UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

FERNANDO DA SILVA ZANATO

MATEMÁTICA E MÚSICA: RELAÇÕES ENTRE AS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER E A TEORIA MUSICAL

Sinop

2017

FERNANDO DA SILVA ZANATO

MATEMÁTICA E MÚSICA: RELAÇÕES ENTRE AS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER E A TEORIA MUSICAL

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Milton Luiz Neri Pereira
Orientador

Sinop

2017

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Z27m Zanato, Fernando da Silva.

Matemática e música: relações entre as séries e transformadas de Fourier e a teoria musical / Fernando da Silva Zanato. – Sinop, 2017.

83 p.

Orientador: Dr. Milton Luiz Neri Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso, *Campus* Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática.

1. Séries Harmônicas. 2. Fourier. 3. Teoria Musical. 4. Mestrado Profissional em Matemática. I. Pereira, Milton Luiz Neri, Dr. I. Título. III. Título: relações entre as séries e transformadas de Fourier e a teoria musical.

CDU 517.44:78.01

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Luiz Kenji Umeno Alencar - CRB1 2037.

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCAIS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP

FERNANDO DA SILVA ZANATO

MATEMÁTICA E MÚSICA: RELAÇÕES ENTRE AS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER E A TEORIA MUSICAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Milton Luiz Neri Pereira

Aprovado em: 11/04/2017

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Milton Luiz Neri Pereira - UNEMAT

Prof. Dr. André Krindges - UFMT

Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong - UNEMAT

SINOP – ABRIL - 2017

Dedico este trabalho à minha esposa Kátia, que sempre me apoiou em todas as etapas da minha formação, e aos meus filhos Henrique, Laura e Murilo, pela alegria de sermos uma família.

AGRADECIMENTOS

À Deus, fonte de toda sabedoria.

À minha família, pela paciência e incentivo no decorrer do curso.

À CAPES, à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pela coordenação do PROFMAT.

À Universidade do Estado de Mato Grosso pela oportunidade de realizar o curso de Mestrado.

À todos os professores do PROFMAT do campus de Sinop/MT pelas contribuições, ensinamentos e, principalmente, pela paciência que tiveram no decorrer do curso.

Ao professor e orientador Dr. Milton Luiz Neri Pereira, pela orientação, paciência e apoio, que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Dr. Oscar Antonio González Chong, pela sua dedicação e empenho à frente da coordenação do programa no campus.

Aos amigos do Mestrado, pelo apoio, contribuições para meu crescimento profissional e, acima de tudo, pela parceria em todos os momentos.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.
(Descartes)

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar as relações entre as Séries e Transformadas de Fourier e a teoria musical. Embora possam aparentar duas áreas distintas, a música e a matemática possuem fortes ligações, o que tem provocado interesses, por parte de pesquisadores. Em alguns momentos da história, essa ligação fica especialmente importante, como, a título de exemplo, na criação das escalas Pitagórica e Temperada ou atualmente com o uso de tecnologias. Neste sentido, este trabalho tem a pretensão de responder ao seguinte problema: como se apresentam as relações entre as Séries e as Transformadas de Fourier e a teoria musical? Por meio da análise da literatura que aborda o assunto, foi possível se apropriar de conhecimentos que possibilitaram, ao pesquisador, estabelecer um quadro conceitual e definir a referência teórica: da teoria musical e relações matemáticas envolvidas, especialmente aquelas relacionadas ao som; das definições e conceitos das Séries e das Transformadas de Fourier, enfatizando sua relevância na compreensão dos aspectos físicos do som, como o timbre e as Séries Harmônicas, que deram o suporte necessário ao andamento da pesquisa. Através dos estudos foi possível, com o auxílio dos softwares livres SpecAn e Audacity, a construção de espectros de frequência do som de alguns instrumentos musicais, com o propósito de perceber como a temática abordada se relaciona com situações reais. As teorias de Fourier apresentadas podem ser um meio interessante para instigar o aluno a conceber a matemática como ferramenta para explicar inúmeros fenômenos, além de mostrar que ela é fundamental para o desenvolvimento das tecnologias. Este, sem dúvida, é um caminho que possibilita a compreensão de saberes matemáticos e, portanto, uma contribuição efetiva no processo de ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Teoria Musical; Séries Harmônicas, Fourier, Música.

ABSTRACT

This research has as goal to look the relations between the Series and Fourier Transforms and the musical theory. Although they may appear two distinct areas, music and mathematics have strong connections, which arouse interest at some researchers. In some moments of history, this connection is especially important, as, for example, in the creation of the Pythagorean and Temperate scales or currently with the use of technologies. In this sense, this research intends to answer the following problem: how are the relations between the Series and the Fourier Transform and the musical theory? Through the analysis of the literature that addresses the subject, it was possible to appropriate knowledge that enabled the researcher to establish a conceptual framework and define the theoretical reference: of musical theory and mathematical relations involved, especially those related to sound; Of the definitions and concepts of the Fourier Series and the Fourier Transform, emphasizing their relevance in understanding the physical aspects of sound, such as timbre and the Harmonic Series, which gave the necessary support to the progress of the research. Through the studies, it was possible, with the help of the free software SpecAn and Audacity, to construct frequency spectra of the sound of some musical instruments, in order to understand how the subject addressed is related to real situations. The Fourier theories presented can be an interesting point to instigate the student to understand of mathematics as a tool to explain many phenomena, besides to showing that it is fundamental for the development of technologies. This, without a doubt, is a way that enable the understanding of mathematical knowledge and, therefore, an effective contribution in the process of teaching and learning of mathematics in Basic Education.

Keywords: Musical Theory; Harmonics Series; Fourier; Music.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática e a teoria musical possuem uma antiga e profunda relação. Segundo ABDOUNUR (2006), os primeiros sinais desse elo matemática/música surgem quando Pitágoras, através de experiências com sons do monocórdio, efetua uma de suas mais belas descobertas que, na época, foi considerada o quarto ramo da matemática: a música. Esta se caracteriza por ser uma das expressões artísticas mais importantes da humanidade e está presente em todos os lugares, sejam em manifestações culturais, religiosas, como fins educacionais ou até mesmo em tratamentos de enfermidades. Numa visão mais artística, BONA (2004) define música como a arte de manifestar os diversos afetos de nossa alma mediante o som. Para MED (1986) música é a arte de combinar os sons simultaneamente e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo.

Na teoria musical, as propriedades matemáticas ajudam a compreensão de diversos conceitos como as fórmulas de compasso, o tempo de cada figura musical, a frequência das notas, a formação de escalas, as séries harmônicas, dentre outros. No entanto, a matemática por si só não é capaz de explicar completamente a música, nem esta explica aquela, mas há uma forte ligação entre essas duas áreas, o que torna quase impossível falar de teoria musical sem recorrer em algum momento à conceitos matemáticos.

Nesse contexto, conhecer e interpretar alguns conceitos relacionados diretamente à teoria da música pode se tornar especialmente interessante na compreensão desse elo, pois a música é, de maneira simplificada, uma sucessão de sons e silêncio organizada ao longo do tempo. Desse modo, compreender as principais características do som como a altura, a intensidade e o timbre tornam-se imprescindível na busca de resposta ao seguinte problema, que se constitui o eixo norteador do presente trabalho, qual seja: **como se apresentam as relações entre as Séries e as Transformadas de Fourier e a teoria musical?**

Como o som se comporta como uma onda, a altura (som “mais agudo” ou “mais grave”) está relacionada com a sua frequência, a intensidade (som “mais alto” ou “mais baixo”) diretamente ligada à amplitude da onda e o timbre, relacionado diretamente à natureza do corpo sonoro. É através do timbre que se pode diferenciar se determinada nota foi executada por um violino ou um saxofone, por exemplo.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), físico e matemático francês, mostrou que qualquer onda pode ser representada pela somatória de várias outras ondas senoidais e, se essa onda for periódica, a frequência das componentes senoidais são valores múltiplos da frequência de repetição da forma de onda. Assim, os sons de frequência fundamental e os chamados harmônicos são ondas com formato de senoide que formam juntas o som resultante. As amplitudes desses harmônicos estão relacionadas diretamente ao timbre do som executado, permitindo caracteriza-lo como brilhante, suave, estridente, oco, dentre outros adjetivos criados para distinguir os sons.

1.1 JUSTIFICATIVA

Historicamente as diversas áreas da matemática sempre estiveram presentes no cotidiano das pessoas e em diversas áreas científicas ou artísticas, algumas mais perceptíveis, como a geometria e a aritmética por exemplo. No entanto, é inegável que observar e compreender essa proximidade é um desafio a alunos (seja da Educação Básica, graduação ou pós-graduação) e até mesmo aos professores, que lidam constantemente com situações do tipo "para que serve isso?".

Nesse contexto, o fato de ter certa afinidade com a música, por ser um músico amador, e o interesse em explorar esse "casamento" entre a teoria musical e a matemática tem sido um agente motivador na elaboração e no desenvolvimento deste projeto que, além dos objetivos elencados, visa mostrar implicitamente a beleza da matemática em uma das mais belas expressões artísticas: a música.

Além disso, especificamente a música relacionada às teorias de Fourier é um tema ainda pouco explorado e com um número de publicações reduzido em comparação a outros temas, despertando ainda mais o interesse pelo assunto.

1.2 OBJETIVOS

Tendo em vista o exposto nas seções anteriores apresentam-se os seguintes objetivos para o presente trabalho:

i Descrever, historicamente, a construção da relação entre a matemática e a teoria musical;

ii Apresentar tópicos de teoria musical;

iii Compreender a construção das escalas musicais e os conceitos matemáticos envolvidos;

iv Interpretar matematicamente as principais características do som;

v Descrever os conceitos de Séries e Transformadas de Fourier;

vi Apresentar as principais relações entre Séries e Transformadas de Fourier e a teoria musical;

1.3 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Na busca por respostas à questão problema e em face aos objetivos traçados, o trabalho foi desenvolvido apoiado na metodologia de pesquisa qualitativa exploratória, pelo fato de que esse tipo de pesquisa

> (...) tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. (GIL, 2002, p. 41).

Embora bastante flexível, na maioria dos casos a pesquisa exploratória envolve levantamento bibliográfico e análise de exemplos que possam ajudar na compreensão. De acordo com SALVADOR (1986), a revisão bibliográfica é um instrumento de pesquisa caracterizado pela consulta em documentos escritos originais primários e sua principal vantagem encontra-se no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito ampla (GIL, 2002).

A partir da definição do problema e dos objetivos, o desenvolvimento deste trabalho iniciou-se com a investigação e consulta sobre o tema em diversas publicações nacionais e estrangeiras, para a partir daí desenvolver os capítulos de forma a proporcionar boa compreensão sobre os aspectos musicais e matemáticos que abrangem o assunto.

Os gráficos gerados para a análise dos espectros de frequências (apêndices) foram obtidos com o uso de um notebook com microfone integrado para capturar o som dos instrumentos (sax tenor, clarinete, órgão eletrônico, violino, dentre outros), executados pelo próprio autor e, por meio de softwares, obtidas as ondas em função do tempo ou da frequência. Embora as gravações não tenham sido realizadas em estúdio acústico, as influências sofridas devido à qualidade dos equipamentos ou do ambiente utilizado não representaram problemas significativos na elaboração dos exemplos.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Além deste Capítulo 1, o trabalho apresenta outros quatro capítulos. No Capítulo 2, descrevem-se um breve histórico da música e noções básicas de teoria musical para facilitar a compreensão de alguns termos utilizados no decorrer do trabalho. Apresentam-se neste capítulo, texto que trata da relação entre a matemática e a música, conceitos físicos/matemáticos do som e as Séries Harmônicas.

No Capítulo 3 são abordados conceitos, definições matemáticas e exemplos relacionados às Séries e às Transformadas de Fourier, bem como suas representações para sinais de tempo contínuo ou discreto.

O Capítulo 4 estabelece-se a interconexão entre os Capítulos 2 e 3, buscando, sobretudo, ferramentas teóricas que possibilitam alcançar os objetivos propostos pelo trabalho. Descreve-se as relações entre os conceitos apresentados por Fourier e a teoria musical, buscando alcançar os objetivos elencados.

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões obtidas com a pesquisa, bem como, propostas para trabalhos futuros. Apresentam-se ainda, na sequência, as referências bibliográficas e apêndices. Nestes estão contidas as análises espectrais dos sons de instrumentos musicais, feitas com o auxílio de softwares.

2 MATEMÁTICA E MÚSICA

Embora possam aparentar duas áreas tão distintas, a música e a matemática possuem fortes ligações. Os registros históricos da maioria das civilizações remetem, em algum momento, à presença da música e da matemática, mesmo que separadas. Mas o desenvolvimento da música sempre esteve atrelado a conceitos matemáticos, mesmo que implícitos, no entanto, em alguns momentos essa ligação fica especialmente importante, como na criação da escala Pitagórica ou atualmente, com o uso de tecnologias. Neste capítulo apresentamos um breve histórico da música e sua notação, noções básicas da teoria musical e ainda a relação da matemática com a teoria musical. Finalizamos o capítulo explorando alguns aspectos físicos e matemáticos do som, enfatizando conceitos e características das Séries Harmônicas.

2.1 BREVE HISTÓRICO DA MÚSICA

Não há relatos precisos sobre quando surgiu a música. Vestígios como pinturas em cavernas sugerem que o homem pré-histórico descobriu os sons da natureza e utilizava a música nas cerimônias e rituais, sejam com gritos, sons produzidos por meio de pedra, madeira, ou mesmo pelo próprio corpo.

Outras pistas do desenvolvimento musical nesse período são os fragmentos de supostos instrumentos musicais, como o osso de urso com idade entre 43.000 e 82.000 anos encontrado nos Alpes da Eslováquia em 1995, no qual apresentava furos matematicamente distribuídos capaz de produzir intervalos musicais de tons e semitons (ABDOUNUR, 2006). É possível que este seja o instrumento mais antigo conhecido.

Figura 1 – Flauta de osso de urso encontrado nos Alpes da Eslováquia em 1995

Fonte: www.wikiwand.com/pt/Flauta

Nas grandes civilizações antigas, desde as primeiras surgidas na Mesopotâmia entre os rios Tigres e Eufrates até Egito, Grécia e Roma, a música era muito presente. Na Mesopotâmia, por exemplo, em meio à ruinas das cidades foram descobertos harpas e cítaras de origem assíria, além de que, por meio das pinturas é possível perceber que esses povos já usavam instrumentos de sopro, de percussão e de cordas. Além disso, entre os achados há também registros através de símbolos cuneiformes que contém informações técnicas sobre escalas musicais utilizadas na época (KILMER, 1998).

No Egito, a música estava muito ligada ao culto aos deuses e era praticada através dos cantos tradicionais e de instrumentos como a harpa, a lira, as flautas, além de instrumentos de percussão como os tambores. Já na Grécia, a música era cultivada como arte e como ciência, visto que era uma das disciplinas fundamentais da educação dos jovens. O desenvolvimento musical grego estabeleceu um importante marco histórico com a criação dos tetracordes e das escalas com sete tons, além de que de acordo com ABDOUNUR (2006), teóricos musicais como Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Erastótenes contribuíram com a construção de diferentes escalas.

Influenciados pela arte musical grega, os antigos romanos também tinham uma forte ligação com a música. As artes visuais e exemplares encontrados retratam um rico conhecimento sobre instrumentos musicais de várias categorias como os de sopro, de cordas e de percussão, que eram empregados em orquestras públicas, rituais religiosos ou até mesmo nos serviços militares. Há vestígios de manuscritos da notação musical romana, no entanto são de difícil interpretação comparando à notação atual.

Desde a queda do Império Romano até meados do século XV, a música medieval esteve fortemente ligada ao cristianismo, que se encontrava em rápida expansão. Nesse período, o Vaticano unifica a prática litúrgica e o Papa Gregório I institucionaliza o Canto Gregoriano, que consistia em músicas religiosas monofônicas (única melodia) sem acompanhamento.

Foi no século XI que a notação musical sofreu grandes transformações e as simbologias que eram utilizadas para indicar alterações rítmicas ou melódicas, conhecidas como Neumas, foram substituídas por um sistema de notação com linhas, que atualmente é conhecido por pauta musical. Além disso, o monge italiano Guido D'Arezzo (992-1050) designou as notas musicais como são conhecidas atualmente, utilizando as iniciais da primeira estrofe do hino a São João Batista, escrito em latim por Paolo Diácono entre os anos de 720 e 799:

> ***Ut*** *queant laxis,*
> ***Re****sonare fibris,*
> ***Mi****ra gestorum,*
> ***Fa****muli Tuorum,*
> ***Sol****ve Polluti,*
> ***La****bii reatum,*
> ***S****ancte* ***I****ohannes.*
> (COTTA, 2008)

Assim, as notas musicais passaram a ser identificadas como *Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*, e posteriormente a sílaba *Ut* foi substituída por Dó, sugerida pelo músico italiano Giovanni Battista Doni (1593-1647) no intuito de facilitar a pronúncia.

A partir de então, a música atravessa diversos períodos, incrementando elementos importantes para a evolução da sua teoria. Desde a Renascença (1400-1600), cujas composições exploravam melodias com transposição de notas e período Barroco (1600-1730) marcado pelo uso da harmonia tonal e o surgimento de diversas formas musicais como a ópera, até a chamada Música Moderna (primeira metade do século XX), quando foram criados novos efeitos em harmonias vocais, em instrumentos e nas combinações de escalas e ritmos, denotando uma linguagem musical que perdura até os dias atuais. Vale ressaltar ainda que, no ano de 1939 foi estabelecido um padrão absoluto de frequências para as notas musicais, tendo universalizado o padrão de 440 Hz para a nota lá (situada acima da nota dó central do piano).

Atualmente, com o advento de novas tecnologias surgem também instrumentos eletrônicos, sintetizadores de som e a tecnologia de armazenamento digital de som, que pode ser considerado um passo intermediário fundamental entre o desenvolvimento das escalas e o estado da arte atual na interação entre Matemática e Música (CARVALHO et al., 2009).

2.2 NOÇÕES BÁSICAS DE TEORIA MUSICAL

Uma das expressões artísticas mais importantes da humanidade, a música está presente em todos os lugares, sejam em manifestações culturais, religiosas, como fins educacionais ou até mesmo em tratamentos de enfermidades. Numa visão mais artística, BONA (2004) define música como a arte de manifestar os diversos afetos de nossa alma mediante o som. Para MED (1986), a música é a arte de combinar os sons simultaneamente e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo.

De maneira simplificada, a música pode ser considerada como a arte de combinar os sons perceptíveis e os sons imperceptíveis (silêncio) ao ser humano. Vale ressaltar que os tópicos de teoria musical que serão apresentados são apenas noções básicas, visto que o objetivo não é o aprofundamento da teoria da música, mas permitir uma iniciação musical para facilitar a compreensão do que será discutido posteriormente.

2.2.1 Elementos da Teoria Musical

Antes de tentar compreender e interpretar as simbologias presentes em partituras é importante conhecer alguns elementos e propriedades da música. A música é dividida em três partes fundamentais:

a. Melodia: é o conjunto de sons sucessivos que formam o sentido musical propriamente dito.

b. Harmonia: conjunto de sons simultâneos obedecendo determinada estética musical, também conhecida por acordes.

c. Ritmo: é a combinação de valores, isto é, a ordem e a proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia.

Definido como a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos (MED, 1986), o som é caracterizado, no contexto da música, como som musical (produzido por vibrações regulares, se apresenta perfeitamente definido e pode ser grafado) ou ruído (produzido por vibrações irregulares e não pode ser grafado).

Algumas propriedades da música estão diretamente relacionadas às principais características do som, sendo elas:

a. Altura: está relacionada à frequência das vibrações e caracteriza o som como "mais grave", "mais agudo", ou intermediário.

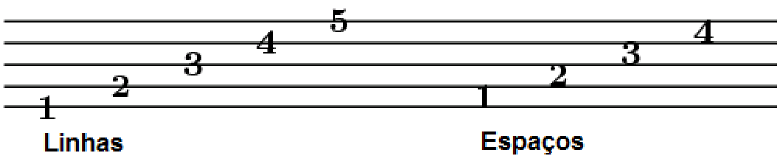
b. Duração: extensão de um som ou tempo de emissão de vibrações.

c. Intensidade: está relacionada com a amplitude das vibrações e caracteriza o som como "mais forte" ou "mais fraco".

d. Timbre: é a característica sonora que permite identificar a origem do som produzido. Através do timbre é possível distinguir o som gerado por um saxofone e um violino, por exemplo, mesmo que ambos reproduzam um som na mesma frequência.

As notas musicais são apenas sete: *dó, ré, mi, fá, sol, lá, si*. Essas notas são representadas em um sistema formado pela disposição de cinco linhas paralelas horizontais e quatro espaços intermediários, chamados de pentagrama ou pauta. As linhas e os espaços são contados de baixo para cima e servem para identificar o nome e a altura da nota escrita.

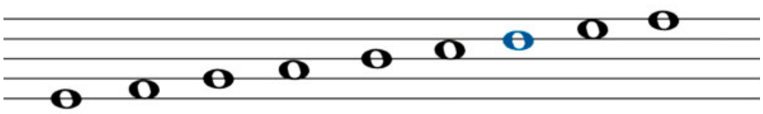
Figura 2 – Linhas e espaços de uma pauta ou pentagrama



Fonte: musicalizandocomfundamentostaylis.blogspot.com.br/2015/09/pentagramas-claves-e-notas-musicais.html

Graficamente, a nota musical é representada com sinal na forma oval e sua posição no pentagrama determina se esta é mais aguda ou mais grave.

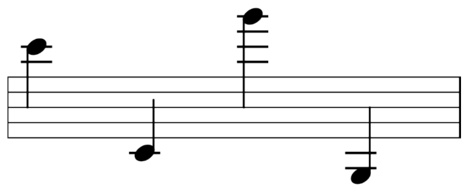
Figura 3 – Representação de notas musicais no pentagrama



Fonte: teoriamusicalemfoco.com.br/wp-content/uploads/2016/04/notas-musicais-clave-de-f%C3%A1-2.jpg

Como no pentagrama só é possível representar nove notas (Figura 3), às vezes é necessário utilizar linhas suplementares, que são curtos segmentos de linhas horizontais que servem como uma extensão do pentagrama tanto para cima como para baixo, sendo possível então a representação de notas mais graves ou mais agudas do que aquelas representadas apenas no pentagrama.

Figura 4 – Notas musicais representadas em linhas suplementares



Fonte: popliteral.com/br/wp-content/uploads/sites/2/2015/09/suplementary-lines-1.png

É importante destacar que as sete notas citadas anteriormente são denominadas como “naturais”, mas existem também as variações devido aos “acidentes musicais”, conhecidos por *bemóis* e os *sustenidos*. Para compreender o que são esses “acidentes” cabe destacar os conceitos de intervalo, tom e semitom:

a. Intervalo: é a diferença de altura entre duas notas.

b. Semitom: é o menor intervalo entre duas notas musicais.

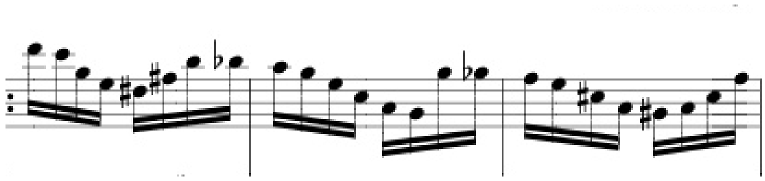
c. Tom: é o intervalo formado por dois semitons.

O acidente é um sinal que, colocado diante da nota, altera sua entoação. O sustenido (considerado alteração ascendente) é representado pelo símbolo “♯” e eleva a altura da nota natural em um semitom. Existe também o dobrado sustenido (x), que eleva o som em um tom. O bemol (alteração descendente) abaixa a altura da nota natural em um semitom e é representado pela letra “♭”, já o dobrado bemol (♭♭) abaixa o som da nota em um tom. Há ainda o bequadro (♮), que anula o efeito dos demais acidentes.

Os semitons podem ainda ser classificados como semitom natural (quando é formado por notas naturais e nesse caso, existem apenas dois: mi-fá e si-dó), semitom diatônico (formado por notas de nomes diferentes, por exemplo: lá♯-si) ou semitom cromático (formado por notas com mesmo nome, por exemplo, lá♭-lá).

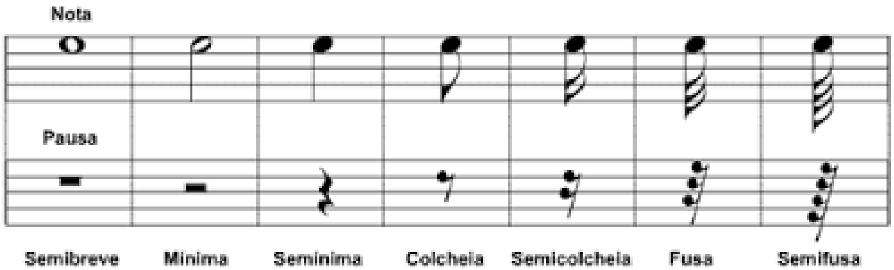
No pentagrama, além das notas musicais, também são representadas as pausas, que são sinais indicando um intervalo de “silêncio” numa melodia. Tanto as notas quanto as pausas são representadas graficamente de acordo com a duração do som e essas figuras são chamadas, em ordem decrescente de duração, de semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa, como destacado na Figura 6.

Figura 5 – Exemplo de acidentes na partitura da música “Espinha de Bacalhau” de Severino Araújo



Fonte: www.swiss-jazz.ch/musique-bresilienne/EspinhaBacalh.pdf

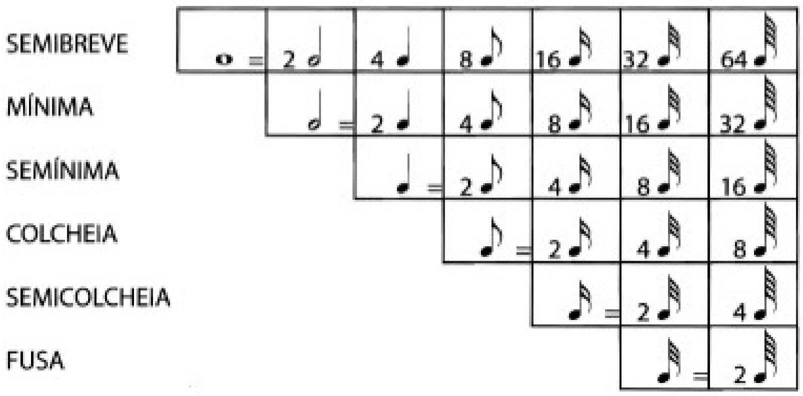
Figura 6 – Notas e pausas correspondentes



Fonte: adriannems.blogspot.com.br/2015/12/figuras-ritmicas-ou-valores.html

Cada figura musical indica o tempo de execução de cada nota (ou pausa) numa composição musical. A semibreve possui um tempo de duração duas vezes maior que a mínima, e esta por sua vez, o dobro da semínima e assim por diante, isto é, cada símbolo subsequente tem a metade do tempo de duração do anterior, conforme o esquema representado na Figura 7. Cabe ressaltar que o tempo de duração de uma determinada nota musical está relacionado também a outros aspectos, dentre eles a forma de compasso, que será esclarecido posteriormente. Cada

Figura 7 – Comparativo entre os valores (tempo de duração) das notas musicais



Fonte: (BONA, 2004)

figura pode ainda ter seu valor aumentado ou diminuído, caso apareça acompanhada de outros símbolos, dentre os quais:

a. Ponto de aumento: é um sinal que, representado à direita da nota ou pausa, aumenta a metade de sua duração. A nota com o ponto é chamada de "pontuada".

b. Ponto de diminuição: é um sinal representado sobre (ou sob) a nota que divide seu valor em duas metades, sendo a primeira de som e a segunda de silêncio. Esse ponto é conhecido pelos músicos como *staccato* (italiano) e significa destacado.

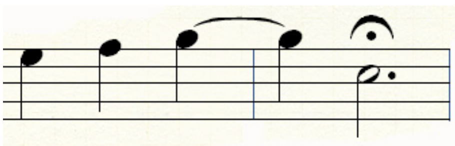
c. Fermata: é um sinal sobre a nota ou pausa que indica um prolongamento no tempo da mesma, ficando a critério do intérprete a sua duração.

d. Ligadura ou *Legato*: é uma linha curva grafada sobre (ou sob) a figura indicando que a passagem de uma nota a outra deve ser feita sem a interrupção do som, isto é, ligados.

Figura 8 – Pontos de diminuição.

Fonte: conservatorio0.tripod.com/pto_cima_pto_baixo_.gif

Figura 9 – Ligadura, fermata e ponto de aumento.



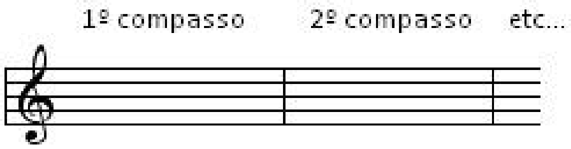
Fonte: www.abrahamdevar.com/wp-content/uploads/2015/08/fermata-pause-symbol-music-theory-abraham-devar.jpg

Outro elemento importante na pauta musical e que irá cadenciar e ditar o andamento da música é o compasso, que consiste na divisão da música em intervalos regulares de tempo. Os compassos podem ser de 2 tempos (binário), 3 tempos (ternário), 4 tempos (quaternário) etc., e ainda classificados como simples ou composto. No pentagrama, os compassos aparecem separados por barras perpendiculares às linhas horizontais, são as chamadas barras de compasso (Figura 10).

No início de uma pauta é escrita uma fração, denominada fórmula de compasso, que determina qual o "tamanho" de cada compasso. O denominador dessa fração determina qual figura equivale um tempo (1: semibreve, 2: mínima, 4: semínima, 8: colcheia, 16: semicolcheia, 32: fusa, 64: semifusa). O numerador indica quantos tempos são necessários para completar um compasso, ou seja, o numerador indica quantidade e o denominador corresponde à qualidade da figura. Por exemplo, se uma pauta apresentar a fórmula de compasso $\frac{3}{4}$ (lê-se "3 por 4"), significa que cada semínima equivale 1 tempo e o compasso será formado por 3 semínimas

$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$ ou outras figuras equivalentes a 3 tempos. Alguns compassos como $\frac{4}{4}$ e $\frac{2}{2}$ podem eventualmente aparecer representados por C e um C cortado, respectivamente.

Figura 10 – Barras de compasso.



Fonte: files.bandagmf.webnode.com.br/200001187-76ac7772b7/compassos.jpg

Figura 11 – Pauta com fórmula de compasso $\frac{3}{4}$ preenchidos com diferentes figuras.

Fonte: www.sotutorial.com/index.php/tutoriais-teorial-musical/teoria-musical-014-formula-de-compasso/

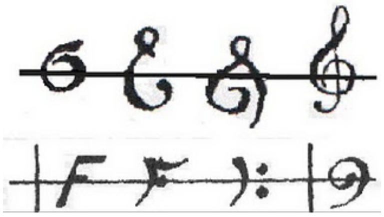
Vale ressaltar que a fórmula de compasso, embora tenha sido tratada como fração, não é representada na pauta com uma barra entre o numerador e o denominador, no entanto é fácil ver que um compasso $\frac{2}{4}$, por exemplo, pode ser matematicamente interpretado como a fração simplificada $\frac{1}{2}$, que equivale dizer que o compasso é formado por metade de uma semibreve.

Os elementos musicais apresentados até aqui estão relacionados à identificação de figuras, duração de acordo com o tipo de compasso, alterações de altura devido aos acidentes, dentre outros, no entanto, há um elemento imprescindível na composição de uma pauta: a clave. De acordo com MED (1986), clave (vem do latim e significa chave) é um sinal colocado no início da pauta que dá seu nome à nota escrita em sua linha, tendo as notas subsequentes nomeadas sucessivamente de acordo com a ordem: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó. Atualmente são utilizados três tipos de claves: de sol, de fá e de dó, sendo as duas primeiras as mais utilizadas.

A clave de sol escrita sobre a segunda linha do pentagrama tem como base a nota sol, que antigamente era representada pela letra G, enquanto que a clave de fá é escrita na quarta linha e sua simbologia é derivada da letra F, que era a representação da nota fá antes de D'arezzo renomear as notas (Figura 12). Na Figura 13 é possível observar a nota sol na segunda linha do pentagrama (clave de sol) e abaixo, a nota fá na quarta linha (clave de fá).

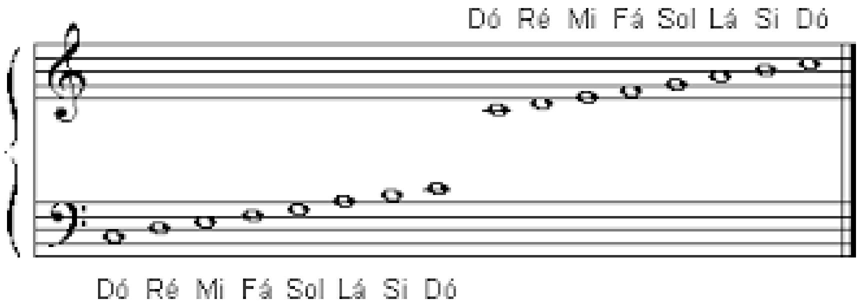
Embora todas as notas possam ser representadas em qualquer clave, a clave de sol é própria para grafar as notas agudas (violino, flauta, clarinete, oboé, voz do soprano ou contralto,

Figura 12 – Evolução das claves de sol e fá.



Fonte: (MED, 1986, p. 16)

Figura 13 – Nome das notas nas claves de sol e de fá.



Fonte: musicaeadoracao.com.br/26158/teoria-musical-online-leitura-de-musica-clave-de-sol-e-clave-de-fa/

etc.), já a clave de fá é utilizada para representar notas graves (violoncelo, tuba, fagote, sax baixo, contrabaixo, voz do tenor ou baixo, etc.).

É importante destacar ainda outro elemento da teoria musical, a *escala*. Escala (do latim *"scala"*, que significa escada) pode ser definida como uma sucessão de notas consecutivas ascendentes ou descendentes, ou até mesmo como uma sucessão ordenada de sons compreendidos numa oitava[1].

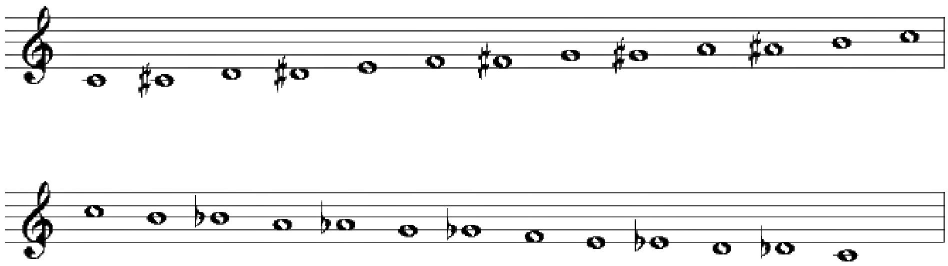
Quanto ao número de notas, uma escala pode ser classificada como pentatônica (5 notas), hexacordal (6 notas), heptatônica (7 notas), podendo ainda ser natural (diatônica) ou artificial (cromática). A escala diatônica é uma sequência de sete notas diferentes consecutivas com intervalo de um tom ou um semitom entre elas. A escala cromática é uma sequência de doze semitons consecutivos.

2.3 RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A TEORIA MUSICAL

É inegável que a matemática sempre esteve presente na história da humanidade, desde os tempos mais remotos com a contagem de objetos e animais até os dias atuais. Na tentativa de buscar fundamentos científicos para explicar fenômenos da natureza, os conceitos matemáticos atrelados à arte têm se intensificado ao longo dos anos, em especial a música, que apresenta características tão entrelaçadas à matemática que é quase impossível falar da teoria musical

[1] Intervalo entre uma nota musical e outra com o dobro ou a metade de sua altura (frequência).

Figura 14 – Escala cromática ascendente e descendente.



Fonte: notasdeouro.blogspot.com.br/p/vilino.html

sem recorrer, por diversas vezes, a conceitos matemáticos.

Na teoria musical, as propriedades matemáticas ajudam a compreensão de diversos conceitos como as fórmulas de compasso, o tempo de cada figura musical, a frequência das notas, a formação de escalas, as séries harmônicas, dentre outros. Entretanto é importante ressaltar que a matemática por si só não explica completamente a música, nem o contrário, mas os estudos em matemática/música deixam explícita a forte ligação entre essas duas áreas, aparentemente tão distintas.

2.3.1 Matemática e Música: da escala pitagórica à escala bem temperada

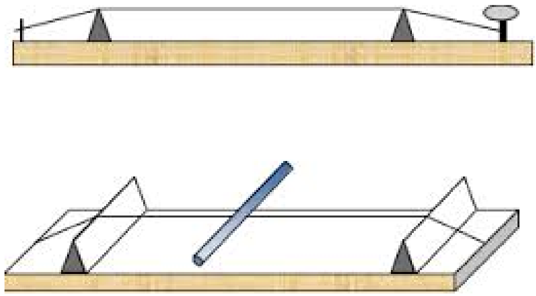
Desde a Antiguidade, a matemática e a música possuem profunda relação, apesar dos registros apresentarem essas duas áreas separadas na maioria das vezes. Mas, segundo ABDOUNUR (2006),

> (...) os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a. C., quando Pitágoras, através de experiências com sons do monocórdio, efetua uma de suas mais belas descobertas, que dá à luz, na época, ao quarto ramo da matemática: a música. Ibid., p. 4

O monocórdio é um instrumento composto por uma única corda esticada entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou uma caixa de ressonância, com um cavalete ou haste móvel sob a corda que a divide em dois segmentos. Atribui-se a Pitágoras a invenção do monocórdio, que buscava através de seus experimentos, relações entre o comprimento da corda e o som produzido por ela, utilizando razões entre números inteiros para explicar o fenômeno.

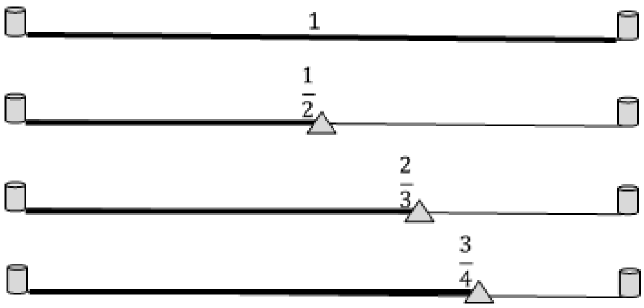
Pitágoras percebeu que pressionando um ponto situado a $\frac{1}{2}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade e tocando-a, o som produzido correspondia a oitava do som emitido pela corda inteira. De maneira análoga, pressionando a corda a $\frac{2}{3}$ do tamanho total da corda, ouvia-se a uma quinta acima e a $\frac{3}{4}$ era obtida uma quarta acima do tom original (Figura 16). De maneira mais clara, considerando uma corda esticada no monocórdio de comprimento original 12, ao reduzi-la para 6, ouve-se a oitava, para 8 o som emitido é a quinta acima e para 9, é obtida a quarta. Esses intervalos são conhecidos por consonâncias pitagóricas.

Figura 15 – Monocórdio de Pitágoras.



Fonte: matrix.fis.ucm.es/phystorm/experimentos-en-casa/101-expcasacategory/expdinamicasubcategoria/96-el-monocordio

Figura 16 – Consonâncias pitagóricas obtidas pressionando a corda do monocórdio.



Fonte: O autor

Os pitagóricos consideravam que os intervalos mencionados, obtidos em instrumentos de cordas ou mesmo em tubos de ar (como flauta simples composta por tubos de tamanhos diferentes) cujas dimensões estivessem relacionadas por frações simples, geravam combinações percebidas como agradáveis e essas consonâncias eram justificadas pelo fato de que os números 1, 2, 3 e 4 geravam toda a perfeição (ABDOUNUR, 2006, p. 6). O sistema musical criado por Pitágoras, no entanto, não era suficiente para gerar todos os acordes e sons conhecidos, tornando interessante estabelecer novos intervalos dentro de uma oitava.

Observe que, considerando os comprimentos da corda do monocórdio 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ as frequências das notas produzidas são proporcionais a 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ e 2 respectivamente, que na notação atual podem ser denominadas como dó, fá, sol e dó novamente, mas uma oitava acima. A nota fá caracteriza um intervalo de quarta (isto é, a quarta nota após a nota inicial dó), a nota sol, intervalo de quinta. A razão entre 2 e $\frac{4}{3}$ é igual a $\frac{3}{2}$, revelando que o intervalo entre a segunda e a quarta nota é novamente um intervalo de quinta, fato que colaborou com o surgimento de novas notas, tomando-se uma nota e multiplicando-a ou dividindo-a pelos fatores $\frac{3}{2}$ ou $\frac{4}{3}$ transpondo as notas obtidas à oitava referência.

A partir daí as notas da escala, utilizando a notação moderna e iniciando em dó, teriam as seguintes razões:

Tabela 1 – Gama pitagórica

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Apesar dessa gama pitagórica[2] ter sido utilizada durante toda a Idade Média e modificada apenas a partir do século XVI, esse percurso de quintas nem sempre encontrará uma nova nota com frequência equivalente à nota inicial do processo, o que significa dizer que todas as possíveis notas musicais e suas respectivas frequências não serão obtidas nesse processo. Algebricamente é possível verificar tal fato. Os intervalos de quinta possuem relações de frequência $\frac{3}{2}$, portanto, tomando uma nota com frequência f, após percorrer m quintas, a nota alcançada corresponde à frequência $f.\left(\frac{3}{2}\right)^m$. No entanto, os intervalos de oitavas naturais estão associados à frequência 2, ou seja, percorrendo n oitavas a nota obtida terá frequência multiplicada por 2^n. Portanto, pode-se afirmar que um número inteiro de quintas jamais será equivalente a um número inteiro de oitavas, isto é, $f.\left(\frac{3}{2}\right)^m \neq f.2^n$.

As notas produzidas nesse percurso possuem frequências intermediárias às notas da escala diatônica, que são os sustenidos ou os bemóis, de acordo com os intervalos de quinta tomados. Conforme explica CARVALHO et al. (2009, p. 9), o fato de que cada vez que se muda o ponto de partida da escala serem obtidas diferentes frequências, dificulta na produção de instrumentos musicais de uso universal e ainda na transposição da tonalidade de obras musicais. A partir daí, na busca para solucionar esse problema, a alternativa encontrada foi a construção de uma escala composta de 12 partes (semitons) no intervalo de oitava, obtidas inserindo 11 meios geométricos entre o som fundamental e sua oitava, cuja razão é $2^{\frac{1}{12}}$, ou seja, tomando 1 como frequência do som fundamental, serão obtidas para as outras notas da gama a sequência $2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, 2^{\frac{4}{12}}, ..., 2^{\frac{11}{12}}, 2$. Surge então a *escala bem temperada*.

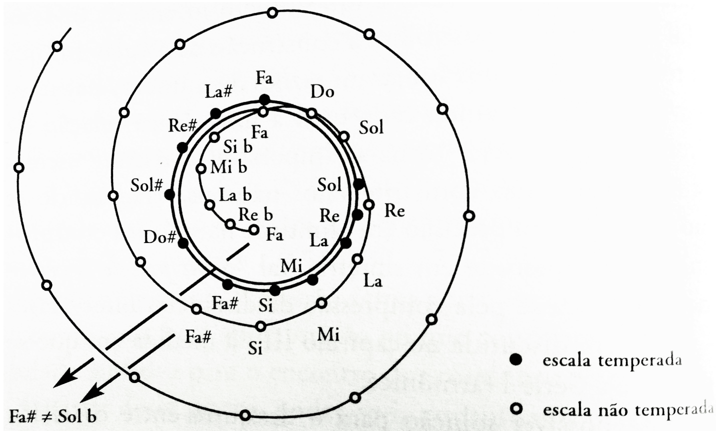
A Figura 17 ilustra bem a diferença entre as duas escalas, deixando claro que a espiral segue infinitamente para a escala não temperada enquanto que a escala temperada é distribuída simetricamente sobre uma circunferência, ou seja, permite um ciclo.

Na tabela 2, através do comparativo entre as frequências relativas das notas da escala pitagórica e da escala bem temperada é possível notar que algumas notas intermediárias, como ré$\sharp$ e mi$\flat$ por exemplo, tiveram suas frequências unificadas. Esse padrão absoluto de frequências para as notas musicais surgiu apenas em 1939, quando foi estabelecido um padrão de $440Hz$ para a nota lá (situada acida da nota dó central do piano), mas até então as orquestras de diversos países afinavam de forma diferente seus instrumentos.

Embora o temperamento tenha servido como um meio termo entre as distintas afinações e é utilizada no mundo todo atualmente, há sons incapazes de serem reproduzidos utilizando essa gama, como diversos sons na natureza ou até mesmo na execução de uma música chinesa,

[2] Como era chamada essa sequência formada de quintas puras.

Figura 17 – Escalas temperada e não temperada.



Fonte: (ABDOUNUR, 2006, p. 14)

Tabela 2 – Comparação entre as escalas pitagórica e temperada

Nota	Relação freq.(Pitagórica)	Freq (Hz)	Relação freq.(Temperada)	Freq (Hz)
Dó	1,000	132,000	1,000	132,000
Dó♯	1,053	139,061	1,059	139,788
Ré♭	1,067	140,958	1,059	139,788
Ré	1,125	148,500	1,122	148,104
Ré♯	1,185	156,444	1,189	156,948
Mi♭	1,200	158,578	1,189	156,948
Mi	1,265	167,062	1,260	166,320
Fá♭	1,265	167,062	1,260	166,320
Mi♯	1,332	175,999	1,335	176,220
Fá	1,333	176,000	1,335	176,220
Fá♯	1,404	185,415	1,414	186,648
Sol♭	1,423	187,945	1,414	186,648
Sol	1,500	198,000	1,498	197,736
Sol♯	1,580	208,592	1,587	209,484
Lá♭	1,601	211,438	1,587	209,484
Lá	1,687	222,750	1,682	222,024
Lá♯	1,777	234,666	1,782	235,224
Si♭	1,801	237,867	1,782	235,224
Si	1,898	250,593	1,888	249,216
Dó♭	1,898	250,593	1,888	249,216
Si♯	1,999	263,999	2,000	264,000
Dó	2,000	264,000	2,000	264,000

árabe ou indiana já que esses povos desenvolveram escalas com 5, 17 e 22 notas respectivamente.

2.3.2 Aspectos físicos e matemáticos do som

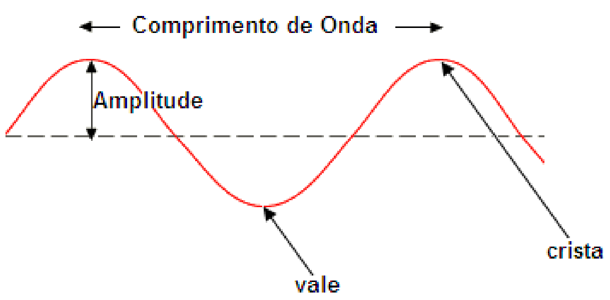
Compreender algumas propriedades musicais implica em conhecer as características físicas do som, que é a essência da música simplificadamente definida como a arte de combinar os sons. Antes de definir o som é importante apresentar algumas propriedades das ondas, com ênfase às mecânicas.

As ondas são movimentos oscilatórios que se propagam em um meio e transportam energia. Há duas categorias distintas de ondas, as *eletromagnéticas*, que não requerem um meio material para se propagar, isto é, podem se propagar no vácuo (ondas luminosas, raio-x ou de rádio, por exemplo), e ainda as ondas *mecânicas*, que segundo SERWAY e JR (2004), pode ser definida como a transferência de uma perturbação através de um meio material sem transferir matéria (por exemplo, o som).

Todas as ondas mecânicas requerem uma fonte de perturbação, um meio que possa ser perturbado e algum mecanismo físico pelo qual as partículas do meio possam influenciar umas às outras (Ibid., p. 441). Assim, a maioria dos instrumentos musicais produzem som por meio de vibrações de cordas (violino, guitarra, contrabaixo, etc.), vibrações da coluna de ar (instrumentos de sopro em geral) e vibrações oriundas de instrumentos de percussão (bateria, pandeiro, tamborim, etc.) e quase sempre o meio de propagação é o ar.

De acordo com a direção da vibração, as ondas mecânicas podem ser classificadas como *transversal*, quando as vibrações das partículas são perpendiculares à direção de propagação, ou *longitudinal*, se oscilam na direção de propagação (SEARS; ZEMANSKY; YOUNG, 1984), como é o caso das ondas sonoras. A representação gráfica de uma onda descreve uma curva cujo comportamento se repete em um determinado período, ou seja, é periódica, alternando sua concavidade para cima e para baixo ao atingir seu valor máximo (crista) ou mínimo (vale ou depressão).

Figura 18 – Representação de uma onda.

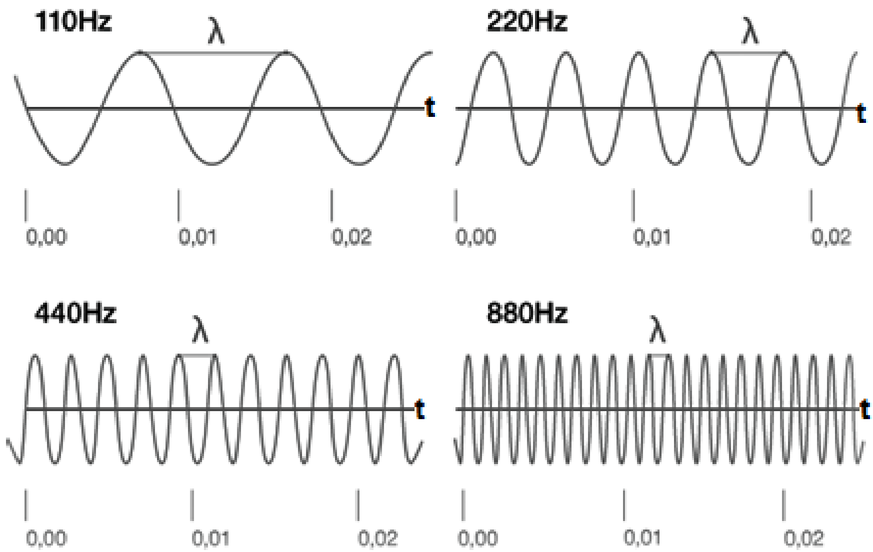


Fonte: www.lief.if.ufrgs.br/ cloliveira/introducao.html

O som é uma onda mecânica periódica e longitudinal que possui as seguintes características:

1. Frequência (f): número de oscilações completas da onda num determinado período de tempo, sendo mais comum a utilização do hertz (Hz), que significa ciclos por segundo. Assim, uma frequência de $120Hz$, por exemplo, significa que a onda completa 120 oscilações em 1 segundo. Musicalmente, é a frequência que possibilita classificar a altura do som, isto é, quanto maior a frequência da onda sonora, "mais agudo" esse som se apresenta e, quanto menor a frequência, "mais grave" será o som.

Figura 19 – Frequência da nota Lá em quatro oitavas diferentes.



Fonte: espacientifico.weebly.com/tema-5—bloque-xi.html

2. Amplitude (A): é o deslocamento máximo de uma partícula com relação ao ponto de equilíbrio, isto é, a metade da distância entre o vale e a crista da onda, e está relacionada diretamente à quantidade de energia transportada. A amplitude determina a intensidade do som ("mais fraco" ou "mais forte"), medida em decibéis (dB).

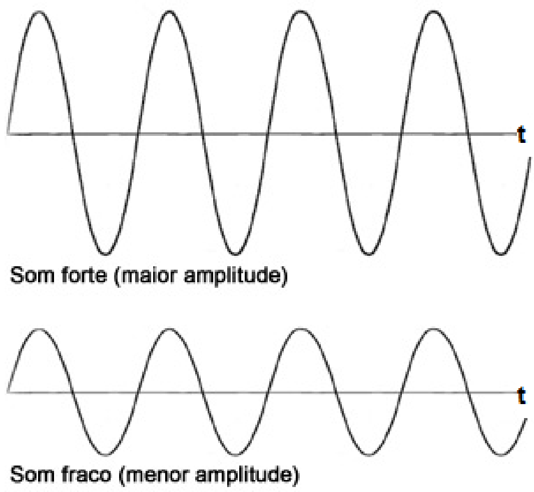
3. Comprimento da onda (λ): distância entre uma crista (ou vale) e outra(o), que denota a distância percorrida pelo som durante o período de vibração.

4. Período (T): é o tempo mínimo necessário para que uma partícula realize uma oscilação completa e é igual ao inverso da frequência (f):

$$T = \frac{1}{f} \tag{1}$$

5. Velocidade da onda (v): é razão entre a distância percorrida pelas ondas e o tempo gasto, ou seja, a velocidade em que as ondas se deslocam no meio, podendo variar de acordo com o meio que está sendo perturbado. As ondas sonoras se deslocam através do ar (à temperatura de $20°C$) com uma velocidade aproximada de $343m/s$, já numa barra de

Figura 20 – Ondas senoidais de mesma frequência com amplitudes distintas.



Fonte: www.explicatorium.com/cfq-8/caracteristicas-do-som.html

cobre essa velocidade aumenta para $3560 m/s$. Matematicamente, a velocidade pode ser representada por:

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \tag{2}$$

Outra característica importante das ondas sonoras é o timbre e está diretamente relacionada à qualidade própria do som, o que permite distinguir sua fonte geradora. Por exemplo, se uma nota for executada simultaneamente por um diapasão[3], um violino e uma flauta, é possível diferenciar o som de cada instrumento mesmo sendo essa nota de altura e intensidade iguais. Isso acontece porque cada instrumento (ou voz) gera ondas de formato singular (Figura 21).

Para melhor compreensão do que será discutido posteriormente, é importante destacar a representação matemática de uma onda, em especial as ondas senoidais que são resultados de oscilações em um movimento harmônico simples (MHS), produzidas por uma determinada fonte. O MHS é o movimento oscilatório que ocorre quando "a aceleração, e portanto, também a força resultante, são ambas proporcionais e opostas ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio" (TIPPLER; MOSCA, 2006, p. 466).

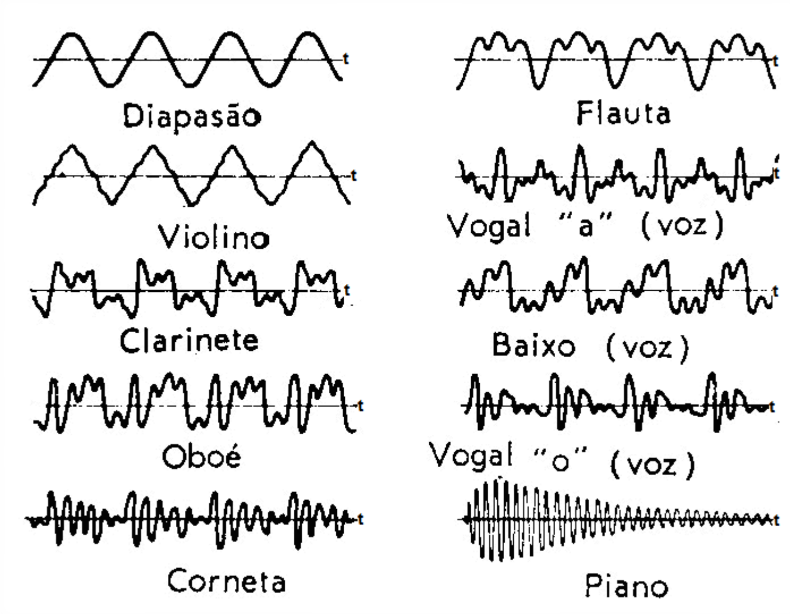
Matematicamente, a onda senoidal é representada por uma função cuja equação é dada por

$$y = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \tag{3}$$

em que a amplitude A representa o valor máximo do deslocamento, y é o deslocamento em uma posição qualquer x, λ é o comprimento de onda definido e consequentemente, $\frac{2\pi}{\lambda}$ influencia diretamente no seu período e é chamado de *número de onda*.

[3] Instrumento metálico com formato de forquilha usado para auxiliar na afinação de instrumentos ou vozes e que, ao fazê-lo vibrar emite o som da nota Lá ($440 Hz$).

Figura 21 – Formatos de ondas.



Fonte: www.fonologia.org/imagens/img_som_timbre.jpg

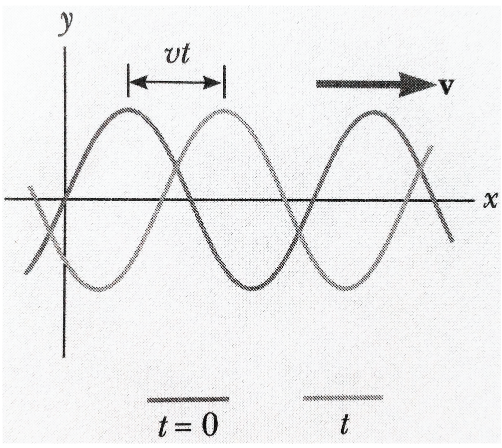
É possível verificar que quando o valor de x é aumentado por um múltiplo inteiro de λ, ao se deslocar para a direita com velocidade v, a função da onda num instante posterior t é

$$y = A\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]. \tag{4}$$

Dessa forma, como $v = \frac{\lambda}{T}$, então substituindo na equação anterior obtém-se a Equação (5), mostrando a natureza periódica de y no espaço e no tempo.

$$y = A\,\mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]. \tag{5}$$

Figura 22 – Onda senoidal se deslocando para a direita com velocidade v (onda progressiva).



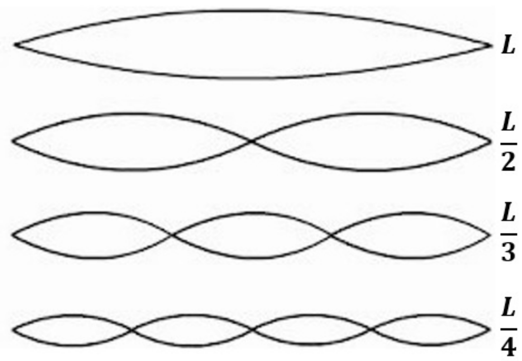
Fonte: (SERWAY; JR, 2004, p. 447)

O som, no entanto, é um dos fenômenos ondulatórios presentes na natureza que não pode ser descritos por uma única onda, mas por uma combinação de várias ondas progressivas. Assim, ao tocar um instrumento musical cada nota executada é composta da superposição de vários sons de frequências distintas. Essa série de sons é denominada Série Harmônica.

2.3.3 Séries Harmônicas

Um som musical tem sempre uma altura definida e resulta em uma vibração ondulatória regular. Essa vibração é composta pelo som gerador (também conhecido por som fundamental) e uma série de sons de menor intensidade, mas de frequência maior, denominados *harmônicos*, formando assim a *Série Harmônica*. Tomando como exemplo a quarta corda do violoncelo (nota Dó grave), além de vibrar em toda a sua extensão, também vibra em sua metade, em sua terça parte, quarta parte, e assim por diante, gerando sons mais agudos mas de baixa intensidade. Dessa forma obtêm-se a nota Dó (fundamental ou 1° harmônico), nota Dó uma oitava acima (2° harmônico), nota Sol uma oitava acima (3° harmônico), etc.

Figura 23 – Vibrações em uma corda de comprimento L.



Fonte: espalhandomusica.blogspot.com.br/2014/04/origem-das-notas-musicais-serie.html

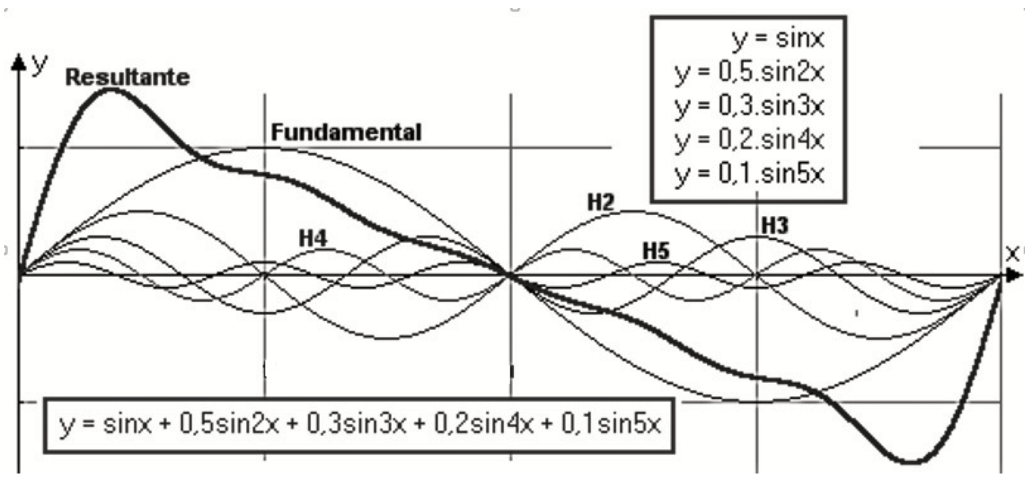
Nesse caso, como o comprimento de uma corda é inversamente proporcional à frequência do som gerado, o som fundamental é o que possui a menor frequência, já o segundo harmônico tem frequência duas vezes maior, o terceiro três vezes maior e assim sucessivamente. Então relativamente à frequência f_1 a série harmônica de cada nota musical obedece o seguinte padrão: f_1, $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, $5f_1$, ... Matematicamente a Série Harmônica é infinita e pode ser representada como uma função periódica através de uma soma de funções senoidais, ou seja:

$$f(x) = k_1 \operatorname{sen}(2\pi.f_1x) + k_2 \operatorname{sen}(2\pi.2f_1x) + k_3 \operatorname{sen}(2\pi.3f_1x) + ... \qquad (6)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}(2\pi.nf_1x) \qquad (7)$$

sendo k_n a amplitude (ou intensidade) dos harmônicos e $n.f_1$ a frequência de cada harmônico a partir da frequência fundamental f_1. É importante ressaltar que a sequencia k_n decresce na medida que n cresce, já que os harmônicos são cada vez menos intensos enquanto as frequências aumentam linearmente.

Figura 24 – Representação dos cinco primeiros harmônicos de uma nota.



Fonte: www.feiradeciencias.com.br/sala14/image14/14_T05_05.gif

Na Figura 24 estão representados os cinco primeiros harmônicos provenientes de uma determinada vibração com frequências iguais a $1,2,3,4,5,6$, etc. e cujas amplitudes k_n foram atribuídos aleatoriamente, mas decrescentes. A onda resultante da superposição desses harmônicos é representada pela função

$$y = \text{sen}(x) + 0{,}5\,\text{sen}(2x) + 0{,}3\,\text{sen}(3x) + 0{,}2\,\text{sen}(4x) + 0{,}1\,\text{sen}(5x) \qquad (8)$$

em que $\text{sen}(x)$ representa o 1^{o} harmônico (fundamental), $0{,}5\,\text{sen}(2x)$ o 2^{o} harmônico (H2), $0{,}3\,\text{sen}(3x)$ o 3^{o} harmônico (H3) e assim por diante.

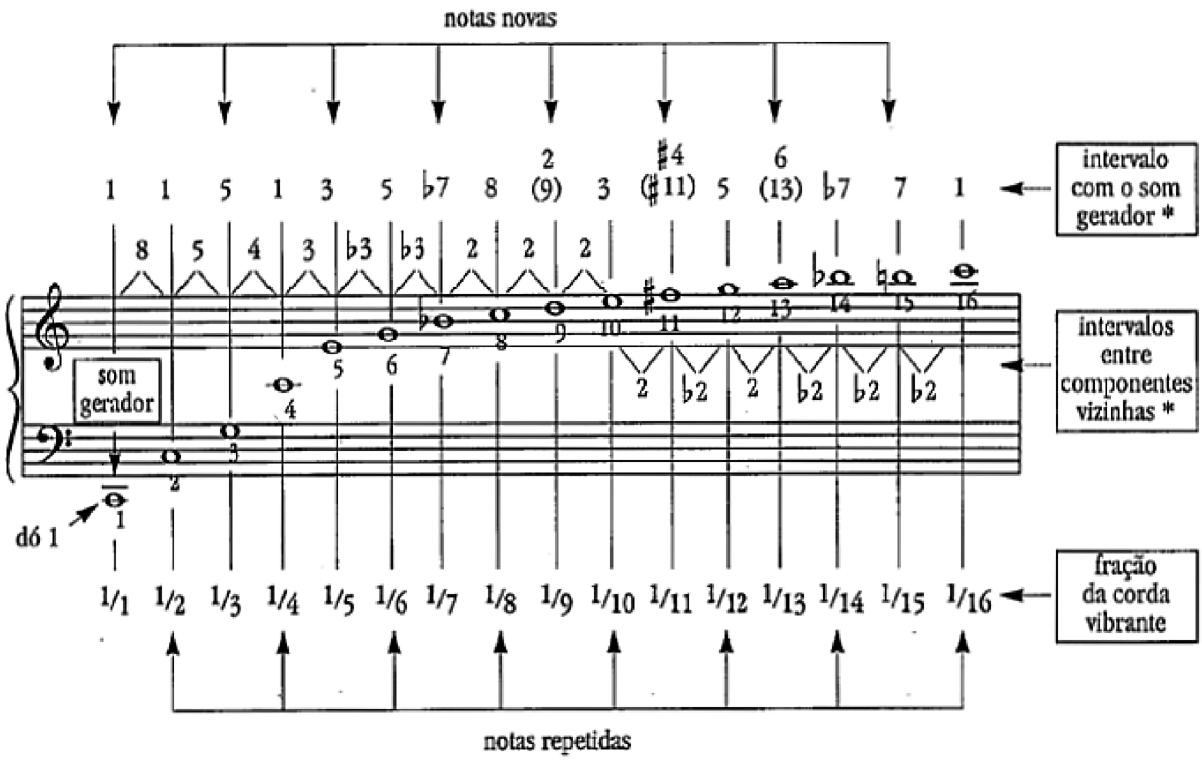
Uma nota musical quando emitida é determinada sempre pelo som gerador, ou seja, se a frequência fundamental corresponder a $440Hz$, então o som corresponde à nota Lá (segunda corda do violino). Os harmônicos que acompanham o som fundamental podem variar de acordo com cada instrumento musical (ou voz) e são fatores determinantes na qualidade sonora, isto é, o timbre resulta da intensidade e da qualidade dos harmônicos que acompanham o som fundamental. Um saxofonista, por exemplo, pode evidenciar diferentes harmônicos soprando com mais ou menos intensidade, ou até mesmo mudando o posicionamento da boquilha do instrumento na boca.

Musicalmente, os primeiros harmônicos que acompanham um som gerador podem ser apresentados no pentagrama, deixando visível que os intervalos entre o primeiro e os demais harmônicos estabelecem uma hierarquia entre consonância e dissonância[4]. As seis primeiras notas, a partir do som gerador, possuem som mais forte e são consideradas consonantes e, a

[4] **Consonantes** são intervalos mais estáveis em que duas notas soam sem que uma cause interferência na outra e são agradáveis ao ouvido, já os intervalos **dissonantes** são instáveis e a vibração de uma nota interfere na outra, causando a sensação de "desafinação".

partir da sétima nota, o som tende a ficar cada vez mais fraco, formando intervalos dissonantes.

Figura 25 – Representação dos 16 primeiros harmônicos da nota Dó.



Fonte: www.dirsom.com.br/index_htm_files/Serie%20Harmonica.pdf

Os padrões de onda produzidos pela maioria dos instrumentos musicais não são senoidais, no entanto, como já mencionado, as ondas sonoras tem característica periódica. Isso permite representa-las com precisão arbitrária pela combinação de um número suficientemente grande de ondas senoidais que formam uma série harmônica, em outras palavras, qualquer função periódica pode ser representada como uma série de termos de seno e de cosseno. A soma desses termos que representam a forma de onda periódica é denominada Série de Fourier, tema que será abordado no capítulo 3.

3 SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi um matemático e físico francês famoso por seus estudos relacionados à decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes e suas aplicações, apresentadas na *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria Analítica do Calor, 1822).

Este capítulo abordará as definições, os conceitos e exemplos relacionados às Séries e às Transformadas de Fourier. No entanto, para melhor compreensão é imprescindível uma breve discussão sobre as funções ortogonais.

3.1 FUNÇÕES ORTOGONAIS

Antes de apresentar a definição de ortogonalidade de funções, recordemos algumas propriedades elementares dos vetores.

Dois vetores $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$ são chamados ortogonais se o produto interno entre eles for nulo, isto é, $<\vec{u},\vec{v}> = 0$ ou $\vec{u}.\vec{v} = (ac+bd) = 0$. A definição é válida para vetores com três ou mais componentes, embora não seja possível representar geometricamente vetores com um número maior do que três componentes.

Em particular, pode-se pensar numa função $A(x)$ como um vetor com uma infinidade de componentes, sendo o valor de cada componente determinado pela substituição de valores x pertencentes ao intervalo $[a,b]$ (SPIEGEL, 1974).

Assim, duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ditas ortogonais no intervalo $[a,b]$ se

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0, \tag{9}$$

sendo $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ definida como o produto interno (ou produto escalar) de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Exemplo 1. Verifique se as funções $p(x) = 2x^3$ e $q(x) = x^2$ são ortogonais em $[-2,2]$.

Solução:

$$(p,q) = \int_{-2}^{2} 2x^3x^2dx = \left[\frac{x^6}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$(p,q) = \frac{1}{3}(2^6 - (-2)^6)$$

$$(p,q) = 0$$

Como o produto interno de p(x) e q(x) é zero, então as funções são ortogonais em [-2,2].

Exemplo 2. Mostre que as funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{sen}(5x)$ são ortogonais no intervalo $[0,\pi]$.

Solução:

Identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx) = \frac{\cos((k-w)x) - \cos((k+w)x)}{2} \tag{10}$$

Demonstração:

$$I.\cos(kx+wx) = \cos(kx)\cos(wx) - \text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx)$$

$$II.\cos(kx-wx) = \cos(kx)\cos(wx) + \text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx)$$

De II-I tem-se:

$$\cos(kx-wx) - \cos(kx+wx) = 2\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx)$$

Logo,

$$\text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx) = \frac{\cos((k-w)x) - \cos((k+w)x)}{2} \quad \square$$

Assim:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\,\text{sen}(5x)dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(x-5x) - cos(x+5x)]\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(-4x) - \cos(6x)]\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(4x)}{4} - \frac{\text{sen}(6x)}{6}\right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(4\pi)}{4} - \frac{\text{sen}(6\pi)}{6}\right] - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{sen}(5x)$ são ortogonais em $[0,\pi]$.

Um vetor $\vec{u}$ é chamado vetor unitário ou vetor normalizado se sua magnitude for a unidade, isto é, se $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = 1$. Estendendo o conceito, dizemos que a função $A(x)$ é normal ou normalizada em $[a,b]$ se

$$\int_a^b \{A(x)\}^2\,dx = 1 \tag{11}$$

Assim, um conjunto de funções $\{\phi_k(x)\}$, para $k = 1,2,3,...$, com as propriedades

$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_w(x)dx = 0, \quad \text{para } k \neq w$$

$$\int_a^b \{\phi_k(x)\}^2\,dx = 1, \quad \text{para } k = 1,2,3,...$$

é chamado *ortogonal* e *ortonormal* no intervalo $[a,b]$.

Exemplo 3. Verifique se o conjunto de funções $\{\text{sen}(x), \text{sen}(2x), \text{sen}(3x), ...\}$ é ortogonal no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solução:
Deve-se verificar se $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx)dx = 0$, para $k \neq w$ $(k,w \in \mathbb{N}\cup\{0\})$:
Substituindo a identidade (10) temos,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(kx)\,\text{sen}(wx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k-w)x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k+w)x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}((k-w)x)}{k-x} - \frac{\text{sen}((k+w)x)}{k+x}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Portanto, o conjunto é ortogonal no intervalo dado.

Um vetor qualquer $\vec{v}$ (de três dimensões, por exemplo) pode ser expandido em um conjunto de vetores unitários ortogonais i, j, k na forma $\vec{v} = c_1 i + c_2 j + c_3 k$, então considerando a possibilidade de expandir uma função $f(x)$ em um conjunto de funções ortonormais, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad a \leq x \leq b, \tag{12}$$

são obtidas as denominadas *séries ortonormais* que são generalizações das séries de Fourier.

3.2 SÉRIES DE FOURIER (FS)

Uma função $f(x), f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $T > 0$ é o período de f.

Suponha $f(x)$ periódica com $T = 2\pi$, a série de Fourier ou expansão de Fourier correspondente a $f(x)$ é definida por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)), \quad 0 < x < 2\pi. \tag{13}$$

O termo constante $\frac{a_0}{2}$ é tomado por conveniência e a_n, b_n são chamados de coeficientes de Fourier, tais coeficientes serão apresentados mais adiante. As fórmulas

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x); \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\,\text{sen}(x)$$

conhecidas como *identidades de Euler*, podem ser usadas para escrever as Séries de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

onde os coeficientes são

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}; \quad n = 1,2,3,...; \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Assumindo que a função f de período 2π tem expansão em Séries de Fourier, os coeficientes c_n são determinados seguindo as propriedades de ortogonalidade das exponenciais complexas e^{inx}, $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ 2\pi, & \text{se } n = m \end{cases}$$

Demonstração:

Para $n \neq m$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

Efetuando mudança de variável, segue que

$$u = i(n-m)x; \qquad du = i(n-m)xdx \Rightarrow \frac{du}{i(n-m)x} = dx$$

Logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{i(n-m)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{u} du =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} [\cos(n-m)\pi + i\,\text{sen}(n-m)\pi - \cos(n-m)\pi + i\,\text{sen}(n-m)\pi] =$$

$$= \frac{2}{(n-m)} \text{sen}(n-m)\pi = 0. \quad \square$$

Para $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0} dx = 2\pi.$$

Logo, com $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) e^{-imx} dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi c_m$$

Consequentemente,

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx, \qquad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \square$$

Assim, os coeficientes de seno e cosseno de Fourier são dados por:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \tag{14}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-inx} + e^{inx})dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \tag{15}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-inx} - e^{inx})dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx \tag{16}$$

Portanto, as expansões

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{17}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)) \tag{18}$$

são chamadas de Séries de Fourier de $f(x)$, sendo a primeira na forma exponencial e a segunda na forma trigonométrica.

Note que, se $f(x)$ é uma função periódica par, ou seja, $f(-x) = f(x)$ para todo x, então

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(+x)\,\mathrm{sen}(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\,\mathrm{sen}(-nx)(-dx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-f(-x) + f(x))\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0, \quad \text{para } n = 1,2,3,\ldots$$

Dessa forma, a série de Fourier da função $f(x)$ pode ser escrita usando apenas termos cossenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)) \tag{19}$$

com coeficientes determinados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\cos(-nx)(-dx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(-x) + f(x))\cos(nx)dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad \text{para } n = 1,2,3,\ldots$$

Analogamente, se $f(x)$ é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$, então

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\cos(-nx)(-dx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-f(x)+f(x))\cos(nx)dx = 0, \quad \text{para } n = 1,2,3,...$$

Desse modo, a série de Fourier da função $f(x)$ pode ser escrita usando apenas termos senos

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \operatorname{sen}(nx)) \tag{20}$$

cujos coeficientes são

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\operatorname{sen}(-nx)(-dx) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-f(-x)+f(x))\operatorname{sen}(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \quad \text{para } n = 1,2,3,...$$

Vale ressaltar que, embora tenha sido considerada $f(x)$ com período igual a 2π, as implicações apresentadas valem para qualquer função periódica com período $T > 0$.

De modo simplificado, as Séries de Fourier são capazes de representar, exatamente ou aproximadamente, qualquer função periódica, sendo que a igualdade só acontece quando a função é seccionalmente diferenciável.

Exemplo 4. Desenvolva a função periódica ($T = 2\pi$) dada por $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ em Série de Fourier:

Solução:

A Figura 26 mostra o esboço do gráfico da função $g(x)$. Calculando os coeficientes de Fourier, temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos(nx)dx + \int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right] = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen}(nx)dx + \int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)dx\right] =$$

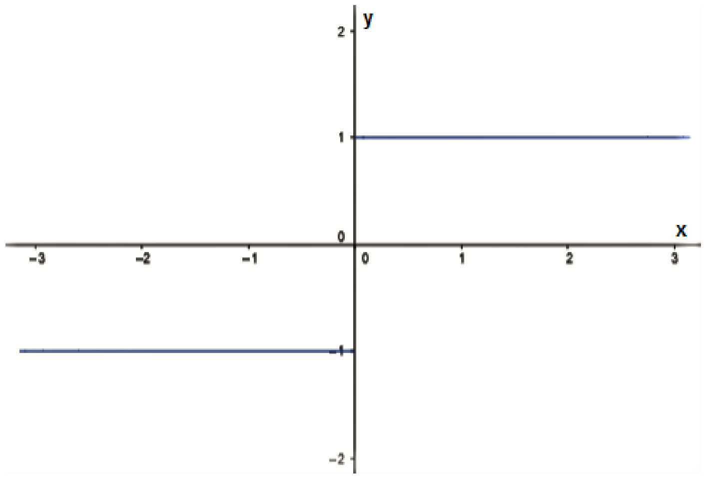
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left(-\frac{\cos(0n)}{n}+\frac{cos(-\pi n)}{n}\right)+\left(-\frac{\cos(\pi n)}{n}+\frac{cos(0n)}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2-2\cos(\pi n)}{n}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right].$$

Portanto, a Série de Fourier de g é dada por

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\operatorname{sen}(nx).$$

Figura 26 – Gráfico da função g(x).

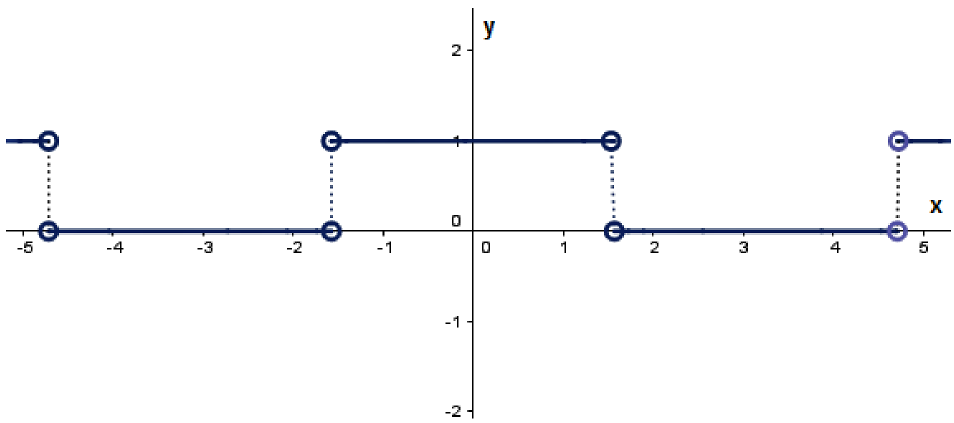


Fonte: O autor

Exemplo 5. Seja a função $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ escreva as somas parciais dos cinco primeiros termos da Série de Fourier.

Solução:
A Figura 27 apresenta o gráfico da função $f(x)$ π-periódica, conhecida por onda quadrada.

Figura 27 – Gráfico da função $f(x)$ – onda quadrada.



Fonte: O autor

Como $f(x)$ é par, o coeficiente b_n da série é igual a zero, ou seja, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx))$. Calculando os coeficientes a_n, obtemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = 1;$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}$$

Note que $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}, \ldots, \quad (k \in \mathbb{N})$ é sempre zero, o que significa que a onda quadrada possui apenas as harmônicas inteiras ímpares.

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(3x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} - \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{3}\right] = -\frac{2}{3\pi}$$

$$a_5 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(5x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5} - \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{5}\right] = \frac{2}{5\pi}$$

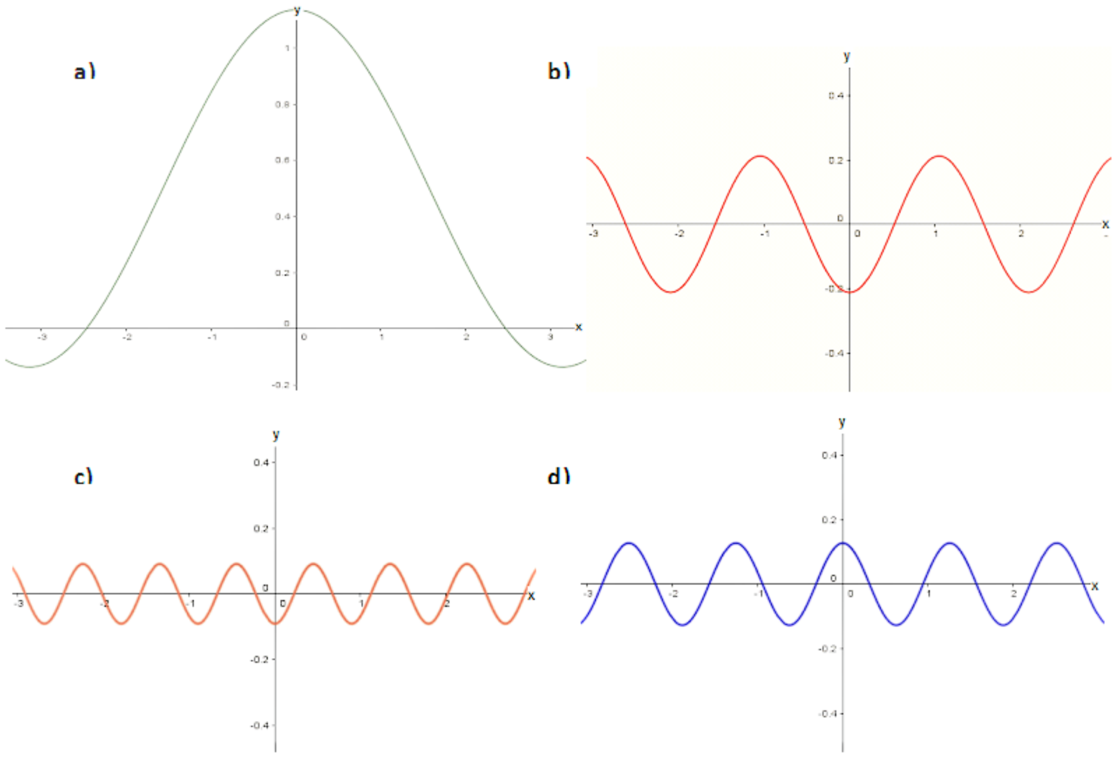
$$a_7 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(7x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{7} - \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{2}\right)}{7}\right] = -\frac{2}{7\pi}$$

Portanto, as primeiras somas parciais da Série de Fourier associada à função $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(x) - \frac{2}{3\pi}\cos(3x) + \frac{2}{5\pi}\cos(5x) - \frac{2}{7\pi}\cos(7x) + \ldots$$

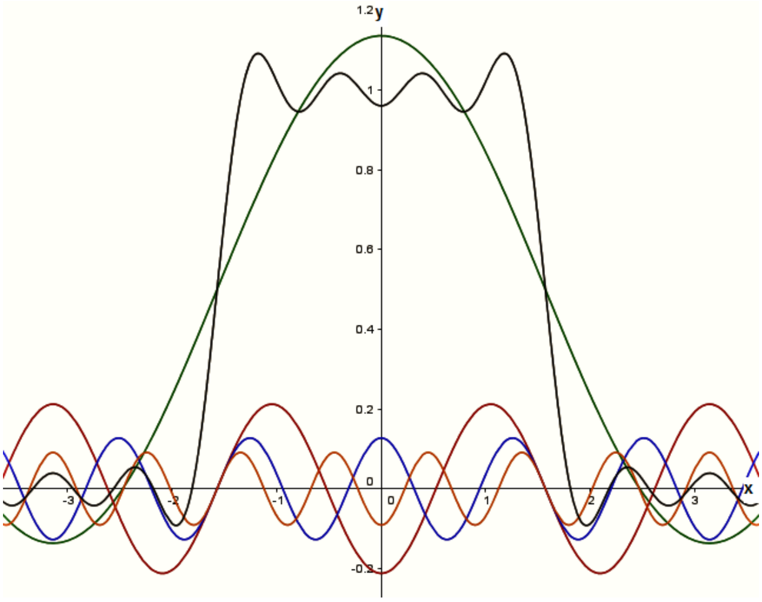
Considerando as funções $y_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(x)$, $y_2 = -\frac{2}{3\pi}\cos(3x)$, $y_3 = \frac{2}{5\pi}\cos(5x)$ e $y_4 = -\frac{2}{7\pi}\cos(7x)$, observe (Figura 28) que y_1 representa a frequência fundamental e y_2, y_3, y_4 são as harmônicas. A onda resultante $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ (Figura 29) aproxima-se à onda quadrada da função $f(x)$, sendo que quanto maior o número de harmônicos somados, melhor será essa aproximação (Figura 30).

Figura 28 – a) Gráfico de $y_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(x)$. **b)** Gráfico de $y_2 = -\frac{2}{3\pi}\cos(3x)$. **c)** Gráfico de $y_3 = \frac{2}{5\pi}\cos(5x)$. **d)** Gráfico de $y_4 = -\frac{2}{7\pi}\cos(7x)$.



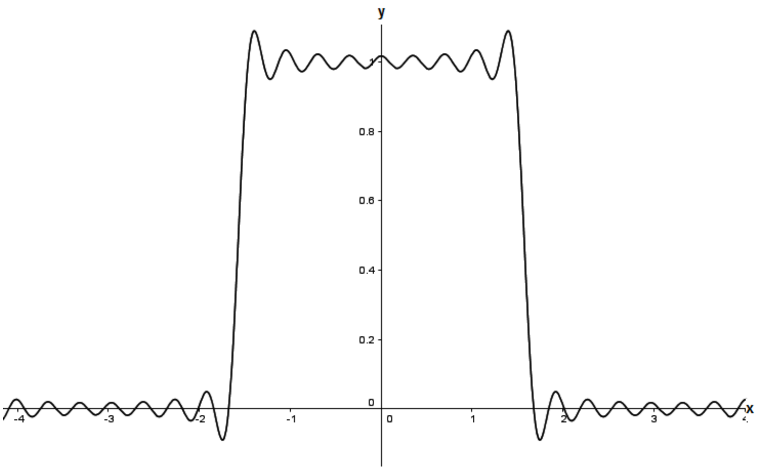
Fonte: O autor

Figura 29 – Gráfico das somas parciais dos 5 primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.



Fonte: O autor

Figura 30 – Gráfico das somas parciais dos 12 primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.



Fonte: O autor

As definições, conceitos e exemplos abordados até aqui, consideram a expansão em Série de Fourier de funções periódicas de período T. No entanto, em meio às discussões, pode surgir o seguinte questionamento: o que acontece quando $T \to \infty$? Essa questão leva à abordagem sobre a integral de Fourier e, portanto, a Transformada de Fourier, desde que $f(x)$ seja integrável sobre todo o domínio.

3.3 INTEGRAL E TRANSFORMADA DE FOURIER (FT)

Dado o intervalo $-L < x < L$, a Série de Fourier de uma função $f(x)$ é dada por $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}$ com $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{in\pi x/L}dx$. Desse modo, reescrevendo o somatório como soma de Riemann, segue

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L} \quad \text{e} \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega F_n e^{-i\omega_n x},$$

quando

$$f_n \equiv (2Lc_n) = \int_{-L}^{L} f(x')e^{i\omega_n x'}dx'$$

No limite $L \to \infty$, ω_n se torna ω, que assume valores contínuos em $-\infty < \omega < \infty$. Assim $F_n \to F(\omega)$, onde

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{i\omega_n x'}dx',$$

e ainda,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega.$$

Portanto, a fórmula da integral de Fourier será

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{i\omega_n x'}dx' \right] e^{-i\omega_n x}d\omega. \tag{21}$$

Essa equação permite definir a Transformada de Fourier e a transformada inversa.

Seja a Transformada de Fourier denotada por $\mathcal{F}[f(x)]$, segue a definição:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \tag{22}$$

A transformada inversa, $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$, recupera a função original f(x) e é definida por

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \tag{23}$$

É importante enfatizar que a definição matemática de Transformada de Fourier e a transformada inversa apresentadas não é única, em alguns casos pode aparecer o fator $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ em $\mathcal{F}[f(x)]$ e em $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$, ou ainda pode aparecer o fator $\frac{1}{2\pi}$ apenas na fórmula da transformada ao invés da transformada inversa. Enfim, em todos os casos, na fórmula da integral de Fourier sempre existe o fator $\frac{1}{2\pi}$ quando as duas integrais são desenvolvidas.

Na prática, as aplicações das Transformadas de Fourier estão diretamente relacionadas ao estudo dos sinais. A interação diária do ser humano com o ambiente se dá através de diversos tipos de sinais, como os sonoros e os eletromagnéticos e, em termos matemáticos, um sinal é descrito como uma função do tempo, a qual é o modo como geralmente é visto quando sua forma de onda é mostrada em um osciloscópio[1] ou em algum software no computador (HAYKIN; MOHER, 2008).

[1] Instrumento que permite visualizar graficamente sinais elétricos.

Desse modo, a Transformada de Fourier de um sinal especifica as amplitudes complexas das componentes que constituem a descrição no domínio da frequência ou o espectro desse sinal, além disso, fornece importantes informações sobre a relação entre o sinal definido no domínio do tempo e sua descrição no domínio da frequência. Já a transformada inversa recupera o sinal quando dada a descrição no domínio da frequência. Em suma, um sinal pode ser caracterizado pelo seu modelo espacial ou pelo seu modelo de frequências (modelo espectral) e, de modo geral, o primeiro modelo é utilizado para a síntese e o segundo para a análise de sinais.

Para garantir a existência da Transformada de Fourier de um denominado sinal $f(t)$, é suficiente, embora não necessário, que $f(t)$ satisfaça três condições:

1. Possui um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito;
2. Possui um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo de tempo finito;
3. É absolutamente integrável, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$.

Essas observações são chamadas de *condições de Dirichlet*, no entanto, todo sinal fisicamente realizável (sinal de voz, por exemplo) garante a existência da transformada, podendo estas serem ignoradas.

Exemplo 6. Considere uma função $f(t)$ de pulso retangular, definida por $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{-1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } t < \frac{-1}{2} \text{ ou } t > \frac{1}{2} \end{cases}$ sua Transformada de Fourier $F(\omega)$ de $f(t)$ é dada por

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-1/2}^{1/2} 1.e^{i\omega t}dt = \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{i\omega}\left(e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{\frac{-i\omega}{2}}\right)$$

Utilizando a identidade de Euler, segue que

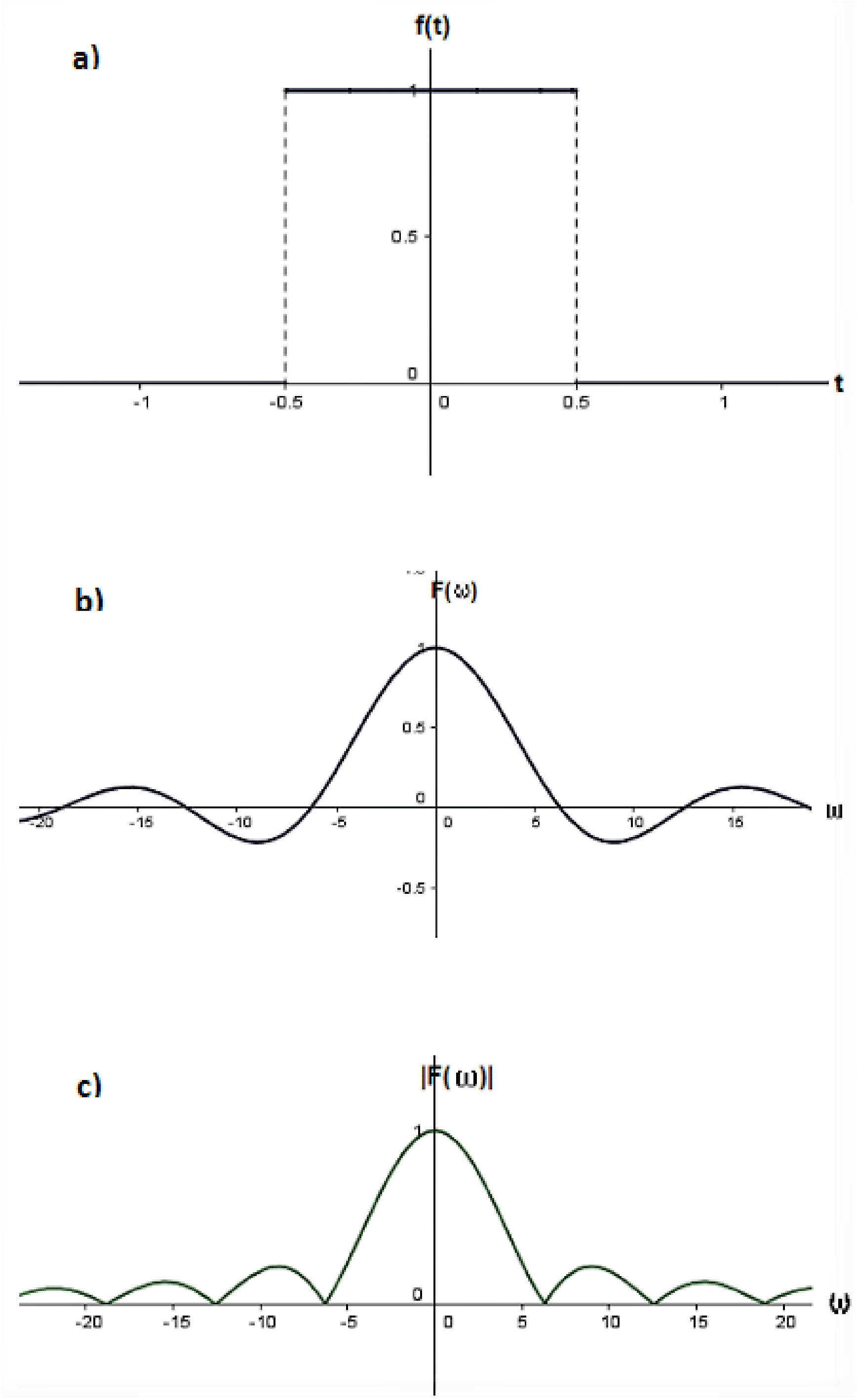
$$\mathcal{F}[f(t)] = 2.\frac{1}{2}.\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega.\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = sinc\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

O espectro contínuo de amplitude do sinal é descrito por $|\mathcal{F}[f(t)]|$, isto é, $|sinc\left(\frac{\omega}{2}\right)|$ (Figura 31).

3.4 REPRESENTAÇÃO DE FOURIER PARA SINAIS DE TEMPO DISCRETO

Segundo OPPENHEIM e SCHAFER (1998) o termo "sinal" é, de modo intuitivo, aplicado para algo que transmite informações. Os sinais geralmente transmitem informações sobre

Figura 31 – **a)** Pulso retangular – função $f(t)$. **b)** Transformada de Fourier de f(t) – função sinc. **c)** Espectro de amplitude $|sinc\left(\frac{\omega}{2}\right)|$.



Fonte: O autor

o comportamento de um sistema físico e, muitas vezes, são sintetizados com o propósito de estabelecer a comunicação entre pessoas por meio equipamentos eletroeletrônicos. Esses sinais são representados matematicamente por meio de funções com uma ou mais variáveis, podendo estas ser contínua ou discreta.

As abordagens sobre as Séries e as Transformadas de Fourier feitas até aqui trataram exclusivamente de sinais de tempo contínuo, que são definidos ao longo de um *continuum* de tempo e assim, representados por uma variável contínua e são denominados *sinais analógicos*. Os sinais de tempo discreto são denominados *sinais digitais*, cujo tempo e amplitude assumem valores discretos, ou seja, os sinais são representados por uma sequência numérica.

Uma sequência de números x, em que o enésimo número é denotado por $x[n]$, é formalmente representada como

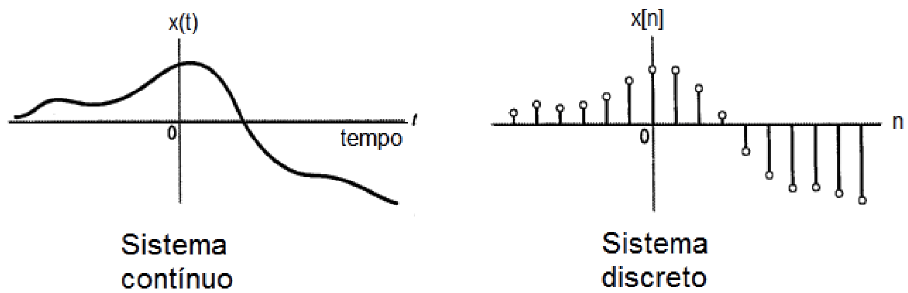
$$x = \{x[n]\}, \quad \text{para } -\infty < n < \infty$$

com $n \in Z$. Na prática, essa sequência pode ser obtida por meio de amostragem de um sinal analógico, onde nesse caso, o valor numérico do enésimo termo é igual ao valor do sinal analógico $x_a(t)$ no tempo nT, ou seja,

$$x[n] = x_a(nT), \quad \text{para } -\infty < n < \infty$$

em que T é o período da amostra e, consequentemente o período de frequência. Dessa forma, é conveniente se referir ao termo $x[n]$ como a enésima amostra da sequência.

Figura 32 – Exemplo de sinais de tempo contínuo e discreto.



Fonte: www.tdps.com.br/wp-content/uploads/2016/07/fig22b.png

3.4.1 Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS) ou Transformada Discreta de Fourier (DFT)

A Série de Fourier de Tempo Discreto[2], representa um sinal de tempo discreto $x[n]$ com período N como a série

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{ik\Omega_0 n} \tag{24}$$

onde $\hat{x}[n] \approx x[n]$, $\Omega_0 = 2\pi/N$ é a frequência fundamental de $x[n]$, $k\Omega_0$ é a frequência do k-ésimo senoide na superposição de senoides complexas, N representa o número de senoides complexas distintas da forma $e^{ik\Omega_0 n}$ e $k = \langle N \rangle$ implica admitir que k varie ao longo de quaisquer N valores consecutivos. O termo $A[k]$ é o coeficiente aplicado à k-ésima senoide complexa

[2] A DTFS normalmente é tratada nas literaturas como DFT, no entanto, para evitar confusão com a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT), foi adotado o termo DTFS utilizado por HAYKIN e VEEN (2001).

e pode ser calculado minimizando o erro médio quadrático (EMQ) entre o sinal e sua representação em série (HAYKIN; VEEN, 2001).

A construção da representação em série garante a periodicidade do sinal e da própria representação com o mesmo período. Em consequência disso, o EMQ será dado pela média do quadrado da diferença entre o sinal e sua representação em qualquer período, ou seja,

$$EQM = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n] - \hat{x}[n]|^2.$$

De maneira sucinta, quando o EMQ é zero, o erro é nulo para cada valor de n e, consequentemente, $\hat{x}[n] = x[n]$.

A representação por DTFS para $x[n]$ poderá então ser dada por

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} A[k]e^{ik\Omega_0 n} \tag{25}$$

$$A[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-ik\Omega_n} \tag{26}$$

em que $x[n]$ tem período fundamental N e $x[n]$, $A[k]$ denotam um par de DTFS que fornecem uma descrição completa do sinal. A representação pelos coeficientes da DTFS é conhecida como representação de domínio de frequência, pois cada coeficiente é associado com uma senoide complexa de frequência diferente (HAYKIN; VEEN, 2001, p. 171).

3.4.2 Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

Intuitivamente a DTFT pode ser compreendida a partir da ideia da FS ou da DTFS, descrevendo um sinal não periódico como o limite de um sinal periódico, com o período N tendendo ao infinito. Nesse caso, se $\tilde{x}[n]$ é um sinal periódico de período N, então um sinal $x[n]$ não periódico de duração finita pode ser definido como um período de $\tilde{x}[\tilde{n}]$.

A Figura 33 apresenta um exemplo de aproximação de um sinal não periódico com um sinal periódico de período $N = 2M + 1$. Note que, à medida que M aumenta, as repetições no gráfico de $x[n]$ (presentes em $\tilde{x}[n]$) se distanciam cada vez mais da origem, de modo que, quando $M \to \infty$, $\tilde{x}[n] \to x[n]$, isto é,

$$\lim_{M\to\infty} \tilde{x}[n] = x[n].$$

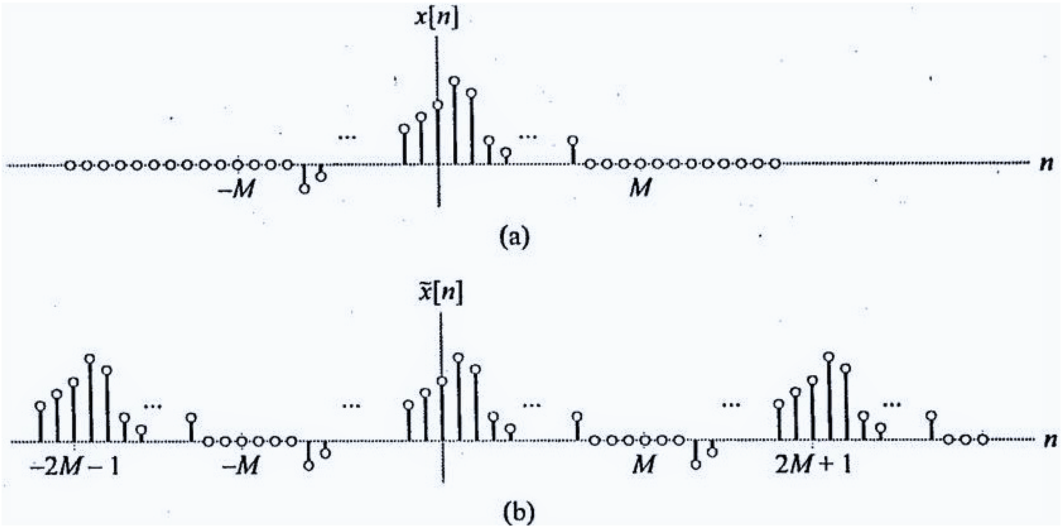
A representação por DTFT de $x[n]$ é expressa por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\Omega})e^{i\Omega n}d\Omega, \tag{27}$$

onde

$$X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{i\Omega n}.$$

Figura 33 – Aproximação de um sinal não periódico com um sinal periódico.



Fonte: (HAYKIN; VEEN, 2001, p. 188)

A transformada $X(e^{i\Omega})$ descreve o sinal $x[n]$ como função de frequência senoidal Ω representada no domínio da frequência, isto é, ela converte o sinal no domínio do tempo para a representação no domínio da frequência de $x[n]$. Já a Equação (27), converte o sinal no domínio da frequência pra o domínio do tempo (DTFT inversa).

Em geral, a DTFT é uma representação de Fourier apropriada para sinais não periódicos enquanto que a DTFS é utilizada para representar sinais periódicos. Na prática, muitas vezes não se dispõe de uma expressão analítica para a função que deseja analisar o espectro e com isso, a DTFS é a representação mais utilizada e é determinada com o auxílio de softwares. A Tabela 3 apresenta a forma de representação adequada dos sinais de acordo com sua propriedade de tempo.

3.4.3 A Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Para calcular o espectro da DFT de um sinal de período N diretamente pela definição, são necessárias aproximadamente N^2 multiplicações complexas, além de uma quantidade elevada de adições complexas. No entanto, existem algoritmos que permitem reduzir significativamente esse cálculo para $N \log_2 N$ multiplicações (OLIVEIRA, 2012), gerando assim uma

Tabela 3 – Relação entre propriedades de tempo de um sinal e a representação de Fourier apropriada.

Propriedade de Tempo	Periódica	Não Periódica
Contínuo	FS	FT
Discreto	DTFS ou DFT	DTFT

Fonte: (HAYKIN; VEEN, 2001, p. 165)

redução no esforço computacional para N extremamente grande. Esse método engenhoso e altamente eficiente é conhecido como *Fast Fourier Transform (FFT)* ou Transformada Rápida de Fourier e está presente em alguns softwares como o MATHEMATICA$^{\text{TM}}$, MATLAB$^{\text{TM}}$, MATHCAD, dentre outros.

É importante destacar que a FFT não é um tipo de transformada diferente das demais, mas é uma técnica que permite avaliar DFT de forma mais eficiente e extremamente econômica. A FFT portanto tem se mostrado muito atrativa na avaliação do espectro e vem sendo usada no processamento digital de sinais, como por exemplo na análise espectral do som ou no processo de filtragem para melhorar a qualidade da imagem em uma ampliação fotográfica. A tabela 4 mostra um comparativo do número de multiplicações complexas no cálculo da DFT, destacando a vantagem no uso da FFT.

Tabela 4 – Comparativo da complexidade na avaliação da DFT de comprimento N.

N	N^2 (DFT)	$N\log_2 N$ (FFT)	Vantagem
2	4	2	2
4	16	8	2
8	64	24	2,67
16	256	64	4
32	1024	160	6,4
64	4096	284	10,67
128	16384	896	18,29
256	65536	2048	32
512	262144	4068	56,89
1024	1048576	10240	102,4
2048	4194304	22528	186,18
4096	16777216	49512	341,33
8192	671088964	106496	630,15

Fonte: (OLIVEIRA, 2012, p. 51)

4 RELAÇÕES ENTRE AS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER E A TEORIA MUSICAL

No âmbito da teoria musical, os conceitos ligados ao estudo do som e suas propriedades podem ser considerados essenciais na compreensão de fenômenos como a consonância, a dissonância, o timbre, a afinação, dentre outros que muitas vezes são intuitivamente percebidos mas pouco explorados matematicamente. Dentre esses fenômenos presentes na música, as contribuições de Fourier estão fortemente relacionadas às Séries Harmônicas e, consequentemente, ao timbre.

Do ponto de vista acústico-musical, o princípio apresentado por Fourier, de que qualquer forma periódica de vibração pode ser obtida pela soma de infinitas vibrações com frequências múltiplas da vibração fundamental, pode ser reescrito como:

> Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido correspondente a um som musical pode ser sempre e de maneira única exibido como uma soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical. (ABDOUNUR, 2006, p. 90).

Nesse contexto, a descoberta de que o ouvido humano analisa sons examinando suas componentes senoidais (ABDOUNUR, 2006) contribuiu para elucidar problemas que surgiram com Pitágoras como explicar o porquê se caracterizam consonâncias pela relação de pequenos números inteiros. A teoria de Fourier reuniu diversos conceitos matemático-musicais capazes de explicar de maneira satisfatória esse enigma, estabelecendo que as primeiras componentes da Série Harmônica (aquelas que são melhores percebidas pelo ouvido) correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da Série de Fourier, estabelecendo e justificando as razões de pequenos números inteiros na consonância pitagórica.

Matematicamente, cada componente da Série Harmônica contribui para a formação de uma vibração e a força de cada harmônico é determinante na caracterização do som, estabelecendo assim o timbre. Esses harmônicos são representados graficamente no espectro de frequências, que mostra a amplitude no domínio da frequência, ou seja, ele é capaz de mostrar quais são as frequências principais que constituem um determinado som. A reação psicológica às mudanças no espectro de um som é a detecção de uma mudança no timbre ou na qualidade desse som, que se justifica pela riqueza ou pobreza dos harmônicos e estão relacionados diretamente aos termos das Séries de Fourier das funções representativas deste som.

A decomposição de uma nota musical em Série de Fourier pode elucidar alguns enigmas da harmonia musical percebidas e estabelecidas a partir da prática, mas que não se podia justificar cientificamente. Por exemplo, para a polifonia a quatro vozes é aconselhado distâncias menores que a oitava entre quaisquer duas vozes consecutivas (soprano e contralto, por exemplo), exceto o tenor e o baixo que podem diferir por intervalos maiores. De acordo com ABDOUNUR (2006), a justificativa desse fenômeno é perfeitamente aceita pelo simples fato de que, ao harmonizar as vozes dessa maneira, faz-se aproximadamente uma repetição das distâncias entre as componentes da decomposição de uma nota em Série de Fourier, onde se verifica que os harmônicos vão se aproximando à medida que se percorre os termos da série.

Além disso, a teoria de Fourier

> (...) permite-nos ancorar significados acústicos-musicais outrora sustentados teoricamente por dogmatismo aritmético e aspectos numerológicos. Além de abrir condutos matemáticos na compreensão dos fenômenos mencionados, tal conceito fornece, ainda, suporte para a compreensão de distintas regras de harmonia tradicional estabelecidas sobre argumentações não satisfatórias e (...) propicia reconfigurações e re-representações em conceitos, (...), tais como consonância, harmônicos, timbre, batimento. Ibid., p. 271.

Embora uma nota musical executada e sua respectiva onda complexa seja, em muitos casos, analisados no domínio do tempo (Série de Fourier), numa situação em que se deseja determinar as frequências das senoides que compõe essa onda, isto é, os harmônicos desse som, se faz necessário uma análise no domínio da frequência realizada por meio da Transformada de Fourier onde, conhecendo a expressão no domínio do tempo x, é possível obter uma nova expressão em função de ω, ou seja, em função da frequência $(F(\omega))$.

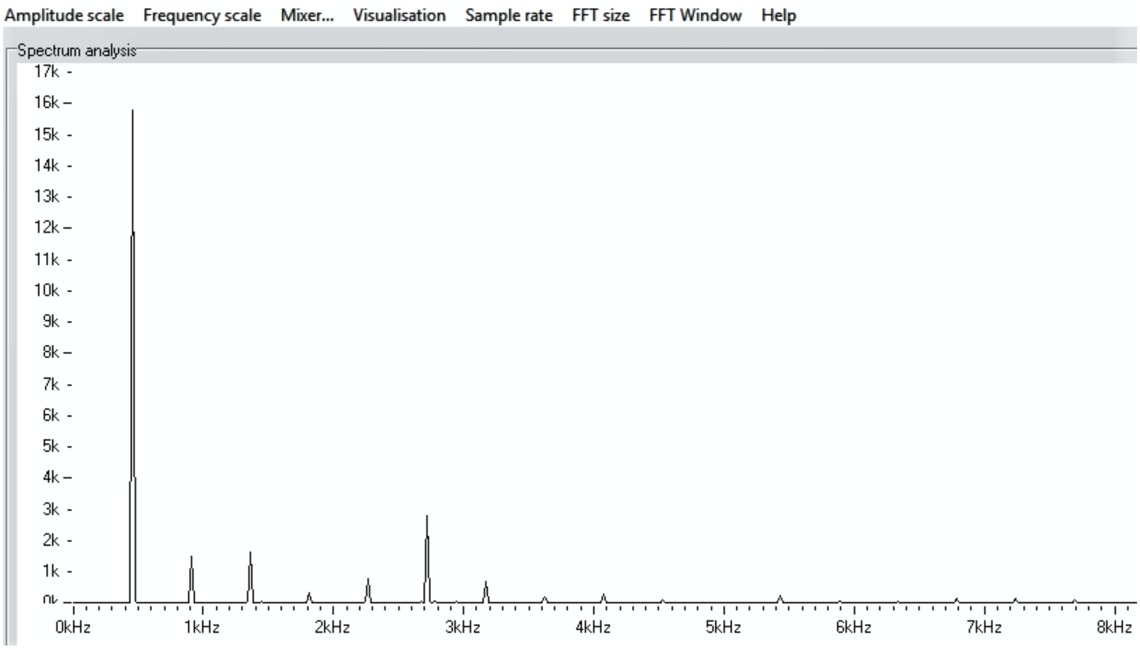
A efetiva contribuição da Transformada de Fourier no âmbito musical pode ser contemplada através de análises experimentais aplicadas a ondas (sinais), que podem ser geradas por meio de instrumentos musicais. Essa análise pode ser feita com o uso de softwares livres como o Audacity, que permite visualizar a onda do som no domínio do tempo e ainda seu espectro no domínio da frequência, ou o Simple Audio Spectrum Analyser (SpecAn), um programa que utiliza a Transformada Rápida de Fourier para visualizar em tempo real o espectro de frequências do som capturado por um microfone.

Um bom exemplo de análise espectral por meio da FFT é apresentado na Figura 34, que mostra o espectro do som do clarinete emitindo a nota Lá ($440Hz$) obtido no software SpecAn. É possível perceber a presença de vários picos de frequência, sendo o maior deles, o som fundamental e os outros, os harmônicos múltiplos do som fundamental, podendo estes sofrer pequenas variações na amplitude de acordo com a qualidade do instrumentista. A Figura 35 mostra o gráfico desse som em função do tempo, obtido por meio do software Audacity.

Vale ressaltar que, embora a nota Lá emitida tem frequência tabelada em $440Hz$, na prática pode haver uma pequena variação para mais ou para menos sem que o ouvido humano a perceba como “desafinado”. Essa diferença pode acontecer por diversos fatores relacionados à qualidade do instrumento ou do próprio músico, no entanto isso nem sempre gera problemas na execução de uma melodia, visto que o ouvido humano não consegue distinguir intervalos inferiores a $\frac{81}{80}$ ou 1,0125, a chamada coma pitagórica.

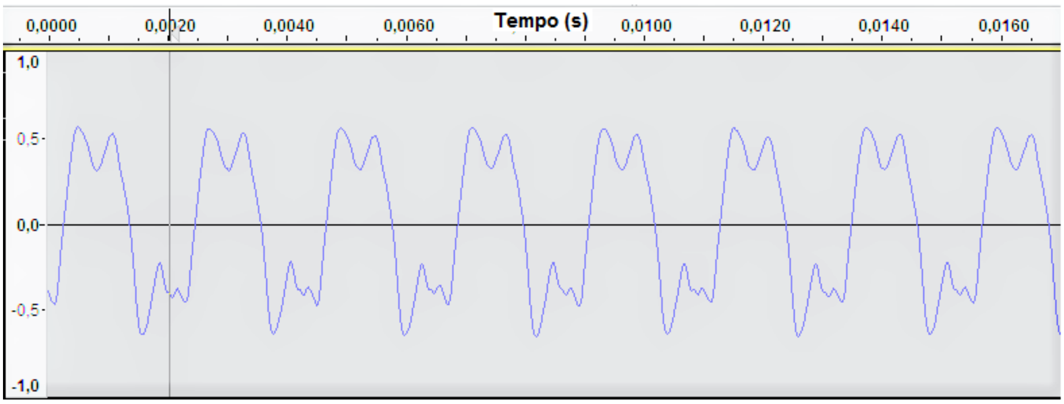
Outros exemplos de análise de espectros e formas de onda geradas por diferentes instrumentos musicais estão presentes nos apêndices desse trabalho.

Figura 34 – Espectro do som do clarinete Weril 13CH emitindo a nota Lá ($440Hz$).



Fonte: O autor

Figura 35 – Ondas sonoras do clarinete emitindo a nota Lá ($440Hz$) capturadas pelo software Audacity.



Fonte: O autor

4.1 SINTETIZADORES ELETRÔNICOS

Os sintetizadores de áudio são instrumentos eletrônicos desenvolvidos para produzir timbres de instrumentos de sopro, cordas, percussão ou desenvolver qualquer outro timbre sem necessariamente imitar algum já conhecido. Sua implementação é baseada em várias técnicas e métodos de síntese, dentre as quais se destaca a chamada **síntese aditiva**.

Nos sintetizadores aditivos, os diferentes timbres são obtidos com base na Série de Fourier, isto é, sons complexos são produzidos através da superposição de sons elementares. De acordo com POLI (1983), a escolha desses sons elementares da síntese aditiva é feita levando

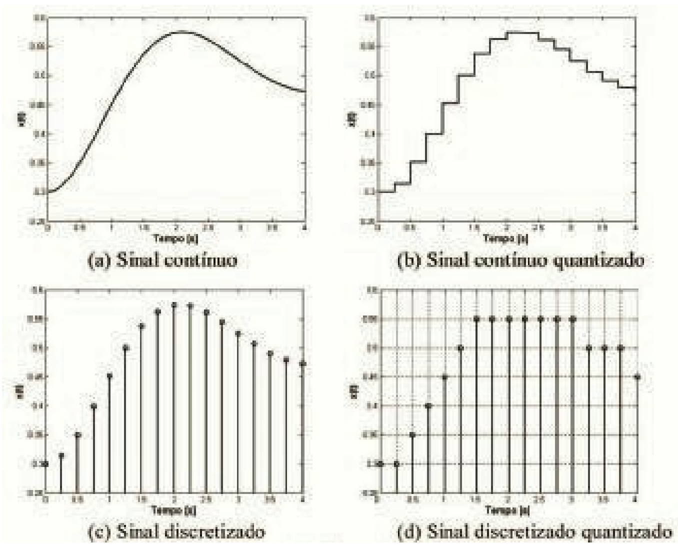
Figura 36 – Sintetizador de som Roland modelo Juno-Di.

Fonte: cdn.roland.com/assets/images/products/gallery/juno-di_top_gal.jpg

em consideração o modelo de análise de Fourier que permitirá analisar os sons de maneira similar ao ouvido humano e, a partir daí, extrair parâmetros significativos em termos de percepção. Assim, qualquer som relativamente periódico pode ser aproximado por um somatório de senoides, distribuindo convenientemente seus harmônicos.

Matematicamente, um sinal pode ser classificado como contínuo ou discreto, podendo ainda ser analógico ou digital. Na prática, o funcionamento dos sintetizadores baseia-se na chamada Série Quantizada de Fourier, que são sinais discretizados cuja amplitude assume somente valores pré-determinados. De maneira resumida, o sinal de tempo contínuo é substituído por uma sequência de valores de tempo discreto por meio de técnicas de amostragem, seguido pelo processo de quantização do sinal discreto. Nesse contexto, (SOUZA; CINTRA; OLIVEIRA, 2005) destaca a determinação do conteúdo harmônico de um trecho de sinal com o auxílio da FFT e apresenta um método de quantização da Série de Fourier por meio da digitalização das bases de sinais empregada na decomposição (quantização da base de Riesz-Fourier)(Figura 37). Para a criação de um timbre no sintetizador, a escolha dos harmônicos e suas respectivas am-

Figura 37 – Exemplo de quantização de um sinal.



Fonte: www.ebah.com.br/content/ABAAAgh-QAL/notas-aula-introducao-ao-processamento-digital-sinais

plitudes pode ser feita de inúmeras maneiras, gerando em cada caso uma sonoridade diferente que é associada a uma determinada tecla do equipamento.

Exemplo 7. Gerando-se um som fundamental de amplitude 1 e frequência de $440Hz$, pode-se criar um determinado timbre no sintetizador destacando os harmônicos 1, 3, 5, 6 e 8, onde a frequência de cada harmônico será múltipla da fundamental e as amplitudes serão determinadas convenientemente, da seguinte maneira:

a. Primeiro harmônico (f_1): frequência $440Hz$ e amplitude 1;

b. Terceiro harmônico (f_3): frequência $1320Hz$ e amplitude 0,4;

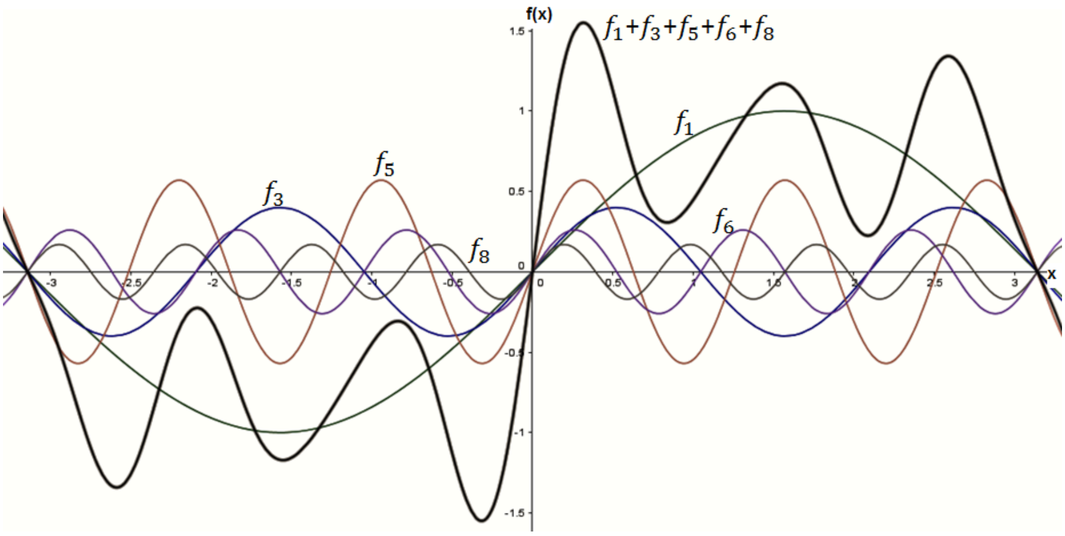
c. Quinto harmônico (f_5): frequência $2200Hz$ e amplitude 0,57;

d. Sexto harmônico (f_6): frequência $2640Hz$ e amplitude 0,26;

e. Oitavo harmônico (f_8): frequência $3520Hz$ e amplitude 0,17;

Dessa forma, ao se produzir cada um desses harmônicos, a superposição composta pela soma $f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_8$ corresponderá a uma nota musical com um timbre específico gerado de acordo com os harmônicos escolhidos (Figura 38).

Figura 38 – Gráficos das funções $f_1 = \text{sen}(x)$ (som fundamental), $f_3 = 0{,}4\,\text{sen}(3x)$, $f_5 = 0{,}57\,\text{sen}(5x)$, $f_6 = 0{,}26\,\text{sen}(6x)$ e $f_8 = 0{,}17\,\text{sen}(8x)$ e a onda resultante da soma $f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_8$.



Fonte: O autor

Além dos sintetizadores eletrônicos, instrumentos mais tradicionais como o órgão de tubos ou o harmônio[1] além de produzir sons relativamente simples, possuem registros que quando abertos possibilitam obter um espectro mais rico, ou seja, as notas são obtidas usando-se mais

[1] Instrumento de teclas similar ao órgão, porém ao invés de tubos possui foles, no qual é acionado por meio de pedais e faz vibrar palhetas metálicas.

tubos, no caso do órgão, ou mais palhetas vibrando, no caso dos harmônios, soando em diferentes frequências ao mesmo tempo. Isso possibilita uma perceptível melhora na qualidade e intensidade do som.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A música sempre encantou e continuará encantando o ser humano por sua beleza, harmonia e pela capacidade de despertar emoções. Estudos mais aprofundados permitem estabelecer relações com diversas áreas do conhecimento e em especial com a matemática, onde esse elo muitas vezes pode ser visto como a ciência da arte, ou sob outra ótica, a arte da ciência.

Ao descrever o processo histórico da relação entre a matemática e a teoria musical, foi possível perceber que, mesmo antes dos registros feitos por Pitágoras e outros estudiosos, a matemática sempre esteve presente, mesmo que implícita, no desenvolvimento e na evolução da arte musical. À medida que surgiam as descobertas das razões de números inteiros presentes na música e verificados no monocórdio, diversos conceitos como as consonâncias e dissonâncias passaram a ser melhor compreendidos, além de que essas contribuições culminaram no desenvolvimento de uma escala que é amplamente utilizada atualmente, por permitir fechar um ciclo com doze semitons no intervalo de uma oitava, a escala Temperada.

Face à natureza do tema pesquisado e os conceitos de teoria musical abordados, a compreensão do som como uma onda mecânica longitudinal periódica cuja forma, amplitude e frequência refletem suas características, permitiu explorar os conceitos da Série Harmônica e, consequentemente, perceber a relação entre o timbre característico de um determinado som e a amplitude dos harmônicos gerados. Essa percepção se torna especialmente importante para o entendimento das teorias de Fourier aplicadas à música, principalmente a representação de um sinal sonoro como série de termos de senos e cossenos.

As definições e conceitos das teorias de Fourier apresentados mostram uma estrutura matemática capaz de explicar diversos fenômenos no âmbito da teoria musical, dentre eles os harmônicos do som, o porquê da relação entre pequenos números inteiros e consonâncias, além de que as Transformadas de Fourier permitem ainda obter as componentes de frequências que estão contidas em um sinal de áudio, por exemplo. Cabe citar ainda que com o avanço das tecnologias, essas Transformadas permitiram a compactação de arquivos de áudio (formato MP3) através da análise espectral do sinal e a eliminação dos componentes de frequência praticamente imperceptíveis ao ouvido humano, reduzindo seu tamanho consideravelmente sem perda de qualidade aparente. Além disso, o surgimento da música eletrônica só foi possível graças à teoria apresentada por Fourier, que possibilitou a criação de timbres por meio dos sintetizadores de áudio.

A teoria musical abrange diversos conceitos matemáticos, desde os mais simples, envolvendo aritmética básica, até os mais complexos, como o cálculo diferencial e integral, o que a torna um vasto campo a ser explorado por professores e alunos de qualquer nível de ensino, mas principalmente da Educação Básica, pelo desafio de compreender a importância da matemática para a humanidade. As teorias de Fourier apresentadas podem ser um meio interessante para instigar o aluno a conceber a matemática como ferramenta para explicar inúmeros fenômenos, além de mostrar que sua aplicabilidade perpassa os conceitos de contagens e simples medições, mas é responsável pela existência de boa parte das tecnologias que se tem hoje. Este é, portanto, um interessante caminho que possibilita a compreensão de saberes matemáticos e contribui efetivamente no processo de ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica.

Contudo, através deste trabalho, espera-se que o tema desperte o interesse de outros professores e pesquisadores, contribuindo com a ampliação do número de publicações e aprofundando ainda mais as discussões sobre as teorias de Fourier aplicadas à teoria musical.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

No entendimento de que ao desenvolver um projeto de pesquisa, abre-se um leque de possibilidades para o estudo e aprofundamento do tema, segue algumas sugestões de trabalhos futuros que poderão explorar esse vasto campo e preencher possíveis lacunas que possam ter surgidas no decorrer desta pesquisa.

- As Séries e Transformadas de Fourier no processamento de imagens;
- As Séries Quantizadas de Fourier na compactação de arquivos de áudio (MP3);
- Oficinas direcionadas aos professores do Ensino Médio: As relações matemáticas na teoria musical;
- Oficinas direcionadas aos professores e/ou alunos da Educação Básica: O timbre e a matemática - como é possível distinguir os sons?
- As relações matemáticas na construção de instrumentos musicais;
- Oficinas direcionadas aos alunos da Educação Básica: As frações e o monocórdio de Pitágoras - Experimento com o violão.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados*. 4. ed. São Paulo: Escrituras, 2006.

BONA, P. Método completo para divisão. *São Paulo*, Grafipress, 2004.

CARVALHO, P. C. P.; VELHO, L.; CICCONET, M.; KRAKOWSKI, S. Métodos matemáticos e computacionais em música. *Notas em Matemática Aplicada*, SBMAC, v. 38, p. 108, 2009.

COTTA, A. G. Notas preliminares sobre o cantochão acompanhado na prática musical luso-brasileira dos séculos xviii e xix: o hino a são joão batista de josé maurício nunes garcia. *Per Musi*, UFMG, Belo Horizonte, n. 18, p. 28–34, 2008.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HAYKIN, S.; MOHER, M. *Introdução aos sistemas de comunicação.* 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

HAYKIN, S.; VEEN, B. *Sinais e Sistemas*. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

KILMER, A. D. The musical instruments from ur and ancient mesopotamian music. *Expedition Magazine*, Penn Museum, v. 40, n. 2, p. 12–19, 1998.

MED, B. *Teoria da Música*. 4. ed. Brasília: Bookman, 1986.

OLIVEIRA, H. M. *Engenharia de Telecomunicações*. 1. ed. Recife: UFPE, 2012.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time Signal Processing*. 2. ed. Upper Saddle river, New Jersey: Prentice-Hall, 1998.

POLI, G. D. A tutorial on digital sound synthesis techniques. *Computer Music Journal*, JSTOR, v. 7, n. 4, p. 8–26, 1983.

SALVADOR, n. D. *Métodos e técnicas de pesquisa bibliográfica*. 11. ed. Porto Alegre: Sulina, 1986.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física*. 1. ed. Rio de Janeiro: LCT, 1984. v. 2.

SERWAY, R. A.; JR, J. W. J. *Princípios de Física*. 3. ed. São Paulo: Thomson, 2004. v. 2.

SOUZA, D. F.; CINTRA, R. J. d. S.; OLIVEIRA, H. M. Uma ferramenta para análise de sons musicais: a série quantizada de fourier. *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 05*, Unicamp, Campinas, v. 1, n. 1, p. 1–5, 2005.

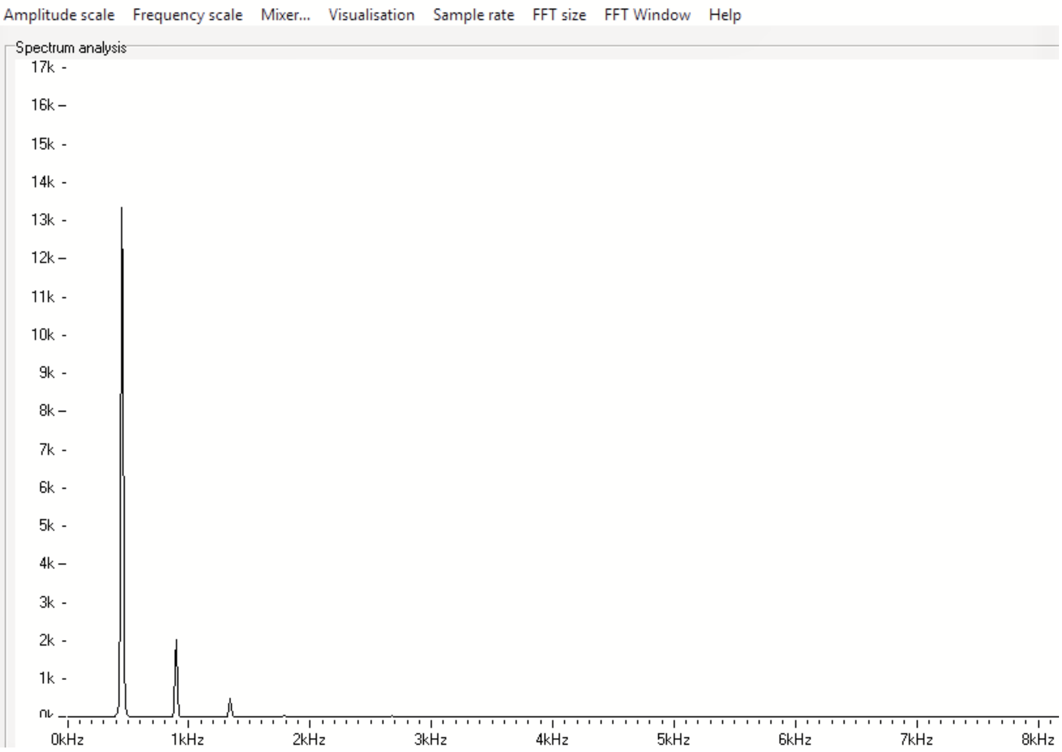
SPIEGEL, M. R. *Theory and problems of fourier analysis; with applications to boundary valueproblems*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1974.

TIPPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros: mecâncica, oscilações e ondas*. 5. ed. Rio de Janeiro: LCT, 2006. v. 1.

APÊNDICE A – ANÁLISE ESPECTRAL - SAX TENOR

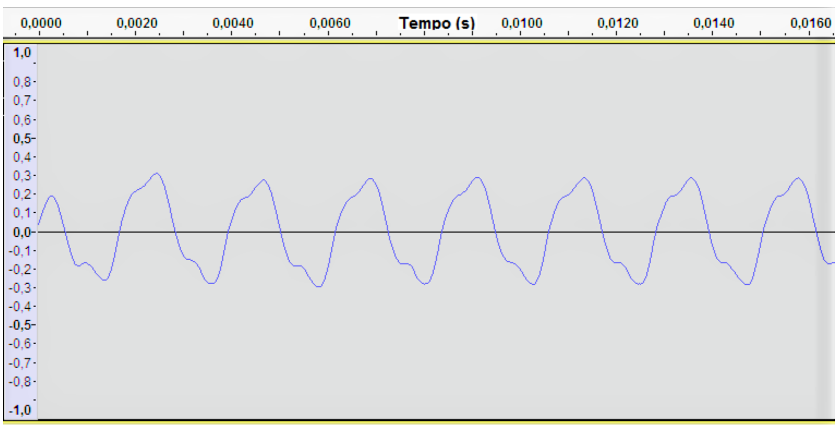
Espectro de frequências e forma de ondas de sinais captados pelos softwares SpecAn e Audacity. No sax tenor, os três primeiros harmônicos (tabelados em $440Hz$, $880Hz$ e $1320Hz$) são evidenciados e possui forma de onda aproximadamente triangular.

Figura 39 – Espectro do som do Sax Tenor Eagle ST-503 emitindo a nota Lá ($440Hz$)



Fonte: O Autor

Figura 40 – Ondas sonoras do Sax Tenor emitindo a nota Lá ($440Hz$) capturadas pelo software Audacity

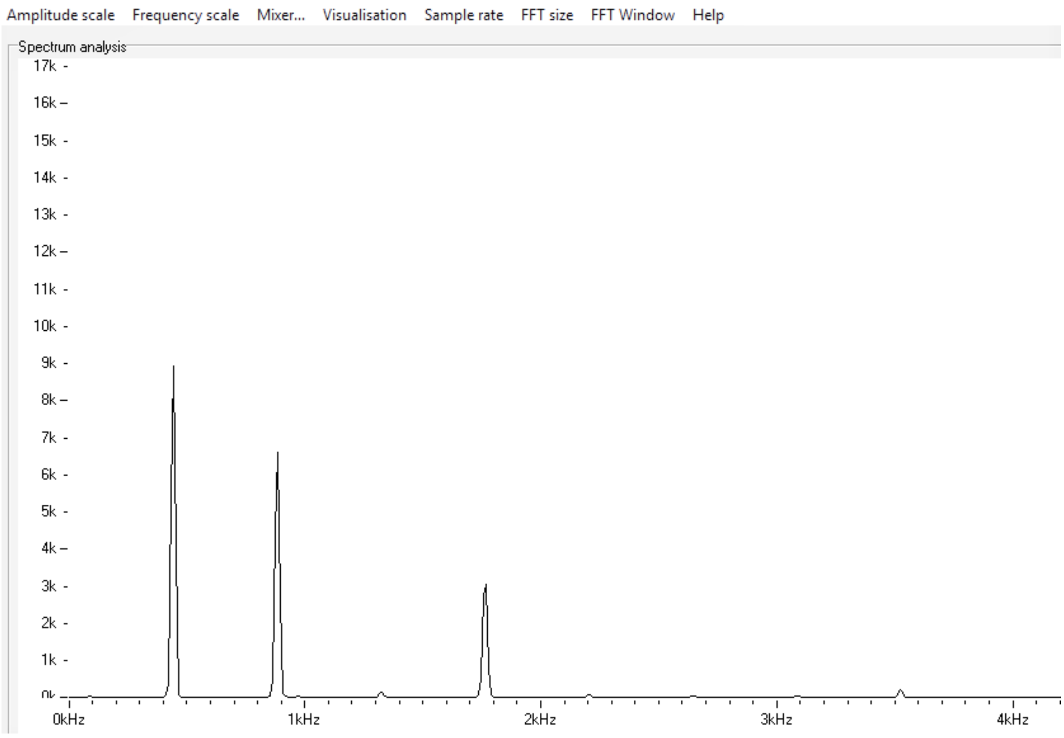


Fonte: O Autor

APÊNDICE B – ANÁLISE ESPECTRAL - ÓRGÃO ELETRÔNICO

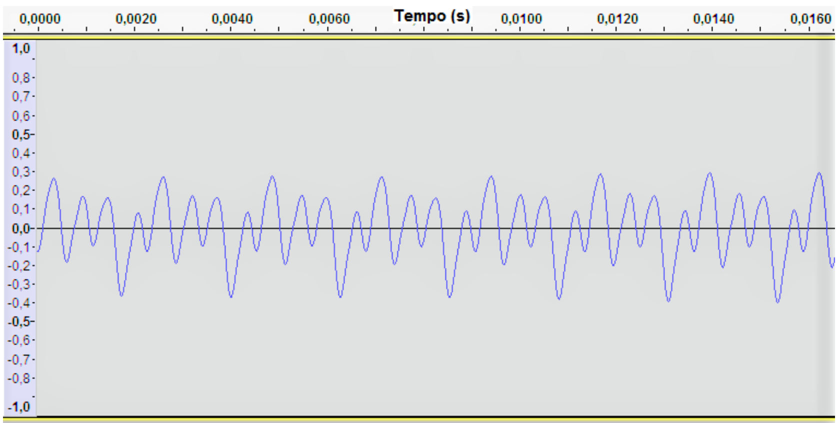
São evidenciados o primeiro (fundamental), o segundo e o quarto harmônico (tabelados em $440Hz$, $880Hz$ e $1760Hz$), mas é possível perceber a presença do terceiro, quinto e oitavo harmônicos ($1320Hz$, $2200Hz$, $3520Hz$), mesmo que em amplitudes menores.

Figura 41 – Espectro do som do Órgão Eletrônico Tokai YX-200II emitindo a nota Lá ($440Hz$)



Fonte: O Autor

Figura 42 – Ondas sonoras do Órgão Eletrônico emitindo a nota Lá (440Hz) capturadas pelo software Audacity

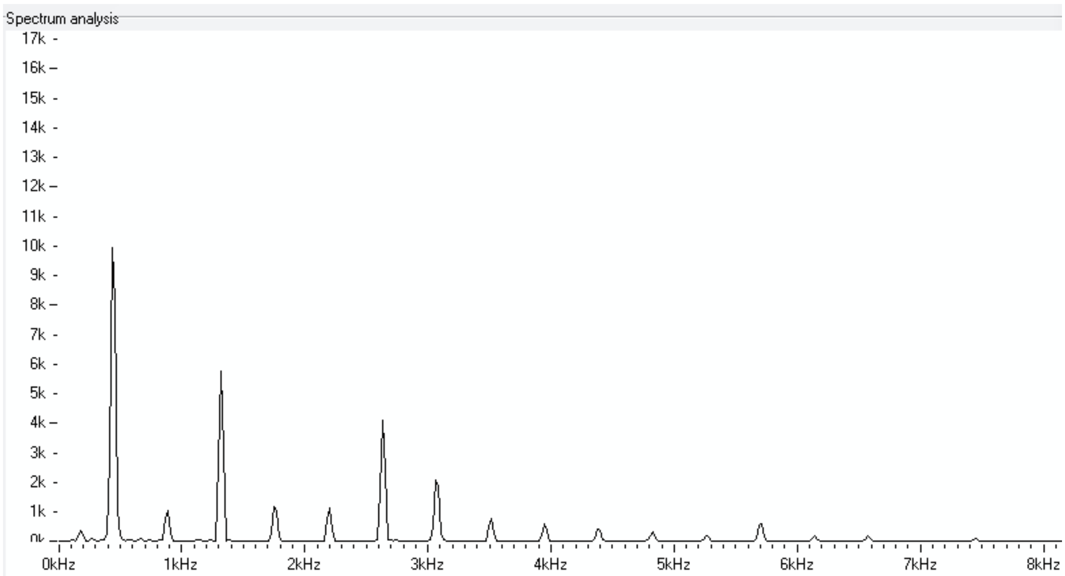


Fonte: O Autor

APÊNDICE C – ANÁLISE ESPECTRAL - VIOLINO

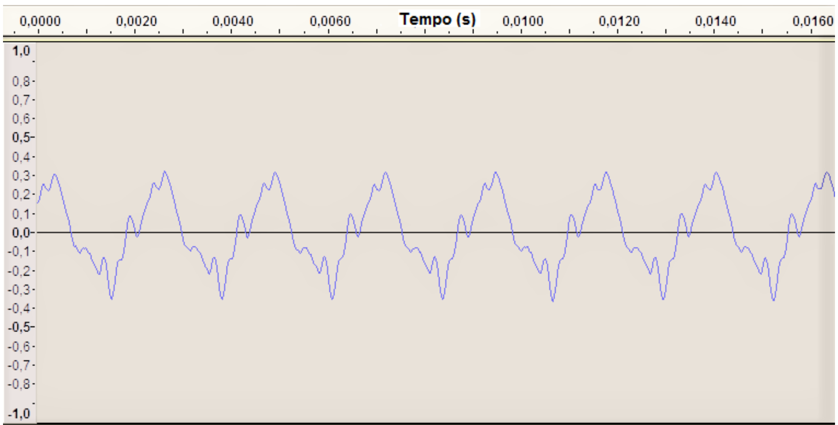
Através do espectro gerado é possível notar a presença de vários harmônicos, o que é uma característica marcante em instrumentos de cordas. Os harmônicos 1, 3, 6 e 7 ($440Hz$, $1320Hz$, $2640Hz$ e $3080Hz$ respectivamente) são os que apresentam maiores amplitudes, no entanto também são evidenciados (com amplitudes menores) os harmônicos 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 17 ($880Hz$, $1760Hz$, $2200Hz$, $3520Hz$, $3960Hz$, $4400Hz$, $4840Hz$, $5280Hz$, $5720Hz$, $6160Hz$, $6600Hz$ e $7480Hz$ respectivamente). Os pequenos pulsos inferiores à frequência fundamental foram gerados por ruídos externos no momento da gravação.

Figura 43 – Espectro do som do Violino modelo Stradivarius emitindo a nota Lá ($440Hz$)



Fonte: O Autor

Figura 44 – Ondas sonoras do Violino emitindo a nota Lá ($440Hz$) capturadas pelo software Audacity

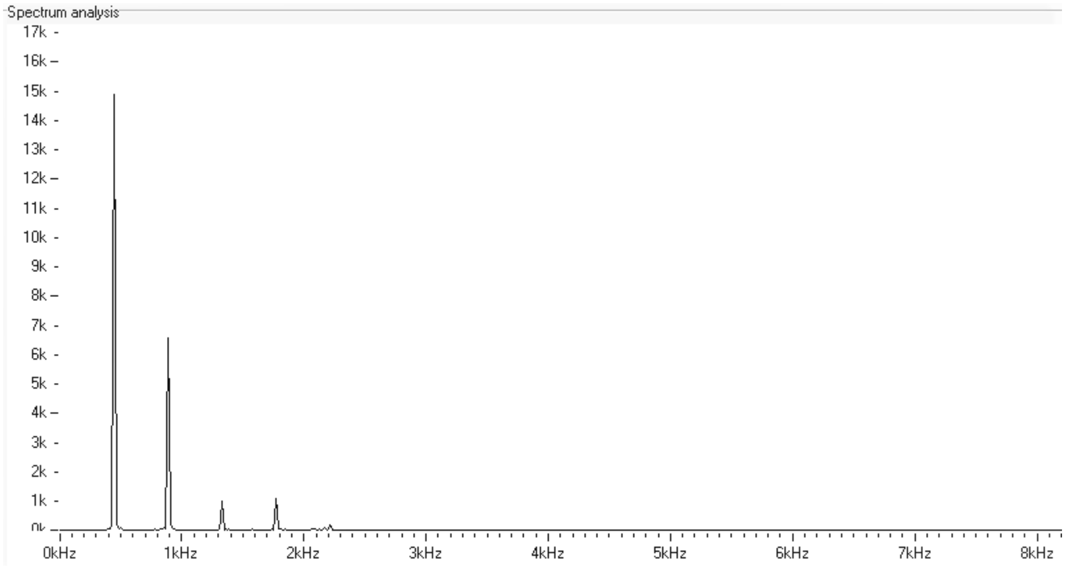


Fonte: O Autor

APÊNDICE D – ANÁLISE ESPECTRAL - FLAUTA TRANSVERSAL

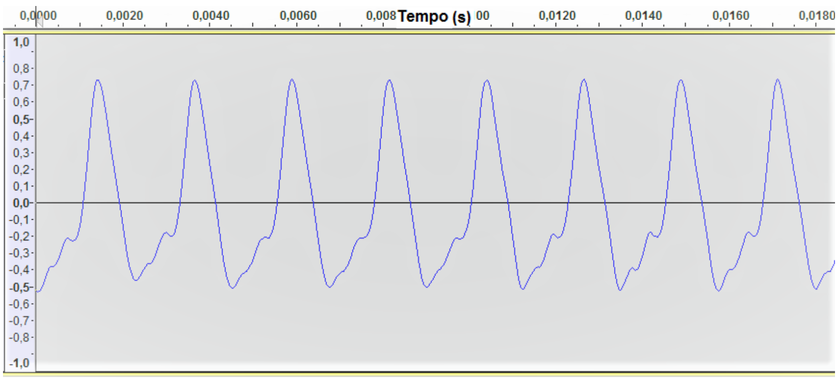
A flauta possui um timbre mais "aveludado", suave, que é uma característica de instrumentos que evidenciam uma quantidade menor de harmônicos. Pode-se perceber um destaque nos 4 primeiros harmônicos ($440Hz$, $880Hz$, $1320Hz$ e $1760Hz$).

Figura 45 – Espectro do som da Flauta Transversal Eagle FL03N emitindo a nota Lá ($440Hz$)



Fonte: O Autor

Figura 46 – Ondas sonoras da Flauta emitindo a nota Lá ($440Hz$) capturadas pelo software Audacity

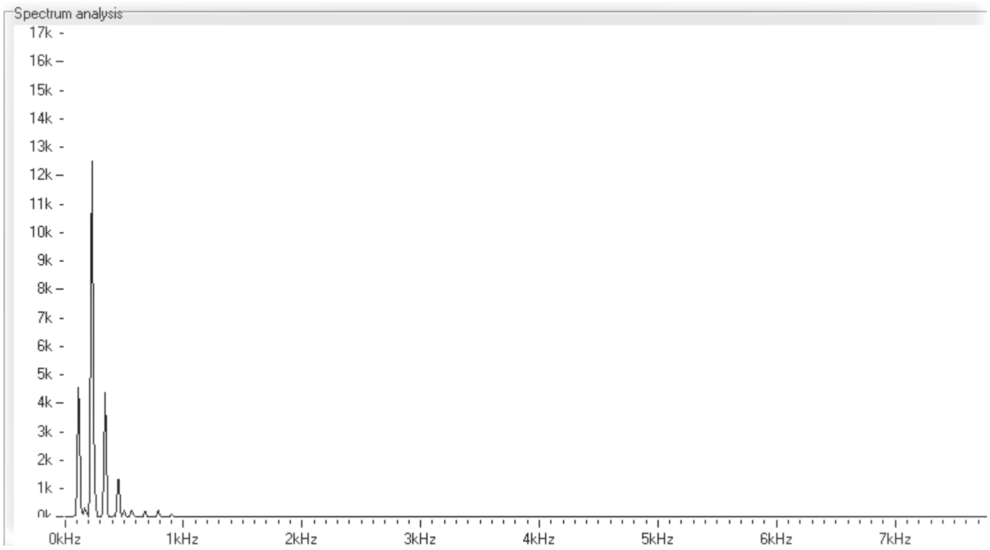


Fonte: O Autor

APÊNDICE E – ANÁLISE ESPECTRAL - VIOLÃO

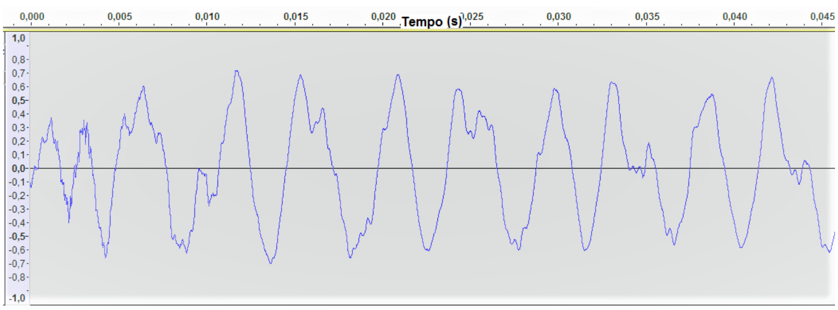
Ao tocar a corda Lá do violão, destacaram-se os 4 primeiros harmônicos ($110Hz$, $220Hz$, $330Hz$ e $440Hz$), sendo que o segundo harmônico ficou mais evidente que o fundamental. A amplitude desses harmônicos pode variar de acordo com a intensidade do som ou da qualidade do instrumento.

Figura 47 – Espectro do som do Violão Gianini emitindo a nota Lá ($110Hz$)



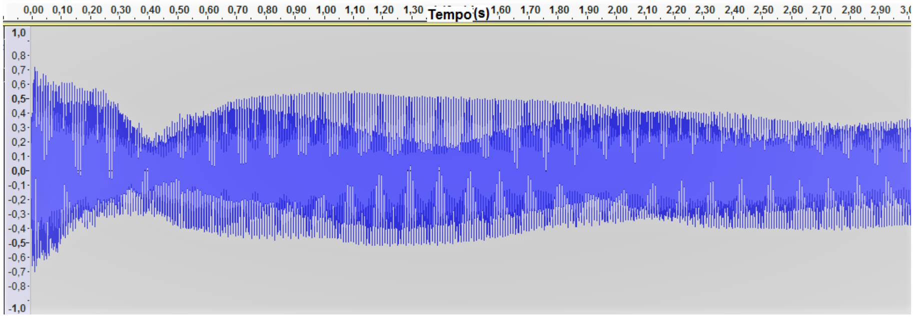
Fonte: O Autor

Figura 48 – Ondas sonoras do Violão emitindo a nota Lá ($110Hz$) capturadas pelo software Audacity



Fonte: O Autor

Figura 49 – Ondas sonoras do Violão emitindo a nota Lá $(110Hz)$ - 3 primeiros segundos



Fonte: O Autor

APÊNDICE F – SUGESTÃO DE OFICINA - EXPERIMENTO COM O VIOLÃO

F.1 Objetivos

- Perceber a relação entre o comprimento da corda e a frequência do som produzido;
- Encontrar as notas da escala pitagórica repetindo o experimento feito por Pitágoras;
- Compreender a criação da escala pitagórica e a importância da escala temperada;
- Perceber a contribuição da matemática no desenvolvimento da teoria musical.

F.2 Público-alvo

Alunos da Educação Básica.

F.3 Carga horária

3 horas-aula, distribuídos entre a apresentação dos conceitos iniciais de teoria musical, experimentos com o violão e a avaliação de aprendizagem.

F.4 Materiais e equipamentos

1. Violão;
2. Fita métrica ou régua;
3. Microafinador digital de violão/guitarra;
4. Computador com microfone e software para visualizar a frequência das notas (caso não haja um microafinador);

F.5 Descrição da atividade

Após a apresentação de alguns conceitos básicos de teoria musical (definição de música, intervalo, tom/semitom, som musical, timbre), o professor irá propor aos alunos a escolha de uma corda do violão (corda Lá $110Hz$, por exemplo) e a execução dos seguintes procedimentos:

1. Medir o comprimento da corda (já afinada em exatamente $110Hz$) desde o rastilho até a pestana (Ver Figura 51). O som emitido será considerado a frequência 1.

2. Pressionar a corda exatamente na metade de seu comprimento e tocá-la. Espera-se que a frequência da nota emitida seja o dobro da frequência inicial, ou seja, a nota Lá uma oitava acima $220Hz$ (Frequência 2).

3. Obter a frequência da nota correspondente a $\frac{2}{3}$ do comprimento inicial da corda. O som emitido deve ter $\frac{3}{2}$ da frequência inicial, isto é, nota Mi $165Hz$ que corresponde a um intervalo de quinta.

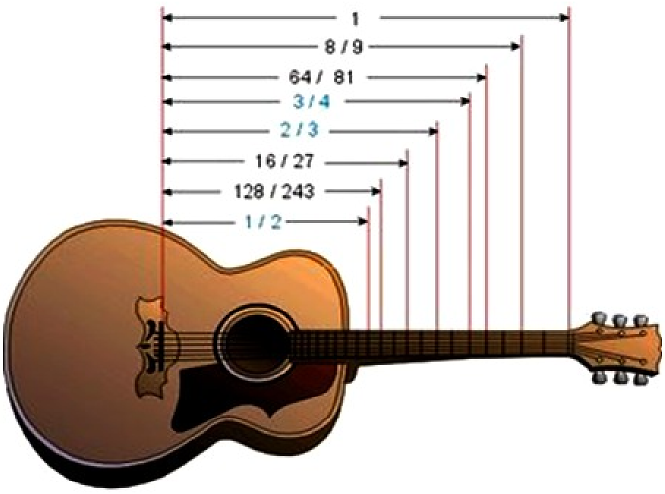
4. Obter a frequência da nota correspondente a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda, ou seja, a nota Ré ($\frac{4}{3}.110Hz = 146{,}7Hz$).

5. Para cada comprimento de corda verificado anteriormente, medir $\frac{2}{3}$ do comprimento e anotar a frequência da nota obtida. Caso esta seja maior que $220Hz$, deve-se dividir por 2 para obter sempre a nota no mesmo intervalo de oitava (de $110Hz$ a $220Hz$). Dessa forma, ao organizar os resultados observados, será obtida a escala pitagórica representada na tabela abaixo:

Tabela 5 – Escala pitagórica obtida pelo percurso de quintas

NOTAS	Lá	Si	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá
FRAÇÃO	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
FREQ(Hz)	110,00	123,75	139,22	146,67	165,00	185,62	208,83	220,00

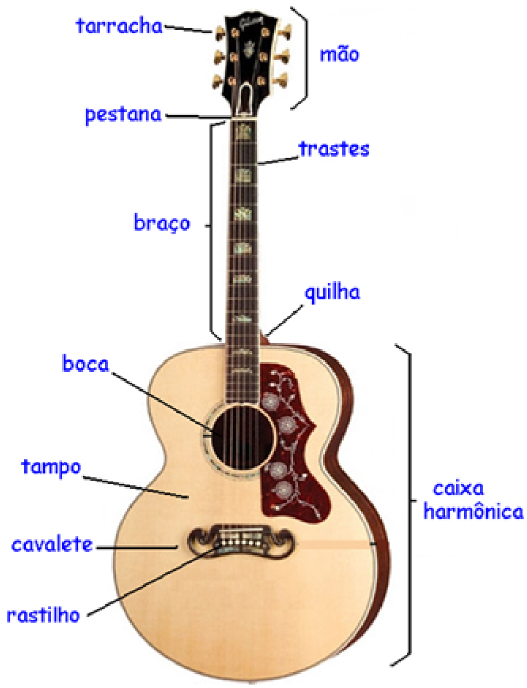
Figura 50 – Experimento com o violão



Fonte: www.veterinariosnodiva.com.br/images/escala-violao.jpg

6. Tomar a metade do comprimento da corda e didiví-la em 12 partes igualmente espaçadas, fazendo as devidas marcações no braço do violão. Temos então uma oitava dividida em 12 partes, o que originou a escala temperada onde a frequência da nota posterior é sempre a frequência inicial multiplicada por $2^{\frac{1}{12}}$. Nessa etapa o professor pode abrir uma discussão sobre os desafios do

Figura 51 – Partes do violão



Fonte: mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo/imagesviolao.jpg

uso da escala pitagórica, cujas frequências das notas percorrendo o intervalo de quintas forma uma espiral, enquanto que a escala temperada fecha um ciclo, visto que houve uma unificação na frequência das notas com intervalo muito próximo, por exemplo: Lá$\sharp$ – $Si\flat$.

F.6 Considerações e reflexões

Por meio da relação matemática/música, o professor poderá explorar diversos assuntos da matemática, como frações, progressão geométrica, logaritmos, dentre outros. Este é ainda um bom caminho para estabelecer a interdisciplinaridade, podendo ser feita uma parceria com o professor de física para discutir os aspectos físicos do som, abordando os conceitos de ondas.

Através dessa atividade, espera-se que os alunos compreendam matematicamente como surgiram as escalas musicais e, acima de tudo, despertem a curiosidade para aprender ainda mais sobre a teoria musical e a matemática.