi respondida nem que fosse com um sim ou um não. Pelo QEA os alunos já deveriam ser capazes de responder todas as questões. O que poderia ser feito para que o Ensino Médio não seja um repetido Ensino Fundamental? Afinal, o não desenvolvimento operatório atrasa o desenrolar da maior parte dos conteúdos gerando também um dano a auto-estima do aluno devido ao mau aprendizado. Este dificilmente terá iniciativa em aprender os conteúdos do EM, que são mais abstratos e formais que os do EF. Certeza apenas temos de que as medidas a serem tomadas para preservar e estimular a aprendizagem dos alunos devem ser pensadas por todos os responsáveis pelo estudante como os professores, a equipe gestora e a família.

O último ano do ensino regular foi o que obteve maior quantitativo nas duas primeiras questões, contudo poucos conseguiram responder adequadamente a terceira. As respostas que necessitam de cálculos, no caso as da 9^a, 10^a, 11^a e a 12^a, pouco foram respondidas. Contudo a grande maioria conseguiu perceber o erro da 5^a questão e conseguiram argumentar bem as questões de objetivo histórico. e as que foram poucos

Figura 22 – Resultado do Somatório da Questão 09

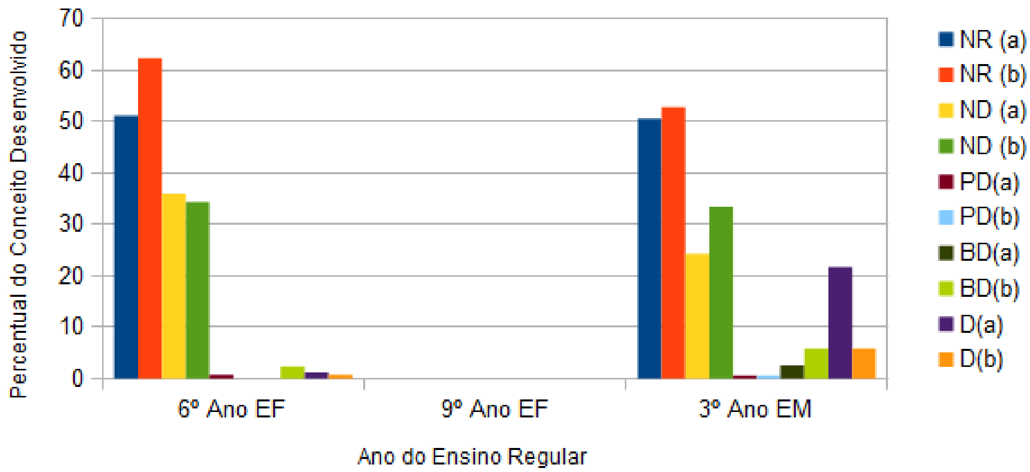
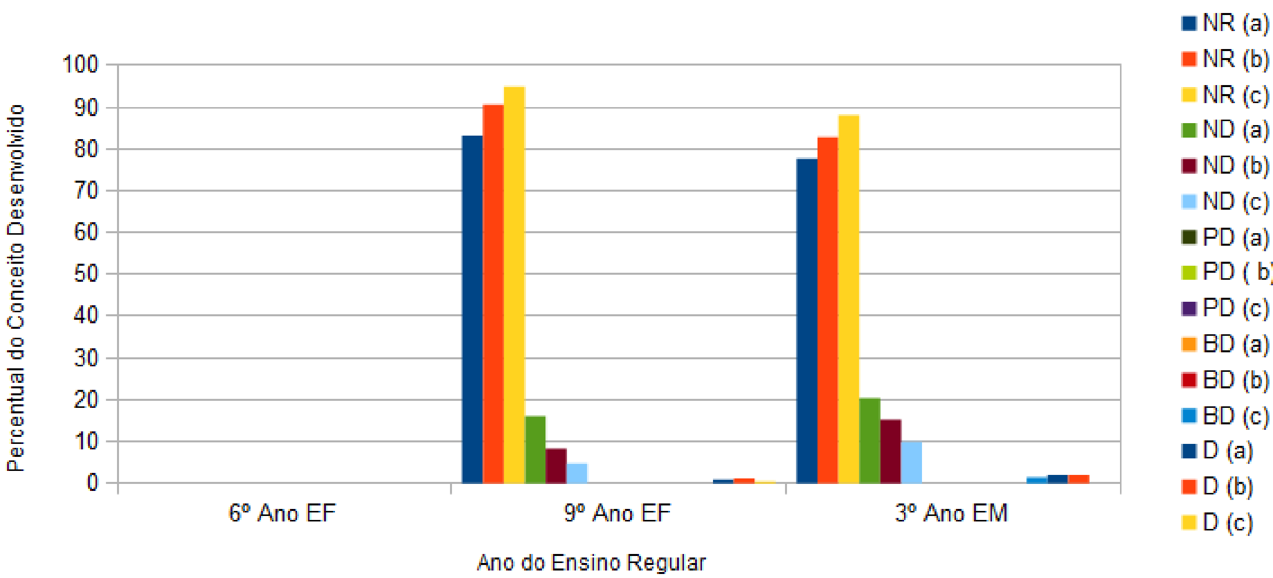


Figura 23 – Resultado do Somatório da Questão 10



Percebemos um aumento naqueles que já ouviram falar em números binários, o que deve ter acontecido em alguma experiência externa à sala de aula, como alguns informaram.

Ao fim da correção desses questionários percebemos que a queixa cotidiana proferida por muitos professores comprova-se, restando-nos o velho questionamento: Como e porquê turmas chegam com tamanha dificuldade operacional no fim do Ensino Regular? Onde estão as lacunas em nosso processo de ensino e aprendizagem e, mais importante, como preenchê-las? São perguntas que motivam reflexões no mundo todo, pois os obstáculos na aprendizagem da matemática independem da localização geográfica. Entender as causas desse comportamento macro e estabelecer suas relações é utópico para nós professores, mas nos é possível averiguar possíveis problemas e estabelecer planos de ação dentro de cada turma ou escola que trabalhamos. Por

Figura 24 – Resultado do Somatório da Questão 11

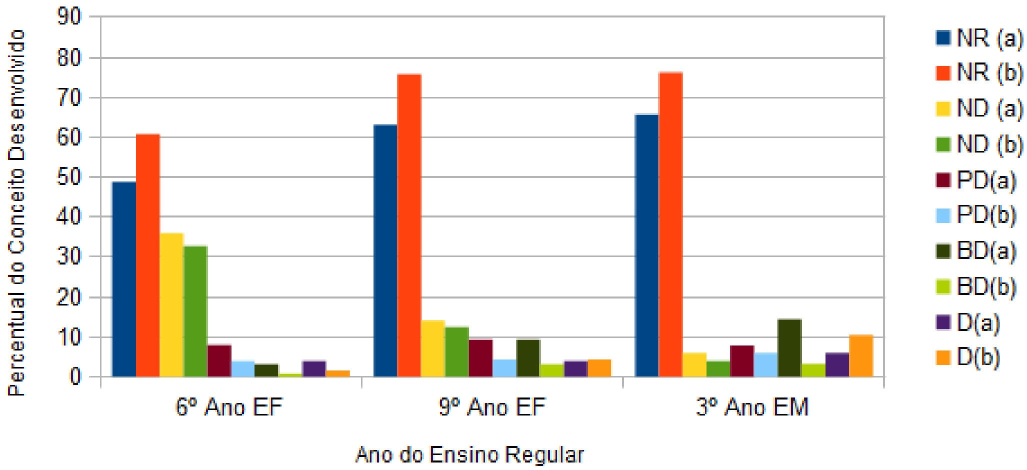
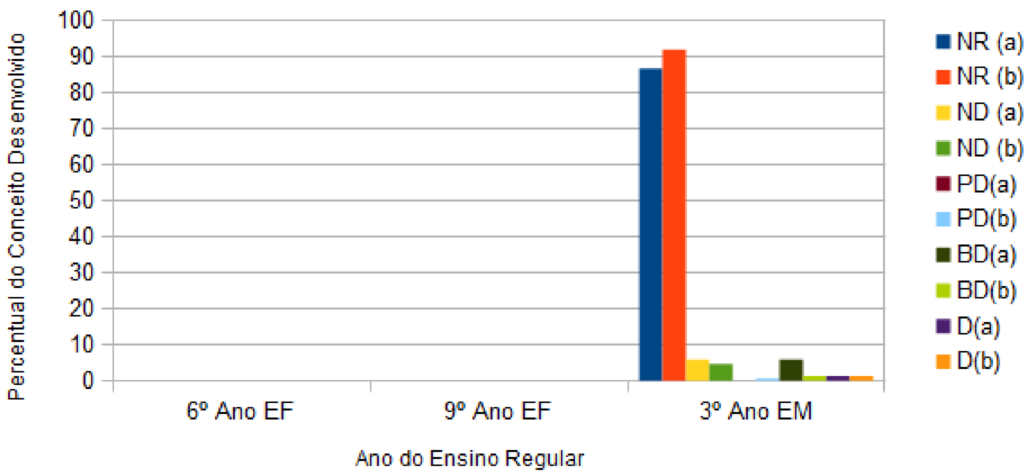


Figura 25 – Resultado do Somatório da Questão 12



exemplo, 66% dos professores entrevistados, durante uma breve conversa, concordam que os alunos que mais apresentam dificuldade não costumam realizar as atividades de casa. Se este é um fator comum a todas as turmas na qual o professor trabalha, cabe a ele, a equipe pedagógica da escola e a família planejar intervenções para que este comportamento mude. Em se tratando de uma dificuldade de aprendizagem comum referente a matemática é importante que o professor possa realizar estudos observando, se possível, o que cada aluno produz diariamente e retomando sempre aquele conteúdo em diversas situações. Contudo isso não passará de demagogia para o professor que ao ler essas linhas se pergunta "como vou ter tempo para desempenhar esse estudo, essas análises, se trabalho 400 horas-aulas por mês?"Por isso precisamos de políticas que priorizem a educação com responsabilidade. Enquanto isso não acontece contamos com a boa vontade dos professores que, mesmo com uma jornada extensa, tentam fazer suas intervenções da melhor maneira possível.

No próximo item será apresentado o questionário respondido pelo professor A e observaremos os comentários feitos por eles de maneira geral, procurando associá-las aos PCN e também ao que encontramos nos livros didáticos utilizados pelos mesmos. Podemos citar diversos responsáveis pelo resultado dos questionários dos alunos, mas neste trabalho nos concentraremos em retratar as nuances de origem dos professores e dos livros didáticos.

3.2 O Professor

Como citado anteriormente não podemos analisar a aprendizagem olhando apenas para os alunos. Precisamos também nos observar didática, metodológica e academicamente. Portanto foram entrevistados, no município de Igarassu, 15 professores, que lecionam na rede pública municipal e/ou estadual, desejando com isso encontrar regularidades em suas respostas dadas ao questionário, este disponível no apêndice B, e assim realizarmos conexões com o resultado retratado em 3.1.2.2 . Neste momento, vamos verificar, também de maneira quantitativa, os seguintes aspectos:

A expectativa.

A 1^a pergunta do questionário deseja saber qual a expectativa do professor em relação as quatro operações básicas com números naturais e números decimais, e também quanto a leitura e a escrita tanto de números grandes como pequenos sejam decimais ou naturais, devendo o professor julgá-las de 1 a 5. Foi considerado que apenas 5, dos professores entrevistados, apresentaram uma expectativa não condizente com QEA. Estes cinco indicaram na maioria dos tópicos a legenda 5 principalmente os relativos a multiplicação e a divisão, tanto de números naturais como decimais. Esta expectativa equivocada é bastante prejudicial em vários sentidos, afinal dificilmente o professor, que tem esse posicionamento, se aterá adequadamente no desenvolver dos algoritmos e consequentemente o aluno não terá um desenvolvimento contínuo em suas técnicas operacionais, prejudicando-o tanto emocionalmente como no aprendizado dos demais conteúdos.

Formação.

Na 6^a questão são feitas perguntas em relação ao que foi visto durante o curso de licenciatura sobre Sistemas de Numeração. Foi pedido que os professores legendassem, de 1 a 5, o aprendizado adquirido na faculdade sobre este conteúdo. O resultado segue na tabela 10

Tabela 10 – Nota Referente ao Aprendizado de Sistemas de Numeração durante o Curso De Licenciatura

Conceito	1	2	3	4	5
Aprendizado adquirido sobre SN	2	2	3	4	4

Dos entrevistados apenas $\frac{1}{3}$ não estudaram "Os Sistemas de Numeração que já existiram sob o ponto de vista histórico". Notamos também que $\frac{2}{15}$ professores não viram este conteúdo durante a faculdade. Apesar de poucos o ideal é que todos os professores tivessem tido, durante o curso universitário, a base para poder realizar o mínimo indicado pelo PCN.

O uso da história da matemática.

Na 8^a questão pedimos para que o professor indicasse, de 1 a 5, a necessidade de ensinar, determinados conceitos, durante os anos finais do Ensino Fundamental para que haja um bom desenvolvimento matemático do aluno. As respostas abaixo encontram-se na tabela 11 mas nos deteremos a olhar os pontos: "Regras do Sistema de Numeração Decimal"e "O conhecimento histórico sobre o desenvolvimento dos números".

Tabela 11 – Resultado do Questionário - 8^a Questão

Conceito	1	2	3	4	5
Base numérica	0	1	5	5	4
Número/numeral/algarismo	0	1	3	6	5
Regras do Sistema de Numeração Decimal	0	2	1	4	8
Conhecimento acerca de outras bases numéricas	1	4	4	5	1
Manipulação de números com outras bases numéricas	2	5	3	3	2
Escrita do número na forma decomposta	0	3	1	7	4
Escrita do número na forma polinomial	2	3	4	2	4
Escrita do número na forma científica	1	4	3	2	5
Utilização da forma decomposta para resolver problemas envolvendo as quatro operações	0	2	3	2	8
Compreensão do sistema de numeração como uma função	1	1	3	3	7
Conhecimento histórico sobre o desenvolvimento dos números	1	2	6	4	2

Da tabela 11 percebemos que **ensinar as regras que compõe o SND** é tido pela, grande maioria, como importante pois boa parte das respostas dadas foram pontuadas com 4 e/ou 5. Da mesma maneira vemos que 8 dos entrevistados não veem como algo realmente importante para um bom desenvolvimento matemático do aluno a **construção histórica do desenvolvimento dos números** (pontuação dada ≤ 3). Verificando também as respostas dadas a 3^a questão: "Ao retomar o conteúdo (no 6^o anos) qual é a principal fonte geradora de situações problemas que você utiliza?"temos que **8** professores assinalaram **vivências do cotidiano dos alunos**, **5** marcaram **vivências sociais geralmente registradas em revistas**, jornais e livros, e apenas **2** indicaram que utilizam **vivências através da história do ser humano**. E este torna-se mais um motivo para que a grande maioria não utilize a história, como principal recurso e/ou gerador de situações problemas, apesar de ser bastante recomendado, tanto pelo PCN como pelo PEBPE. Sobre o uso ou não da história, principalmente ao abordar o Sistema de Numeração Indo-Arábico, podemos fazer a seguinte comparação:

Suponhamos que seja possível existir uma pequena fazenda que cultive apenas um tipo de flor, por exemplo a rosa paulista. Nesta fazenda nasceu uma pequena criança e esta sempre viveu naquela fazenda durante sua infância vendo apenas a rosa paulista, que pertencia tanto a seus momentos de lazer como de tristeza. Um dia alguém vem lhe falar das características únicas da rosa que a fazem tão distinta. Como a criança provavelmente reagiria? Falar de características é o mesmo que classificar, comparar. Como isso pode fazer algum sentido se ela só conhece a rosa paulista? A criança até pode reconhecer o significado do que foi dito e reproduzir o que foi ouvido, mas será que se lhe fossem apresentadas um coleção de rosas diferentes tais características não fariam mais sentido? A criança não compreenderia melhor sobre a cor, o aroma, o crescimento, o cultivo, a disposição dos espinhos, quando existem ou não espinhos, o significado da cor de cada uma, etc, ao ver vários tipos de rosas? Da mesma maneira deveríamos proceder em sala de aula quando queremos caracterizar algo, pois tudo faz mais sentido quando conhecemos vários exemplares do contexto em questão. Por isso que abordar historicamente o conteúdo de Sistemas de Numeração fará o aluno ter uma maior compreensão de como o nosso funciona, de como são as suas regras, de porque ele é chamado de posicional, de porque usamos a base dez, porque usamos estes algarismos e não outros. Além de proporcionar esta melhor compreensão a história é uma excelente forma de mostrar aos alunos que a matemática nasceu da necessidade e não, como muito de nossos alunos deixam escapar em seus momentos de frustração, de “alguém que não tinha nada pra fazer e inventou a matemática".

Outros momentos de aprendizagem.

Na 7^a questão o professor é questionado se retoma “O assunto de Sistemas de Numeração em outro Ano/Série do Ensino Regular". Se sim, queremos também saber em que conteúdo estudado isso acontece. As respostas, quando eram dadas, foram as seguintes:

- fração, razão, proporção, regra de três, entre outros assuntos;
- operações com números reais;
- conjuntos;
- números naturais - números reais;
- porcentagem, ângulos, radiciação, notação científica, números racionais;
- sempre no início de cada bimestre fazendo uma revisão, independente da série ano do aluno;
- números inteiros, racionais.

Observando as respostas dadas podemos inferir que, em relação ao Sistema de Numeração Decimal, os professores limitam-se a trabalhar o lado operacional, ou seja, a parte mais técnica do conteúdo, como as quatro operações básicas dentro de cada conjunto numérico, ou a classificação de cada número como sendo natural, inteiro, racional, irracional ou real. E tal abordagem está sendo feita , por cada um, de maneira pessoal. Neste caso, a falta de regularidade nos indica que os professores, possivelmente, não utilizam as recomendações feitas por um documento oficial como os PCN ou o BCC-PE, ou mesmo o QEA. Dos entrevistados quatro professores alegaram que não retomam este conteúdo em outro momento, o que reforça afirmação feita.

Fontes de Estudo

O Livro didático foi a fonte assinalada por todos os professores, inclusive a única fonte de estudo assinalada por 5 deles. Consequentemente este nosso “companheiro de aventuras"diz muito sobre a nossa “maneira pessoal"de trabalhar e portanto vamos fazer, no próximo item, uma rápida análise sobre como este conteúdo é abordado em alguns dos livros adotados pelos professores. Esta análise será feita através da comparação dos assuntos contidos nos livros com as expectativas de aprendizagem contidas nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco.

3.2.1 O Livro Didático

Em um primeiro momento abordaremos as principais características de cada obra utilizada, para então serem apresentadas duas tabelas, uma para o EF e outra para o EM, cada uma sinalizando as expectativas de aprendizagem esperadas em [25] e as que de fato são encontradas . Com esta última exposição serão feitos alguns comentários sobre como os conteúdos, diretamente relacionados com SND, estão sendo abordados nos livros.

3.2.1.1 Características Gerais

6^o Ano do Ensino Fundamental

Matemática - Ideias e Desafios (ID)
Autores: Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga
Editora: Saraiva
Edição: 2012

Matemática Teoria e Contexto (TC)
Autores: Marília Centurión & José Jakubovic
Editora: Saraiva
Edição: 2012

9^o Ano do Ensino Fundamental

Projeto Teláris - Matemática
Autor: Luiz Roberto Dante
Editora: Ática
Edição: 2012

Matemática Teoria e Contexto (TC)
Autores: Marília Centurión & José Jakubovic
Editora: Saraiva
Edição: 2012

Praticando Matemática
Autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos
Editora: Editora do Brasil
Edição: 2012

1^o e 2^o Anos do Ensino Médio
Matemática - Contexto e Aplicações
Autor: Luiz Roberto Dante
Editora: Ática
Edição: 2013

Nas tabelas 12, 13 e 14 podemos verificar as expectativas que foram contempladas em cada livro. Estas só foram assinaladas quando tais expectativas foram exploradas em pelo menos dois momentos, ou seja, o conteúdo foi apresentado pelo livro teoricamente com o uso de exemplos e, em outro momento, o livro apresentou atividades diversas para serem desenvolvidas pelo o aluno, complementando assim o desenvolvimento do conteúdo abordado.

Observando 12 verificamos que, mesmo sendo da mesma editora, dois dos livros apresentados possuem uma distribuição de assuntos diferenciada. ID contempla todas as expectativas desejadas no 6^o ano, referente a Sistemas de Numeração, enquanto o TC apresenta apenas alguns pontos de maneira completa. Porém não se pode deixar de comentar que o TC apresentou todas estas expectativas nos seus exercícios “Pense e responda"e/ou “Pensando em casa"espalhados pelo livro, mas são em quantidades mínimas para que o aluno desenvolva as habilidades requisitadas. É um livro que, ao ser escolhido, exige um trabalho de complementação ou até mesmo ser utilizado para a finalização do conteúdo, tendo o professor que buscar outras fontes para trabalhar as expectativas desejadas. Contudo, ambos ainda se dedicam

- ao desenvolvimento técnico das operações básicas com números racionais, tanto em sua forma fracionária como decimal;
- as definições de Potenciação e Raiz Quadrada, apresentando-as inclusive como operações inversas;
- ao uso das seis operações básicas em expressões numéricas com parentes, colchetes e chaves;
- pouco ou nenhum uso da história como recurso no ensino do SND.

Tabela 12 – Expectativas de Aprendizagem referente ao 6^o ano do Ensino Fundamental

Expectativas de Aprendizagem	**Matemática Ideias e Desafios(ID)**	**Matemática Teoria e Contexto(TC)**
Reconhecer as principais características do sistema decimal: contagem, base e valor posicional	✓	✓
Ler, escrever e ordenar números naturais	✓	✓
Arredondar números grandes para a centena ou o milhar mais próximo	✓	
Compreender a magnitude de grandes números(milhar, bilhão)	✓	
Arredondar números decimais para a centena ou o milhar mais próximo	✓	
Realizar cálculos mentais, utilizando procedimentos próprios, para resolver problemas que envolvam as quatro operações	✓	
Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de adições e subtrações de números decimais	✓	✓

Porém as recomendações presentes nos Parâmetros Curriculares de Pernambuco para o 6^o ano são as de “Resolver uma expressão aritmética envolvendo operações distintas com parentes"e de começar a trabalhar com potenciação e radiciação apenas no 7ž ano do Ensino Fundamental. Além de que operações de multiplicar e dividir com números racionais só deveriam começar a sofrer intervenções concretas a partir do 8^o ano.

Por mais que se justifique que não será cobrada do aluno as referidas expectativas de aprendizagem, é muito complicado esta maneira de apresentação, pois no 7^o ano os livros não reimprimem os conteúdos já trabalhados, eles evoluem, supondo, logicamente, que as aprendizagens do ano anterior tenham sido conquistadas. Este contrassenso no momento da abordagem dos conteúdos entre livros didáticos e PCPE pode ser explicado pelo fato de que os livros baseiam-se na liberdade dada pelo PCN. Este divide os anos finais do Ensino Fundamental em dois ciclos de dois anos não deixando claro as fronteiras do que deve ser abordado entre os anos do mesmo ciclo. Assim, os autores tem a liberdade para distribuir os conteúdos da maneira que lhes é mais interessante ao longo de quatro livros. Já o PCPE distribuiu as expectativas de aprendizagem dos dois ciclos, encontradas no PCN, nos quatro anos do EF, porém a adequação dos livros será ainda demorada por ser um documento muito recente. Contudo, mesmo que os livros baseiem-se na “liberdade dada pelo PCN", notamos, como na citação acima, que existem muitas contradições nesses livros.

Na tabela 13 observamos que em relação a Notação Científica os PCPE indicam seu início desdo o 8^o Ano do EF, porém apenas a Coleção Praticando Matemática procede desse maneira continuando o trabalho durante o 9^o ano, como visto 13. O Projeto Teláris faz o reconhecimento e a resolução de problemas no 7^o ano, não retomando mais, a não ser em alguns exercícios no 9^o ano. A expectativa que pretende relacionar o valor posicional do algarismo na notação científica, é um aspecto geralmente abordado em livros de física, no 1^o ano do EM, e consequentemente não se faz uma comparação com o SNIA. Porém este aspecto não é trabalhado nos três livros vistos. A comparação e ordenação de números racionais, é feito através de exercícios, já que os mesmos foram mais abordados durante o 7^o e 8^o anos pelos livros.

Tabela 13 – Expectativas de aprendizagem referente ao 9^o ano do Ensino Fundamental

Expectativas	Projeto Teláris - Matemática	Matemática Teoria e Contexto	Praticando Matemática
Comparar e ordenar números racionais em diferentes representações(razões, números mistos, decimais e porcentagens).			
Reconhecer a representação de um número em notação científica, compreendendo a magnitude desse tipo de número		✓	✓
Resolver e elaborar problemas envolvendo números em notação científica	✓	✓	✓
Comparar e ordenar números reais	✓	✓	
Realizar operações com números reais	✓	✓	✓
Relacionar o valor posicional, característica do sistema de numeração decimal, com os cálculos envolvendo o sistema métrico e a notação científica			
Resolver e formular problemas que envolvam diferentes operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação)	✓	✓	✓

Como citado anteriormente, o PCPE além de recente apresenta as expectativas mais detalhadamente do que nos PCNEM. Portanto, como podemos verificar em 14 a coleção adotada pelos professores não contém tais aspectos. Porém, no nosso dia-a-dia, dificilmente vemos estas expectativas abordada em algum livro de Ensino Médio, revelando-se até um mistério de como o professor deve trabalhar tal conteúdo.

Em relação ao desenvolvimento histórico geralmente os livros do 6^o ano apresentam alguns SN através de

Tabela 14 – Expectativas de aprendizagem durante os 1^o e 2^o Anos do Ensino Médio

Expectativa	Volume 1	Volume 2
Resolver e elaborar problemas envolvendo números em notação científica	✓	–
Compreender os algoritmos formais das operações aritméticas e realizar cálculos com esses algoritmos		

um quadro contendo os algarismos de cada SN para que se possa fazer uma comparação entre as escrita deles. Fornecem também alguns exemplos de numerais em cada SN para que se reconheça as regras que compõem os mesmos. Alguns autores, ainda, explicam, com riquezas de detalhes, estas regras inclusive mostrando as diferenças existentes entre os SNA e os SNP. Mas de maneira geral podemos afirmar que tudo é feito em poucas páginas e, sem um professor que domine os aspectos históricos e matemáticos deste conteúdo, a aprendizagem torna-se superficial. Comumente este conteúdo não é novamente abordado historicamente em outro momento do Ensino Regular. Apesar de não ser avaliado como uma expectativa de aprendizagem dentro do PEBPE, a importância de fazer um trabalho focado na história não lhe é negada nem pelo PEBPE, e como já vimos, nem pelo PCN, porém percebemos que nenhum dos seis livros consultados nessa pesquisa traz a história como fonte motivadora de situações problemas dentro do próprio assunto. No máximo essa referência é feita como curiosidade ao longo do livro com exceção do ID que faz, dentro do conteúdo de Sistema de Numeração, a menção da existência de outros registros numéricos diferentes do nosso e para fundamentar a afirmação coloca um único exemplo de um numeral egípcio.

Apesar de estarmos utilizando um documento novo como referência, o PCPE, para nossos julgamentos, as recomendações que este faz em relação a maneira que o professor deve abordar os conteúdos, nada mais são que um melhor detalhamento dos já existentes nos PCN. Sob esta perspectiva é frustrante que os livros ainda mantenham uma atitude conservadora em relação à execução de técnicas operatórias utilizando-as cada vez mais precocemente, uns mais que outros. Alguns podem defender esta prematura abordagem justamente por causa da grande quantidade de técnicas, mas ficam os seguintes sentimentos:

- O domínio de técnicas utilizada na resolução dos problemas produz boa compreensão da matemática?
- A vivência precoce dessas técnicas não induz o aluno a associar a matemática apenas a cálculos?
- A não visualização macro do que se pretende fazer com tais técnicas não deixam, qualquer assunto, desinteressante?

Olhando o quadro geral da pesquisa realizada com os professores percebemos que a utilização dos documentos oficiais, que orientam nossa prática pedagógica, ainda não são bem compreendidos e utilizados. Observamos também que apesar da história da matemática ser requisitada pelos PCN o mesmo não acontece em todas as instituições de ensino superior, nos cursos de licenciatura em matemática, nem tão pouco em boa parte dos livros didáticos. Além da pouca contextualização histórica não devemos nos esquecer que tanto nossa formação quanto os livros didáticos são muito atenciosos às práticas de técnicas operatórias. Se pensarmos na combinação das piores situações possíveis retratadas nesta pesquisa dificilmente teríamos alunos com boa aprendizagem no campo numérico. Alguns, ainda, podem alegar que o mau aprendizado destas técnicas operatórias por parte dos alunos que frequentam escolas públicas é uma realidade particular, devido aos problemas inseridos na mesma. Mas como julgar os que estudam na rede privada e possuem as mesmas dificuldades? Ou, ainda, o que dizer dos alunos de rede pública que gostam e se esforçam para aprender a Matemática da escola mas não sabem dividir ou reconhecer se o problema trata-se de divisão ou subtração? Estes alunos indicam que o formato de nossas aulas está comprometido e não que a matemática é pré-destinada aos eleitos, como pensam muitos.

Historicamente notamos que o conhecimentos matemático sempre foi desenvolvido e estudado por poucos e que geralmente pertenciam a classes sociais mais abastadas. Devemos lembrar que a nossa Educação Brasileira, ao ser tomada como instituição nacional, não tem ainda 100 anos de idade e que portanto muito da dificuldade encontrada no ensino desta disciplina às grandes massas populares deve-se, também, ao aspecto cultural. Afinal, apesar dela não ser pré-destinada ela foi, por muito tempo, destinada apenas a alguns (ricos) eleitos. Por não pertencer naturalmente a linguagem da população, de maneira geral, o formalismo próprio da linguagem matemática mostra-se um dos principais entraves para o entendimento da mesma, e ainda hoje, por conta da formação de nossa estrutura social, os nossos lares não oferecem apoio aos seus próprios filhos para que a aprendizagem matemática ocorra tranquilamente.

Assim, o ensino do Sistema de Numeração Decimal deve ser feito com muito primor, pois é ele que nos inicia neste mundo matemático, ainda muito desconhecido, e serve de ponte para outros conhecimentos dentro e fora deste mundo. O bom uso das recomendações dada pelos PCN, PCPE, BCC, entre outros, nos ajudarão nesta tarefa e consequentemente estaremos mais perto de sermos responsáveis pela formação de cidadãos conscientes matematicamente. Obviamente não será possível tal realização sem os investimentos que se fazem necessários para termos educação de qualidade, e é importante frisar que muitos desses investimentos não estão ao alcance do nosso cotidiano de sala de aula, pelo menos, não a curto prazo.

No próximo capítulo são apresentadas alumas sugestões de atividades. Estas foram motivadas pela situação retratada através do resultado dos questionários que foram aplicados aos alunos. Também objetiva fornecer material para reflexões aos professores.

4 Atividades

Em Pernambuco as Orientações Teórico-Metodológicas que são baseadas no BCC - PE propõem um currículo em espiral, ou seja, os conteúdos são revisitados ao longo do ensino regular. A proposta orienta que sempre retomemos um conteúdo dado através de revisões e situações problemas diferenciadas para que o aluno possa percebê-lo por vários pontos de vista. Não é uma tarefa simples, principalmente por sermos uma geração de professores cuja formação, no Ensino Regular, ocorreu de maneira retilínea. Outro fator que pode dificultar a aplicação deste tipo de currículo é a coleção do livro didático adotado pela rede escolar, como já foi comentado em 3.2.1.

A pesquisa realizada nestas escolas nos apontou para possíveis dificuldades por partes dos alunos e, como consequência, precisamos reavaliar todos os integrantes do processo de ensino e aprendizagem. Este pequeno texto tentou trazer algumas reflexões acerca desta situação inclusive sobre o material utilizado pelo professor para desenvolver suas aulas e as atitudes que podemos tomar diante destas situações. Por este motivo segue um projeto que foi realizado em uma turma de nono ano da Escola Santos Cosme e Damião sobre Sistemas de Numeração, desejando-se que o mesmo possa servir de exemplo de como retomar este assunto.

Para que este projeto pudesse ser realizado fez-se necessário a construção de um material de apoio, já que no livro didático utilizado não fazia menção ao SND. A apostila *E se não constássemos de 10 em 10?* disponível no apêndice D foi criada para dar suporte ao aluno no estudo do assunto de Sistema de Numeração Decimal, tanto na questão histórica como nas características matemáticas. Durante os encontros pudemos também contar com a colaboração do Espaço Ciência, que gentilmente cedeu dois de seus experimentos: *A tábua de algarismos cuneiforme* e o *Chegou o computador*. Estes motivaram uma maior participação dos alunos nos encontros possibilitando questionamentos incomuns e momentos de descontração, além da validação do que estava sendo apresentado aos alunos.

4.1 E se não contássemos de 10 em 10?

Tema: Sistema de Numeração Decimal
Público alvo: Turmas de 9^o Ano, podendo ser adaptado ao 8^o ano do EF e ao ensino médio desde que se faça ressalvas nos objetivos e respectivas avaliações.
Duração: aproximadamente 12 aulas (seis encontros de duas aulas cada). Este quantitativo poderia ser bem menor se a turma já viesse desenvolvendo nos anos anteriores alguma atividade referente a uns dos objetivos listados abaixo. Na verdade, estes deveriam ser conquistados paulatinamente ao longo de todo o Ensino Fundamental.
Disciplinas: Matemática e História
Objetivo Geral: Compreender o funcionamento do Sistema de Numeração Decimal
Objetivos Específicos:

- compreender a construção do SND do ponto de vista histórico, vendo-o como uma conquista de cada civilização e não uma invenção imposta por alguém;
- compreender que os sistemas de numeração estão intimamente relacionado com a cultura de cada povo;
- compreender as características do SND através de outros sistemas de numeração;

- utilizar as regras do SND para escrever e ler números grandes;
- compreender as relações de inclusão entre as ordens do SND;
- reconhecer a existência de outras bases numéricas;
- reconhecer a diferença existente entre número, numeral e algarismo;
- escrever números em sua forma decomposta e polinomial;
- reconhecer as regras do SND como as bases de nossos algoritmos(adição, subtração, multiplicação e divisão);
- compreender a importância do Sistema de Numeração Binário nos dias atuais;
- resolver situações problemas propostas dentro destes objetivos.

Desenvolvimento No primeiro encontro discutiremos o questionário aplicado na turma, antes e depois de assistir o filme A história do Número 1 - parte 1 [4]. Serão feitos questionamento acerca do funcionamento de nosso Sistema de Numeração e das formas como realizamos nossos cálculos. No próximos dois encontros serão apresentados aos alunos slides com várias imagens acerca da civilização suméria, egípcia, inca e maia. Imagens que remetam às crenças religiosas, aos sistema de governo, as divisões sociais, aos sistemas numéricos, aos aspectos artístico e as construções/descobertas realizadas que instigaram os alunos a falarem o que já sabem de cada civilização. Depois será feita uma breve revisão sobre como cada civilização escrevia seus números, fazendo com que os alunos expressem com suas palavras as regras que formam cada sistema de numeração. Deve-se também usar linguagem apropriada para que a diferenciação entre número, numeral e algarismo comece a ser percebida pelos alunos. Em cada momento oportuno formalizar os conceitos de sistemas de numeração Aditivo e Posicional. O quarto e quinto encontro serão destinados a uma formalização do conceito de base numérica e o uso da forma polinomial de um número no contexto de estudo do sistema de numeração binário. O quarto encontro começará com a parte 6 do filme A história do Número 1, e a partir dele tentaremos entender como funciona um Sistema de Numeração Binário, realizando várias comparações com o nosso, apresentando a forma polinomial como uma maneira de passar escrita binária para a decimal, mostrando tal forma também no SND. Após estas discussões o conceito de base tornar-se-á mais evidente ao utilizarmos sementes para realizar um processo de contagem na base 2, na base 5 e na base 10, utilizando sempre o QVL. No quinto encontro apresentaremos as vantagens dessa escrita ao realizar soma de termos semelhantes, sempre nos referindo ao Quadro de Valor e Lugar para justificar tais ações. Neste encontro também faremos intervenções no algoritmo da divisão com números decimais, justificando certas atitudes comuns. Nosso último encontro será dedicado a resolver as atividades propostas dentro da apostila.

Recursos

- apresentação em slides;
- filme: A história do número 1, parte 1(0-10min), parte 2(10min-20min) e parte 6(50min-60min);
- apostila própria, que servirá de apoio para o aluno estudar em casa, devendo ser acompanhado seu preenchimento pelo professor.
- sementes;

- tábua de numerais cuneiforme (pequena tábua feita de durepox), para simular a escrita dos babilônicos;

Figura 26 – Tábua de Escrita Cuneiforme

- Chegou o computador: experimento que simula o ligar e desligar das grandes calculadoras eletrônicas, através do ponteiro de uma bússola exibindo um código binário a ser decifrado.

Figura 27 – Chegou o Computador

Avaliação

A avaliação deve ser feita de maneira contínua levando em consideração a participação do aluno em todas as discussões e atividades propostas, tanto em sala de aula como em casa. O último retorno dá-se nas atividades propostas na apostila.D

Descrição das Atividades Realizadas

Os alunos que participaram da atividade, o fizeram de livre escolha sabendo que tais encontros não substituiriam as aulas convencionais, e que tal participação não seria necessariamente convertida em nota, já que a professora da turma foi diferente da que aplicou as atividades. A ausência de nota não motivou uma grande quantidade de alunos a participarem dos encontros, tendo uma variação de 10 a 15 participantes. Os encontros aconteceram no mesmo turno de estudo dos alunos em momentos previamente acordados com a coordenação da escola, quando já estava prevista alguma ausência de professores, devido a capacitações e congressos.

No primeiro encontro discutimos o questionário aplicado na turma, ou seja, resolvemos oralmente o questionário comparando as respostas de cada um e o porquê das mesmas. Logo depois assistimos A história do Número 1 - parte 1, e voltamos a discutir as respostas dadas para as questões 04 e 06. Baseando-se no que os alunos assistiram no filme, faram realizadas algumas perguntas para que percebessem que existem diferenças entre quantidade falada e a quantidade escrita (no caso número e numeral).

No segundo encontro foi apresentado aos alunos slides com várias imagens acerca da civilização suméria e egípcia. Imagens que remetam às crenças religiosas, os sistema de governo, as divisões sociais, o sistema numérico, os aspectos artístico e as construções/descobertas realizadas que instigaram os alunos a falarem o que já sabiam de cada civilização. Esta conversa levava o estudante a perceber como a matemática desenvolvida por determinada civilização era moldada por todos esses elementos. Depois fizemos uma breve revisão sobre como os egípcios escreviam seus números, que geralmente é de conhecimento dos mesmos. A partir disto passamos a compreender também a escrita dos números sumérios com exemplos em slides e escritos no quadro. Sempre motivando o aluno a participar, afinal estes conteúdos históricos já foram vistos por eles em vários momentos do EF. Após escrevermos alguns números tentamos formalizar oralmente as regras de formação do numerais egípcios e sumérios. Neste momento a diferenciação entre número, numeral e algarismo começou a ser feita através da linguagem e através dos exemplos os alunos percebiam que as quantidade podem ser representadas de diferentes formas, no caso: uma suméria, uma egípcia e uma decimal. Após os alunos expressarem, através de suas palavras, que os numerais são formados pela menor soma consecutiva de algarismos definimos formalmente os Sistemas de Numeração Aditivo. Também foram feitos questionamentos sobre a maneira como os usuários de um SNA realizavam suas contas. E como nós realizamos as nossas. Contudo esta última ficou restrita a soma e a subtração já que a maioria tinha dificuldades no algoritmo da multiplicação e todos não sabiam desenvolver o da divisão.

Nosso encontro seguinte começou com uma revisão do encontro anterior e seguiu seu mesmo padrão, porém os Sistemas de Numeração trabalhados foram o Maia e o Inca, os dois posicionais. Os alunos geralmente apresentaram muita dificuldade em compreender o Maia, justamente porque ainda não compreendem o conceito de base numérica. Então, após as discussões históricas, tentamos entender a escrita dos números Incas, que conseguiram realizá-lo rapidamente, e novamente são questionados se estes são Sistemas Aditivos. Quase que imediatamente disseram que funcionava como o nosso. Então fomos fazer uma pequena revisão através de slides como o nosso funcionava, no caso as ordens, as classes, a escrita, a leitura, a base 10. Após alguns exemplos fomos entender como o SNM funcionava, porém quando se reconhecia que cada ordem representava uma quantidade de potências de 20, muitos alunos se perdiam no entendimento. O resultado acabou mecanizado, contudo os alunos gostaram da experiência de se defrontar com algo diferente. Durante a explicação do Sistema Maia fizemos novamente várias comparações com o SND.

Dos primeiros três encontros até os demais, era esperado um pequeno intervalo de tempo para que os alunos estudassem a apostila. Porém devido a diversos acontecimentos na escola de diversas naturezas (obras estruturais, culminâncias de projetos, irregularidade na distribuição de água, provas, excursões, paralisações, feriados) o segundo momento demorou um pouco mais a acontecer e não pode ser efetuado exatamente como o planejado. Nossos três encontros ficaram reduzidos a dois, respectivamente ao 4^o e 6^o encontros.

No quarto encontro assistimos a sexta parte do filme, A História do Número 1, que retrata a criação do computador. Discutimos sobre o que possibilitou a criação dos computadores e a importância da tecnologia atual. Em seguida, tomamos o numeral exposto $(1001)_2$ e novamente foi questionado o significado do posicionamento de cada algarismo. Efetuamos a contagem com um punhado de sementes na base 2 para expressarmos seu respectivo número binário. Infelizmente o fizemos apenas uma vez de maneira coletiva, devido ao tempo. Mas e o processo inverso? Foi a eles indagado. Com o auxílio do QVL escrevemos o numeral $(1001)_2$ e o resultado da contagem anterior $(10011)_2$, para percebermos neles as ordens e os valores dessas ordens. Como funcionava o SNBi? Quais relações podem ser feitas? estas últimas perguntas foram respondidas pela professora, pois os alunos estavam muito dispersos devido ao intenso barulho das reformas. Conseguiram mecanicamente fazer algumas conversões (do binário para o decimal), apresentando muita dificuldade em potenciação.

No quinto (que foi compactado com o sexto encontro) os alunos reconheceram a escrita cuneiforme estilo babilônico através de um modelo, revendo as formas dos algarismos, e foram também estimulados a encontrar, de maneira coletiva, o código presente no experimento: Chegou o computador. Através de uma competição, foram incentivados a decifrar este código binário para a escrita decimal. O resultado competitivo foi muito melhor que do encontro anterior. Depois nos concentramos em realizar as atividades das apostilas, mas não todas, tanto devido ao tempo do presente encontro, como dos conteúdos que não foram todos abordados. Foram realizadas apenas as questões 2, 3, 4, 6 e 10. Eles a realizaram em grupos, costume muito presente nesta escola, e quando solicitada a professora os esclarecia.

Avaliação

Apesar de todos os contratempos a grande participação dos alunos em tentar responder as perguntas feitas pela professora durante a aula e fazer parte daquele contexto mostra como a estrutura da aula foi motivadora. Contudo, não foi o suficiente para que a maioria dos alunos retomassem o estudo posteriormente aos nossos encontros. Comparando o resultado obtido da última atividade da apostila com o primeiro questionário respondido, realizado durante a pesquisa, percebemos que houve um progresso em todos os estudantes. Um bom grupo respondeu satisfatoriamente todas as questões propostas, ao contrário do que aconteceu no 1^o questionário. Mesmo aqueles onde o crescimento foi singelo, devido as grandes dificuldades matemáticas, percebemos no mínimo a satisfação de estarem conseguindo responder as questões que lhes foram propostas, contrariando os muitos **"não sei, não me lembro"** encontrados nas respostas do primeiro questionário. Muito provavelmente, se aplicadas em condições menos adversas o resultado teria sido muito melhor.

4.2 Durante o Ensino Regular

Pelo que acompanhamos ao longo desse texto podemos adotar certos comportamentos úteis que podem melhorar nossa prática docente. Nas próximas linhas seguem algumas sugestões que são apenas os frutos das reflexões e experiências que este trabalho possibilitou perceber e que com certeza estão presentes no PCN e em tantos trabalhos produzidos academicamente.

4.2.1 Ensino Fundamental

Estudando história, numa instituição escolar, percebemos seu caráter cíclico, pois a maioria dos assuntos estudados no Ensino Fundamental são novamente revisitados no Ensino Médio. Não espera-se que o aluno **compreenda** todo o conteúdo no primeiro momento que lhe é apresentado, logo esta compreensão vem com o tempo, por isso este comportamento cíclico. Da mesma maneira não podemos falar em um único momento, que geralmente é feito no 6^o ano do EF, os aspectos históricos que nos levaram ao desenvolvimento do SND e esperar que os alunos o compreendam perfeitamente. Durante o 6^o ano eles já começam a ter contato com algumas civilização antigas e seria muito oportuno este conteúdo ser reforçado matematicamente, até porque, nem sempre os livros de história trazem estes aspectos, o que artificializa mais ainda o uso da matemática. Mas o desenvolvimento dos SN e dos conjuntos numéricos devem ser abordados historicamente durante todo o ensino regular. Podemos, por exemplo contextualizar o aluno ao momento histórico em que passamos a usar o número também como instrumento de medida através de filmes ou apresentações teatrais. Esta experiência trará a compreensão não só de outra função do número natural, mas como todo esse processo seguiu um curso instintivo, próprio da inteligência do homem. Esta percepção é tão importante quanto entender uma outra função dos números e deveriam ser melhores trabalhadas em mais situações problemas. Hoje destinamos muito tempo na prática exaustiva de técnicas de divisão e multiplicação de números decimais e frações durante o 6^o ano, e das técnicas de potenciação e raiz quadrada, algo que não é recomendado pelos PCN neste momento. A orientação é que neste período e, durante todo o Ensino Fundamental, as divisões com resultado decimal devem ser estimuladas em contextos monetários através de aproximações. Abaixo segue sugestões de como explorar as características do Sistemas de Numeração ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental.

- 6^o Ano: trabalhar o caráter posicional do SND comparando-o com antigos sistemas de numeração aditivos presente em civilizações que são estudadas pela disciplina de história durante esse mesmo ano; verificar através do QVL as relações de inclusão dentro das ordens e classes do SND; enquadrar os números decimais como uma ampliação do SND através do QVL; resolver problemas do campos aditivo e multiplicativo dando ênfase aos vários contextos existentes, ao cálculo mental ao desenvolvimento de estratégias de resolução.

- 7^o ano: reconhecer o conceito de base, estudando os Sistemas de Numeração dos outros povos, de preferência os que utilizam um SNP, que serão também abordados pela a disciplina de história; dispor do conhecimento do item anterior para compreender a base dez do SND; recorrer ao QVL para explorar a potenciação e suas propriedades, fazendo uso, consequentemente, da forma polinomial de um número.

- 8^o ano: explorar as operações aritméticas realizadas com números em sua forma polinomial para introduzir as operações algébricas realizadas com os polinômios, sejam no campo aditivo ou multiplicativo; através de situações problemas adequadas, podendo ser inclusive de origem histórica, devemos neste momento ampliar as operações aos números decimais e fracionários usando sempre no início o QVL, para que o aluno **perceba** o porquê das técnicas.

- 9^o Ano: Permitir aos alunos um panorama geral de como os números foram construídos, já que foi visto de maneira parcelada ao longo dos anos. Esta atividade pode ser feita através de filmes, contação de histórias, pesquisas, seminários. Contanto que o ciclo tenha um fim, e que tais atividades possibilitem uma formalização do funcionamento do nosso Sistema de Numeração Indo-Arábico; explorar situações problemas que permitam ao aluno aprimorar as técnicas aprendidas no 8^o ano.

4.2.2 Ensino Médio

Se as expectativas de aprendizagem presentes no PCPE forem alcançadas no EF, nos deteremos no ensino médio apenas a entender formalmente o funcionamento dos algoritmos das operações. Caso o trabalho no EF não tenha tido um caráter histórico recomenda-se essa retomada, já que a formalidade dos algoritmos reside no bom entendimento do SNIA, e, como vimos, uma abordagem histórica nos traz vantagens únicas. Muitos dos cálculos efetuados por nossos alunos durante o EF devem ser feitos através de aproximações, tentativas e erros, e dos algoritmos. No Ensino Médio devemos formalizar a superioridade deste método, sem abandonar os outros que na verdade auxiliam a execução dos métodos. Alguns vícios de linguagem, como o velho costume de dizer: “acrescentamos um zero e colocamos a vírgula", se fizerem parte do cotidiano dos alunos, e de nós professores, devem ser, a “partir de agora", justificados pelos professores formalmente.

Conclusão

Como foi citado, repetidamente ao longo do trabalho, a dificuldade operacional dos aluno é um incômodo no transcorrer das aulas, pois na maioria das vezes não percebemos maneiras rápidas de resolver tal situação. Ter estes meios era o motivo inicial deste trabalho, cujo olhar ingênuo logo foi desmanchado ao perceber as possíveis razões atreladas a esta realidade. Por não estar ao nosso alcance tratar das questões subjetivas de cada aluno, e até mesmo das questões políticas que regem nosso sistema educacional, restou-nos a estudar alguns dos pré-requisitos necessários para que a aprendizagem de tais técnicas operacionais possam acontecer. Como um dos pré-requisitos é o bom entendimento do Sistema de Numeração Decimal aplicamos um questionário a 19 turmas, do 6^o e 9^o Ano do EF e do 3^o Ano do EM, totalizando 532 estudantes. Este além de nos ter permitido ver a dimensão deste problema também objetivou quantificar o que de fato é sentido diariamente por nós professores. A realidade que tanto reclamamos está descrita neste pequeno retrato, tirado dos questionário, e nos mostrou uma situação crítica no aprendizado do funcionamento do SND, na compreensão da construção da matemática, na execução correta dos algoritmos. Conectada a esta dificuldade no aprendizado por parte dos alunos está a de transmitir estes conhecimentos por parte dos professores, e com razão, já que alguns não viram apropriadamente este conteúdo em sua formação universitária, muitos não parecem utilizar adequadamente os documentos oficiais e contraditoriamente nem todos os livros didáticos expõem os assuntos coerentemente com os PCN e PCPE.

Pode-se afirmar que um bom panorama das causas geradoras do nosso problema inicial pôde ser construído ao longo desse trabalho, mas o objetivo inicial era como reverter esta situação. Portanto foram apresentadas algumas experiências próprias e sugestões de trabalho para que tenhamos alguns exemplos de como abordar este conteúdo. Esta amostra não resolve o problema mas cumpre nosso objetivo maior de fornecer material para nossa prática e reflexão pedagógica. Sabemos que o ideal é que a relação existente entre Professores, Parâmetros Curriculares e Livros Didáticos seja mais íntima, que de fato o professor possa conhecer o PCN e visualizar maneiras de utilizá-lo e que o livro possa complementar tal visualização. Que esse vínculo possa ser cotidiano, vivenciado em cada acerto ou erro, adaptado e re-adaptado, pensado e avaliado, sem jamais esquecermo-nos de que somos humanos, de que nosso material de trabalho são seres humanos e que nosso profissionalismo deve incluir estes aspectos. Parece ser uma relação cansativa, mas se não a tratarmos com tanto primor dificilmente obteremos cidadãos sensíveis às mudanças tão necessárias para vivermos em um mundo melhor.

O momento que este tripé conseguir decidir o curso desse “rio de conhecimentos"uma grande parte de nossos problemas diminuirão, enquanto isso, esperamos que a Pesquisa realizada juntamente com o projeto “E se não contássemos de 10 em 10?"possa servir de mote para discussões e reavaliações para aqueles que leram estas linhas.

A Questionários Alunos

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário Sobre O Desenvolvimento dos Sistemas de Numeração no Ensino Regular
Versão Aluno (6ºAno)

Nome: ____Turma:_________________

1. Escreva por extenso o número 1 045 873 002.
____
____

2. Escreva o numeral que representa a quantidade **quatrocentos e cinco trilhões duzentos milhões e cinco**.
____

3. Explique com suas palavras o que é o Sistema de Numeração Decimal.
____
____
____

4. Ao longo de nosso desenvolvimento, desde a pré-história até os dias atuais, nós sempre utilizamos os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para escrever números?
( ) Sim, pois____
____
( ) Não, pois____
____

5. O cálculo da soma 346,82 + 266 encontra-se abaixo. Ele está correto? Justifique sua resposta.

( ) SIM, pois ___________________	$\begin{array}{r} 346{,}82 \\ \underline{+\,266} \\ 349{,}48 \end{array}$	( ) NÃO, pois __________________

6. Quando o homem começou a contar lá na pré-história, você acredita que ele começou pelo 0 (zero) ou pelo 1(um)? Por quê?
____
____

7. Hoje em dia é muito fácil ter acesso a uma calculadora, seja no celular, ou no relógio.Você acha importante ter que resolver questões de matemática fazendo contas no papel ou de cabeça?
____
____

8. O que você sabe sobre os números binários?
____
____

9. Quantas dezenas existem em 10.000? E quantas centenas existem em 10 milhões?

10. Arme e efetue as divisões abaixo (sem calculadora):
a) 4321 : 9 b) 4321 : 23

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário Sobre O Desenvolvimento dos Sistemas de Numeração no Ensino Regular
Versão Aluno (9ºAno)

Nome: ____

1. Escreva por extenso o número 1 045 873 002.

   ____

2. Escreva o numeral que representa a quantidade **quatrocentos e cinco trilhões duzentos milhões e cinco**.

   ____

3. Explique com suas palavras o que é o Sistema de Numeração Decimal.

   ____
   ____
   ____

4. Ao longo de nosso desenvolvimento, desde a pré-história até os dias atuais, nós sempre utilizamos os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para escrever números?
   ( ) Sim, pois____
   ____
   ( ) Não, pois____
   ____

5. O cálculo da soma 346,82 + 266 encontra-se abaixo. Ele está correto? Justifique sua resposta.

( ) SIM, pois ______________	346,82 + 266 349,48	( ) NÃO, pois ______________

6. Quando o homem começou a contar lá na pré-história, você acredita que ele começou pelo 0 (zero) ou pelo 1(um)? Por quê?

   ____
   ____

7. Hoje em dia é muito fácil ter acesso a uma calculadora, seja no celular, ou no relógio.Você acha importante ter que resolver questões de matemática fazendo contas no papel ou de cabeça?

   ____
   ____

8. O que você sabe sobre os números binários?

   ____
   ____

9. Resolva es seguintes expressões (não precisa resolver as potências)
   a) $2\cdot 10^5+4\cdot 10^3-3\cdot 10^5+3\cdot 10^2-12\cdot 10^5-1\cdot 10^3$

   b) $3x^3+72x^2-23x^5+45x^3-25x^2-12x^5$

   c) $6\sqrt[3]{10}+5\sqrt{10}-20\sqrt[4]{10}+15\sqrt[4]{10}-15\sqrt[3]{10}+10\sqrt{10}$

10. Arme e efetue as divisões abaixo (sem calculadora):

    a) 4321 : 9

    b) 4321 : 23

UFRPE
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário sobre O Desenvolvimento dos Sistemas de Numeração no Ensino Regular
Versão Aluno (3º Ano)

Nome: ____ Ano/Turma: ______________

1. Escreva por extenso o número 1 045 873 002.
____
____

2. Escreva o numeral que representa a quantidade **quatrocentos e cinco trilhões duzentos milhões e cinco**.
____

3. Explique com suas palavras o que é o Sistema de Numeração Decimal.
____
____
____
____

4. Ao longo de nosso desenvolvimento, desde a pré-história até os dias atuais, nós sempre utilizamos os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para escrever números?
( ) Sim, pois____
____
( ) Não, pois____
____

5. O cálculo da soma 346,82 + 266 encontra-se abaixo. Ele está correto? Justifique sua resposta.

( ) SIM, pois ___________________
____
____
____
____

346,82
\+ 266
349,48

( ) NÃO, pois __________________
____
____
____
____

6. Quando o homem começou a contar lá na pré-história, você acredita que ele começou pelo 0 (zero) ou pelo 1(um)? Por quê?
____
____

7. Hoje em dia é muito fácil ter acesso a uma calculadora, seja no celular, ou no relógio.Você acha importante ter que resolver questões de matemática fazendo contas no papel ou de cabeça?
____
____

8. O que você sabe sobre os números binários?
____
____

9. Quantas dezenas existem em 10.000? E quantas centenas existem em 10 milhões?

10. Resolva as seguintes expressões (não precisa resolver as potências)
    a) $2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^3$

    b) $3x^3 + 72x^2 - 23x^5 + 45x^3 - 25x^2 - 12x^5$

    c) $6\sqrt[3]{10} + 5\sqrt{10} - 20\sqrt[4]{10} + 15\sqrt[4]{10} - 15\sqrt[3]{10} + 10\sqrt{10}$

11. Arme e efetue as divisões abaixo (sem calculadora):
    a) 4321 : 9
    b) 4321 : 23

12. Escreva os números abaixo em notação científica:
    a) 0,000000034
    b) 123 457 839 203 700

13. Criar símbolos para expressar quantidades foi necessário ao homem antes mesmo de se criar um alfabeto e este foi o primeiro passo para se construir o que chamamos hoje de Matemática. E como vocês mesmo dizem: não tem para onde correr... A matemática está em tudo!
    Um dos conceitos mais importantes desta matemática mais moderna e que demorou muito para ser formulado é o conceito de Função. No Ensino Médio nos é apresentado a seguinte definição para função: Dado dois conjntos de números reais A e B, definimos função de A em B, como toda relação onde todos os elementos do conjunto A estão relacionados com um único elemento do conjunto B. Por essa perspectiva podemos dizer que nosso Sistema de Numeração Decimal é uma função. Ou seja, a nossa maneira de representar quantidades é uma relação entre dois conjuntos onde o conjunto A é formado por qualquer quantidade imaginada e o outro conjutno B é formado pela grafia, no caso, pelos numerais, que representam estes números. Note que cada quantidade imaginada pode ser representado pelo nosso Sistema de Numeração Decimal.
    Como concluinte do ensino regular, gostaria que expressasse abaixo o que você sabe sobre os números, e o que não sabe mas ouviu falar e gostaria de se aprofundar, e qual seu sentimento em relação a eles.

B Questionário Professor

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário Sobre O Desenvolvimento dos Sistemas de Numeração no Ensino Regular
Versão Professor

Nome:____
Escola que leciona:____
Turmas que leciona:____

Caro professor, a pesquisa manterá sigilo sobre sua identidade e a análise do resultado será feita de maneira geral. Por favor, sempre que for solicitado utilize a legenda abaixo:

1 : Não desenvolvido
2: Pouco desenvolvido
3: Desenvolvimento regular
4: Bom desenvolvimento
5: Ótimo desenvolvimento

1. Professor, pontue de 1 a 5 com relação a sua expectativa de aprendizagem dos alunos nos anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º ano) nos conteúdos listados abaixo:

	Números Naturais	**Números Decimais**
Leitura e Escrita	Pequenos ___ Grandes____	Pequenos ___ Grandes ___
Soma	_______	_______
Diferença	_______	_______
Produto	_______	_______
Quociente	_______	_______

Como professores, sabemos que o aluno passa os primeiros cinco anos do Ensino Fundamental aprendendo o Sistema de Numeração Decimal. Este assunto também é tratado em livros do 6º ano do Ensino Fundamental. Marque um x na opção que mais condiz com suas atitudes em sala de aula.

2. Qual a sua expectativa ao retomar este assunto no 6º ano?
   ( ) Não retomo
   ( ) Revisar
   ( ) Aprofundar

3. Ao retomar o conteúdo qual é a principal fonte geradora de situações problemas que você utiliza?
   ( ) vivências do cotidiano do aluno
   ( ) vivências sociais geralmente registradas em revistas, jornais e livros
   ( ) vivências através da história do ser humano

4. Qual(ais) recurso(s) você utiliza para retomar este conteúdo?
   ( ) livro didático

( ) exercícios de sondagem
( ) vídeo
( ) jogos
( ) revistas, jornais
( ) outros, ____

5. De que fontes você utiliza para estudar a respeito de Sistemas de Numeração?
( ) livro didático
( ) revistas
( ) artigos
( ) filmes
( ) livros específicos
( ) outros, ____

6. Durante seu período na Universidade assinale os aspectos que foram vistos, seja por aulas ou pesquisas, em relação a Sistemas de Numeração.

( ) Os Sistemas de Numeração que já existiram sob o ponto de vista histórico
( ) Os Sistemas de Numeração que já existiram sob o ponto de vista matemático
( ) As regras que compõe um sistema de numeração posicional numa base qualquer
( ) O Funcionamento do Sistema de Numeração Decimal
( ) Analise comparativa entre os diversos Sistemas de numeração que já existiram entre si
( ) Não vi este conteúdo na faculdade.

De 1 a 5 qual legenda melhor representa o apredizado adquirido na faculdade sobre Sistemas de Numeração: _______

7. Você retoma o assunto de Sistemas de Numeração em outro Ano/ Série do Ensino Regular?
( ) sim, ao estudar ____
____
( ) não

8. Pontue os conceitos abaixos, usando a legenda de 1 a 5, de acordo com a necessidade de ensiná-los durante os anos finais do Ensino Fundamental para que haja um bom desenvolvimento matemático do aluno.
( )base numérica
( ) número/ numeral/ algarismo
( ) regras do Sistema de Numeração Decimal
( ) conhecimento acerca de outras bases numéricas
( ) manipulação de números em outras bases numéricas
( )escrita do número na forma decomposta
( ) escrita do número na forma polinomial
( ) escrita do número na forma científica
( ) utilização da forma decomposta para resolver problemas envolvendo as quatro operações
( ) compreensão do Sistema de Numeração como uma função
( ) conhecimento histórico sobre o desenvolvimento dos números

9. Professor, gostaria de pedir, que, se possível, fizesse alguns apontamentos de como você dá (ou daria) aula de Sistemas de Numeração com o objetivo de que seus alunos entendam que temos o dez como base de nosso Sistema de Numeração e o porquê deste sistema ser dito posicional.

C Resultado do Questionário por Turma

Tabela 15 – 6^{o}A

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="6">NR</td><td colspan="6">ND</td><td colspan="6">PD</td><td colspan="6">BD</td><td colspan="6">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="6">5</td><td colspan="6">7</td><td colspan="6">10</td><td colspan="6">6</td><td colspan="6">2</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">7</td><td colspan="6">17</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="6">25</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td colspan="3">15</td><td colspan="3">18</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="3">15</td><td colspan="3">18</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">NR</td><td colspan="6">C4</td><td colspan="6">C3</td><td colspan="6">C2</td><td colspan="6">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">15</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">5</td><td colspan="6">8</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">15</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">9</td><td colspan="6">5</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">15</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">8</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">NR</td><td colspan="12">SIM</td><td colspan="12">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="6">3</td><td colspan="12">25</td><td colspan="12">2</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="6">1</td><td colspan="12">1</td><td colspan="12">28</td></tr>
</table>

Tabela 16 – 6^{o}B

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="6">NR</td><td colspan="6">ND</td><td colspan="6">PD</td><td colspan="6">BD</td><td colspan="6">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">12</td><td colspan="6">8</td><td colspan="6">12</td><td colspan="6">1</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">6</td><td colspan="6">20</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="6">26</td><td colspan="6">6</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td colspan="3">19</td><td colspan="3">23</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="3">13</td><td colspan="3">18</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td><td colspan="3">-</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">NR</td><td colspan="6">C4</td><td colspan="6">C3</td><td colspan="6">C2</td><td colspan="6">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">19</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">7</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">26</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">2</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">22</td><td colspan="6">0</td><td colspan="6">5</td><td colspan="6">3</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">NR</td><td colspan="12">SIM</td><td colspan="12">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="6">2</td><td colspan="12">29</td><td colspan="12">2</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="6">0</td><td colspan="12">0</td><td colspan="12">33</td></tr>
</table>

Tabela 17 – 6ºC

QUESTÕES	NR	ND	PD	BD	D
01	2	4	5	0	0
02	1	2	7	1	0
03	7	1	3	0	0
09	6 7	4 4	0 0	0 0	1 0
10	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
11	6 6	5 5	0 0	0 0	0 0
12	- -	- -	- -	- -	- -
	NR	C4	C3	C2	C1
04	0	10	0	1	0
05	1	9	0	0	1
06	1	8	0	0	1
	NR	SIM		NÃO	
07	0	11		0	
08	0	0		11	

Tabela 18 – 6ºD

QUESTÕES	NR	ND	PD	BD	D
01	7	4	5	10	2
02	7	5	11	5	0
03	21	4	2	1	0
09	14 20	10 7	0 0	0 0	4 1
10	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
11	20 24	5 3	2 0	0 0	1 1
12	- -	- -	- -	- -	- -
	NR	C4	C3	C2	C1
04	0	14	0	6	8
05	3	17	2	6	0
06	6	12	3	3	4
	NR	SIM		NÃO	
07	4	23		1	
08	0	0		28	

Tabela 19 – 6ºE

QUESTÕES	NR	ND	PD	BD	D
01	9	1	8	5	0
02	2	2	16	3	0
03	17	3	2	1	0
09	10 10	11 12	0 0	0 1	2 0
10	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
11	7 10	13 12	0 1	2 0	1 0
12	- -	- -	- -	- -	- -
	NR	C4	C3	C2	C1
04	2	14	1	1	5
05	1	17	0	3	2
06	1	10	1	4	7
	NR	SIM		NÃO	
07	1	22		0	
08	0	0		23	

Tabela 20 – 9^aA

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">13</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>10</td><td>18</td><td>21</td><td>23</td><td>8</td><td>5</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>18</td><td colspan="2">20</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td>2</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>12</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">14</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">17</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">9</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">2</td><td colspan="6">22</td><td colspan="6">2</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">25</td></tr>
</table>

Tabela 21 – 9^oB

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>10</td><td>15</td><td>19</td><td>18</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>18</td><td colspan="2">18</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>12</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">14</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">2</td><td colspan="6">18</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">1</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">18</td></tr>
</table>

Tabela 22 – 9^oC

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">26</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>10</td><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>22</td><td colspan="2">25</td><td>3</td><td colspan="2">4</td><td>4</td><td colspan="2">1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td><td>1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>12</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">20</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">17</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">14</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">14</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">8</td><td colspan="6">24</td><td colspan="6">1</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">6</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">23</td></tr>
</table>

Tabela 23 – 9^{o}D

QUESTÕES	NR			ND			PD			BD			D		
01	5			4			12			6			5		
02	6			4			18			4			0		
03	20			6			5			1			0		
09	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
10	23	24	28	9	6	4	0	0	0	0	0	0	0	2	0
11	16	21		8	6		3	0		3	1		2	4	
12	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
	NR			C4			C3			C2			C1		
04	2			8			0			5			17		
05	3			16			0			8			5		
06	6			10			1			8			7		
	NR			SIM						NÃO					
07	1			27						4					
08	1									31					

Tabela 24 – 9^{o}E

QUESTÕES	NR			ND			PD			BD			D		
01	9			4			10			6			4		
02	5			6			16			5			1		
03	23			7			3			0			0		
09	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
10	27	31	33	5	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	21	26		4	2		3	3		4	0		1	2	
12	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
	NR			C4			C3			C2			C1		
04	0			12			0			12			9		
05	1			28			0			1			3		
06	4			11			3			7			8		
	NR			SIM						NÃO					
07	3			29						1					
08	0			0						33					

Tabela 25 – 9^{o}F

QUESTÕES	NR			ND			PD			BD			D		
01	17			6			4			5			0		
02	17			3			7			5			0		
03	24			4			3			1			0		
09	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
10	28	32	32	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	18	22		5	6		4	2		4	1		1	1	
12	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
	NR			C4			C3			C2			C1		
04	1			9			0			8			14		
05	1			25			0			5			1		
06	3			11			0			9			9		
	NR			SIM						NÃO					
07	3			27						2					
08	0			0						32					

Tabela 26 – 9ºG

QUESTÕES	NR			ND			PD			BD			D		
01	5			7			10			6			0		
02	4			4			15			5			0		
03	20			6			2			0			0		
09	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
10	26	27	28	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	17	20		3	3		2	3		5	1		1	1	
12	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
	NR			C4			C3			C2			C1		
04	2			9			0			12			5		
05	2			14			1			9			2		
06	3			11			0			5			9		
	NR			SIM						NÃO					
07	3			25						0					
08	0			0						28					

Tabela 27 – 9ºH

QUESTÕES	NR			ND			PD			BD			D		
01	6			3			3			12			6		
02	13			0			8			9			0		
03	25			2			2			1			0		
09	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
10	28	28	29	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	17	25		6	3		4	0		2	1		1	1	
12	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
	NR			C4			C3			C2			C1		
04	5			6			1			10			8		
05	7			16			0			3			4		
06	7			10			0			3			10		
	NR			SIM						NÃO					
07	1			27						2					
08	0			0						30					

Tabela 28 – 9ºI

QUESTÕES	NR			ND			PD			BD			D		
01	5			1			6			7			2		
02	5			4			5			6			1		
03	17			1			2			1			0		
09	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
10	16	17	20	5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
11	15	16		1	2		1	1		3	0		1	2	
12	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	
	NR			C4			C3			C2			C1		
04	5			6			0			4			6		
05	3			11			0			4			3		
06	6			7			1			3			4		
	NR			SIM						NÃO					
07	7			13						1					
08	5			0						16					

Tabela 29 – 3^oA

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">15</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>16</td><td colspan="2">17</td><td>3</td><td colspan="2">7</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>3</td><td colspan="2">0</td><td>2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>22</td><td>24</td><td>26</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>23</td><td colspan="2">23</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>23</td><td colspan="2">23</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">5</td><td colspan="6">18</td><td colspan="6">1</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">4</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">19</td></tr>
</table>

Tabela 30 – 3^oB

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">15</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">22</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>12</td><td colspan="2">13</td><td>17</td><td colspan="2">21</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">3</td><td>8</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>24</td><td>26</td><td>32</td><td>15</td><td>11</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>16</td><td colspan="2">23</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>7</td><td colspan="2">6</td><td>14</td><td colspan="2">4</td><td>1</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>12</td><td>34</td><td colspan="2">35</td><td>2</td><td colspan="2">2</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">18</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">13</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">15</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">15</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">38</td><td colspan="6">1</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">7</td><td colspan="6">32</td></tr>
</table>

Tabela 31 – 3^oC

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">14</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">19</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>14</td><td colspan="2">15</td><td>8</td><td colspan="2">9</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>5</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>23</td><td>25</td><td>27</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>18</td><td colspan="2">21</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>2</td><td colspan="2">1</td><td>4</td><td colspan="2">1</td><td>2</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>12</td><td>23</td><td colspan="2">24</td><td>3</td><td colspan="2">2</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">14</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">17</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">2</td><td colspan="6">25</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">5</td><td colspan="6">22</td></tr>
</table>

Tabela 32 – 3ºD

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">17</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>17</td><td colspan="2">18</td><td>2</td><td colspan="2">4</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">4</td><td>11</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>27</td><td colspan="2">27</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>26</td><td colspan="2">29</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>3</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">15</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">19</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">11</td><td colspan="6">19</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">10</td><td colspan="6">9</td><td colspan="6">11</td></tr>
</table>

Tabela 33 – 3ºE

<table>
<tr><td>QUESTÕES</td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">ND</td><td colspan="3">PD</td><td colspan="3">BD</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">14</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td>03</td><td colspan="3">24</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>09</td><td>18</td><td colspan="2">19</td><td>7</td><td colspan="2">10</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>7</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>24</td><td>25</td><td>27</td><td>6</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>16</td><td colspan="2">22</td><td>6</td><td colspan="2">5</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td>3</td><td colspan="2">0</td><td>4</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>12</td><td>26</td><td colspan="2">29</td><td>3</td><td colspan="2">2</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>2</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="3">C4</td><td colspan="3">C3</td><td colspan="3">C2</td><td colspan="3">C1</td></tr>
<tr><td>04</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">14</td></tr>
<tr><td>05</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">8</td><td colspan="3">11</td></tr>
<tr><td>06</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">10</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">16</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">NR</td><td colspan="6">SIM</td><td colspan="6">NÃO</td></tr>
<tr><td>07</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">32</td><td colspan="6">0</td></tr>
<tr><td>08</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">29</td></tr>
</table>

D Apostila

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

E se não contássemos de 10 em 10?

Escola Santos Cosme e Damião
Professora Ellen Souza
Aluno(a):____
Ano/Turma: ____________

Curso de Revisão/Aprofundamento sobre Sistemas de Numeração

Introdução

Você já parou pra pensar por que contamos de 10 em 10? Por que nossos números são representados pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Será que foi sempre assim?
Nestas poucas páginas vamos fazer uma pequena viagem no tempo para ver como os homens antigamente contavam e escreviam seus números, para podermos entender o motivo de contarmos de 10 em 10 e usarmos estes símbolos. Vamos também entender melhor como é esse nosso contar de 10 em 10, afinal será que pode ser feito de todo jeito? Será que a leitura, a escrita, as contas, são regidas por alguma regra?
Convido você a refrescar sua memória sobre alguns conteúdos e a descobrir outros.

Vamos lá? Não pode ter preguiça, pra aprender temos que estudar!

Algumas Civilizações Antigas

Primeiro vamos entender como viviam alguns desses povos antigos para compreender o porquê de seus números.

SUMÉRIOS

Por volta de 4000 anos a.E.C. os sumérios se estabeleceram ao sul da Mesopotâmia, próximo ao golfo Pérsico, entre o rio Tigre e Eufrates, provavelmente por conta da abundancia de água e solo fértil, além da segurança proporcionada naturalmente por conta das formações montanhosas que cercam a região juntamente com o deserto.
De maneira descentralizada, o que mais tarde gerou sua ruína, os Sumérios se organizaram em várias comunidades que, pouco a pouco, foram-se transformando em cidades-estados que eram governadas por um sacerdote, e um por um civil.
A localização permitiu a construção de canais, diques e reservatórios, o desenvolvimento da agricultura com técnicas de irrigação e drenagem de solo. São os inventores da roda utilizando-a em instrumentos de tração animal, tanto para seus feitos cotidianos, como em seus carros de combate. Construíram templos, de elaborada arquitetura chamados de zigurate, construídos na forma de pirâmides terraplanadas onde cada andar tem área menor do que seu andar antecessor, cujas formas podiam ser a de quadrado, retângulo ou ovoides. Construídos de maneira que o templo estivesse no último andar de acesso restrito aos sacerdotes, eram considerados a morada dos deuses e muitos o estimam como um eixo de conexão entre céu, terra e submundo. Também serviam como morada dos governadores civis, depósito de grãos e cereais, observatório do

planetas e estrelas e do nível dos rios. Sua economia, se baseou em um sistema de tributação das aldeias, segundo seu excedente agrícola. Este imposto foi criado para ajudar as classes dominantes das cidades em seu programa de obras públicas, particularmente os dedicados à irrigação.

EGÍPCIOS

A civilização egípcia antiga desenvolveu-se no nordeste africano (margens do rio Nilo) entre 3.200 a.C. (unificação do norte e sul) a 32 a.C. (domínio romano). Como a região é formada por um deserto (Saara), o rio Nilo ganhou uma extrema importância para os egípcios. Sua água era usada para beber, e em seus leitos se desenvolvia a pesca e a navegação. Outro importante acontecimento era a cheia do rio Nilo, que durante 3 a 4 meses fertilizava uma grande faixa de terra árida o que permitiu o desenvolvimento da agricultura. Esta era a principal atividade economica dos egípcios, além do artesanato e do comércio. Tiveram um grande desenvolvimento Matemático que pode ser visto em suas construções civis, como as pirâmides, esculturas, diques, sistemas de irrigação e templos. O processo de mumificação também nos mostra o grande desenvolvimento desta civilização na área da medicina. O faraó era a autoridade máxima, chegando a ser considerado um deus na Terra. Temos os sacerdotes, militares e escribas (responsáveis pela escrita) como os de melhor prestígio depois da família do faraó. Todos que pertenciam ao topo da sociedade eram sustentados pelo trabalho e impostos pagos por camponeses, artesãos e pequenos comerciantes. Os escravos, também compunham a sociedade egípcia e, geralmente, eram pessoas capturadas em guerras. A escrita egípcia também foi algo importante para este povo, pois permitiu a divulgação de ideias, comunicação e controle de impostos. Existiam duas formas principais de escrita: a escrita demótica (mais simplificada e usada para assuntos do cotidiano) e a hieroglífica (mais complexa e formada por desenhos e símbolos). Uma espécie de papel chamado papiro, que era produzido a partir de uma planta de mesmo nome, também era utilizado para registrar os textos. A religião egípcia era repleta de crenças interessantes. Acreditavam na existência de vários deuses (muitos deles com corpo formado por parte de ser humano e parte de animal sagrado) que interferiam na vida das pessoas. Como acreditavam na vida após a morte, mumificavam os cadáveres dos faraós colocando-os em pirâmides, com o objetivo de preservar o corpo.

INCAS

Fixados na região dos Andes, os incas constituem uma grande civilização que dominou uma ampla faixa de terras pelo território sul-americano foi sob a tutela do imperador Pachacuti Yupanqui que muitas populações foram militarmente subordinadas ao poderio inca. Com isso, a civilização passou a tomar a feição de um grande império.

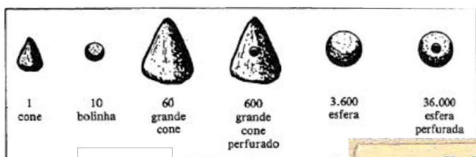
“O Inca” era a mais importante autoridade política entre o povo inca. Venerado como o descendente do deus-sol Inti Raymi, o imperador era o principal guardião de todos os bens pertencentes ao Estado, incluindo a propriedade das terras. Os terrenos cultiváveis eram divididos em três parcelas distintas: a terra do Inca, destinada ao rei e seus familiares; a terra do deus-sol, controlada pelos sacerdotes; e a terra da população. Em um âmbito geral, a elite da sociedade inca estava composta pela família real e os ocupantes dos altos cargos político-administrativos (sacerdotes, chefes militares, juízes, governadores provinciais e sábios). Logo abaixo, em posição mediana, temos os comerciantes e artesãos que garantiam a circulação de mercadorias que atestaram a presença de uma rica cultura material. Os camponeses se organizavam através de um extenso grupo familiar que ficava conhecido com o nome de ayllu. Cada ayllu tinha o trabalho agrícola, o serviço militar e suas demais obras organizadas por um líder mais velho chamado curaca. A religiosidade dos incas era marcada pela adoração de vários elementos da natureza, como o sol, a lua, o raio e a terra. No sistema de valores da religião inca, todos os benefícios alcançados deveriam ser retribuídos com algum tipo de sacrifício que expressava a gratidão dos homens. Por esse fato, observamos que os incas organizavam vários rituais onde os sacrifícios, inclusive de humanos, eram comuns. Para interligar as cidades de integravam o Império Inca, uma série de estradas em pedra foi construída com o objetivo de facilitar a comunicação e o deslocamento entre as pessoas. Vale ressaltar que as cidades incas contavam com vários projetos arquitetônicos complexos que incluíam a construção de palácios, fortalezas, e templos com dimensões surpreendentes.

MAIAS

Em um vasto território que ia da Guatemala até a porção sul do México, observamos a presença de vários centros urbanos independentes. Entre as principais cidades integradas a esse sistema podemos destacar Piedras Negras, Palenque, Tikal, Yaxchilán, Copán, Uxmal e Labná. O esplendor da sociedade maia é fundamentalmente explicado pelo controle e as disciplinas empregadas no desenvolvimento da agricultura. Entre os vários alimentos que integravam a dieta alimentar dos maias, podemos destacar o milho, produto de grande consumo, o cacau, o algodão e o agave. Para ampliar a vida útil de seus terrenos, os maias costumavam organizar um **sistema de rotação de culturas**. O processo de organização da sociedade era bastante rígido e se orientava pela presença de três classes sociais. No topo da hierarquia encontramos os governantes, os funcionários de alto escalão e os comerciantes. Logo em seguida, temos funcionários públicos e os trabalhadores especializados. Na base da pirâmide ficavam os camponeses e trabalhadores braçais. Os maias tiveram uma ampla gama de conhecimentos desenvolvidos no interior de sua cultura. De acordo com algumas pesquisas, eles utilizavam um sistema de contagem numérico baseado em unidades vigesimais e, assim como os olmecas, utilizavam do número “zero” na execução de operações matemáticas. Além disso, criaram um calendário bastante próximo ao sistema anual empregado pelos calendários modernos. Um dos grandes desafios para os pesquisadores da civilização maia gira em torno da decifração do seu complexo sistema de escrita. Um dos maiores empecilhos está relacionado ao fato de que os signos empregados podem representar sons, ideias ou as duas coisas ao mesmo tempo. Além disso, indícios atestam que eles utilizavam diferentes formas de escrita para um único conceito. A arquitetura desse povo esteve sempre muito ligada à reafirmação de seus ideais religiosos. Várias colunas, arcos e templos eram erguidos em homenagem ao grande panteão de divindades celebrado pela cultura maia. A face politeísta das crenças maias ainda era pautada pela crença na vida após a morte e na realização de sacrifícios humanos regularmente executados. Por volta do século XIII, a sociedade maia entrou em colapso. Ainda hoje, não existe uma explicação que consiga responder a essa última questão envolvendo a trajetória dos maias. Recentemente, um grupo de pesquisadores norte-americanos passou a trabalhar com a hipótese de que a crise desta civilização esteja relacionada à ocorrência de uma violenta seca que teria se estendido por mais de dois séculos.

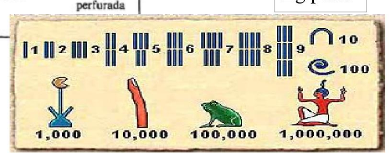
O Sistema de Numeração Decimal através de Alguns Antigos Sistemas de Numeração

Agora vamos entender como os Sumérios, os Egípcios, os Incas e os Maias contavam e escreviam seus **números**.



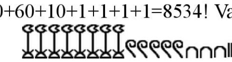
Sumérios

Egípcios



Os Sumérios foram os primeiros a criarem **símbolos** de argila, chamados tokens, para efetuar cálculos. É como se fosse um ábaco primitivo. Os tokens utilizados estão no quadro acima. Depois eles passaram a registrar as **quantidades** em placas de argilas com estiletes de bambu em forma de cunha o que deu origem a escrita cuneiforme. Já os **algarismos** egípicos são como estão no quadro ao lado. Eles eram craques em matemática e muitos registros de como pensavam e calculavam são encontrados nos papiros. Vamos ver alguns exemplos de **números** escritos em cada Sistema de Numeração.

Este **numeral** 

representa a **quantidade** <u>oito mil quinhentos e trinta e quatro</u> que é o mesmo que **8.534** usando nossos **algarismos**. Se prestarmos bastante atenção vemos que apenas somamos o valor de cada **símbolo**. Seguindo o quadro temos: 3.600+3.600+600+600+60+60+10+1+1+1+1=8534! Vamos ver como fica usando **algarismos** egípcios? Fica assim: 

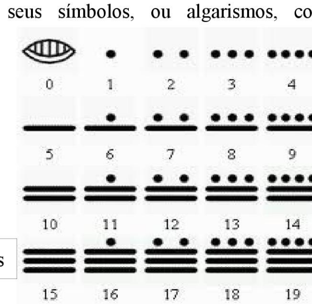
Incrível! É ainda maior que escrito em Sumério. Por quê será?

Será que escrevemos números assim também? Vamos ver … quando escrevemos o trezento e quartenta e cinco fazemos 345. Seguindo o mesmo raciocínio dos de cima nós faríamos a soma 3+4+5 que é doze... Não deu certo....

Esses sistemas de numeração são chamados de **Aditivos** pois para escrevermos as **quantidades** colocamos um **algarismo** ao lado do outro, somando seus valores até chegar no **número** desejado. Porém essa deve ser feita da maneira mais econômica possível, para que os **numerais** não fiquem demasidamente grande.

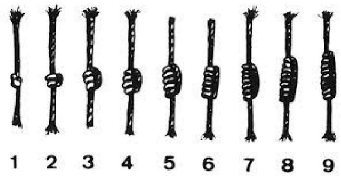
Vamos olhar as outras duas civilizações? Será que escreviam seus números, da mesma maneira? Vamos ver seus símbolos, ou algarismos, como preferir.

Incas



Maias

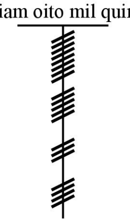
Para registrar os números os Incas utilizavam com frequencia os Quipos, que são um conjunto de cordões de cores variadas, com nós. Os fabricantes de quipu amarrava vários nós em uma sequência apertada representando um algarismo. Estes podem variar de sem nós (espaço vazio), representando zero, a nove nós representando nove. Percebam que um nó para o um, dois nós



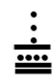
equivale ao nosso 2 e assim sucessivamente. Já os Maias possuiam … 20 algarismos! Para que tantos? Uma bolinha para o um e a quando chega no cinco substituem por uma barrinha. Legal! Mas como eles usam estes símbolos para escrever seus numerais e assim representar seus números?

Como eles escreveriam oito mil quinhetos e trinta e quatro?

Nos quipos temos:



Já com algarismos maias temos:



Dá para perceber que é muito diferente do que vimo nos sumérios e egípcios.

Diferença visual: os dois primeiros Sistemas de Numeração escreviam seus númerais na horizontal, enquanto os desses últimos são na vertical. Se formos somar os valores de cada símbolo não vamos obter o resultado desejado. Nos Quipos temos 8 + 5 + 3 +4 = 20, e no caso dos maias temos: 1 + 1 + 6 + 14 = 22. Podemos concluir que AS REGRAS SÃO DIFERENTES!! Olhando apenas para o quipo vemos claramente 8 5 3 4. Então, será que simplesmente é isso?

Esses são os **Sistemas de Numeração Posicional**! A posição em que o algarismo se encontra dirá o valor dele. Como os Incas contavam de 10 em 10, note que tem 10 algarismos, temos que o 4 vale quatro, o 3, que já está em outra posição, vale trinta. Novamente o 5 está em outra posição, então valerá quinhentos e o 8 vale oito mil. É a nossa velha regrinha do Quadro de Valor e Lugar... lembra? Vamos ver! Vamos escrever na tabela à direita o numeral que representa quatrocentos e cinco trilhões duzentos milhões e três. Lembre: cada uma dessas colunas representa uma **ordem**, e a cada três ordens temos uma **classe.**

Costumamos separar uma classe da outra com um ponto, o que é muito importante na hora de ler um número. Duvida? Experimente ler o número: 98765439087. Foi fácil?

									Quadro de Valor e Lugar					
CT	DT	UT	CB	DB	UB	CM	DM	UM	Cm	Dm	Um	C	D	U

Experimente agora lê-lo com os pontos: 98.765.439.087. Alguns textos preferem usar o espaço para separar uma classe da outra: 98 765 439 087.

Interessante ver como os Incas contavam e escreviam, há tantos anos atrás, do mesmo jeito que fazemos hoje em dia, ou seja, usando as mesmas regras. Só que com outros símbolos, algarismos.

E os Maias, você já entendeu como eles contavam?

U	1
2ª	1
3ª	6
4ª	14

Percebemos pelo número à esquerda que ele foi escrito em quatro níveis, logo ele terá 4 ordens. Bem, vamos usar um QVL só que na vertical:

Você já descobriu de quanto em quanto os maias contavam? Vou dar uma dica: eles tinham 20 algarismos... Muito bem de 20 em 20. Por isso que eles podem ter o 14 nas unidades,. No nosso só podemos escrever até o nove pois quando chegamos no 10 temos uma nova ordem: a das dezenas. Eles só teram uma nova ordem quando chegarem em 20!

Na segunda ordem ele terá 6 grupos de 20, ou seja, aquele seis que vemos na verdade representam 120.

Na terceira ordem temos 1 grupo de ??? Se ele conta de 20 em 20 quer dizer que quando tivermos 20 grupos em "D" teremos 1 grupo em "C" e vinte grupos de vinte são 400! Então na terceira ordem temos 1 grupo de quatrocentos!

Na quarta ordem temos um grupo de oito mil.

Agora sim: 8.000 + 400 + 120 + 14 = 8534.

Reparemos que o nosso Sistema de Numeração Decimal é assim! Pois ele é Posicional e sua base é 10, feito o Sistema de Numeração Inca. Temos ordens e classes, que aliais diz muito sobre nossa forma de falar:

Dezena quer dizer um grupo de dez.

Centena quer dizer um grupo de 100 que são ______ grupos de 10.

Um milhar que dizer um grupo de 1000 que são ______ grupos de 100. E assim sucessivamente. Não podemos nos esquecer dos **Décimos, Centésimos e Milésimos** que são, respectivamente, a décima parte de um inteiro, a centésima parte de um inteiro e a milésima parte de um inteiro. Lembra?

Nosso Sistema de Numeração não possui apenas ordens à esquerda, não... Possui também ordens à direita! Para isso que aqui no **Brasil** usamos a **vírgula.** Para separar a parte inteira da parte **decimal**. Percebamos que cada ordem é 10 vezes maior que a que a ordem que está imediatamente a sua direita? Assim podemos dizer que:

Uma Dezena de milhar possui _________ dezenas

Uma centena de milhar possui _______ centenas

Uma dezena possui __________ décimos.

E outra coisa importantíssima sobre as classes e ordens são as operações que fazemos com os numerais!

Ao Somarmos ou Subtrairmos valores temos sempre que respeitar a **ordem** a que cada um pertence! Só podemos somar Unidades com Unidades, Décimos com Décimos, Dezena de Bilhão com Dezena de Bilhão. Só somamos "coisas" semelhantes!

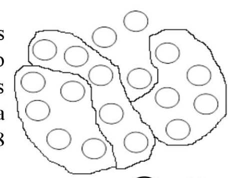
Na hora de Multiplicar também existe um "pezinho" do SND! Observe a conta:

```
    8 9 8
  x 5 3 4
  -------
  3 5 9 2
 2 6 9 4
4 4 9 0
---------
4 7 9 5 3 2
```

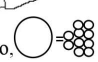
Você sabe responder porque pulamos a ordem da unidades ao escrever 2.694? E novamente, pulamos a ordem das unidades e das dezena ao escrevermos 4.490?

Pense e depois converse com o professor sobre sua teoria...

Quando chegamos na Divisão, oh bendita Divisão!!! O nosso SND fala alto: Eu existo!!



Para relembrarmos primeiro vamos recorrer as nossas conhecidas bolinhas para realizar a divisão de 18 por 5. Como de costume agrupamo-as de cinco em cinco, o que nos dá três como resposta e sobram três. Mas se nossa situação problema consiste de três irmãos que querem dividir igualmente 18 chocolates, eles terão que decidir o destino dos outros três.

Há centenas de anos que agrupamos de 10 em 10, então vamos fazer isso,  vamos dizer que cada bolinha vale dez, ou seja vamos dividir cada bolinha em dez bolinhas menores ficando ao total com _______ bolinhas. Agora ficou mai fácil, pois basta dividir este último número por 5. Podemos dizer então que 18 dividido por 5 dão três grupos de 5 mais seis pedaços menores, no caso foram 6 pedaços de 10 pedaços, ou seja, seis décimos.

```
4. 3' 2 1 | 9
-3 6        4 8 0, 111...
 0 7 2
 - 7 2
   0 0 1 0
      -0 9
       0 1 0
        -0 9
       0 1 0
```

Vamos tomar um exemplo mais empolgante. Vamos dividir 4.321 por 9 utilizando o algoritmo usual.Começamos como de constume escolhendo uma quantidade que dê para dividir, no caso, por 9. Quantos grupos de 9 podemos fazer com 43? Podemos recorrer a tabuada ou simplesmente a ideia que a ela nos traz: 9 + 9 + 9 + 9 =36, ou seja conseguimos no máximo 4 grupos de 9 (4x9 = 36), pois 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45 passa da quantidade que estamos dividindo que é 43. Vão sobrar 7, e como de costume descemos o dois. Queremos agora saber quantos grupos de 9 conseguimos fazer com 72. Pelo método que você escolher o resultado será 8 e o resultado não deixará restos. Mas ainda falta descer o 1, e ao fazer isso percebemos que dá para formar... **0** grupos de 9? Pois é, não dá pra formar grupos com apenas uma unidade logo o resultado é **0**. Dependendo da situação problema nós poderíamos parar a divisão com resto 1 ou continuá-la. Como no exemplo anterior vamos dividir esse 1 em dez pedaços menores assim precisaremos adicionar a vírgula no quociente pois temos que separar a parte inteira da parte decimal. Nosso 1 agora vale 10 décimos e podemos continuar a divisão. Faremos apenas um grupo de nove, restando 1 décimo que será convertido em centésimos, ou seja um décimo vale 10 centésimos. E podemos continuar assim por toda a eternidade pois nos deparamos com uma dízima periódica! Por esse motivo existem as reticências no quociente.

Após terminarmos a leitura deste material podemos tentar dar novos significados ao 43, pois quanto ele realmente vale? E o resto 7, quanto vale? Por que começamos da esquerda para a direita e não da direita para a esquerda? É possível fazer dessa maneira? Como?

Por fim, vamos entender como o uso do Sistema de Numeração Decimal tornou-se internacional.

O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus que o inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental. Na Índia encontramos colunas de pedras datadas no ano 250 a.C., com símbolos numéricos que seriam os precursores do nosso sistema de numeração, porém, a idéia de valor posicional e zero devem ter sido introduzida na Índia antes do ano 800 a.C.. Foi o matemático persa Al-Khowârizmî que descreveu de maneira completa o sistema hindu num livro datado no ano 825 d.C.. Eses numerais chegaram na Europa, provavelmente através de comerciantes e viajantes árabes, pelas costas do Mediterrâneo. Sabemos que foi uma tradução latina do tratado de Al-Khowârizmî, feita no século XII, seguida de alguns trabalhos europeus sobre o assunto, que fez com que o sistema se disseminasse mais amplamente. Um primeiro divulgador de seu uso foi Gerbert (c. 950 - 1003). Nascido em Auvugne, França, foi um dos primeiros cristãos a estudar nas escolas muçulmanas da Espanha, e ao retornar de seus estudos, tentou introduzir na Europa cristã os numerais indo-arábicos (sem o zero). Á ele, atribui-se a construção de ábacos, globos terrestres e celestes e um relógio. Ele subiu na hierarquia da Igreja, tornando-se papa com o nome de Silvestre II no ano 999. Posteriormente, Leonardo de Pisa defendeu e utilizou a notação indo-árabica em seus trabalhos, colaborando para a introdução desses numerais na Europa. No século XVI, os cálculos com numerais indo-arábicos se padronizaram. Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra, fizeram com que esses numerais fossem utilizados para tornar os cálculos rápidos e precisos.

A Era Digital e o Sistema de Numeração Binário

Tentar resumir em poucas linhas tudo o que aconteceu é uma missão impossível. Vamos listar os principais acontecimentos e entre eles pontuar como um Sistema de Numeração contribuiu para nossa atual era digital. A história da informática está extremamente ligado ao fato de computar, calcular. Para termos alguma noção desta necessidade basta pensar em realizar o censo de um país como a China sem computadores ou até mesmo calculadoras. Esta falta de recursos motivou a construções de máquinas que pudessem fazê-lo. Em ordem cronológica listaremos algumas das máquinas construídas.

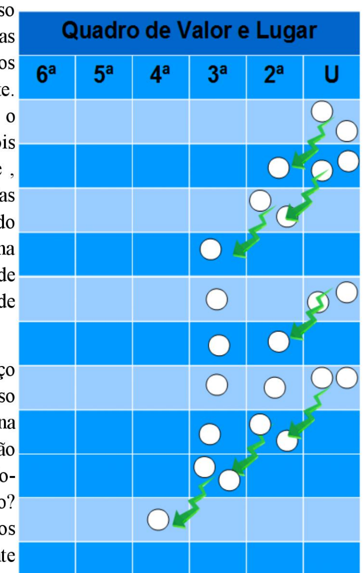
- 1623 - primeira máquina de calcular Wilhelm Schickard
- 1642 - Blaise Pascal (filósofo francês) com 19 anos construiu "Máquina de Somar" (Pascalina)
- 1832 - Máquina Diferencial (Babbage);
- 1833 - Máquina Analítica, Babbage projetou máquina bastante aperfeiçoada
- 1929 - Analisador Diferencial em 1929 (Vannevar Bush);
- 1943 – Colossus, criada pelo governo britânico com o objetivo de decifrar códigos na II Guerra Mundial.
- 1946 - ENIAC - Electronic Integrator and Calculator . Última grande calculadora criada no EUA com o objetivo de auxiliar na II guerra mundial, mas terminou um pouco tarde.

Estas duas últimas calculadoras proporcionaram um novo modo de construir máquinas. Enquanto as outras eram mecânicas, cheias de engrenagens, roldanas e chaves, a Colossus e aEniac utilizaram um sistema eletrônico com válculas elétricas. Não deixavam de ser enormes e pesadíssimas, mas as válvulas permitiam a entrada de diversas informações com apenas dois comandos: ligado e desligado. A Colossus utilizou o código binário para permitir esse acesso de informação. Para representar o ligado usou-se o **1** e o desligado adotou-se o **0**. E assim toda a teoria acerca do Sistema de Numeração Binário desenvolvida primeiramente por Leibiniz no século XVIII e depois por George Boole em 1854 foram utilizadas no Colossus e continuamos usando em nossos computadores atuais.

E como funciona o Sistema de Numeração Binário? ?? Exatamente como o nosso, só que agrupando de dois em dois. Prestemos bastante atenção no número que iremos escrever abaixo.

Vamos supor que não contamos fazendo grupos de dez e sim grupos de dois. Para o nosso exemplo peguemos um punhado de caroços de milho:

Agora vamos fazer um QVL. Só que como nosso sistema é binário não faz sentido usar as palavras dezena, centena e milhar então só usaremos unidades, 2ª ordem e assim sucessivamente. Queremos escrever o numeral que representa o punhado que você pegou usando apenas dois símbolos: 0 e 1. Para ficar mais legal, não conte , usando o SND, quantos caroços você pegou. Mas antes de começar a entender o esquema ao lado vamos pintar os "caroços" de cada coluna de uma cor diferente da seguinte forma: a coluna U de amarelo, a 2ªcoluna de marrom, a 3ª coluna de vermelho e a 4ª coluna de azul.



Imginemos agora que estamos colocando caroço por caroço na ordem das unidades. Mas como nosso sistema é binário quando tivermos dois caroços na mesma ordem imediatamente eles serão transferidos por uma ordem superior tansformando-se em apenas um . Deu pra entender? Não? Observemos o esquema acima e não nos esqueçamos de praticar na sala de aula juntamente com a(o) professora(o). Note que os dois amarelos se transformaram em um marrom, depois dois marrons se transformaram em um vermelho e depois dois vermelhos se transformaram em um azul. Note que os caroços de milho que estão sendo contados são os amarelos. Os marrons, vermelhos e azuis são a união deles em um só, logo não pertencem a nossa pilha de contagem. Se continuarmos fazendo essa distribuição chegaremos ao numeral 1111, ou seja 1 bola azul, 1 bola vermelha, 1 bola marrom e uma bola amarela. Portanto, nosso número quinze, que no SND possui o numeral 15, no SNBi é escrito como 1111. Mas como sabermos se contamos corretamente?

Lembremos que:
1 bola azul = 2 bolas vermelhas
1 bola vermelha = 2 bolas marrons
1 bola marrom = 2 bolas amarelas
Então 1 bola azul = ______ amarelas, 1 bola vermelha = _____ amarelas. E finalmente se somarmos o total de bolas amarelas que cada uma representa teremos ao total 15 bolas amarelas.

Bem, ter um punhado de coisas para contar funciona assim, porém esta não é a única maneira que temos de representar números no SNBi. Mas e quanto ao processo inverso? Não dá pra ficar brincando de colorir bolinhas para sempre... O que faremos para descobrir o valor de 101010? Como falamos o SNBi funciona como o nosso, então vamos revê-lo para entender esse processo inverso.

Utilizando novamente o QVL vamos escrever no SND o número cinco bilhões setecentos e trinta e oito mil e dois.

					Quadro de Valor e Lugar					
DB	UB	CM	DM	UM	Cm	Dm	Um	C	D	U
	5	0	0	0	7	3	8	0	0	2

Usando as informações dadas nesse texto podemos dizer que cada algarismo escrito acima tem dois valores. Nos interessa o que chamamos de **valor relativo**, aquele que depende da posição do algarismo no numeral. Vamos ver se entendemos:
O valor real do 2 é … 2! pois está na unidades.
Zero é zero independente se sua posição no numeral.
O valor do 8 é 8.000 pois está na ordem das unidades dos milhares
O valor de 3 é ___________________
O valor de 7 é ___________________________
O valor de 5 é ______________________________.

Note que podemos então escrever 5.000.738.002 como
___________________ + ____________________ + _______________ + 8000 + 2.
Esta é a **forma decomposta** de um número, onde expressamos o valor relativo de cada algarismo. Agora vamos avançar. Vamos escrever o número mostrando a base que usamos, que nos caso é _____.

Essa é a **forma polinomial do número:**
$5\cdot1.000.000.000 + 7\cdot100.000 + 3\cdot10.000 + 8\cdot1.000 + 2 =$
$\mathbf{5\cdot10^9 + 7\cdot10^5 + 3\cdot10^4 + 8\cdot10^3 + 2\cdot10^0}$
Note que os expoentes de cada potência acima é uma unidade a menos que a ordem que o algarismo ocupa no QVL.

Esta forma nos diz muito principalmente em relação ao lado operacional do SND. Lembra-se que só podemos somar coisas semelhantes? Pois é quando somamos 345 com 7.023, cujo resultado é 7.368, verificamos que na forma polinomial temos:
$(3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 5) + (7\cdot10^3 + 0\cdot10^2 + 2\cdot10 + 3) =$
$7\cdot10^3 + (3\cdot10^2 + 0\cdot10^2) + (4\cdot10 + 2\cdot10) + (5 + 3) = 7\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 6\cdot10 + 8 = 7.368$
INTERESSANTE! As potências de mesma base podem ser somadas, pois representam a mesma ordem! Observe:
$(3\cdot10^2 + 0\cdot10^2)$, somamos pois ambas potências indicam que são centenas
$(4\cdot10 + 2\cdot10)$, somamos pois ambas potências são ______________.
Aqui todos os fatores possuiem uma potência de 10, mas lembre-se que poderia ser qualquer número, pois ____
____

INTRIGANTE?? Será que se trocássemos o 10 por um outro símbolo, por exemplo uma letra(incógnita ou variável) também poderíamos somar do mesmo jeito?

Voltando ao SNBi, como tudo isso irá ajudar a encontrar o valor de 101010?
Utilizando o QVL apropriado temos:

Quadro de Valor e Lugar					
6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	U
1	0	1	0	1	0

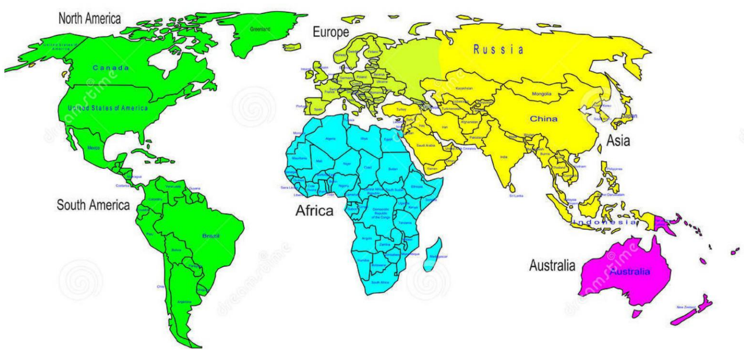
Como sabemos nosso SNBi tem base 2. Agora podemos escrever na forma polinomial:
$101010 = 1\cdot2^{(6-1)} + 0\cdot2^{(5-1)} + 1\cdot2^{(4-1)} + 0\cdot2^{(3-1)} + 1\cdot2^{(2-1)} + 0\cdot2^{(1-1)} =$
$1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 1\cdot32 + 0 + 1\cdot8 + 0 + 1\cdot2 + 0 = 32 + 8 + 2 = 42.$
E assim acabamos aqui nosso estudo sobre contar de outras maneiras!!

CONCLUSÃO

Este material foi produzido com o intuito de que você perceba como nosso Sitema de Numeração Decimal foi construído e suas principais características. Alguns aspectos do SND não foram abordados como a notação científica e a relação com o sistema métrico mas teremos este diálogo em um outro momento. Fique agora divertindo-se com alguns exercícios!

EXERCÍCIOS

1. Identifique no mapa abaixo onde ficava cada civilização comentada neste texto.



2. Escreva a quantidade que cada numeral representa, utilizando se necessário o QVL.

a) dezesseis trilhões quatrocentos e setenta e três mil e ciquenta e dois;

b) oito bilhões e dois e setecentos e ciquenta e três milésimos.

3. Escreva por extenso a quantidade já lida no texto: 98.765.439.087.

____

____

4. Associe cada número a uma ou mais informações apresentadas a seguir. Para isso escreva aletra e s símbolos romanos correspondentes.

A	B	C	D	E
238099	1038153	92944	5788002	69293001

I) compostos de 7 ordens
II) possui o algarismo 8 na classe dos milhares
III) o valor posicional do algarismo 3 é 3000
IV) entre 100 000 e 1 000 000
V) seu antecessor é ímpar

5. No planeta Cítron, existem 3 moedas de valores diferentes:

▲ equivale a ●●●

● equivale a ■■■

■ equivale a ♦♦♦

Como podemos representar a quantidade ●■■■■♦♦♦♦♦♦♦♦ com o menor número de moedas?

6. (ENEM/2014) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominados quipus. O quipusera feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demasi), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferntes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura1, o quipus representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

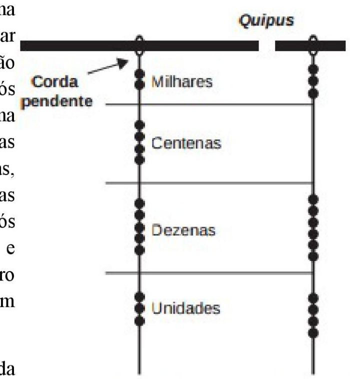


Figura 1 Figura 2

Qual o número da representação do quipos da Figura 2 em nosso Sistema de Numeração Indo Arábico?

7. (ENEM/2015) Um granjeio detectou uma infecção bacteriológica em sua criação de 100 coelhos. A massa de cada coelho era de, aproximadamente, 4kg. Um veterinário prescreveu a aplicação de um antibiótico, vendido em frascos contendo 16 mL, 25 mL, 100mL, 400 mL ou 1 600 mL. A bula do antibiótico recomenda que, em aves e coelhos, seja administrada uma dose única de 0,25 mL para cada quilograma de massa do animal. Para que todos os coelhos recebessem a dosagem do antibiótico recomendada pela bula, de tal maneira que não sobrasse produto na embalagem, o criador deveria comprar um único frasco com a quantidade, em mililitros, igual a

a) 16 b) 25 c) 100 d) 400 e) 1 600

8. (ENEM/2015) Um promotor de eventos foi a um supermercado para comprar refrigerantes para uma festa de aniversário. Ele verificou que os refrigerantes estavam em garrafas de difernte s tamanhos e preços. A quantidade de refrigerante e o preço de cada garrafa, de um mesmo refrigerante, estão na tabela. Para economizar o máximo possível, o promotor de eventos deverá comprar garrafas que tenham o menor preço por litro de refrigerante. O promotor de eventos deve comprar garrafas do tipo:

Garrafa	Quantidade de refrigerante (litro)	Preço (R$)
Tipo I	0,5	0,68
Tipo II	1,0	0,88
Tipo III	1,5	1,08
Tipo IV	2,0	1,68
Tipo V	3,0	2,58

a) I b) II c) III d) IV e) V

9. Resolva es seguintes expressões (não precisa resolver as potências)

a) $2\cdot10^5+4\cdot10^3-3\cdot10^5+3\cdot10^2-12\cdot10^5-1\cdot10^3$

b) $3x^3+72x^2-23x^5+45x^3-25x^2-12x^5$

c) $6\sqrt[3]{10}+5\sqrt{10}-20\sqrt[4]{10}+15\sqrt[4]{10}-15\sqrt[3]{10}+10\sqrt{10}$

10. (ENEM/2015) Os maias desenvolveram um sistema de numeração vigesimal que podia representar qualquer núemro inteiro, não negativo, com apenas três símbolos. Uma concha respresentava o zero, um ponto representava o número 1 e uma barrinha horizontal, o número 5. Até o númer o 19, os maias representavam os números como mostra a Figura 1:

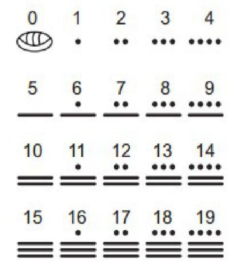


Figura 1

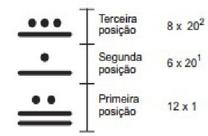


Figura 2

Números superiores a 19 são escritos na vertical, seguindo potências de 20 em notação posicional, como mostra a Figura 2.

Ou seja, o número que se encontra na primeira posição é multiplicado por $20^0 = 1$, o número que se encontra na segunda posição é multiplicado por $20^1 = 20$ e assim por diante.

Os resultados obtidos em cada posição são somados para obter o número no sistema decimal. Um arqueólogo achou o hieroglifo na Figura 3 em um sítio arquelógico:

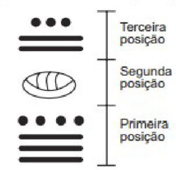


Figura 3
Disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

O número, no sistema decimal, que o hieroglifo da Figura 3 representa é igual a

a) 279 b) 539

c) 2619 d) 5219

e) 7613

BIBLIOGRAFIA

www.sohistoria.com.br
www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102006000400007
www.somatematica.com.br/artigos/a7/p2.php
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Inca_mathematics.html
Eves, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas-SP, Editora da UNICAMP: 2002.
Documentário BBC . **A História do Número 1**
www.uol.com.br/sciam/reportagens/a_origem_da_computacao.html
http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos

Referências

1 BRASIL. MEC. *Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1^o, 2^o e 3^o anos) do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 2012.

2 BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares nacionais - Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

3 SILVEIRA, J.F. Porto da. *Senso Numérico*: A Concepção Intuitiva de Número. 2001. Disponível em: <http:/www.mat.ufrgs.br/ portosil/senso.html>. Acesso em: 10 fevereiro 2016.

4 THE HISTORY of 1. Dirigido por: Nick Murphy. Fotografia: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ>. Acesso: 10 fevereiro 2016

5 ROQUE, Tatiana e PITOMBEIRA, João Bosco. A Matemática na Babilônia e Antigo Egito. In: ______. *Tópicos de História da Matemática - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p. 1-58.

6 EVES, Howard. Sistemas de Numeração, A Matemática Babilônica e Egípcia. In: ______. *Introdução à História da Matemática*. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2002. p.22-51, p.52-89.

7 ANDRADE, Leila. *Etnomatemática - a Matemática na Cultra Indígena*. 2008. 47f. Trabalho de Conclusão de Curso(Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2008.

8 HEFEZ, Abramo. Representação dos Números Inteiros. In: ______. *Aritmética - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. p.65-84.

9 SILVEIRA, J.F. Porto da. *O Sistema de Numeração Romano. Qual deles?*. 2011. Disponível em: <http:/www.mat.ufrgs.br/ portosil/histo2e.html>. Acesso em: 10 julho 2016.

10 IFRAH, Georges. *Os Números - História de uma grande invenção*. 11.ed. SãoPaulo: Editora Globo, 2010. p.368

11 AZEVEDO, Gisalne e SERIACOPI, Reinaldo. *História - Da Pré-História à Antiguidade - Coleção Projeto Teláris*. 2.ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. p.264.

12 MARI(Síria). In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Mari_(S%C3%ADria)> Acesso em: 10 setembro 2016.

13 AABOE, Asger. A Matemática da Babilônia. In: ______. *Episódios da história Antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. p.1-35

14 OLIVEIRA, Plinio Correa de. *História da Civilização*: Civilizações Itálicas anteriores a Roma. 2016. Disponível em: <http:/www.pliniocorreadeoliveira.info/BIO_1936_Pre_Universit%C3%A1rio_09.htm>. Acesso em: 10 outubro 2016.

15 CIVILIZAÇÃO MAIA. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: https:</www.pt.wikipedia.org/wiki/Civiliza%C3%A7%C3%A3o_maia> Acesso em: 10 julho 2016.

16 DÍAZ, Rui Díaz. Apuntes sobre la aritmética Maya. 2006. Disponível em: <http:/www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102006000400007>. Acesso em: 10 maio 2014.

17 IMPÉRIO INCA. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: https:</www.pt.wikipedia.org/wiki/Imp%C3%A9rio_Inca> Acesso em: 10 setembro 2016.

18 O'CONNOR, John Joseph e ROBERTSON, Edmund F. Mathematics of the Incas. 2001. Disponível em: < http:/www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Inca_mathematics.html>. Acesso: 10 agosto 2016.

19 QUIPO. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https:/www.pt.wikipedia.org/wiki/Quipo> Acesso em: 10 setembro 2016.

20 HISTÓRIA DO COMPUTADOR E DA INTERNET. In: Algo Sobre. Disponível em: <https:/www.algosobre.com.br/informatica/historia-do-computador-e-da-internet.html>. Acessado em: 10 outrubro 2016

21 OSSOS DE NAPIER. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https:/www.pt.wikipedia.org/wiki/Ossos_de_Napier> Acesso em: 10 outubro 2016.

22 RÉGUA DE CÁLCULO. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9gua_de_c%C3%A1lculo> Acesso em: 10 outubro 2016.

23 A ORIGEM DA COMPUTAÇÃO. In: Scientific American Brasil. Disponível em <https: /www2.uol.com.br/sciam/reportagens/a origem da computacao>. Acesso em 10 de novembro de 2016.

24 RABELO, Mauro. A engenharia de construção de itens, Avaliação como meio para regular a aprendizagem. In: ______. *Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.* Rio de Janeiro: SBM, 2013. p.157-176, 177-222.

25 PERNAMBUCO. SEE. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco - Ensino Fundamental e Médio.* Pernambuco: CAEd, 2012.

26 BRASIL. MEC. *Pacto Naconal pela Alfabetização na Idade Certa: Construção do Sistema de Numeração Decimal* Brasília: MEC/SEF, 2014.

27 BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares nacionais - Ensino Fundamental: Introdução.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

28 OLIVEIRA, Emílio Celso de e CHIUMMO, Ana. Aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em matemática. VIDYA, Santa Maria, v.35,n.2,p.179-195,jul./dez.2015.

29 MENDES, Iran Abreu. *Números - O Simbólico e o Racional na História.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. p.102.

30 LOVELL, Kurt. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.* Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1988. p.134.

31 BRASIL. MEC. *Planejando a próxima década*: Conhecendo as 20 Metas do Plano Nacional de Educação. 2014. Disponível em: <http:/www.pne.mec.gov.br/images/pdf/pne_conhecendo_20_metas.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.

32 BRASIL. MEC. *Guia de Livros Didáticos- PNLD 2014*: Matemática. 2013. Disponível em: < http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/4661-guia-pnld-2014>. Acesso em: 10 outubro 2016

33 MARTINS, Vicente. *As Incumbências dos Docentes segundo a Lei 9.394*: Como a LDB trata os Profissionais de Ensino. 2010. Disponível em: <http:/www.docente-segundo-a-ldb.blogspot.com.br/2010/02/como-ldb-trata-os-profissionais-de.html>. Acesso em: 10 maio 2016.