UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCOS PATRICK SOUZA SILVA

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA/GEOMETRIA ESFÉRICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES ATRAVÉS DA SEQUÊNCIA CRA

Santarém - PA

2017

MARCOS PATRICK SOUZA SILVA

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA/GEOMETRIA ESFÉRICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES ATRAVÉS DA SEQUÊNCIA CRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sebastian Mancuso

Santarém – PA

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

S586e Silva, Marcos Patrick Souza
O ensino de trigonometria/geometria esférica: uma proposta de atividades através da sequência CRA. / Marcos Patrick Souza Silva . – Santarém, Pa, 2017.
148fls.: il.
Inclui bibliografias.

Orientador Sebastian Mancuso
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Programa de Pós-Graduação Matemática Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática – ensino. 2. Geometria esférica. 3. Trigonometria esférica. 4. Sequência. I. Mancuso, Sebastian, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 516.24

Bibliotecário - Documentalista: Eliete Sousa – CRB/2 1101

Marcos Patrick Souza Silva

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA/GEOMETRIA ESFÉRICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE ATRAVÉS DA SEQUÊNCIA CRA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Sebastian Mancuso
Orientador – UFOPA

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra
Examinador Interno - UFOPA

Prof. Me. *Rudinei Alves dos Santos*
Examinador Externo - IFPA

Santarém (PA)
2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Sebastian Mancuso, meu orientador, pelas horas de atenção dispensadas a mim, para que este trabalho fosse concluído com excelência.

Agradeço a Aroldo Rodrigues, professor do Profmat, por alguns momentos em que se dispôs a me dar orientações que foram de fundamental importância para a produção deste trabalho.

Agradeço aos professores que compuseram a banca examinadora, a saber, Rudinei Alves e José Ricardo Mafra, os quais aceitaram o convite e fizeram orientações pertinentes para o fechamento deste trabalho.

Agradeço à minha esposa, Thaiza Oliveira, pela paciência e ajuda na revisão gramatical desta dissertação.

Agradeço à minha família e aos amigos que, de alguma forma, contribuíram para a realização e a produção deste trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação apresentam-se noções de Trigonometria/Geometria Esférica e algumas de suas aplicações básicas. Há uma necessidade de fazer o aluno construir o conhecimento através da experiência, e materiais concretos e *softwares* permitem modificar, construir, fazer e desfazer figuras e objetos geométricos, o que pode facilitar a compreensão de conceitos abstratos da Matemática. Objetiva-se através de pesquisa bibliográfica, apresentar propostas de atividades sobre o tema Geometria/Trigonometria Esférica, aplicar em sala de aula e fazer uma análise dos resultados. Foram elaboradas aulas para turmas de segundo ou terceiro ano do Ensino Médio com propostas metodológicas e sequência didática de aulas simplificadas para o ensino da Trigonometria/Geometria Esférica. A partir dos resultados da pesquisa, atestamos que o método utilizado pode surtir efeitos positivos, dado que os discentes obtiveram bom desempenho no teste aplicado. O questionário aplicado revela que os discentes se interessaram pelo tema e que a sequência Concreto-Representacional-Abstrato (CRA) os auxiliou na compreensão do conteúdo. Com a pesquisa verificamos a importância do tema proposto, pois este possibilita ao aluno ampliar seu conhecimento sobre uma Geometria não-Euclidiana bem como aprofundar seus conhecimentos sobre Trigonometria. Conclui-se que é possível fazer um trabalho diferenciado com os alunos, no sentido de conduzir o aluno ao conhecimento, o que pode ser feito de diversos modos. A sequência CRA possibilita um caminho seguro à aprendizagem, mesmo sendo mais complexa do que abordagens tradicionais.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Geometria Esférica. Trigonometria Esférica. Sequência CRA.

ABSTRACT

In this dissertation we present notions of Trigonometry/Spherical Geometry and some of its basic applications. We need to make the student construct knowledge through experience, and concrete materials and software allow to modify, to construct, to make and undo geometric figures and objects, which may facilitate the understanding of abstract concepts of mathematics. We intend to elaborate bibliographical research, present a proposal of activities on the topic of Geometry / Spherical Trigonometry, apply in the classroom and make an analysis of the results. Were elaborated classes for the second or third year of the high school with methodological proposals and didactic sequence of simplified classes for the teaching of Trigonometry / Spherical Geometry. From the results of the research, we confirmed that the method used can have positive effects, since the students obtained good performance in the applied test. The applied questionnaire reveals that the students were interested in the subject and that Concrete-Representational-Abstract sequence (CRA) helped them in the understanding of the content. With the research, we verified the importance of the proposed theme, since this allows the student to expand his knowledge about an non-Euclidean Geometry as well to increase his knowledge about Trigonometry. We conclude that it is possible to do a differentiated work with the students, in order to lead the student to knowledge, which can be done in different ways. The CRA sequence provides a safe path to learning, even though it is more complex than traditional approaches.

Keywords: Mathematics Teaching. Spherical Geometry. Spherical Trigonometry. CRA sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esfera..... 23
Figura 2 – Círculos menor e máximo.....24
Figura 3 – Distância esférica.....24
Figura 4 – Polos.....25
Figura 5 – Ângulo diedro.....25
Figura 6 – Triedro.....26
Figura 7 – Construção de um triângulo esférico.....26
Figura 8 – Triedro e esfera.....27
Figura 9 – Ângulo do triângulo esférico.....27
Figura 10 – Ângulo do triângulo esférico.....28
Figura 11 – Lado do triângulo esférico.....28
Figura 12 – Triângulo polar.....30
Figura 13 – Triedro e ângulos de face.....31
Figura 14 – Triângulos POM e POQ.....31
Figura 15 – Triedro e soma dos ângulos de face.....32
Figura 16 – Triângulo esférico e Lei dos Cossenos Esférica.....38
Figura 17 – fuso esférico.....52
Figura 18 – Triângulo esférico e seus ângulos.....53
Figura 19 – Triângulo esférico e fusos esféricos.....53
Figura 20 – Construção do transferidor esférico.....68
Figura 21 – “Reta” e segmento de “reta” na Geometria Esférica.....70
Figura 22 – Não existem retas paralelas na Geometria Esférica.....70
Figura 23 – Construção de retas perpendiculares.....71
Figura 24 – Três “retas” na Geometria Esférica.....72
Figura 25 – Fuso esférico e medição de ângulo.....73
Figura 26 – Medição de lado de triângulo esférico.....74
Figura 27 – Esfera de centro O e plano α passando pelo centro.....76
Figura 28 – Esfera de centro O, plano α passando pelo centro e plano β paralelo a α.....77
Figura 29 – Arco MN e arco AB.....78
Figura 30 – Arco MN em vermelho, arco MN em azul e arco AB.....79
Figura 31 – Construção de triângulo esférico e a medida de seus lados.....80

Figura 32 – Soma dos lados do triângulo esférico.....81
Figura 33 – Construção de triângulo esférico e medida de um ângulo.....82
Figura 34 – Soma dos ângulos de um triângulo esférico.....83
Figura 35 – Triângulo plano e triângulo esférico.....84
Figura 36 – Triângulo plano, triângulo esférico e medidas dos lados.....84
Figura 37 – Meridiano de Greenwich, polos e linha do Equador.....87
Figura 38 – Longitude θ.....88
Figura 39– Latitude φ.....88
Figura 40 – Navegação no paralelo AB.....90
Figura 41– Triângulo terrestre.....91
Figura 42 – Google *Earth*, distância Belém-Lisboa.....95
Figura 43 – *Slide* de introdução ao tema da aula.....98
Figura 44 – *Slide* das atividades 01 e 02 em sala de aula.....99
Figura 45– *Slide* das atividades 03 e 04 em sala de aula.....100
Figura 46 – *Slide* apresentando o *software* Geogebra.....100
Figura 47 – *Slide* da atividade 05 em sala de aula.....101
Figura 48 – *Slide* da atividade 06 em sala de aula.....102
Figura 49 – *Slide* da atividade 07 em sala de aula.....102
Figura 50 – *Slide* da atividade 08 em sala de aula.....103
Figura 51 – *Slide* da atividade 09 em sala de aula.....104
Figura 52 – Triângulo plano e triângulo esférico: ângulos.....106
Figura 53 – Triângulo plano e triângulo esférico: áreas.....107
Figura 54 – Triângulo esférico e seus elementos.....118
Figura 55 – Interface gráfica do *software* Geogebra: Janelas de visualização.....135
Figura 56 – Botões da janela de visualização 2.....136
Figura 57 – Botões da janela de visualização 3D.....136
Figura 58 – Menu do Geogebra.....136
Figura 59 – Menu: Arquivo.....137
Figura 60 – Menu: Editar.....137
Figura 61 – Menu: Exibir.....138
Figura 62 – Menu: Opções.....138
Figura 63 – Menu: Ferramentas.....138

Figura 64 – Menu: Janela.....139
Figura 65 – Menu: Ajuda.....139
Figura 66 – Primeiro ícone.....139
Figura 67 – Segundo ícone.....140
Figura 68 – Terceiro ícone.....140
Figura 69 – Quarto ícone.....140
Figura 70 – Quinto ícone.....141
Figura 71 – Sexto ícone.....141
Figura 72 – Sétimo ícone.....141
Figura 73 – Oitavo icone.....142
Figura 74 – Nono ícone.....142
Figura 75 – Décimo ícone.....142
Figura 76 – Décimo primeiro.....143
Figura 77 – Décimo segundo.....143
Figura 78 – Décimo terceiro ícone.....143
Figura 79 – Décimo quarto ícone.....144

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 01: Resultado do item 01 do teste.....105
Gráfico 02: Resultado do item 04 do teste.....107
Gráfico 03: Resultado do item 05 do teste.....108
Gráfico 04: Resultado do item 01 do questionário.....109
Gráfico 05: Resultado do item 02 do questionário.....109
Gráfico 06: Resultado do item 03 do questionário.....110
Gráfico 07: Resultado do item 04 do questionário.....111
Gráfico 08: Resultado do item 05 do questionário.....111
Gráfico 09: Resultado do item 06 do questionário.....112
Gráfico 10: Resultado do item 07 do questionário.....112

LISTA DE QUADROS

Quadro 01: Comparativo entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica.....37
Quadro 02: Medidas no globo terrestre.....88
Quadro 03: Equivalência português-inglês entre abreviações de pontos cardeais.....90

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15
1.1 JUSTIFICATIVA 17
1.2 METODOLOGIA DA PESQUISA 18
1.3 METODOLOGIA EM SALA DE AULA 19
1.4 UM RESUMO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA 20
2 REFERENCIAL TEÓRICO 23
2.1 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: CONCEITOS INICIAIS 23
2.1.1 Esfera 23
2.1.2 Círculo máximo 23
2.1.3 Distância esférica 24
2.1.4 Polos 24
2.1.5 Ângulo diedro 25
2.1.6 Triedro 25
2.1.7 Triângulo esférico 26
2.1.8 Classificação dos triângulos esféricos 28
2.1.9 Triângulo polar 29
2.1.10 Teorema da desigualdade triangular em triedros 30
2.1.11Teorema da desigualdade triangular na esfera 32
2.1.12 Teorema da soma das medidas dos ângulos das faces de um triedro 32
2.1.13 Teorema da soma das medidas dos lados de um triângulo esférico 33
2.1.14 Teorema da soma das medidas dos ângulos do triângulo esférico 34
2.2 COMPARATIVOS ENTRE A GEOMETRIA PLANA E A ESFÉRICA. 35
2.3 FÓRMULAS BÁSICAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA E SUAS DEMONSTRAÇÕES 36
2.3.1 Lei dos Cossenos Esférica relativa aos lados 38
2.3.2 Lei dos Cossenos Esférica relativa aos ângulos 40
2.3.3 Lei dos Senos Esférica 41
2.3.4 Fórmula das cotangentes 43
2.4 OUTRAS FÓRMULAS NECESSÁRIAS À RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS 44
2.4.1 Fórmulas de borda 45
2.4.2 Fórmulas de Gauss-Delambre 48
2.4.3 Analogias de Napier 50
2.5 CÁLCULO DE ÁREAS 51
2.5.1 Área de um fuso esférico 52

2.5.2 Área do triângulo esférico e teorema de Girard 53
3 METODOLOGIAS 56
3.1 METODOLOGIA SUGERIDA: A ABORDAGEM CONCRETO-REPRESENTACIONAL-ABSTRATO (CRA) 56
3.1.1 Estágios da abordagem CRA 58
3.2 MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 59
3.2.1 Materiais concretos no ensino de Trigonometria/Geometria Esférica 61
3.2.2 Metodologia de aplicação dos materiais concretos 62
3.3 O USO DE COMPUTADORES EM SALA DE AULA 62
3.3.1 O *software* Geogebra 64
4 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE TRIGONOMETRIA/GEOMETRIA ESFÉRICA 66
4.1 ATIVIDADES COM MATERIAIS CONCRETOS 66
4.1.1 Materiais Necessários 66
4.1.1.1 Construção do Transferidor Esférico 67
4.2 ATIVIDADES COM O GEOGEBRA 75
4.3 ATIVIDADES DE ABSTRAÇÃO 86
4.3.1 Aplicações da Trigonometria/Geometria Esférica 86
4.3.2 Coordenadas geográficas 87
4.3.3 Google *Earth* e Google *Maps* 89
4.3.4 Problema da navegação segundo paralelos 89
4.3.5 Aplicando a Lei dos cossenos esférica: o triângulo terrestre 91
5 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA 96
5.1 OBJETIVOS GERAIS 97
5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 97
5.3 MATERIAIS UTILIZADOS 97
5.4 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES REALIZADAS EM SALA DE AULA 97
5.5 ANÁLISE DE ITENS DO TESTE APLICADO 104
5.6 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO 108
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 112
REFERÊNCIAS 114
OBRAS CONSULTADAS 115
APÊNDICES 117
APÊNDICE A – ATIVIDADES DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS BÁSICA E RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS .....
1.0 ATIVIDADES DE APLICAÇÃO DAS 4 FÓRMULAS BÁSICAS I ESFÉRICA 118
2.0 ATIVIDADES SOBRE OS 6 CASOS DE RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS 120

APÊNDICE B - CONHECENDO O GEOGEBRA..... 135
APÊNDICE C: TESTE E QUESTIONÁRIO..... 145

1 INTRODUÇÃO

A Trigonometria é um tópico primeiramente visto, ainda que de modo introdutório, no nono ano do Ensino Fundamental e de acordo com o currículo atual do Ensino Médio, tratado com mais profundidade em turmas de segundo ou terceiro ano, em que normalmente segue-se a sequência didática: Trigonometria no triângulo retângulo, relações entre triângulos retângulos semelhantes, razões e circunferência trigonométrica, arcos e ângulos, lei dos senos, lei dos cossenos, funções, transformações, equações e inequações trigonométricas.

A Trigonometria é uma das partes da Matemática que não costumam trazer grande entusiasmo aos estudantes, talvez devido ao modo excessivamente formal como é colocada, mas é possível despertar o interesse do aluno para este que é, na opinião do autor, um dos mais fascinantes tópicos da Matemática. O não entendimento dos discentes é, entre outros motivos, devido ao fato de a maioria não ter amplo domínio da álgebra necessária, como fatorações, simplificações, divisões, expansões etc.

Faz-se necessário uma tentativa de desmistificar este ramo da Matemática, e fazê-lo mais agradável de modo a motivar o aluno a sua compreensão. Neste sentido, esta dissertação pretende fornecer um referencial teórico e uma proposta didática ao professor do Ensino Médio que pretenda dar um aprofundamento às suas aulas ou ao menos enriquecê-las levando ao aluno a conhecer algumas noções de Trigonometria Esférica e algumas de suas aplicações básicas, como o cálculo da menor distância entre dois pontos na superfície terrestre, a resolução de triângulos esféricos e o cálculo de áreas de triângulos esféricos. Serão elaboradas, para este propósito, aulas para turmas de segundo ou terceiro ano do Ensino Médio com propostas metodológicas e sequência didática de aulas simplificadas para o ensino da Trigonometria/Geometria Esférica, que mostrem o que há de essencial neste assunto.

O presente trabalho pretende ser um texto introdutório ao estudo da Trigonometria Esférica e entrar sutilmente no campo das Geometrias não euclidianas, mais especificamente da Esférica. A forma do planeta Terra denomina-se geoide, mas pode-se considerá-la aproximadamente uma esfera. Os alunos do Ensino Médio

deparam-se na Geografia com o estudo dos paralelos e dos meridianos terrestres, que requerem conhecimentos de Trigonometria Esférica. Então, um aprofundamento no estudo deste ramo da Matemática pode levar o estudante a um entendimento de tópicos como o Sistema de Posicionamento Geográfico, Navegação e Astronomia de Posição, o que nos mostra seu grau de importância em diversas ciências.

O ensino da Trigonometria deve-se pautar em duas direções básicas: o algebrismo e as aplicações. Apesar deste ramo da Matemática ter inúmeras aplicações em outras ciências, o que, evidentemente, enriquece o ensino e atrai as atenções, ainda se faz necessário ter domínio das manipulações algébricas. Neste trabalho a abstração se faz presente nas deduções das fórmulas, que são necessárias para a resolução de triângulos esféricos. O uso dessas fórmulas será apresentado no apêndice A.

Esta dissertação inicia-se apresentando a justificativa, os objetivos, a metodologia da pesquisa, uma breve explanação da metodologia em sala de aula e um resumo da História da Trigonometria. No segundo capítulo entra-se no referencial teórico matemático, em que apresentam-se as definições, propriedades, demonstrações, teoremas, proposições, que são as bases para as aplicações da Trigonometria Esférica.

No terceiro capítulo, desenvolve-se a proposta metodológica. Sugere-se a abordagem Concreto-Representacional-Abstrato (CRA), a qual se baseia nos estágios de representação enativa, icônica e simbólica, propostos pelo psicólogo Jerome Bruner. Explana-se sobre o uso em sala de aula de materiais concretos e do *software* Geogebra, os quais são usados para cobrir, respectivamente, as partes concreta e representacional da sequência CRA. Na parte abstrata da sequência CRA propõem-se alguns problemas sobre navegação marítima. No quarto capítulo apresenta-se uma sequência de atividades objetivando levar do concreto ao abstrato, passando pelo representacional. São quatro atividades envolvendo materiais concretos, quatro usando o Geogebra e três de aplicação. O capítulo cinco contém uma aplicação de atividades em sala de aula, em que se exploram as três fases da sequência CRA e ao final os alunos foram submetidos a um teste e a um questionário, cujos dados foram posteriormente analisados.

No capítulo seis são feitas as considerações finais a respeito deste trabalho, ressaltando-se a importância do tema Trigonometria/Geometria Esférica. E, ao final da dissertação apresenta-se o apêndice A, que versa sobre o uso das quatro fórmulas fundamentais da Trigonometria Esférica e sobre resolução de triângulos esféricos, o apêndice B que apresenta as funcionalidades básicas do Geogebra e o apêndice C, com o teste e o questionário.

1.1 JUSTIFICATIVA

Esta dissertação provém da necessidade de o professor dar uma aplicabilidade ao extenso conteúdo da Trigonometria do Ensino Médio, dessa forma despertando no estudante a curiosidade de saber mais sobre Matemática. A opção pela Trigonometria Esférica deu-se pelo fato de esta ter diversas aplicações práticas que os alunos do Ensino Médio podem entender, desde que tenham conhecimentos razoáveis da Trigonometria Plana, que é a base para sua compreensão.

Normalmente o ensino de Trigonometria começa com as definições das razões trigonométricas, depois exploram-se relações entre essas razões, e em seguida os alunos deparam-se com uma "enxurrada" de fórmulas e expressões, que aparentemente e inicialmente não fazem sentido algum para eles. Neste momento o professor tem o desafio de usar uma metodologia que faça aquele conteúdo adquirir um significado para o estudante. É muito comum os professores focarem na resolução dos triângulos e, sem ter claras motivações, introduzirem um grande número de fórmulas, cálculos de expressões trigonométricas, resolução de inúmeros tipos de equações e inequações. Os exemplos de aplicações práticas da Trigonometria são, por conseguinte, rebaixados para o final do percurso, quando é difícil recuperar uma relação positiva do estudante com esta área da Matemática.

Através do estudo da Trigonometria/Geometria Esférica no Ensino Médio pode-se facilitar a compreensão de temas da Geografia, como o sistema de coordenadas terrestres, o sistema de posicionamento global (GPS), para o qual é necessário compreender conceitos relacionados ao globo terrestre, como os paralelos e meridianos, polos, ângulos de latitude e longitude. E também é necessária à própria

Matemática como instrumento que permite interessantes aplicações a outras áreas do conhecimento, como a Navegação, Astronomia e a Topografia.

Esta proposta de atividades, com Geometria e Trigonometria Esférica pode encontrar algum tipo de objeção por parte de professores, que podem incluir argumentos do tipo: “Por que ensinar Geometria/Trigonometria Esférica se os alunos sequer aprendem a plana?” Ou, “ isso é muito avançado para alunos do ensino básico”. Ou ainda, “o currículo já está cheio”. Estes não são argumentos válidos, pois o ensino não deve pautar-se em níveis exclusivamente medianos e, como pode-se constatar neste trabalho dissertativo, a Geometria Esférica é tão importante quanto a Geometria plana. A diferença é que as pessoas estão mais familiarizadas com a segunda. Quanto ao currículo, este possui alguns conteúdos que são bem mais abstratos e dispensáveis**.**

É de suma importância que o professor tenha um conhecimento que transcende a Matemática e se evade em direção a outras ciências. É importante que este traga para a sala de aula aplicações que são de fora da Matemática, para diminuir o caráter excessivamente abstrato que domina o ensino de tal ramo do conhecimento. Aplicações às outras ciências podem servir de elementos motivadores, visto que o aluno pode demonstrar um interesse maior devido ao fato de ele saber que tem uma aplicação prática, uma utilidade.

1.2 METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia de pesquisa neste trabalho acadêmico é a pesquisa bibliográfica e a pesquisa de campo. A pesquisa bibliográfica realizou-se pela análise de revistas, livros, apostilas, dissertações de mestrado, além de trabalhos publicados na *internet* disponíveis em sítios específicos de Matemática. Esse material de consulta, referenciado ao final desta dissertação, foi submetido à análise pormenorizada, comparação, seleção de informações visando obter o arcabouço de conhecimento necessário à elaboração deste trabalho e a uma explanação didática do conteúdo. Partindo-se da experiência do professor elaborador, também se expõem sugestões didáticas ao professor leitor bem como se explicitam possíveis dificuldades

encontradas pelos alunos ao pleno entendimento. Dois pontos de referência são fundamentais na busca de uma metodologia eficiente: a continuidade com conhecimentos e competências adquiridos em anos anteriores e a atenção para que os alunos percebam a utilidade do que eles estão estudando. A pesquisa de campo, consistiu da aplicação de sequência de atividades a alunos do terceiro ano uma escola pública e posteriormente se realizou uma análise de dados que foram obtidos através de teste e questionário.

1.3 METODOLOGIA EM SALA DE AULA

Dinamizar o ensino de Matemática é necessário para que esta possa atingir com maior eficiência seu objetivo, que é fazer os alunos entenderem o conteúdo ensinado, de tal modo que estes possam usar esses conhecimentos na sociedade; sendo que, para isso o professor deve se utilizar de diversos métodos e estratégias para que possam atingir uma parcela maior de alunos e não apenas aos poucos que obtêm bons resultados pelo método tradicional.

Analisando-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1997, p.19-20), na área de Matemática, no Ensino Fundamental, verificam-se alguns princípios, entre eles:

> 1. A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.
>
> 2. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade Matemática. (BRASIL, 1997, p.19-20)

Tendo em vista os PCN, esta obra segue abordagens metodológicas distintas, objetivando possibilitar melhor compreensão por parte do aluno e também possibilitar ao professor dinamizar sua aula.

Sugere-se ao professor o uso da abordagem Concreto-Representacional-Abstrato, a qual seguirá três linhas distintas de trabalho: Primeiramente o professor pode desenvolver com os alunos atividades relacionadas à Trigonometria Esférica

usando materiais concretos, visando à apreensão de conceitos básicos do conteúdo. Posteriormente, para auxiliar na representação de elementos da Trigonometria/Geometria Esférica e na verificação de propriedades, o professor faz uso do *software* de Geometria dinâmica Geogebra, que além de ser intuitivo e de fácil aprendizado, permite, com o uso de construções geométricas, expor os conceitos geométricos envolvidos de um modo mais atrativo ao aluno. Por último, segue-se para uma abordagem abstrata da Trigonometria com uma aplicação à navegação. E nesta última etapa faz-se necessário maior esforço de abstração, como a compreensão de elementos da Geometria do globo terrestre e suas relações com a Lei dos cossenos esférica.

1.4 UM RESUMO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

As origens da Trigonometria na Grécia Antiga são incertas, pois não se dispõem das obras daqueles que deram os primeiros passos na criação dessa disciplina, mas se sabe que esta surgiu como uma necessidade da Astronomia, a primeira das ciências exatas a se beneficiar da Matemática, da Agrimensura e da Navegação. Diversos problemas, inicialmente complicados podem ser facilmente resolvidos por Trigonometria, inclusive, alguns problemas entraram para a História da Matemática[1].

A Trigonometria durante séculos tem sido um instrumento eficaz para se efetuar medidas na superfície terrestre e celeste. Astrônomos, por meio de raciocínios trigonométricos engenhosos, conseguiram feitos grandiosos, como determinar o raio terrestre, a distância da Terra à Lua, a distância da Terra ao Sol etc. Pode-se conceber a Trigonometria Esférica como uma aplicação da plana, visto que sua essência encontra-se no entendimento e uso das aplicações das razões seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

A palavra Trigonometria tem sua origem em duas palavras da língua grega: “*trigone*”, que significa triângulo e “*metron*” que significa medida. Apesar da derivação

[1] Ver http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm

desta palavra parecer restringir o estudo somente a triângulos, a Trigonometria abrange muitas outras investigações envolvendo ângulos. A Trigonometria tem seu nascimento a partir de necessidades práticas dos astrônomos da antiguidade, de diversas civilizações, como babilônios, indianos e gregos, observando-se que naqueles tempos, não havia distinção entre Astronomia e Astrologia, e que esses conhecimentos eram utilizados para ler os céus e, deste modo traduzir a natureza e fazer previsões. Segundo o matemático e professor Ubiratan d'Ambrósio:

> [...] As ideias Matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias Matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.
>
> (D'AMBRÓSIO, 1999, p.97)

Ainda segundo Ubiratan d'Ambrósio:

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade.
> (D`AMBRÓSIO, 1999, p.97)

Ao contrário do viés adotado nos livros didáticos a Trigonometria, historicamente, foi construída para cálculos sobre o círculo e não sobre triângulos. Abaixo, tem-se alguns fragmentos de texto do *site* da Universidade de São Paulo (USP), http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_Trigonometria.htm, sobre alguns fatos importantes da história deste ramo da Matemática:

- É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no *Papiro Rhind* e também uma notável tábua de secantes na tábula cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.
- O astrônomo **Hiparco de Nicéia**, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria" pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas.
- Outro matemático grego, **Menelau de Alexandria**, por volta de 100 d.C., produziu um tratado sobre cordas num círculo, em seis livros, porém vários deles se perderam. Felizmente o seu tratado *Sphaerica* , em três livros, se preservou numa versão árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre Trigonometria Esférica.
- Entretanto, a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antigüidade foi a *Syntaxis mathematica*, obra escrita por **Ptolomeu de Alexandria** que contém 13 livros. [...] Mais tarde na Arábia o chamaram de Almajesto, e a partir de então a obra é conhecida por esse nome. Mostrando a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco,

Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Usou 377/120 como aproximação para o número p (pi)

- O primeiro aparecimento real do **seno de um ângulo** se deu no trabalho dos hindus. **Aryabhata**, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usou jiva no lugar de seno. Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de **Brahmagupta**, em 628, e um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150.
- Os capítulos do livro de **Copérnico**, mostrando toda a importância da Trigonometria para a Astronomia, foram publicados em 1542 por **Rheticus**. Este também produziu tabelas importantes de senos e cossenos que foram publicadas após a sua morte.

O desenvolvimento da Trigonometria também possibilitou o aperfeiçoamento da Cartografia. Alguns dos primeiros desenhos de mapas são do livro Geografia de Ptolomeu, que mais tarde também foi chamado de Cosmografia. As aplicações atuais da Trigonometria são das mais variadas: Acústica, Óptica, Meteorologia, Geodésia, Cartografia etc.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

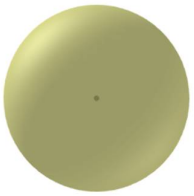
2.1 TRIGONOMETRIA/GEOMETRIA ESFÉRICA: CONCEITOS INICIAIS

A Trigonometria Esférica investiga as relações existentes entre as partes de um triângulo esférico. Por conveniência, várias definições e teoremas da Geometria Esférica estão presentes nesta dissertação.

2.1.1 Esfera

Esfera é um sólido geométrico formado por uma superfície contínua e fechada, cujos pontos estão equidistantes de um outro fixo e interior chamado centro (ver figura 1).

Figura 1 - Esfera

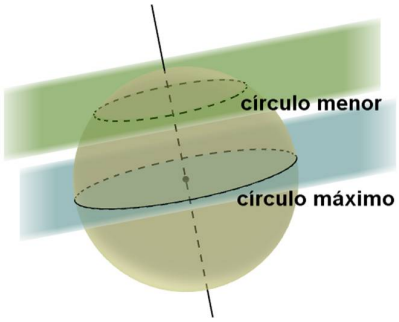


Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.2 Círculo máximo

A seção na superfície de uma esfera feita por um plano é um círculo máximo se esse plano passa pelo centro da esfera e um círculo menor ou pequeno, se não passa pelo centro de uma esfera (ver figura 2).

Figura 2 – Círculos menor e máximo

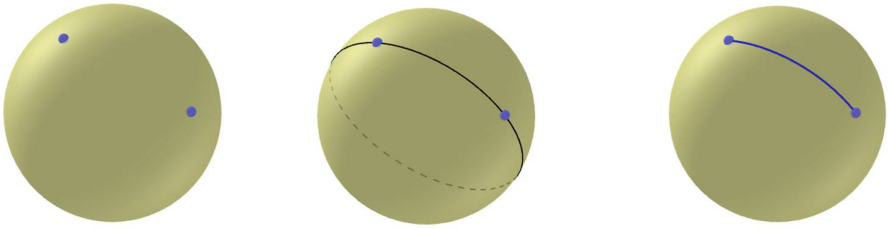


Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.3 Distância esférica

Dados dois pontos em uma esfera, há um único círculo máximo que os contém e a distância esférica entre esses pontos é definida como sendo a medida do menor dos dois arcos de círculo máximo por eles definidos (ver figura 3).

Figura 3 – Distância esférica

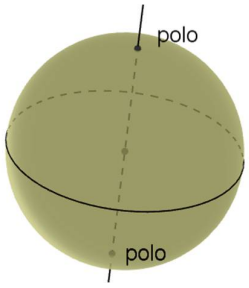


Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.4 Polos

A cada círculo na superfície esférica estão associados dois pontos diametralmente opostos, que denominam-se polos. Sendo o segmento formado por esses pontos perpendicular ao plano que contém o círculo e observando-se que existem infinitos círculos com os mesmos dois polos representados (ver figura 4).

Figura 4 - Polos

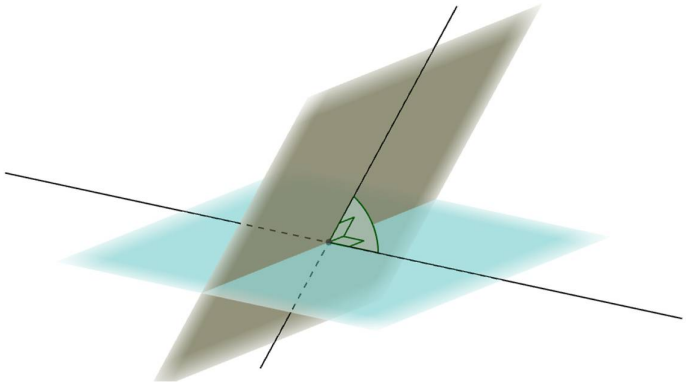


Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.5 Ângulo diedro

É a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta do ângulo diedro e os dois semiplanos são suas faces (ver figura 5).

Figura 5 – Ângulo diedro

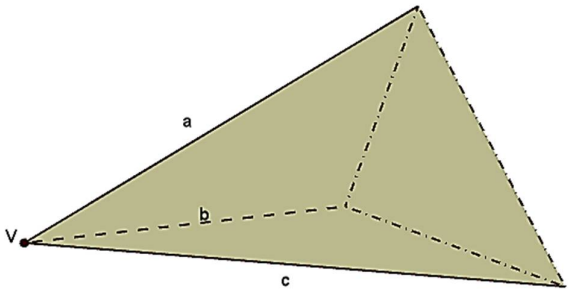


Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.6 Triedro

É a figura geométrica formada por três faces que são delimitadas por três semirretas que têm origem em um mesmo ponto do espaço, o qual denomina-se vértice (ver figura 6). As semirretas passam pelos pontos de um triângulo que está contido em um plano que não passa pelo vértice.

Figura 6 - Triedro



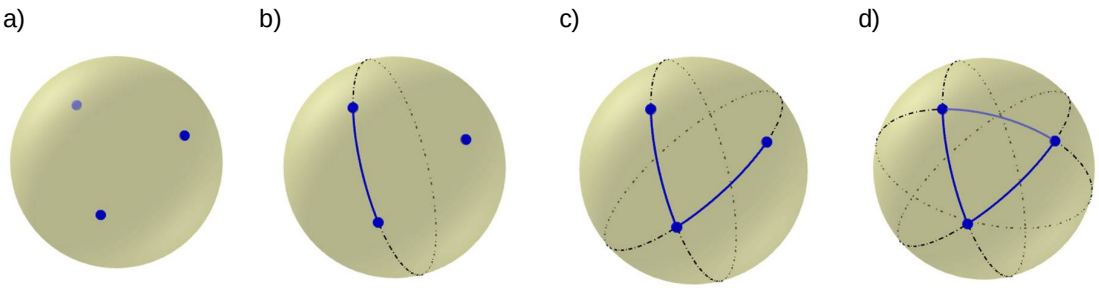
Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura acima, V é o vértice e a, b e c são as arestas e aVb, aVc e bVc são as faces do triedro.

2.1.7 Triângulo esférico

Deve-se considerar três pontos sobre uma esfera (ver figura 7). Define-se um triangulo esférico como sendo a região interna (convexa) da superfície de uma esfera delimitada por três arcos de círculos máximos definidos pelos pontos dados (ver figura 7 b, c e d). Os lados do triângulo são os três arcos menores definidos pelos pontos dados e, conforme será visto adiante, os três ângulos formados pela intersecção dos lados são os ângulos do triângulo.

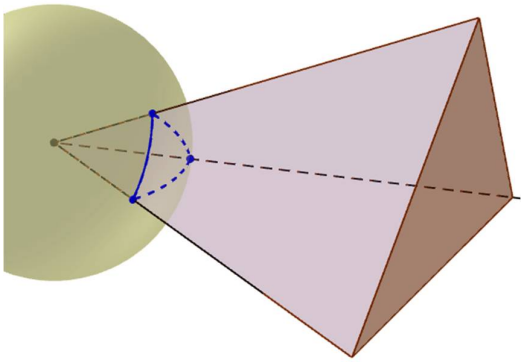
Figura 7 – Construção de um triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

Se um ângulo triedro tem seu vértice no centro de uma esfera, as faces planas intersectam a superfície da esfera em arcos de círculo máximo que formam um triângulo esférico (ver figura 8).

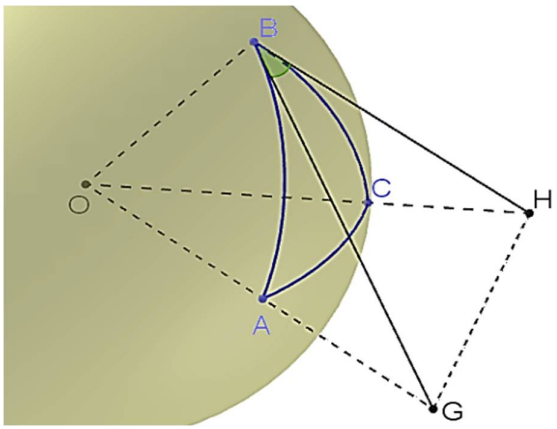
Figura 8 – Triedro e esfera



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se o ângulo entre dois lados do triângulo esférico como sendo o ângulo entre as tangentes dos arcos no ponto de interseção, de tal modo que o arco e a reta tangente sejam coplanares. Na figura 9 vê-se que o ângulo no vértice B ($\widehat{GBH}$) é definido pela interseção da reta tangente ao arco $\overset{\frown}{AB}$ no ponto B e da reta tangente ao arco $\overset{\frown}{BC}$ que passa por B.

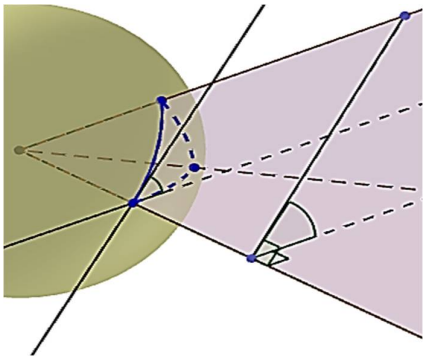
Figura 9 – Ângulo do triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

Um ângulo do triângulo esférico também pode ser definido pelo ângulo diedro correspondente, veja a figura 10.

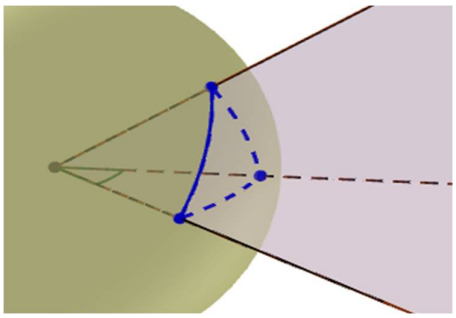
Figura 10 – Ângulo do triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

Os lados de um triângulo esférico têm medidas correspondentes aos ângulos de face do ângulo triedro (ver figura 11).

Figura 11 – Lado do triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.8 Classificação dos triângulos esféricos

Podem-se classificar os triângulos esféricos quanto aos ângulos em oblíquos, que são os que não possuem ângulos retos e em triângulos retângulos, que são os que possuem ao menos um ângulo reto:

- Triângulo retângulo é o que possui um ângulo de medida igual a 90°;
- Triângulo birretângulo é o que possui dois ângulos de medidas iguais a 90°;
- Triângulo trirretângulo é o que possui os três ângulos de medidas iguais a 90°.

Nesta dissertação não foi realizado um estudo específico de triângulos retângulos, o que pode ser encontrado em Frank Ayres Júnior, (1973) (ver lista de

obras consultadas), mas podem ser aplicadas as resoluções para triângulos quaisquer, considerando os ângulos retos nas fórmulas que foram deduzidas.

Também podem-se classificar os triângulos esféricos segundo os lados:

- Triângulo retilátero é o que possui um lado de medida igual a 90°;
- Triângulo birretilátero é o que possui dois lados de medidas iguais a 90°;
- Triângulo trirretilátero é o que possui os três lados de medidas iguais a 90°.

2.1.9 Triângulo polar

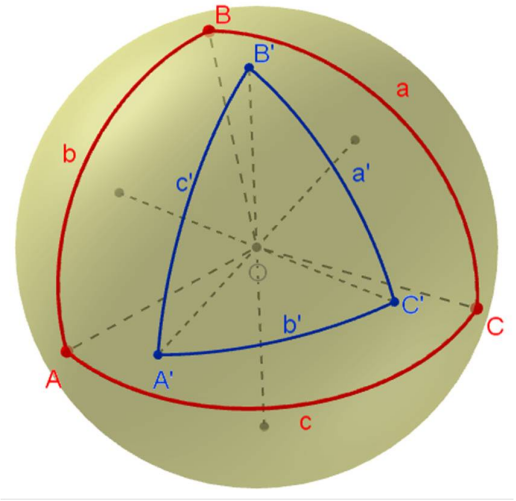
Dado um triângulo esférico ABC com lados **a**, **b** e **c**, cada um desses lados pertence a uma circunferência máxima, que por sua vez define dois polos na esfera. Cada circunferência máxima divide a esfera em duas semiesferas sendo que os polos que serão vértice do triângulo polar serão os que pertencem a mesma semiesfera que contém o triângulo ABC (ver figura 12).

Por exemplo, o lado **a** divide a esfera em duas semiesferas: uma que contém o triângulo ABC e outra que não. O lado **a** pertence a uma circunferência máxima que define dois polos na esfera, sendo que o polo que é vértice do triângulo polar é aquele que pertence à semiesfera que contém o triângulo ABC.

Chamando-se os vértices do triângulo polar de A', B' e C'. O triângulo A'B'C' é denominado polar do triângulo ABC e, analogamente o triângulo ABC é polar do triângulo A'B'C'. O triângulo polar também é denominado suplementar, pois obedecem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \hat{A}+a' &= 180^{o} & \quad \widehat{A'}+a &= 180^{o} \\ \hat{B}+b' &= 180^{o} & \quad \widehat{B'}+b &= 180^{o} \\ \hat{C}+c' &= 180^{o} & \quad \widehat{C'}+c &= 180^{o} \end{aligned} \qquad (1)$$

Figura 12 – Triângulo polar



Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.10 Teorema da desigualdade triangular em triedros

Em todo ângulo triedro a medida de qualquer ângulo de face é menor que a soma e maior que a diferença das medidas dos outros ângulos de face[2].

Demonstração: Considere **a**, **b** e **c** as medidas das faces do triedro que correspondem, respectivamente aos ângulos BÔC, AÔC, AÔB, e tal que **b** > **a** > **c** (ver figura 13).

Marcam-se os pontos P e R nos segmentos OA e OC, respectivamente.

No segmento PR, marca-se o ponto M, tal que os ângulos MÔR e BÔC tenham mesma medida **a**, o que implica que PÔM terá medida **b** – **a**.

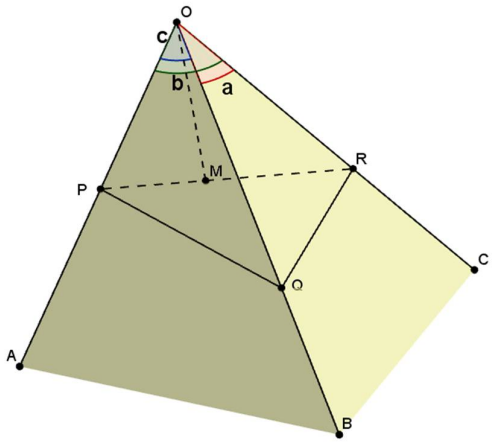
Em OB marca-se Q, tal que os segmentos OQ e OM tenham mesma medida.

Deve-se observar que os triângulos ORQ e ORM são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado. Pela condição de existência de um triângulo plano tem-se que

[2] Demonstração conforme INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. Geometría: una visión de la estereometría. Lima-Peru: Lumbreras Editores, 2012.

$$PM + MR < PQ + RQ \tag{2}$$

Figura 13 – Triedro e ângulos de face



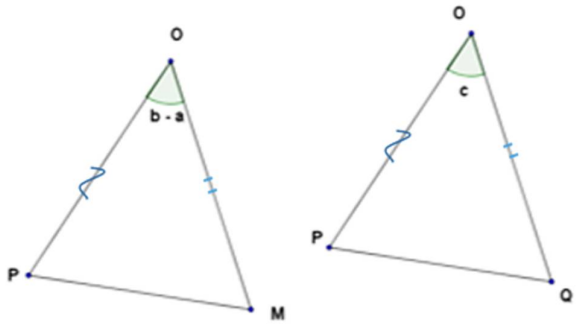
Fonte: Elaborada pelo autor; Adaptada de INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Devido à congruência dos triângulos ORQ e ORM, os segmentos MR e RQ têm mesma medida. Logo

$$PM < PQ \tag{3}$$

Nos triângulos POM e POQ (ver figura 14), como PM<PQ, tem-se que

Figura 14 – Triângulos POM e POQ



Fonte: Adaptado de INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

$$b - a < c \tag{4}$$

$$b < a + c \tag{5}$$

Analogamente, tem-se

$$a < b + c \tag{6}$$

o que implica que

$$a - c < b \tag{7}$$

Concluindo em

$$\boxed{a - c < b < a + c} \tag{8}$$

2.1.11Teorema da desigualdade triangular na esfera

Em todo triângulo esférico a medida de qualquer lado é menor que a soma e maior que a diferença das medidas dos outros lados.

$$\boxed{a - c < b < a + c} \tag{9}$$

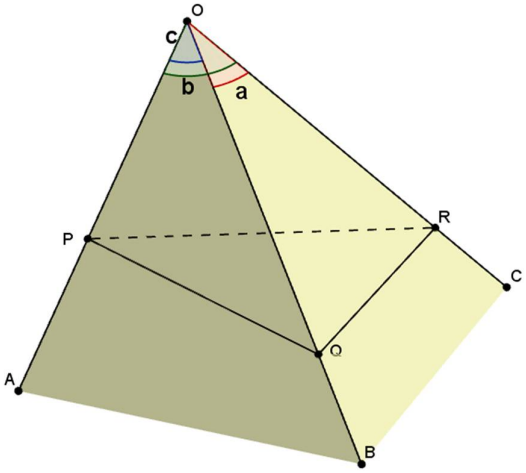
Demonstração: É consequência do teorema anterior, pois em um triângulo esférico os lados são dados pela medida da face do triedro correspondente.

2.1.12 Teorema da soma das medidas dos ângulos das faces de um triedro

A soma das medidas dos ângulos das faces de um ângulo triedro qualquer é maior do que 0° e menor do que 360°.

Demonstração:

Figura 15 – Triedro e soma dos ângulos de face



Fonte: Elaborada pelo autor; Adaptada de INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Considere o triedro O-ABC (ver figura 15), em que os ângulos de face a, b, c correspondem, respectivamente a $\widehat{BOC}, \widehat{AOC}, \widehat{AOB}$. Marque os pontos P, Q e R. Observe que há três triângulos (BOC, AOC e BOC) com vértice O e que a soma das medidas de seus ângulos internos é 3x180º, ou seja,

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}+(\widehat{OAB}+\widehat{OAC})+(\widehat{OBA}+\widehat{OBC})+(\widehat{OCA}+\widehat{OCB})=540^o \quad (10)$$

Pelo teorema anterior, tem-se que

$$\widehat{OAB}+\widehat{OAC}>\widehat{BAC} \quad (11)$$

$$\widehat{OBA}+\widehat{OBC}>\widehat{ABC} \quad (12)$$

$$\widehat{OCA}+\widehat{OCB}>\widehat{ACB} \quad (13)$$

Então,

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}+\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}<540^o \quad (14)$$

ou ainda

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}<540^o-(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}) \quad (15)$$

Como

$$\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^o \quad (16)$$

obtem-se

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}<540^o-180^o \quad (17)$$

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}<360^o \quad (18)$$

$$\boxed{0^o<a+b+c<360^o} \quad (19)$$

2.1.13 Teorema da soma das medidas dos lados de um triângulo esférico

A soma das medidas dos lados de um triângulo esférico qualquer é maior do que 0° e menor do que 360°.

$$\boxed{0^o<a+b+c<360^o} \quad (20)$$

Demonstração: É consequência do teorema anterior, pois em um triângulo esférico as medidas dos lados são dadas pelas medidas das faces do triedro correspondente.

2.1.14 Teorema da soma das medidas dos ângulos do triângulo esférico

Em todo triângulo esférico a soma das medidas dos seus três ângulos é maior do que 180º e menor do que 540º.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo esférico dado e A'B'C', o seu triângulo polar. Tem-se o seguinte:

$$\hat{A}+a'=\hat{B}+b'=\hat{C}+c'=180^{o} \tag{21}$$

e somando obtem-se

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+a'+b'+c'=540^{o} \tag{22}$$

Como

$$a'+b'+c'>0^{o} \tag{23}$$

se concluí que

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<540^{o} \tag{24}$$

Por (20), temos que

$$a'+b'+c'<360^{o} \tag{25}$$

o que implica em

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>180^{o} \tag{26}$$

Portanto, de (24) e (26), concluímos:

$$\boxed{180^{o}<\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<540^{o}} \tag{27}$$

2.2 COMPARATIVOS ENTRE A GEOMETRIA PLANA E A ESFÉRICA.

Na Geometria Esférica as figuras geométricas, como segmentos e polígonos não são representadas sobre o plano, mas sobre a esfera, o que leva a propriedades diferentes da Geometria Euclidiana. Aceitemos sem demonstração que, na superfície esférica, a menor distância entre dois pontos é um arco de circunferência.

Da Geometria Plana têm-se os cinco postulados de Euclides[3]:

i. Um segmento de reta pode ser traçado unindo dois pontos quaisquer;
ii. Pode-se prolongar um segmento de reta em uma reta infinita;
iii. Pode-se descrever um círculo com qualquer segmento de reta, sendo o centro uma das extremidades do segmento;
iv. Todos os ângulos retos são congruentes;
v. Dados uma reta e um ponto, existe somente uma paralela à reta dada que passa pelo ponto.

O quinto postulado, quando alterado, dá origem a Geometrias não-euclidianas. Por exemplo: dados uma reta e um ponto, não existe uma paralela à reta dada que passa pelo ponto ou ainda, existem infinitas paralelas. Os fundamentos da Trigonometria Esférica, ainda que tenham surgido antes do desenvolvimento das Geometrias não euclidianas, mantêm grande correlação com esta, visto que a Trigonometria Esférica pode ser vista como um instrumento da Geometria Esférica. O surgimento das Geometrias não-euclidianas se deu com Bolyai e Lobachevsky no século XIX e representou uma ruptura com os fundamentos da Geometria Euclidiana. Sobre isto, o seguinte trecho dos Parâmetros Curriculares Nacionais é bastante elucidativo:

> [...] fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. [...] Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de

[3] Ver: SANTOS, Almir Rogério Silva; VIGLIONI. Humberto Henrique de Barros. Geometria Euclidiana Plana. Sergipe: UFS, 2011. Disponível em: http://professor.ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf

> uma única Geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico". (BRASIL,1998, p. 24)

No quadro 01 são realizadas algumas comparações entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, esses fatos matemáticos serão explorados tanto nas atividades quanto na aplicação em sala de aula. Esses fundamentos da Geometria Esférica são essenciais para a compreensão de aspectos mais complexos da trigonometria, sendo que estas duas áreas são intrincadamente relacionadas e dependentes.

Quadro 01: Comparativo entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica

PROPOSIÇÃO	**GEOMETRIA EUCLIDIANA**	**GEOMETRIA ESFÉRICA**
Paralelas	Sempre existem	Não existem
Por dois pontos passam:	Uma reta;	Um círculo máximo e se os pontos forem antípodas (polos), uma infinidade de círculos máximos;
O caminho mais curto ligando dois pontos na superfície	No plano é um segmento de reta	Na esfera é um arco de círculo máximo
Soma das medidas dos ângulos de um triângulo;	Constante e igual a 180º;	Variável, maior do que 180º e menor do que 540º;
Soma das medidas dos lados;	Sem proposição equivalente;	Menor do que 360º;
Ao maior lado do triângulo se opõe o maior ângulo;	A proposição é válida;	A proposição é válida;
Num triângulo, a soma das medidas de dois lados é sempre maior do que a medida do terceiro lado;	A proposição é válida;	A proposição é válida;
Dois triângulos com os mesmos ângulos;	Nem sempre são congruentes;	São sempre congruentes.

Fonte: Elaborado pelo autor

2.3 FÓRMULAS BÁSICAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA E SUAS DEMONSTRAÇÕES

Ainda que as novas tendências educacionais tenham abandonado a ênfase no rigor matemático, desta forma deixando a Matemática menos formal e despertando o interesse de uma quantidade maior de estudantes, continua sendo necessário que as demonstrações mais simples sejam apresentadas, pois estão ao alcance do entendimento dos alunos, entretanto deve-se evitar provar obviedades. Argumento convincente, neste sentido, é encontrado no livro *A* Matemática *do Ensino Médio* volume 1:

> Provar o óbvio transmite a falsa impressão de que a Matemática é inútil. Por outro lado, usar argumentos elegantes e convincentes para demonstrar resultados inesperados é uma maneira de exibir sua força e beleza. As demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento das proposições Matemáticas. (LIMA, 1998,p. 29).

Este rigor das demonstrações faz parte da essência da Matemática e possibilita aos alunos compreenderem os fundamentos do raciocínio matemático. Garbi Gilberto em seu livro, *C.Q.D.*, diz:

> É inegável que submeter principiantes a áridas demonstrações sobre temas excessivamente abstratos, utilizando não raro uma linguagem peculiar e pedante, como se fazia no passado, certamente produz efeitos traumáticos. Muitas pessoas detestam a Matemática, julgam-se incapazes de aprendê-la e afastam-se dela exatamente devido a isso. Mas parece-me também um grave erro perder-se qualquer oportunidade que surja de se ensinar os jovens a deduzir por meio de raciocínio lógico algumas fórmulas importantes e simples. (GARBI, 2010, p.10).

Tendo em vista as justificativas expostas acima, esta etapa da dissertação se inicia-se apresentando as demonstrações das principais fórmulas da Trigonometria Esférica, as quais serão usadas para a obtenção de expressões mais diretas para os casos de resolução de triângulos esféricos. Ao professor é sugerido fazer em sala de aula, a seu critério, as demonstrações que julgar necessárias. Far-se-á as seguintes demonstrações neste tópico (2.3):

i. Lei dos Cossenos Esférica para os lados;
ii. Lei dos Cossenos Esférica para os ângulos;
iii. Lei dos Senos Esférica;
iv. Fórmula das cotangentes.

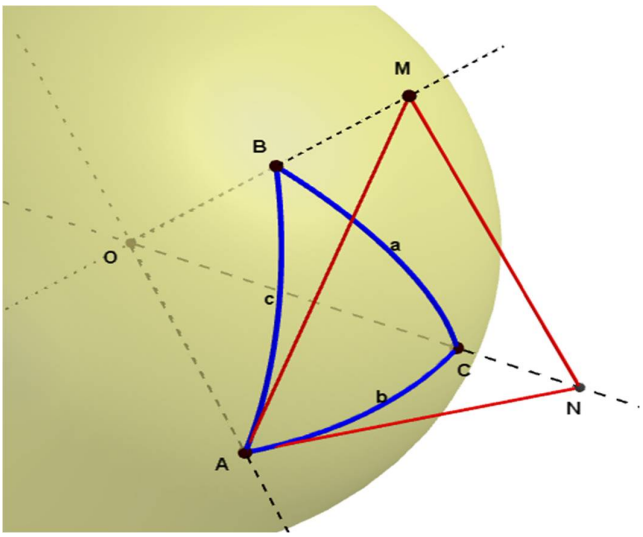
A Lei dos Cossenos Esférica para os lados também é chamada de fórmula fundamental, pois a partir dela se obtém as relações ii, iii e iv.

2.3.1 Lei dos Cossenos Esférica relativa aos lados

Em qualquer triângulo esférico, o cosseno de qualquer lado é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados, somado ao produto dos senos desses lados multiplicado pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração: Considere o seguinte triedro O-ABC (ver figura 16), que é parte de uma esfera de raio AO unitário.

Figura 16 – Triângulo esférico e Lei dos Cossenos Esférica



Fonte: Elaborada pelo autor

Tem-se que o segmento AM é tangente ao arco $\overset{\frown}{AB}$ em A e o segmento AN é tangente ao arco $\overset{\frown}{AC}$ em A, sendo que o ângulo esférico A corresponde ao ângulo diedro $\widehat{MAN}$. E o ângulo $\widehat{MON}$ tem medida correspondente ao lado a do triângulo esférico. OA é um raio da esfera, o que implica que OA é perpendicular aos segmentos AM e a AN. Suponha-se que os lados a, b e c são menores que 90º. Aplicando-se a Lei dos Cossenos aos triângulos OMN e AMN, obtêm-se

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2.OM.ON.\cos\widehat{MON} \qquad (28)$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2.AM.AN.\cos\widehat{MAN} \quad (29)$$

Subtraindo as expressões (28) e (29), obtém-se

$$0 = (OM^2 - AM^2) + (ON^2 - AN^2) - 2.OM.ON.\cos\widehat{MON} + 2.AM.AN.\cos\widehat{MAN} \quad (30)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos MOA e NAO, tem-se

$$OM^2 - AM^2 = OA^2 \quad (31)$$

$$ON^2 - AN^2 = OA^2 \quad (32)$$

que substituindo na equação anterior e verificando que cos $\widehat{MON}$ = cos a e cos $\widehat{MAN}$ = cos Â, resulta em

$$2.OA^2 - 2.OM.ON.\cos a + 2.AM.AN.\cos\hat{A} = 0 \quad (33)$$

e, dividindo a equação por 2, obtemos

$$OA^2 - OM.ON.\cos a + AM.AN.\cos\hat{A} = 0 \quad (34)$$

Observando-se que OM = sec c, ON= sec b, AM = tg c e AN = tg b chega-se a

$$1^2 - \sec b.\sec c.\cos a + tgb.tgc.\cos\hat{A} = 0 \quad (35)$$

Desenvolvendo, tem-se

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b.\cos c} + \frac{senb.senc}{\cos b.\cos c}.\cos\hat{A} = 0 \quad (36)$$

Multiplicando-se por a expressão (36) por (cos a. cos c)

$$1.\cos b.\cos c - \frac{\cos a.\cos b.\cos c}{\cos b.\cos c} + \frac{senb.senc.\cos b.\cos c}{\cos b.\cos c}.\cos\hat{A} = 0 \quad (37)$$

$$\cos b.\cos c - \cos a + senb.senc.\cos\hat{A} = 0 \quad (38)$$

Reorganizando, obtêm-se a Lei dos Cossenos Esférica

$$\boxed{\cos a = \cos b.\cos c + senb.senc.\cos\hat{A}} \quad (39)$$

Ou equivalentemente,

$$\boxed{\cos b = \cos a.\cos c + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} c.\cos \hat{B}} \quad (40)$$

$$\boxed{\cos c = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b.\cos \hat{C}} \quad (41)$$

A Lei dos Cossenos Esférica é de grande utilidade para a resolução de triângulos esféricos nos casos em que são dados os três ângulos e pedem-se os três lados e no caso em que são dados os três lados e pedem-se os três ângulos. Esta relação trigonométrica também é utilizada para se calcular a distância entre dois pontos na superfície esférica, sendo mais comum a aplicação ao globo terrestre através das coordenadas geográficas – latitude e longitude.

2.3.2 Lei dos Cossenos Esférica relativa aos ângulos

Em qualquer triângulo esférico, o cosseno de qualquer ângulo é igual ao produto dos cossenos dos outros dois ângulos, somado ao produto dos senos desses ângulos multiplicado pelo cosseno do lado por eles formado.

Demonstração: Parte-se da Lei dos Cossenos Esférica para os lados e, como visto anteriormente, os suplementares de cada ângulo são dados por:

$$\hat{A} = 180^o - a' \quad (42)$$

$$a = 180^o - \hat{A}' \quad (43)$$

$$b = 180^o - \hat{B}' \quad (44)$$

$$c = 180^o - \hat{C}' \quad (45)$$

Substitui-se **a**, **b** e **c** na fórmula da Lei dos Cossenos e desenvolve-se

$$\cos a = \cos b.\cos c + \operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c.\cos \hat{A} \quad (46)$$

$$\cos(180^o - \hat{A}') = \cos(180^o - \hat{B}').\cos(180^o - \hat{C}') + \operatorname{sen}(180^o - \hat{B}').\operatorname{sen}(180^o - \hat{C}').\cos(180^o - a') \quad (47)$$

$$-\cos\widehat{A}' = (-\cos\widehat{B}').(-\cos\widehat{C}') + (sen\widehat{B}').(sen\widehat{C}').(-\cos a') \tag{48}$$

$$-\cos\widehat{A}' = \cos\widehat{B}'.\cos\widehat{C}' - sen\widehat{B}'.sen\widehat{C}'.\cos a' \tag{49}$$

Obtém-se

$$\boxed{\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}.\cos\widehat{C} + sen\widehat{B}.sen\widehat{C}.\cos a} \tag{50}$$

ou ainda

$$\boxed{\cos\widehat{B} = -\cos\widehat{A}.\cos\widehat{C} + sen\widehat{A}.sen\widehat{C}.\cos b} \tag{51}$$

e

$$\boxed{\cos\widehat{C} = -\cos\widehat{A}.\cos\widehat{B} + sen\widehat{A}.sen\widehat{B}.\cos c} \tag{52}$$

Estas expressões são usadas para se calcular as medidas dos ângulos de um triângulo esférico sendo dados as medidas dos lados.

2.3.3 Lei dos Senos Esférica

Em qualquer triângulo esférico, os senos dos ângulos são proporcionais aos senos de seus lados opostos.

Demonstração: Para obter a Lei dos Senos esférica parte-se da Lei dos Cossenos Esférica.

$$\cos a = \cos b.\cos c + sen b.sen c.\cos\widehat{A} \tag{53}$$

Isola-se cos Â

$$\cos\widehat{A} = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{sen b.sen c} \tag{54}$$

Deve-se elevar ao quadrado ambos os membros da equação acima

$$\cos^2 \hat{A} = \frac{\cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c + \cos^2 b.\cos^2 c}{sen^2 b.sen^2 c} \tag{55}$$

E desenvolvendo

$$1 - sen^2 \hat{A} = \frac{\cos^2 a - 2.\cos a.\cos b.\cos c + \cos^2 b.\cos^2 c}{sen^2 b.sen^2 c} \tag{56}$$

$$sen^2 \hat{A} = \frac{\sin^2 b.\sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b.\cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 b.sen^2 c} \tag{57}$$

$$sen^2 \hat{A} = \frac{(1 - \cos^2 b).(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b.\cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 b.sen^2 c} \tag{58}$$

$$sen^2 \hat{A} = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b + \cos^2 b.\cos^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b.\cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 b.sen^2 c} \tag{59}$$

$$\frac{sen^2 \hat{A}}{sen^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 a.sen^2 b.sen^2 c} \tag{60}$$

De modo inteiramente análogo, também demonstra-se que

$$\frac{sen^2 \hat{B}}{sen^2 b} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 a.sen^2 b.sen^2 c} \tag{61}$$

e

$$\frac{sen^2 \hat{C}}{sen^2 c} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 a.sen^2 b.sen^2 c} \tag{62}$$

Sendo assim, obtêm-se as seguintes igualdades entre razões:

$$\boxed{\frac{sen^2 \hat{A}}{sen^2 a} = \frac{sen^2 \hat{B}}{sen^2 b} = \frac{sen^2 \hat{C}}{sen^2 c}} \tag{63}$$

E aplicando-se a raiz quadrada nos três membros da equação, obtém-se

$$\boxed{\frac{sen\hat{A}}{sen a} = \frac{sen\hat{B}}{sen b} = \frac{sen\hat{C}}{sen c}} \tag{64}$$

A Lei dos Senos Esférica será usada no apêndice A, para os casos 05 e 06 de resolução de triângulos esféricos.

2.3.4 Fórmula das cotangentes

Esta fórmula, também é conhecida como fórmula dos quatro elementos, relaciona dois lados e dois ângulos do triângulo esférico.

Demonstração: Deve-se partir da Lei dos Cossenos Esférica

$$\cos c = \cos a.\cos b + sen a.sen b.\cos \hat{C} \tag{65}$$

Substituindo

$$\cos a = \cos b.\cos c + sen b.sen c.\cos \hat{A} \tag{66}$$

Chega-se a

$$\cos a = \cos b.(\cos a.\cos b + sen a.sen b.\cos C) + sen b.sen c.\cos \hat{A} \tag{67}$$

E desenvolvendo

$$\cos a = \cos a.\cos^2 b + sen a.sen b.\cos b.\cos C + sen b.sen c.\cos \hat{A} \tag{68}$$

$$\cos a - \cos a.\cos^2 b = sen a.sen b.\cos b.\cos C + sen b.sen c.\cos \hat{A} \tag{69}$$

Mas, da Lei dos Senos esférica, tem-se que

$$sen c = \frac{sen a.sen \hat{C}}{sen \hat{A}} \tag{70}$$

Substituindo, obtém-se

$$\cos a.sen^2 b = sen a.sen b.\cos b.\cos \hat{C} + sen b.\frac{sen a.sen \hat{C}}{sen \hat{A}}.\cos \hat{A} \tag{71}$$

E, dividindo-se ambos os lados por $sen a.sen b$, chega-se à Fórmula das Cotangentes

$$\boxed{\cot g\, a.sen b = \cos b.\cos \hat{C} + sen \hat{C}.\cot g\, \hat{A}} \tag{72}$$

De modo inteiramente análogo, obtêm-se outras cinco maneiras de expressar a Fórmula das Cotangentes. Observe que os quatro elementos do triângulo esférico

relacionados em cada fórmula são consecutivos: **a**, $\hat{C}$, **b** e $\hat{A}$; $\hat{B}$, **c**, $\hat{A}$ e **b**; **c**, $\hat{B}$, **a** e $\hat{C}$; $\hat{B}$, **a**, $\hat{C}$ e **b**; **a**, $\hat{B}$, **c** e $\hat{A}$; **c**, $\hat{A}$, **b** e $\hat{C}$.

$$\cot g\, b.\operatorname{sen} c = \cos c.\cos\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{A}.\cot g\,\hat{B} \tag{73}$$

$$\cot g\, c.\operatorname{sen} a = \cos a.\cos\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{B}.\cot g\,\hat{C} \tag{74}$$

$$\cot g\, b.\operatorname{sen} a = \cos a.\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C}.\cot g\,\hat{B} \tag{75}$$

$$\cot g\, a.\operatorname{sen} c = \cos c.\cos\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{B}.\cot g\,\hat{A} \tag{76}$$

$$\cot g\, c.\operatorname{sen} b = \cos b.\cos\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{A}.\cot g\,\hat{C} \tag{77}$$

2.4 OUTRAS FÓRMULAS NECESSÁRIAS À RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

A Trigonometria Esférica trata de métodos para que, dadas as medidas de três elementos de um triângulo, seja possível encontrar as outras três. Algumas outras fórmulas necessárias à resolução de triângulos devem ser deduzidas, que são as fórmulas de borda, as fórmulas de Gauss-Delambre e as Analogias de Napier. São seis os casos de resolução de triângulos esféricos:

i. Dados os três lados: Neste caso, devem-se usar as fórmulas de borda;
ii. Dados três ângulos: Neste caso, também usam-se as fórmulas de borda;
iii. Dados dois lados e o ângulo entre eles: devem-se usar as analogias de Napier
iv. Dados dois ângulos e o lado entre eles: usam-se as analogias de Napier
v. Dados dois lados e um ângulo oposto a um deles: usam-se a Lei dos Senos esférica e as analogias de Napier;
vi. Dados dois ângulos e um lado oposto a um deles: devem ser usadas a Lei dos Senos esférica e as analogias de Napier;

2.4.1 Fórmulas de borda

Deduziremos as chamadas fórmulas de borda, que são usadas quando temos as medidas dos três lados e queremos determinar as medidas dos três ângulos. Primeiro deduziremos as fórmulas de borda relativa aos ângulos e depois, as relativas aos lados.

Demonstração: Parte-se da Lei dos Cossenos Esférica isolando cos Â.

$$\cos\hat{A} = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{sen b.sen c} \tag{78}$$

Deve-se subtrair 1 em ambos os membros da igualdade e desenvolver a expressão trigonométrica

$$1 - \cos\hat{A} = 1 - \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{sen b.sen c} \tag{79}$$

$$1 - \cos\hat{A} = \frac{sen b.sen c + \cos b.\cos c - \cos a}{sen b.sen c} \tag{80}$$

$$1 - \cos\hat{A} = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{sen b.sen c} \tag{81}$$

Mas, como

$$1 - \cos\hat{A} = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\hat{A}}{2} \tag{82}$$

Tem-se,

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{sen b.sen c} \tag{83}$$

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{2sen\frac{a+b-c}{2}.sen\frac{a-b+c}{2}}{sen b.sen c} \tag{84}$$

$$\mathrm{sen}^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{sen\frac{a+b-c}{2}.sen\frac{a-b+c}{2}}{sen b.sen c} \tag{85}$$

Considerando-se **s** o semiperímetro do triângulo esférico, tem-se que:

$$a+b+c=2s \tag{86}$$

$$a+b-c=2.(s-c) \tag{87}$$

$$a-b+c=2.(s-b) \tag{88}$$

Assim, obtém-se o seno da metade de cada ângulo, em função de a, b e c.

$$\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-b).sen(s-c)}{senb.senc}} \tag{89}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-a).sen(s-c)}{sena.senc}} \tag{90}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-a).sen(s-b)}{sena.senb}} \tag{91}$$

E, procedendo de modo análogo, obtém-se o cosseno da metade de cada ângulo, em função de a, b e c.

$$\cos\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{sens.sen(s-a)}{senb.senc}} \tag{92}$$

$$\cos\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sens.sen(s-b)}{sena.senc}} \tag{93}$$

$$\cos\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sens.sen(s-c)}{sena.senb}} \tag{94}$$

Dividindo (92) por (89), (93) por (90) e (94) por (91), chegam-se às denominadas fórmulas de borda relativas aos ângulos.

$$\boxed{tg\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-b).sen(s-c)}{sens.sen(s-a)}}} \tag{95}$$

$$\boxed{tg\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-a).sen(s-c)}{sens.sen(s-b)}}} \tag{96}$$

$$\boxed{tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-a).sen(s-b)}{sens.sen(s-c)}}} \tag{97}$$

Um triângulo esférico fica determinado quando se conhecem seus três ângulos internos, diferentemente do triângulo plano, que possui infinitos triângulos semelhantes com os mesmos três ângulos internos.

Considerando-se

$$\hat{S}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2} \tag{98}$$

Analogamente, demonstra-se que

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{sen(\hat{S}-\hat{B}).sen(\hat{S}-\hat{C})}{sen\hat{B}.sen\hat{C}}} \tag{99}$$

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{sen(\hat{S}-\hat{A}).sen(\hat{S}-\hat{C})}{sen\hat{A}.sen\hat{C}}} \tag{100}$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{sen(\hat{S}-\hat{A}).sen(\hat{S}-\hat{B})}{sen\hat{A}.sen\hat{B}}} \tag{101}$$

e

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos\hat{S}.\cos(\hat{S}-\hat{A})}{sen\hat{B}.sen\hat{C}}} \tag{102}$$

$$\operatorname{sen}\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{\cos\hat{S}.\cos(\hat{S}-\hat{B})}{sen\hat{A}.sen\hat{C}}} \tag{103}$$

$$\operatorname{sen}\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos\hat{S}.\cos(\hat{S}-\hat{C})}{sen\hat{A}.sen\hat{B}}} \tag{104}$$

E, dividindo (102) por (99), (103) por (100) e (104) por (101) obtêm-se as três fórmulas seguintes, que permitem calcular os lados em função dos ângulos.

$$\boxed{tg\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos\hat{S}.\cos(\hat{S}-\hat{A})}{\cos(\hat{S}-\hat{B}).\cos(\hat{S}-\hat{C})}}} \tag{105}$$

$$\boxed{tg\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{sen\hat{S}.sen(\hat{S}-\hat{B})}{sen(\hat{S}-\hat{C}).sen(\hat{S}-\hat{A})}}} \tag{106}$$

$$\boxed{tg\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{sen\hat{S}.sen(\hat{S}-\hat{C})}{sen(\hat{S}-\hat{A}).sen(\hat{S}-\hat{B})}}} \tag{107}$$

2.4.2 Fórmulas de Gauss-Delambre

Abaixo, serão deduzidas as quatro fórmulas de Gauss-Delambre.

Demonstração: Das equações (92) e (97) tem-se que

$$\text{sen}\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{sen(\text{s}-b).sen(\text{s}-\text{c})}{\text{sen}b.\text{sen}c}} \tag{108}$$

e

$$\cos\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sens.sen(\text{s}-b)}{\text{sen}a.\text{sen}c}} \tag{109}$$

Multiplicando-se (108) por (109) e desenvolvendo-se

$$\text{sen}\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen(\text{s}-b).sen(\text{s}-\text{c})}{\text{sen}b.\text{sen}c}}.\sqrt{\frac{sens.sen(\text{s}-b)}{\text{sen}a.\text{sen}c}} \tag{110}$$

$$\text{sen}\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen^2(\text{s}-b)}{\text{sen}^2c}}.\sqrt{\frac{sen(\text{s}-c).sens}{\text{sen}a.senb}} \tag{111}$$

$$\text{sen}\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}=\frac{sen(s-b)}{senc}.\sqrt{\frac{sen(s-c).sens}{sena.senb}} \tag{112}$$

$$\text{sen}\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}=\frac{sen(s-b)}{senc}.\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{113}$$

Procedendo-se de modo análogo,

$$\cos\frac{\hat{A}}{2}.sen\frac{\hat{B}}{2}=\frac{sen(s-a)}{sen\,c}.\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{114}$$

da Trigonometria Plana, tem-se que

$$sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=sen\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}+\cos\frac{\hat{A}}{2}sen\frac{\hat{B}}{2} \tag{115}$$

substituindo acima, encontramos

$$sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{sen(s-b)}{sen\,c}.\cos\frac{\hat{C}}{2}+\frac{sen(s-a)}{sen\,c}.\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{116}$$

Ou ainda,

$$sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\left(\frac{sen(s-b).sen(s-a)}{sen\,c}\right).\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{117}$$

Da Trigonometria Plana, lembre-se que

$$sen\,x+sen\,y=2sen\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{118}$$

$$sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\left(\frac{2.sen\frac{2s-a-b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}}{sen\,c}\right).\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{119}$$

$$sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\left(\frac{2.sen\frac{c}{2}.\cos\frac{a-b}{2}}{sen\,c}\right).\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{120}$$

e também que

$$sen\,c=2sen\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2} \tag{121}$$

Substituindo sen c, tem-se

$$sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\left(\frac{2.sen\frac{c}{2}.\cos\frac{a-b}{2}}{2sen\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\right).\cos\frac{\hat{C}}{2} \tag{122}$$

$$\boxed{sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\cos\frac{\hat{C}}{2}} \tag{123}$$

Analogamente, teremos

$$\boxed{sen\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\frac{sen\frac{a-b}{2}}{sen\frac{c}{2}}.\cos\frac{\hat{C}}{2}} \tag{124}$$

$$\boxed{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\left(\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\right).sen\frac{\hat{C}}{2}} \tag{125}$$

$$\boxed{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\frac{sen\frac{a+b}{2}}{sen\frac{c}{2}}.\text{sen}\frac{\hat{C}}{2}} \tag{126}$$

2.4.3 Analogias de Napier

Deduziremos, abaixo, as analogias de Napier partindo das fórmulas de Gauss-Delambre.

Demonstração: Deve-se dividir as fórmulas de Gauss – Delambre:

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{sen\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}=\frac{\frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}sen\frac{c}{2}}{sen\frac{\hat{C}}{2}}}{\frac{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{c}{2}}{sen\frac{\hat{C}}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}tg\frac{c}{2}} \qquad (127)$$

$$tg\frac{a-b}{2}=\frac{sen\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}=\frac{\frac{sen\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}sen\frac{c}{2}}{\cos\frac{\hat{C}}{2}}}{\frac{sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{\hat{C}}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\frac{a-b}{2}=\frac{sen\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}tg\frac{c}{2}} \qquad (128)$$

$$tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{sen\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}=\frac{\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\cos\frac{\hat{C}}{2}}{\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}sen\frac{\hat{C}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\hat{C}}{2}} \qquad (129)$$

$$tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\frac{sen\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}=\frac{\frac{sen\frac{a-b}{2}}{sen\frac{c}{2}}.\cos\frac{\hat{C}}{2}}{\frac{sen\frac{a+b}{2}}{sen\frac{c}{2}}.\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\frac{sen\frac{a-b}{2}}{sen\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\hat{C}}{2}} \qquad (130)$$

2.5 CÁLCULO DE ÁREAS

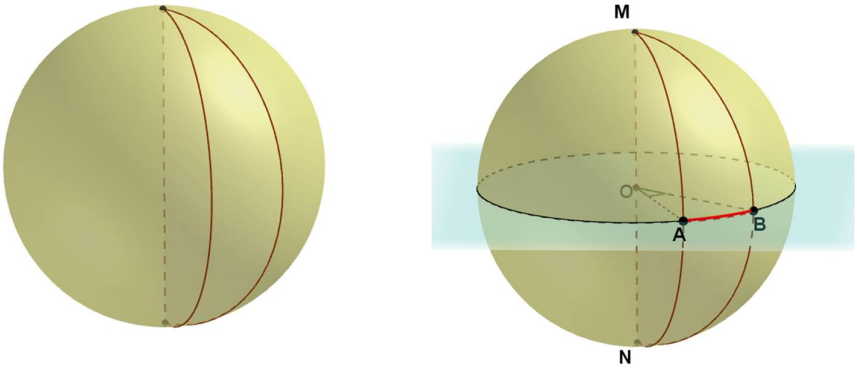
Ainda que este tópico esteja mais relacionado à Geometria, o cálculo da área de um triângulo esférico pode ser um incremento a alguns problemas de Trigonometria

Esférica. Para se compreender a demonstração da área do triângulo, inicialmente deve-se ver o cálculo da área de um fuso.

2.5.1 Área de um fuso esférico

Ao girar de um certo ângulo (α) uma semicircunferência em torno seu diâmetro (MN), obtém-se uma superfície denominada fuso esférico. Na figura 17, o plano representado é perpendicular ao eixo MN e sua intersecção com as semicircunferências determina os pontos A e B e $\alpha = \widehat{AOB}$.

Figura 17 – fuso esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

Para se calcular a área da superfície de um fuso esférico, deve-se observar que sua área é proporcional ao ângulo α.

$$\frac{360^0}{\alpha} = \frac{4\pi r^2}{A_f} \tag{131}$$

$$A_f = \frac{\alpha . 4\pi r^2}{360^0} \tag{132}$$

$$\boxed{A_f = \frac{\alpha \pi r^2}{90^0}} \tag{133}$$

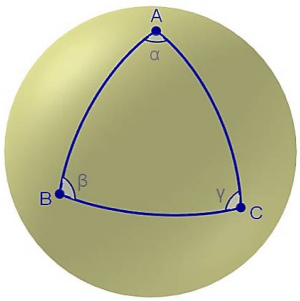
Ou, em radianos

$$\boxed{A_f = 2.\alpha r^2} \qquad (134)$$

2.5.2 Área do triângulo esférico e teorema de Girard

Considere uma esfera de raio r e um triângulo ABC em sua superfície (ver figura 18).

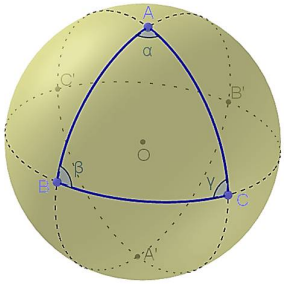
Figura 18 – Triângulo esférico e seus ângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

Prolongando os lados do triângulo, obtemos fusos de ângulos α, β e γ (ver figura 19). Observe que os vértices de cada fuso são pontos antípodas, ou seja, diametralmente opostos.

Figura 19 - Triângulo esférico e fusos esféricos



Fonte: Elaborada pelo autor

Para efeito de simplificação, considere [ABC] como sendo a área da superfície interior delimitada pelos arcos formados pelos pontos A, B e C e, de modo análogo,

considere as outras áreas. Primeiramente aceitemos, ainda que sem demonstração, que

$$\left[AB'C'\right] = \left[A'BC\right] \tag{135}$$

o que implica que a seguinte soma corresponde à área do fuso de ângulo α:

$$\left[ABC\right] + \left[AB'C'\right] = 2\alpha r^2 \tag{136}$$

Observe-se que as áreas dos seguintes fusos esféricos, em radianos, são dadas por:

$$[\mathrm{ABC}]+[\mathrm{AB'C}] = 2\beta r^2 \tag{137}$$

$$[\mathrm{ABC}]+[\mathrm{ABC'}] = 2\gamma r^2 \tag{138}$$

Efetue-se a seguinte soma, que resulta na área de metade da superfície esférica mais o dobro da área do triângulo ABC:

$$(\left[ABC\right] +[\mathrm{AB'C'}])+([\mathrm{ABC}]+[\mathrm{AB'C}])+([\mathrm{ABC}]+[\mathrm{ABC'}]) = (1/2).\left[\text{área da esfera}\right] + 2.\left[ABC\right] \tag{139}$$

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2\left[ABC\right] \tag{140}$$

Simplificando-se, obtém-se

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{[\mathrm{ABC}]}{r^2}} \tag{141}$$

Pode-se, ainda, isolar a área [ABC] :

$$\boxed{[\mathrm{ABC}] = (\ \alpha + \beta + \gamma - \pi\ ).\ r^2} \tag{142}$$

Ou, com os ângulos α , β , γ em graus

$$\boxed{[\mathrm{ABC}] = \frac{\left(\alpha + \beta + \gamma - 180^0\right)}{180^o}\pi r^2} \quad (143)$$

Diferentemente da Geometria Plana, no triângulo esférico a soma dos ângulos internos é maior do que 180º e o que ultrapassa esse valor é definido como excesso esférico:

$$\boxed{E = \alpha + \beta + \gamma - 180^o} \quad (144)$$

ou ainda,

$$\boxed{E = \alpha + \beta + \gamma - \pi} \quad (145)$$

A expressão (146) é conhecida como fórmula de Girard e dela pode-se concluir que quanto maior o valor do raio da esfera, menor o valor de $\frac{[\mathrm{ABC}]}{r^2}$, o que implica que a soma $\alpha + \beta + \gamma$ fica mais próxima de π assemelhando-se à Geometria Plana.

Outra conclusão é que, uma vez definidos os ângulos internos do triângulo e o raio da esfera, a área também se define, diferentemente da Geometria Plana, em que existem infinitos triângulos com os mesmos ângulos internos e implicando em áreas de medidas diferentes. Em outras palavras, na Geometria Esférica, dois triângulos com os mesmos ângulos internos são necessariamente congruentes.

Quando todos os ângulos de um triângulo são conhecidos a área é facilmente calculada. Se os ângulos não são dados, mas há dados suficientes para a resolução do triângulo, podem-se calcular os ângulos e depois, a área.

3 METODOLOGIAS

3.1 METODOLOGIA SUGERIDA: A ABORDAGEM CONCRETO-REPRESENTACIONAL-ABSTRATO (CRA)

A abordagem metodológica de ensino denominada Concreto-Representacional-Abstrato (CRA), também conhecida como Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA), baseia-se na concepção do psicólogo estadunidense Jerome Bruner, que distingue os estágios de representação enativa, icônica e simbólica, pelos quais se dá o aprendizado. Segundo Hoong, Kin e Pien (2015, p.1, Tradução nossa):

> As teorias de instrução propostas por Bruner em seu livro de 1966, Toward a Theory of Instruction, sem dúvida deixaram um rico legado a gerações de educadores no domínio da aprendizagem e da instrução. Dentre suas volumosas contribuições, uma das concepções mais conhecidas é a dos modos de representação "enactivo-icônico-simbólico". Esta concepção constitui a base para um espectro de práticas instrucionais relacionadas com a educação Matemática, todas com uma aparência tripartite conspícua ao modelo de Bruner. Uma dessas adaptações do modelo de Bruner é a sequência Concreto-Representacional-Abstrato (CRA).[4]

Esta abordagem possibilita uma facilitação da aprendizagem aos alunos que não possuem amplo domínio das técnicas Matemáticas. “A sequência CRA mostrou ser particularmente eficaz com os alunos que têm dificuldades com a Matemática[5]” (JORDAN, MILLER, MERCER, 1998; SOUSA, 2008 apud Hoong, Kin e Pien, 2015. p.1. Tradução nossa).

Para Bruner, a aprendizagem das crianças se dá pelo estágio das representações motoras, passando pelo estágio das representações icônicas até o

[4] The theories of instruction proposed by Bruner in his 1966 book *Toward a Theory of Instruction* have undoubtedly bequeathed a rich legacy to generations of educators in the domain of learning and instruction. Amongst his voluminous contributions, one of the most well-known conception is that of “enactive-iconic-symbolic” modes of representation. This conception forms the foundation for a spectrum of instructional practices related to mathematics education, all bearing a conspicuous tripartite semblance to the Bruner’s model. One such adaptation of Bruner’s model is the Concrete-Representation-Abstract (CRA) sequence.

[5] The CRA sequence has been shown to be particularly effective with students who have difficulties with mathematics.

estágio das representações simbólicas, e estas diferenciações estão no cerne da abordagem CRA. Segundo o professor português Ramiro Marques (p.1-2):

> Bruner, à semelhança de Piaget, procurou tipificar o desenvolvimento cognitivo numa série de etapas: até aos 3 anos de idade, a criança passa pelo estádio das respostas motoras, dos 3 aos 9 anos, faz uso da representação icónica, e a partir dos 10 anos de idade, acede ao estádio da representação simbólica. No primeiro estádio, a criança representa os acontecimentos passados através de respostas motoras apropriadas e privilegia a ação como forma de representação do real, sendo por isso que a criança dessa faixa etária aprende, sobretudo, através da manipulação de objectos. Nesta fase, a criança age com base em mecanismos reflexos, simples e condicionados até conseguir desenvolver automatismos. A segunda etapa, a representação icónica, baseia-se na organização visual, no uso de imagens sinópticas e na organização de percepções e imagens. A criança é capaz de reproduzir objectos, mas está fortemente dependente de uma memória visual, concreta e específica. A terceira etapa, a representação simbólica, constitui a forma mais elaborada de representação da realidade porque a criança começa a ser capaz de representar a realidade através de uma linguagem simbólica, de carácter abstracto e sem uma dependência directa da realidade. Ao entrar nesta etapa, a pessoa começa a ser capaz de manejar os símbolos em ordem não só a fazer a sua leitura da realidade mas também a transformar a realidade.

A abordagem CRA visa permitir aos alunos aprender Matemática significativa, e capacitar o professor a utilizá-la em todos os graus, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Consiste em uma sequência estruturada para se aprender matemática em que se orientam os alunos no sentido de, primeiramente, assimilar os conceitos, e só após isso, as regras e os métodos.

> CRA é uma intervenção para a instrução Matemática e este recurso pode melhorar o desempenho em Matemática de estudantes com dificuldades de aprendizagem. Trata-se de uma estratégia instrucional em três partes, com cada parte se baseando na instrução anterior para promover a aprendizagem e assimilação e para abordar o conhecimento conceitual por parte dos estudantes. A seqüência instrucional da CRA consiste de três estágios: concreto, representação e resumo. (CONCRETE ..., 2009, p.1. Tradução nossa)[6]

Durante a atividade, o professor conduz a aula, dá sugestões, faz questionamentos e os alunos se comunicam e compartilham seu entendimento e as atividades podem ser realizadas individualmente ou em pequenos grupos. Com esta

[6] CRA is an intervention for mathematics instruction that research suggests can enhance the mathematics performance of students with learning disabilities. It is a three-part instructional strategy, with each part building on the previous instruction to promote student learning and retention and to address conceptual knowledge. The CRA instructional sequence consists of three stages: concrete, representation, and abstract. (CONCRETE..., 2009, p. 1).

abordagem metodológica é possível facilitar a assimilação do conteúdo matemático, mesmo daqueles que possuem mais dificuldades em aprender. Parte-se do estágio concreto, passando pelo representacional, também chamado de pictórico e segue-se para o estágio abstrato. Porém, antes de passar para o estágio das representações, é necessário que o docente verifique, baseado na sua experiência profissional, se os alunos compreenderam os conceitos abordados com materiais concretos. E, em seguida, certifique-se a respeito da compreensão do aluno, para que não se avance diretamente para o abstrato se os alunos não tiverem compreendido o nível representacional.

3.1.1 Estágios da abordagem CRA

- **Estágio concreto:** Esta etapa se traduz em aprender fazendo. Orienta-se os alunos a descobrir conceitos, resultados matemáticos abstratos e a pensar em possíveis generalizações partindo de manipulações e experiências concretas. O estágio concreto da aprendizagem tem um apelo a uma exploração multi-sensorial, em que o aluno vê, manipula, sente o objeto. A manipulação física de objetos visa à percepção de conceitos necessários para resolver um dado problema de Matemática, ou para responder a um dado questionamento. Nesta dissertação sugerem-se atividades que explorem os conceitos e habilidades, inicialmente por meio de materiais concretos e manipuláveis.
- **Estágio representacional:** No estágio representacional, também chamado de semi-concreto deve-se introduzir representações dos objetos para modelar o conceito, e nesta fase espera-se que o aluno já esteja familiarizado com vários conceitos e propriedades da Matemática. É explorado o uso de imagens, desenhos, figuras, esquemas para representar objetos visando entender o conteúdo matemático. O docente deve modelar o conceito e oferecer muitas oportunidades de prática, o que é imprescindível nos três níveis. Os alunos precisam de tempo para processar as informações e fazer conexões com o que já sabem. Nesta dissertação a parte representacional é abordada usando-se o *software* Geogebra, pois permite que se explorem representações de objetos da Trigonometria/Geometria Esférica.

- **Estágio abstrato:** O passo final da abordagem CRA é chamado de estágio abstrato. É equivalente ao estágio "simbólico" da teoria de Bruner e envolve o uso apenas de números e símbolos para resolver um problema de Matemática, sendo que é a abstração que dá à Matemática seu poder. Neste estágio os modelos representacionais pictóricos devem ser representados simbolicamente. Espera-se que o aluno já tenha a maturidade necessária para desenvolver as atividades utilizando-se de conceitos abstratos. Deve-se gradualmente substituir as representações pelos símbolos matemáticos. Ao desenvolver esta etapa deve-se verificar a compreensão do aluno. Se os alunos estiverem com muita dificuldade, volta-se aos níveis concreto e representacional. Dispender muito tempo usando imagens desenhadas ou virtuais para os alunos praticarem o conceito é essencial, pois abstração sem compreensão conduz à confusão. É necessário que o docente propicie atividades que permitam aos alunos praticarem usando apenas números e símbolos. Nesta dissertação, a parte abstrata será explorada nas aplicações da Trigonometria/Geometria Esférica.

Observação: Nesta obra, não foi feita uma separação exclusiva das três partes da sequência CRA, mas tão somente dá-se ênfase às características principais de cada etapa que a constitui, deste modo não seguindo à risca a abordagem.

Seguidamente, ainda neste capítulo, faz-se a apresentação dos tópicos sobre materiais concretos e sobre o *software* Geogebra, mas não se elaborou um sobre aspectos abstratos, pois isto está contido na maior parte do texto que, predominantemente versa sobre Trigonometria/Geometria Esférica. Um aprofundamento na abstração, que é inerente à própria natureza da Matemática, está presente no apêndice A.

3.2 MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma abordagem pedagógica comum para ajudar os alunos a compreenderem conceitos abstratos é o uso de materiais concretos, pois representam um contraponto a métodos de ensino tradicionalistas focados apenas em listas de exercícios. É

comum professores e mesmo livros didáticos adotarem sequências didáticas que iniciam apresentando o conceito formal e abstrato, e sobre isto, lê-se em Toledo e Toledo (apud SILVA et al., 2016, p.3) que:

> Muitas vezes, os professores de Matemática e mesmo os livros didáticos indicam uma nova unidade pela etapa da representação: em primeiro lugar, vem a definição (representação formal do conceito); depois, alguns exemplos; a seguir representações práticas em que se pode aplicar aquele conceito. Esse, acreditamos, é um dos grandes motivos pelos quais os alunos mesmo os de cursos de nível médio, acham que a Matemática é uma disciplina em que se devem decorar algumas regras e aplica-las em situações de sala de aula, e que nada tem a ver com a vida prática.

Teorias para conduzir a aprendizagem do aluno do concreto ao abstrato, estão sendo incluídas a teorias de ensino, pesquisa e prática, especialmente em educação Matemática. A constante utilização de materiais concretos pode fornecer uma base de experiências ao estudante que está mais adequado ao mundo exterior à escola, facilitando o processo de aprendizagem, sendo que muitos conceitos matemáticos podem ser desenvolvidos e reforçados pelo uso frequente destes materiais.

O uso de materiais concretos não é novidade alguma, mas uma tendência em séries escolares mais avançadas, pois se observa que é comum o uso desses materiais no ensino infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental, o que depois é abandonado e entra-se numa fase em que se tem basicamente o professor ao quadro ensinando o aluno, sem auxílio de outros recursos. Embora eles sejam usados principalmente nos graus elementares, eles oferecem um meio útil para introduzir novos conceitos para todos os alunos, inclusive aos em níveis escolares mais avançados.

É a interação professor, aluno, material que conduz a um aprendizado significativo. Esses materiais são apenas meios, não a finalidade em si, então, cabe ao professor descentralizar dos materiais e focar no método, através de sugestões de uso e interação, tendo em mente uma finalidade em termos de conteúdo e aplicação e, desse modo, conduzir o aluno a uma reflexão aprofundada.

Os objetos concretos permitem que alunos e professores representem concretamente os conceitos abstratos que eles estão aprendendo em sala de aula de Matemática e vinculem esses conceitos a conhecimentos prévios. A aprendizagem dos alunos tem início com experiências visuais e tangíveis para estabelecer

compreensão básica e, em seguida, os alunos são capazes de ampliar seus conhecimentos através de representações pictóricas, como desenhos, esquemas ou diagramas, e, finalmente, são capazes de passar para o nível abstrato do pensamento, em que os alunos usam exclusivamente símbolos matemáticos para representar seus modelos.

Existem alguns contrapontos que merecem destaque na abordagem com materiais concretos. Primeiramente, o uso desses materiais, por si só, não garante o sucesso, pois uma vez que seu uso esteja plenamente incorporado às aulas, há o risco de os alunos começarem a usar esses objetos de forma mecanizada, sem que haja reflexão. Há ainda um falso dualismo de que a Matemática na qual se usa materiais concretos é boa e se ficar só no abstrato é ruim, quando na verdade o desafio é passar do concreto ao abstrato e, muito embora se possa crer que a instrução tem seu começo e fim com o 'concreto', estes não são suficientes para garantir uma aprendizagem significativa, mas apenas um caminho. Entre outras críticas quanto ao uso de materiais concretos, encontram-se as mais contundentes em Carraher e Schliemann (1988. p.179-180 apud FIORENTINI; MIORIM,1990)

> "não precisamos de objetos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados" (p. 179). Isto porque o material "apesar de ser formado por objetos, pode ser considerado como um conjunto de objetos 'abstratos' porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não têm qualquer conexão com o mundo da criança" (p. 179-180)

3.2.1 Materiais concretos no ensino de Trigonometria/Geometria Esférica

Temos como uma das metas iniciais desta dissertação explorar potencialidades do uso de materiais concretos como recurso para o entendimento de conceitos da Trigonometria/Geometria Esférica, através de construções com esses materiais, inicialmente explorando conceitos básicos e suscitando questionamentos como: o que é uma linha "reta" na Geomeria Esférica? É possível termos "retas" paralelas nesta Geometria? E retas perpendiculares? Em todo caso, sempre apresentando primeiramente o conceito tal como o conhecemos da Geometria Plana.

Comparando e diferenciando propriedades da Geometria no plano com propriedades da Geometria na superfície esférica, pode-se conduzir os alunos a uma compreensão mais segura dos conceitos geométricos e os levar a fazer conjecturas e generalizações, que são parte importante do pensamento matemático.

Materiais que permitam manipulações são fundamentais para o ensino da Geometria, porque eles permitem uma didática facilitadora da compreensão de conceitos abstratos. Conceitos e propriedades da Geometria/Trigonometria Esférica serão explorados propondo atividades com materias concretos, como construir um fuso, medir ângulos e lados no triângulo esférico.

3.2.2 Metodologia de aplicação dos materiais concretos

A proposta metodológica de ensino relacionada a materiais concretos necessita como pré-requisitos que os alunos estejam familiarizados com conceitos da Geometria Plana e da Trigonometria Plana, o que implica a necessidade do professor revisitar conteúdos já ministrados, pois isto facilitará o entendimento de conceitos da Geometria/Trigonometria Esférica tais como propriedades do triângulo esférico relacionados a ângulos, lados e áreas. O docente deve partir de conceitos que já estejam solidificados na mente de seus alunos e explorar esses conhecimentos prévios, induzi-los a analisar, refletir, comparar conceitos e propriedades usando construções com materiais concretos para chegar aos conceitos abstratos.

3.3 O USO DE COMPUTADORES EM SALA DE AULA

O uso de computadores em sala de aula é parte de uma iniciativa que tem em vista a inclusão digital e adequação a métodos de educação modernos, visando sempre o ensino e aprendizagem de qualidade. Com o surgimento do computador e sua posterior popularização, muitas escolas têm lançado mão desta ferramenta, com o intuito de modernizar o ambiente escolar, proporcionando métodos alternativos de ensino e de aprendizagem.

Entretanto, ainda existem resistências quanto ao uso do recurso computacional nas escolas, como fatores de natureza estrutural, política, de ordem prática e

dificuldades dos professores para lidar com estas tecnologias. O que dificulta a inserção de métodos de ensino com apelo a ferramentas computacionais. Giraldo, Caetano & Matos (2012, p. VII) expõem tais dificuldades sobre o uso de recursos computacionais afirmando que:

> Sabemos que, em muitos casos, a incorporação de tecnologias digitais a escola esbarra em barreiras de ordem prática, tais como carência de recursos materiais, ou resistências políticas por parte das direções escolares. Entretanto, esta constatação não implica que os professores que vivenciam essas realidades em suas práticas devam ignorar as possibilidades oferecidas pelos recursos computacionais para o enriquecimento do ensino de Matemática. Ao contrário, justamente para se munir de contra-argumentos para tais obstáculos, é importante conhecer essas possibilidades. (GIRALDO; CAETANO; MATOS, 2012, p. VII).

Muitos são os *softwares* que funcionam como facilitadores do ato de ensinar, e este trabalho entre outros propósitos pretende despertar no docente o interesse de aplicar o recurso computacional na sala de aula, levando-se em consideração sua necessidade crescente de se adaptar às novas necessidades da educação.

Deve-se, porém, destacar que uma abordagem computacional com respaldo pedagógico não consiste apenas em usar tais recursos, pois o importante é a forma como os usamos. O diferencial do uso do computador deve estar em suas peculiaridades, em se explorar aspectos que podem facilitar a compreensão de conceitos matemáticos. Deste modo não se deve apenas inserir essas ferramentas computacionais a aulas tradicionais que insistam apenas em métodos instrutivos, sem que haja uma reflexão a respeito. Sobre o uso de tecnologias digitais, relatam Doerr & Zangor (2000, p.144, apud GIRALDO, CAETANO, MATOS, 2012, p. viii), que:

> Muitos, se não a maioria, dos estudos sobre calculadoras gráficas são quase experimentais em planejamento e procuram responder à questão se calculadoras gráficas são efetivas ou não em atingir certos objetivos instrucionais, que frequentemente são mantidos os mesmos das abordagens tradicionais com papel e lápis [...]. Muitos desses estudos comparam o uso de calculadoras gráficas com o uso de papel e lápis no mesmo conjunto de tarefas, dando apenas insight limitado a como e porque estudantes usam calculadoras gráficas em contextos instrucionais.

Ainda em se tratando de recursos computacionais é destacado em Giraldo, Caetano, Matos (2012, p. viii) que:

> Embora a crítica das autoras diga respeito originalmente à calculadora gráfica, sua observação também se aplica ao uso de quaisquer tecnologias digitais no ensino de Matemática. Mais do que simplesmente buscar formas

> por meio das quais essas tecnologias possam ajudar a atingir os objetivos instrucionais usuais, deve-se refletir sobre como podem abrir caminhos para o estabelecimento de novos objetivos. Para que este fim seja atingido, é importante que sejam elaboradas atividades de aprendizagem que aproveitem as especificidades dos recursos computacionais para disparar investigação Matemática e para revelar aspectos dos conceitos que ficariam ocultos com recursos ou representações convencionais.

Cabe ao professor ter conhecimento sobre recursos computacionais e orientar os alunos nas atividades em sala de aula, bem como sugerir *software*s que possam ser úteis ao desenvolvimento de suas aulas e das habilidades de seus alunos com a Matemática.

3.3.1 O *software* Geogebra

O Geogebra é um *software* que pode ser usado a partir das primeiras turmas do Ensino Fundamental, desde que os mesmos tenham noções básicas de Geometria, que é a principal ferramenta deste programa. Antes da popularização dos computadores para finalidades educacionais, os professores eram obrigados a usar réguas, esquadros, transferidores e compassos para os auxiliarem nas tarefas de construções geométricas. Atualmente, para séries avançadas, não há mais esta necessidade, muito embora ainda existam professores que continuem usando estes instrumentos. Porém, isso não descarta totalmente o uso de materiais de desenho, principalmente no que tange às séries iniciais, mas coloca o Geogebra como uma alternativa.

Uma das principais vantagens quanto ao uso do Geogebra é que permite explorar criar um objeto e efetuar modificações com extrema facilidade, usando por exemplo, a ferramenta arrastar. Observe que quando se usa esta ferramenta para movimentar partes do objeto obtêm-se, diversas representações, as quais o aluno pode encarar como sendo novos objetos ou um mesmo objeto, que no entanto sofreu modificações. Giraldo, Caetano, Matos (2012, p. viii) relatam algumas das vantagens do uso de *software*s de Geometria dinâmica:

> Segundo um conhecido dito popular, uma imagem vale mais do que mil palavras. Em ambientes de geometria dinâmica, são utilizadas literalmente

> centenas de imagens sobrepostas, que se articulam entre si e são manipuladas de forma interativa. Imagine, então, quantas ideias podem ser traduzidas, com o auxílio da geometria dinâmica!

O Geogebra é um programa de Geometria dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter, com a finalidade de ser utilizado em sala de aula para o ensino aprendizagem da Geometria. Seu inventor iniciou o projeto em 2001, na Universidade de Salzburg e tem dado continuidade ao mesmo na Florida Atlantic University. O *software* foi desenvolvido em linguagem Java. O Geogebra é um *software* que tem uma infinidade de utilidades, que compreendem tópicos como álgebra, Trigonometria, Cálculo e Geometria. Este programa já se tornou uma ferramenta popular em cursos de ensino superior em Matemática, existindo outros similares como o *CabriGéomètre* e o *Régua e Compasso*. Através deste é possível realizar construções utilizando pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada. Também podem ser incluídas equações e coordenadas diretamente.

Em pesquisas na *internet* encontram-se diversos materiais para aprender a usar o Geogebra, como tutoriais em *PDF* e vídeos. O sítio https://www.geogebra.org/materials/ dispõe de inúmeros arquivos ggb, extensão do Geogebra, prontos para usar e o *site* www.ogeogebra.com.br/ disponibiliza várias aulas, tutoriais e cursos.

Este *software* pode ser encontrado para *download* no *site* http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/ para diversas plataformas, entre elas, *Windows, Linux e Macintosh* e também existem versões para celulares, *tablets* e *smartphones*. O Geogebra é classificado como *software* livre, pois permite adaptações ou modificações em seu código de forma espontânea, ou seja, sem que haja a necessidade de solicitar permissão ao seu proprietário para modificá-lo.

4 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE TRIGONOMETRIA/GEOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo, serão apresentadas algumas propostas de atividades para abordar a trigonometria esférica em sala de aula. Segue-se a sequência:

- Atividades com materiais concretos;
- Atividades com o *software* Geogebra;
- Atividades de resolução de problemas.

4.1 ATIVIDADES COM MATERIAIS CONCRETOS

4.1.1 Materiais Necessários

Para a realização das atividades serão necessários alguns materiais. Um deles, o transferidor esférico, deve ser construído. Neste caso, descreveremos o procedimento para sua construção.

Lista de materiais a comprar:

- Esfera de isopor de tamanho maior ou igual a 150 mm;
- Fitas de cetim de até 1cm de largura, barbante ou liga elástica;
- Transferidor;
- Régua ou fita métrica;
- Marcador permanente;
- Fita adesiva;
- Canudinhos de plástico;
- Tesourinhas;
- Folha de acetato;
- Régua;
- Estilete;

4.1.1.1 Construção do Transferidor Esférico

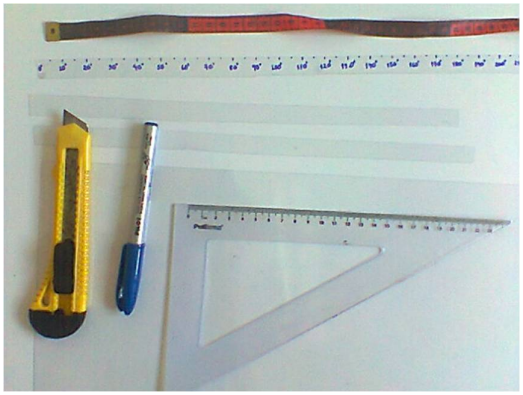
Para facilitar a elaboração de círculos máximos, bem como a medição em graus dos lados do triângulo esférico, inicialmente deverá ser construído um **transferidor esférico**. Para isso, são necessários os seguintes materiais: folha de acetato, estilete, fita métrica, marcador permanente, régua, fita adesiva e esfera de isopor (ver figura 20 a). Usando-se uma esfera de 20 cm de diâmetro, o comprimento de uma circunferência máxima é dado pelo produto do diâmetro pelo valor de pi, que usaremos 3,14, e disto resulta 62,8 cm, porém, devido às imperfeições o valor real pode ser um pouco menor ou maior que este.

Com auxílio de estilete e régua, devem-se cortar tiras de acetato: Uma um pouco maior do que 62,8 cm, para que o transferidor possa ser ajustado ou retirado mais facilmente, e outras duas um pouco maiores do que o comprimento de uma semicircunferência (31,4 cm). A primeira destas fitas é a circunferência máxima que servirá de base e as outras duas servirão de suporte.

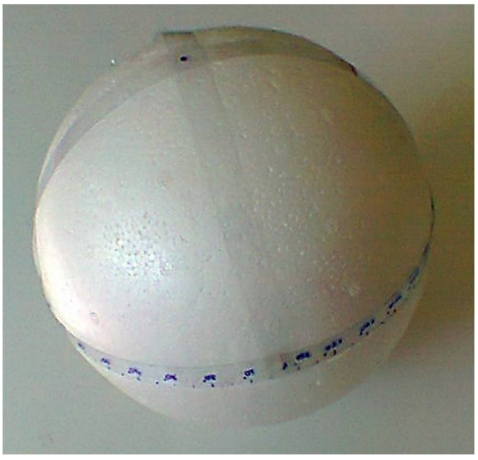
Dividimos 62,8 cm por 360, e obtemos o valor 0,174 cm, que é equivalente a 1º e 10º equivalem a 1,74 cm. Primeiramente, marcaremos a fita de 10 em 10 graus, ou seja a cada 1,74 cm, e para isso usaremos a régua e o marcador permanente. Em seguida devem-se escrever os valores das medidas: 0º, 10º, 20º até 360º e marcar mais um ponto entre cada marcação já feita, de modo que ter-se-á divisões de 5 em 5 graus na fita. Junte as pontas e fixe-as com fita adesiva. Para finalizar a elaboração do transferidor esférico fixe com fita adesiva as duas outras fitas menores à circunferência já feita (ver figura 20 b). Na figura 20 c, vemos um transferidor esférico ajustado a uma esfera de isopor e na figura 20 d, o transferidor sendo usado para elaborar um círculo máximo com fita de cetim.

Figura 20 – Construção do transferidor esférico

a) b)



c) d)



Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.2 Atividades propostas

O professor deve orientar os alunos nas atividades com materiais concretos e valorizar o entendimento e assimilação dos conceitos abstratos. O professor pode optar por realizar todas as 12 atividades sugeridas ou escolher apenas as que se adequem ao nível de suas turmas e ao tempo disponível para aplicação. Possíveis dificuldades dos alunos serão: marcar pontos antípodas na esfera, garantir que as circunferências elaboradas sejam máximas, lidar com a espessura das fitas, medir os

ângulos entre as retas tangentes, entre outras. Cumpre ao professor atenuar e contornar essas dificuldades, propondo meios e sugestionando maneiras para realiza-las.

Atividade 01) Explorar conceitos da Geometria Esférica:

Nesta atividade deverão ser explorados conceitos básicos da Geometria Esférica suscitando questionamentos como: o que é uma “reta” na geomeria esférica? É possível termos “retas” paralelas nesta Geometria? E retas perpendiculares? Em todo caso, sempre apresentando primeiramente o conceito tal como o conhecemos da Geometria Plana.

a) Tendo em vista a Geometria Esférica construa uma “reta” em uma esfera de isopor usando fitas de cetim. Em seguida, marque dois pontos quaisquer na esfera e crie um segmento de “reta” pela superfície esférica;

Sugestões ao professor: Nesta atividade exploramos o conceito de reta e de segmento de reta. Propomos ao docente fazer comparativos entre a Geometria Euclidiana e a Esférica. Na Geometria Euclidiana a reta é infinita e dados dois pontos quaisquer, sempre existe uma reta que passa por eles. Esses dois pontos definem um segmento de reta que é o menor caminho ligando-os. Sugere-se ao aluno (através de uma dinâmica de discussões) que, seguindo este raciocínio de menor distância, na Geometria Esférica a reta é um círculo máximo e um segmento de reta é um arco de circunferência máxima (o menor). Nos próximos itens ora usaremos o termo circunferência máxima ora usaremos a palavra “reta”. Cabe ao professor esclarecer esta situação para evitar possíveis confusões por parte do aluno. Outra possibilidade é o docente adotar tão somente a palavra “reta”. Na figura 21 a, tem-se uma “reta”, na figura 21 b, dois pontos e na figura 21 c o segmento de “reta” definido por esses dois pontos.

Figura 21 – “Reta” e segmento de “reta” na Geometria Esférica

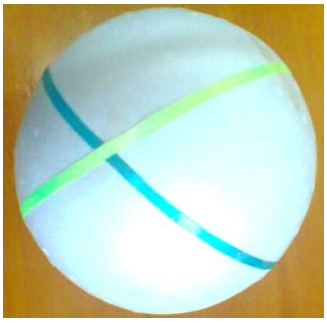
a) b) c)

Fonte: Elaborada pelo autor

b) É possível termos retas paralelas em uma esfera? Use os materiais listados, elabore uma construção e verifique.

Sugestões ao professor: No plano, duas retas paralelas não possuem intersecção, ou seja, nunca se “encontram”. A partir deste conceito, o professor deve questionar os alunos se o conceito de paralelas da Geometria Euclidiana Plana se encaixa também na Geometria Esférica. Instigando os alunos à reflexão, espera-se que estes concluam que não é possível construir retas paralelas na Geometria Esférica, pois nesta, duas retas quaisquer sempre possuem interseção. Exatamente dois pontos de interseção, que são chamados de antípodas. Na figura 22 temos a construção esperada.

Figura 22 – Não existem retas paralelas na Geometria Esférica



Fonte: Elaborada pelo autor

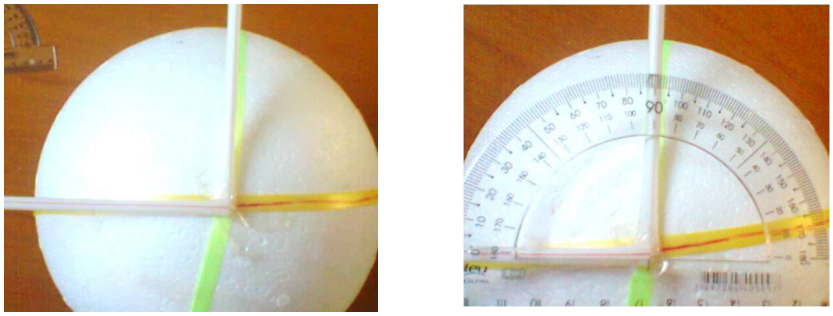
c) É possível construir retas perpendiculares em uma esfera? Caso seja possível, construa, com os materiais já listados.

Sugestões ao professor: Pode o professor explicar que na Geometria Euclidiana Plana, retas perpendiculares são as que formam um ângulo reto (90º) entre

si. E, induzir o aluno a refletir quanto à extensão deste conceito à Geometria Esférica. Os alunos podem elaborar tal construção, pois não há nenhum empecilho à isto, logo, é possível ter-se ângulos retos na Geometria Esférica ou seja, retas perpendiculares (ver figura 23). Mas, cabe relembrar e diferenciar que na Geometria Esférica, duas retas distintas sempre têm duas interseções e, portanto, as retas perpendiculares também as possuem, diferentemente da geometria euclidiana. Neste ponto, o professor deverá trabalhar a forma de medir esses ângulos entre retas. Para isso fará uso dos canudos e transferidor.

Figura 23 – Construção de retas perpendiculares

a) b)



Fonte: Elaborada pelo autor

d) Três retas no plano só formam um triângulo se não forem paralelas duas a duas, e nem concorrentes em um único ponto. E na Geometria Esférica? Construa três retas em uma esfera e verifique.

Sugestões ao professor: o docente deve recapitular com os alunos o item b sobre paralelas, e conduzir o aluno ao seguinte raciocínio: na Geometria Esférica, se duas retas sempre se interseccionam em dois pontos, então as três retas do plano se interseccionam duas a duas, logo triângulos serão formados ou, no caso das intersecções duas a duas serem nos mesmos dois pontos antípodas, ter-se-á a formação de fusos esféricos. O aluno deve ser conduzido a perceber na construção que com as três retas dão origem a seis intersecções e oito triângulos esféricos. Pode-se solicitar que façam retas perpendiculares entre si obtendo, desta forma, os oito octantes da esfera. Na figura 24 a construção esperada.

Figura 24 – Três “retas” na Geometria Esférica

Fonte: Elaborada pelo autor

Atividade 02) Construa um fuso esférico, meça seu ângulo e calcule sua área.

Sugestões ao professor: Nesta atividade o docente, além de introduzir estes conceitos, conduz seus alunos, primeiramente, a uma reflexão sobre medida de ângulos. É importante levar os alunos a compreender o conceito de ângulo. Um ângulo plano é a região limitada por duas semirretas de mesma origem, e esta origem comum das semirretas é denominada vértice. Um ângulo esférico é constituído de um vértice e dois arcos de circunferência, que equivalem à semirreta do caso plano, e medimos o ângulo esférico pelo ângulo plano formado pelas tangentes à esfera que passam pelo vértice, de tal modo que estas tangentes possuam projeção ortogonal (vista superior) sobre os arcos de circunferência que constituem o ângulo esférico, ou em outras palavras, que os arcos e as tangentes sejam coplanares.

Em vista de possíveis dificuldades de compreensão do conceito de ângulo esférico por parte dos alunos, o professor deverá fazer uma revisão de conceitos da Geometria Plana, como projeção ortogonal e tópicos relativos a ângulos planos, de acordo com a necessidade da turma. Ainda nesta atividade deve-se explorar o conceito de área da superfície de um fuso, sendo que para isso o professor deverá rever e explicar que esta é proporcional ao ângulo esférico.

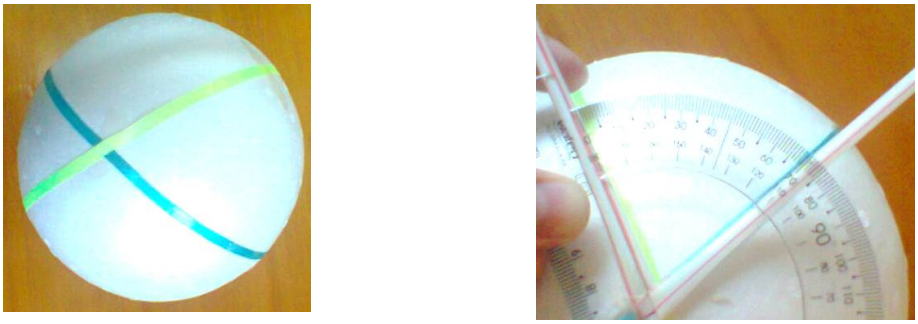
Etapas da atividade:

i. Usando fita de cetim ou barbante, construa duas circunferências máximas, deste modo criando fusos esféricos (ver figura 25 a);

ii. Escolha um fuso e faça com canudo, duas retas tangentes às semicircunferências máximas que constituem o fuso passando pelo vértice;
iii. Com ajuda do transferidor, meça o ângulo do fuso, que corresponde ao ângulo entre as tangentes (ver figura 25 b);
iv. Calcule a área do fuso esférico formado.

Figura 25 – Fuso esférico e medição de ângulo

a) b)



Fonte: Elaborada pelo autor

Atividade 03) Construa um triângulo esférico e verifique a desigualdade triangular em relação a seus lados.

- Usando fita de cetim construa três circunferências máximas na esfera de isopor e use fita adesiva para fixá-las;
- Escolha um dos oito triângulos esféricos formados e meça, com o transferidor esférico, em graus, os lados do triângulo escolhido e anote as medidas (ver figura 26);
- Verifique se a soma dos lados obedece às seguintes desigualdades.

$$\begin{aligned} |\mathrm{b} - c| &< a < b + c \\ |a - c| &< \mathrm{b} < \mathrm{a} + c \\ |a - \mathrm{b}| &< \mathrm{c} < \mathrm{a} + \mathrm{b} \end{aligned} \tag{151}$$

Figura 26 – Medição de lado de triângulo esférico

Fonte: Elaborada pelo autor

Sugestões ao professor: após efetuar as medições dos lados, deve-se instigar os alunos a refletirem quanto às possíveis relações entre os lados do triângulo esférico, propondo a eles que anotem as medidas, somem medidas e comparem. O docente também pode relembrar a desigualdade triangular da Geometria Euclidiana para efeito de comparação com a Geometria Esférica.

Atividade 04) Construa um triângulo esférico e verifique a soma de seus três ângulos e de seus três lados.

- Use o triângulo esférico criado na atividade anterior e, usando um transferidor, meça seus ângulos.
- Verifique que a soma dos três ângulos do triângulo esférico resulta em valor maior do que 180º e menor do que 540º
- Usando o transferidor esférico meça os três lados do triângulo.
- Verifique que a soma dos três lados é um valor maior do que 0º e menor do que 360°.

Sugestões ao professor: O professor pode sugerir duas possibilidades ao aluno: medir esses ângulos diretamente com o transferidor, ou usar canudos como tangentes e seguidamente fazer a medição. O canudo é apenas acessório para facilitar a medição. O docente pode revisar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano e questionar os alunos quanto a sua validade num triângulo esférico.

4.2 ATIVIDADES COM O GEOGEBRA

As próximas atividades foram elaboradas usando o Geogebra. O objetivo aqui é explorar aspectos representacionais da Trigonometria/Geometria Esférica. Para aplicação, têm-se três opções:

- O professor pode levar as atividades prontas e usá-las projetando no *Datashow*, o que ainda é uma vantagem, pois poderá fazer construções e manipulações geométricas que sem o *software* não conseguiria fazer. Recomenda-se esta opção para o caso de a escola ou a turma não disporem de computadores, ou disporem em quantidade insuficiente.
- O professor pode levar as atividades prontas para os alunos usarem em seus computadores. E isto possibilita tanto o professor quanto o aluno explorá-las. Recomenda-se esta alternativa se houver disponibilidade de computadores para os alunos.
- O professor pode juntamente com os alunos, passo a passo, desenvolver as atividades. Esta opção é recomendada para o caso de haver disponibilidade de computadores, bem como tempo para elaborar as aplicações no *software*.

Atividade 05) Distância esférica.

Nesta atividade o professor auxilia nas construções com o Geogebra e verifica com os alunos algumas definições relacionadas a medidas de distâncias na superfície esférica. O professor pode optar por levar o arquivo ggb pronto para os alunos usarem ou orientá-los nas seguintes etapas da construção no Geogebra:

Primeiramente construímos uma esfera de centro O, um plano α que passa por O e uma circunferência que é a interseção entre a esfera e o plano (ver figura 27).

P1) Clicamos no ícone e escolhemos uma das formas de se criar a esfera: entrando com o centro e um de seus pontos ou entrando com o centro e a medida do raio; Entraremos com uma circunferência de raio igual a 3 (ou outra medida qualquer, desde que a mantenha durante a atividade).

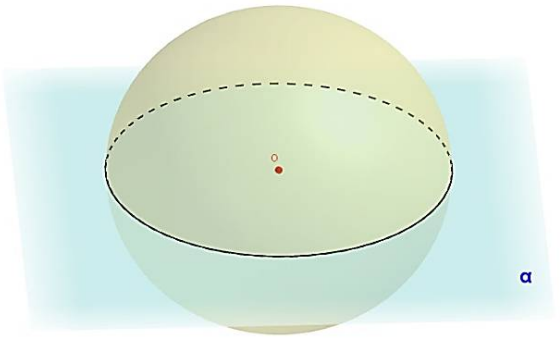
P2) Em seguida, criamos dois pontos na esfera clicando no botão e, depois na esfera;

P3) Criamos o plano α clicando no ícone ,indo até a opção **Plano por três pontos,** clicando nos dois pontos criados e no ponto do centro da esfera;

P4) Criamos uma circunferência clicando no ícone selecionando o centro da esfera, clicando em um dos pontos criados na superfície e inserindo o raio igual a 3.

P5) Por último, podemos ocultar os pontos usados (exceto o ponto central da esfera), para isso, clicando no objeto com o botão direito do *mouse* e desmarcando a opção **Exibir Objeto**.

Figura 27 – Esfera de centro O e plano α passando pelo centro



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, criamos um plano β paralelo ao plano α e não coincidente.

P6) Marca-se um ponto qualquer na esfera (que não pertença ao plano α), para isso, clicando no ícone e depois na esfera.

P7) Em seguida, clicamos no botão **Plano Paralelo** , depois no ponto criado no passo anterior e no plano α criado. Como resultado, tem-se o plano β paralelo ao plano α (ver figura 28).

Agora, deve-se criar a intersecção entre a esfera e o plano β. Primeiramente criamos uma reta passando pelo centro da esfera e perpendicular ao plano α.

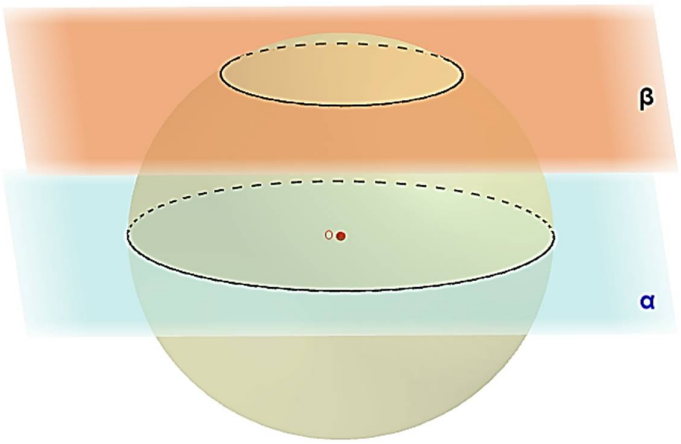
P8) Para isso, clicamos no ícone **Reta Perpendicular** , clicamos no ponto central da esfera e no plano criado no passo P8.

P9) Em seguida, clicamos no ícone **Círculo Dados Eixo e Um de seus Pontos** , e para terminar, clicamos na reta perpendicular e no ponto criado em P6.

P10) E, novamente, podemos ocultar os objetos que não sejam mais necessários, clicando com o botão direito do *mouse* no objeto e desmarcando a opção **Exibir Objeto**.

Deste modo obtemos a esfera com os planos paralelos α e β, conforme vemos na figura 28.

Figura 28 – Esfera de centro O, plano α passando pelo centro e plano β paralelo a α.



Fonte: Elaborada pelo autor

Com esta atividade o professor pode explicar aos alunos que, como o plano α passa pelo centro da esfera, então ele define uma circunferência máxima e que, o plano β, como não passa pelo centro, então não define uma circunferência máxima, mas uma circunferência menor.

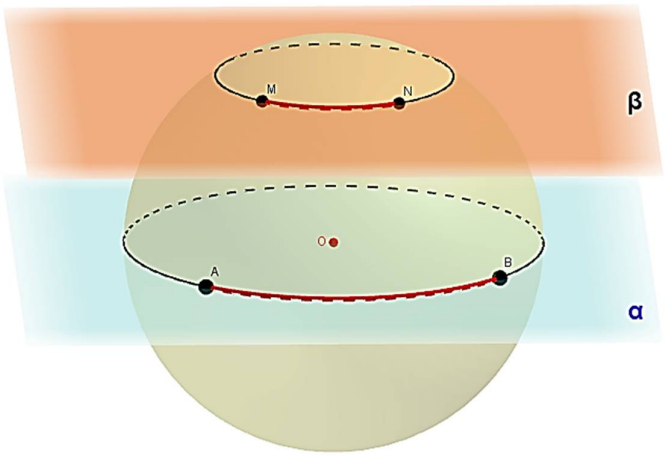
Partindo da construção mostrada na figura 28, usando o ícone , criamos os pontos A e B no círculo máximo que pertence ao plano α e também criamos os pontos M e N no círculo que pertence ao plano β (ver figura 29). Temos que o arco $\overset{\frown}{AB}$ pode ser o lado de um triângulo esférico, pois corresponde à menor distância esférica entre os pontos A e B. Porém o arco $\overset{\frown}{MN}$ em vermelho, não pode pois não pertence a um círculo máximo, ou seja o caminho ligando os pontos M e N não é o menor (ver figura 29).

P11) Para efeito didático, podemos realçar o arco $\overset{\frown}{AB}$ clicando no ícone **Arco Circular**, depois no centro O e em seguida nos pontos A e B, em seguida pode-se mudar a cor e/ou a espessura da linha clicando com o botão direito do *mouse* e indo em **Propriedades**.

P12) Podemos destacar o arco $\overset{\frown}{MN}$, mas para isso, deve-se encontrar o centro do círculo menor, que é a interseção entre a reta perpendicular criada na etapa P8 (que pode-se fazer aparecer novamente, bastando encontrar esta reta na Janela de Álgebra e marcar a opção **Exibir Objeto**), para isso clicando no ícone **Interseção de Dois Objetos**, clicando na reta perpendicular e no plano β. Agora, procedemos de modo análogo à etapa anterior, clicando no ícone **Arco Circular**, depois no centro do círculo menor e em seguida nos pontos M e N.

P13) E, novamente, podemos ocultar os objetos que não sejam mais necessários, clicando com o botão direito do *mouse* no objeto e desmarcando a opção **Exibir Objeto**.

Figura 29 – Arco MN e arco AB



Fonte: Elaborada pelo autor

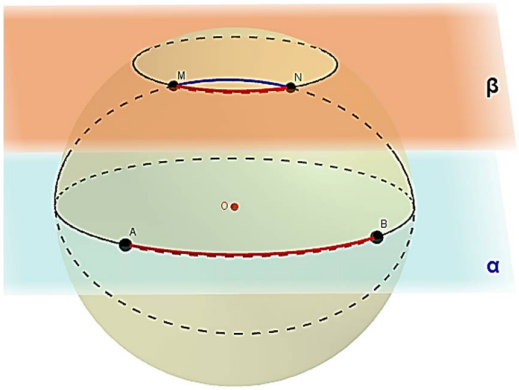
A menor distância esférica entre M e N é um arco de círculo máximo. O menor caminho sobre a esfera ligando os pontos M e N é o arco representado em azul que pertence a uma circunferência máxima (ver figura 30). Para criar o arco $\overset{\frown}{MN}$ em azul e a circunferência que o contém, procedemos com os seguintes passos:

P14) Clicamos no ícone **Arco Circular**, depois em M e N, deste modo obtendo o arco e mudando sua cor para azul em **Propriedades**.

P15) Para criar o círculo, criamos um ponto auxiliar entre M e N e em seguida clicamos em **Círculo definido por Três Pontos** e clicamos em M, N e no ponto auxiliar e em seguida apagamos este último ponto.

Na **Janela de Álgebra** do Geogebra, podem-se verificar as medidas dos arcos em azul e em vermelho ligando os pontos M e N, e constatar as diferenças entre essas medidas.

Figura 30 – Arco MN em vermelho, arco MN em azul e arco AB



Fonte: Elaborada pelo autor

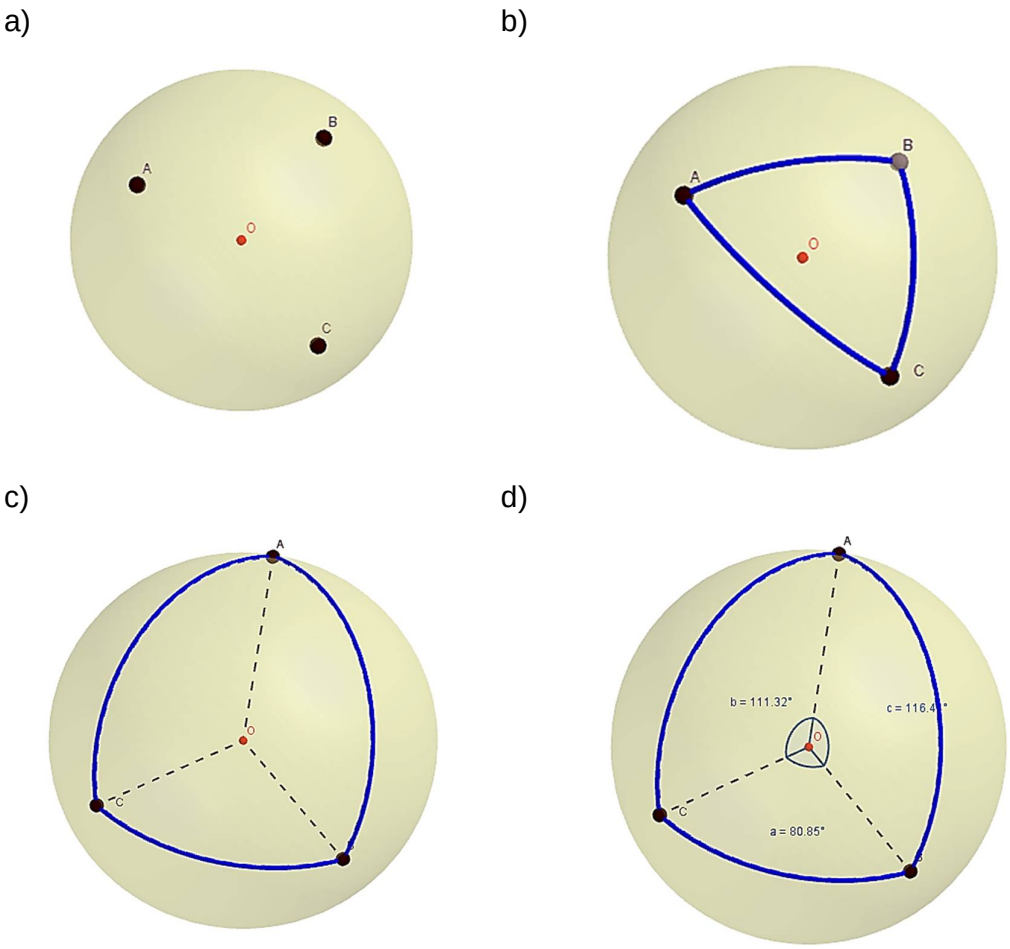
Atividade 06) Construir um triângulo esférico e verificar a soma as medidas de seus lados.

Nesta atividade construímos um triângulo esférico de acordo com o seguinte roteiro:

P1) Clicando no ícone **Esfera dados Centro e Raio** criamos uma esfera de centro O e raio r e clicando no ícone marcamos os pontos A, B e C (ver figura 31 a);

P2) Criamos os lados AB, AC e BC do triângulo esférico através dos comandos ArcoCircular[O, A, B], ArcoCircular[O, A, C] e ArcoCircular[O, B, C] (ver figura 31 b);

Figura 31 – Construção de triângulo esférico e a medida de seus lados



Fonte: Elaborada pelo autor

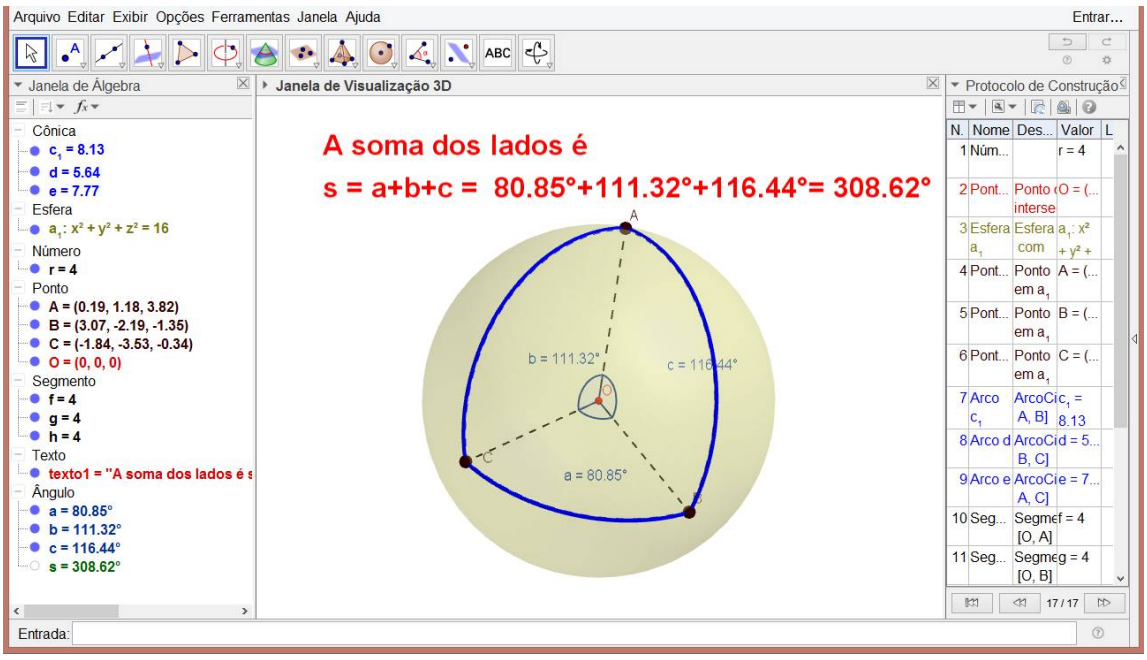
P3) Criamos os segmentos de reta AO, OB e OC através dos comandos Segmento[O, A], Segmento[O, B] e Segmento[O, C] (ver figura 31 c);

P4) As medidas dos lados **a**, **b** e **c** são dadas pelas medidas dos ângulos centrais $\widehat{COA}, \widehat{AOB}$ e $\widehat{COB}$ através dos comandos Ângulo[C, O, A], Ângulo[A, O, B] e Ângulo[C, O, B] (ver figura 31 d).

O objetivo desta atividade é fazer o aluno, através do Geogebra, verificar que em todo triângulo ABC, a soma das medidas dos lados AB, AC e BC é sempre um valor menor do que 360 graus. O professor pode ainda ir ao menu do Geogebra e usar a função **Texto**

para incrementar o trabalho e deixá-lo mais atrativo aos alunos (ver figura 32)

Figura 32 – Soma dos lados do triângulo esférico



Fonte: *Print screen* do Geogebra; Elaborada pelo autor

Atividade 07) Construir um triângulo esférico e verificar a soma de seus ângulos.

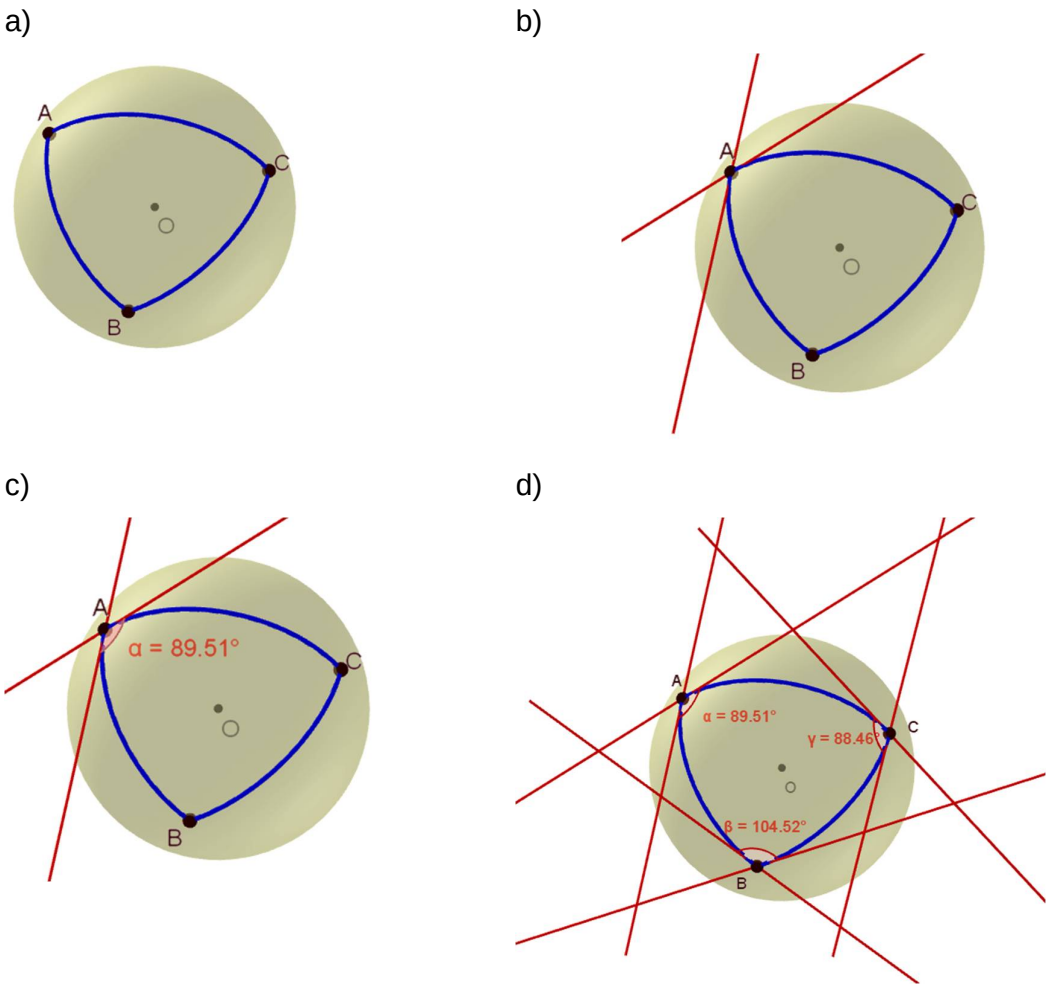
Nesta atividade o professor ajudará o aluno a compreender a seguinte propriedade relativa ao triângulo esférico: A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior do que 180º e menor do que 540º.

P1) Primeiramente, o aluno deverá construir um triângulo esférico (ver figura 33 a), cujos procedimentos foram vistos na atividade 06.

P2) Em seguida, criamos uma reta tangente ao lado AB passando pelo ponto A e uma reta tangente a AC passando pelo ponto A, para isso,clicamos no ícone **Reta Tangente** , depois no ponto e no arco (ver figura 33 b).

P3) Para obter o ângulo entre as tangentes clicamos no ícone **Ângulo** e selecionamos as duas retas (ver figura 33 c)

Figura 33 – Construção de triângulo esférico e medida de um ângulo

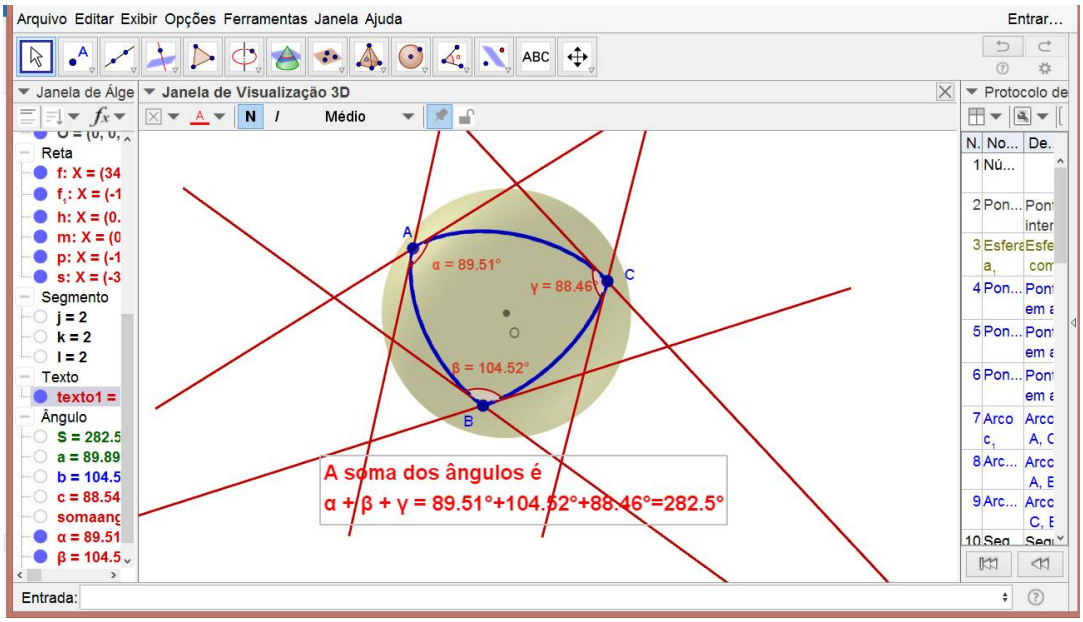


Fonte: Elaborada pelo autor

O ângulo α do triângulo esférico corresponde ao ângulo entre as duas tangentes ao ponto A. Procedemos analogamente para criar as duas retas tangentes ao vértice B, definindo o ângulo β e as duas retas tangentes ao ponto C, definindo o ângulo γ (ver figura 33 d). O professor pode realizar alterações no triângulo, clicando e arrastando os pontos A, B e C e pedir para que os alunos somem os ângulos e constatem que a soma cumpre a propriedade em questão. Quando arrastamos algum ponto do triângulo esférico, obtemos outros triângulos. Pode-se ainda ir ao menu do

Geogebra e usar a função **Texto** para incrementar o trabalho e deixá-lo mais atrativo aos alunos (ver figura 34).

Figura 34 – Soma dos ângulos de um triângulo esférico



Fonte: *Print screen* do Geogebra; Elaborada pelo autor

Atividade 08) Crie uma esfera e três pontos que sejam vértices de um triângulo esférico e de um triângulo plano.

P1) Primeiramente crie uma esfera de centro O e raio de medida r = 2 (ou outra medida qualquer), e marque três pontos, seguindo os procedimentos que vimos na atividade 06.

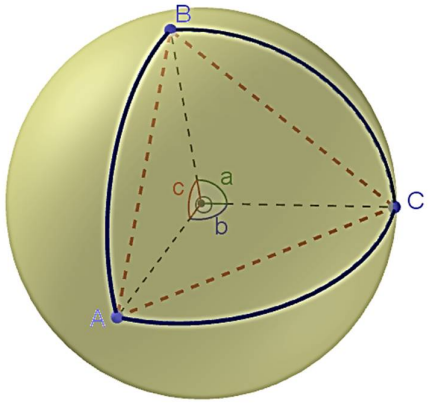
P2) Ainda seguindo passos da atividade 06 crie o triângulo esférico cujos vértices são os três pontos criados em P1.

P3) Obtenha as medidas em graus dos lados do triângulo esférico, seguindo os procedimentos da atividade 06;

P4) Crie o triângulo plano com os três pontos criados em P1. Para isso, clique no ícone **Segmento** e selecione os pontos extremos deste;

Com estes passos obtemos a seguinte construção no Geogebra (ver figura 35).

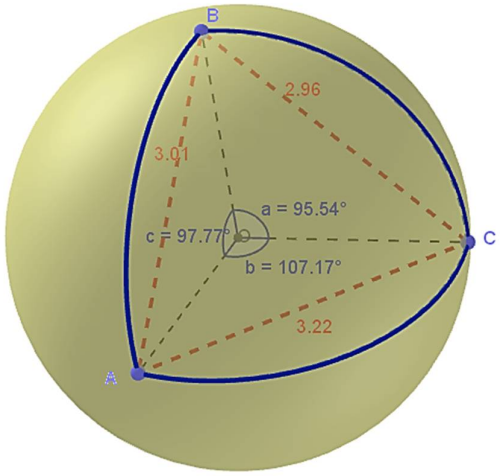
Figura 35 – Triângulo plano e triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

As medidas dos lados do triângulo esférico e dos lados do triângulo plano podem ser vistas na **Janela de Álgebra** do Geogebra, mas também podemos exibir esses valores na construção, bastando para isso clicar no objeto com o botão direito do *mouse* e ir em **Propriedades** e na opção **Exibir Rótulo** optar por exibir **Nome**, **Valor** ou os dois. Com os valores obtemos a seguinte construção:

Figura 36 – Triângulo plano, triângulo esférico e medidas dos lados



Fonte: Elaborada pelo autor

A partir da construção acima, o docente pode perguntar aos alunos qual dos dois triângulos têm maior área. Espera-se que a maioria afirme que o triângulo esférico

tem a maior área. Mas, na ausência de uma prova formal, os alunos podem calcular estas áreas a partir das medidas mostradas na figura 36. Para calcular a área do triângulo plano, pode-se usar a fórmula de Herão. Os lados têm medidas: AB = 3,01, BC = 2,96 e AC = 3,22 .

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{3,01 + 2,96 + 3,22}{2} = 4,59 \quad (151)$$

$$A = \sqrt{p.(\mathrm{p} - AB).(\mathrm{p} - \mathrm{AC}).(\mathrm{p} - BC)} \quad (152)$$

$$A = \sqrt{4,59.(4,59 - 3,01).(4,59 - 2,96).(4,59 - 3,22)} \quad (153)$$

$$A = \sqrt{4,59.(1,58).(1,63).(1,37)} \quad (154)$$

$$A = \sqrt{16.19} \quad (155)$$

$$\boxed{A = 4,02} \quad (156)$$

A área do triângulo esférico depende das medidas dos três ângulos, α = 95,54º, β= 107,17º, γ= 97,77º, e da medida do raio, r= 2. Calcula-se o excesso esférico e depois, aplica-se o teorema de Girard:

$$E = \alpha + \beta + \gamma - 180^{\circ} \quad (157)$$

$$E = 95,54^{\circ} + 107,17^{\circ} + 97,77^{\circ} - 180^{\circ} \quad (158)$$

$$\mathrm{E} = 120,48^{\circ} \quad (159)$$

$$[\mathrm{ABC}] = \frac{E}{180^{\circ}} \pi r^2 \quad (160)$$

$$[\mathrm{ABC}] = \frac{120,48^{\circ}}{180^{\circ}}.3,14.2^2 \quad (161)$$

$$\boxed{[\mathrm{ABC}] = 8,37} \quad (162)$$

Neste caso, temos que o triângulo esférico possui maior área do que o triângulo plano.

4.3 ATIVIDADES DE ABSTRAÇÃO

O objetivo dos seguintes exercícios propostos é fazer o aluno perceber uma serventia aplicacional do conteúdo abordado. Para as próximas atividades é necessário que os alunos estejam familiarizados com os conceitos básicos da Trigonometria/Geometria Esférica.

4.3.1 Aplicações da Trigonometria/Geometria Esférica

Aplicar a Matemática às outras ciências é importante, pois, desse modo, o aluno verifica que o que se ensina em sala de aula é de grande utilidade para fins práticos, aparecem em problemas reais e também o faz perceber que a aplicação surge como uma necessidade e inserida em um contexto histórico. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 1997, p. 43)

As mais comuns aplicações da Trigonometria/Geometria Esférica estão na navegação aérea e na oceânica, pois trata-se de fazer deslocamentos na esfera terrestre, o que implica que a embarcação percorrerá basicamente arcos de círculo. Os problemas mais básicos de navegação envolvem a determinação de coordenadas de partida e de chegada, rumo e distância percorrida. Algumas medidas na esfera terrestre são importantes para os cálculos trigonométricos (ver quadro 02).

Quadro 02 - Medidas no globo terrestre

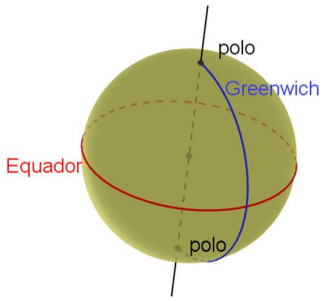
Medidas no globo terrestre (valores aproximados)	
Milha marítima[7]	1852 metros
Raio	6372 km
Circunferência máxima	40 016 km

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3.2 Coordenadas geográficas

Todo ponto na superfície terrestre pode ser localizado por meio de duas coordenadas: a latitude e a longitude, que representaremos, respectivamente por meio das letras gregas φ e θ. O meridiano de Greenwich e a linha do equador são usados como referências para este sistema de coordenadas, observe a figura 37.

Figura 37 – Meridiano de Greenwich, polos e linha do Equador



Fonte: Elaborada pelo autor

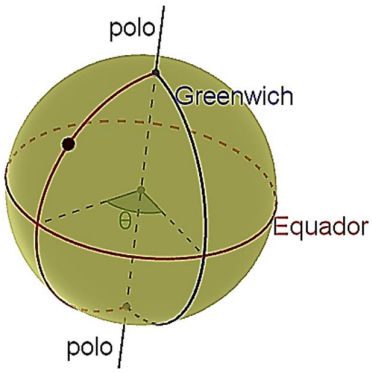
Meridianos são semicircunferências na superfície terrestre ligando os polos norte e sul. Denominamos meridiano principal o que passa pela cidade de Greenwich na Inglaterra, e convencionamos que seu valor é 0º. A **longitude** de um ponto na superfície terrestre é o ângulo entre o meridiano principal e o meridiano que passa

[7] Unidade de distância usada em navegação marítima, igual ao comprimento de 1 min de meridiano terrestre, tomado na latitude de 45º. [...] a Conferência Hidrográfica Internacional Extraordinária de 1929 fixou o valor da milha marítima em exatos 1852 metros (Ver COUTINHO, Lázaro. Trigonometria Esférica: a Matemática de um espaço curvo. Rio de Janeiro: Interciência, 2015).

pelo ponto considerado, medido ao longo da linha do equador, ver figura 38. A longitude pode variar de 0º até 180º para o leste ou de 0º até -180º para oeste.

$$-180^0 < \theta < 180^0 \qquad (163)$$

Figura 38 – Longitude θ

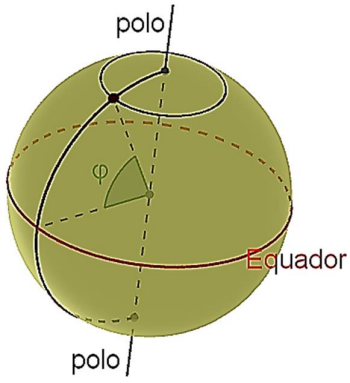


Fonte: Elaborada pelo autor

Denominamos de **paralelos** aos círculos menores que pertencem a planos paralelos ao do equador. A **latitude** de um ponto na superfície terrestre é a medida angular ao norte ou ao sul do equador, medidos ao longo de um meridiano qualquer, ver figura 39. A latitude é positiva quando o ponto está ao norte do equador e negativa quando ao sul. A Linha do Equador, por convenção, possui latitude 0º e a latitude de um ponto pode ir até 90ºN (+90º) ou até 90º S (-90º).

$$-90^0 < \varphi < 90^0 \qquad (164)$$

Figura 39– Latitude φ



Fonte: Elaborada pelo autor

Por exemplo, consideremos o ponto de coordenadas (φ , θ) = (-80º,+72º); sua latitude é de -80º ou seja, está ao sul da linha do equador e sua longitude é +72º, o que implica que está ao leste do Meridiano de Greenwich.

Em termos de notação, as seguintes abreviações são equivalentes entre inglês e português (ver quadro 03):

Quadro 03: Equivalência português-inglês entre abreviações de pontos cardeais

Equivalência entre as abreviações utilizadas				
Português	Norte (N)	Sul (S)	Leste (L)	Oeste (O)
Inglês	*North* (N)	*South* (S)	*East* (E)	*West* (W)

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3.3 Google *Earth* e Google *Maps*

Duas excelentes ferramentas computacionais, mantidas e desenvolvidas pela Google, que podem ser exploradas pelos alunos são o Google *Earth* e Google *Maps*, que além de imagens reais capturadas por satélites e mapas de qualquer lugar na superfície terrestre, fornece as coordenadas de qualquer ponto do globo, bem como permite calcular distâncias entre esses pontos.

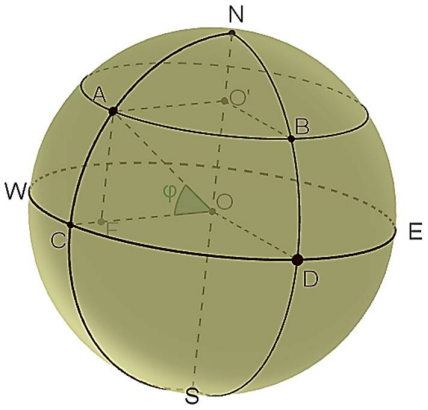
Para que o professor juntamente com os alunos aplique este recurso é necessário um computador com requisitos básicos de memória e processamento. Para explorar o Google *Earth* e o Google *Maps*[8] deve-se ter acesso à *Internet* e fazer *download* do *plug-in*[9] do Google *Earth.*

4.3.4 Problema da navegação segundo paralelos

Trata-se de um dos casos mais simples, matematicamente, de navegação no globo terrestre. Estando os pontos A e B no mesmo paralelo (círculo menor), considere uma embarcação que desloca-se de A para B segundo a figura 40.

[8] O Google Earth e o Google *Maps* podem ser acessados pelo *link* https://www.google.com.br/maps.
[9] O plug-in do Google Earth pode ser encontrado em https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/explore/products/plugin.html.

Figura 40 – Navegação no paralelo AB



Fonte: Elaborada pelo autor

Traçamos a intersecção do meridiano que passa por A com o equador definindo o ponto C. Depois, traçamos a intersecção do meridiano que passa por B com o equador definindo o ponto D. Criamos o ponto F tal que o segmento AF forme um ângulo reto com o segmento OC. Se a distância AB estiver em milhas náuticas, se faz necessário converter para uma unidade angular. Os ângulos $\widehat{AO'B}$ e $\widehat{COD}$ são iguais e, da Geometria Plana, temos que esse ângulo é dado pela razão entre o arco e o raio, logo:

$$\frac{\widehat{AB}}{AO'} = \frac{\widehat{CD}}{OC} \tag{165}$$

$$\frac{\widehat{CD}}{\widehat{AB}} = \frac{OC}{AO'} = \frac{AO}{OF} = \frac{1}{\cos\varphi} \tag{166}$$

$$\frac{\widehat{CD}}{\widehat{AB}} = \frac{1}{\cos\varphi} \tag{167}$$

$$\frac{\Delta\theta}{d} = \frac{1}{\cos\varphi} \tag{168}$$

$$\boxed{d = \Delta\theta.\cos\varphi} \tag{169}$$

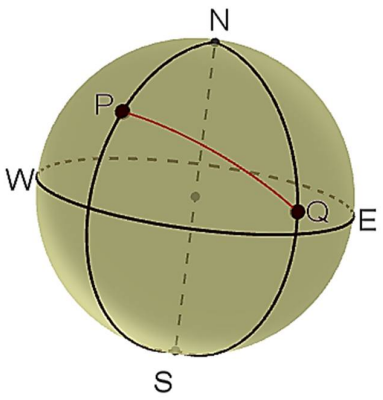
Esta expressão relaciona a distância d percorrida entre os pontos A e B, a diferença de longitude $\Delta\theta$ e a latitude φ do paralelo em que se dá a navegação.

4.3.5 Aplicando a Lei dos cossenos esférica: o triângulo terrestre

Dadas as coordenadas, latitude φ e longitude θ, de dois pontos na superfície terrestre, P(φ_1, θ_1) e Q(φ_2, θ_2). Denominamos triângulo terrestre ao triângulo formado pelos arcos $\overset{\frown}{PN}$, $\overset{\frown}{QN}$ e $\overset{\frown}{PQ}$, conforme a figura 41. Temos que:

- $\overset{\frown}{PN}$ = 90º - φ_1 é a colatitude de φ_1;
- $\overset{\frown}{QN}$ = 90º - φ_2 é a colatitude de φ_1;
- $\overset{\frown}{PNQ}$ = $|\theta_2 - \theta_1|$ é a diferença de longitudes.
- $\overset{\frown}{PQ}$ = medida do arco que queremos determinar.

Figura 41– Triângulo terrestre



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando-se os sinais de φ, e usando a lei dos cossenos esférica, podemos determinar a distância entre os pontos P e Q na superfície terrestre. Denominamos de rumo ao menor ângulo que uma linha ou caminho faz com o meridiano que passa pelo ponto. Então, no triângulo PQN:

- O rumo de P partindo de Q é o ângulo NQP;
- O rumo de Q partindo de P é o ângulo NPQ;

Atividade 09) Encontre a distância percorrida, em milhas náuticas, por um navio no trópico de capricórnio (23º27’ S) que viaja para leste até alcançar um ponto cuja diferença de longitude é de 1º20’.

Resolução:¨Neste problema, primeiramente, deve-se transformar 1º20’ em minutos, obtendo 80’. Agora, aplica-se a expressão (169):

$$\boxed{d = \Delta\theta.\cos\varphi} \tag{170}$$

$$d = 80.\cos 23^{o}\,27' \tag{171}$$

$$d = 80\ .\ 0,92 \tag{172}$$

$$d = 73,39 \tag{173}$$

O navio percorreu uma distância de 73,239 milhas.

Atividade 10) Determine a longitude do ponto de chegada de um navio que parte da longitude 130º W e percorre 180 milhas, em direção ao leste, ao longo do paralelo 45º S.

Resolução:

$$d = \Delta\theta.\cos\varphi \tag{174}$$

$$180' = \Delta\theta.\cos 45^{o} \tag{175}$$

$$180' = \Delta\theta.0,70711 \tag{176}$$

$$\Delta\theta = \frac{180'}{0,70711} \tag{177}$$

$$\Delta\theta = 254,55728' \tag{178}$$

$$\Delta\theta = 4^{o}14' \tag{179}$$

$$130^{o} - 4^{o}14' = \boxed{125^{o}\,46'W} \tag{180}$$

A latitude do ponto de chegada é 125º46’ oeste.

Sugestões ao professor: Nas atividades 09 e 10 o professor pode perguntar aos alunos se ao viajar num trecho no trópico de capricórnio o navio está percorrendo o menor caminho entre o ponto de partida e o de chegada. Como este paralelo não é um círculo máximo, qualquer caminho percorrido entre dois pontos não é o menor, e o docente pode revisar a atividade 05 realizada no Geogebra.

Atividade 11) Um avião parte De um aeroporto em Belém, Brasil, cujas coordenadas são (1,38º S; 48,48º W) até um aeroporto em Lisboa, Portugal, de coordenadas (38,77º N; 9,14º W) (ver figura 42). a) Calcule aproximadamente a distância percorrida pelo avião, em quilômetros e em milhas marítimas, entre essas duas cidades, e compare com o resultado exibido no Google *Maps* e *Earth*, que é 6004,70 km; b) Calcule o rumo do aeroporto de Lisboa partindo do aeroporto de Belém.

Resolução:

a) Considerando-se P(1,38º S; 48,48º W) e Q(38,77º N; 9,14º W), temos o seguinte

$$\widehat{\mathrm{PN}} = 90^o - \varphi_1 = 90^o - (-1,38^o) = 91,38^o \quad (181)$$

$$\widehat{\mathrm{QN}} = 90^o - \varphi_2 = 90^o - 38,77^o = 51,23^o \quad (182)$$

$$\widehat{PNQ} = |\theta_1 - \theta_2| = |48,48^o - 9,14^o| = 39,34^o \quad (183)$$

Aplicamos ao triângulo PNQ a lei dos cossenos esférica

$$\boxed{\cos\widehat{PQ} = \cos\widehat{NP}.\cos\widehat{NQ} + sen\,\widehat{NP}.sen\,\widehat{NQ}.\cos\widehat{PNQ}} \quad (184)$$

$$\cos\widehat{PQ} = \cos 91,38^o.\cos 51,23^o + \operatorname{sen} 91,38^o.\operatorname{sen} 51,23^o.\cos 39,34^o \quad (185)$$

$$\cos\widehat{PQ} = (-0,02408).(0,62620) + (0,99971).(0,77967).(0,77340) \quad (186)$$

$$\cos\widehat{PQ} = 0,58774 \quad (187)$$

$$\widehat{PQ} = \arccos(0,58774) = 54,00299^o \quad (188)$$

Considerando o raio da Terra como sendo aproximadamente 6372 km e fazendo uma regra de três relacionando ângulo e comprimento de arco, temos

$$\frac{360^o}{54,00299^o} = \frac{2.3,14.6372}{\overset{\frown}{PQ}} \quad (189)$$

$$\overset{\frown}{PQ} = \frac{54,00299^o.2.3,14.6372}{360^o} \quad (190)$$

$$\overset{\frown}{PQ} = 6002,75km = 3241,22\,milhas\,marítimas \quad (191)$$

Obtivemos que o comprimento de $\overset{\frown}{PQ}$ é de 6002,75 km, o que representa um erro de apenas 0,0032%, e isso se deve ao fato da Terra não ser uma esfera perfeita.

$$1 - \frac{6002,75}{6004,70} = 1 - 0,99968 = 0,00032 = 0,032\% \quad (192)$$

b) Para calcular o rumo de Belém para Lisboa, aplicamos a lei dos senos esférica.

$$sen\overset{\frown}{PQ}.sen\widehat{PNQ} = sen\overset{\frown}{NQ}.sen\,\widehat{NPQ} \quad (193)$$

$$sen\,54,00299^o.sen\,39,34^o = sen\,51,23^o.sen\,\widehat{NPQ} \quad (194)$$

$$(0,80905).(0,63392) = (0,77967).sen\,\widehat{NPQ} \quad (195)$$

$$sen\widehat{NPQ} = 0,65781 \quad (196)$$

$$\widehat{NPQ} = \text{arcsen}\,0,65781 \quad (197)$$

$$\boxed{\widehat{NPQ} = 41,13289^o} \quad (198)$$

Sugestões ao professor: Nesta atividade, ao contrário das atividades 09 e 10, a distância percorrida pelo avião é a menor, pois percorre um círculo máximo, e isto deve ser esclarecido aos alunos. O professor pode levar Datashow para apresentar aos alunos o Google *Earth*, e ensiná-los a obter coordenadas e medir distâncias com esta ferramenta. Outro aspecto a ser explorado pelo docente é a possibilidade de comparação do valor calculado pela lei dos cossenos com o valor obtido pelo *software*.

Figura 42 – Google *Earth*, distância Belém-Lisboa

a)

b)

Fonte: *Print screen* do Google *Earth*

5 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

A aplicação foi desenvolvida em uma escola pública estadual localizada no município de Santarém, estado do Pará. As atividades realizaram-se em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, na modalidade de ensino regular, no turno matutino. A aplicação foi feita pelo próprio professor da disciplina, e também elaborador desta dissertação. Ao todo usaram-se seis tempos de aula, sendo três no primeiro dia e três no segundo, e cada aula durou em média 40 minutos.

Esta pesquisa em sala de aula foi desenvolvida visando-se trabalhar com os discentes a Trigonometria/Geometria de um modo diferente do tradicional. Desde o início das atividades foi possível notar um interesse maior por parte dos alunos, o que podemos atribuir ao uso de materiais concretos, pois permitiu que estes participassem ativamente, proporcionando melhor interação e investigação. Durante as aulas houve bastante envolvimento dos alunos, pois constatamos que fizeram muitas perguntas ao professor embasadas no conteúdo que, apesar de familiar, apresentavam diversas peculiaridades que foram exploradas. Percebemos também grande interação entre os alunos, pois elaboravam questionamentos e se ajudavam mutuamente, faziam suposições, conjecturas e generalizações pertinentes ao tema.

Em sala de aula apresentou-se a Trigonometria/Geometria de um modo diferenciado, aproveitando os conhecimentos prévios do aluno em Trigonometria Plana, bem como exploraram-se os fundamentos da Geometria Esférica, destacando algumas de suas peculiaridades que a diferenciam da Geometria Euclidiana. Objetivou-se, a partir dos resultados, verificar se os alunos conseguiram compreender aspectos básicos do tema, averiguar sua percepção quanto à metodologia usada, a relevância e importância do assunto estudado. Realizaram-se aulas expositivas sobre os fundamentos da Trigonometria/Geometria Esférica, as quais iniciaram-se com atividades, explorando-se materiais concretos, seguidamente exploraram-se as potencialidades do Geogebra e, por último, realizaram-se cálculos trigonométricos sobre um problema de aplicação.

5.1 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo geral desta aplicação é introduzir os alunos nos fundamentos da trigonometria esférica e suas conexões com a realidade assim como desenvolver, neles, a capacidade de construir seu próprio conhecimento e, para isso utilizou-se uma sequência de atividades que parte do concreto, passando pelo representacional, ao abstrato.

5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Apresentar aos alunos os fundamentos da Trigonometria Esférica e sua relação com a Geometria Esférica. Relacionando semelhanças e diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica. Explorar o uso de materiais concretos, bem como potencialidades do uso do Geogebra e efetuar cálculos relativos a triângulos esféricos. E, ao fim do percurso aplicar teste e questionário aos alunos e realizar análise dos resultados do teste e questionário.

5.3 MATERIAIS UTILIZADOS

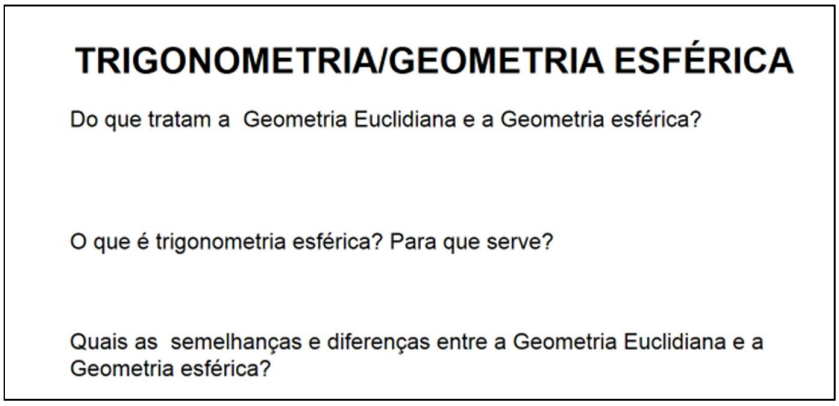
Materiais utilizados pelo professor: Computador, *datashow*, quadro branco e pincéis marcadores. **Materiais utilizados pelos alunos:** Bolas de isopor de 20 cm de diâmetro, fitas de cetim, fitas adesivas, tesourinhas, canudinhos, fitas métricas, transferidor esférico.

5.4 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES REALIZADAS EM SALA DE AULA

Para conduzir a aula faz-se necessário que professor disponha dos materiais necessários (ver tópico 5.3). Explicou-se à turma a motivação da aula e que se tratava de uma pesquisa acadêmica. Montaram-se equipes (isto foi necessário devido limitações da quantidade de materiais) de três ou quatro alunos e distribuíram-se os

materiais que seriam necessários ao desenvolvimento da aula. Exploram-se o uso de materiais concretos objetivando a compreensão das ideias mais básicas da Geometria Esférica. Explanou-se aos alunos os assuntos de que tratam a Trigonometria/Geometria Esférica e algumas de suas utilidades e também realizaram-se algumas comparações entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica (ver figura 43).

Figura 43 – *Slide* de introdução ao tema da aula



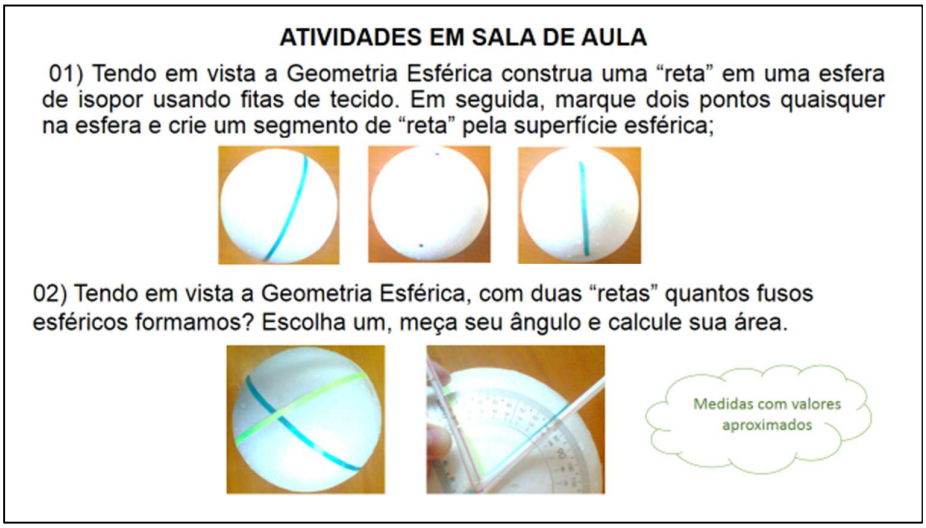
Fonte: Elaborada pelo autor

A **primeira atividade** foi sobre “reta” e segmento de “reta” na superfície esférica (ver figura 44). Os alunos pegaram bolas de isopor e, com caneta, marcaram dois pontos, cortaram uma fita de cetim com o mesmo comprimento da distância ente os pontos e, com fitas adesivas, fixaram a fita de cetim à bola, deste modo obtendo um segmento de “reta”. Também cortaram uma fita com a mesma medida (ou um pouco maior) da circunferência máxima da bola de isopor que foi obtida multiplicando-se a medida do diâmetro pelo valor de pi, obtendo uma “reta” da Geometria Esférica. Uma dificuldade nesta atividade foi construir a circunferência máxima, afinal de contas, como saber se é a maior? Porém, o professor esclareceu aos alunos que as medidas não precisavam ser exatas e que a esfera de isopor possuía imperfeições. A partir do valor calculado da circunferência máxima, usamos fita métrica para medir o comprimento da fita de cetim.

A **segunda atividade** requeria que cada equipe de alunos construísse um fuso esférico, obtivesse a medida de seu ângulo e calculasse sua área (ver figura 44). Esta atividade foi uma continuação da anterior, pois, como já existia uma circunferência máxima, foi necessário apenas criar outra. Para obter as medidas do ângulo do fuso,

os alunos usaram canudinhos para representar as retas tangentes, e com transferidor efetuaram as medidas. Foi necessário que o docente esclarecesse aos alunos que as medidas angulares não eram exatas, pois dependiam da espessura do material que constituía as “retas ” e segmentos de “reta”, no caso canudinhos, mas que para os objetivos da aula isso não teria grande influência. Para finalizar, os discentes calcularam a área do fuso usando regra de três.

Figura 44 – *Slide* das atividades 01 e 02 em sala de aula

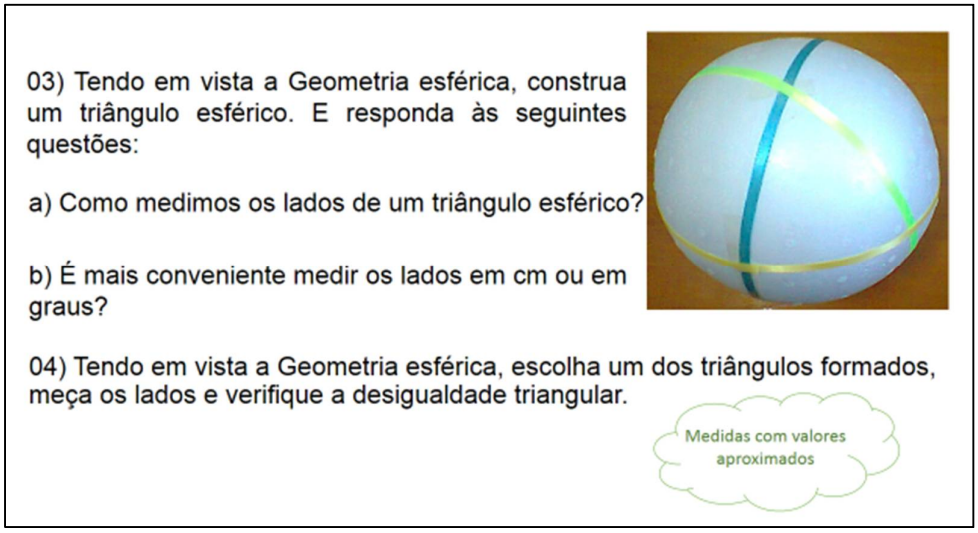


Fonte: Elaborada pelo autor

A **terceira atividade** teve como meta construir um triângulo esférico e responder às duas perguntas (ver figura 45). Os alunos aproveitaram o fuso construído na atividade anterior e criaram mais uma circunferência máxima, obtendo o triângulo. O docente perguntou aos alunos: “Como se deve medir os lados, em graus ou em centímetros?” As opiniões se dividiram e o professor esclareceu que dependia da necessidade; se quiséssemos o perímetro, seria em centímetros mas, como os lados são arcos de circunferência máxima, também podíamos medir em graus.

A **quarta atividade**, necessitou de um transferidor esférico para se obter as medidas dos lados em graus, e o docente os levou pronto e entregou um artefato deste para cada equipe. Usando o triângulo esférico obtido da atividade anterior os alunos mediram os lados e verificaram que a medida de cada lado era menor do que a soma das medidas dos outros dois lados (ver figura 45). O transferidor esférico foi levado pronto para a sala de aula.

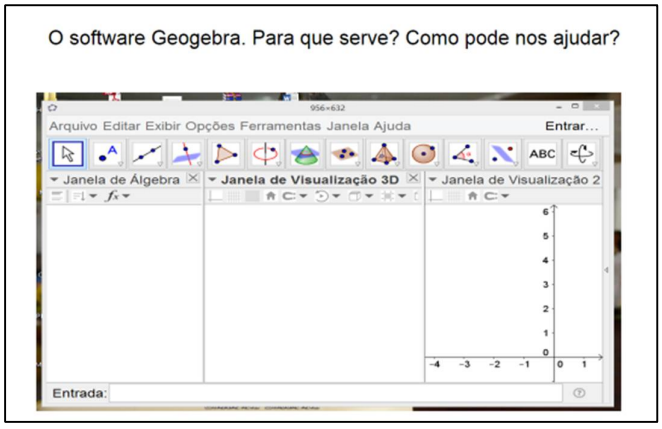
Figura 45– *Slide* das atividades 03 e 04 em sala de aula



Fonte: Elaborada pelo autor

Posteriormente exploramos o Geogebra. O docente apresentou brevemente o *software*, pois os alunos não o conheciam e comentou suas funcionalidades básicas e explanou sobre as possibilidades de seu uso, não apenas para as atividades em questão, mas para a Matemática em geral (ver figura 46). Alguns alunos interessaram-se pelo *software*, instalamos em seus *notebooks* e repassamos as atividades que foram utilizadas. Nesta etapa da aplicação, tratamos dos fundamentos da Trigonometria Esférica, como os conceitos de distância esférica, lados e ângulos do triângulo esférico e apresentamos na projeção os *slide*s e as atividades prontas elaboradas no *software.*

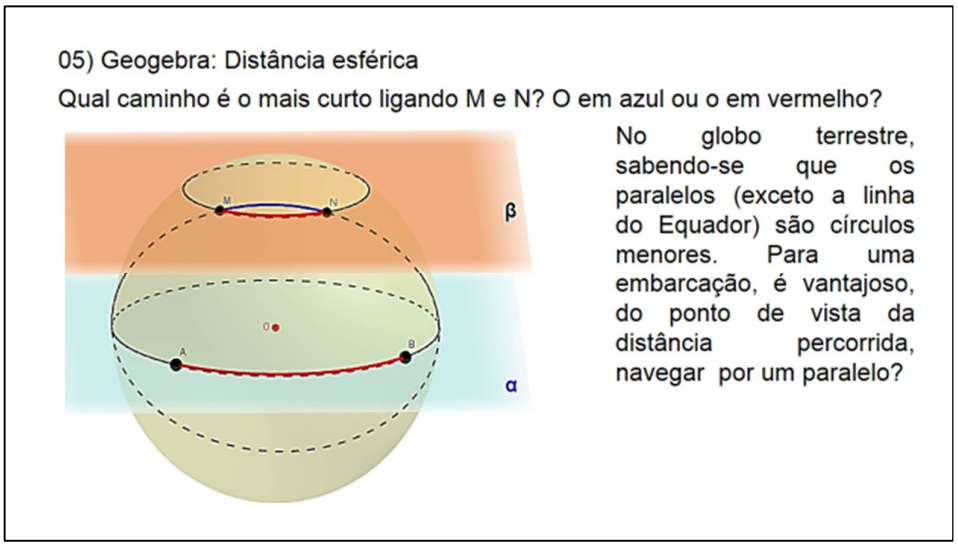
Figura 46 – *Slide* apresentando o *software* Geogebra



Fonte: Elaborada pelo autor

A **quinta atividade** (ver figura 47) tratava-se de uma construção geométrica feita no Geogebra, que consistia em uma esfera que mostrava os pontos M e N e dois caminhos ligando-os.

Figura 47 – *Slide* da atividade 05 em sala de aula

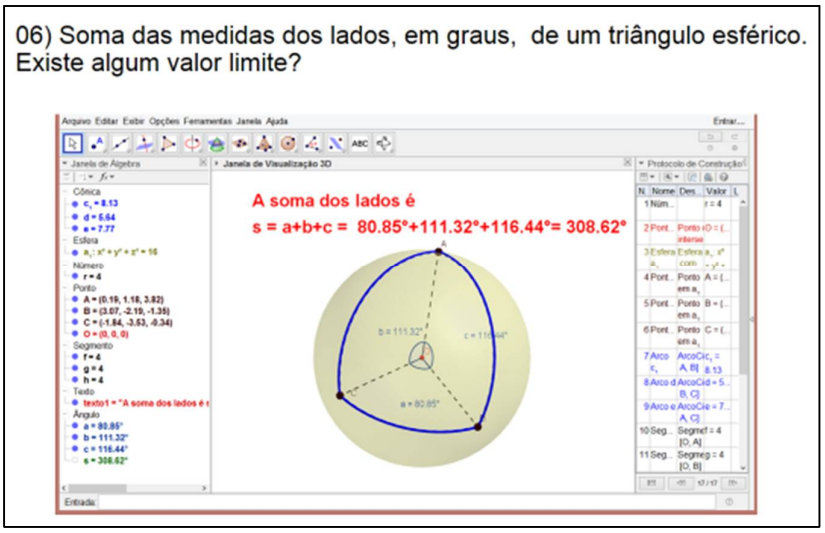


Fonte: Elaborada pelo autor

A questão: qual caminho é o mais curto ligando M e N? O em azul ou o em vermelho? Um caminho era parte de um círculo menor e o outro de um círculo máximo. As respostas dos alunos foram divididas; não houve consenso. O docente mostrou aos alunos a Janela de Álgebra do Geogebra, em que apareciam as medidas dos dois caminhos, e também fez alterações no valor do raio da esfera, sanando as dúvidas dos discentes, que puderam constatar que o menor caminho era parte da circunferência máxima, ou seja, MN em azul.

A **sexta atividade** tratava-se de um triângulo esférico, no Geogebra. Na construção, apareciam as medidas dos lados, em graus, e o docente questionou aos alunos se havia algum valor limite para a soma dos lados (ver figura 48), também efetuou alterações no triângulo, clicando e arrastando os vértices. Para induzir os discentes a proporem um valor limite. Alguns falaram 180º, outros 300º ou 360º. Nesta atividade o professor explicou aos discentes que havia um valor máximo para soma, que era 360º e que esta propriedade só é válida para a medida em graus, ou seja, se medíssemos em centímetros, não teríamos uma proposição equivalente.

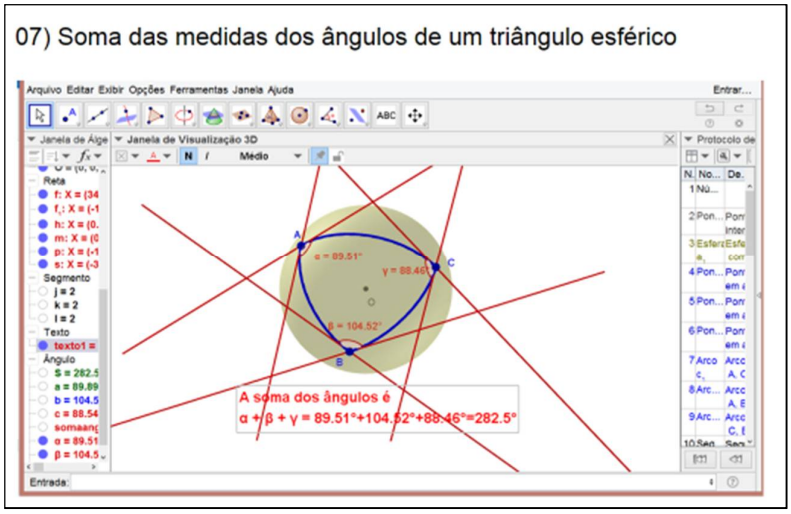
Figura 48 – *Slide* da atividade 06 em sala de aula



Fonte: Elaborada pelo autor

Na **sétima atividade** o professor apresentou outra construção no Geogebra, de um triângulo esférico, mas desta vez o foco era a medida de cada ângulo (ver figura 49). A construção mostrava a medida de cada ângulo, bem como a soma dessas medidas. O docente pediu aos alunos que anotassem a medida de cada ângulo do triângulo no caderno, clicou e arrastou os vértices do triângulo e pediu que os anotassem novamente e repetiu o procedimento uma vez mais e não explicou o porquê de se anotar essas medidas. Nesta atividade o professor não questionou os alunos quaisquer propriedades, pois essa pergunta seria feita no teste.

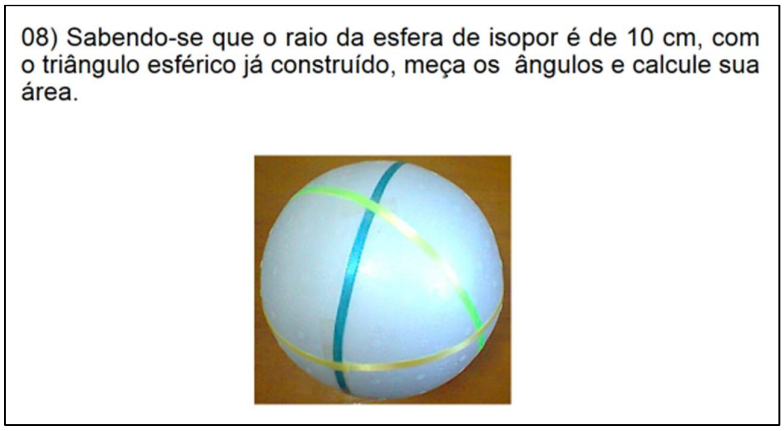
Figura 49 – *Slide* da atividade 07 em sala de aula



Fonte: Elaborada pelo autor

A **oitava atividade** (ver figura 50) consistiu em retomar a terceira atividade com materiais concretos, porém tinha o cálculo como finalidade; e foi solicitado aos alunos que escolhessem um dos triângulos esféricos formados e calculassem sua área, sabendo-se que a bola de isopor possuía raio de 10 cm. Os discentes obtiveram as medidas dos ângulos e usaram a fórmula (143) para calcular a área do triângulo esférico, para isto dispondo de calculadoras para efetuarem as contas.

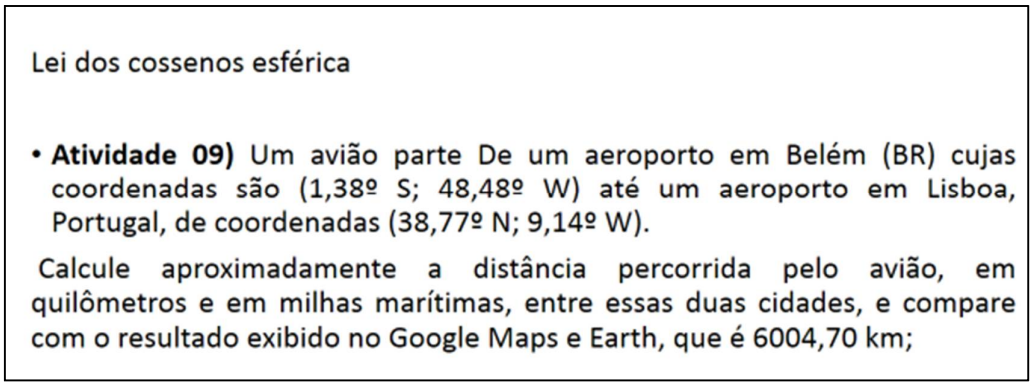
Figura 50 – *Slide* da atividade 08 em sala de aula



Fonte: Elaborada pelo autor

Na **nona atividade** (ver figura 51) os alunos usaram a Lei dos cossenos esférica para calcular a distância entre dois pontos do globo terrestre, conhecendo-se suas coordenadas geográficas, obtidas com o aplicativo Google *Earth*. O docente explicou alguns conceitos relacionados a coordenadas geográficas: latitude e longitude, paralelos e meridianos. Em seguida, apresentou a Lei dos cossenos esférica. Os alunos usaram calculadoras para efetuar as contas necessárias, sendo que alguns tiveram dificuldades com isto, devido à fórmula utilizada ser maior do que as que eles estão acostumados. O professor auxiliou os discentes nos cálculos e estes conseguiram responder à atividade com êxito.

Figura 51 – *Slide* da atividade 09 em sala de aula



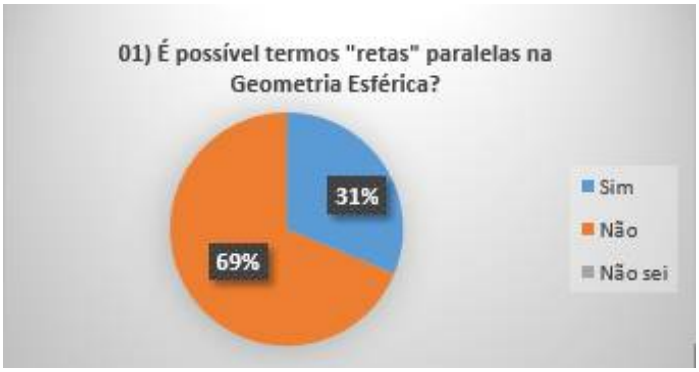
Fonte: Elaborada pelo autor

5.5 ANÁLISE DE ITENS DO TESTE APLICADO

Elaboramos um teste (ver apêndice C) para verificar se os discentes compreenderam aspectos básicos da Geometria/Trigonometria Esférica. Tanto nas aulas quanto no teste chamamos de “segmento de reta” à menor distância entre dois pontos em uma superfície, conferindo assim ao termo um sentido amplo, o que foi esclarecido aos alunos. Entretanto, por uma questão didática e, querendo nos aproveitar de um conhecimento *a priori* dos discentes, mantivemos o termo reta e segmento de reta. A rigor o termo geodésica é o mais adequado.

Item 01: É possível termos “retas” paralelas na Geometria Esférica?

Gráfico 01: Resultado do item 01 do teste.



Fonte: Elaborado pelo autor

O professor, durante as aulas, relembrou aos alunos o conceito de retas paralelas da Geometria Plana e esperávamos que estes percebessem que tal ideia poderia ser generalizada. Conforme vemos no gráfico 01, 69% dos alunos responderam que não é possível a existência de paralelas na Geometria Esférica. Os discentes verificaram que, ao construir duas “retas” nesta Geometria, elas se cruzavam em dois pontos.

Item 02: É possível termos "retas" perpendiculares na Geometria Esférica?

No decorrer da aula, o docente revisou a definição de retas perpendiculares da Geometria Euclidiana, o que serviu para que os alunos, posteriormente, notassem que o mesmo conceito é aplicado à Geometria Esférica. Durante as atividades em grupo, em que os alunos tiveram que efetuar medições de ângulos do triângulo esférico, vários obtiveram como resultado o valor 90°, o que contribuiu para que todos respondessem corretamente ao segundo item do teste.

Item 03: Na Geometria Euclidiana, no plano, 3 retas distintas podem estar nas seguintes situações: As 3 retas paralelas; Apenas 2 retas paralelas; Nenhuma reta paralela a outra e, neste caso, teremos a formação de 1 triângulo ou então as retas são concorrentes em um único ponto. Tendo em vista a Geometria Esférica, construa três “retas” nesta Geometria e faça observações a respeito.

Algumas das respostas:

- “3 “retas” formam um triângulo esférico”;

- “As “retas” formaram 8 triângulos”;

- “As “retas” se cruzam; a soma dos ângulos é maior do que 180º ”;

-“ nenhuma “reta” é paralela à outra, neste caso teremos a formação de 1 triângulo ou então as “retas” são concorrentes”;

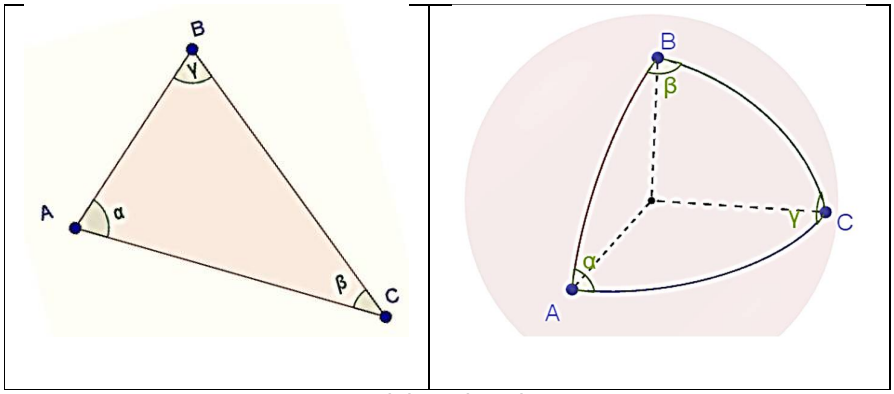
- “na Geometria Esférica, as retas paralelas sempre se encontram num ponto, e três retas formam 8 triângulos”.

Alguns alunos fizeram observações, baseando-se nos itens 01 e 02 do teste. Todos mantiveram a coerência com o exposto ao longo da aula, porém, algumas

respostas são incompletas: No caso de se formarem triângulos, são obtidos 8 e não apenas 1. Quanto à soma dos ângulos do triângulo ser maior do que 180º, isto não está relacionado à questão, apesar de ser uma proposição correta.

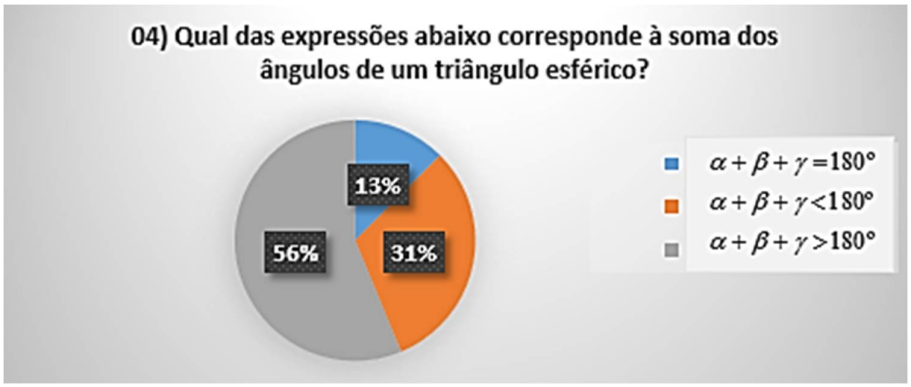
Item 04: Observando-se o triângulo esférico elaborado com o *software* Geogebra (ver figura 52), mova seus vértices e anote as medidas dos ângulos. Na Geometria Euclidiana Plana, a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a 180º. Qual das expressões corresponde à soma dos ângulos de um triângulo esférico?

Figura 52 – Triângulo plano e triângulo esférico: ângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

Gráfico 02: Resultado do item 04 do teste.



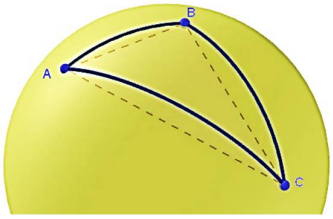
Fonte: Elaborado pelo autor

Este item, apenas, 56% dos discentes acertaram (ver gráfico 02). O enunciado da questão retomava o fato de que na Geometria Plana, em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180 graus. Durante as aulas exploramos um triângulo

esférico construído no Geogebra e, por isso, esperávamos que mais alunos acertassem esta questão.

Item 05: Os pontos A, B e C representados no Geogebra são vértices de um triângulo plano e de um triângulo esférico. Em relação as áreas o aluno deveria responder se o triângulo esférico possui maior área ou o triângulo plano possui maior área ou se as áreas dos dois triângulos são iguais.

Figura 53 – Triângulo plano e triângulo esférico: áreas



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste item, 69% dos estudantes responderam corretamente, sendo que tal resultado pode ser atribuído ao fato de as distâncias na esfera ligando os pontos serem maiores do que as distâncias em linha reta ligando os mesmos; um perímetro maior relacionado a uma área maior (ver gráfico 03). A rigor, apenas com demonstração podemos generalizar que o triângulo esférico sempre terá área maior que o triângulo plano, todavia com Geogebra pode-se testar a afirmação para uma infinidade de triângulos.

Gráfico 03: Resultado do item 05 do teste

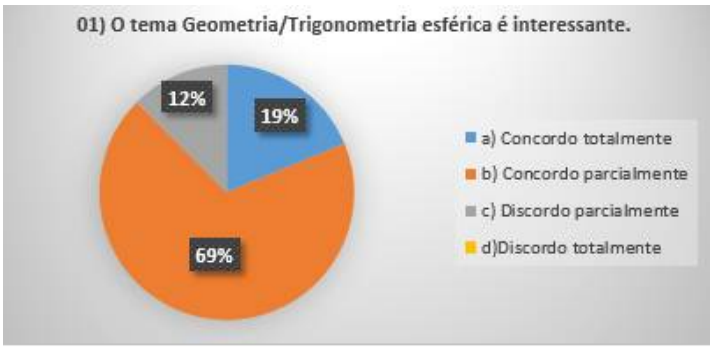
Fonte: Elaborada pelo autor

5.6 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Elaboramos um questionário (ver apêndice C) para termos um retorno quanto à relação do aluno com o tema abordado. Objetivamos verificar se os discentes acharam o tema interessante, se faz sentido, se tem utilidade e também se o método os ajudou na compreensão do conteúdo.

Item 01: O tema Geometria/Trigonometria Esférica é interessante.

Gráfico 04: Resultado do item 01 do questionário



Fonte: Elaborado pelo autor

69% dos entrevistados concordaram com a afirmação e apenas 19% concordaram totalmente e isso pode ser atribuído, em parte, ao fato da abordagem feita sobre Geometria/Trigonometria ser diferente da que eles estão acostumados e ser mais complexa. Porém, interpretamos positivamente, visto que apenas 12% discordaram parcialmente e nenhum aluno discordou totalmente (ver gráfico 04).

Item 02: A Geometria Esférica faz tanto sentido quanto a Geometria comum (Euclidiana Plana).

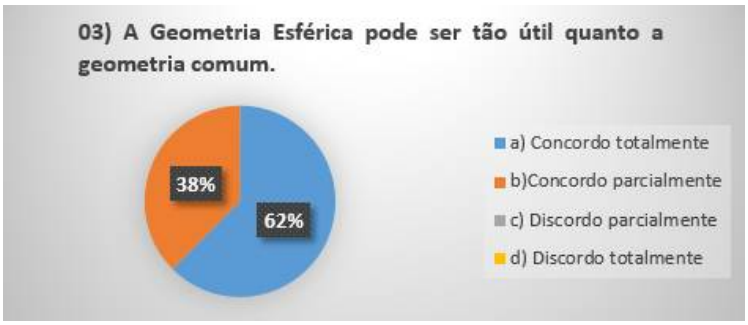
Gráfico 05: Resultado do item 02 do questionário

Fonte: Elaborado pelo autor

38% concordaram totalmente e 31% parcialmente (ver gráfico 05). Durante as aulas o professor procurou apresentar semelhanças entres as Geometrias, explorando principalmente os fundamentos do tema, como paralelismo, perpendicularismo de retas e áreas e, deste modo, instigando os alunos a efetuarem comparações e questionamentos sobre a consistência da Geometria Esférica, mostrando que esta faz tanto sentido quanto a Euclidiana.

Item 03: A Geometria Esférica pode ser tão útil quanto a Geometria comum.

Gráfico 06: Resultado do item 03 do questionário

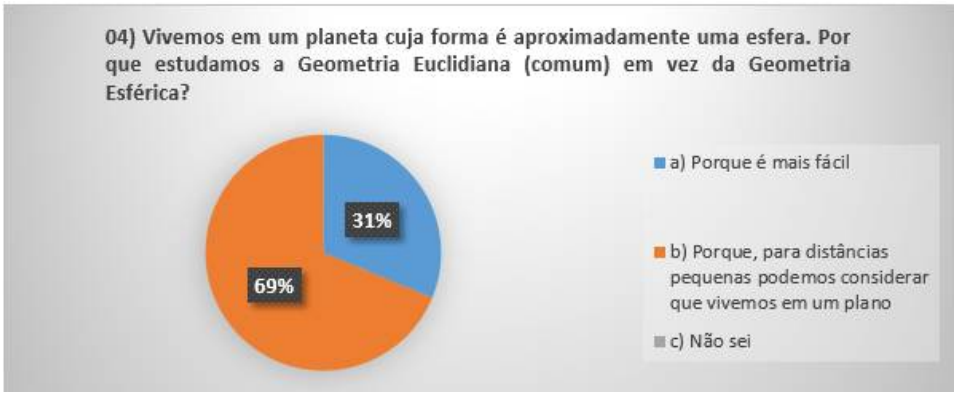


Fonte: Elaborado pelo autor

Neste item houve mais concordância do que discordância quanto à afirmação e este era o resultado esperado, visto que apresentamos aplicações da Geometria Esférica ao cálculo de áreas e à navegação, o que serviu para que os alunos concordassem quanto à utilidade desta Geometria (ver gráfico 06).

Item 04: Vivemos em um planeta cuja forma é aproximadamente uma esfera. Por que estudamos Geometria Euclidiana (comum) em vez da Geometria Esférica?

Gráfico 07: Resultado do item 04 do questionário

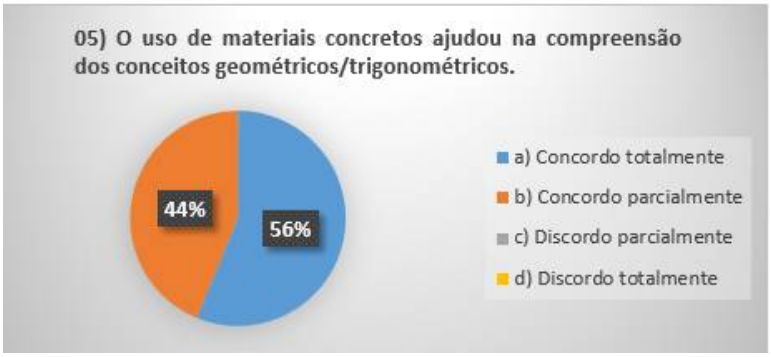


Fonte: Elaborado pelo autor

Neste item, a maioria dos discentes responderam que para distâncias pequenas podemos considerar que vivemos em um plano (ver gráfico 07). E esta era a resposta esperada, dado que para grandes distâncias na superfície terrestre devemos usar a Geometria/Trigonometria Esférica, pois os caminhos “retos” na superfície são arcos de circunferência máxima.

Item 05: O uso de materiais concretos ajudou na compreensão dos conceitos geométricos/trigonométricos.

Gráfico 08: Resultado do item 05 do questionário



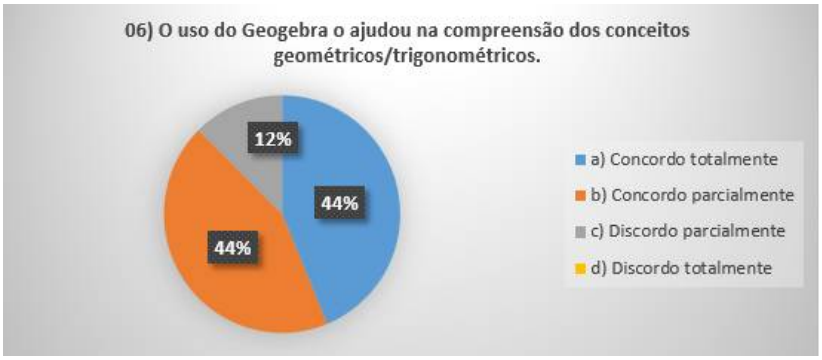
Fonte: Elaborado pelo autor

Neste item 56% concordaram totalmente e este resultado está de acordo com o esperado, pois durante as atividades, o envolvimento e interação entre os alunos foi maior quando exploramos os materiais concretos, fizeram considerações pertinentes e a maioria respondeu corretamente às questões do teste relacionadas ao que foi explorado com os materiais concretos (ver gráfico 08).

Item 06: O uso do Geogebra ajudou na compreensão dos conceitos geométricos/trigonométricos.

Neste item 88% concordaram total ou parcialmente (ver gráfico 09), o pode ser atribuído, em parte, ao fato do Geogebra dinamizar a aula, possibilitar a elaboração de construções geométricas que facilitam a visualização e ferramentas que permitem modificar a construção sem alterar as propriedades.

Gráfico 09: Resultado do item 06 do questionário



Fonte: Elaborado pelo autor

Item 07: O problema sobre navegação foi interessante.

Gráfico 10: Resultado do item 07 do questionário

Fonte: Elaborado pelo autor

Para a maior parte dos alunos o problema sobre navegação foi interessante, pois se trata de uma aplicação de conceitos de Geometria Esférica e de cálculos da Trigonometria Esférica (ver gráfico 10). 6% discordaram totalmente, o que podemos atribuir à maior complexidade dos cálculos envolvidos, como a Lei dos cossenos esférica.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em foco que um dos objetivos da educação básica é a formação de indivíduos críticos e aptos a resolver problemas novos com uma visão mais interdiciplinar do que o ensino tradicional, pode-se dizer que a abordagem da Geometria Esférica é adequada aos novos paradigmas educacionais. Neste sentido, pode-se observar que, sem ela, a visão do aluno da geometria terrestre ficaria deficiente pois, por exemplo, não se atentaria a esta visão não clássica, porém realista, desta geometria, no momento de interpretar e comprender certas informações repassadas nos meios de informação.

O presente trabalho mostrou que sim é possível introduzir temas aparentemente complexos a alunos da educação básica. Nas palavras de Bruner (2001, p.56) :“Qualquer assunto pode ser ensinado eficazmente, de alguma forma intelectualmente honesta, a qualquer criança em qualquer fase de desenvolvimento”.

Pelo observado durante as atividades, a estratégia escolhida para facilitar a compreensão de aspectos básicos da Geometria/Trigonometria Esférica (CRA) foi adequada, criando um ambiente motivador na turma. Sabemos, não só pelas novas pesquisas mas por experiencia própria também, que a motivação é essencial ao aprendizado. Neste sentido e com base no exposto ao longo desta dissertação, podemos constatar que há uma necessidade de fazer o aluno construir o conhecimento através da experiência, e, nada melhor do que materiais manipuláveis e *software*s que lhes permitam modificar, construir, fazer e desfazer figuras e objetos geométricos. É preciso estabelecer uma relação entre os objetos manipuláveis, que são construídos com materiais concretos e os conceitos matemáticos abstratos, oferecendo experiências que podem proporcionar a permanência, a longo prazo, de habilidades matemáticas e isto pode diminuir a visão de que a Matemática é só abstração.

Conforme o exposto ao longo do texto, podemos concluir que o uso de materiais concretos no ensino de Matemática não pode ser pensado como um remédio contra todas as dificuldades que os alunos enfrentam nesta disciplina. Professores e alunos devem usar o bom senso, pois do contrário o uso de materiais manipuláveis serão

mero entretenimento para os alunos sem ajudá-los a compreender quaisquer conceitos. O uso do Geogebra permite a professores e alunos feitos que sem esta ferramenta seriam inimagináveis ou trabalhosas demais. Este *software*, se bem explorado em sala de aula pode facilitar a tarefa do professor, bem como deixar suas aulas mais interessantes, e condizentes com padrões modernos de ensino, que trazem o computador pra sala de aula e o utilizam como ferramenta educacional. A abordagem de conceitos abstratos da Matemática tem seu momento, e deve ser explorada por professores e alunos. As aplicações à navegação, mostram o lado prático da Trigonometria e usamos o Google *Earth* neste trabalho como ferramenta para verificação de cálculo sobre a esfera, pois devido a este site oferecer imagens reais da Terra, torna-se um atrativo, além de proporcionar recursos que podem ser explorados pelos alunos e, assim deixar as aulas mais interessantes. Aspectos mais avançados do conteúdo, como algumas demonstrações que constam nesta dissertação e cálculos trigonométricos que constam no apêndice A, podem ser exploradas e cabe ao professor escolher quais estão em consonância com o nível de seus alunos.

Podemos concluir, em resumo, que o tema exposto é importante e, com uma metodologia adequada, pode contribuir positivamente para o desenvolvimento matemático do aluno.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 16 de julho de 2016.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRUNER, J. S. A cultura da educação. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Concrete-Representational-Abstract Instructional Approach. 2009. Disponível em:

<http://www.broward.k12.fl.us/studentsupport/ese/PDF/CRAApproachinMath.pdf>. Acesso em: 30 out. 2016.

D`AMBRÓSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP, n. 7, de julho-agosto de 1990. Disponível em < http://www.mat.ufmg.br/~espec/meb/files/Umareflexao_sobre_o_uso_de_materiais_concretos_e_jogos_no_ensino_da_Matematica.doc> . Acesso em: 05 jan. 2017.

GARBI, G.G. C.Q.D, Explicações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da Geometria. São Paulo: Editora, Livraria da Física, 2010. 1ª edição.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATOS, Francisco. Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Hoong, Leong Yew; Kin, Ho Weng; Pien, Cheng Lu. Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. The Mathematics Educator 2015. Vol 16. Disponível em: <http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/Yew%20Hoong%20et%20al%20(Final).pdf>. Acesso em: 30 out. 2016.

LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de Matemática. vol 1. 6ªedição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

MARQUES, Ramiro. Disponível em: <http://www.eses.pt/usr/ramiro/docs/etica_pedagogia/A%20Pedagogia%20de%20JeromeBruner.pdf >. Acesso em: 25 out. 2016.

SANTOS, Almir Rogério Silva; VIGLIONI. Humberto Henrique de Barros. Geometria Euclidiana Plana. Sergipe: UFS, 2011. Disponível em: <http://professor.ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf>

SILVA, Francisca Marlene da. et al., O uso do material concreto no ensino da Matemática. Disponível em:< http://www.editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito_947_7fc2304382477fcd9bed7819c1fb39e8.pdf/>. Acesso em: 31 dez. 2016.

Universidade de São Paulo. Um pouco da História da Trigonometria. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm> Acesso em: 20 fev. 2017.

OBRAS CONSULTADAS

AYRES JÚNIOR, Frank. Trigonometria Plana e Esférica. Traduzido por Mario Pinto Guedes. Coleção Schaum. São Paulo: Mc Graw Hill de Brasil Ltda, 1973.

ADAMES, Márcio Rostirolla. Geometria Esférica. Florianópolis – SC: UFSC, 2005. 64 p. Monografia Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SE, 1998.

COUTINHO, Lázaro. Trigonometria Esférica: a Matemática de um espaço curvo. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar, 10: Geometria Espacial: posição e métrica. Vol: 10. 6 ed. São Paulo: Atual, 2005.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol: 9. São Paulo: Atual, 1995.

FLEIUSS, Henrique. Elementos de Trigonometria Esférica. São Paulo, 1988.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. Recursos Computacionais do Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. Geometría: uma visión de la estereometría. Lima-Peru: Lumbreras Editores, 2012.

KENNEDY, Edward S. História da trigonometria. Trad. Hygino H. Domingues. Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula; vol. 5. São Paulo: Atual, 1992.

PALMER, Claude Irwin; LEIGH, Charles Wilber. Plane and Spherical Trigonometry. 4 ed. New York-EUA: McGraw-Hill Book Company, 1934.

PEDRO. Isidoro. Trigonometria Plana e Esférica. São Paulo: Editora Paulo de Azevedo, 1946.

SONNINO, Sérgio. Elementos de Trigonometria Esférica. São Paulo: Livraria Nobel, 1949.

VAZ, Silio. Noções de Trigonometria. Rio de Janeiro, 1978.

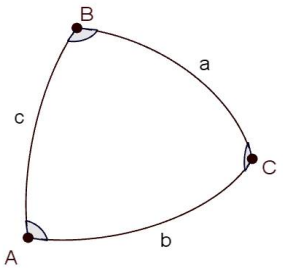
APÊNDICES

APÊNDICE A – ATIVIDADES DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS BÁSICA E RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

1.0 ATIVIDADES DE APLICAÇÃO DAS 4 FÓRMULAS BÁSICAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Veremos quatro exercícios em que aplicaremos as fórmulas básicas para o cálculo de elementos do triângulo esférico. Será necessário o uso de uma calculadora científica e, para valores de saída das razões trigonométricas serão usadas cinco casas decimais. Consideremos o triângulo esférico abaixo (ver figura 54) e, dados três elementos será necessário calcular um quarto elemento.

Figura 54 – Triângulo esférico e seus elementos



Fonte: Elaborada pelo autor

Atividade 01: Dados os lados **a** = 82º, **c** = 55º e o ângulo $\hat{B}$ = 120º entre eles, encontrar o lado **b** por meio da Lei dos Cossenos esférica.

$$\boxed{\cos b = \cos a.\cos c + sen\, a.sen\, c.\cos \hat{B}}$$

$$\cos b = \cos 82^{o}.\cos 55^{o} + sen\, 82^{o}.sen\, 55^{o}.\cos 120^{o}$$

$$\cos b = 0{,}13917.0{,}57358 + 0{,}99027.0{,}81915.(-0{,}50000)$$

$$\cos b = -0{,}32576$$

$$b = \arccos(-0{,}32576)$$

$$\boxed{\mathrm{b} = 109{,}01191^{o}}$$

Atividade 02: Dados os lados **a** = 25º, **b** = 68º e o ângulo $\hat{B}$ = 60º. Encontrar o ângulo $\hat{A}$ oposto ao lado a por meio da Lei dos Senos Esférica.

$$\boxed{sen\,\hat{A}.sen\,b = sen\,a.sen\,\hat{B}}$$

$$sen\,A.sen\,68^{o} = sen\,25^{o}.sen\,60^{o}$$

$$sen\,\hat{A}.0,92718 = 0,42262.0,86603$$

$$\text{sen}\,\hat{\text{A}} = 0,39475$$

$$\boxed{\hat{A} = 23,25020^{o}}$$

Atividade 03: Dados lado **a** = 32º, **b** = 55º e $\hat{C}$ = 85º, calcular $\hat{A}$ usando a fórmula das cotangentes.

$$\boxed{\text{cot}g\,a.\text{sen}b = \text{cos}b.\text{cos}\hat{C} + \text{sen}\hat{C}.\text{cot}g\,\hat{A}}$$

$$\text{cot}g\,32^{o}.\text{sen}55^{o} = \text{cos}55^{o}.\text{cos}85^{o} + \text{sen}85^{o}.\text{cot}g\,\hat{A}$$

$$1,60033.0,81915 = 0,57358.0,08716 + 0,99619.\text{cot}g\,\hat{A}$$

$$\text{cot}g\,\hat{A} = 1,26574$$

$$\frac{1}{\text{t}g\,\hat{A}} = 1,26574$$

$$\text{t}g\,\hat{A} = \frac{1}{1,26574}$$

$$\hat{A} = arctg\left(\frac{1}{1,26574}\right)$$

$$\boxed{\hat{A} = 38,31056^{o}}$$

Atividade 04: Dados os ângulos $\hat{A}$=41º, $\hat{B}$=65º e $\hat{C}$= 88º, calcular o lado **c** usando a lei dos cossenos esférica aplicada aos ângulos.

$$\boxed{\cos\hat{C} = -\cos\hat{A}.\cos\hat{B} - sen\hat{A}.sen\hat{B}.\cos c}$$

$$\cos 88^o = -\cos 41^o.\cos 65^o - sen\,41^o.sen\,65^o.\cos c$$

$$0,03490 = -0,75471.0,42262 - 0,65606.0,90631.\cos c$$

$$\cos c = -0,59512$$

$$c = \arccos(-0,59512)$$

$$\boxed{c = 126,52130^o}$$

2.0 ATIVIDADES SOBRE OS 6 CASOS DE RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Abaixo, veremos exemplos dos seis casos de resolução de triângulos esféricos. Esta atividade exige como pré-requisito que o aluno conheça as expressões Matemáticas que foram apresentadas no referencial teórico e é sugerido que o professor permita aos alunos o uso de calculadoras científicas ou *software* apropriado.

Atividade 01: Caso 01 de resolução de triângulos esféricos - Dados os lados **a**=70°50', **b** =50°10' e **c** = 94°20'. Calcular os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{70°50' + 50°10 + 94°20'}{2} = 107,66667°$$

$$tg\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{sen(s-b).sen(s-c)}{sens.sen(s-a)}}$$

$$tg\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{sen(107,66667° - 50°10').sen(107,66667° - 94°20')}{sen(107,66667°).sen(107,66667° - 70°50')}}$$

$$tg\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{sen(57,50000°).sen(13,33334°)}{sen(107,66667°).sen(36,83334°)}}$$

$$tg\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{0,84339.0,23062}{0,95294.0,59949}}$$

$$tg\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{0,34047}=0,58350$$

$$\frac{\hat{A}}{2}=arctg\,0,58350=30,26345^{o}$$

$$\boxed{\hat{A}=60,52690^{o}}$$

$$tg\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-a).sen(s-c)}{sens.sen(s-b)}}$$

$$tg\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen(107,66667^{\circ}-70^{\circ}50').sen(107,66667^{\circ}-94^{\circ}20')}{sen(107,66667^{\circ}).sen(107,66667^{\circ}-50^{\circ}10')}}$$

$$tg\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{sen(36,83334^{\circ}).sen(13,33334^{\circ})}{sen(107,66667^{\circ}).sen(57,50000^{\circ})}}$$

$$tg\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{0,59959.0,23062}{0,95294.0,84339}}$$

$$tg\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{0,17202}$$

$$tg\frac{\hat{B}}{2}=0,41476$$

$$\frac{\hat{B}}{2}=arctg\,0,41476=22,52672^{o}$$

$$\boxed{\hat{B}=45,05344^{\circ}}$$

$$tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sen(s-a).sen(s-b)}{sens.sen(s-c)}}$$

$$tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sen(107,66667°-70°50').sen(107,66667°-50°10')}{sen(107,66667°).sen(107,66667°-94°20')}}$$

$$tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sen(107,66667°-70°50').sen(107,66667°-50°10')}{sen(107,66667°).sen(107,66667°-94°20')}}$$

$$tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{sen36,83334°.sen57,50000°}{sen107,66667°.sen13,3334°}}$$

$$tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{0,59949.0,84339}{0,95294.0,23062}}$$

$$tg\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{2,30064}=1,51678$$

$$\frac{\hat{C}}{2}=arctg1,51678=56,60356°$$

$$\boxed{C=113,20712°}$$

Atividade 02: Caso 02 de resolução de triângulos esféricos - Dados os ângulos esféricos $\hat{A}$ = 105º50', $\hat{B}$ = 128º40' e $\hat{C}$ = 130º20'. Encontrar os lados **a**, **b** e **c**.

$$\hat{S}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{105º50'+128º40'+130º20'}{2}=182,41667º$$

$$\boxed{tg\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos\hat{S}.\cos(\hat{S}-\hat{A})}{\cos(\hat{S}-\hat{B}).\cos(\hat{S}-\hat{C})}}}$$

$$tg\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos(182,41667º).\cos(182,41667º-105º50')}{\cos(182,41667º-128º40').\cos(182,41667º-130º20')}}$$

$$tg\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos(182,41667º).\cos(76,58334º)}{\cos(53,75000º).\cos(52,08334º)}}$$

$$tg\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{(-0,99911).(0.23203)}{(0,59131).(0,61451)}}$$

$$tg\frac{a}{2} = \sqrt{0,63799} = 0,79874$$

$$\frac{a}{2} = arctg\,0,79874 = 38,61584^o$$

$$\boxed{a = 77,23168^o}$$

$$\boxed{tg\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{sen\,\hat{S}.sen(\hat{S}-\hat{B})}{sen(\hat{S}-\hat{C}).sen(\hat{S}-\hat{A})}}}$$

$$tg\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{sen\,(182,41667^o).sen(182,41667^o - 128^o\,40')}{sen(182,41667^o - 130^o\,20').sen(182,41667^o - 105^o\,50')}}$$

$$tg\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{sen\,(182,41667^o).sen(53,75000^o)}{sen(0,61451^o).sen(0,23203^o)}}$$

$$tg\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{(-0,99911).(0,59131)}{(0,61451).(0,23203)}}$$

$$tg\frac{b}{2} = \sqrt{4,14339^o} = 2,03553$$

$$\frac{b}{2} = arctg(2,03553) = 63,83639^o$$

$$\boxed{b = 127,67278^o}$$

$$\boxed{tg\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{sen\,\hat{S}.sen(\hat{S}-\hat{C})}{sen(\hat{S}-\hat{A}).sen(\hat{S}-\hat{B})}}}$$

$$tg\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{sen\,(182,41667^o).sen(182,41667^o - 128^o\,40')}{sen(182,41667^o - 130^o\,20').sen(182,41667^o - 105^o\,50')}}$$

$$tg\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{sen\,(182^o\,50').sen(52,08334^o)}{sen(76,58334^o).sen(53,75000^o)}}$$

$$tg\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{(-0,99911).(0,61451)}{(0,23203).(0,59131)}}$$

$$tg\frac{c}{2} = \sqrt{4,47490} = 2,11539$$

$$\frac{c}{2} = arctg(2,11539) = 64,69873^o$$

$$\boxed{c = 129,39746^o}$$

Atividade 03: 3º caso de resolução de triângulos esféricos - Dados **a**=105º30', **b**=70º50', $\hat{C}$=98º30'. Calcular os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e o lado **c**.

Usamos as analogias de Napier

$$\boxed{tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{sen\frac{a-b}{2}}{sen\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\hat{C}}{2}}$$

$$tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{sen\frac{105^o30'-70^o50'}{2}}{sen\frac{105^o30'+70^o50'}{2}}cotg\frac{98^o30'}{2}$$

$$tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{sen17,33333^o}{sen88,16667^o}cotg49,25000^o$$

$$tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{0,29376}{0,99949}.0,86165$$

$$tg\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = 0,25325$$

$$\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = arctg\,0,25325 = 14,21137^o$$

$$\boxed{\hat{A}-\hat{B} = 28,42274^o}$$

$$\boxed{tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\hat{C}}{2}}$$

$$tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{105^o30'-70^o50'}{2}}{\cos\frac{105^o30'+70^o50'}{2}}cotg\frac{98^o30'}{2}$$

$$tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos 17,33333}{\cos 88,16667^o}cotg\,49,25000^o$$

$$tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{0,95459}{0,03199}.0,86165$$

$$tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=25,71186$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=arctg\,25,71186=87,77274^o$$

$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}=175,54549^o}$$

Resolvendo o sistema de equações nas variáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$, obtemos

$$\hat{A}=101,98412^o$$

$$\hat{B}=73,56138^o$$

$$\boxed{tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}tg\frac{c}{2}}$$

$$tg\frac{105^o30'+70^o50'}{2}=\frac{\cos 14,21137^o}{\cos 87,77274^o}tg\frac{c}{2}$$

$$tg\frac{105^o30'+70^o50'}{2}=\frac{\cos 14,21137^o}{\cos 87,77274^o}tg\frac{c}{2}$$

$$tg\,88,16667^{o} = \frac{0,96940}{0,03886} tg\,\frac{c}{2}$$

$$31,24258 = \frac{0,96940}{0,03886} tg\,\frac{c}{2}$$

$$tg\,\frac{c}{2} = 1,25237$$

$$\frac{c}{2} = arctg\,1,25237 = 51,39312^{o}$$

$$\boxed{c = 102,78624^{o}}$$

Atividade 04: Caso 04 de resolução de triângulos esféricos - Dados $\hat{A}$ = 94º50', $\hat{B}$ = 63º40' e **c** = 50º30'. Encontrar **a**, **b** e $\hat{C}$.

$$\boxed{tg\,\frac{a-b}{2} = \frac{sen\,\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{sen\,\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} tg\,\frac{c}{2}}$$

$$tg\,\frac{a-b}{2} = \frac{sen\,\frac{94^{o}50' - 63^{o}40'}{2}}{sen\,\frac{94^{o}50' + 63^{o}40'}{2}} tg\,\frac{50^{o}30'}{2}$$

$$tg\,\frac{a-b}{2} = \frac{sen\,15^{o}35'}{sen\,79^{o}15'} tg\,25^{o}15'$$

$$tg\,\frac{a-b}{2} = \frac{0,26864}{0,98245}.0,47163$$

$$tg\,\frac{a-b}{2} = 0,12896$$

$$\frac{a-b}{2} = arctg\,0,12896 = 7,34831^{o}$$

$$\boxed{a-b = 14,69662^{o}}$$

$$\boxed{tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}tg\frac{c}{2}}$$

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{94^o50'-63^o40'}{2}}{\cos\frac{94^o50'+63^o40'}{2}}tg\frac{50^o30'}{2}$$

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos 15,58333^o}{\cos 79,25000^o}tg\,25,25000^o$$

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{0,96324}{0,18652}.0,47163$$

$$tg\frac{a+b}{2}=2,43563$$

$$\frac{a+b}{2}=arctg\,2,43563=67,67835^o$$

$$\boxed{a+b=135,35670^o}$$

Resolvendo o sistema de encontramos

$$\boxed{a=75,02658^o}$$

$$\boxed{b=60,32996^o}$$

$$\boxed{tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\hat{C}}{2}}$$

$$tg\frac{94^o50'+63^o40'}{2}=\frac{\cos\frac{75,02658^o-60,32996^o}{2}}{\cos\frac{75,02658^o+60,32996^o}{2}}cotg\frac{\hat{C}}{2}$$

$$tg\,79,25000^o=\frac{\cos 7,34831^o}{\cos 67,67827^o}cotg\frac{\hat{C}}{2}$$

$$5,26715 = \frac{0,99179}{0,37981} cotg \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$cotg \frac{\widehat{C}}{2} = 2,01708$$

$$\frac{1}{tg \frac{\widehat{C}}{2}} = 2,01708$$

$$tg \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{1}{2,01708}$$

$$\frac{\widehat{C}}{2} = arctg(\frac{1}{2,01708}) = 26,37066^o$$

$$\boxed{\widehat{C} = 52,74132^o}$$

Atividade 05: Caso 05 de resolução de triângulos esféricos - Dados **a** = 45º30', **b** = 66º20' e $\widehat{A}$ = 40º50'. Encontrar os ângulos $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e o lado **c**.

$$\boxed{sen \widehat{B}.sen\, a = sen\, b.sen \widehat{A}}$$

$$sen \widehat{B}.sen 45^o 30' = sen 66^o 20'.sen 40^o 50'$$

$$sen \widehat{B}.0,71325 = 0,91590.0,65386$$

$$sen \widehat{B} = 0,83964$$

$$\widehat{B} = arcsen 0,83964$$

O que implica $\widehat{B}_1 = 57,10212^o$ e $\widehat{B}_2 = 122,89788^o$

$$\boxed{tg \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A - B_1}{2}}{\cos \frac{A + B_1}{2}} tg \frac{c_1}{2}}$$

$$tg\frac{45^o30'+66^o20'}{2}=\frac{\cos\frac{40^o50'-57,10212^o}{2}}{\cos\frac{40^o50'+57,10212^o}{2}}tg\frac{c_1}{2}$$

$$tg55,91667^o=\frac{\cos-8,13439^o}{\cos 48,96773^o}tg\frac{c_1}{2}$$

$$1,47792=\frac{0,98994}{0,65648}tg\frac{c_1}{2}$$

$$tg\frac{c_1}{2}=0,98008$$

$$\frac{c_1}{2}=arctg\,0,98008=44,42361^o$$

$$\boxed{c_1=88,84722^o}$$

$$\boxed{tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B_2}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B_2}}{2}}tg\frac{c_2}{2}}$$

$$tg\frac{45^o30'+66^o20'}{2}=\frac{\cos\frac{40^o50'-122,89788^o}{2}}{\cos\frac{40^o50'+122,89788^o}{2}}tg\frac{c_2}{2}$$

$$tg55,91667^o=\frac{\cos-41,03227^o}{\cos 81,86561^o}tg\frac{c_2}{2}$$

$$1,47792=\frac{0,75434}{0,14150}tg\frac{c_2}{2}$$

$$tg\frac{c_2}{2}=0,27723$$

$$\frac{c_2}{2}=arctg\,0,27723=15,49497^o$$

$$\boxed{c_2=30,98994^o}$$

$$\boxed{tg\frac{\widehat{A}+\widehat{B_1}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}}$$

$$tg\frac{40^o50'+57,10212^o}{2}=\frac{\cos\frac{45^o30'-66^o20'}{2}}{\cos\frac{45^o30'+66^o20'}{2}}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}$$

$$tg48,96773^o=\frac{\cos-10,41667^o}{\cos55,91667^o}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}$$

$$1,14906=\frac{0,98352}{0,56040}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}$$

$$cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}=0,65472$$

$$\frac{1}{tg\frac{\widehat{C_1}}{2}}=0,65472$$

$$tg\frac{\widehat{C_1}}{2}=\frac{1}{0,65472}$$

$$\frac{\widehat{C_1}}{2}=arctg(\frac{1}{0,65472})=56,78643^o$$

$$\boxed{\widehat{C_1}=113,57286^o}$$

$$\boxed{tg\frac{\widehat{A}+\widehat{B_2}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\widehat{C_2}}{2}}$$

$$tg\frac{40^o50'+122,89788^o}{2}=\frac{\cos\frac{45^o30'-66^o20'}{2}}{\cos\frac{45^o30'+66^o20'}{2}}cotg\frac{\widehat{C_2}}{2}$$

$$tg 81,86561^o = \frac{\cos -10,41667^o}{\cos 55,91667^o} cotg \frac{\widehat{C_2}}{2}$$

$$6,99626 = \frac{0,98352}{0,56040} cotg \frac{\widehat{C_2}}{2}$$

$$cotg \frac{\widehat{C_2}}{2} = 3,98640$$

$$\frac{1}{tg \frac{\widehat{C_2}}{2}} = 3,98640$$

$$tg \frac{\widehat{C_2}}{2} = \frac{1}{3,98640}$$

$$\frac{\widehat{C_2}}{2} = arctg(\frac{1}{3,98640}) = 14,08223^o$$

$$\boxed{\widehat{C_2} = 28,16445^o}$$

Atividade 06: Caso 06 de resolução de triângulos esféricos - Dados $\widehat{A}$ = 30º20', $\widehat{B}$ = 44º50' e **a** = 36º40'. Encontrar os lados **b**, **c** e o ângulo $\widehat{C}$.

$$\boxed{sen\,\widehat{B}.\text{sen a} = \text{sen b}.\text{sen}\,\widehat{A}}$$

$$\text{sen } 44^o 50'.\text{sen } 36^o 40' = \text{sen b}.\text{sen } 30^o 20'$$

$$0,70505.0,59716 = \text{sen b}.0,50503$$

$$\text{sen b} = 0,83367$$

$$\text{b} = \text{arcsen } 0,83367$$

o que implica em

$\boxed{b_1 = 56,47760^o}$ ou $\boxed{b_2 = 123,52240^o}$

$$\boxed{tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b_1}{2}}{\cos\frac{a+b_1}{2}}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}}$$

$$tg\frac{30^o\,20'+44^o\,50'}{2}=\frac{\cos\frac{36^o\,40'-56,47760^o}{2}}{\cos\frac{36^o\,40'+56,47760^o}{2}}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}$$

$$tg\,37,58333^o=\frac{\cos-9,90547^o}{\cos 46,57213^o}cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}$$

$$cotg\frac{\widehat{C_1}}{2}=0,53709$$

$$\frac{1}{tg\frac{\widehat{C_1}}{2}}=0,53709$$

$$tg\frac{\widehat{C_1}}{2}=\frac{1}{0,53709}$$

$$\frac{\widehat{C_1}}{2}=arctg\left(\frac{1}{0,53709}\right)=61,76020^o$$

$$\boxed{C_1=123,52040^o}$$

$$\boxed{tg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b_2}{2}}{\cos\frac{a+b_2}{2}}cotg\frac{\widehat{C_2}}{2}}$$

$$tg\frac{30^o\,20'+44^o\,40'}{2}=\frac{\cos\frac{36^o\,40'-123,52240^o}{2}}{\cos\frac{36^o\,40'+123,52240^o}{2}}cotg\frac{\widehat{C_2}}{2}$$

$$tg\,37,58333^o=\frac{\cos-43,42787^o}{\cos 80,09453^o}cotg\frac{\widehat{C_2}}{2}$$

$$0,76964 = \frac{0,72624}{0,17202} cotg \frac{\widehat{C_2}}{2}$$

$$cotg \frac{\widehat{C_2}}{2} = 0,18230$$

$$\frac{1}{tg \frac{\widehat{C_2}}{2}} = 0,18230$$

$$tg \frac{\widehat{C_2}}{2} = \frac{1}{0,18230}$$

$$\frac{\widehat{C_2}}{2} = arctg\left(\frac{1}{0,18230}\right) = 79,66843^o$$

$$\boxed{\widehat{C_2} = 159,33687^o}$$

$$\boxed{tg \frac{a+b_1}{2} = \frac{\cos \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} tg \frac{c_1}{2}}$$

$$tg \frac{36^o 40' + 56,47760^o}{2} = \frac{\cos \frac{30^o 20' - 44^o 50'}{2}}{\cos \frac{30^o 20' + 44^o 50'}{2}} tg \frac{c_1}{2}$$

$$tg\, 46,57213^o = \frac{\cos -7,25000^o}{\cos 37,58333^o} tg \frac{c_1}{2}$$

$$1,05644 = \frac{0,99200}{0,79247} tg \frac{c_1}{2}$$

$$tg \frac{c_1}{2} = 084395$$

$$\frac{c_1}{2} = arctg\, 0,84395 = 40,16269^o$$

$$\boxed{c_1 = 80,32538^o}$$

$$\boxed{tg\frac{a+b_2}{2}=\frac{\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}tg\frac{c_2}{2}}$$

$$tg\frac{36^o\,40'+123,52240^o}{2}=\frac{\cos\frac{30^o\,20'-44^o\,50'}{2}}{\cos\frac{30^o\,20'+44^o\,50'}{2}}tg\frac{c_2}{2}$$

$$tg\,80,09453^o=\frac{\cos-7,25000^o}{\cos 37,58333^o}tg\frac{c_2}{2}$$

$$5,72651=\frac{0,99200}{0,79247}tg\frac{c_2}{2}$$

$$tg\frac{c_2}{2}=4,57468$$

$$\frac{c_2}{2}=arctg\,4,57468=77,66941^o$$

$$\boxed{c_2=155,33882^o}$$

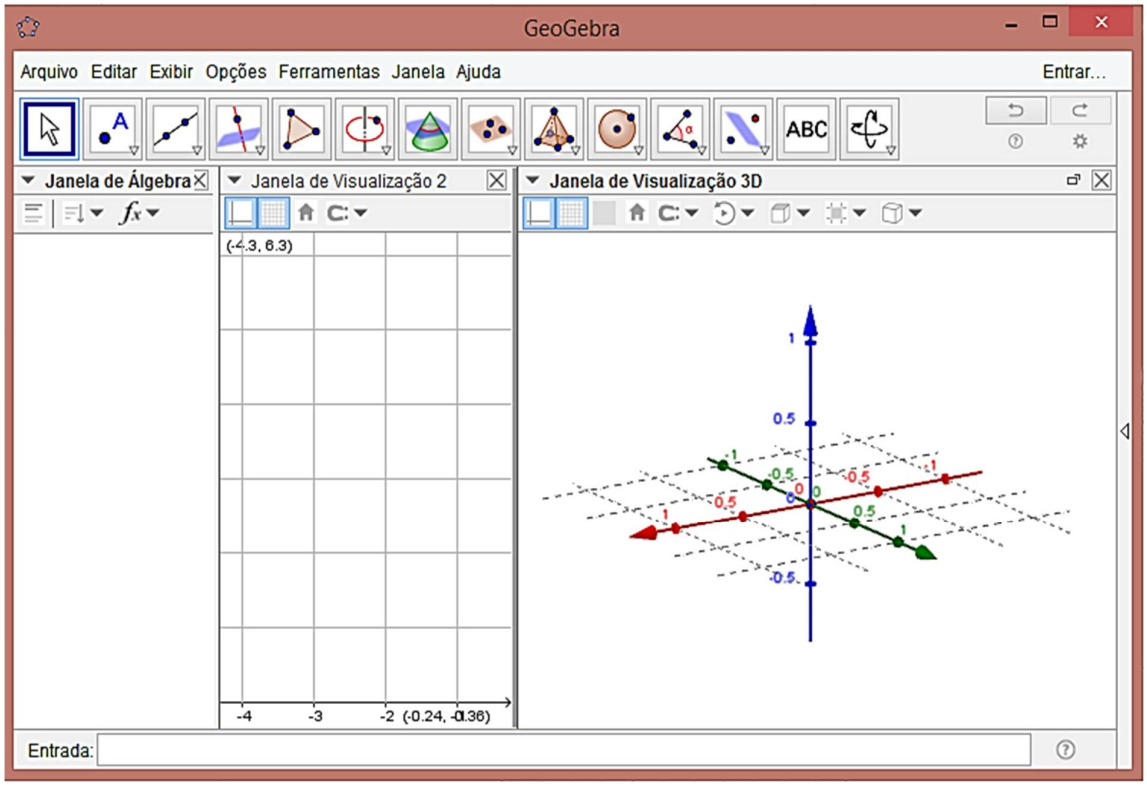
APÊNDICE B - CONHECENDO O GEOGEBRA

Requisitos para o professor implementar as aulas com Geogebra:

- Domínio das funcionalidades básicas;
- Conhecer o ambiente 3d

Na figura 55, tem-se o menu, botões suspensos, a Janela de Álgebra, a Janela de Visualização 2, a Janela de Visualização 3D e o campo de Entrada. Entramos com os dados no campo de entrada e vemos os dados inseridos na Janela de Álgebra. Os dados inseridos que possuem representações gráficas aparecem nas janelas de visualização, que podem ser no plano, ou seja, em duas dimensões e no espaço em 3 dimensões.

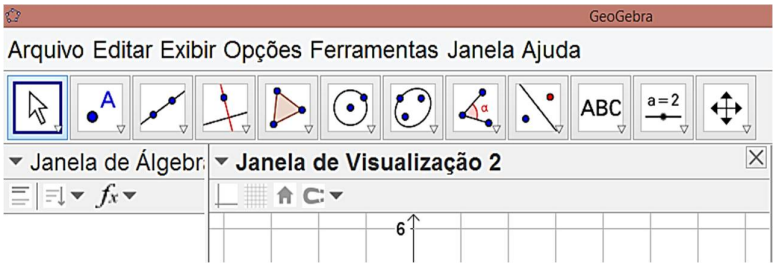
Figura 55 – Interface gráfica do *software* Geogebra: Janelas de visualização



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Ao clicar dentro da Janela de Visualização 2 os seguintes botões aparecem:

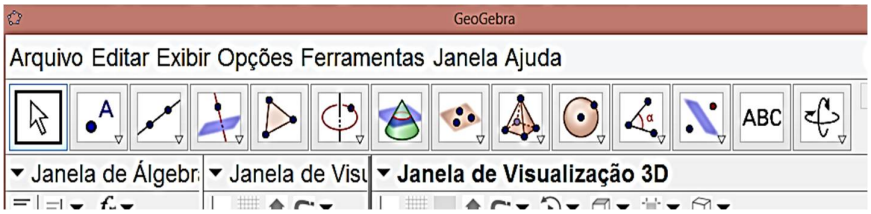
Figura 56 – Botões da janela de visualização 2



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Ao clicar dentro da Janela de Visualização 3D os seguintes ícones aparecem:

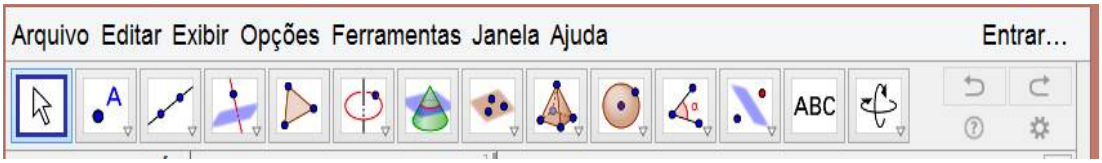
Figura 57 – Botões da janela de visualização 3D



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

No menu temos os seguintes itens: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda, Entrar.

Figura 58 – Menu do Geogebra

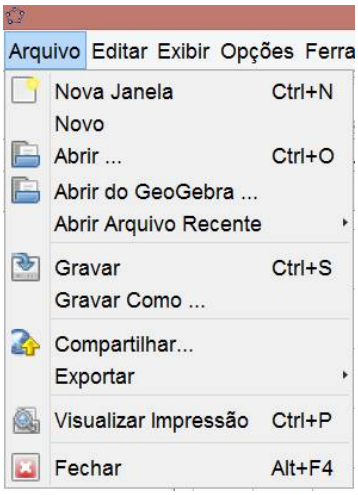


Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Cada item do menu possui outros subitens:

Arquivo: Neste item pode-se abrir nova janela do Geogebra, abrir outros arquivos ggb; gravar dados; compartilhar e exportar dados.

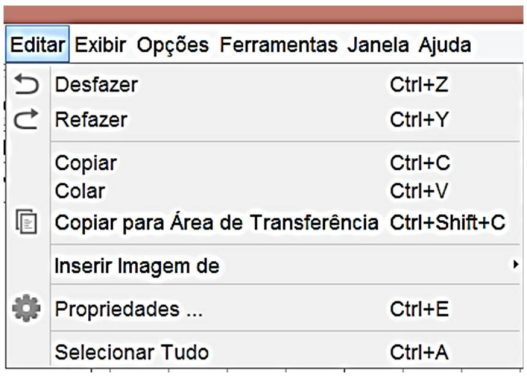
Figura 59 – Menu: Arquivo



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Editar: Neste item podemos desfazer ou refazer ações, copiar e colar dados, inserir imagens, explorar propriedades e selecionar dados.

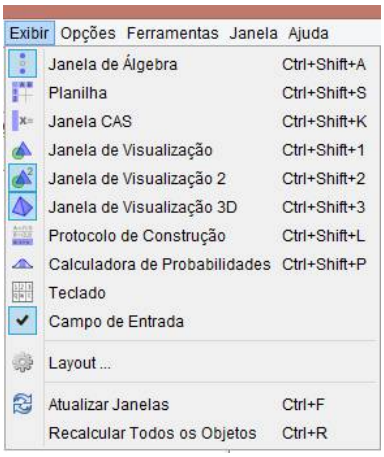
Figura 60 – Menu: Editar



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Exibir: Neste item encontra-se a Janela de Álgebra, Planilha, Janela CAS, Janela de Visualização, Janela de Visualização 2, Janela de Visualização 3D, Protocolo de Construção, Calculadora de Probabilidades, Teclado, Campo de Entrada, Layout, Atualizar Janelas, Recalcular Todos os Objetos.

Figura 61 – Menu: Exibir



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

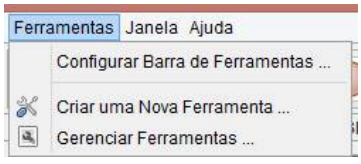
Opções: Neste item tem-se as opções de arredondamento, de rótulo, de tamanho da fonte, de idioma. Podemos gravar configurações ou restaurar as configurações padrão e também tem-se opções avançadas.

Figura 62 – Menu: Opções

Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Ferramentas: Neste item pode-se configurar , criar e gerenciar Ferramentas.

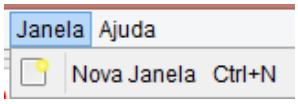
Figura 63 – Menu: Ferramentas



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Janela: Neste item tem-se a opção de criar nova janela.

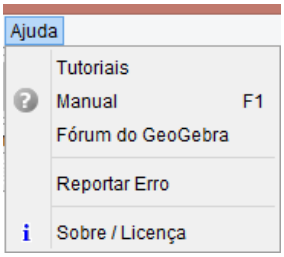
Figura 64 – Menu: Janela



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Ajuda: Neste item tem-se as opções: Tutoriais, Manual, Fórum do Geogebra, Sobre/licença.

Figura 65 – Menu: Ajuda



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Janela de Visualização 3D: Botões suspensos

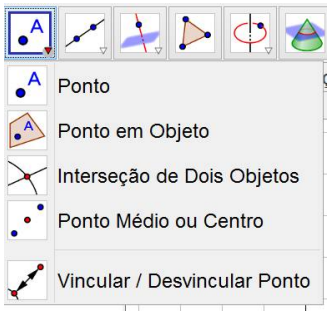
Primeiro ícone: Podemos mover objetos;

Figura 66 – Primeiro ícone

Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Segundo ícone: criamos pontos isolados, pontos em objetos, interseções de objetos, ponto médio ou centro e também pode-se vincular/desvincular pontos;

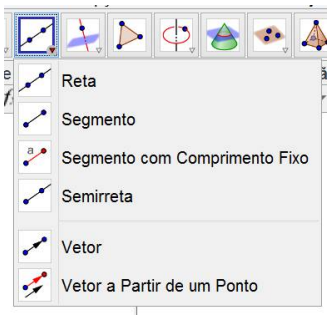
Figura 67 – Segundo ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Terceiro ícone: Neste ícone podemos criar retas, segmentos de reta, semirretas e vetores;

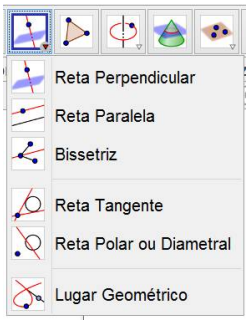
Figura 68 – Terceiro ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Quarto ícone: Temos as opções de criar retas paralelas ou perpendiculares a uma reta dada, criar bissetrizes, retas tangentes, retas polares, lugares geométricos;

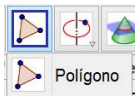
Figura 69 – Quarto ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Quinto ícone: Com este ícone podemos criar polígonos;

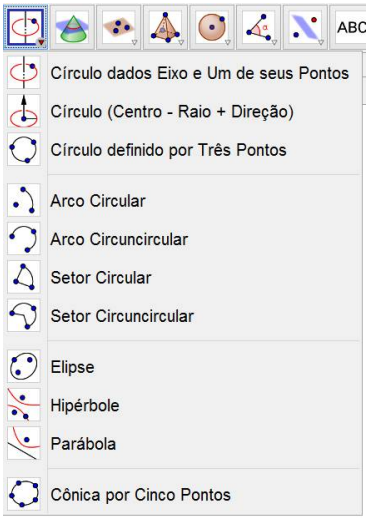
Figura 70 – Quinto ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Sexto ícone: temos a opção de criar círculos, arcos, setores circulares, elipses, hipérboles, parábolas e cônicas.

Figura 71 – Sexto ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

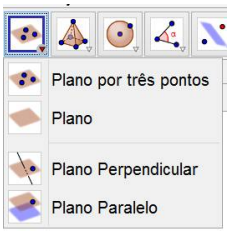
Sétimo ícone: Podemos obter a interseção de duas superfícies;

Figura 72 – Sétimo ícone

Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Oitavo ícone: temos opções de criar planos dados três pontos, planos perpendiculares, planos paralelos;

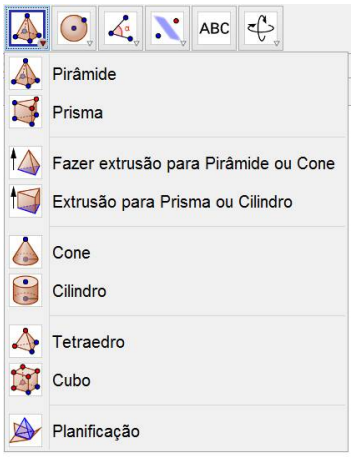
Figura 73 – Oitavo icone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Nono ícone: Temos opções de criar figuras geométricas espaciais, como pirâmides, prismas, cones, cilindros, tetraedros e cubos. Também podemos fazer extrusão para pirâmide ou cone, extrusão para prisma ou cilindro e planificações;

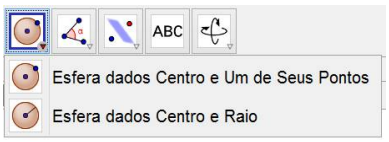
Figura 74 – Nono ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Décimo ícone: temos opções de criação de esferas;

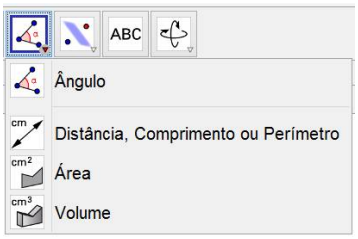
Figura 75 – Décimo ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Décimo primeiro ícone: Temos opções de ângulo, de distâncias, áreas e volumes;

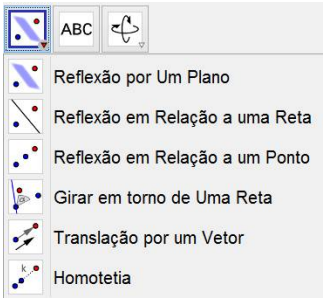
Figura 76 – Décimo primeiro



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Décimo segundo ícone: Podemos criar reflexões, girar objetos em torno de uma reta, transladar vetores e criar homotetias;

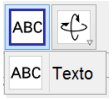
Figura 77 – Décimo segundo



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Décimo terceiro ícone: Podemos criar textos;

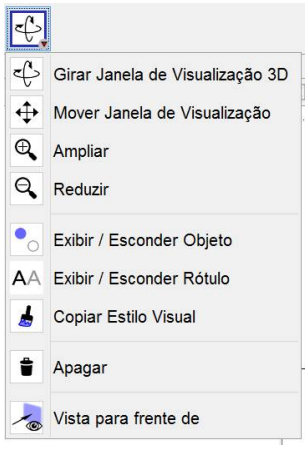
Figura 78 – Décimo terceiro ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

Décimo quarto ícone: Podemos girar, mover, ampliar ou reduzir a janela de visualização, esconder, exibir ou apagar objetos e obter a vista frontal;

Figura 79 – Décimo quarto ícone



Fonte: Print screen do *software* Geogebra

APÊNDICE C: TESTE E QUESTIONÁRIO
TESTE

Com materiais concretos elabore construções para responder às 3 questões seguintes.

01) É possível termos “retas” paralelas na Geometria Esférica? a) Sim b) Não c) Não sei	02) É possível termos “retas” perpendiculares na Geometria Esférica? a) Sim b) Não c) Não sei

03) Na geometria Euclidiana, no plano, 3 retas distintas podem estar nas seguintes situações:

- As 3 retas paralelas;
- Apenas 2 retas paralelas;
- Nenhuma reta paralela à outra, e neste caso teremos a formação de 1 triângulo ou então, as retas são concorrentes em um único ponto.

Tendo em vista a Geometria Esférica, construa três “retas” nesta geometria e faça observações a respeito.

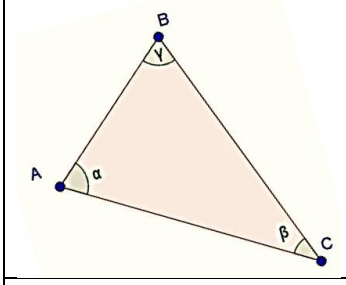
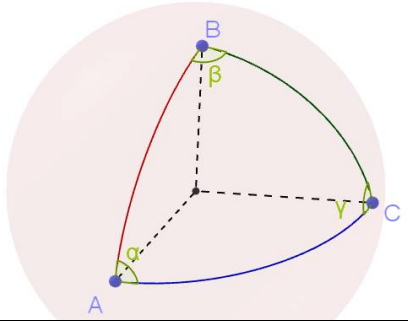
_____

_____

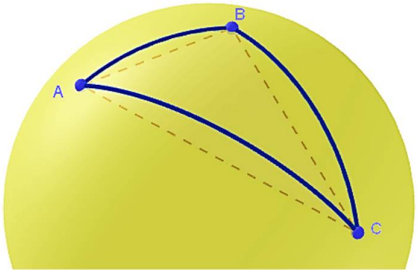
_____

_____

04) Observando-se o triângulo esférico elaborado com o *software* Geogebra, mova seus vértices e anote as medidas dos ângulos.

	Na Geometria Euclidiana Plana, a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a 180º. $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
	Qual das expressões abaixo corresponde à soma dos ângulos de um triângulo esférico? a) $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ b) $\alpha + \beta + \gamma < 180^o$ c) $\alpha + \beta + \gamma > 180^o$

05) Os pontos A, B e C representados no Geogebra são vértices de um triângulo plano e de um triângulo esférico. Em relação as áreas:

	a) O triângulo esférico possui maior área; b) O triângulo plano possui maior área; c) As áreas dos dois triângulos são iguais,

06) Construa um fuso esférico e um triângulo esférico, obtenha suas medidas e calcule suas áreas.

07) Com o Google Earth escolha dois pontos na superfície terrestre e, supondo-se que um avião deva navegar o percurso assim definido, calcule a distância.

QUESTIONÁRIO

01) O tema Geometria/Trigonometria Esférica é interessante.

a) Concordo totalmente

b) Concordo parcialmente

c) Discordo parcialmente

d) Discordo totalmente

02) A Geometria Esférica faz tanto sentido quanto a Geometria comum (Euclidiana Plana).

a) Concordo totalmente

b) Concordo parcialmente

c) Discordo parcialmente

d) Discordo totalmente

03) A Geometria Esférica pode ser tão útil quanto a geometria comum.

a) Concordo totalmente

b) Concordo parcialmente

c) Discordo parcialmente

d) Discordo totalmente

04) Vivemos em um planeta cuja forma é aproximadamente uma esfera. Porque estudamos Geometria Euclidiana (comum) em vez da Geometria Esférica?

a) Por que é mais fácil

b) Por que, para distâncias pequenas podemos considerar que vivemos em um plano

c) Não sei

05) O uso de materiais concretos ajudou na compreensão dos conceitos geométricos/trigonométricos.

a) Concordo totalmente

b) Concordo parcialmente

c) Discordo parcialmente

d) Discordo totalmente

06) O uso do Geogebra o ajudou na compreensão dos conceitos geométricos/trigonométricos.

a) Concordo totalmente

b) Concordo parcialmente

c) Discordo parcialmente

d) Discordo totalmente

07) O problema sobre navegação foi interessante.

a) Concordo totalmente

b) Concordo parcialmente

c) Discordo parcialmente

d) Discordo totalmente