Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

Uma Introdução à Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio: A Geometria dos Fractais

Janio Paim de Jesus

Cruz das Almas-Bahia
Abril de 2017

Uma Introdução à Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio: A Geometria dos Fractais

Janio Paim de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ariston de Lima Cardoso
Co-orientador: Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo

Cruz das Almas-Bahia
Abril de 2017

Jesus, Janio Paim de.

Uma Introdução à Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio: A Geometria dos Fractais / Janio Paim de Jesus.- Cruz das Almas, 2017.

56 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Ariston de Lima Cardoso .

Co-orientador: Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Geometria Não Euclidiana 2. Geometria dos Fractais 3. Sequência Didática dos Fractais I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. IV. Uma Introdução Á Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio.

CDU : número

Uma Introdução à Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio: A Geometria dos Fractais

Janio Paim de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12 de Abril de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ariston de Lima Cardoso (Orientador)
UFRB

Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo (Co-orientador)
UFRB

Prof. Dr. João de Azevedo Cardeal
UEFS

Dedico esse trabalho a quatro pessoas:

- Minha mãe (*In memoriam*), Geralda Paim;
- Minha esposa, Rose Paim;
- Meus filhos, Janio Filho e Gabriel Paim.

Agradecimentos

É sempre preciso agradecer!

Agradeço a Deus, por ele estar sempre ao meu lado. Sei que nos momentos mais difíceis dessa caminhada, eu não estava sozinho. Como minha mãe me ensinou a dizer: “Maria passa na frente”.

Agradeço a todos os meus ex-professores, desde os da Educação Infantil até este mestrado, muito aprendi com todos vocês.

Em especial, agradeço ao meu orientador Profº Dr. Ariston de Lima Cardoso e ao meu co-orientador, Profº Dr. Genilson Ribeiro de Melo pela paciência, pelas sugestões e ensinamentos.

Aos meus colegas de trabalho, pelo incentivo e compressão durante a realização deste mestrado.

Agradeço a CAPES, pela ajuda financeira para a realização deste curso.

Agradeço também, à minha família e amigos. Foram muitos dias, noites, finais de semanas em dedicação a esse curso e longe deles. A minha mãe que mesmo doente, sempre confiou no seu filho. Ela dizia: “Não sei se verei você terminar esse mestrado. Mesmo assim, quero o seu bem. Deus provê, Deus proverá. A Tua misericórdia não faltará.”.

Por fim, agradeço aos meus colegas de PROFMAT, que sem os quais não seria possível a realização desse sonho, faço questão de nomeá-los: Benício Fagundes de Brito Júnior, Bruno OLiveira da Silva, Carlos Alison de Souza Azevedo, Cléber Bastos Borges, José Carlos Leal do Valle Júnior, Patrícia Rodrigues de Oliveira Cerqueira e Valdemir dos Santos Batista. Foram mais de dois anos de muita batalha.

"Aqui Deus cria os Círculos, as Ondas e os Fractais"

Benoit Mandelbrot

Resumo

O ensino da Geometria na Educação Básica tem como fundamentos as noções da Geometria Euclidiana. Os documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares do Estado da Bahia, não trazem no seu corpo conteúdos que perpassem da Geometria Euclidiana. Neste sentido, este trabalho tem como objetivo, através da aplicação de uma sequência didática em sala de aula, propor uma ferramenta metodológica para que seja introduzida a Geometria Não Euclidiana na Educação Básica no estado da Bahia, com o enfoque na Geometria dos Fractais. Sendo assim, após a comparação de documentos oficiais de educação que não abordam as Geometrias Não Euclidianas e documentos que sugerem esse estudo, este trabalho faz: um embasamento sobre tais geometrias; conceitua e destaca as principais propriedades dos Fractais, focalizando o estudo da dimensão fractal; aplica em sala de aula uma sequência didática sobre o tema com o auxílio de dois software e, por fim, analisa os resultados obtidos na aplicação e termina o trabalho concebendo que é possível, a nível de Ensino Médio, introduzir a Geometria Não Euclidiana, via a Geometria dos Fractais.

Palavras-chave: Ensino Médio; Geometria Não Euclidiana; Geometria Fractal; Dimensão Fractal

Abstract

The teaching of Geometry in Basic Education is based on the notions of Euclidean Geometry. Official documents such as the National Curricular Parameters and the Curricular Guidelines of the State of Bahia do not carry in their body contents that pervade Euclidean geometry. In this sense, this work has the objective, through the application of a didactic sequence in the classroom, to propose a methodological tool for the introduction of Non - Euclidean Geometry in Basic Education in the state of Bahia, focusing on the geometry of fractions. Thus, after comparing official educational documents that do not address Non-Euclidean Geometries and documents that suggest this study, this work does: a foundation on such geometries; Conceptualizes and highlights the main properties of the Fractais, focusing on the study of the fractal dimension; Applies a didactic sequence on the subject in the classroom with the aid of two software and, finally, analyzes the results obtained in the application and finishes the work conceiving that it is possible, at the level of High School, to introduce Non-Euclidean Geometry via The geometry of fractions.

Keywords: High School; Non-Euclidean Geometry; Geometry Fractal; Fractal Dimension

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Introdução

O Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), oferecido pela Universidade Aberta do Brasil (UAB) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), coordenado pela sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e, apoiado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e aplicada (IMPA) tem o propósito de oferecer uma formação para os docentes na área de Matemática, atuantes, principalmente, na rede pública, no âmbito da segmento da Educação Básica.

Nesse sentido, durante o período do curso são ministradas inicialmente disciplinas que possibilitam ao estudante rever e aprofundar conteúdos de Matemática trabalhados na educação Básica, em uma abordagem que segue o rigor da ciência e, em outro momento, são ofertadas disciplinas voltadas para o Ensino Superior.

No que se refere ao trabalho de conclusão do curso, a coordenação do PROFMAT no seu regimento, CAPÍTULO IV, Art 21, deixa claro que o mestrando poderá, dentre os conteúdos trabalhos no curso ou assuntos da área, desenvolver o seu estudo para a escrita de sua dissertação quando diz que

> "O trabalho de conclusão final do PROFMAT poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão, sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, relatórios finais de pesquisa, *softwares*, projetos de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos

> para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e *kits*, projetos de inovação tecnológica, sem prejuízo de outros formatos, de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula.(PROFMAT, 2016)"

Embasado nessa orientação, este nosso trabalho tem como objetivo, através de uma sequência didática, introduzir na Educação Básica a Geometria Não Euclidiana com ênfase na Geometria Fractal.

Esse estudo se justifica por duas situações: (a) a não existência da indicação do ensino da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica pelos documentos oficiais do estado da Bahia, tendo apenas os axiomas e postulados da Geometria Euclidiana como fundamentos para o ensino da geometria; (b) Mostrar aos estudantes a presença de figuras na natureza com propriedades e características que fogem aos padrões da Geometria Euclidiana.

No desenvolvimento deste trabalho, afim de organização teremos o seguinte encadeamento dos capítulos:

- **Capítulo 1.** Em relação ao ensino da Geometria, faremos uma análise de três documentos oficiais: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), As Orientações Curriculares do Estado da Bahia para o Ensino Médio e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná. Sendo este último documento o único a indicar o ensino das Geometria Não Euclidianas na Educação Básica.

- **Capítulo 2.** Apresentaremos as principais considerações acerca da Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas. Dentre as não euclidianas, definiremos a Geometria Esférica, A Geometria do Taxista e a Geometria dos Fractais.

- **Capítulo 3.** Como foco do nosso objetivo, a Geometria Fractal será abordada nesse tópico, com as suas definições e propriedades. Apresentaremos alguns fractais famosos, alguns fractais naturais e um método para o cálculo da Dimensão Fractal.

- **Capítulo 4.** Para a introdução das Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, apresentaremos uma sequência didática para a aplicação em sala de aula, com o uso de dois *softwares*, um para ajudar a determinar a dimensão da figura e outro para a construção de alguns fractais.

Para finalizar o nosso trabalho, traremos as considerações acerca das discussões apresentadas e deixamos claro que este trabalho poderá ser utilizado como fonte de pesquisa para outros professores e, como um trabalho científico, não é um modelo acabado.

Capítulo 1

O Ensino da Geometria no Ensino Médio segundo alguns Documentos Oficiais

O ensino da Geometria na Educação Básica, período compreendido desde a 1ª série do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, tem como documento maior os Parâmetros curriculares Nacionais (PCN's). Neste capítulo, iremos apresentar as orientações contidas nos PCN's, nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná e as Orientações Curriculares do Estado da Bahia. Pretende-se fazer um breve comparativo sobre tais abordagens acerca do Ensino da Geometria no Ensino Médio, em especial, da Geometria Não-euclidiana.

1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's - Matemática

A criança ao se relacionar com o meio em que vive se depara com diversos tipos de linguagem. Uma das linguagens mais significativas é a da forma. Desse modo, através do tato, a criança tenta manipular alguns corpos. É nesse primeiro contato que a criança inicia o aprendizado do mundo das formas.

Nesse sentido, as orientações contidas nos PCN's no tocante ao ensino da Geometria na Educação Básica, mostra que

> “...se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.”(BRASIL, 1997)

Sendo assim, os PCN’s pressupõe que o professor desenvolva atividades que visem proporcionar a interação do estudante com o meio em que vive, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Já no primeiro ciclo do ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais lista como Conteúdos Conceituais e Procedimentais no bloco de Espaço e Forma, itens como:

- Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.
- Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.
- Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.
- Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos - esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos - sem uso obrigatório de nomenclatura.
- Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.
- Construção e representação de formas geométricas.

Nessa seleção de conteúdos, é possível perceber a importância de se desenvolver conceitos da Geometria desde as séries iniciais. Tal fato fica bem evidenciado no item 3, quando é sugerido que sejam observados as formas dos objetos da natureza e os criados pelo homem.

Como o foco do nosso trabalho é apresentar as orientações acerca do segmento do Ensino Médio, as Orientações Curriculares para este segmento, desenvolvido pela Secretaria de Educação Básica, do Ministério de Educação, no bloco Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias cita que

> “O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.”(BRASIL, 2006)

No Ensino Médio, com estudantes na faixa etária de 15 aos 17 anos, é o momento de trazer uma discursão mais profunda de alguns conteúdos da Matemática, em específico, na área da geometria. Analisar algumas propriedades da geometria que é trabalhada em sala de aula e, perceber que é possível encontrar geometrias que não contemplam tais propriedades, pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

1.2 Orientações Curriculares para o Ensino Médio no Estado da Bahia - Matemática

No estado da Bahia, no ano de 2015, a Superintendência de Desenvolvimento da Educação Básica, no nome da Secretaria Estadual de Educação, organizou um documento que versava sobre os conteúdos para o Ensino Médio na área da Matemática. Neste documento, fica claro a concepção de aprofundar o conteúdo referente a geometria no Ensino Médio, quando ele cita os eixos integradores do conhecimento matemático,

> “No Eixo 2, Modelagem Geométrica no Plano e no Espaço, parte-se da compreensão de que o desenvolvimento do conhecimento geométrico começa nas séries iniciais, mas somente nas séries finais do Ensino Fundamental o(a) estudante relaciona às propriedades geométricas, e no Ensino Médio surge a maioria das situações de raciocínio hipotético-dedutivo.”(BAHIA, 2015)

Nesse sentido, é necessário que o professor do segmento do Ensino Médio possa estimular os estudantes no desenvolvimento de suas habilidades e, sempre que possível, estabelecer um meio para que o conhecimento possa ser expandido.

O quadro 1.1, contém as competências e habilidades orientadas pelo diretrizes do estado da Bahia, para as três séries do Ensino Médio, que tem como base as orientações dos PCN’s.

Quadro 1.1: Competências e Habilidades

Eixo 2 – Modelagem Geométrica no Plano e no Espaço			
COMPETÊNCIAS	1ª	2ª	3ª
Identificar e utilizar o conhecimento geométrico na compreensão e intervenção da realidade	TS	TS	C
HABILIDADES			
Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua repreentação no espaço.			
Identificar características de figuras planas ou espaciais, relacionando com outros tópicos da Matemática, especialmente ao conceito de função associado ao cálculo de perímetro, área e de volume, bem como de figuras situadas abaixo de um gráfico.			
Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.			
Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas.			
Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico analítico na interpretação e compreensão de fatos.			
COMPETÊNCIAS	1ª	2ª	3ª
Construir e estender as noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano	TS	TS	C
HABILIDADES			
Associar as relações entre grandezas e unidades de medida.			
Utilizar a noção de escala na leitura de representação de situação do cotidiano, correlacionado aos cálculos de área de figuras.			
Utilizar uma tabela ou uma calculadora para determinar o valor (exato ou aproximado) da amplitude de um ângulo agudo a partir de uma das suas razões trigonométricas.			
Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.			
Utilizar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.			
Propor intervenção na realialidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas			

Quadro extraído das Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Estado da Bahia, 2015

No quadro 1.1, percebemos que o Eixo 2 dos conhecimentos matemáticos é denominado “Modelagem Geométrica no Plano e no Espaço” e que nas duas primeiras séries do Ensino Médio o documento sugere que seja desenvolvido um Trabalho Sistêmico (TS) e na última série seja Consolidado (C) o conhecimento geométrico. As duas habilidades sugeridas neste documento, “Identificar e utilizar o conhecimento geométrico na compreensão e intervenção da realidade”e “Construir e estender as noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano”possibilitam ao professor navegar sobre uma gama de conteúdos e de atividades, sempre visando uma interação dos conteúdos trabalhados com questões do cotidiano do estudante e, sem deixar de focar, nas resoluções de situações problemas.

Dentre as habilidades citadas pelas Orientações Curriculares do Estada da Bahia ressaltamos algumas que estão mais diretamente relacionadas com o objeto deste estudo: (a) Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional. (b) Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas. (c) Associar as relações entre grandezas e unidades de medida. (d) Utilizar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente. (e) Propor intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

1.3 Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná - Matemática

A proposta do trabalho da disciplina de Matemática contida nas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná traz como conteúdos estruturantes da disciplina, que eles definem como sendo os conteúdos de grande amplitude, cinco grandes blocos: Número e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação.

Note que a geometria sugerida nessas Diretrizes é trabalhada em um só tópico e como “Geometrias”, dividida nos segmentos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e Noções de Geometrias não Euclidianas. Segundo as Diretrizes do estado do Paraná, o tópico das “Geometrias”deve ser trabalhado, à nível do Ensino fundamental, visando o desenvolvimento das competências habilidades nos estudantes, sob os seguintes conteúdos:

- os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;

- geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões;

- geometria analítica: noções de geometria analítica utilizando o sistema cartesiano;

- noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.

Por esses tópicos podemos perceber que, já no Ensino Fundamental é possível a introdução da geometria Não Euclidiana na Educação Básica. Como o nosso foco é o Ensino Médio, sobre isso, as Diretrizes apresentadas sugerem que sejam aprofundados os conhecimentos da geometria euclidiana (Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica), com os seus teoremas e suas respectivas demonstrações, além de que

> "... no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da "regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades"(SOCZEK e HORN, 2012 apud BARBOSA, 2005, p. 14)."

Nesse sentido, tais Diretrizes trazem uma possibilidade de não apenas trabalhar com a Geometria Euclidiana na Educação Básica, e sim, poder fazer uma introdução à Geometria não Euclidiana.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apesar de não sugerir o estudo da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica, deixa a possibilidade de que sejam trabalhados conteúdos bem diversificados quando cita que

> "O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos, de um lado, quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; de outro, em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos (BRASIL, 1997)."

Já as Orientações Curriculares da Bahia, do mesmo modo, abre caminhos para que sejam produzidos conhecimentos na área da geometria, expondo que

> "Para trabalhar a geometria, e também a própria Matemática, faz-se necessário, além de quantificar, medir para se entender e compreender o mundo, de igual modo, sua organização. Estas ideias estão presentes em outros ramos da Matemática, tendo como centro as relações entre grandezas, suas medidas e representações (BAHIA, 2015)."

Diante dos documentos oficiais expostos neste trabalho, cabe apresentarmos as definições das Geometrias Euclidianas e as Geometrias Não Euclidianas, uma vez que, por um lado, percebemos a não indicação explicita no Parâmetros curriculares Nacionais e nas Orientações Curriculares do Estado da Bahia e, por outro lado, nas diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, de modo bem explicito, encontramos orientações para se trabalhar com a Geometria Não Euclidiana desde o Ensino fundamental até o Ensino Médio. As apresentações dos conceitos das Geometrias serão abordadas no capítulo que segue.

Capítulo 2

Geometrias: Euclidianas e Não Euclidianas

O ensino da Geometria na Educação Básica nas escolas brasileiras normalmente é fundamentada nos axiomas da Geometria Euclidiana. Os Parâmetros Curriculares Nacionais não impede que sejam trabalhadas outras geometrias, ele indica que é preciso que se tenha definido qual a linha a ser trabalhada, por exemplo,

> "... ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida. É o que ocorre, por exemplo, quando se privilegiam as noções de ?ponto, reta e plano? como referência inicial para o ensino de Geometria...(BRASIL, 1997)"

Nesse sentido, o professor terá a responsabilidade de incluir outras discussões acerca da geometria que julgar pertinentes. Nesse caso, abre-se o caminho para se trabalhar outras geometrias no Ensino Médio.

Segundo Muniz Neto (Coleção PROFMAT, 2013), o ensino da Geometria na Educação Básica pode ser considerado sob quatro aspectos: o *Pragmático* – as diversas aplicações dos conteúdos no cotidiano dos estudantes são fatores que justificam o seu estudo; o *Cultural* – A coleção Os elementos de Euclides é a base de muito conhecimento científico produzido até os dias de hoje; o *Metodológico* – nesse aspecto, é possível mostrar para os estudantes determinadas provas dos conteúdos matemáticos, de modo mais proximal dos estudantes; e o aspecto *Matemático* – se justifica por inserir, através dos temas da disciplinas, condições para os estudantes possam se desenvolver na disciplina e ter um acesso menos traumático ao ensino superior.

Além das diversas situações apresentadas acima, acerca da inserção da Geometria na Educação Básica, os PCN's, no bloco de conteúdos – espaço e forma, o qual trata da geometria, ressalta as diversas situações e contribuições que o ensino da Geometria por trazer para o estudante, ele afirma que

> "A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (BRASIL, 1997)."

Neste sentido, esse capítulo trará algumas definições e propriedades das Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas, em específico, abordaremos os tópicos da Geometria Plana, Espacial e Analítica referentes à Geometria Euclidiana e, os tópicos da Geometria Esférica, do Taxista e dos Fractais, referentes à Geometria Não Euclidiana.

2.1 Geometria Euclidiana – G.E.

Como mencionado no início deste capítulo, a geometria adotada pelas escolas de Educação Básica é pautada nos axiomas e postulados de Euclides. Antes de expormos tais condições, iremos brevemente apresentar alguns aspectos históricos e conceituais acerca da geometria euclidiana.

A Matemática na Grécia Antiga, com iniciativas de Tales de Mileto (624 – 547 a.C.) e Pitágoras de Samos (569 – 475 a.C.), passou a adotar uma formalidade para as provas e demonstrações dos conhecimentos desenvolvidos. Platão (427 – 347 a.C.) foi um dos matemáticos que organizou as etapas para as demonstrações com o rigor matemático que se aproxima ao que conhecemos até hoje. Nesse contexto, possivelmente, não se tem certeza dessa afirmação, Euclides de Alexandria (325 – 265 a.C.) pode ter sido aluno de Platão e, ao escrever a coleção de treze livros "Os elementos", no qual continha uma série de axiomas e proposições, onde algumas foram provadas com o rigor matemática e o caráter lógico-dedutivo. Até hoje, muitos de seus legados são usados como a base para o ensino da Matemática e Geometria na escolas.

Segundo Bicudo (2012), a geometria ao chegar à Grécia teve que desenvolver critérios para os seus fundamentos e, dessa forma, foi necessário criar regras para introduzir os conhecimentos, tais regras e noções se deram do seguinte modo,

> “Os postulados são as primeiras noções geométricas que são aceitas sem contestações. A partir desses postulados, são apresentados outras regras. Sendo assim, a geometria se transformou em uma ciência dedutiva, baseada em princípios. Nesse contexto, Euclides fez o primeiro grande resumo de tudo que se conhecia antes dele em matemática. Ele foi um chefe de escola em Alexandria, 300 anos antes de Cristo, e a sua obra “Os Elementos de Euclides”resume muito bem tudo que se conhecia em matemática elementar (BICUDO, 2012).”

A coleção “Os elementos”, nos seus treze livros, traz quase todo o conhecimento matemática até então produzido. Segundo Hygino (2001), Euclides teve uma atenção especial à Geometria, ao afirmar que “Os Elementos dedicam um bom espaço à teoria dos números (três livros), mas com o enfoque geométrico permeia toda a obra. Euclides representava números por segmentos de retas...”. O mesmo autor retrata ainda, como a geometria lógico-dedutiva foi introduzida na obra de Euclides,

> “Mas, sem dúvida, o forte dos elementos é a geometria. A partir de cinco noções comuns, cinco postulados específicos e algumas definições, centenas de teoremas (467 em toda a obra) são deduzidos, alguns de grande profundidade (HYGINO – DOCE e POMPEU), 2001).”

Ressaltamos que segundo Manfio, nesta época os “axiomas”ou “noções comuns”eram tidas como proposições verdadeiras comuns à todas as áreas do conhecimento e que não cabiam demonstrações, já os “postulados”, eram verdades próprias da área de conhecimento e, do mesmo modo dos axiomas, não necessitavam de demonstrações. Nesse sentido, no livro I, Euclides indicou os seguintes axiomas:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

E os seguintes postulados:

1. Existe uma única reta contendo dois pontos dados
2. Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções.
3. Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta intercepta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Mesmo naquela época, sendo os axiomas e postulados tidos como verdade, o quinto postulado levantou a dúvida de vários matemáticos. Sendo assim, a busca pela prova do conhecido como "5º Postulado de Euclides"ou "O Postulado das Paralelas"foi trabalho de alguns Matemáticos. Segundo Manfio, Nasiradin (1201 – 1274), John Wallis (1616 – 1703), Gerolamo Sacheri (1667 – 1733), John H. Lambet (1728 – 1777), Adrien M. Legendre (1752 – 1833), Louis Bertrand (1731 – 1812) e Carl F. Gauss (1777 – 1855), foram alguns dos estudiosos que tentaram provar tal postulado. Mesmo não conseguindo, os seus estudos foram a base para que, mais tarde, Gauss, Lobachevski (1792 – 1856) e Bolyai (1802 – 1860), trabalhando separadamente, descobrissem novas possibilidades além da geometria explicitada na obra de Euclides.

A partir de então, temos a descoberta das Geometrias Não euclidianas. Tópico que é o foco do nosso tabalho e será apresentado a seguir.

2.2 Geometria Não Euclidiana – G.N.E.

Com os fundamentos da Geometria Euclidiana, um professor poderá chegar numa turma da Educação Básica e fazer o seguinte questionamento: Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer? A resposta esperada será, em comum acordo, que tal soma é igual a 180º. Se tal professor, perguntar agora, qual a soma dos ângulos internos de um triângulo construído na superfície de uma bola de futebol, quais seriam as possíveis respostas dos estudantes?

Questões como estas abrem as portas para geometrias diferente da Geometria Euclidiana. Nesta seção, iremos abordar questões histórica acerca da Geometria Não euclidiana e, de forma breve, expor a Geometria Esférica, a Geometria do Taxista e, como foco do nosso trabalho, a Geometria dos Fractais.

Verdades aceitas na G.E. como, por exemplo, a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, pode não ser aplicada nas G.N.E's, por exemplo, a menor distância entre os pontos B e C da esfera de centro A e raio $\overline{AB}$ (Figura 2.1), será o arco $\widehat{BC}$ de centro A, contida no círculo maior desta esfera.

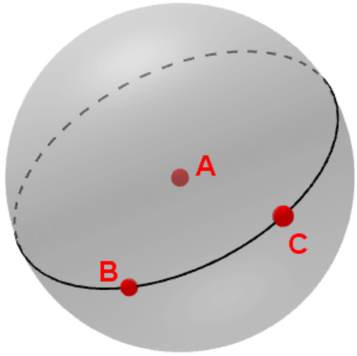


Figura 2.1: Distância entre dois pontos da esfera

Caso estivéssemos na G.E., a menor distância em questão seria o segmento de reta $\overline{AB}$.

2.2.1 Geometria Esférica

Dentre as Geometrias Não Euclidianas, temos a ***Geometria Esférica*** que é uma área que pode ser trabalhada na Educação Básica sem muitos problemas, por ter como base uma figura comum aos estudantes e, de certa forma, poder encontrar modelos dentro do contexto dos alunos.

Alguns dos postulados e teoremas desenvolvidos na Geometria Euclidiana podem ser facilmente constatado a não aplicabilidade na Geometria Esférica, vejamos:

1. No postulado 1, temos que "Existe uma única reta contendo dois pontos dados."Sendo os círculos máximos as retas na Geometria esférica, podemos traçar mais de uma reta passando por dois pontos distintos. Observe:

   Seja a esfera Σ (Figura 2.2), de centro A. Dados dois pontos distintos, $B_0, B_1 \in \mathit{\Sigma}$, sendo que esses pontos são a interseção da reta r, na Gemometria Euclidiana, que passa pelo centro da esfera. Temos que, dados outros dois pontos $C, D \in \mathit{\Sigma}$, podemos traçar dois círculos máximos distintos, um passando por $B_0, B_1 eC$ e outro círculo passando por$B_0, B_1 eD$. O que nega o postulado 1 de Euclides.

2. Da G.E. temos que duas retas distintas podem possuir apenas um ponto comum. Da figura 2.2 podemos observar que a reta que passa por $B_0, B_1 eC$ e a reta que passa por $B_0, B_1 eD$ são distintas e possuem dois pontos em comum, B_0, B_1. Logo, esse resultado não se aplica à Geometria Euclidiana.

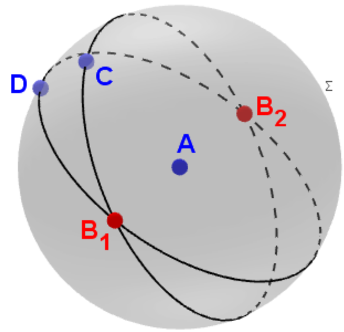


Figura 2.2: Retas diferentes que passam pelos mesmo dois pontos

3. Dados três pontos não colineares na Geometria Euclidiana, podemos traçar apenas um triângulo. Na Geometria Esférica, dado três pontos não colineares, isto é, que não pertençam ao mesmo círculo máximo ou grande círculo, podemos traçar dois triângulos esféricos [1].

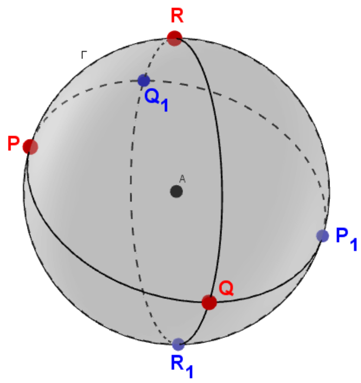


Figura 2.3: Triângulo Esférico

Sejam a esfera Γ (Figura 2.3)de centro A e três grandes círculos, um que passa por P e Q, um que passa por Q e R e, outro que passa por R e P, sendo $P, Q, R \in \Gamma$. A interseção desses três grandes círculos geram os arcos $\widehat{PQ}$,$\widehat{QR}$ e $\widehat{RP}$, a região delimitada por tais arcos geram um triangulo esférico, no qual os seus lados são tais arcos. Note que os pontos a P_1, Q_1 e R_1, são simétricos em relação ao centro aos pontos P, Q e R, respectivamente. Dessa forma, temos no outro hemisfério da esfera, um outro triângulo esférico, de lados $\widehat{P_1Q_1}$, $\widehat{Q_1R_1}$ e $\widehat{R_1P_1}$. Tal resultado, contradiz a proposição da Geometria Euclidiana.

[1] Segundo Neto (Coleção PROFMAT) um triângulo esférico é a união dos arcos dos grandes círculos dos segmentos esféricos, pertencentes a um mesmo circunferência.

2.2.2 Geometria do Taxista

Uma outra Geometria Não Euclidiana que pode ser aplicada na Educação Básica é o ***Geometria do Taxista***. Para iniciar esse tema imagine a seguinte situação: "Uma pessoa quer se locomover de carro da sua casa, localizada no ponto A, até a casa de sua mãe, que fica no Ponto B. Através do mapa das ruas (Figura 2.4), qual será o menor caminho possível?"

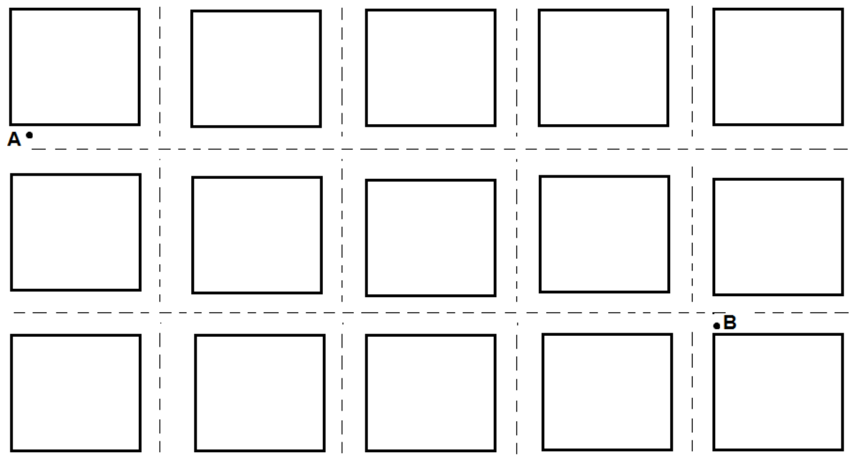


Figura 2.4: Distância entre dois pontos

Será que podemos usar a tão conhecida máxima da Geometria Euclidiana que diz que "a menor distância entre dois pontos é uma reta"? Obviamente, não. Casos como este podem ser usados como motivadores para introduzir a Geometria do taxista.

Percebemos dessa forma que é necessário que se defina uma forma para o cálculo da distância entre pontos. O modo matemático para determinar a distância em um certo espaço é chamado de métrica, definida abaixo.

Definição 2.2.1. ***Métrica em um conjunto***: *Dado um conjunto $\mathbb{S}$, uma métrica em $\mathbb{S}$ é uma função*

$$d{:}\mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades:

- *É positivamente definida, ou seja, é tal que $d(x, y) \geq 0$, para todos os $x, y \in \mathbb{S}$.*
- *É simétrica, ou seja, é tal que $d(x, y) = d(y, x)$ para todos os elementos x, y de $\mathbb{S}$.*
- *Obedece a Desigualdade Triangular; para todos os x, y, z elementos de $\mathbb{S}$, d satisfaz $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*
- *É nula apenas para pontos coincidentes. Ou seja, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.*

Nesse sentido, temos que definir a distância na Geometria Euclidiana e na Geometria do Taxista. Na Geometria Euclidiana ou Espaço Euclidiano, segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013) é definida no plano como segue.

Definição 2.2.2. ***Distância entre dois pontos no plano(Geometria Euclidiana):***

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. A distância de P a Q, que designamos $d(P, Q)$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo PQR de catetos PQ e QR, onde $R = (c, d)$ (Figura 2.5).

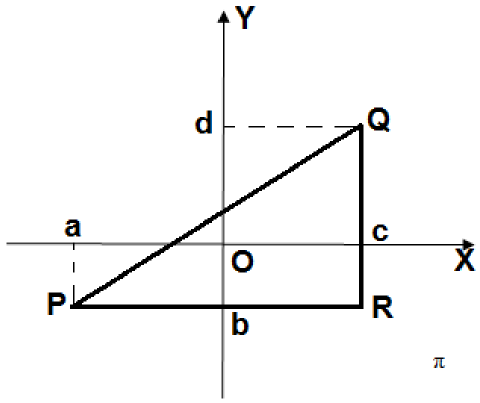


Figura 2.5: Distância entre pontos do plano

Sendo a distância entre pontos de um eixo igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas destes catetos são, respectivamente, $|PR| = |a - b|$ e $|QR| = |b - d|$. Então, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{|(a - c)|^2 + |(b - d)|^2}$$

Assim, a distância de $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

Já a distância entre dois pontos na Geometria do Taxista é definida como:

Definição 2.2.3. ***Distância entre dois pontos no plano (Geometria do Taxista):***

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. A distância de P a Q, que designamos $d(P, Q)$, é a medida da soma dos catetos PQ e QR, onde $R = (c, d)$(Figura 2.5).

Sendo a distância entre pontos de um eixo igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas destes catetos são, respectivamente, $|PR| = |a - b|$ e $|QR| = |b - d|$. Dessa forma, temos que:

$$d(P,Q) = |PQ| = |PR| + |QR| = |(a-c)| + |(b-d)|$$

Assim, a distância de $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ é a soma dos módulos das diferenças das coordenadas correspondentes.

Após as definições das distâncias nas geometrias citadas, percebemos a importância de apresentar tal conteúdo na Educação Básica, uma vez que o estudante além de compreender que tais situações fazem parte do seu cotidiano, poderá expandir o seu conhecimento, sabendo que a distância entre dois pontos depende da métrica aplicada ao conjunto em questão.

2.2.3 Geometria Fractal

Por fim, outra geometria que julgamos ser essencial para a introdução de novos conceitos e questionamentos sobre a geometria que normalmente é trabalhada na Educação Básica é a ***Geometria Fractal***. Sendo esta, o tema do nosso trabalho. Como teremos um capítulo específico para apresentarmos esse tema, faremos apenas uma pequena introdução do mesmo.

No ensino da geometria nas escolas temos, normalmente, o trabalho com quatro situações quando se diz respeito as dimensões das figuras. Dizemos que uma figura possui dimensão 0 (zero), quando não possui comprimento nem largura, como por exemplo um ponto, a figura terá dimensão 1 (um) quando se resume a um comprimento, por exemplo, uma linha. Dizemos ainda que, uma figura possui dimensão 2 (dois) quando nos referimos a uma superfície, por exemplo a área de uma sala retangular e, dizemos que uma figura possui dimensão 3 (três) quando nos referimos a um sólido geométrico, por exemplo, um cubo.

Notem que todas as dimensões que citamos acima são representados por números inteiros. Daí vem o questionamento: Qual seria a dimensão de uma folha de papel amassada? Durante o próximo capítulo, traremos algumas definições e propriedades acerca de algumas figuras que possuem dimensões não inteiras e algumas características específicas, os ***Fractais***.

Capítulo 3

A Geometria dos Fractais

Neste capítulo, dedicaremos a apresentação e estudo acerca dos fractais, tema central do nosso trabalho. Reforço que a escolha da Geometria dos Fractais dentre as demais geometrias não euclidianas, se deu inicalmente por se tratar de uma geometria que possui como atrativo para os estudantes belas imagens na natureza com características dos fractais, bem como a possibilidade de, usando um software, poder gerar alguns fractais. Além disso, o trabalho com o tema abordado permite aos estudantes dismitificar a questão das dimensões inteiras da Geometria Euclidiana. Nesse sentido, como organização deste tópico, teremos o seguinte desdobramento dos pontos sobre o nosso tema: apresentar o matemático que inventou os fractais; citar algumas definições dos fractais; mostrar alguns fractais famosos e suas propriedades; citar os fractais naturais como um item presente ao nosso redor; apresentar uma metodologia, que possa ser aplicado na Educação Básica, para o cálculo aproximado da dimensão de um fractal.

3.1 Os Fractais de Mandelbrot

A Geometria Euclidiana é pautada no estudo de formas regulares, como por exemplos, os polígonos e as cônicas. O matemático, polonês que viveu na França, Benoit Mandelbrot iniciou o seu trabalho com os fractais no ano de 1958, na International Business Machines (IBM [1]). Segundo Mandelbrot,

[1]A IBM é uma das maiores empresas da área de TI (Tecnologia da Informação) no mundo, e foi fundada em 1888. A IBM detém muitas patentes, além de mais de 15 laboratórios de pesquisa no mundo inteiro, com profissionais experientes como cientistas, engenheiros, consultores e etc. <Disponível em https://www.significados.com.br/ibm/, acesso 28.01.2017>

> "Eu cunhei a palavra *fractal* do adjetivo latino *fractus*. O verbo latino correspondente *frangere* significa *quebrar*: criar fragmentos irregulares. Portanto, é considerável – e quão apropriado para as nossas necessidades! – que, além de significar *fragmentado* (como em *fração* ou *refração*), *fractus* pode também significa *irregular*, estando ambos os significados preservados em *fragmento* (Grifos do autor) (MANDELBROT, 1982)."

Ao criar a palavra fractal, ele sugere que sejam partes irregulares de um todo. Além disso, ele percebe que algumas figuras possuem a propriedade da ***auto similaridade***, na qual as partes do todo possuem as mesmas características do todo. Na natureza é possível encontrar diversas formas com tal propriedade, como por exemplo (Figura 3.1), uma árvore, como o todo, e os seus galhos, e suas ramificações, como as partes.

Figura 3.1: A árvore, os seus galhos e suas ramificações

Fonte:http://www.adesivoteca.com.br/produto/arvore-mini/

O quadro 3.1 a seguir mostra o desenvolvimento da Geometria dos Fractais, segundo SANTANA e SÁ (2016).

Quadro 3.1: Ordem cronológicas de alguns fatos da história dos Fractais

Ano	ACONTECIMENTO
1500	Dürer, matemático, desenvolve construções de polígonos regulares, gera os fractais que levam o seu nome.
1883	Cantor publica a primeiro objeto fractal a Curva de Cantor.
1889	Peano publica a sua curva.
1891	Hilbert publica sua curva com a ideia de preenchimento quadrangular, hoje bastante utilizada em compressão de imagens.
1904	Koch publica as Curvas de Koch e a Ilha de Koch como soluções de curvas.
1918	Hausdorff publica resultados sobre estudos topológicos e com isso a Dimensão de Hausdorff, utilizada por Mandelbrot anos depois para a definição de fractais.
1918	Julia publica um artigo com 199 páginas sobre o seu conjunto gerado num plano complexo. Julia não chega a ver o resultado belíssimo dos seus conjuntos, dado que ele só conseguia fazer poucas implementações.
1918	Fatou publica trabalho semelhante ao de Julia, porém não teve muita repercussão.
1921	Menger apresenta a Esponja de Menger ao explorar conceitos de dimensão topológica.
1938	Lévy descreve sobre a propriedade de auto-similaridade de algumas curvas.
1967	Mandelbrot publica seu artigo sobre a topologia da costa da Grã-Bretanha, iniciando um novo capítulo sobre a Geometria Fractal.

Fonte: http://www.cbcg.ufpr.br/home/wp-content/uploads/2016/11/C002CBCG13.pdf

Da análise do quadro 3.1, podemos perceber que os estudos que nortearam Mandelbrot a definir e organizar a Geometria dos Fractais já vinham sendo desenvolvidos por outros matemáticos. Dessa forma, as definições de fractais, perpassam por conteúdos e áreas diversas do conhecimento. Como por exemplo, temos a definição de fractais de Fieldler-Ferreira e Prado (1995),

> "...foi visto ... ao introduzir-se o conceito de ***atrator estranho***, que é possível se construir estruturas geométricas mais complexas e com dimensões não-inteiras. Tais objetos geométricos são genericamente chamados fractais e uma de suas propriedades básicas é a chamada auto-similaridade.(FERREIRA e PRADO, 1995)"

Note que nessa definição de fractais, é necessário a construção do conceito de atrator estranho, como o foco do nosso trabalho é a introdução da geometria não euclidiana da Educação Básica, não iremos focar nosso estudo em tal conceito.

Segundo SIQUEIRA (2005), uma definição simples de fractal é que "são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando auto semelhança e complexidade infinita". Ele acrescenta que: na auto similaridade, o mesmo objeto visto em diferentes escalas, mantém as características iniciais; a complexidade infinita, se justifica, pois são figuras que podem sempre ser aumentadas ou diminuídas, nunca conseguiremos reproduzi-las completamente.

3.2 Fractais Famosos e algumas de suas propriedades

No desenvolvimentos do estudo dos fractais alguns matemáticos criaram fractais geométricos, os quais levaram os seus nomes. Veremos nesse tópico o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e o Conjunto de Cantor.

Outro matemático polonês, Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), a exemplo de Mandelbrot, construiu o ***Triangulo de Sierpinski***. Essa figura se configura como um fractal pois possuem as três propriedades citadas no tópico anterior.

O triângulo de Sierpinski é obtido da seguinte forma:

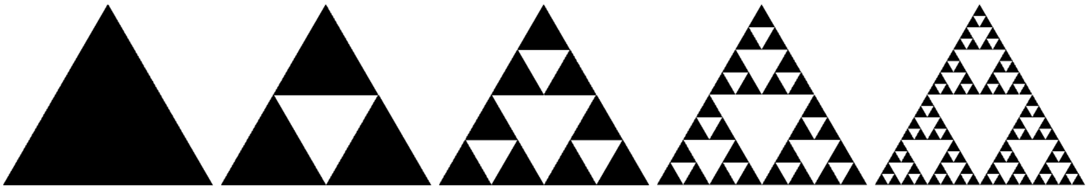
1. Seja um triângulo equilátero num plano qualquer;

2. Com vértices nos pontos médios dos lados do triangulo inicial, constrói-se um outro triângulo equilátero e, retira-o da figura.

3. Na figura vasada resultante, repete-se os dois passos iniciais infinitas vezes.

Dessa forma, obtemos o fractal desejado, conforme a sequência da Figura 3.2 a seguir:

Figura 3.2: Evolução do Triângulo de Sierpinski



Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri

Esse fractal pode ser facilmente obtido através da manipulação de alguns *softwares*, como por exemplo "*O Geogebra*[2] ".

Note que esta figura, como dito antes, ao se considerar uma parte, temos que ela é semelhante a figura inicial e, além disso, pode-se sempre encontrar os pontos médios dos lados de um triângulo e traçar outros triângulos no seu interior, tornando-a uma figura que tende para o infinito. Veremos mais adiante, como determinar a sua dimensão.

Um outro fractal matemático famoso é a ***Curva de Koch***. Este fractal foi criado por Helge Von Koch (1870 – 1924) um matemático sueco. Na sua construção, pode-se seguir os seguintes passos:

1. Traça-se um segmento de reta e o divide em três partes iguais;

2. Constrói-se um triângulo equilátero, de medidas de lados igual as a medida das partes as quais formam dividido o segmento de reta. Este triângulo terá como base a parte do meio do segmento;

3. Omite-se o segmento que é a base do triangulo equilátero criado, deixando o segmento inicial dividido em três partes de mesmo tamanho;

4. Repete-se os procedimentos acima descritos para cada segmento restante, de forma infinita.

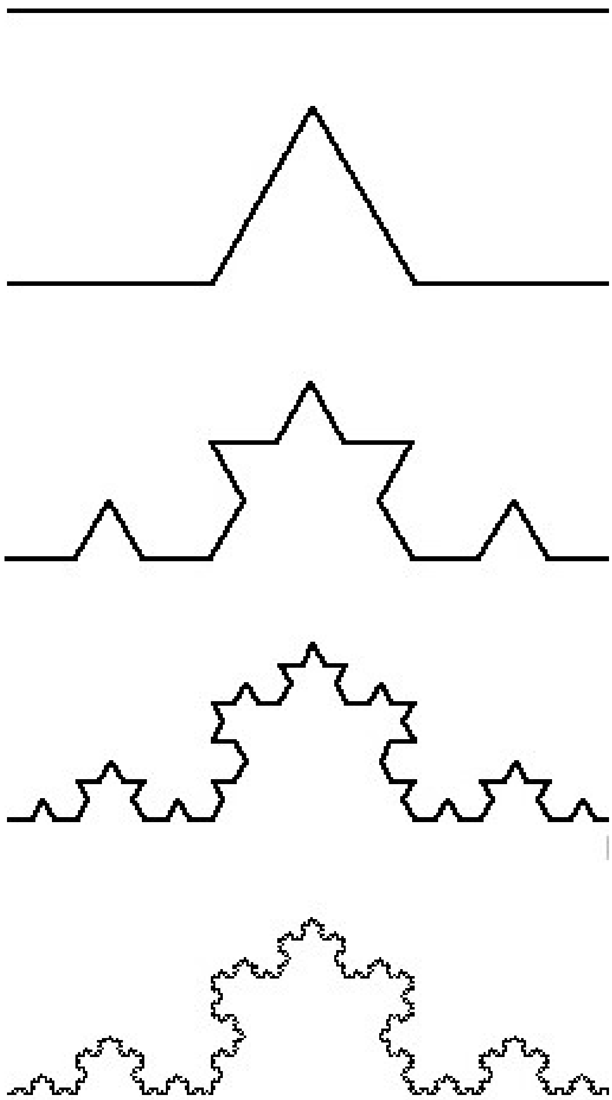
Dessa forma, obtemos a Curva de Koch (Figura 3.3) com as suas primeiras iterações.

Este fractal também pode ser construído com o auxílio do software *geogebra*.

Se, ao invés de tomarmos um segmento de reta como objeto de partida, considerarmos um triângulo equilátero e, a partir dos seus lados aplicarmos as etapas descritas acima na construção da Curva de Koch, teremos um outro fractal chamado de ***Floco de Neve***(Figura 3.4).

[2] O *Geogebra* é um software livre que através de uma interface simples proporciona ao seu usuário um contato com a geometria dinâmica e outras situações.

Figura 3.3: Curva de Koch



fonte:http://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-2.html

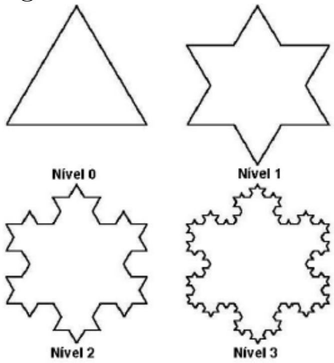
Por fim, apresentarei o ***Conjunto de Cantor***. Este fractal teve origem nos estudos do matemático russo George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. A principal área de estudo de Canto foi a Teoria dos Conjuntos, Números Cardinais Infinitos e Séries Trigonométricas. Desta forma, o fractal que leva o seu nome, por iterações, resultará num conjuntos de pontos associados aos conjuntos numéricos.

A obtenção deste fractal é bem parecida com ao Curva de Koch, vejamos:

1. Considera-se um conjunto no intervalo $I = \{0, 1\}$;

2. Divide-se esse intervalo em três subconjuntos de mesmo comprimento e retira-se a terça parte central;

Figura 3.4: Floco de Neve



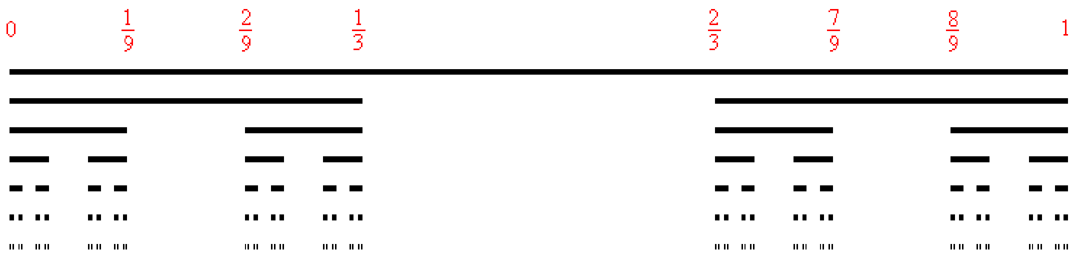
Fonte:http://gigamatematica.blogspot.com.br/2011/07/o-floco-de-neve-koch.html

3. Repete-se o a ação anterior para os dois um terços restantes de modo infinitamente;

4. Tendendo ao infinito, teremos um conjunto de números inumeráveis e infinitos.

A figura (3.5) a seguir mostra a sequência das iterações:

Figura 3.5: Conjunto de Cantor



Fonte:http://www.wikiwand.com/es/ConjuntodeCantor

3.3 Fractais Naturais

No item anterior, de modo breve, apresentamos três fractais matemáticos famosos. Existem outros fractais que são encontrados na natureza, os chamados ***Fractais Naturais***. Para a introdução da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica através da Geometria dos Fractais, o uso das fractais naturais podem favorecer o interesse dos estudantes pelo conteúdo.

O trabalho desenvolvido em sala de aula quando é associado ao contexto do estudante, pode contribuir com o processo de ensino aprendizagem da disciplina. Segundo as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio no estado da Bahia, na área de Matemática, uma das competências a ser desenvolvidas pelos estudantes é

> “Reconhecer que a Matemática e as outras áreas do conhecimento fazem parte da vida e que não existem, apenas, enquanto disciplinas isoladas.(BAHIA, 2015)”

Dessa forma, o trabalho que tem como base o cotidiano do estudante pode ser considerado como um gatilho para o conhecimento. Nesse sentido, o trabalho inicial com os fractais naturais se mostra como uma grande ferramenta pedagógica.

No livro “The Fractal Geometry of Nature”de Benoit Mandelbrot, ele cita a dura relação da natureza com o ensino da Geometria.

> “Por que a geometria é frequentemente descrita como “fria”e “ seca”? ”Uma razão reside na sua incapacidade de descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, do um litoral, ou de uma árvore. As nuvens não são esferas. Montanhas não são cones, as costas não são círculos e casca não é suave, nem o relâmpago viajar em linha reta. (MANDELBROT, 1982)”

Questões como essa o levou a analisar a natureza e perceber as propriedades contidas em algumas figuras. Ele acrescenta que “A existência desses padrões desafia a estudar as formas que Euclides deixou Como “sem forma”, para investigar o morfologia do “amorfo”.

Sendo assim, exponho a seguir alguns exemplos de fractais encontrados na natureza:

É possível notar que os galhos das árvores (Figura 3.6) mantem a propriedade de auto–similaridade. Basta fazer uma ampliação que perceberemos os sub–galhoss semelhantes aos anteriores. Como se trata de uma figura na natureza, essa propriedade não se aplicará no infinito.

Na Babosa, Planta nativa do norte da África (Figura 3.7), nota-se que o formato das folhas tendem para um espiral, mantendo o padrão inicial.

Figura 3.6: Árvore e seus galhos

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

Figura 3.7: Babosa

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

Na figura 3.8, temos uma imagem das "Estalactites", que são formações rochosas criadas nos tetos de grutas e cavernas. Em uma ampliação de parte dessa formação natura, podemos perceber as suas repetições.

Figura 3.8: Estalactites

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

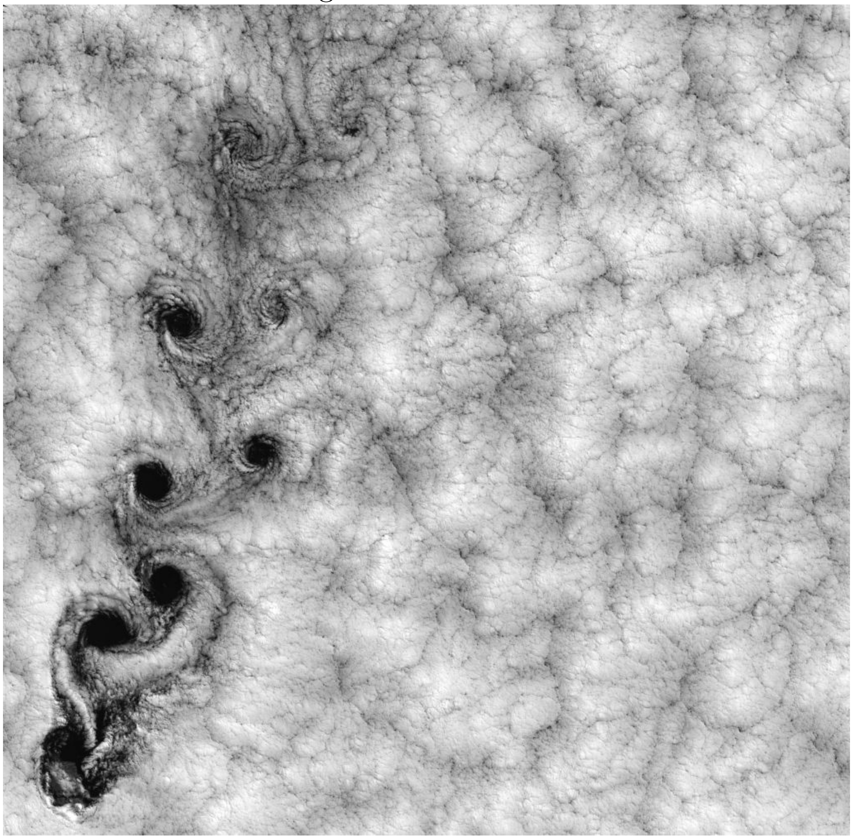
O leito do rio (Figura 3.9) lembra as ramificações dos galhos das árvores, lembrando sempre que, como se trata de formações na natureza, podemos ter vários padrões. Sendo facilmente encontrados padrões descritos com as propriedades dos fractais.

Figura 3.9: Leito do rio

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

Como buscamos a presença de fractais na natureza, um exemplo bem notório para os estudantes de qualquer segmento, são as núvens (Figura 3.10). Nela, fica clara a presença da auto–similaridade dos fractais e das dimensões não inteiras (no caso dimensão ente 2 e 3).

Figura 3.10: Nuvem



fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

As ideias do infinito e da auto–similaridade se mostram presentes na imagem do repolho (Figura 3.11). O formato de aspiral tendendo para um centro, apresenta essa ideia.

Figura 3.11: Repolho

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

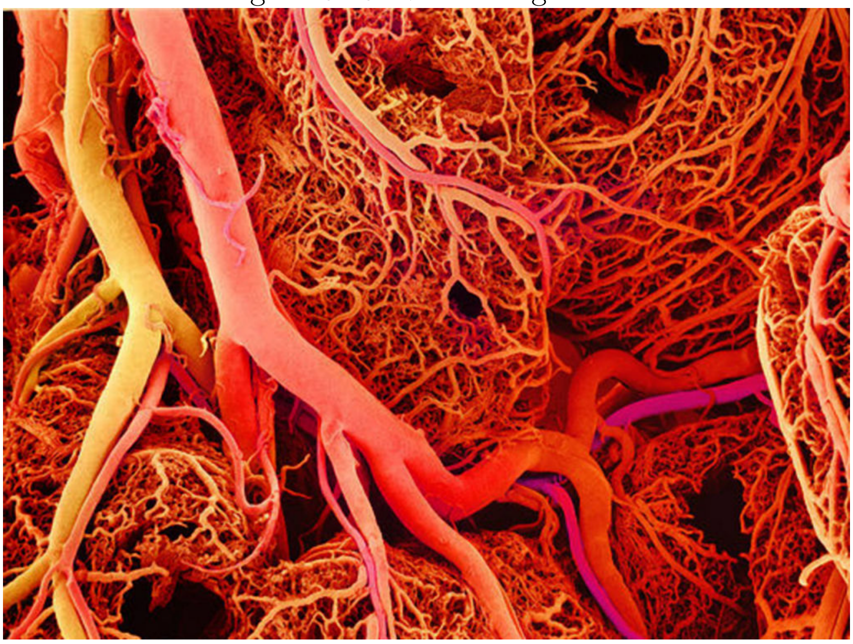
Do mesmo modo que a árvore citada acima, as folhas da planta samambaia (Figura 3.12) possuem o mesmo formato das partes que a formam. O que mostra a ideia da auto–similaridade.

Figura 3.12: Folha da samambaia

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

As ramificações e as bifucarções contidas nos emaranhados dos nossos vasos sanguíneos (3.13) além da ideia de infinitude, temos a auto–similaridade presente na situação.

Figura 3.13: Vasos sanguíneos



fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

Nas cachoeiras (Figura 3.14) é possível perceber em uma ampliação a auto–similaridade da imagem. Parece ainda que a água que jorra e as pedras que as sustentam, em uma ampliaçao quadro a quadro, que serão infinitas.

Figura 3.14: Cachoeira

fonte:http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380

Em cada uma dessas figuras selecionadas acima, é possível encontrar as propriedades contida na definição dos fractais. Uma característica marcante nos fractais e que, o difere significativamente das figuras da Geometria Euclidiana é o fato da sua dimensão não ser inteira. Veremos no próximo tópico o a definição e como determinar a dimensão de uma figura.

3.4 Dimensão Fractal

Como dito acima, uma das principais propriedades de um fractal é a sua dimensão, que diferentemente da dimensão na Geometria Euclidiana, que é sempre dada por um número inteiro, na Geometria Fractal, temos dimensões fracionárias. Neste tópico iremos trazer a definição de dimensão usada por Mandelbrot, definir a Dimensão Fractal e a Dimensão Topológica, e apresentar metodologias para o cálculo da dimensão fractal.

Segundo Mandelbrot (1982) algumas figuras possuem imperfeições, possuem rugosidades e é necessário determinar o grau dessa imperfeição. Ele afirma que o grau de irregularidade será chamada de dimensão fractal (ou Dimensão de Hausdorff).

Vimos no Capítulo 2, temos como base para o ensino da geometria na Educação Básica os Axiomas e Postulados de Euclides, que de acordo com a posição do objeto no espaço é dada a sua dimensão. Dessa forma, até o momento, só podemos visualizar objetos até a dimensão 3 (três). Sendo a dimensão 0 (zero) paro um ponto, a dimensão 1 (um) para um segmento, a dimensão 2 (dois) para uma área e, a dimensão 3 (três) para um volume de um sólido. Tais dimensões estão no Espaço Euclidiano, logo são conhecidas como ***Dimensão Euclidiana*** ou ***Dimensão Topológica***. Notem que temos apenas valores inteiros para o resultado da dimensão.

Em seu estudos Mandelbrot percebeu que algumas situações não estavam bem definidas no espaço euclidiano, o que fez com que fosse usados os estudos do matemático alemão Felix Hasudorff (1868 – 1942) no campo da topologia e do matemático russo Abram Besicovitch (1891 – 1970) que já trabalhava com dimensões não inteiras.

Dessa forma, Mandelbrot desenvolveu um modo para determinar a dimesão de um fractal, chamada de ***Dimensão Fractal*** ou ***Dimensão de Hausdorff–Besicovitch***.

Definição 3.4.1. *Seja um conjunto de pontos A num espaço de dimensão p. Recubra-se esses pontos com hiper-cubos de lado ϵ. Define-se a dimesão a dimensão de Hausdorff (também chamada de dimensão fractal) como*

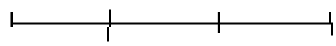
$$k = n^D \Leftrightarrow D = \frac{\ln(K)}{\ln(n)} \tag{3.1}$$

onde K é a quantidade de partes iguais que foi dividida a figura; n é o comprimento de cada pedaço em relação ao todo e D é a dimensão aproximada da figura.

Veremos agora alguns exemplos de aplicação da Equação de Hausdorrf:

Exemplo 3.4.1. *Usando a equação* (3.1) *calcularemos a dimensão do segmento (Figura 3.15) abaixo:*

Figura 3.15: Segmento de reta

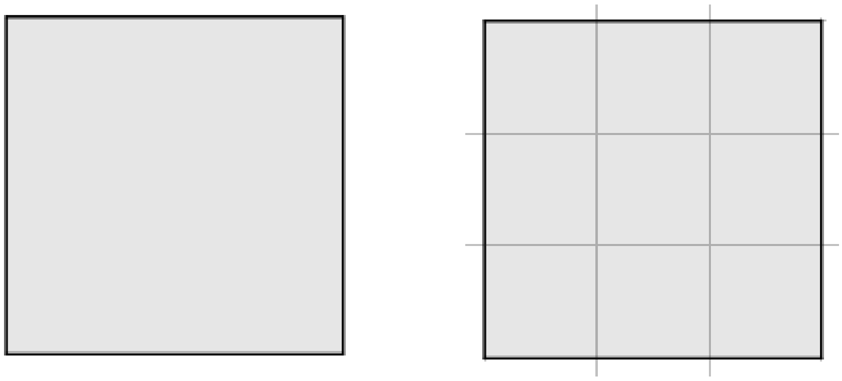


Como a figura foi dividida em três partes iguais, $K = 3$ e, como cada parte representa $\frac{1}{3}$ do total, temos que $n = 3$.

$$K = n^D \Rightarrow 3 = 3^D \Rightarrow D = 1$$

Exemplo 3.4.2. *Na figura 3.16 abaixo, temos um quadrado no qual o seu lado foi dividido em três partes iguais (1^a para 2^a iteração). Aplicando a equação* (3.1), *temos:*

Figura 3.16: Quadrado dividido em outros quadrados

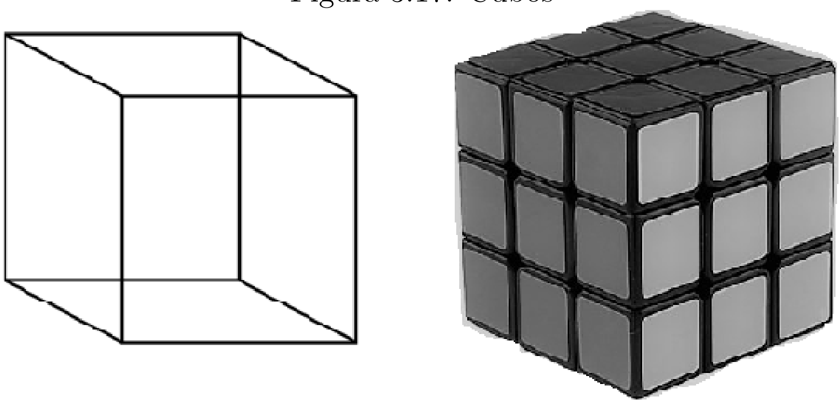


Como o quadrado inicial foi dividido em nove partes iguais, $K = 9$ *e, como cada quadrado menor equivale a* $\frac{1}{9}$ *do total cujo lado medem* $\frac{1}{3}$ *do quadrado inicial, temos que* $n = 3$*, daí*

$$K = n^D \Rightarrow 9 = 3^D \Rightarrow D = 2$$

Exemplo 3.4.3. *Observe os cubos (Figura 3.17) a seguir:*

Figura 3.17: Cubos



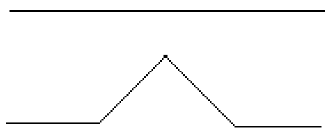
Como o cubo original foi dividido em 27 cubos iguais, temos que $K = 27$ *e, como cada cubo menor possui aresta equivale a* $\frac{1}{3}$ *da aresta do cubo original, temos que* $n = 3$*, daí*

$$K = n^D \Rightarrow 27 = 3^D \Rightarrow D = 3$$

Note que nesses três primeiros exemplos tinhamos, respectivamente, um segmento (Dimensão 1), um quadrado (Dimensão 2) e um cubo (Dimensão 3). Situações contidas na Geometria Euclidiana, na qual as dimensões são inteiras. Vejamos outros exemplos:

Exemplo 3.4.4. *Usando a relação* (3.1) *calcularemos a dimensão do segmento abaixo(Figura 3.18):*

Figura 3.18: Curva de Koch

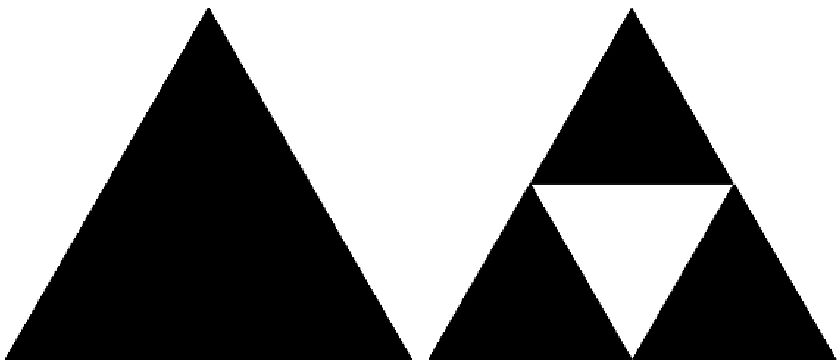


Como a figura da primeira iteração para a segunda iteração foi dividida em quatro partes iguais, $K = 4$ *e, como cada parte representa* $\frac{1}{3}$ *da figura anterior, temos que* $n = 3$.

$$K = n^D \Rightarrow 4 = 3^D \Rightarrow D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26...$$

Exemplo 3.4.5. *Temos agora a seqência da 1ª pra 2ª iteração do Triângulo de Sierpinski (Figura 3.19).*

Figura 3.19: Triângulo de Sierpinski



Notamos que do triângulo inicial para a segunda figura, na qual foi retirado um triângulo na parte central, temos que passamos a ter 3 triângulos, daí $K = 3$. *Aém disso, o lado dos triângulos menores equivale a* $\frac{1}{2}$ *do lado do triângulo inicial, o que nos indica que* $n = 2$. *Aplicando a equação* (3.1)*, temos que:*

$$K = n^D \Rightarrow 3 = 2^D \Rightarrow D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58...$$

Nesses esses dois últimos exemplos, temos que a dimensão determinada equação (3.1) resultou em um número fracionário. Essa dimensão fracionária é uma das propriedades dos fractais e o graus de deformidade da figura é medida de acordo com esses resultados. Por exemplo, tendo como resultado $D = 1,58...$ a figura em questão está mais próxima da dimensão 2.

Capítulo 4

Sequência Didática dos Fractais – SDF

Para que tenhamos um bom resultado na introdução da Geometria Não Euclidiana (G.N.E.) na Educação Básica, em específico, no Ensino Médio, propomos uma sequência didática, que segundo alguns autores que veremos a seguir, contribui significativamente para o processo de ensino–aprendizagem. Nesse sentido, a sequência didática que apresentaremos, além de utilizar recursos usuais de sala de aula (quadro, pincel, caderno), trará o uso de recursos computacionais para que os estudantes possam interagir com o conteúdo, uma vez que esses sujeitos estão em contato com diversos tipos de tecnologias no seu cotidiano. Os PCN's destaca que

> "O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. (BRASIL, 1977)"

Sendo assim, uma atividade a ser aplicada em sala de aula que dispõe no seu desenvolvimento recursos que favorecem a aprendizagem, certamente será mais aceita pelos estudantes, haja vista a habilidade que os mesmos demostram no manuseio com a tecnologia.

Como o presente trabalho foi aplicado em uma turma de estudantes do estado da Bahia e, além disso, como embasamento teórico, cito um dos refenrenciais utilizado para a capacitação de professores no estado da Bahia com o título de "BAHIA, Brasil– vida natureza e sociedade", sugere que uma sequência didática possua as seguintes caracteriísticas (ANDRADE e SENNA, 2014):

1. **Explorar o conceito**–Nessa etapa o professor poderá fazer uma sondagem em relação ao conhecimento dos estudantes sobre o tema a ser abordado;

2. **Investigar o conceito**–Nessa investigação o estudante poderá formular hipóteses sobre o tema proposto e fazer alguns registros;

3. **Solucionar problemas**–Nessa etapa os estudantes irão responder as questões levantadas na etapa anterior, registrar e analisar os resultados;

4. **Avaliar**–Neste último momento, o estudante é levado a verificar as principais contribuições do tema estudado para o seu dia a dia e como aprofundar tal conhecimento.

Nesse sentido, sequência didática proposta neste trabalho, consiste em aplicar os fractais como elemento motivador para a introdução da Geometria Não Euclidiana no ensino Médio. Busca-se com esta sequência didática o aprimoramento de tempo em sala de aula e uma maior aquisição do conhecimento pelos estudantes sobre o tema. O que é reforçado, na fala de PESSOA, quando ele diz que

> "A sequência didática é uma forma de organização do trabalho pedagógico que permite antecipar o que será enfocado em um espaço de tempo que é variável em função do que os alunos precisam aprender, da mediação e do constante monitoramento que o professor faz para acompanhar os alunos, por meio de atividades de avaliação durante e ao final da sequência didática. (PESSOA, UFPE)."

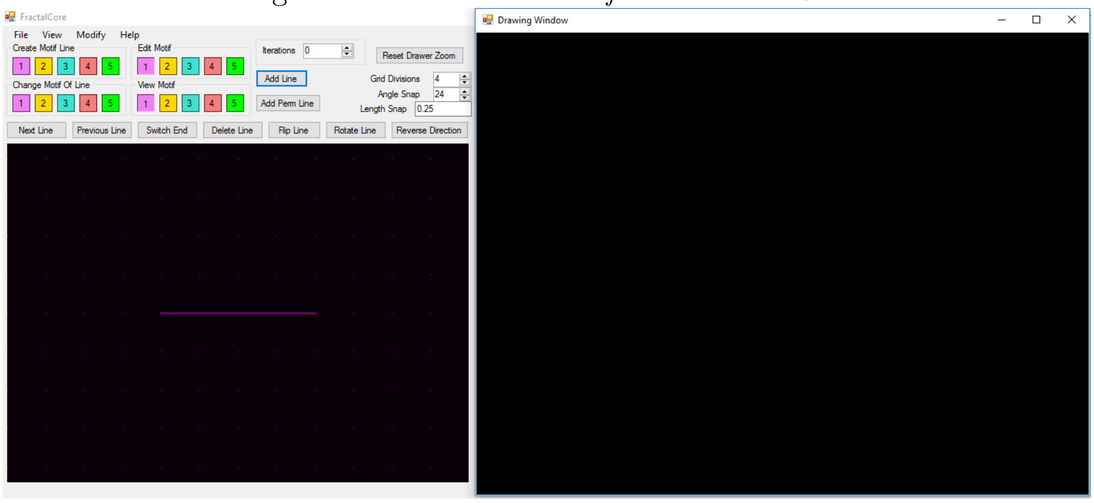
Utilizando da literatura, onde já existem softwares livres que realizam construções de fractais, medições de dimensões e de coeficientes que caracterizam o tipo de fractal, identificamos dois softwares para o desenvolvimento deste estudo: o ***FractalCore*** e o ***Dood.al***. O primeiro possui um banco de fractais bem definidos e conhecidos mundialmente, onde as alterações de iterações proporcionam a análise numérica das dimensões e da auto similaridade, conceitos fundamentais e de difícil relação ensino-aprendizagem para os discentes de níveis iniciais da Geometria Não Euclidiana. O segundo software possui uma característica qualitativa e intuitiva na formação das imagens, trazendo fractais com o enriquecimento de cores e estruturas de fácil utilização, ampliando a interface e a usabilidade dos estudantes de modo motivacional as estudo da Geometria Não Euclidiana, tornando-a prazerosa e investigativa. Contudo, o manuseio destes, requere algumas informações e configurações iniciais de suas ferramentas.

O aplicativo ***FractalCore*** [1] (Figura 4.1) é um software livre e será utilizado nesse estudo com o objetivo de ilustrar o cálculo da *Dimensão de Hausdorff*. O FractalCore

[1] O software FractalCore está disponível para o download no link https://drive.google.com/file/d/0B0MsZI1Rlum VdS12aWhRa2F1RW8/view.

permite que, a partir de um banco de dados com alguns fractais pré-formatados, possamos fazer as iterações que desejarmos, observar as propriedades que caracterizam os fractais. Além disso, o software que o usuário faça algumas alterações nas cores das figuras geradas.

Figura 4.1: Interface do *software FractalCore*



Ao acessar o aplicativo, o usuário terá duas janelas, uma para as configurações e outra para visualização dos fractais gerados. Em seguida, na janela de configuração, o usuário deverá entrar no item “File”da barra de ferramenta e selecionar “Load”para abrir a pasta na qual se encontram os fractais pré-montados. Após escolher o fractal desejado, o usuário poderá fazer as iterações que desejar no ícone “Iterations”. Dessa forma, o usuário terá, na janela de visualização, a figura criada com as iterações que efetuar.

Já o segundo aplicativo, usado como recurso computacional nesse trabalho, é o software chamado ***Doodal*** [2] (Figura 4.2), com créditos para V1. 2b (July, 2014) – dool.al, produzido por Neil Thapen. Do mesmo modo que o primeiro, é um software livre, só que está disponível no modo online. Através de uma interface amigável, permite ao usuário que gere fractais a partir de outras figuras e suas iterações.

[2] O software Doodal está disponível no endereço http://dood.al/

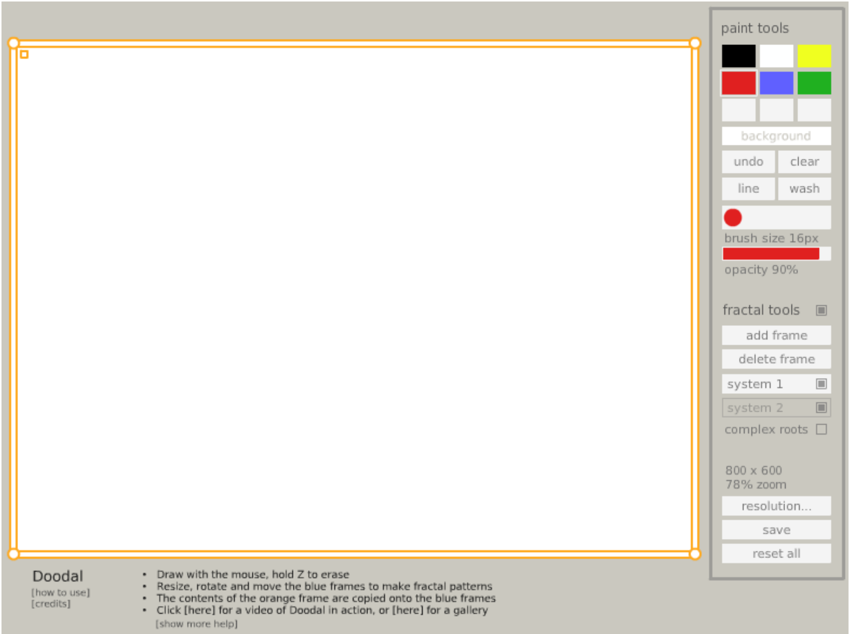


Figura 4.2: Interface do *Software Doodal*

As ferramentas do *Doodal* permitem que o usuário determine a quantidade de iterações, clicando no botão "*add frame*"; faça as manipulações que ele desejar, movendo as caixas; altere a resolução da imagem, na ferramenta "*resolution*"; configure as cores do seu fractal, nos botões "*paint tools*".

Após a escolha desses dois recursos computacionais que visam criar um ambiente de interação com os estudantes, cada um deles com o seu objetivo nesta aplicação, apresentaremos como foi organizada e aplicada a sequência didática em uma turma do Ensino Médio, que tinha como objetivo principal a introdução das Geometrias Não Euclidianas no ensino Médio, com o enfoque na Geometria dos Fractais.

4.1 A aplicação da sequência didática

A atividade foi desenvolvida no Centro Estadual de Educação Profissional em Controle e Gestão do Nordeste Baiano Pedro Ribeiro Pessoa, na cidade de Catu (Figura 4.3). A turma selecionada para a aplicação da sequência didática foi a do 2º ano do curso Técnico em Meio ambiente, composta por 18 estudantes. A turma foi informada uma semana antes da aplicação da atividade, quais eram os seus objetivos e qual seria o tema da aula, ficando acertado que a aula seria no dia 20 de fevereiro de 2017, no turno da manhã, com previsão para 4 aulas (50 minutos cada aula).

Como **objetivo geral**, esta sequência didática espera que o estudante possa entender a Geometria Não euclidiana através do estudo da Geometria dos Fractais como elemento motivador.

Figura 4.3: CEEP–Pedro Ribeiro Pessoa/Catu

Fonte:http://escolas.educacao.ba.gov.br/node/12291

Como **objetivos específicos**, a atividade aplicada pretende que os envolvidos possam:

- Perceber que algumas situações do cotidiano não podem ser explicadas pela geometria "tradicional";
- Definir a Geometria Euclidiana, apresentando alguns de seus axiomas e os cinco postulados;
- Introduzir as Geometrias Não Euclidianas, ressaltando as situações em que os Postulados de Euclides não se aplicam;
- Apresentar a Geometria dos Fractais, expondo alguns fractais famosos e alguns fractais naturais, com as suas respectivas propriedades;
- Utilizar o *software "FractalCore"* para determinar as dimensões de alguns fractais;
- Utilizar o *software "Doodal"* para a construção de alguns e discursão dos mesmos;
- Analisar a aprendizagem dos estudantes pós realização da Sequência Didática e suas contribuições no estudo da Geometria Não Euclidiana.

Na aplicação da Sequência Didática, teremos o seguinte caminho metodológico: iniciaremos a aula com uma motivação que mostrará, através de uma situação problema, as dimensões inteiras da Geometria Euclidiana e perceber que nem toda figura poderá ser expressa por uma dimensão será inteira; Como os estudantes não conhecem a história de Euclides de Alexandria, de modo sucinto, faremos uma abordagem histórica de sua vida, enfatizando os seus livros da coleção"Os Elementos"quanto às questões dos seus postulados; em seguida, mostraremos a existência de algumas geometrias não euclidianas como a Esférica, a do Táxi e a Fractal, especificando o ponto em que os postulados de Euclides não convém; após isso, traremos os aspectos históricos e conceituais acerca da Geometria dos Fractais, mostrando alguns fractais famosos e fractais naturais e, exemplificaremos como calcular a dimensão de Hausdorff de uma figura; Como atividade prática, usaremos o *software FractalCore* para calcular a dimensão de alguns fractais e o *software Dood.al* para a construção de alguns fractais livres; por fim, abriremos o espaço para discussões sobre o tema trabalhado na aula.

Como **recursos didático**, tremos a utilização de quadro, caneta pincel, apagador, calculadoras, projetor, vídeos tutoriais dos softwares, computadores com internet e softwares Doodal e FractalCore.

Em relação à **avaliação** da atividade, ela será verificada durante o processo de aplicação da atividade e nos momentos em que os alunos fizerem as suas comtribuições. Além disso, após a aula os estudantes responderão um questionário sobre a aprendizagem do tema.

Capítulo 5

Resultados e Consideraçoes Finais

Neste último capítulo do nosso trabalho, faremos uma exposição e análise da sequência didática aplicada em sala de aula, mostrando as intervenções e dificuldades em sua aplicação. Além disso, numa visão mais ampla, faremos as considerações finais do nosso estudo, apresentando as perspectivas futuras referentes a esse trabalho.

5.1 Resultados

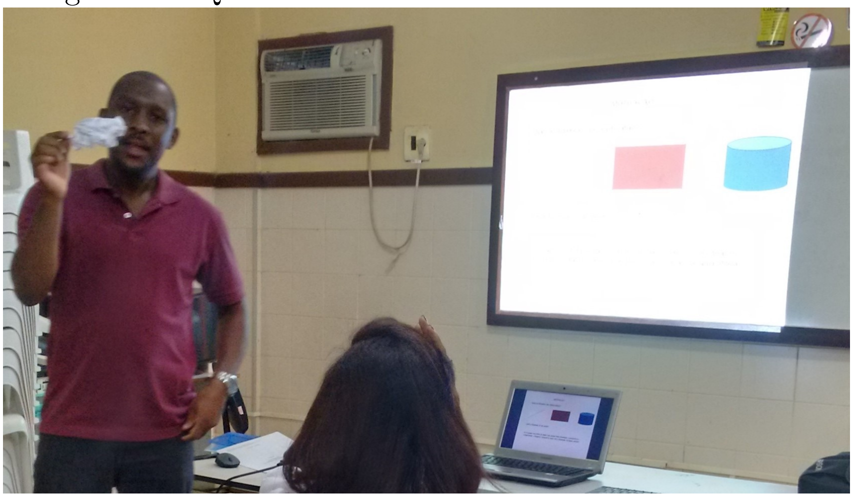
A aplicação da sequência didática (Figura 5.1) seguiu a metodologia estabelecida no Capítulo 4 deste trabalho. Como a turma foi avisada antes da realização de uma aula com o tema “Fractais”alguns estudantes se anteciparam à aplicação e fizeram uma pesquisa sobre o tema. Uma vez que a turma foi do curso técnico de Meio Ambiente, alguns estudantes ao perceberem a presença dos fractais na natureza e a beleza em suas formas, aumentaram o interesse e a expectativa pela aula.

Figura 5.1: Introdução da aula

A parte inicial da aula correu naturalmente posto que estávamos em uma turma do 2º ano do Ensino Médio e, grande parte dos estudantes, já dominavam as noções da geometria, como questões tipo, por exemplo, uma folha de papel ofício possui duas dimensões (comprimento e largura). As noções de uma, duas e três dimensões eles tinham bem desenvolvido. Apenas não sabiam que tais conceitos levantados faziam parte da Geometria Euclidiana. Na verdade, eles nunca tinham escutado falar do matemático Euclides de Alexandria. Em relação a apresentação dos Postulados de Euclides, a turma teve uma boa compreensão a partir dos exemplos expostos de cada um dos cinco postulados em questão.

Na situação em que foi amassada uma folha de papel ofício (Figura 5.2) e questionados aos estudantes sobre a nova dimensão da folha de papel amassada, obtivemos respostas no mínimo curiosas. Como por exemplo, "a folha passou a ter dimensão zero", "a folha estará em outra dimensão"ou ainda, "a folha terá dimensão infinita". Agora, eles responderam afirmativamente, quando questionados se a nova dimensão da folha de papel amassada seria maior que 1 (um) e menor que 2 (dois). Dessa forma, os estudantes puderam inferir que a nova dimensão da folha amassada seria um número decimal.

Figura 5.2: Qual a dimensão da folha de ofício amassada?



Ao introduzir as Geometrias Não Euclidianas, com algumas negações dos Postulados de Euclides e exemplos da Geometria Esférica e da Geometria do Taxí, os estudantes perceberam as possibilidades e percepções diferentes que eles poderiam introduzir nos seus estudos.

Com a Geometria dos Fractais, fizemos uma breve abordagem histórica, falando do seu criador Benoit Mandelbrot e, foi discutido as propriedades dos fractais, a auto similaridade, a infinitude e a dimensão fracionária. As duas primeiras propriedades, os estudantes conseguiram perceber facilmente ao observar alguns fractais famosos e alguns fractais naturais (Figura 5.3). A dificuldade foi trabalhar com dimensão não inteira. A relação de Hausdorff (Figura 5.4) foi apresentada e, ao perceberem a presença dos logaritmos, alguns estudantes tiveram algum receio. Ao notarem que, após a identificação das variáveis, poderiam utilizar a máquina de calcular para determinar o expoente (logaritmo), a aula ficou mais tranquila.

Figura 5.3: Fractais Naturais

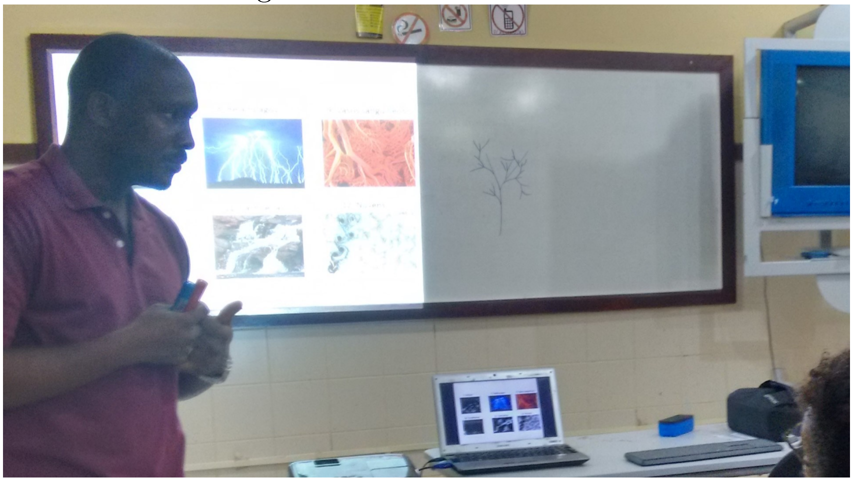
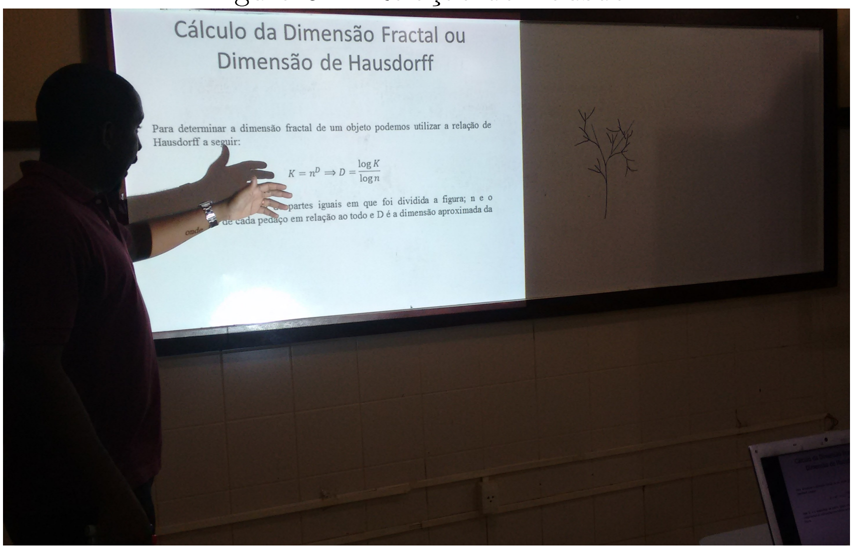


Figura 5.4: Relação de Hausdorff



Como a parte prática desta aula era determinar a dimensão aproximada de alguns fractais e, de modo dinâmico, construir alguns fractais, ao usarmos os softwares para esses fins, os estudantes puderam perceber como as iterações nas imagens geravam os fractais. A seguir, mostraremos alguns momentos dessas construções.

Nas imagens a seguir, usamos o software FractalCore para calcular o valor aproximado de algumas figuras. Na Figura 5.5 temos apenas um segmento (iteração 0). Já na Figura 5.6 após a primeira iteração percebemos a deformação da imagem e foi calculada a dimensão. Já na Figura 5.7, fazendo várias iterações, podemos perceber as propriedades da infinitude e a auto similaridade.

Figura 5.5: FractalCore – Iteração 0

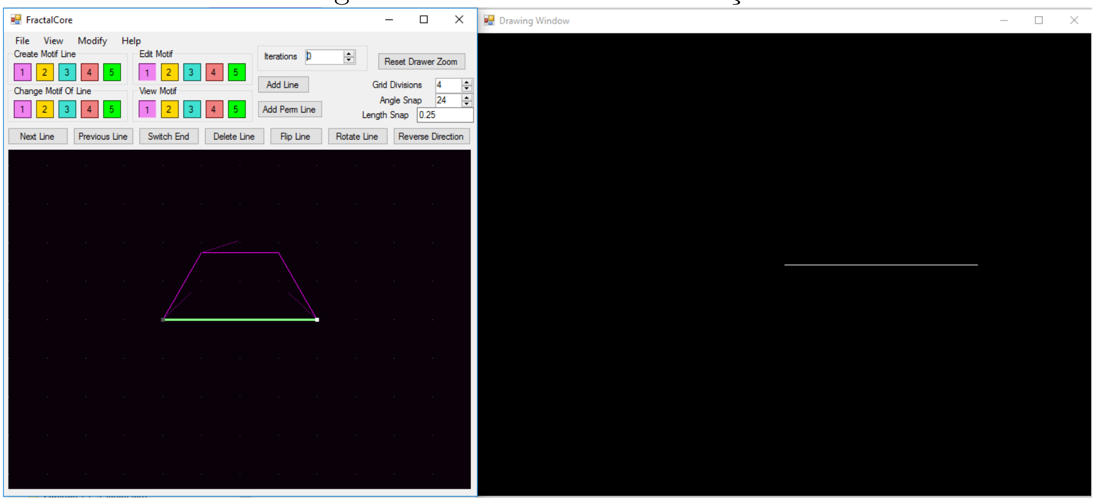


Figura 5.6: FractalCore – Iteração 1

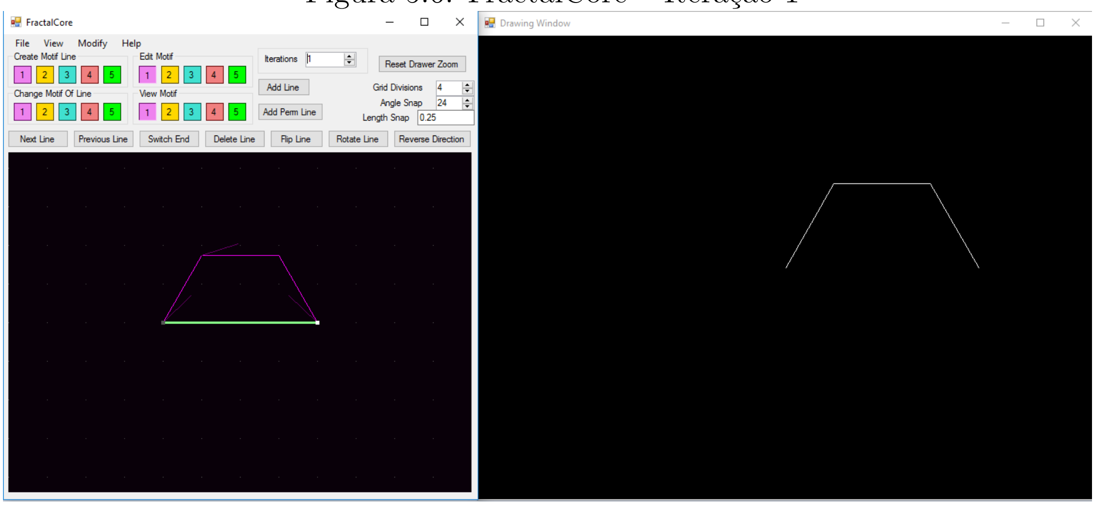


Figura 5.7: FractalCore – Várias iterações

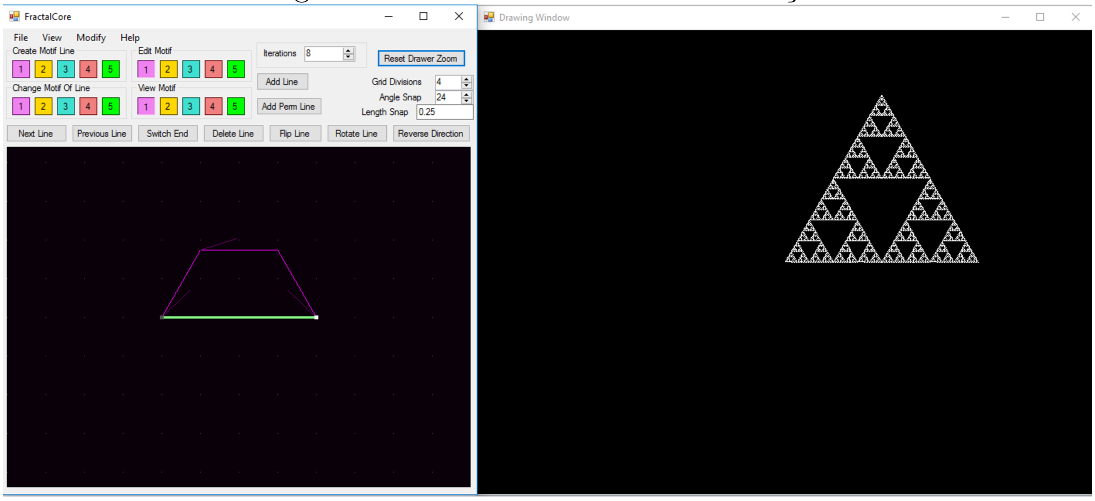
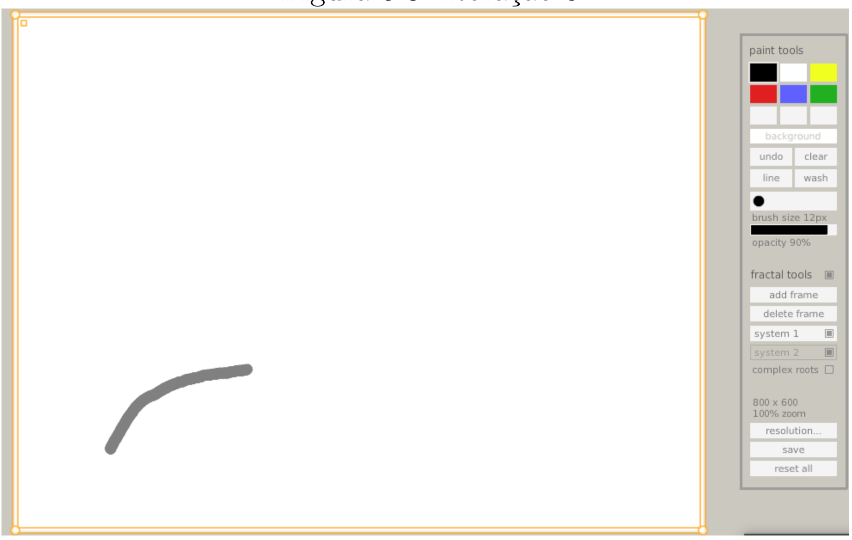


Figura 5.8: Iteração 0



Para construir alguns fractais, usamos o software online Dood.al. O objetivo destas últimas construções foi perceber os efeitos das iterações nas figuras e, de modo lúdico, “brincar”com os fractais. Nessa etapa, como os estudantes possuem muita imaginação e criatividade, uasaram grande parte do tempo construido os fractais e fazendo perguntas sobre os nomes das figuras obtidas.

Figura 5.9: Iteração 1

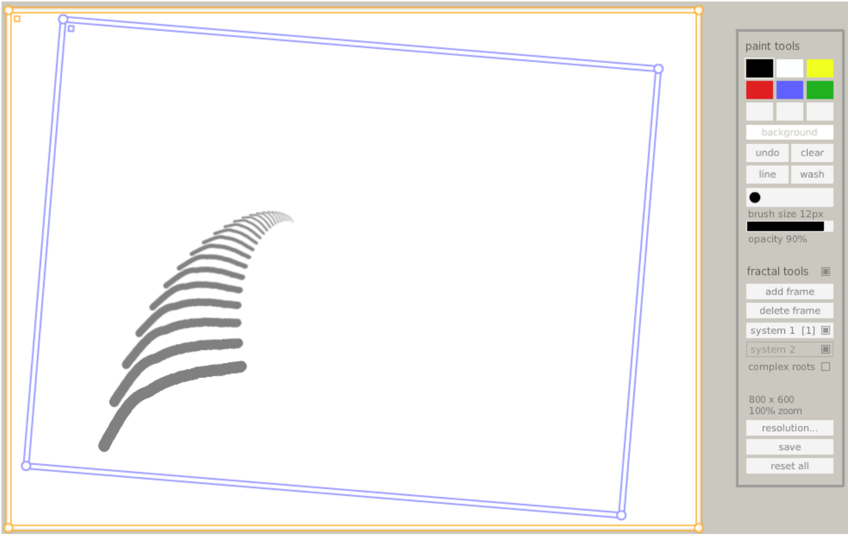
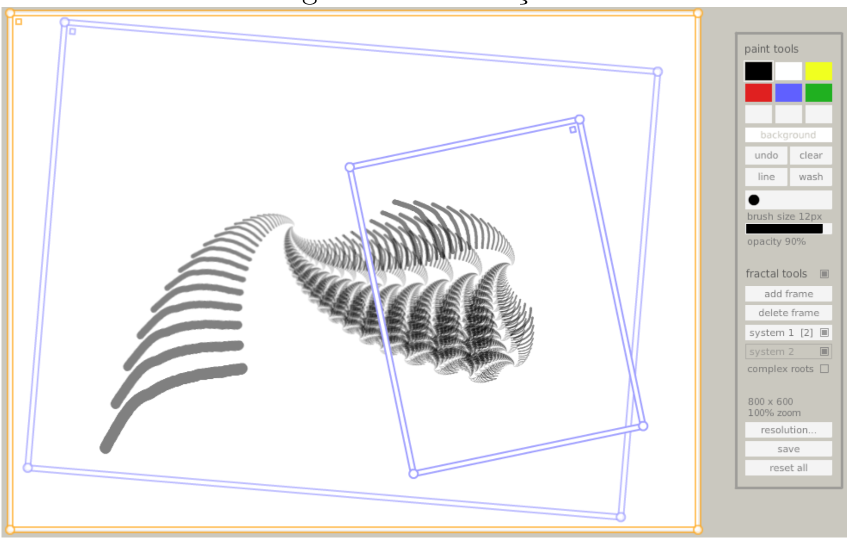


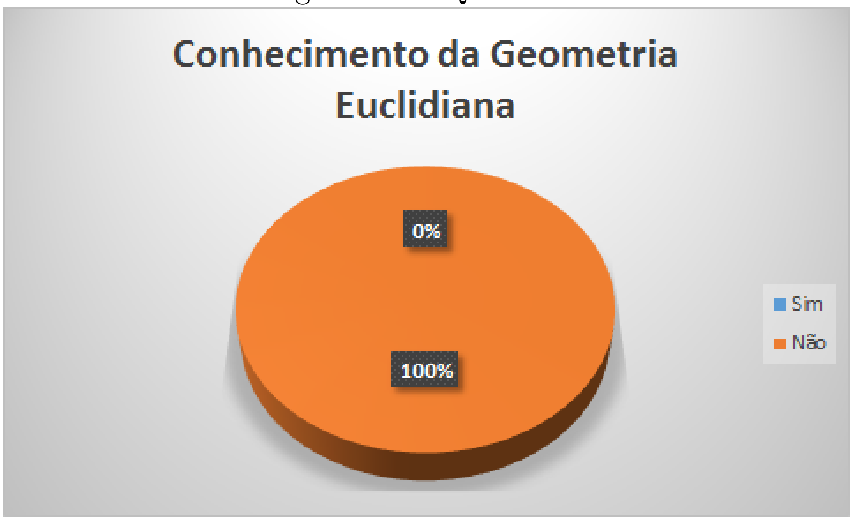
Figura 5.10: Iteração 2



Na aplicação do questionário (Apêndice B) sobre a aprendizagem do estudo dos fractais na Sequncia Didática, foram perguntados alguns itens relacionados aos conhecimentos prévios e aos conhecimento adquiridos neste estudo, vejamos as perguntas com as suas respectivas respostas:

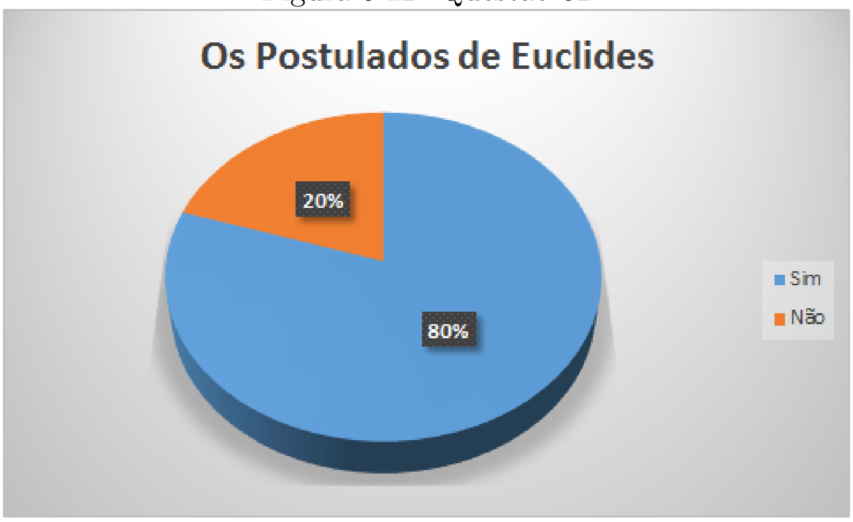
QUESTÃO 1: A geometria que você aprendeu desde o Ensino fundamental até o seu Ensino Médio, é chamada de Geometria Euclidiana. Você tinha conhecimento desse fato?

Figura 5.11: Questão 01



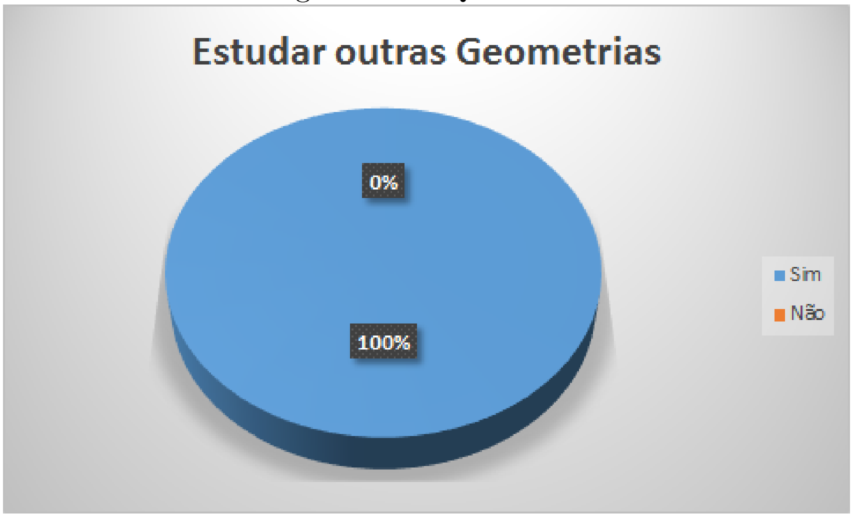
QUESTÃO 2: Durante esta aula, você compreendeu os Postulados de Euclides, nos quais está fundamentada a Geometria Euclidiana?

Figura 5.12: Questão 02



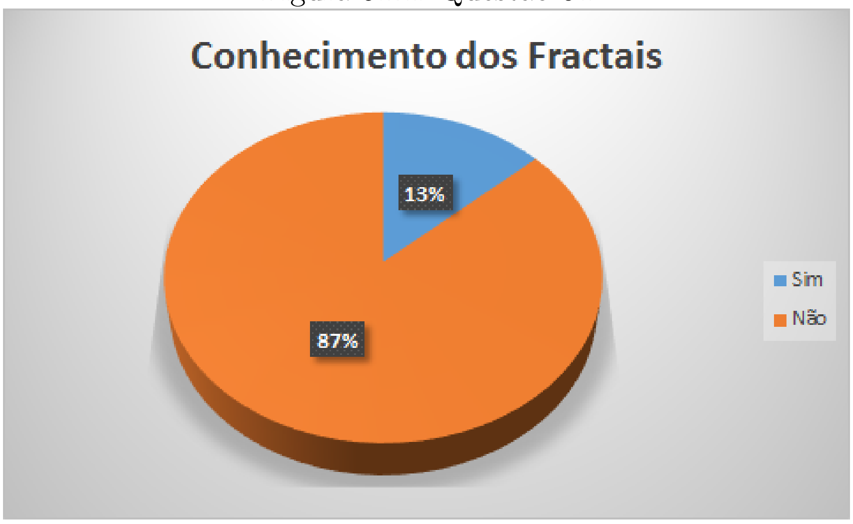
QUESTÃO 3: Você considera importante estudar outras geometrias além da Geometria Euclidiana?

Figura 5.13: Questão 03



QUESTÃO 4: Em relação aos fractais, você já conhecia esse tema?

Figura 5.14: Questão 04

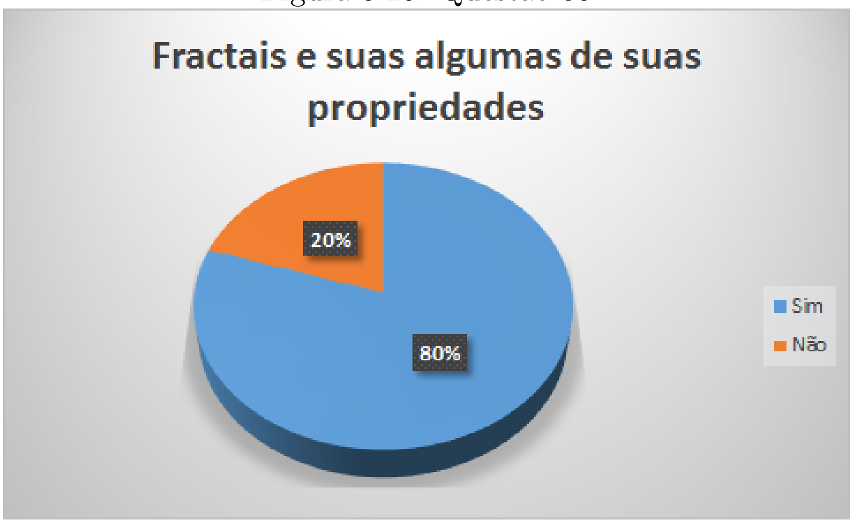


QUESTÃO 5: No seu cotidiano, você encontra figuras que lembram os fractais?

Figura 5.15: Questão 05

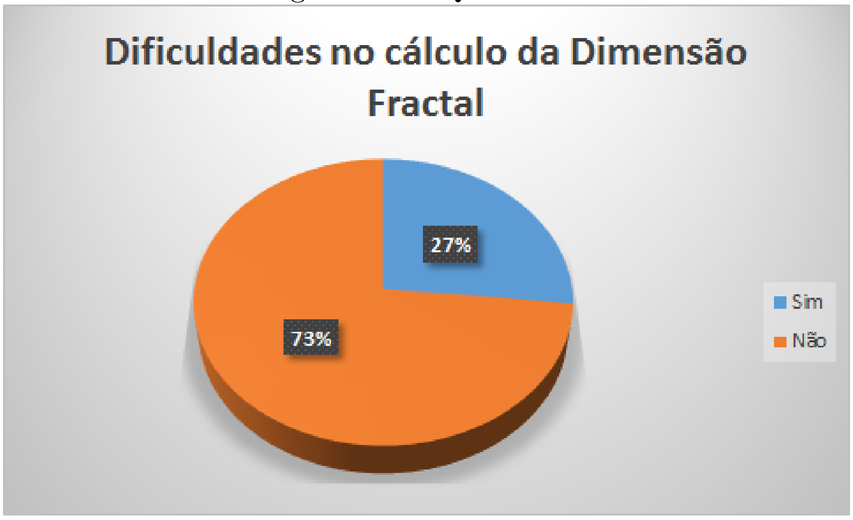
QUESTÃO 6: Você compreendeu o que são os fractais, com as suas principais propriedades?

Figura 5.16: Questão 06



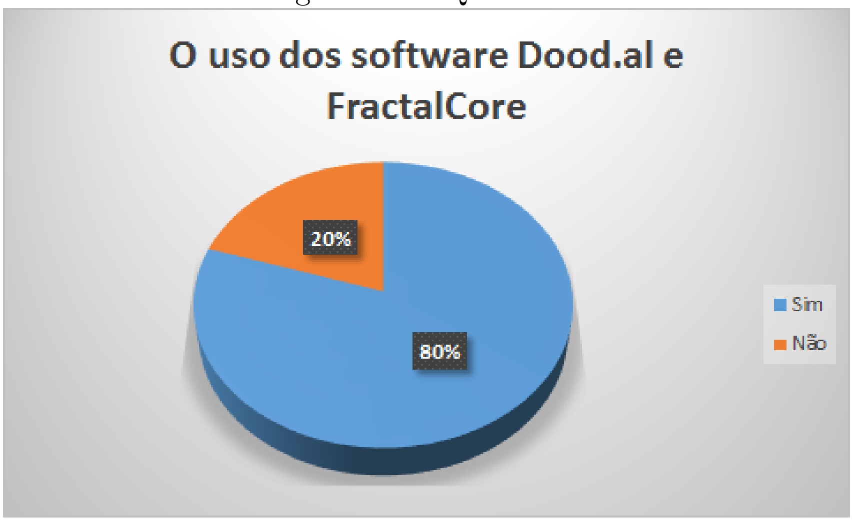
QUESTÃO 7: Você teve dificuldade em efetuar o cálculo aproximado para determinar a Dimensão Fractal das figuras apresentadas?

Figura 5.17: Questão 07



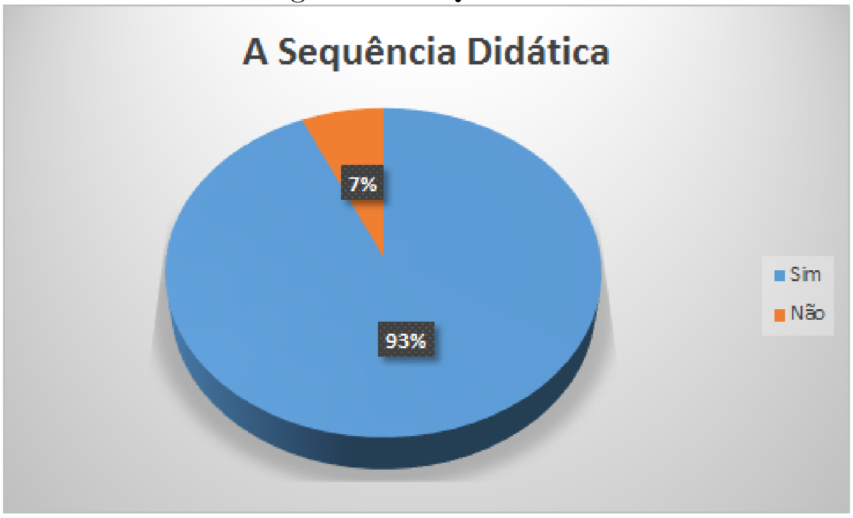
QUESTÃO 8: Na utilização dos softwares (Dood.al e FractalCore) para a construção de fractais, você conseguiu perceber as principais propriedades dos fractais?

Figura 5.18: Questão 08



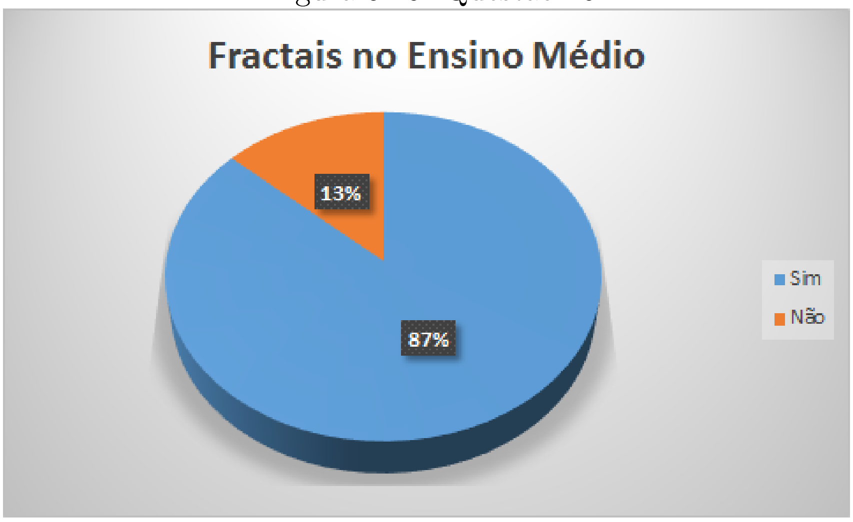
QUESTÃO 9: A sequência das informações apresentadas, foram suficientes para que você tivesse um bom aproveitamento dessa aula?

Figura 5.19: Questão 09



QUESTÃO 10: Você considera que a Geometria Não Euclidiana deveria ser trabalhada no Ensino Médio?

Figura 5.20: Questão 10



Além de questões como as citadas acima, foi feita a seguinte pergunta de opinião, aos estudantes: "Em sua opinião, o desenvolvimento do conteúdo da Geometria Fractal como motivador para a introdução da Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio possui quais vantagens e desvantagens?". Reproduzirem duas das respostas dos estudantes:

- "As vantagens é que o assunto é bem interessante e traz coisas do nosso cotidiano. a desvantagem foi que o computador, nessa aula, não tinhamos um computador para cada aluno."
- "Na minha opinião a Geometria dos Fractais deveria ser estudada porque ela discorda e prova que a Geometria Euclidiana não está totalmente correta."

5.2 Considerações Finais

No desenvolvimento deste trabalho, de um modo geral, buscamos determinar um outro modo de se conceber o ensino da geometria na Educação Básica. Nesse sentido, abordamos conteúdos que embasaram a nossa pesquisa que tem como objetivo a introdução da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica.

Percebemos inicialmente que documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e as Orientações Curriculares para a Educação Básica do estado da Bahia, quanto ao ensino da geometria, sugerem apenas que sejam trabalhados conteúdos com base na Geometria Euclidiana. Por outro lado, as Diretrizes Curriculares do estado do Paraná, indicam que podem ser trabalhadas as Geometria euclidiana e as Não Euclidianas na Educação Básica, dando um maior enfoque no ensino Médio.

No capítulo 2, vimos a importância em se ter como base a Geometria Euclidiana para o trabalho nas escola. Mesmo assim, notamos que é possível a implementação de um método para que as geometrias não euclidianas tenham o seu espaço na sala de aula e, por que não, nos livros didáticos. Uma vez que se discuta com os estudantes os cinco Postulados de Euclides e mostre onde existem as falhas, os alunos terão uma base sólida para ingressar os estudos em questão.

Dentre as Geometrias Não Euclidianas mencionadas neste estudo, a escola de se trabalhar com a Geometria dos Fractais se deu pela natureza das suas características, principalmente para desmitificar a ideia das dimensões inteiras. Além disso, as belas figuras criadas a partir dos fractais podem motivar os estudantes a buscarem as explicações de tais figuras, contribuindo para a sua inserção na Educação Básica.

Cientes que a teoria da Geometria dos Fractais é muito ampla e que este nosso estudo visava uma aplicação a nível da Educação Básica e, não a parte complexa da matemática dos fractais, sugerimos alguns tópicos para o aprofundamento desse tema:

- Teoria do Caos
- Sistemas Dinâmicos
- Variabilidde Pluviométrica
- Econofísica

Por fim, com a aplicação da sequência didática em sala de aula, através do uso de software para dinamizar a aula, podemos perceber que os estudantes envolvidos no trabalho, notaram a importância deste conteúdo que mostra que nem todas as formas possuem dimensões inteiras. Além disso, com o uso dos *softwares* poderam ser criadas belas figuras e, como a aplicação da aula foi em uma turma do curso Técnico em Meio ambiente, o fato de poder encontrar na natureza figuras denomiadas de fractais, encantaram os estudantes. Os resultados do questionário de aprendizafem na pós sequência didática, evidenciaram o interesse dos estudantes pelos temas trabalhados e a possibilidade de se inserir as Geometrias Não Euclidianas, por via da Geometria dos Fractais nas escolas de Ensino Médio do estado da Bahia.

Nesse sentido, este trabalho sugere ao professor de Matemática um modo de se trabalhar outras geometrias em sala de aula, potencializando o conhecimentos dos seus estudantes.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, Julia Pinheiro e SENNA, Célia Maria Piva Cabral. BAHIA, Brasil: Vida, Natureza e Sociedade. Livro do Professor. Geodinâmica, São Paulo, 2014.

[2] BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. Orientações Curriculares Para o Ensino Médio: Matemática. Salvador: SEC-BA, 2015.

[3] BICUDO, Irineu. Globo Ciências (Entrevista) Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/historia-da-geometria-euclidiana-do-antigo-egito-salas-de-aula.html>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2017.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 1998.

[5] ______, Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino Médio. "Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias."Brasília: MEC/SEB, 2006.

[6] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria analítica. Coleção Profmat, 2013.

[7] DOCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, Geometria Plana. ISBN 85-7056-268-3. São Paulo: Atual, 2001.

[8] FIEDLER-FERRARA, Nelson; DO PRADO, CP Cintra. Caos: uma introdução. Edgar Blucher, São Paulo, 1995.

[9] MANDELBROT, Benoit B. The fractal geometry of nature. New York, 1982.

[10] MANFIO, Fernando. "Fundamentos da Geometria."ICMC – USP. Disponível em: <http://www. icmc. usp. br/pessoas/manfio/Fundamentos. pdf.>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2017.

[11] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. "Geometria."Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.

[12] PARANÁ. Secretaria de Educação do Estado. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. Curitiba: SEED/DEPG, 2008.

[13] PESSOA, Ana Cláudia Gonçalves. Sequência Didática. UFPE – CEEL. Disponível em: < http://ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/sequencia-didatica >. Acesso em: 2 de março de 2017.

[14] PROFMAT. Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – 2016. SBM. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/files/Regimento-Profmat-2016.pdf>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2017.

[15] SANTANA, Anderson Marcolino de, e SÁ, Luciene Antunes Correia Marques de. "Abordagem Histórica de Teoria dos Fractais na Generalização Cartográfica." VI Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife – PE, 2016

[16] SIQUEIRA, Rodrigo. Janelas para o Infinito: Exposião de Fractais. Disponível em: <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>. Acesso em: 7 de Fevereiro de 2017.

[17] SOCZEK, Daniel e HORN, Geraldo Balduíno. Produção Didático-Pedagógica. "Secretaria de Educação–SEED. Universidade Federal do Paraná–UFP, 2012.

Apêndice A

Slides da Sequênca Didática aplicada

Figura A.1: Slide 1

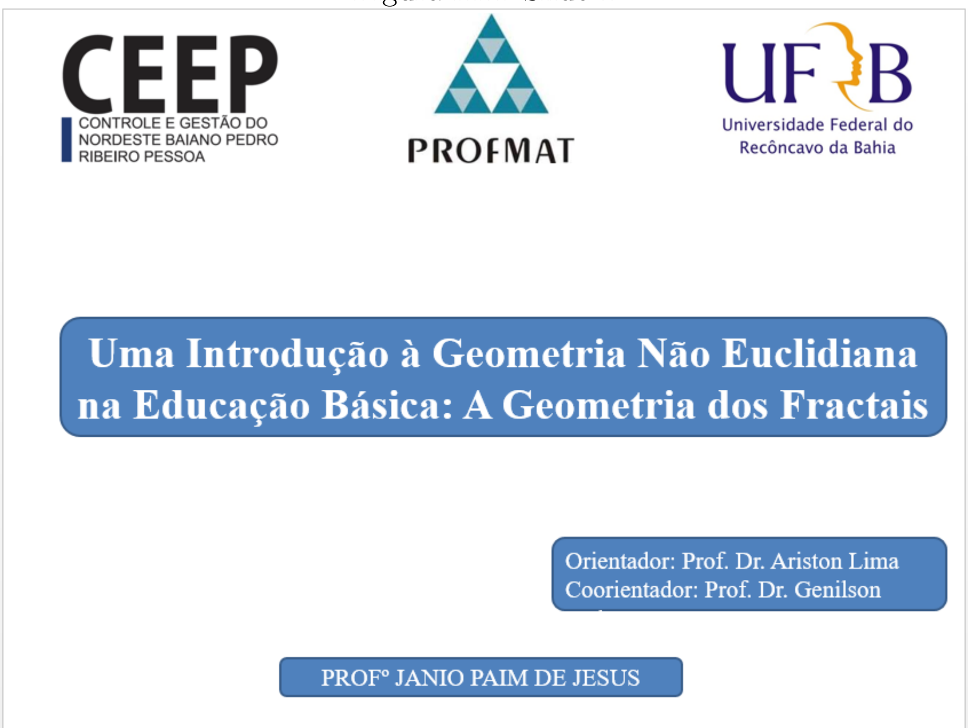


Figura A.2: Slide 2

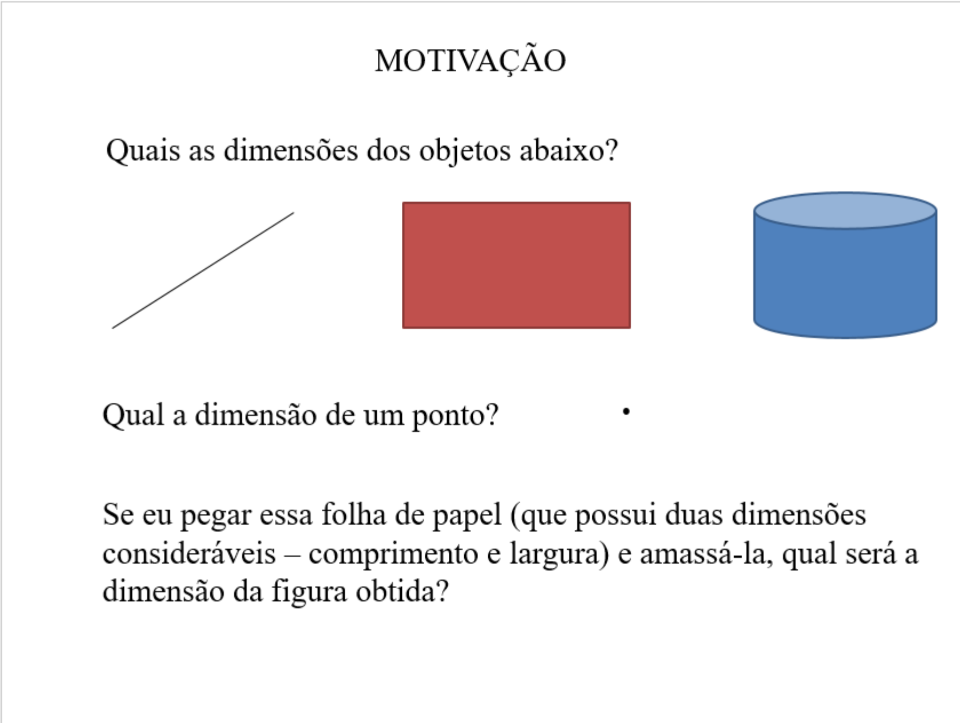


Figura A.3: Slide 3

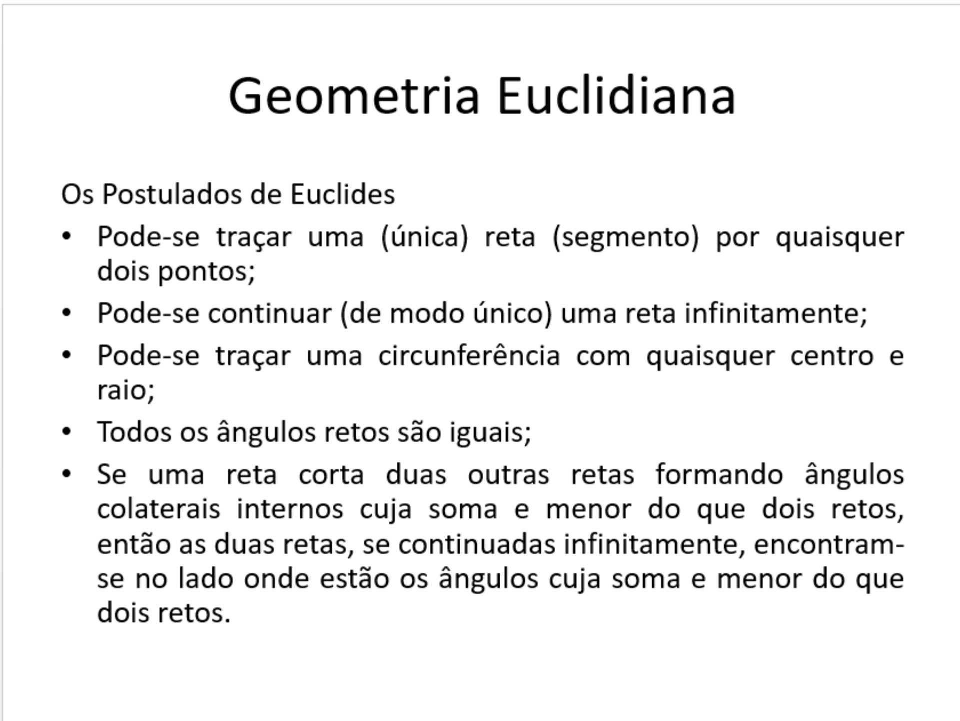


Figura A.4: Slide 4

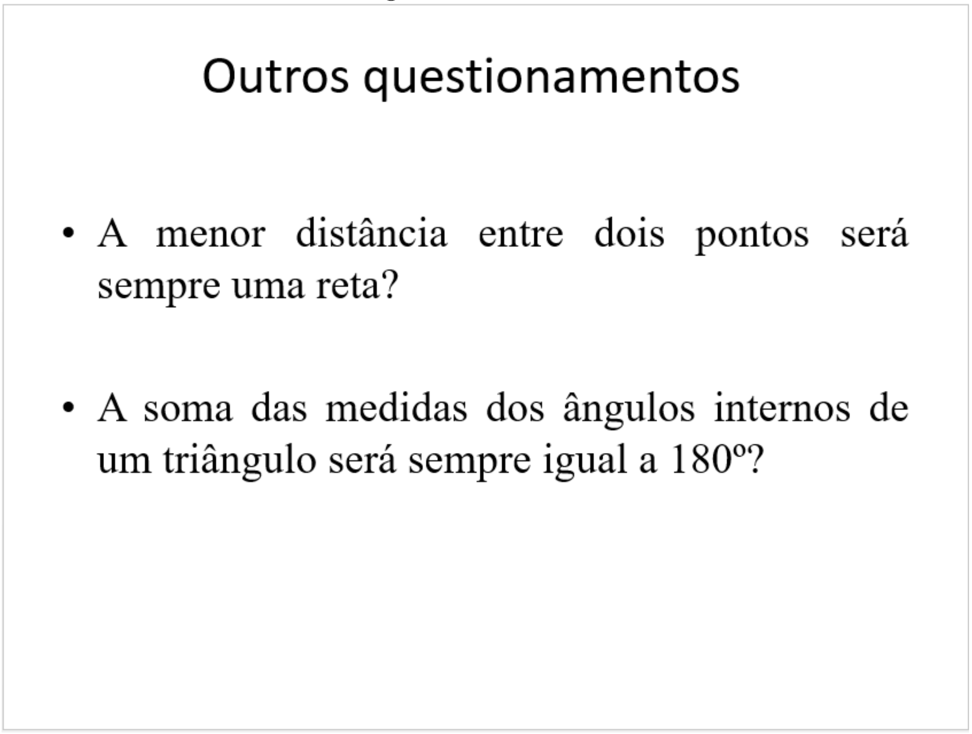


Figura A.5: Slide 5

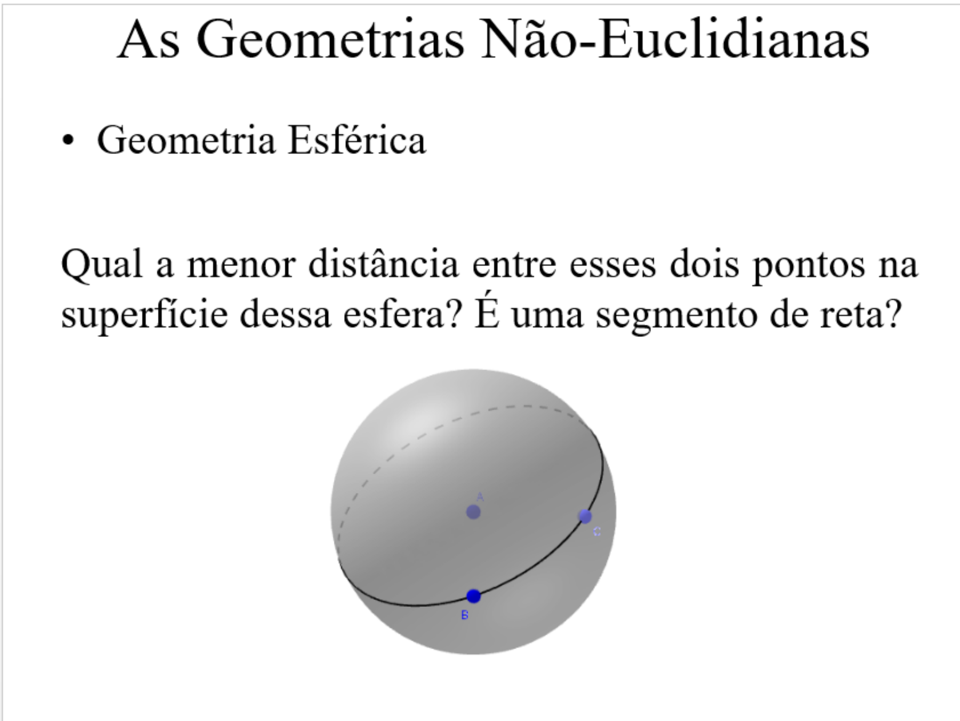


Figura A.6: Slide 6

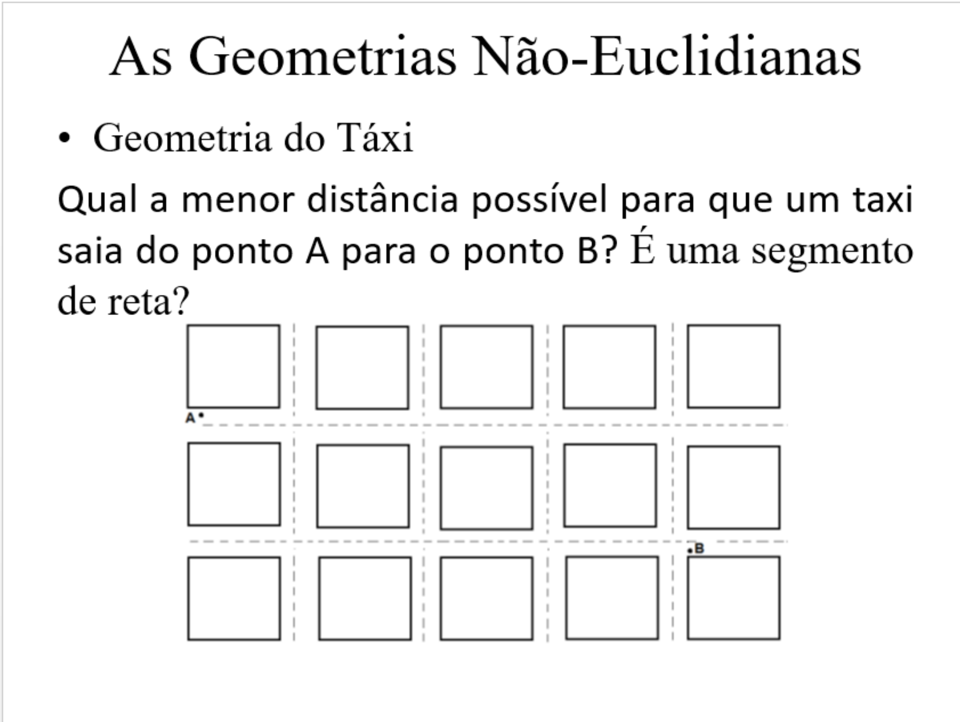


Figura A.7: Slide 7

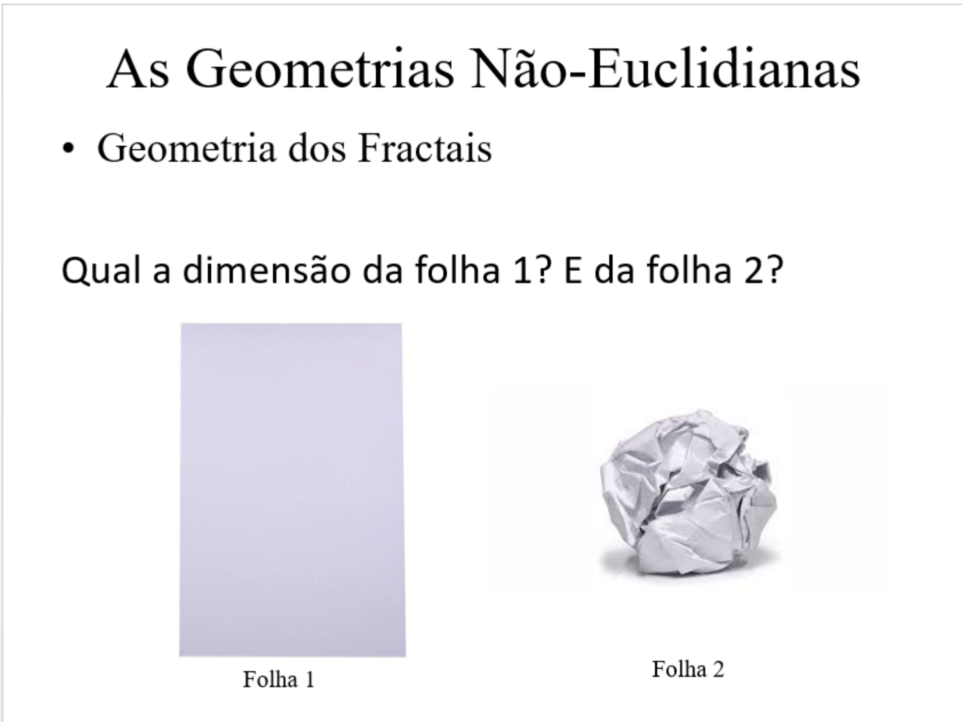


Figura A.8: Slide 8

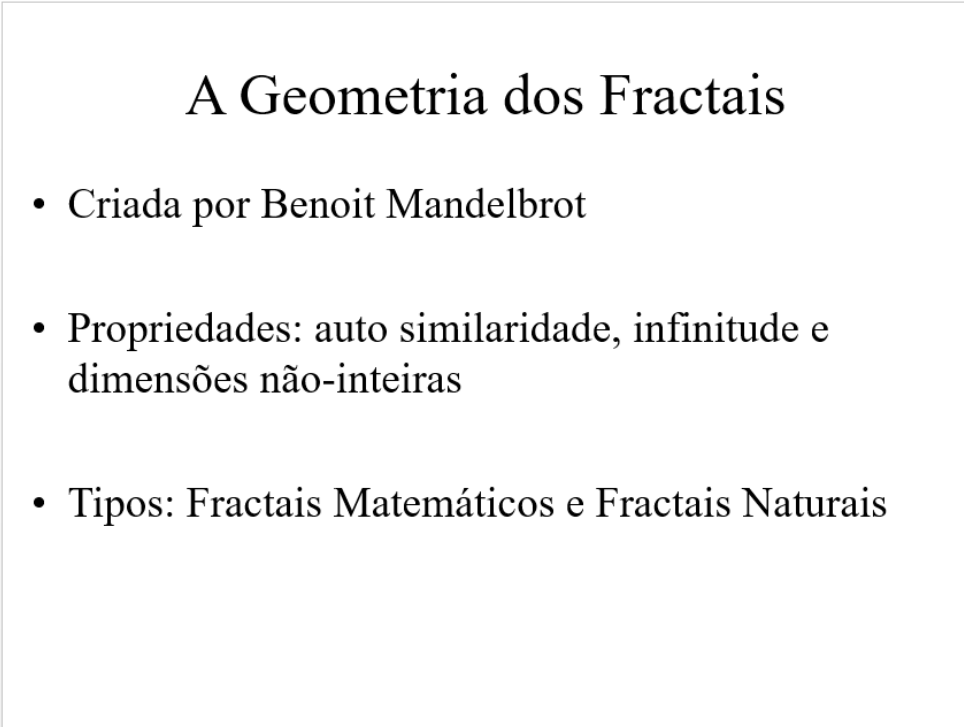


Figura A.9: Slide 9

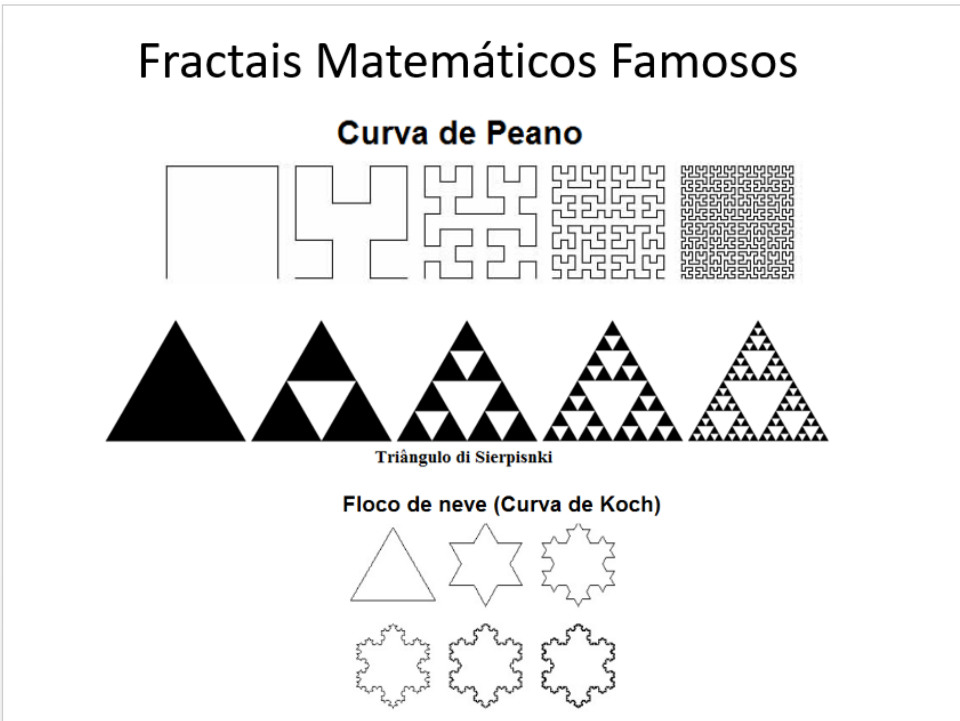


Figura A.10: Slide 10

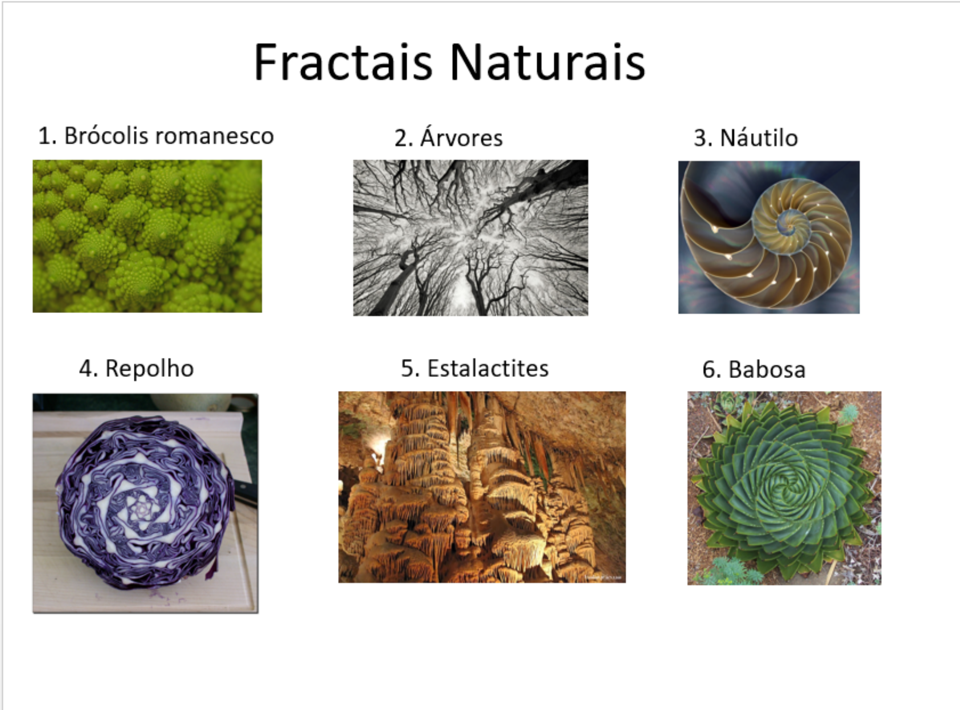


Figura A.11: Slide 11

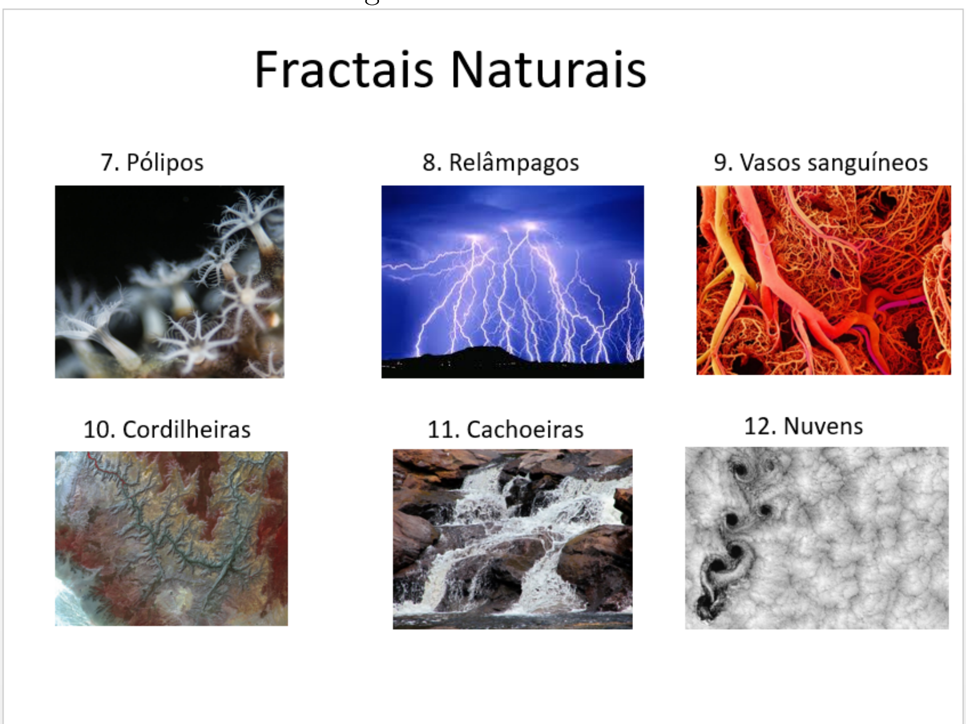


Figura A.12: Slide 12

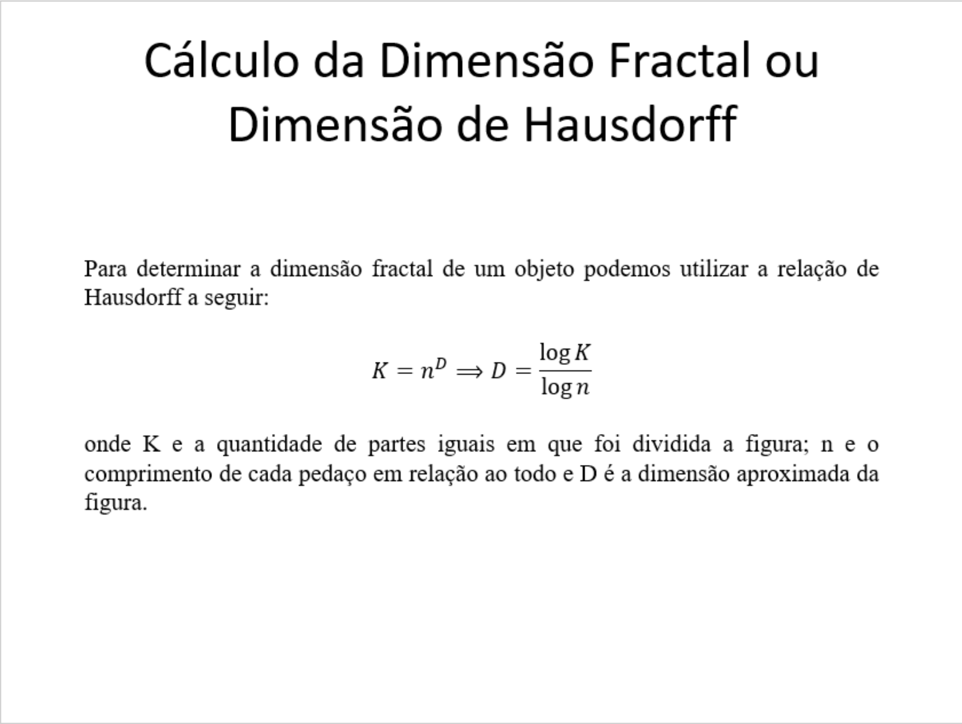


Figura A.13: Slide 13

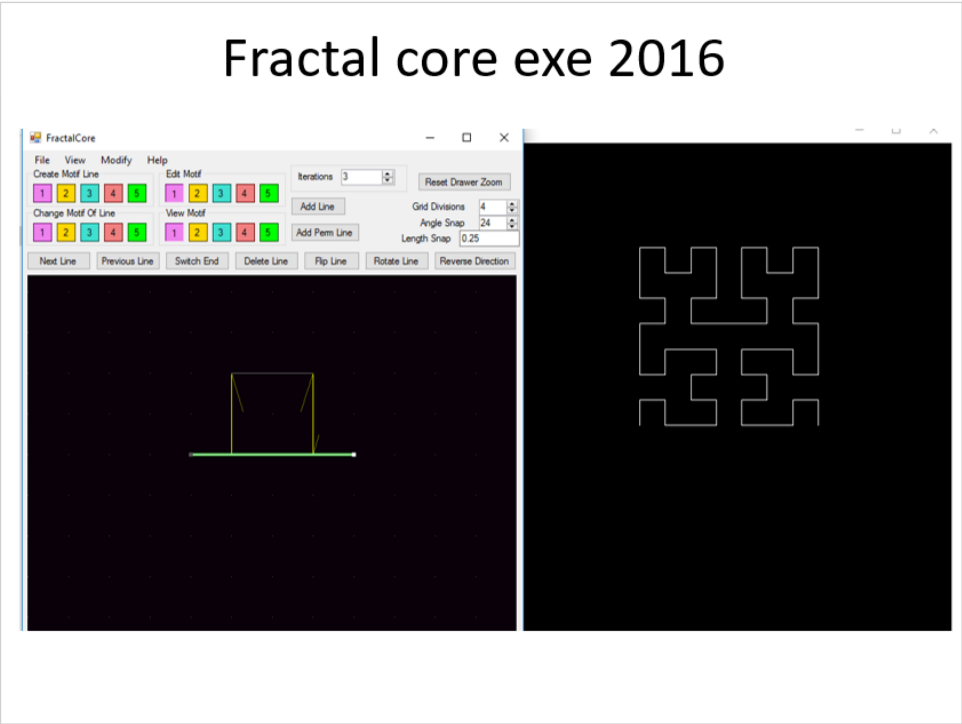


Figura A.14: Slide 14

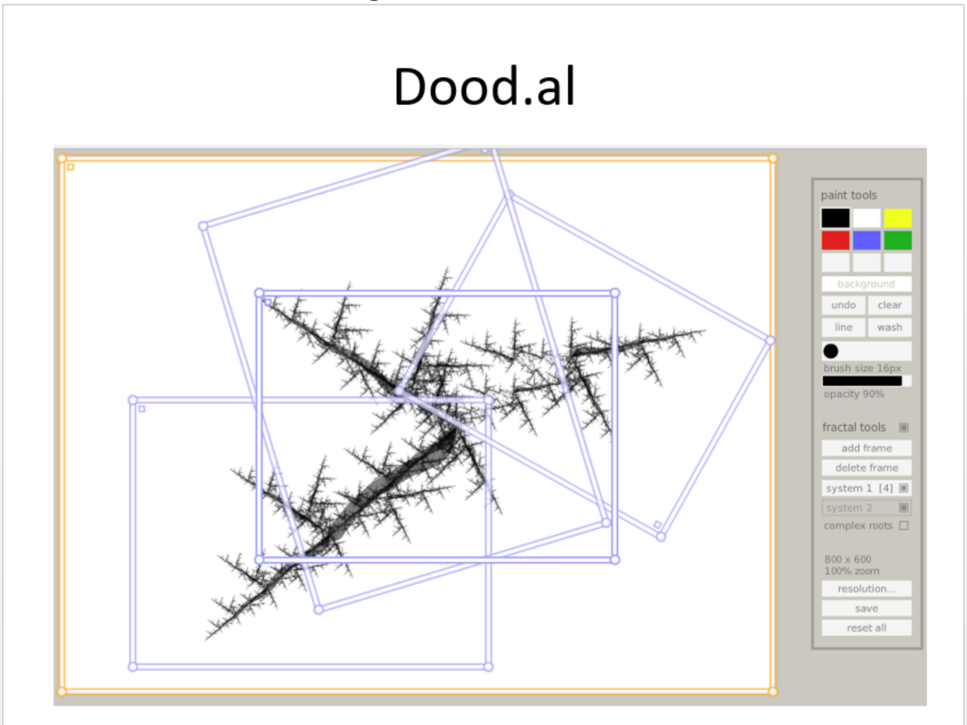
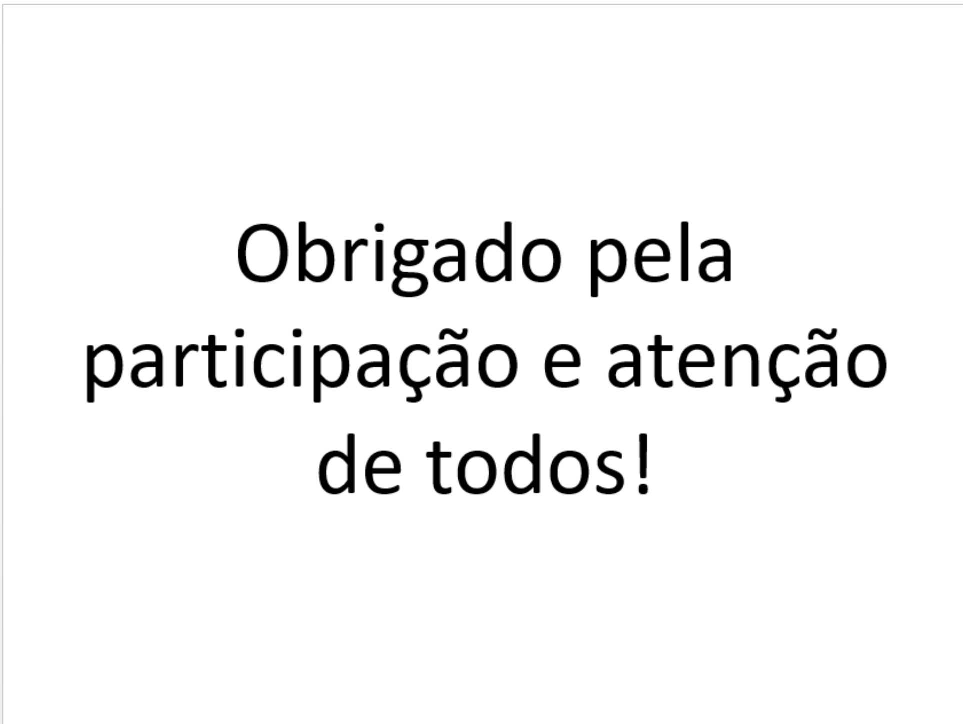


Figura A.15: Slide 15

Quais as suas impressões sobre essa aula?

Figura A.16: Slide 16



Apêndice B

Questionário de Verificação de Aprendizagem

Após a realização da sequência didática em sala de aula que tinha como objetivo geral a Introdução da Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio, via a Geometria dos Fractais, responda às questões a seguir, respondendo "Sim"ou "Não"nas questões de 1 até 10 e, escrevendo a sua opinião na questão 11.

1. A geometria que você aprendeu desde o Ensino fundamental até o seu Ensino Médio, é chamada de Geometria Euclidiana. Você tinha conhecimento desse fato? ( ) Sim ( ) Não

2. Durante esta aula, você compreendeu os Postulados de Euclides, nos quais está fundamentada a Geometria Euclidiana? ( ) Sim ( ) Não

3. Você considera importante estudar outras geometrias além da Geometria Euclidiana? ( ) Sim ( ) Não

4. Em relação aos fractais, você já conhecia esse tema? ( ) Sim ( ) Não

5. No seu cotidiano, você encontra figuras que lembram os fractais? ( ) Sim ( ) Não

6. Você compreendeu o que são os fractais, com as suas principais propriedades? ( ) Sim ( ) Não

7. Você teve dificuldade em efetuar o cálculo aproximado para determinar a Dimensão Fractal das figuras apresentadas? ( ) Sim ( ) Não

8. Na utilização dos softwares (Dood.al e FractalCore) para a construção de fractais, você conseguiu perceber as principais propriedades dos fractais? ( ) Sim ( ) Não

9. A sequência das informações apresentadas, foram suficientes para que você tivesse um bom aproveitamento dessa aula? ( ) Sim ( ) Não

10. Você considera que a Geometria Não Euclidiana deveria ser trabalhada no Ensino Médio? ( ) Sim ( ) Não

11. Em sua opinião, o desenvolvimento do conteúdo da Geometria Fractal como motivador para a introdução da Geometria Não Euclidiana no Ensino Médio possui quais vantagens e desvantagens?

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>