Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Zilvan de Oliveira Alfradique

Um olhar sobre as demonstrações da irracionalidade de raiz de dois e zeta de três

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro
Abril de 2017

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Zilvan de Oliveira Alfradique

Um olhar sobre as demonstrações da irracionalidade de raiz de dois e zeta de três

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

Prof. Humberto José Bortolossi
Instituto de Matemática – UFF

Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de Abril de 2017

Zilvan de Oliveira Alfradique

Graduou-se em Bacharelado e Licenciatura pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Atualmente é professor do ensino básico pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

de Oliveira Alfradique, Zilvan

Um olhar sobre as demonstrações da irracionalidade de raiz de dois e zeta de três / Zilvan de Oliveira Alfradique; orientador: Nicolau Corção Saldanha. – 2017.

v., 57 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. demonstrações – Teses. 3. Irracionalidade;. 4. Números Irracionais;. 5. Zeta;. 6. Pi;. 7. Número de Euler.. I. Corção Saldanha, Nicolau. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 620.11

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha esposa, Juliana, que me apoiou em todos os momentos, desde o início do mestrado.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador, Nicolau, por toda paciência durante as orientações e pela disponibilidade de seu precioso tempo a me ajudar sempre que foi preciso.

Sou grato aos professores, que de alguma forma, contribuiram com a minha formação.

E por fim, gostaria de agradecer aos coordenadores e organizadores do PROFMAT pela oportunidade e por oferecer um curso enriquecedor e à CAPES pela ajuda financeira.

Resumo

de Oliveira Alfradique, Zilvan; Corção Saldanha, Nicolau. **Um olhar sobre as demonstrações da irracionalidade de raiz de dois e zeta de três**. Rio de Janeiro, 2017. 57p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho explora demonstrações da irracionalidade de alguns números reais, desde $\sqrt{2}$ até $\zeta(3)$. A função $\zeta(n)$, para n inteiro maior que 1, foi estudado por diversos matemáticos, tendo Leonhard Euler como um dos precursores. Quando n assume valores pares, o valor de $\zeta(n)$ é conhecido, mas até o momento a representação dos valores $\zeta(n)$, com n ímpar, é um problema em aberto. Apesar de não ser conhecido o valor de $\zeta(3)$, o matemático Roger Apéry publicou em 1979 uma prova de que esse número é irracional. Vamos apresentar neste trabalho uma demonstração mais simples da irracionalidade de $\zeta(3)$ publicada por Frits Beukers também em 1979, no qual o pré-requisito é o conhecimento do cálculo diferencial e integral para três variáveis. Também será apresentado demonstraçẽs da irracionalidade de $\sqrt{2}$ com argumentos geométricos, demonstrações da irracionalidade de π e a irracionalidade de algumas potências do número e.

Palavras-chave

Irracionalidade; Números Irracionais; Zeta; Pi; Número de Euler.

Abstract

de Oliveira Alfradique, Zilvan; Corção Saldanha, Nicolau (Advisor).
A look at the demonstrations of the irrationality of the square root of two and zeta of three. Rio de Janeiro, 2017. 57p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work explores the irrationality of some real numbers, since $\sqrt{2}$ to $\zeta(3)$. The function $\zeta(n)$, for n greater than 1, was studied by several mathematicians, with Leonhard Euler as one of the precursors. When n takes on even values, the value of $\zeta(n)$ is known, but so far the representation of the values $\zeta(n)$, with n odd, is an open problem. Although the value of $\zeta(3)$ was not known, the mathematician Roger Apéry published in 1979 proof that this number is irrational. Let's present in this work a simpler demonstration of the irrationality of $\zeta(3)$ published by Frits Beukers also in 1979, in which the prerequisite is the knowledge of differential and integral calculus for three variables. Demonstrations of the irrationality of $\sqrt{2}$ will also be presented with geometric arguments, demonstrations of the irrationality of π and the irrationality of some powers of the number e.

Keywords

Irrationality; Irrational numbers; Zeta; Pi; Euler numbers.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.

Polya, *George.*

1
Buscando a irracionalidade através de argumentos geométricos

Nesse capitulo encontra-se uma breve história sobre o surgimento dos números irracionais, baseado em [1]. Também será apresentado duas demonstrações, com argumentos geométricos, da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e também a irracionalidade de $\sqrt{n^2-1}$ e $\sqrt{n^2+1}$ baseados em [2,3].

1.1
Um pouco de história

Os antigos gregos acreditavam, intuitivamente, na ideia de que duas medidas sempre seriam comensuráveis, ou seja, dados duas medidas a e b, existe uma unidade de medida, não importa o quão pequeno, de modo que as medidas a e b são múltiplos dessa unidade. No entanto, ocorreu uma estranha descoberta: a existência de medidas não comensuráveis, isto é, medidas incomensuráveis. As circunstâncias e a época para a primeira percepção de medidas incomensuráveis são incertas. A sugestão mais plausível é que essa descoberta foi realizada por pitagóricos, provavelmente por Hípaso de Metaponto, em algum momento antes de 410 A.C. Acredita-se que essa percepção veio como consequência da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles. Eles teriam notado que as medidas da diagonal e do lado de um quadrado são incomensuráveis.

Vamos apresentar uma possível prova da época para incomensurabilidade da diagonal e do lado de um quadrado. Considere d e l a medida da diagonal e do lado do quadrado, respectivamente. Suponhamos então que d e l são medidas comensuráveis, ou seja, existe uma unidade de medida u tal que d e l são múltiplos de u. Isso significa $d = u \cdot p$ e $l = u \cdot q$ para algum p e q números inteiros (Figura 1.1). É possível obter u de forma que p e q sejam primos entre si, então vamos considerar esta hipótese, sem perda de generalidade.

Do teorema de Pitágoras obtemos $d^2 = l^2 + l^2$, ou seja, $d^2 = 2 \cdot l^2$. Daí, temos que $p^2 = 2 \cdot q^2$, ou seja, p é um número par. Utilizando $p = 2 \cdot r$, com r número inteiro, obtemos a igualdade $2 \cdot r^2 = q^2$ no qual se conclui que q também é um número par, o que é absurdo. A contradição vem do fato de supormos que d e l são medidas comensuráveis.

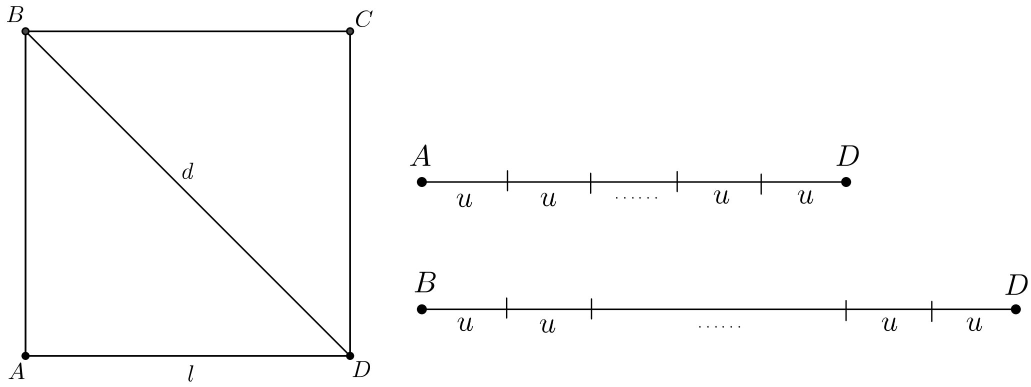


Figura 1.1: AD e BD com unidade de medida em comum

A ideia antiga de medidas comensuráves e incomensuráveis está intimamente conectada com a ideia atual de números racionais e irracionais. Definimos números racionais quando pode ser representada por uma fração de números inteiros, com denominador diferente de zero. Assim, o conjunto dos números racionais pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \ e \ q \in \mathbb{Z}, com \ q \neq 0 \right\}$$

Ao definir uma unidade de medida (simbolizado por 1) e realizar a construção baseado nos axiomas de Peano, é possível verificar que os números racionais não são suficientes para preencher a reta numérica. Também é possível provar, com um argumento similar a realizada anteriormente, que $\sqrt{2}$ (símbolo que representa a medida da diagonal de lado unitário) não é um número racional. A figura 1.2 mostra sua posição na reta numérica.

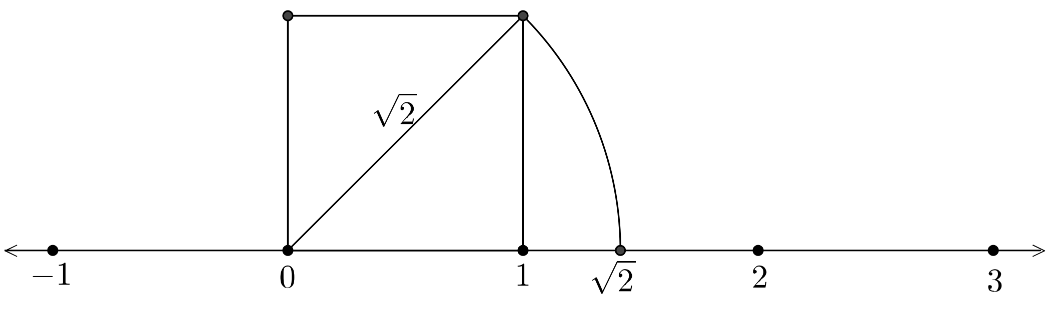


Figura 1.2: posição de $\sqrt{2}$ na reta numérica

Os números que faltam para preencher as lacunas são chamadas de números irracionais. Vale ressaltar que a utilização da palavra "lacunas" não significa que existem uns poucos pontos que faltam ser preenchidos, uma vez que existem mais números irracionais do que números racionais.

Ao longo da evolução da matemática surgiram diversas demonstrações da irracionalidade utilizando diversas ferramentas matemáticas. Vamos exibir nas próximas seções algumas demonstrações com argumentos geométricos.

1.2 Prova da irracionalidade utilizando triângulos

Vamos primeiro provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e, em seguida, estender a ideia para provar a irracionalidade de $\sqrt{n^2-1}$ e $\sqrt{n^2+1}$. Esta prova foi publicada por Apostol em 2000 e pode ser encontrada em [2].

Para esta demonstração, começamos com um triângulo retângulo isósceles com cateto de medida unitária. Suponhamos que a hipotenusa desse triângulo seja racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b números inteiros positivos primos entre si. Ao multiplicarmos todos os lados desse triângulo por b obtemos um novo triângulo ABC, com ângulo reto em A e com todos os lados de medida inteira. Observe que não existe outro triângulo menor e semelhante a ABC de forma que todos os lados tenham medida inteira. De fato, caso existisse tal triângulo, significaria que podemos obtê-lo multiplicando todos os lados do triângulo $A_1B_1C_1$ por uma constante inteira $c < b$, mas a hipotenusa desse novo triângulo não teria medida inteira, o que seria uma contradição.

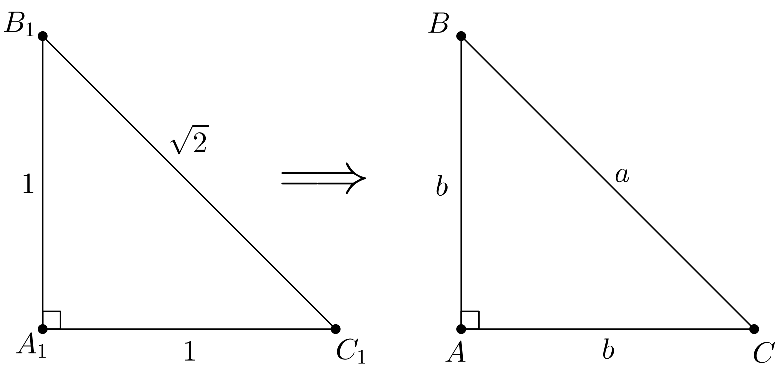


Figura 1.3: Triângulo $A_1B_1C_1$ semelhante a um triângulo de lados inteiros

O objetivo agora é construir um triângulo menor e semelhante a ABC com lados de medida inteira para obtermos um absurdo.

Para construção desse triângulo, primeiro traçamos um arco circular $\widehat{AD}$ interno ao triângulo ABC com centro em C e D um ponto sobre a hipotenusa. Em seguinda, traçamos o segmento DE, tangente ao arco circular em D e que intersecta o segmento AB no ponto E. Os triângulos ABC e BDE são semelhantes já que são retângulos com um ângulo em comum. Como $\overline{AC} = \overline{CD}$, temos que $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{BD} = \overline{AE}$ (Figura 1.4)

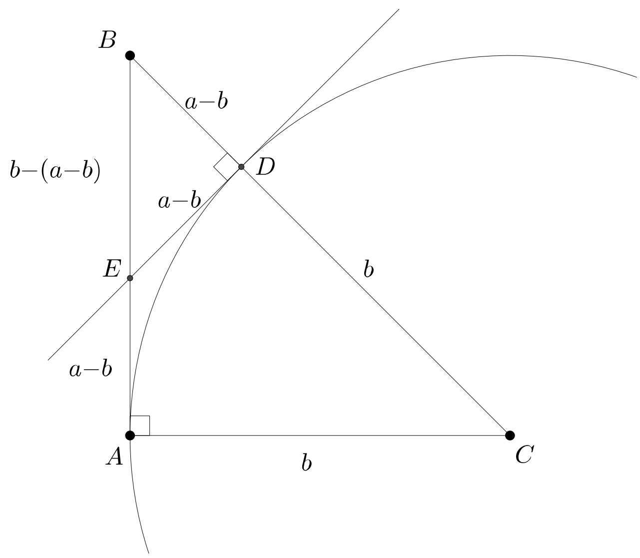


Figura 1.4: Irracionalidade de $\sqrt{2}$ - construção geométrica

Observe que todos os lados do triângulo BDE são medidas inteiras e menores do que os lados do triângulo ABC , o que é absurdo. A contradição vem do fato de considerarmos $\sqrt{2}$ um número racional. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Em geral, podemos estender a ideia da construção acima para provar a irracionalidade dos números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{17} \cdots$, ou seja, números da forma $\sqrt{n^2-1}$ e $\sqrt{n^2+1}$ para n inteiro positivo maior que 1.

Para provarmos a irracionalidade de $\sqrt{n^2+1}$, basta considerar um triângulo retângulo de catetos 1 e n. Assim considerando a hipotenusa um número racional, ou seja, $\sqrt{n^2+1} = \frac{a}{b}$, podemos multiplicar todos os lados por b obtendo um novo triângulo ABC, retângulo em A, com $\overline{AB} = b$, $\overline{AC} = b \cdot n$ e $\overline{BC} = a$. A construção é análoga a demonstração realizada anteriormente.

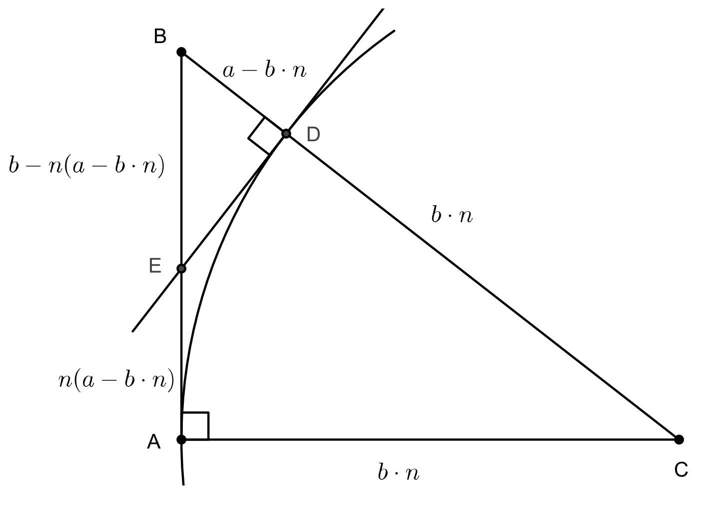


Figura 1.5: Irracionalidade de $\sqrt{n^2+1}$ - construção geométrica

Como o triângulo ABC é semehante a BDE:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{DE}}{a-b} = \frac{bn}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{DE} = n(a - b \cdot n)$$

Como $\overline{DE} = \overline{AE}$, obtemos que $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = b - n(a - b \cdot n)$. As medidas obtidas podem ser observadas na figura 1.5. Assim, todos os lados do triângulo BDE possuem medidas inteiras, o que é um absurdo.

Já para provarmos a irracionalidade de $\sqrt{n^2-1}$, basta considerar um triângulo retângulo com hipotenusa medindo n e um dos catetos medindo 1. Assim, por Pitágoras, o outro cateto terá medida $\sqrt{n^2-1}$. Supondo $\sqrt{n^2-1}$ racional, ou seja, $\sqrt{n^2-1} = \frac{a}{b}$ podemos multiplicar todos os lados por b obtendo o triângulo ABC, retângulo em A, com $\overline{AB} = b$, $\overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = bn$. Agora basta realizar a construção análoga a demonstração realizada anteriormente.

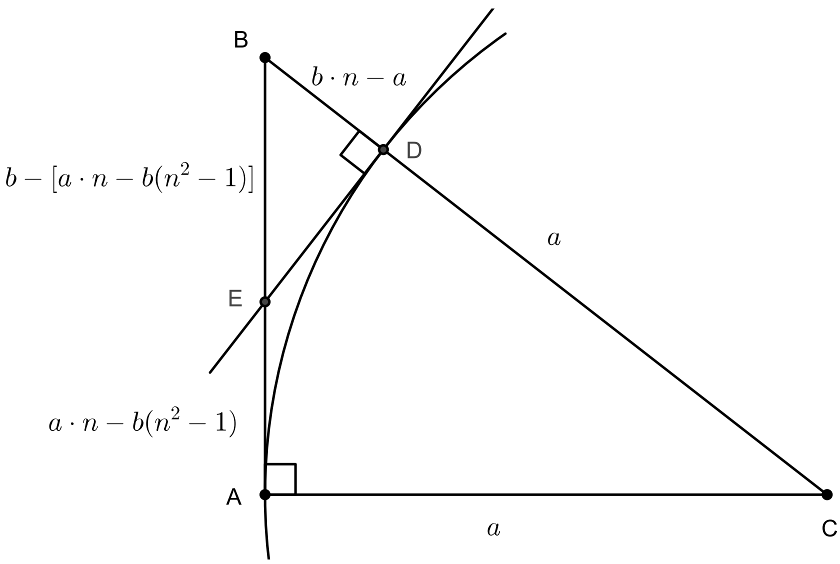


Figura 1.6: Irracionalidade de $\sqrt{n^2-1}$ - construção geométrica

Como o triângulo ABC é semelhante a BDE:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{ED}}{b \cdot n - a} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{ED} = \frac{a(b \cdot n - a)}{b}$$

$$\overline{ED} = \frac{abn - b^2(n^2-1)}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{ED} = a \cdot n - b(n^2-1)$$

Como $\overline{DE} = \overline{AE}$, obtemos que $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = b - [a \cdot n - b(n^2-1)]$. Isso significa que todos os lados do triângulo BDE possui medida inteira, o que é absurdo.

1.3
Verificando a irracionalidade utilizando quadrados

A próxima demonstração geométrica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi popularizada por John Conway em 1990 em uma conferência (as informações dessa conferência pode ser encontrado em [3]), mas feita primeiramente por Stanley Tennenbaum no início dos anos 1950.

Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional, ou seja, $\sqrt{2} = a/b$, com a e b inteiros positivos primos entre si. Observe que a e b são os menores inteiros positivos que satisfazem a relação $a^2 = 2 \cdot b^2$. De fato, caso existissem inteiros positivos a_1 e b_1, tal que $a_1 < a$ e $a_1^2 = 2 \cdot b_2^2$, então teríamos $a_1^2/b_1^2 = a^2/b^2$, ou seja, a e b não seriam primos entre si, o que geraria uma contradição. A Ideia para provarmos a irracionalidade de $\sqrt{2}$ é construir esses inteiros positivos a_1 e b_1 a partir de argumentos geométricos, obtendo assim um absurdo.

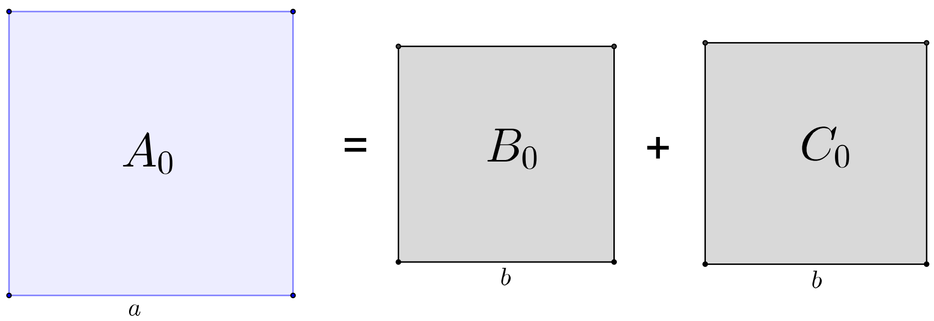


Figura 1.7: Relação entre as áreas

Geometricamente, a relação $a^2 = 2 \cdot b^2$ significa que a área do quadrado A_0 com lado de medida a é igual ao dobro da área de um quadrado B_0 com lado de medida b. Considere mais um quadrado C_0 com lado de medida b. Sobre o ponto de vista da área, temos a relação exibida na Figura 1.7.

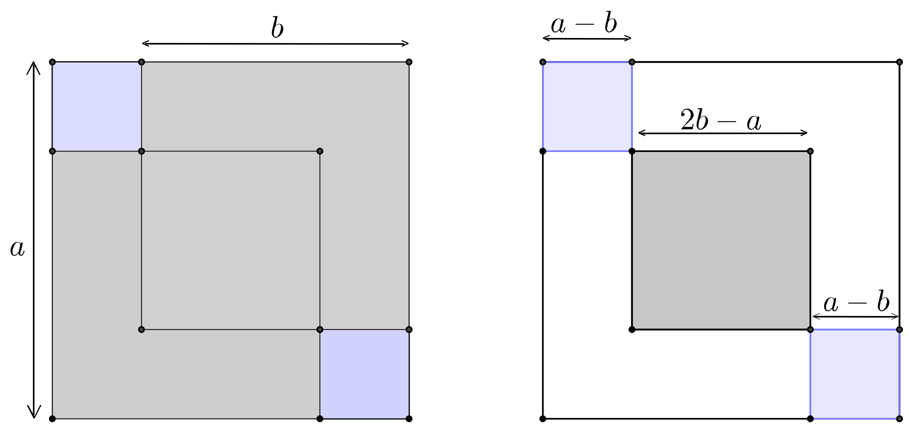


Figura 1.8: Sobreposição dos quadrados B_0 e C_0 em A_0

Sobrepondo os quadrados B_0 e C_0 sobre A_0, na posição indicada na figura 1.8, são formados três novos quadrados com lados de medida inteira: um com lado de medida $2b - a$ e dois quadrados com medida $a - b$.

Observe que a soma das áreas desses dois quadrados menores formados é igual a área do terceiro quadrado obtido, já que as áreas dos quadrados B_0 e C_0 devem cobrir a área do quadrado A_0. Assim, chamando de A_1 o quadrado de lado $a_1 = 2b - a$, B_1 e C_1 quadrados com lados de mesma medida $b_1 = a - b$, a Figura 1.9 exibe a relação entre as áreas.

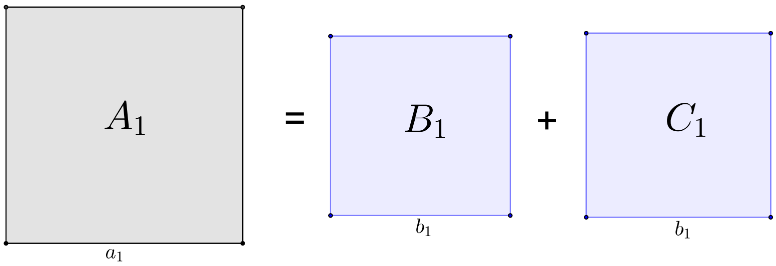


Figura 1.9: Relação entre as áreas

Observe que $a_1^2 = 2b_1^2$ com a_1 e b_1 números inteiros. Como $a_1 < a$, temos uma contradição. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

Essa demonstração geométrica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi estendida para $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{10}$ e pode ser encontrado em [4].

2
Irracionalidade de e

Neste capítulo, vamos apresentar uma breve história do número e, detalhada em [1,5], e algumas demonstrações da irracionalidade de e. Dentre as demonstrações, será apresentado a conhecida prova realizada por Fourier (1815), uma prova geométrica proposta por Jonathan Sondow em 2006 [6] e a prova da irracionalidade de potências racionais de e, que pode ser encontrado em [7].

2.1
Breve história do número e

Acredita-se que a noção de logaritmo já era conhecida pelos mesopotâmicos. No museu do Louvre, encontra-se um tablete de argila da mesopotâmia datado de 1700 a.C. contendo o seguinte problema, descrito em linguagem atual: quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente? Esse problema pode ser traduzida na seguinte equação:

$$(1{,}2)^x = 2$$

O valor encontrado para este problema foi 3,7870, que para época era uma boa aproximação do valor correto, que é aproximadamente 3,8018. Entre os tabletes de argilas que sobreviveram, um deles lista o resultado da potência de alguns números, o que indica que os mesopotâmicos tinham o auxílio de tábuas para resolução de determinados problemas.

A representação atual para fórmula de juros compostos é dada por:

$$M = C(1+i)^t$$

sendo C o capital, i a taxa de juros, M o montante e t o tempo de aplicação. Para cada 'período de conversão', alguns bancos usam taxa de juros anual dividida por n, que seria i/n. Como em t anos existem nt períodos de conversão, um capital C, após t anos renderá

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}.$$

Vamos comparar, em um exemplo simples, a quantidade de dinheiro que um determinado capital irá render depois de um ano para diferentes períodos de conversão, usando-se a mesma taxa de juros anual. Vamos considerar $C = 1{,}00$, $i = 100\% = 1$ e $t = 1$ ano. Assim, obtemos a seguinte fórmula:

$$M = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Vamos analisar o comportamento desta fórmula para valores crescentes de n.

Período de conversão	n	$(1+\frac{1}{n})^n$
Anual	1	2
Semestral	2	2,25
Trimestral	4	2,44141
Mensal	12	2,61303
Semanal	52	2,69259
Diário	365	2,71456

Tabela 2.1: Análise de alguns períodos

O interessante é que qualquer aumento posterior de n, o valor de M se aproxima cada vez mais do valor limite 2,71828, mas não se sabe quem ou exatamente quando foi notado esse comportamento da expressão $(1 + 1/n)^n$, à medida que n tende ao infinito.

Os logaritmos ressurgiram na Europa no século XVII da necessidade de simplificação de alguns cálculos matemáticos, como multiplicação e divisão. Até poucos anos antes do ressurgimento dos logaritmos, a simplificação das operações eram realizadas através de relações trigonométricas que poderiam ser usadas para transformar multiplicação e divisão em soma e subtração. Essas relações trigonométricas ficaram conhecidas como regras prostafaréticas, que vem do grego *prosthaphaeresis* que significa 'adição e subtração'. Um exemplo para este tipo de relação é indicada abaixo:

$$2\cos A\,\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

Por exemplo, para se resolver a multiplicação entre os números 20468 e 13579, numa notação atual, consideraria $2\cos A = 0,20468$ ou seja, $\cos A = 0,10234$ e $\cos B = 0,13579$. Consultando uma tabela trigonométrica descobre-se o valor dos ângulos A e B e da tabela retira-se o valor de $\cos(A+B)$ e $\cos(A-B)$. Somando-se estes últimos valores e, em seguida, ajustando a vírgula, teriamos o valor desejado. É importante salientar que já nessa época era possível encontrar tabelas trigonométricas com até 15 algarismos significativos.

Um dos precursores no estudo dos logaritmos foi John Napier (1550-1617) no qual tratou desse assunto pensando em potências sucessivas de um dado número. Vamos exibir um exemplo simples para entender como pensou Napier.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Tabela 2.2: Potências de 2

Vamos supor que gostariamos de resolver a multiplicação 32 por 128 com auxilio da tabela acima. Observe na tabela que $n = 5$ corresponde a 32 e $n = 7$ corresponde a 128. Assim, para se determinar $32 \cdot 128$, basta verificar na tabela o valor correspondente a $n = 5 + 7 = 12$ que seria 4096. Esse método é consequência da propriedade de potência: $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$.

Esse esquema apresentado não é muito prático no cálculo do produto de quaisquer dois números naturais, mesmo aproximado, já que existe uma grande lacuna entre o valor de cada potência. Então a ideia de Napier para reduzir as lacunas foi escolher para base da potência um número próximo de 1, pois assim, a potência cresce lentamente com o aumento do expoente. Napier escolheu o número $0,9999999$, ou seja, $1 - \frac{1}{10^{-7}}$ para ser a base da potência. Para evitar decimais, Napier multiplicou cada potência obtida por 10^7. Assim, se $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^{-7}}\right)^L$, então L é o 'logaritmo' de Napier do número N. Com isso Napier construiu uma tabela, levando vinte anos de sua vida(1594-1614) para completar todo o trabalho. Napier publicou seu trabalho em 1614 com o título *Mirifici logarithmornm canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Com o passar dos anos, a ideia de logaritmos foi sofrendo alguns ajustes até se tornar o que conhecemos hoje.

Observe que existe uma certa familiaridade com a fórmula obtida $M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e do logaritmo de Napier $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^{-7}}\right)^L$. Com o estudo mais profundo dos logaritmos, o número $2,71828...$ aparece de forma natural em diversos trabalhos da época. No século XVIII, Leonhard Euler simboliza essa constante pela letra e, que se mantém até os dias atuais. Também é devido a Euler a primeira demonstração da irracionalidade de e, em 1737, utilizando frações continuas.

2.2

Demonstração clássica e geométrica da irracionalidade de e

A próxima prova é devido a Fourier (1815) e esta é a demonstração mais conhecida para verificar a irracionalidade de e. Nessa demonstração é utilizada a expansão de Taylor de e.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Suponha que e seja racional, ou seja, $e = \frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros positivos. Multiplicando os dois membros da igualdade por $q!$, obtemos:

$$e \cdot q! = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} \cdots$$

$$\underbrace{p \cdot (q-1)!}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots q + 1 \right)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \cdots \right)}_{A}$$

Se provarmos que $A \in (0, 1)$, obtemos uma contradição, já que o primeiro membro da igualdade será um número inteiro, o que não ocorreria com segundo membro da igualdade.

Como A é o resultado da soma infinita de termos positivos, significa que $A > 0$. Basta verificar que $A < 1$. As seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$\frac{1}{(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)^2} \quad , \quad \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)^3} \quad \cdots$$

Utilizando essas desigualdades, temos a seguinte estimativa para A:

$$A = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \cdots < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} \cdots$$

Como q é um inteiro positivo, temos uma soma de P.G. com razão $\frac{1}{q+1}$ que é menor que 1. Daí:

$$A < \frac{1/(q+1)}{1 - 1/(q+1)} = \frac{1/(q+1)}{q/(q+1)} = \frac{1}{q}$$

$$A < \frac{1}{q} < 1 \quad \Longrightarrow \quad A \in (0, 1)$$

o que é absurdo. Portanto e é um número irracional.

Agora vamos apresentar mais uma demonstração da irracionalidade de e publicada por Jonathan Sondow em 2006 [6]. Para esta demostração, utilizaremos um resultado sobre intervalos encaixantes.

Lema 2.1 *Seja* $\{I_n = [a_n, b_n]; n \in \mathbb{N}\}$ *uma família de intervalos reais fechados e limitados tal que* $I_{n+1} \subseteq I_n$. *Então* (a_n) *e* (b_n) *convergem. Além disso, se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *, então* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$.

Prova. Do fato que $I_{n+1} \subseteq I_n$ tem-se $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Isso significa que as sequências (a_n) e (b_n) são monótonas e limitadas, ou seja, elas são convergentes. Já do fato que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, significa que as sequências convergem para o mesmo ponto, digamos $x_0 \in \mathbb{R}$. Como $a_n \leq x_0 \leq b_n$ para todo n natural, tem-se $x_0 \in I_n$, ou seja, $x_0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Não é possível existir $x_1 \neq x_0$ tal que $x_1 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, pois (a_n) e (b_n) convergem para x_0, assim, para n suficientemente grande teríamos $x_1 \notin [a_n, b_n] = I_n$. Portanto $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$

■

Agora com o lema provado, vamos supor que e seja racional, ou seja, $e = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos.

Para essa demonstração da irracionalidade de e, também utilizamos a série de Taylor de e. A ideia da construção dos primeiros intervalos fechados é exibido abaixo:

$$I_1 = [a_1, b_1] = \left[1 + \frac{1}{1!}, 1 + \frac{2}{1!}\right] = [2, 3]$$

$$I_2 = [a_2, b_2] = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right] = \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right]$$

$$I_3 = [a_3, b_3] = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}\right] = \left[\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}\right]$$

$$I_4 = [a_4, b_4] = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}\right] = \left[\frac{65}{4!}, \frac{66}{4!}\right]$$

Observe que $I_k = \left[\frac{a}{k!}, \frac{a+1}{k!}\right]$, com a inteiro positivo. Geometricamente, temos a construção indicada na figura 2.1.

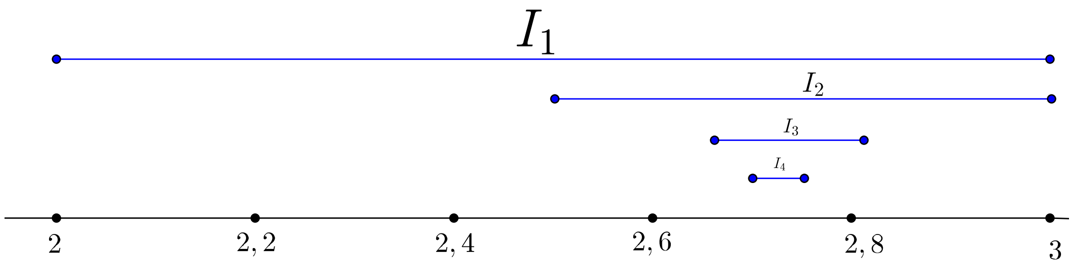


Figura 2.1: Intervalos I_1, I_2, I_3 e I_4

Observe ainda que $I_{n+1} \subseteq I_n$ e que a sequência (a_n) e (b_n) convergem para e, ou seja, estamos nas condições do Lema 2-1. Isso sifnifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{e\}$.

O número e não pode ser representado por uma fração da forma $\frac{m}{k!}$, com m e k inteiros positivos. De fato, como $e \in I_k$, teriamos:

$$\frac{m}{k!} \in I_k = \left[\frac{a}{k!}, \frac{a+1}{k!}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{k!} = \frac{a}{k!} \text{ ou } \frac{m}{k!} = \frac{a+1}{k!}$$

Para $k > 1$, isso significaria que $e = \frac{m}{k!} \notin I_{n+1}$.

No entanto, observe que podemos escrever e da seguinte forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot (q-1)!}{q!} = \frac{m}{q!}, \qquad \text{sendo } m \text{ inteiro positivo}$$

o que é absurdo. A contradição vem do fato de supormos e racional. Portanto e é irracional.

2.3 Irracionalidade de algumas potências de e

Vamos definir f pelo seguinte polinômio:

$$f(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \tag{2-1}$$

sendo n um número natural arbitrário.

Esse polinômio será utilizado nas demonstrações da irracionalidade de $\zeta(3)$, $\zeta(2)$, π e e^r, com r racional.

O próximo lema também será útil em algumas demonstrações.

Lema 2.2 *Para todo k inteiro não negativo, os valores $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são números inteiros.*

Prova. Observe que se provarmos que $f^{(k)}(0)$ é inteiro, também vamos obter que $f^{(k)}(1)$ é inteiro como consequência da igualdade $f(1-x) = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = f(x)$. Então para provarmos o lema, basta verificar que $f^{(k)}(0)$ é um número inteiro.

A fórmula de Leibnitz diz que

$$(g \cdot h)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(x) h^{(k-j)}(x).$$

Assim, sendo $g(x) = x^n$ e $h(x) = (1-x)^n$, temos:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(g \cdot h)^{(k)}(x)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(x) h^{(k-j)}(x).$$

Agora observe que

$$g^{(j)}(0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{(j)} x^n \Bigg|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{se j} < \text{n} \\ n!, & \text{se j} = \text{n} \\ 0, & \text{se j} > \text{n} \end{cases}$$

Observe que j varia de 0 à k. Assim temos os seguintes casos:

Se $k < n$, significa que j é sempre menor que n. Logo $f^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$

Se $k \geq n$, o único termo possivelmente não nulo do somatório de $f^{(k)}(x)$ é quando $j = n$. Nesse caso, teremos:

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! \left(\frac{d}{dx}\right)^{(k-n)} (1-x)^n \Bigg|_{x=0} \in \mathbb{Z}$$

Portanto, $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, para todo k não negativo, o que prova o lema.

■

Teorema 2.1 *Se r é inteiro positivo, então e^r é irracional.*

Prova.

Sendo f como definido (2-1), vamos definir F por

$$F(x) = r^{2n} f(x) - r^{2n-1} f'(x) + r^{2n-2} f''(x) - \cdots - r f^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x)$$

Observe que $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros, consequência do Lema 2-1. Podemos desenvolver a expressão abaixo da seguinte forma:

$$\{e^{rx} F(x)\}' = e^{rx} F(x) \cdot r + e^{rx} F'(x)$$

$$= e^{rx} \left(r^{2n+1} f(x) - r^{2n} f'(x) + \cdots - r^2 f^{(2n-1)}(x) + r f^{(2n)}(x)\right)$$

$$+e^{rx}\left(r^{2n}f'(x) - r^{2n-1}f''(x) + \cdots - rf^{(2n)}(x) + f^{(2n+1)}\right)$$

Eliminando os termos semelhantes:

$$\{e^{rx}F(x)\}' = e^{rx}\left(r^{2n+1}f(x) + f^{(2n+1)}(x)\right)$$

Como o polinômio $f(x)$ tem grau $2n$, tem-se $f^{(2n+1)}(x) = 0$. Daí:

$$\{e^{rx}F(x)\}' = e^{rx}r^{2n+1}f(x)$$

Integrando os dois membros da igualdade de 0 a 1, em relação a x:

$$\int_0^1 \{e^{rx}F(x)\}'dx = \int_0^1 e^{rx}r^{2n+1}f(x)dx$$

$$|e^{rx}F(x)|_0^1 = r^{2n+1}\int_0^1 e^{rx}f(x)dx$$

$$e^rF(1) - e^0F(0) = r^{2n+1}\int_0^1 e^{rx}f(x)dx$$

Como $e^r = a/b$, obtemos:

$$aF(1) - bF(0) = br^{2n+1}\int_0^1 e^{rx}f(x)dx$$

Agora, observe que para $0 < x < 1$, temos as seguintes estimativas:

$$0 < x^n(1-x)^n < 1$$

$$0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$$

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}$$

Como b, r e e^{rx} são positivos:

$$0 < br^{2n+1}e^{rx}f(x) < \frac{br^{2n+1}e^{rx}}{n!}$$

$$0 < br^{2n+1}e^{rx}f(x) < \frac{br^{2n+1}e^{rx}}{n!}$$

$$0 < \int_0^1 br^{2n+1}e^{rx}f(x)dx < \int_0^1 \frac{br^{2n+1}e^{rx}}{n!}dx$$

$$0 < br^{2n+1} \int_0^1 e^{rx} f(x)dx < \frac{br^{2n+1}}{n!} \left| \frac{e^{rx}}{r} \right|_0^1$$

$$0 < aF(1) - bF(0) < \frac{br^{2n+1}}{n!}(\frac{e^r}{r} - \frac{e^0}{r}) < \frac{br^{2n}e^r}{n!}$$

$$0 < aF(1) - bF(0) < be^r \frac{r^{2n}}{n!}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^{2n}}{n!} = 0$, então para n suficientemente grande, ocorre $\frac{r^{2n}}{n!} < \frac{1}{be^r}$. Daí

$$0 < aF(1) - bF(0) < 1,$$

o que é absurdo, pois a $F(1) - bF(0)$ é um número inteiro.

■

Esse resultado garante que os números e, e^2, e^3, $\cdots$ são irracionais.

Corolário 1 *Se* $r \neq 0$ *é inteiro, então* e^r *é irracional.*

Prova.

Sendo r inteiro positivo, suponha que e^{-r} seja racional, isto é, $e^{-r} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos.

$$e^{-r} = \frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad e^r = \frac{b}{a}$$

Ou seja, e^r é racional, o que é absurdo, já que pelo teorema anterior e^r é irracional. Logo, e^{-r} é irracional para $r > 0$, ou seja, e^r é irracional para $r \neq 0$ inteiro.

■

Esse resultado já garante que também os números e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, $\cdots$ são irracionais.

Corolário 2 *Se* $r \neq 0$ *é racional, então* e^r *é irracional.*

Prova. Sendo $r \neq 0$ racional, $r = a/b$, com a e b inteiros não nulos. Suponha que e^r seja racional, isso significa que $e^r = \frac{m}{n}$, com m e n não nulos. Daí:

$$e^{a/b} = \frac{m}{n} \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{a/b}\right)^b = \left(\frac{m}{n}\right)^b \quad \Longrightarrow \quad e^a = \frac{m^b}{n^b}$$

Ou seja, e^a é racional, o que é absurdo, já que pelo corolário anterior e^a é irracional. Portanto, e^r é irracional para $r \neq 0$ racional.

■

Como consequência desse último resultado, os números $\sqrt{e^3}$, $\sqrt[4]{e^7}$, $e^{10/3}$ e $e^{2,01}$, por exemplo, são irracionais.

Corolário 3 *Se* r *é um número racional positivo e diferente de 1, então* $\ln r$ *é irracional.*

Prova. Suponha que $\ln r$ seja racional, ou seja, $\ln r = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos. Daí:

$$\ln r = \frac{a}{b} \Longrightarrow e^{a/b} = r$$

Ou seja, $e^{a/b}$ é racional. Mas isso é um absurdo, já que contradiz o corolário anterior.

■

Esse corolário garante que os números $\ln 2$, $\ln 5$, $\ln 0,01$ e $\ln \frac{2}{3}$, por exemplo, são irracionais.

3
Irracionalidade de π

Neste capítulo, será apresentado uma breve história de π, detalhado em [1,8] e uma demonstração de sua irracionalidade que pode ser encontrado em [7], página 20.

3.1
Uma breve história de π

Qualquer círculo que se considere, ao dividirmos o comprimento de sua circunferência pelo seu diâmetro, obtemos sempre o mesmo valor que é aproximadamente 3,14159. Por sua grande utilização, esse número ganhou um nome supostamente introduzido por Willian Jones em 1706 que é a letra grega π e que utilizamos até hoje.

Atualmente, para determinarmos o valor numérico do comprimento ou da área de um círculo sabendo a medida de seu raio, precisamos utilizar alguma aproximação decimal de π. No entanto, existem vestígios antigos que mostram cálculos realizados em círculos, mas sem a utilização numérica de π. Um exemplo, é o problema 50 que se encontra nos papiros de Rhind (1650 A.C.)

Figura 3.1: Problema 50 no papiro de Rhind

O problema 50 diz que uma região circular tem diâmetro 9 e quer saber a área dessa região. A solução indicada é a seguinte:

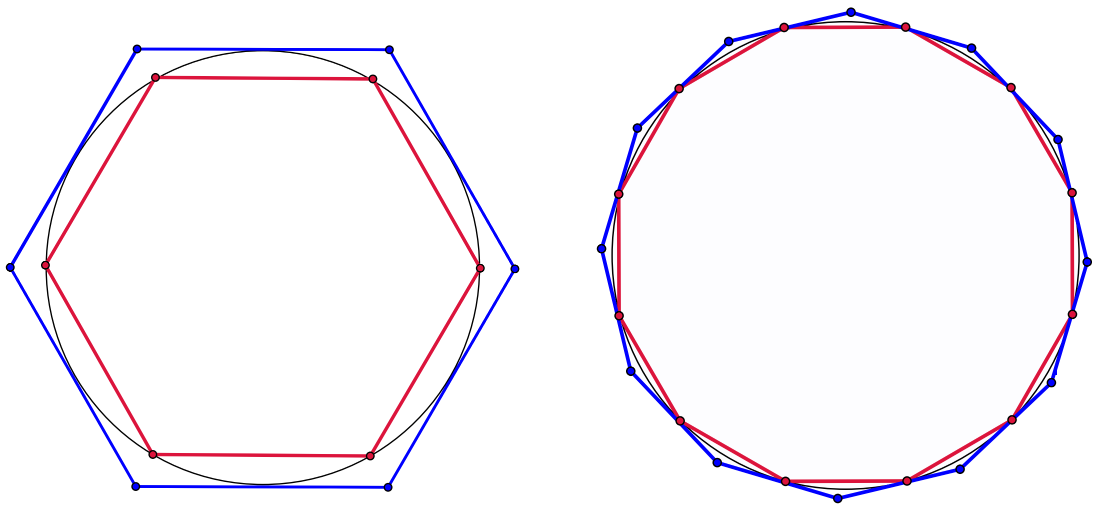
Retire $\frac{1}{9}$ dela, restando 8. Agora realize a multiplicação de 8 por 8, obtendo assim 64 que é a área dessa região.

Atualmente podemos traduzir este solução na seguinte fórmula:

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{64d^2}{81}, \text{ sendo d o diâmetro do círculo}$$

Nessa fórmula, o valor de π seria aproximadamente 3,16049.

Arquimedes (287 - 212 A.C.) é o primeiro que se tem relato que investigou com mais rigor o número π. Sua investigação se baseou no método da exaustão, que consistia em determinar uma aproximação para o comprimento da circunferência através de polígonos inscritos e circunscritos a um círculo. Com isso Arquimedes verificou que o valor de π estava entre 3,1408 e 3,1429.



A primeira demonstração que se conhece de que π é um número irracional foi realizada por Johann Heinrich Lambert, em 1761, utilizando frações contínuas.

3.2 Irracionalidade de π

Teorema 3.1 *π^2 é irracional.*

Prova.

Para esta demonstração, voltamos a utilizar f definido em (2-1)

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \qquad \text{para algum } n \text{ arbitrário.}$$

Suponhamos que π^2 seja irracional, isto é, $\pi^2 = \frac{p}{q}$, com p e q números inteiros positivos. Vamos definir a seguinte função:

$$F(x) = q^n \left[\pi^{2n} \cdot f(x) - \pi^{2n-2} \cdot f''(x) + \cdots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x)\right]$$

Pelo Lema 2.2, $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são números inteiros para $k = 0, 1, 2, \cdots$. Observe também que a maior potência de π na expressão acima pode ser escrita como $\pi^{2n} = \frac{p^n}{q^n}$, o que significa que os denominadores das potências de π que aparecem na expressão podem ser canceladas por q^n. Com esses fatos podemos concluir que $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros. Essa informação será importante para concluir a demonstração.

Considere a expressão

$$[F'(x)\text{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)]' \tag{3-1}$$

Aplicando a derivada

$$F''(x)\text{sen}(\pi x) + \pi F'(x)\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F(x)\text{sen}(\pi x)$$

$$= F''(x)\text{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x)\text{sen}(\pi x)$$

Substiuindo pela expansão de $F''(x)$ e $F(x)$, obtemos:

$$= \text{sen}(\pi x)q^n\left[\pi^{2n}f''(x) - \pi^{2n-2}f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right] +$$

$$\pi^2\text{sen}(\pi x)q^n\left[\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f''(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right]$$

$$= \text{sen}(\pi x)q^n\left[\pi^{2n}f''(x) - \pi^{2n-2}f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right] +$$

$$\text{sen}(\pi x)q^n\left[\pi^{2n+2}f(x) - \pi^{2n}f''(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^4 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n\pi^2 f^{(2n)}(x)\right]$$

Eliminando os termos semelhantes com sinais opostos.

$$= \text{sen}(\pi x)q^n\left[\pi^{2n+2}f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right]$$

A expressão $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ é um polinômio de grau $2n$. Isso significa que $f^{(2n+2)}(x) = 0$. Então a expressão acima pode ser reescrito como

$$= \text{sen}(\pi x)q^n\left[\pi^{2n+2}f(x) + (-1)^n \cdot 0\right]$$

$$= \text{sen}(\pi x)q^n(\pi^2)^n\pi^2 f(x)$$

$$= \text{sen}(\pi x)q^n\left(\frac{p}{q}\right)^n\pi^2 f(x)$$

$$= \text{sen}(\pi x)p^n\pi^2 f(x)$$

Assim, a expressão (2-2) é igual ao termo obtido acima, ou seja:

$$[F'(x)\text{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)]' = \text{sen}(\pi x)p^n\pi^2 f(x)$$

Integrando de 0 a 1 em relação a x os dois membros da igualdade, obtemos:

$$\int_0^1 (F'(x)\text{sen}(\pi x) - \pi \cdot F(x)\cos(\pi x))'dx = \int_0^1 \text{sen}(\pi x)p^n\pi^2 f(x)dx$$

$$F'(1)\text{sen}(\pi\cdot 1) - \pi F(1)\cos(\pi\cdot 1) - [F'(0)\text{sen}(\pi\cdot 0) - \pi F(0)\cos(\pi\cdot 0)] = p^n\pi^2 \int_0^1 \text{sen}(\pi x)f(x)dx$$

$$F'(1)\cdot 0 - \pi F(1)\cdot(-1) - F'(0)\cdot 0 + \pi F(0)\cdot 1 = p^n\pi^2 \int_0^1 \text{sen}(\pi x)f(x)dx$$

$$\pi F(1) + \pi F(0)\cdot 1 = p^n\pi^2 \int_0^1 \text{sen}(\pi x)f(x)dx$$

$$p^n\pi \int_0^1 \text{sen}(\pi x)f(x)dx = F(1) + F(0)$$

Agora observe que para $0 < x < 1$, temos as seguintes desigualdades:

$$0 < x^n(1-x)^n < 1$$

$$0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$$

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}$$

Como $0 < x < 1$, então π, p^n e $\text{sen}(\pi x)$ são positivos. Daí:

$$0 < f(x)\cdot \pi p^n \text{sen}(\pi x) < \frac{\pi p^n \text{sen}(\pi x)}{n!}$$

$$0 < \int_0^1 f(x) \cdot \pi p^n \mathrm{sen}(\pi x) dx < \int_0^1 \frac{\pi p^n \mathrm{sen}(\pi x)}{n!} dx$$

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) \cdot \mathrm{sen}(\pi x) dx < \frac{\pi p^n}{n!} \int_0^1 \mathrm{sen}(\pi x) dx$$

$$0 < F(1) + F(0) < \frac{\pi p^n}{n!} \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$0 < F(1) + F(0) < \frac{2 \cdot p^n}{n!}$$

Como $\lim\limits_{0 \to \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, significa que para n suficientemente grande, ocorre $\frac{p^n}{n!} < 0,5$, ou seja:

$$0 < F(1) + F(0) < 2 \cdot 0,5$$

$$0 < F(1) + F(0) < 1$$

Mas isto é um absurdo, pois a soma $F(1) + F(0)$ é um número inteiro. A contradição vem do fato de supormos que $\pi^2 = \frac{p}{q}$. Logo π^2 é um número irracional.

■

Corolário 4 *π é irracional.*

Prova. Supondo que π seja racional, ou seja, $\pi = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos, obtemos:

$$\pi = \frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad \pi^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \pi^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Isso significa que π^2 é racional, o que é absurdo.

4
Irracionalidade de $\zeta(3)$

Neste capítulo, vamos apresentar uma breve história de $\zeta(n)$, a demonstração de $\zeta(3)$ feita por F. Beukers [9], mas originalmente realizada por Apéry [10].

4.1
Conhecendo $\zeta(s)$

O problema de Basileia (ou problema de Basel), proposto por Pietro Mengoli em 1644, consiste em determinar o valor da soma

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Houve algumas tentativas sem sucesso antes da primeira resolução. Olderburg enviou uma carta a Leibniz em 1673 perguntando o valor da série, mas Leibniz não deu resposta. Em 1689 Jacques Bernoulli confessou sua própria incapacidade de resolver esse problema. A primeira solução para este problema só veio com Leonhard Euler em 1735. Essa demonstração, a rigor, não está correta, pois usa-se um fato que é válido para poliômios finitos, mas não é válido para 'polinômios infinitos'. Como curiosidade histórica, vamos apresentar essa demonstração.

A ideia da prova de Euler, inicia com a série familiar:

$$\text{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Podemos reescrever essa igualdade como

$$\frac{\text{sen} x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots.$$

Um polinômio finito $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, pode ser fatorado da seguinte forma:

$$p(x)=\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right),$$

sendo x_1, x_2, $\cdots$, x_n raízes de $p(x)$

As raízes da expansão senx/x são $-\pi, +\pi, -2\pi, +2\pi, -3\pi, +3\pi, \cdots$. Assim, considerando que a fatoração anterior válida para polinômios finitos também seja válida para séries de potências, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{\text{sen}x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

$$\frac{\text{sen}x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Ou seja:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Comparando os termos que aparecem x^2 nos dois membros da igualdade, obtemos:

$$-\frac{x^2}{3!} = -\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - \cdots$$

Eliminando $-x^2$ nos dois membros da igualdade, obtemos

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por π^2, segue

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Mais de um século após essa demonstração de Euler, em 1885, Weierstrass provou um teorema que garante a fatoração de uma função analítica (aquela que pode ser representada por série de potência) como produto envolvendo suas raízes. Ou seja, houve um longo período em que a passagem na demonstração de Euler ficou sem justificativa. Neste período, surgiram outras soluções contendo somente passagens válidas para o problema da Basileia. A demonstração de Euler sem mencionar o uso do teorema de Weierstrass a torna inválida pela falta de rigor matemático.

Em geral, a fatoração obtida por Euler é válido no plano complexo:

$$\text{sen}z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

A conclusão obtida por Euler também pode ser obtido através dessa igualdade comparando os termos que contém z^3 no produtório e na expansão em série de potências de sen$z$.

Estendendo o problema de Basileia, podemos definir uma função $\zeta(n)$ como

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \cdots$$

sendo n número inteiro maior que 1. Para os casos em que $n \leq 1$ a série diverge.

Euler apresentou a seguinte fórmula para encontrar o valor de $\zeta(2n)$

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}$$

Sendo que B_n, conhecido como número de Bernoulli, pode ser obtido através da recorrência

$$B_0 = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{p} B_k \binom{p+1}{k} = 0$$

Os primeiros números de Bernoulli está indicado a seguir:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$
$$B_5 = 0 \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_7 = 0 \quad B_8 = -\frac{1}{30}$$

Assim, os primeiros resultados para $\zeta(2n)$ são

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

Até a presente data, determinar a representação dos valores de $\zeta(n)$, para n ímpar, é um problema em aberto. Em 1978, o matemático Roger Apéry apresentou uma palestra intitulada *Sur lirrationalité de* $\zeta(3)$ (Sobre a irracionalidade de $\zeta(3)$). No entanto, Apéry apresentou um prova completa da irracionaidade de $\zeta(3)$ pegando a todos que estavam presentes de surpresa, já que inicialmente os participantes não sabiam que seria feito a demonstração. Muitos na pláteia continuaram incrédulos, pois a demonstração tinha muitos passos técnicos. Posteriormente foi organizada e publicada em 1979 [10]. Vamos apresentar mais adiante uma demonstração mais simples da irracionalidade $\zeta(3)$, publicada por Frits Beukers (que estava na pláteia de Apéry) em 1979 [9]. Apesar da demonstração da irracionalidade $\zeta(3)$ ter ocorrido a menos de

50 anos, a solução de Beukers utiliza apenas ferramentas de cálculo diferencial e integral.

O estudo sobre $\zeta(n)$ ainda teve outros avanços. Em 2000, Tanguy Rivoal provou que há infinitos números irracionais da forma $\zeta(n)$, com n ímpar [12]. Em 2001, Wadim Zudilin demonstrou que dentre os números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ e $\zeta(11)$ existem pelo menos um irracional [13].

4.2 Resultados preliminares

Já comentamos que o valor de $\zeta(2)$ é conhecido e vale $\frac{\pi^2}{6}$. No entanto, a demonstração que vamos apresentar da irracionalidade de $\zeta(3)$ também pode ser realizado em $\zeta(2)$ de forma mais elementar. Então apresentaremos primeiro a demonstração da irracionalidade de $\zeta(2)$ com o objetivo de facilitar a compreensão da prova da irracionalidade de $\zeta(3)$. Nessa seção vamos apresentar resultados que será fundamental para essas demonstrações.

Lema 4.1 *Para n suficientemente grande vale a estimativa* $d_n = mmc(1, 2, ..., n) < (2{,}9)^n$.

Prova.

Seja n um número natural maior que 1. Vale lembrar que simbolizamos por $\pi(n)$ a quantidade de números primos menores ou iguais a n. Para cada número primo $p_i \leq n$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $p_i^{m_i} \leq n < p_i^{m_i+1}$. Podemos então reescrever d_n da seguinte forma:

$$d_n = mmc(1, 2, ..., n) = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3} \cdot ... \cdot p_{\pi(n)}^{m_{\pi(n)}}$$

$$\leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{\pi(n) fatores} = n^{\pi(n)}$$

$$d_n \leq n^{\pi(n)}$$

$$\ln d_n \leq \pi(n) \cdot \ln n \tag{4-1}$$

O teorema sobre a distribuição dos números primos afirma que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

Isso significa que dado $\epsilon > 0$, para x suficientemente grande ocorre

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1 + \epsilon$$

Em particular, para $\epsilon = \ln 2{,}9 - 1$ obtemos

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1 + \ln 2{,}9 - 1$$

$$\pi(x) < \ln 2{,}9 \cdot \frac{x}{\ln x}$$

Assim, utilizando essa última desigualdade em (3-1)

$$\ln d_n \leq \pi(n) \cdot \ln n < \ln 2{,}9 \cdot \frac{n}{\ln n} \cdot \ln n$$

$$\ln d_n < n \cdot \ln 2{,}9$$

$$d_n < e^{n \cdot \ln 2{,}9}$$

$$d_n < 2{,}9^n$$

■

Sobre os resultados que seguem, aparecerão integrais impróprias. Como um dos objetivos da dissertação é enriquecer o conhecimento do tema principalmente para professores do ensino básico, vamos simplificar a notação e omitir alguns detalhes sobre integrais impróprias, para facilitar a compreensão das demonstrações. Por exemplo, a integral abaixo

$$\lim_{x \to \epsilon} \iint_{[\epsilon, 1-\epsilon]^2} \frac{-\ln xy}{1-xy} x^r y^s \, dx \, dy$$

será representada informalmente pela integral imprópria

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln xy}{1-xy} x^r y^s \, dx \, dy.$$

Em alguns momentos, vamos considerar $0 < x, y < 1$, sendo que a rigor estaria no intervalo $[\epsilon, 1-\epsilon]$

Lema 4.2 *Sejam r e s inteiros não negativos. Se $r > s$, então:*

a)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx \, dy$$

é um número racional cujo denominador é um divisor de d_r^2.

b)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{-\ln xy}{1-xy} x^r y^s dx\, dy$$

é um número racional cujo denominador é um divisor de d_r^3

Se $r = s$

c)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dx\, dy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{r^2}$$

.

d)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{-\ln xy}{1-xy} x^r y^r dx\, dy = 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - ... - \frac{1}{r^3}\right)$$

.

Observação: No caso $r = 0$, nos itens c) e d) os termos $-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{r^2}$ e $-\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - ... - \frac{1}{r^3}$ somem.

Prova.

Seja σ algum número não negativo. Considere a integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx\, dy.$$

Considerando x e y no intervalo $[0,1]$, com $(x,y) \neq (1,1)$, temos a seguinte expansão:

$$\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + (xy)^2 + (xy)^3 + ...$$

Daí:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} \cdot (1 + xy + (xy)^2 + (xy)^3 + ...) dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} + x^{r+\sigma+1} y^{s+\sigma+1} + x^{r+\sigma+2} y^{s+\sigma+2} + x^{r+\sigma+3} y^{s+\sigma+3} + ...) dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{r+\sigma+k}.y^{s+\sigma+k} \right) dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{r+\sigma+k+1}.y^{s+\sigma+k}}{r+\sigma+k+1} \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{s+\sigma+k}}{r+\sigma+k+1} \right) dy$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{s+\sigma+k+1}}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)} \right|_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)}$$

Ou seja:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy} dx\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)} \tag{4-2}$$

Considerando $r > s$, temos a seguinte igualdade, obtida através da propriedade de frações parcias:

$$\frac{1}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+k+1} - \frac{1}{r+\sigma+k+1} \right)$$

Aplicando essa igualdade em (3-2), obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+k+1} - \frac{1}{r+\sigma+k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{r-s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+\sigma+k+1} - \frac{1}{r+\sigma+k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{r-s}\left[\frac{1}{s+\sigma+1} - \frac{1}{r+\sigma+1} + \frac{1}{s+\sigma+2} - \frac{1}{r+\sigma+2} + \cdots + \frac{1}{s+\sigma+(r-s)} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{r+\sigma+(r-s)} + \frac{1}{s+\sigma+(r-s+1)} - \frac{1}{r+\sigma+(r-s+1)} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+1} - \frac{1}{r+\sigma+1} + \frac{1}{s+\sigma+2} - \frac{1}{r+\sigma+2} + \cdots + \right.$$

$$\left. \frac{1}{r+\sigma} - \frac{1}{2r+\sigma-s} + \frac{1}{r+\sigma+1} - \frac{1}{2r+\sigma-s+1} + \cdots \right)$$

Eliminando os termos semelhantes com sinais opostos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dx\,dy = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+1} + \frac{1}{s+\sigma+2} + ... + \frac{1}{r+\sigma}\right) \tag{4-3}$$

Fazendo $\sigma = 0$ na igualdade acima, teremos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}dx\,dy = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + ... + \frac{1}{r}\right)$$

Como r e s são números inteiros não negativos, temos que o segundo membro dessa última igualdade é um número racional cujo denominador é dado por $(r-s)\cdot mmc(s+1, s+2, \cdots, r)$ que é um divisor de d_r^2 .Essa afirmação vem do fato que $mmc(s+1, s+2, \cdots, r)$ divide $mmc(1, 2, \cdots, r) = d_r$ e $r-s$ divide d_r.

Com isso provamos o item a).

Derivando (3-3) em relação a σ, obtemos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln x \cdot x^{r+\sigma}\cdot y^{s+\sigma} + \ln y \cdot x^{r+\sigma}\cdot y^{s+\sigma}}{1-xy}dx\,dy$$

$$= \frac{1}{r-s}\left(-\frac{1}{(s+\sigma+1)^2} - \frac{1}{(s+\sigma+2)^2} - \cdots - \frac{1}{(r+\sigma)^2}\right)$$

Colocando $x^{r+\sigma}\cdot y^{s+\sigma}$ em evidência e aplicando a propriedade da soma de logaritmos, obtemos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln xy}{1-xy}\cdot x^{r+\sigma}\cdot y^{s+\sigma}dx\,dy = -\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+\sigma+1)^2} + \frac{1}{(s+\sigma+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(r+\sigma)^2}\right)$$

Agora fazendo $\sigma = 0$, iremos obter:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln xy}{1-xy}\cdot x^r\cdot y^s dx\,dy = -\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}+\cdots+\frac{1}{r^2}\right)$$

A ideia nesse momento é análoga a demonstração do item a). Como r e s são números inteiros não negativos, temos que o segundo membro dessa última igualdade é um número racional cujo denominador é dado por $(r-s)\cdot mmc((s+1)^2,(s+2)^2,\cdots,r^2)$ que é um divisor de d_r^3 .Essa afirmação vem do fato que $mmc((s+1)^2,(s+2)^2,\cdots,r^2)$ divide $mmc(1^2,2^2,\cdots,r^2) = [mmc(1,2,\cdots,r)]^2 = d_r^2$ e $r-s$ divide d_r.

Com isso, o item b) está provado.

Agora vamos assumir que $r=s$.

Nesse caso, a igualdade 3.1 pode ser reescrita como

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{r+\sigma}}{1-xy}dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(r+\sigma+k+1)^2} \tag{4-4}$$

Fazendo $\sigma=0$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy}dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(r+k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(r+1)^2}+\frac{1}{(r+2)^2}+\frac{1}{(r+3)^2}+...$$

$$= \zeta(2)-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-...-\frac{1}{r^2}$$

O que prova o item c)

Agora, vamos derivar (4-4) com respeito a σ.

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln x\cdot x^{r+\sigma}\cdot y^{r+\sigma}+\ln y\cdot x^{r+\sigma}\cdot y^{r+\sigma}}{1-xy}dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(k+r+\sigma+1)^3}$$

Colocando $x^{r+\sigma}\cdot y^{r+\sigma}$ em evidência e aplicando a propriedade da soma de logaritmos, obtemos:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln xy}{1-xy}.x^{r+\sigma}y^{r+\sigma}dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(k+r+\sigma+1)^3}$$

Fazendo $\sigma=0$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln xy}{1-xy}.x^r y^r dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+1)^3}$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln xy}{1-xy}.x^r y^r dx\,dy = -2\left[\frac{1}{(r+1)^3}+\frac{1}{(r+2)^3}+\frac{1}{(r+3)^3}+...\right]$$

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\ln xy}{1-xy}.x^r y^r dx\,dy = 2\left(\zeta(3)-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-...-\frac{1}{r^3}\right)$$

o que prova o item d).

■

No capitulo 2, Definimos a equação (2-1) como

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)}{n!}$$

Vamos utiliza no próximo lema.

Lema 4.3 *As seguintes afirmativas são verdadeiras:*

a)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n.f^{(n)}(x)}{1-xy}dx\,dy = |A_n+B_n.\zeta(2)|.d_n^{-2},\ para\ A_n\in\mathbb{Z}\,e\,B_n\in\mathbb{Z}.$$

b)

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\ln xy}{1-xy}f^{(n)}(x).f^{(n)}(y)dx\,dy = |A_n+B_n.\zeta(3)|.d_n^{-3}dx\,dy,\ para\ A_n\in\mathbb{Z}\,e\,B_n\in\mathbb{Z}.$$

Prova. Vamos demonstrar a afirmação do item a). Expandindo $(1-x)^n$, obtemos:

$$(1-x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-x)^j$$

Daí:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}x^n\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}(-x)^i}{n!}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}(-1)^i x^{n+i}}{n!}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}(-1)^i(n+i)(n+i-1)(n+i-2)\cdot\cdots\cdot(n+i-n)x^i}{n!}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n+i}{i}(-1)^i x^i$$

Assim, o termo $\frac{(1-y)^n.f^{(n)}(x)}{1-xy}$ pode ser escrito como

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-y)^j.\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}(-1)^i x^i}{1-xy}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{j}(-y)^j.\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}(-1)^i x^i}{1-xy}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}\frac{(-1)^{j+i}y^j x^i}{1-xy}$$

Portanto

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n.f^{(n)}(x)}{1-xy}dx\,dy = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n+i}{i}(-1)^{i+j}\int_0^1\int_0^1\frac{x^i y^j}{1-xy}dx\,dy$$

Como consequência do Lema 4.2, é possível obter números inteiros a_{ij} e b_{ij} de tal forma que a integral no segundo membro da igualdade assuma os seguintes valores:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^i y^j}{1-xy}dx\,dy = \begin{cases} a_{ij}/d_n^2, & \text{se } i \neq j \quad \text{(Lema 4.2-a)} \\ \zeta(2) - b_{ij}/d_n^2, & \text{se } i = j \quad \text{(Lema 4.2-c)} \end{cases}$$

Isso significa que existem A_n e B_n inteiros de forma que

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n.P_n(x)}{1-xy}dx\,dy = \frac{A_n + B_n\zeta(2)}{d_n^2}$$

o que prova o item a). Agora vamos demonstrar o item b).

Como $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}(-1)^i x^i$, temos

$$f^{(n)}(x).f^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}(-1)^i x^i.\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n+j}{j}(-1)^j y^j$$

$$f^{(n)}(x).f^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}\binom{n}{j}\binom{n+j}{j}(-1)^{i+j}x^i y^j$$

Logo:

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\ln xy}{1-xy}f^{(n)}(x).f^{(n)}(y)dx\,dy$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{i}\binom{n}{j}\binom{n+j}{j}(-1)^{i+j}\int_0^1\int_0^1\frac{-\ln(x.y)}{1-xy}x^i y^j dx\,dy$$

De forma análoga ao item anterior, obtemos como consequência do Lema 3.2 a existência de números inteiros a_{ij} e b_{ij} de tal forma que a integral no segundo membro da igualdade assuma os seguintes valores:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{-\ln(x.y)}{1-xy}x^i y^j dx\,dy = \begin{cases} a_{ij}/d_n^3, & \text{se } i \neq j \quad \text{(Lema 4.2-b)} \\ 2\zeta(3) - b_{ij}/d_n^3, & \text{se } i = j \quad \text{(Lema 4.2-d)} \end{cases}$$

Isso significa que existem A_n e B_n inteiros de forma que

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\ln xy}{1-xy}f^{(n)}(x).f^{(n)}(y)dx\,dy = \frac{A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3}$$

o que prova o item b).

■

Lema 4.4 *Seja* $D = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | u,v,w \in (0,1)\}$. *Então a função* T *definida por*

$$T(u,v,w) = \left(u, v, \frac{1-w}{1-(1-uv)w}\right)$$

é uma bijeção de D *em* D. *Além disso, o Jacobiano* J *é dada por*

$$J = \frac{-uv}{[1-(1-uv)w]^2}$$

Prova. Vamos verificar que $T(D) \subseteq D$. Sendo $(u,v,w) \in D$, as seguintes desigualdades são verdadeiras.

$$0 < 1 - uv < 1$$

$$0 < (1-uv)w < w$$

Como $w \in (0,1)$

$$0 < (1-uv)w < w < 1$$

$$-1 < -w < -(1-uv)w < 0$$

$$0 < 1-w < 1-(1-uv)w < 1$$

$$0 < \frac{1-w}{1-(1-uv)w} < 1$$

Logo $T(D) = \left(u, v, \frac{1-w}{[1-(1-uv)w]^2}\right) \subseteq D$

Agora vamos verificar que $T \circ T = (u,v,w)$, o que significaria que $T = T^{-1}$.

$$T \circ T(u,v,w) = T\left(u, v, \frac{1-w}{[1-(1-uv)w]^2}\right) = \left(u, v, \frac{1-\frac{1-w}{[1-(1-uv)w]^2}}{[1-(1-uv)\frac{1-w}{[1-(1-uv)w]^2}]^2}\right)$$

$$= \left(u, v, \frac{1-(1-uv)w-(1-w)}{1-(1-uv)w-(1-uv)(1-w)}\right) = (u,v,w)$$

Em particular, temos que T é bijetiva. Agora, denotando $f(u,v,w) = (x,y,z)$, então

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{-uv}{[1-(1-uv)w]^2}$$

Assim

O Jacobiano J é dada por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A & B & \frac{-uv}{[1-(1-uv)w]^2} \end{vmatrix}$$

Os valores que A e B assumem não é importante no cálculo do Jacobiano J. Logo:

$$J = \frac{-uv}{[1-(1-uv)w]^2}$$

■

Lema 4.5 *Sejam* $g : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ *e* $h : (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$g(x,y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \quad e \quad h(x,y,w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:
a) $g(x,y) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$
b) $h(x,y,w) \leq \frac{1}{27}$

Prova.

Vamos demonstrar a afirmação do item a).

$$1-xy = 1-x+x-xy = 1-x+x(1-y) \geq 2\sqrt{1-x}\sqrt{x(1-y)} = 2\sqrt{1-x}\sqrt{x}\sqrt{1-y}$$

A desigualdade surgiu na comparação dos termos como média aritmética e geométrica. Logo:

$$g(x,y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{x(1-x)y(1-y)}{2\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}\,\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\;y\;\sqrt{1-y}$$

Analisando o ponto de máximo da expressão $\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}$:

$$\left(\sqrt{x}\sqrt{1-x}\right)' = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \qquad \left(\sqrt{x}\sqrt{1-x}\right)' = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

Analisando agora o ponto de máximo da expressão $y\,\sqrt{1-y}$:

$$\left(y\,\sqrt{1-y}\right)' = \sqrt{1-y} - \frac{y}{2\sqrt{1-y}} \qquad \left(y\,\sqrt{1-y}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{2}{3}$$

Assim, substituindo $x_0 = \frac{1}{2}$ e $y_0 = \frac{2}{3}$, obtemos a seguinte estimativa para $g(x,y)$:

$$g(x,y) \leq \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-y} \leq \frac{1}{2}\,\sqrt{x_0}\,\sqrt{1-x_0}\;y_0\,\sqrt{1-y_0}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

o que prova o item a). A ideia para provar a estimativa do item b) é análoga ao item anterior.

$$1-(1-xy)w = 1-w+xyw \geq 2\,\sqrt{1-w}\,\sqrt{xyw} = 2\,\sqrt{1-w}\,\sqrt{x}\,\sqrt{y}\,\sqrt{z}$$

A desigualdade nesse caso também surgiu na comparação dos termos como média aritmética e geométrica. Logo:

$$h(x,y,w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{2\,\sqrt{1-w}\,\sqrt{x}\,\sqrt{y}\,\sqrt{w}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\,(1-x)\,\sqrt{y}\,(1-y)\,\sqrt{w}\,\sqrt{1-w}$$

Analisando o ponto de máximo da expressão $\sqrt{x}\,(1-x)$:

$$\left(\sqrt{x}(1-x)\right)' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \qquad \left(\sqrt{x}(1-x)\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{3}$$

Observe que o ponto de máximo da expressão $\sqrt{y}\,(1-y)$ também será $y_0 = \frac{1}{3}$. A expressáo $\sqrt{w}\;\sqrt{1-w}$ já teve seu máximo calculado no item anterior que é $w_0 = \sqrt{1}2$. Utilizando os valores obtidos, conseguimos a seguinte estimativa para $h(x,y,w)$:

$$h(x,y,w) \leq \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\,(1-x)\,\sqrt{y}\,(1-y)\,\sqrt{w}\,\sqrt{1-w}$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\sqrt{x_0}\,(1-x_0)\,\sqrt{y_0}\,(1-y_0)\,\sqrt{w_0}\,\sqrt{1-w_0} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{27}$$

o que prova o item b).

■

Vale ressaltar que a prova original realizada por Frits Beukers, foi determinado exatamente o ponto de máximo de $g(x,y)$ e $h(x,y,w)$, que é $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$ e $(\sqrt{2}-1)^4$, respectivamente. Mas as estimativas que acabamos de provar para $g(x,y)$ e $h(x,y,w)$ será suficiente para finalizar as demonstrações da irracionalidade de $\zeta(2)$ e $\zeta(3)$.

4.3 Irracionalidade de $\zeta(2)$ e $\zeta(3)$

Teorema 4.1 *$\zeta(2)$ é irracional.*

Prova. Para cada inteiro positivo n, considere a integral

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n f^{(n)}(x)}{1-xy} dx\, dy \tag{4-5}$$

Vamos encontrar uma estimativa para a expressão (4-5).

Realizando a integração por partes em relação a x, obtemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n f^{(n)}(x)}{1-xy} dx\, dy = \int_0^1 (1-y)^n \int_0^1 \frac{f^{(n)}(x)}{1-xy} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)^n \left(\left| \frac{1}{(1-xy)} f^{(n-1)}(x) \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{(-y)(-1)}{(1-xy)^2} \cdot f^{(n-1)}(x) dx \right) dy$$

$$= + \int_0^1 (1-y)^n \int_0^1 \frac{(-y)\cdot 1}{(1-xy)^2} \cdot f^{(n-1)}(x) dx\, dy$$

Realizando mais uma vez integração por partes em relação a x, obtemos:

$$= + \int_0^1 (1-y)^n \int_0^1 \frac{(-y).1}{(1-xy)^2} \cdot f^{(n-1)}(x) dx\, dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)^n \left(\left| \frac{1}{(1-xy)} f^{(n-2)}(x) \right|_0^1 dy - \int_0^1 \frac{(-y)^2 \cdot 1(-2)}{(1-xy)^3} \cdot f^{(n-2)}(x) dx \right) dy$$

$$= + \int_0^1 (1-y)^n \int_0^1 \frac{(-y)^2 \cdot 1 \cdot 2}{(1-xy)^3} \cdot f^{(n-2)}(x) dx\, dy$$

Após n integrações por partes em relação a x, obtemos:

$$+ \int_0^1 (1-y)^n \int_0^1 \frac{(-y)^n \cdot n!}{(1-xy)^{n+1}} f^{(n-n)}(x) dx\, dy$$

$$+ \int_0^1 (1-y)^n \int_0^1 \frac{(-y)^n \cdot n!}{(1-xy)^{n+1}} \frac{x^n(1-x)^n}{n!} dx\, dy$$

$$= (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx\, dy \tag{4-6}$$

Combinando algumas informações que obtemos até aqui, temos o seguinte esquema:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,dx\,dy & \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Lema 4.4 a)}}}{\leq} & (-1)^n \left(\dfrac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy \\ \quad || \rightarrow \textit{Lema 4.3 a)} & & \quad || \rightarrow \textit{Lema 4.2 c)} \quad (r=0) \\ \dfrac{B_n\zeta(2)+A_n}{d_n^2} & & (-1)^n \left(\dfrac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2) \end{array}}$$

Figura 4.1: Esquema para demonstração de $\zeta(2)$

Pelo esquema mostrado na figura 4.1, temos a seguinte relação:

$$\frac{B_n\zeta(2)+A_n}{d_n^2} \leq (-1)^n \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2)$$

Observe que $I_n > 0$ já que $\frac{(1-y)^n f^{(n)}(x)}{1-xy}$ é positivo no intervalo $(0,1)\times(0,1)$. Daí:

$$0 < |I_n| \leq \left|(-1)^n \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2)\right|$$

$$0 < \frac{|B_n\zeta(2)+A_n|}{d_n^2} \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2)$$

$$0 < |B_n\zeta(2)+A_n| \leq d_n^2 \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2) < (2,9^n)^2 \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2)$$

A última desigualdade surgiu como consequência da desigualdade $d_n < (2{,}9)^n$, provada no lema 4.1. Logo:

$$0 < |B_n\zeta(2)+A_n| < 2,9^{2n} \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2) < 3^{2n} \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2)$$

$$= 9^n \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2) = \left(\frac{9}{6\sqrt{3}}\right)^n \zeta(2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \zeta(2)$$

Ou seja;

$$0 < |B_n\zeta(2)+A_n| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \zeta(2)$$

Suponha que $\zeta(2)$ seja racional, ou seja, $\zeta(2) = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos. Daí:

$$0 < |B_n \frac{p}{q} + A_n| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \zeta(2)$$

$$0 < |pB_n + qA_n| < q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \zeta(2)$$

Agora observe que $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Isso significa que para n suficientemente grande, $q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \zeta(2) < 1$, ou seja:

$$0 < |pB_n + qA_n| < 1$$

o que é absurdo, pois $pB_n + qA_n$ é um número inteiro. Portanto $\zeta(2)$ é irracional.

■

Teorema 4.2 $\zeta(3)$ *é irracional.*

Prova. Considere a integral

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} \cdot f^{(n)}(x) f^{(n)}(y) dx\, dy \tag{4-7}$$

Onde $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$

A seguinte igualdade é verdadeira:

$$\frac{-\ln(xy)}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz \tag{4-8}$$

De fato:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz = \left[\frac{\ln(1-(1-xy)z)}{-(1-xy)}\right]_0^1 = \frac{-\ln(xy)}{1-xy}$$

Podemos então escrever a integral (4-7) como

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f^{(n)}(x) f^{(n)}(y)}{1-(1-xy)z} dx\, dy\, dz$$

Vamos realizar a integração por partes em relação a x:

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 f^{(n)}(y) \int_0^1 \frac{f^{(n)}(x)}{1-(1-xy)z} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f^{(n)}(y) \left[\left| \frac{f^{(n-1)}(x)}{1-(1-xy)z} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{f^{(n-1)}(x)\ (-1)\ yz}{[1-(1-xy)z]^2} dx \right] dy\, dz$$

Como $f^{(n-1)}(0) = f^{(n-1)}(1) = 0$:

$$= \int_0^1 \int_0^1 f^{(n)}(y) \int_0^1 \frac{f^{(n-1)}(x)\ (+1)\ yz}{[1-(1-xy)z]^2} dx\, dy\, dz$$

Realizando mais uma vez integração por partes em relação a x:

$$= \int_0^1 \int_0^1 f^{(n)}(y) \left[\left| \frac{f^{(n-2)}(x)\ yz\ (+1)(x)}{[1-(1-xy)z]^2} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{f^{(n-2)}(x)\ (+1)(-2)\ (yz)^2}{[1-(1-xy)z]^3} dx \right] dy\, dz$$

Como $f^{(n-2)}(0) = f^{(n-2)}(1) = 0$, obtemos:

$$= \int_0^1 \int_0^1 f^{(n)}(y) \int_0^1 \frac{f^{(n-2)}(x)\ (+1)(+2)\ (yz)^2}{[1-(1-xy)z]^3} dx\, dy\, dz$$

Após n integrações por partes em relação a x, podemos escrever I_n como

$$= \int_0^1 \int_0^1 f^{(n)}(y) \int_0^1 \frac{f^{(n-n)}(x)\ n!\ (yz)^n}{[1-(1-xy)z]^{n+1}} dx\, dy\, dz$$

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n.(1-x)^n f^{(n)}(y)}{[1-(1-xy)z]^{n+1}} dx\, dy\, dz \tag{4-9}$$

Agora vamos realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1-w}{1-(1-uv)w} \end{cases}$$

Pelo lema 4.4, Podemos realizar essa mudança de variáveis e temos o seguinte resultado.

$$J = \frac{-uv}{(1-(1-uv)w)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad |J| = \frac{uv}{(1-(1-uv)w)^2}$$

Agora observe as seguintes igualdades:

$$1-(1-uv)\frac{(1-w)}{1-(1-uv)w} = \frac{1-(1-uv)w-(1-uv)(1-w)}{1-(1-uv)w} = \frac{uv}{1-(1-uv)w}$$

Realizando a mudança de variáveis em (3-9) e, em seguida, utilizando a igualdade acima, obtemos:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (xy)^n.(1-x)^n f^{(n)}(y) z^n \frac{1}{[1-(1-xy)z]^{n+1}} dx\,dy\,dz$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (uv)^n.(1-u)^n f^{(n)}(v) \left[\frac{1-w}{1-(1-uv)w}\right]^n \frac{1}{\left[1-(1-uv)\frac{(1-w)}{1-(1-uv)w}\right]^{n+1}} |J| du\,dv\,dw$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (uv)^n.(1-u)^n f^{(n)}(v) \left[\frac{1-w}{1-(1-uv)w}\right]^n \frac{1}{\left[\frac{uv}{1-(1-uv)w}\right]^{n+1}} \frac{uv}{(1-(1-uv)w)^2} du\,dv\,dw$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (uv)^n.(1-u)^n f^{(n)}(v) \left[\frac{1-w}{1-(1-uv)w}\right]^n \left[\frac{1-(1-uv)w}{uv}\right]^{n+1} \frac{uv}{[1-(1-uv)w]^2} du\,dv\,dw$$

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-u)^n f^{(n)}(v)(1-w)^n}{1-(1-uv)w} du\,dv\,dw \tag{4-10}$$

Agora vamos realizar novamente integração por partes, agora em relação a v na expressão (4-10).

$$= \int_0^1\int_0^1 (1-u)^n(1-w)^n \int_0^1 \frac{f^{(n)}(v)}{1-(1-uv)w} dv\,du\,dw$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (1-u)^n(1-w)^n \left[\left|\frac{f^{(n-1)}(v)}{1-(1-uv)w}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{f^{(n-1)}(v)\,(-1)\,uv}{[1-(1-uv)w]^2} dv\right] du\,dw$$

Como $f^{(n-1)}(0) = f^{(n-1)}(1) = 0$, obtemos:

$$= \int_0^1\int_0^1 (1-u)^n(1-w)^n \int_0^1 \frac{f^{(n-1)}(v)\,(+1)\,uv}{[1-(1-uv)w]^2} dv\,du\,dw$$

Realizando novamente integração por partes em relação a v, obtemos:

$$= \int_0^1\int_0^1 (1-u)^n(1-w)^n \left[\left|\frac{f^{(n-2)}(v)}{[1-(1-uv)w]^2}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{f^{(n-2)}(v)\,(+1)(-2)\,(uv)^2}{[1-(1-uv)w]^3} dv\right] du\,dw$$

Como $f^{(n-2)}(0) = f^{(n-2)}(1) = 0$, obtemos:

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^n (1-w)^n \int_0^1 \frac{f^{(n-2)}(v)\,(+1)(+2)\,(uv)^2}{[1-(1-uv)w]^3} dv\,du\,dw$$

Após n integrações por partes em relação a v, obtemos:

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^n (1-w)^n \int_0^1 \frac{f^{(n-n)}(v)\,n!\,(uv)^n}{[1-(1-uv)w]^{n+1}} dv\,du\,dw$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^n(1-u)^n v^n (1-v)^n w^n (1-w)^n}{[1-(1-uv)w]^{n+1}} du\,dv\,dw \qquad (4\text{-}11)$$

Organizando as informações que temos até aqui, temos o seguinte esquema:

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^n(1-u)^n v^n (1-v)^n w^n (1-w)^n}{[1-(1-uv)w]^{n+1}} du\,dv\,dw \underset{\text{Lema 4.4 b)}}{\le} \left(\frac{1}{27}\right)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-uv)w} du\,dv\,dw$$

$|| \longrightarrow$ *Lema* 4.3 *b)* $\qquad\qquad || \longrightarrow$ *Relação* (4.8)

$$\frac{A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3} \qquad\qquad \left(\frac{1}{27}\right)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(uv)}{1-uv} du\,dv$$

$|| \rightarrow$ *Lema* 4.2 *d)* $\quad (r = 0)$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^n 2\zeta(3)$$

Figura 4.2: Esquema para demonstração de $\zeta(3)$

Pelo esquema da figura 4.2, temos a seguinte relação:

$$\frac{A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3} \le \left(\frac{1}{27}\right)^n 2\zeta(3)$$

Observe que $I_n > 0$ já que $\frac{u^n(1-u)^n v^n (1-v)^n w^n (1-w)^n}{[1-(1-uv)w]^{n+1}}$ é positivo no intervalo $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$. Daí:

$$0 < \frac{|A_n + B_n\zeta(3)|}{d_n^3} \le \left| \left(\frac{1}{27}\right)^n 2\zeta(3) \right| = \left(\frac{1}{27}\right)^n 2\zeta(3)$$

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| \le d_n^3 \left(\frac{1}{27}\right)^n 2\zeta(3) < (2,9^n)^3 \left(\frac{1}{27}\right)^n 2\zeta(3)$$

A última desigualdade surgiu como consequência da desigualdade $d_n < (2{,}9)^n$, provada no lema 4.1. Logo:

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| < \left(\frac{2,9^3}{27}\right)^n 2\zeta(3) = \left(\frac{2,9}{3}\right)^{3n} 2\zeta(3)$$

Suponha que $\zeta(3)$ seja racional, ou seja, $\zeta(3) = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos. Daí:

$$0 < |A_n + B_n\frac{p}{q}| < \left(\frac{2,9}{3}\right)^{3n} \zeta(3)$$

$$0 < |qA_n + pB_n| < q\left(\frac{2,9}{3}\right)^{3n} \zeta(2)$$

Agora observe que $\frac{2,9}{3} < 1$. Isso significa que para n suficientemente grande, $q\left(\frac{2,9}{3}\right)^{3n} \zeta(3) < 1$, ou seja:

$$0 < |pB_n + qA_n| < 1$$

o que é absurdo, pois pB_n+qA_n é um número inteiro. Portanto $\zeta(3)$ é irracional.

■

5
Considerações finais

Neste trabalho foram apresentados algumas demonstrações sobre irracionalidade, desde o conhecido $\sqrt{2}$ até o não tão conhecido $\zeta(3)$ com o objetivo de enriquecer o conhecimento do tema principalmente para professores do ensino básico. Apesar de boa parte das ideias aqui expostas não serem possíveis desenvolver com alunos do ensino básico, acredito que o Educador deva conhecer com mais profundidade os assuntos que são abordados com seus alunos. Um dos casos que melhor exemplifica é sobre o número π que é apresentado aos alunos como um número irracional. Ainda que não se justifique aos alunos o por quê da irracionalidade de π, o conhecimento da história e das ferramentas que necessitam para demonstrá-la cria uma base sólida sobre o assunto, dando ao docente uma segurança para trasmitir aos alunos assuntos que envolvam irracionalidade de π.

A exposição de $\zeta(n)$ teve o objetivo além do citado, de iterar o docente com os problemas recentes sobre irracionalidade. Apesar de ter sido uma demonstração recente (1979), as ferramentas utilizadas para a prova da irracionalidade de $\zeta(3)$ que apresentamos são relativamente simples, tendo como pré-requistito o conhecimento de algumas ferramentas de cálculo diferencial e integral.

Nessa dissertação tive a preocupação em especial de exibir um conteúdo de fácil compreensão. Tentei expor cada demonstração o mais detalhado que pude e tentei simplificar algumas notações para facilitar a compreensão de determinadas contas.

6
Referências bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. **Hist da Matemca**, trad. Elza F. Gomide (IME/USP), Ed. Edgard Blcher Ltda, 1974.

[2] APOSTOL, Tom M. **Irrationality of The Square Root of Two-A Geometric Proof**, The American Mathematical Monthly, v. 107, n. 9, p. 841-842, 2000.

[3] CONWAY, John. **The power of mathematics**, Darwin College Lectures-Cambridge, v. 16, 2006. Disponível em:
$<$ http://thewe.net/math/conway.pdf $>$ Acesso em: 23 Abr. 2017.

[4] MILLER, Steven J.; MONTAGUE, David. **Irrationality from the book**, arXiv preprint arXiv:0909.4913, 2009. Disponível em:
$<$ https://arxiv.org/pdf/0909.4913.pdf $>$ Acesso em: 23 Abr. 2017.

[5] MAOR, Eli. **"e": The Story of a Number**, Princeton University Press, 1994.

[6] SONDOW, Jonathan. **A Geometric Proof that e Is Irrational and a New Measure of Its Irrationality**, The American Mathematical Monthly, v. 113, n.7, p. 637-641, 2006.

[7] NIVEN, Ivan. **Irrational numbers**, The Mathematical Association of America, n. 11, 1967.

[8] BORWEIN, Jonathan M.; CHAPMAN, Scott T. **I prefer pi: A brief history and anthology of articles in the American Mathematical Monthly**, American Mathematical Monthly, v. 122, n. 3, p. 195-216, 2015.

[9] BEUKERS, F. **A Note on the Irrationality of ζ (2) and ζ (3)**, Bulletin of the London Mathematical Society, v. 11, n. 3, p. 268-272, 1979.

[10] APÉRY, R.; VAN DER POORTEN, Alfred. **A proof that Euler missed...**, The Mathematical Intelligencer, v.1, n. 4, p. 195-203, 1979.

[11] AYOUB, Raymond. **Euler and the zeta function**, The American Mathematical Monthly, v. 81, n. 10, p. 1067-1086, 1974.

[12] RIVOAL, Tanguy. **La fonction z de Riemann prend une infinit valeurs irrationnelles aux entiers impairs**, arXiv preprint math/0008051, 2000.

[13] ZUDILIN, W. W. **One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational**, Russian Mathematical Surveys, v. 56, n. 4, p. 774-776, 2001.

[14] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Nmeros Irracionais e Transcendentes**, SBM, 2003.