



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
*CAMPUS* UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL PROFMAT



DIEYSON ROOS

ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE NEWTON

Sinop - MT

2017

DIEYSON ROOS

## ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE NEWTON

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (FACET) da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Oscar Antonio González Chong  
Orientador

Vera Lúcia Vieira de Camargo  
Coorientadora

Sinop - MT

2017

### CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

R781a Roos, Dieyson.  
Abordagem geométrica do Método de Newton / Dieyson Roos. – Sinop,  
2017.  
53 p.

Orientador: Dr. Oscar Antonio González Chong.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso,  
*Campus* Universitário de Sinop, Faculdade de Ciências Exatas e  
Tecnológicas, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática.

1. Método de Newton. 2. Raízes Aproximadas. 3. Abordagem Geométrica.  
4. Mestrado Profissional em Matemática. I. Chong, Oscar Antonio González,  
Dr. II. Título.

CDU 511.14

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Luiz Kenji Umeno Alencar - CRB1



ESTADO DE MATO GROSSO  
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS.  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
PROFMAT UNEMAT - SINOP



DIEYSON ROOS

ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE NEWTON

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong

Aprovado em: 10/04/2017

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong - UNEMAT

Prof. Dr. Mazilio Coronel Malavazi - UFMT

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves - UNEMAT

SINOP – ABRIL - 2017



Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional  
UNEMAT- Sinop Avenida dos Ingás, nº 3001 - Centro – CEP: 78.555-000 – Sinop–  
MT. Tel./Fax: (66)9601-8925 – Cx. Postal: 680 – profmat-unemat@unemat-net.br



"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

(Gauss - Carl Fried)

## AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus.
- A minha família, especialmente aos meus pais Ivo e Ilka, aos meus avós Francisco (*in memoriam*) e Erna, a minha irmã Deise, e a minha sobrinha Maria Eduarda.
- A minha namorada Bruna, por toda paciência, compreensão, carinho e amor, e por compartilhar comigo os momentos de tristeza e alegria.
- Aos professores de longa data.
- Aos professores Oscar e Vera, pela dedicação que com sabedoria souberam dirigir-me os passos e os pensamentos para o alcance de meus objetivos.
- Aos meus grandes amigos do mestrado que me apoiaram durante esses dois anos.
- Aqueles que lamentavelmente não me lembro neste momento, mas que de alguma forma colaboraram com minha formação.

# SUMÁRIO

<b>Resumo .....</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>1 Breve Abordagem Histórica do Método de Newton.....</b>	<b>2</b>
<b>2 Método do Ponto Fixo .....</b>	<b>5</b>
<b>3 Método de Newton .....</b>	<b>9</b>
3.1 Abordagem Geométrica do Método .....	10
3.2 Estudo da Convergência do Método de Newton .....	10
3.3 Algoritmo.....	11
3.4 Ordem de Convergência .....	12
3.5 Condições de Convergência.....	13
3.6 Escolha de uma Boa Primeira Aproximação .....	13
3.7 Exemplos .....	16
<b>4 Método De Newton Para Sistemas De Equações Não Lineares .....</b>	<b>28</b>
4.1 Abordagem Geométrica do Método de Newton para Sistemas de Equações Não Lineares de Duas Variáveis .....	28
4.2 Formulação do Método de Newton para Sistemas de Duas Equações Não Lineares .....	32
4.3 Convergência do Método.....	33
4.4 Exemplos .....	34
<b>5 Considerações Finais .....</b>	<b>43</b>
<b>6 Referências Bibliográficas .....</b>	<b>44</b>

## **RESUMO**

Determinar raízes ou zeros de funções sempre foi um grande desafio enfrentado por matemáticos, e um dos principais objetos de estudo da álgebra. Assim, métodos distintos foram desenvolvidos, em que parte deles se preocupava com as raízes exatas e outros com raízes aproximadas. Deste último, destaca-se o Método de Newton por sua eficiência e precisão na obtenção de raízes aproximadas, que será objeto de estudo neste trabalho, cujo objetivo principal é realizar uma abordagem geométrica do método e apresentar o desenvolvimento de alguns exemplos, bem como um breve histórico de seu surgimento e uma breve análise das condições de convergência do método.

**Palavras-Chave:** Método de Newton; raízes aproximadas; abordagem geométrica.

## **ABSTRACT**

Determining roots or zeros of functions has always been a major challenge faced by mathematicians, and one of the main objects of study in algebra. Thus different methods were developed, in which part of them were concerned with the exact roots and others with approximate roots. Of the latter, the Newton Method is highlighted for its efficiency and precision in obtaining approximate roots, which will be object of study in this work, whose main objective is to perform a geometric approach of the method and to present the development of some examples, as well as a brief history of its emergence and a brief analysis of the conditions of convergence of the method.

Keywords: Newton's method; Approximate roots; Geometric approach.

# INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o intuito de apresentar uma síntese do estudo realizado acerca do Método Iterativo de Newton analisando a escolha do ponto inicial, a formulação do método, a convergência, as falhas, critérios de parada e sua interpretação geométrica. O estudo detalhado deste método se justifica a medida que é frequentemente usado em quase todos os cursos de graduação na área da Matemática Aplicada a ponto de ser conteúdo obrigatório do programa da disciplina de Cálculo Numérico.

O Método de Newton tem o objetivo de estimar as raízes aproximadas de uma função a partir de um ponto inicial. Este método é apreciado e de fundamental importância por conta de sua eficiência, simplicidade de desenvolvimento, velocidade de convergência e precisão na obtenção de raízes aproximadas.

Será abordado também neste trabalho, um breve histórico do método, sua definição, dedução e alguns problemas de aplicação do mesmo.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No capítulo 1 será apresentado um breve histórico sobre o desenvolvimento do método.
- No capítulo 2 será abordado o Método do Ponto Fixo, outro método utilizado para obtenção de raízes aproximadas. Este é apresentado por conta de que partes de seus conceitos estão presentes no Método de Newton.
- No capítulo 3 será discutido o Método de Newton para resolução de equações, sendo realizado um estudo sobre sua convergência, sua interpretação geométrica e alguns exemplos.
- No capítulo 4 será abordado o Método de Newton para sistemas de equações não lineares, onde também é feito um estudo sobre sua convergência e interpretação geométrica e é apresentado também alguns exemplos. Para o caso bidimensional, ou seja, para sistemas de equações não foi encontrado na literatura específica a abordagem geométrica.

# 1 BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA DO MÉTODO DE NEWTON

Este capítulo apresenta um breve histórico sobre a determinação de zeros de funções, em especial sobre o Método de Newton e está baseado nas obras de Boyer (1996), Eves (2004) e no trabalho de Deuflhard (2012).

Equação é uma maneira de modelar situações nas quais surgem valores desconhecidos e se tem uma igualdade. A palavra equação vem do latim *equatione*, equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso.

Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos. Os gregos resolviam equações por meio da geometria, mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso nos métodos de resolução de equações.

No trabalho dos árabes, destaca-se o de Al-Khowarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos, é considerado o matemático árabe de maior expressão do século IX e escreveu dois livros que desempenharam importante papel na história da Matemática. Num deles, sobre a arte hindu de calcular, Al-Khowarizmi faz uma exposição completa dos numerais hindus. O outro, considerado o seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l mugābalah*, contém uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas por meio de símbolos matemáticos e letras. O primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI. Também foi o primeiro a estudar as propriedades das equações através de expressões gerais. Graças a Viète os objetos de estudo da Matemática deixaram de ser somente problemas numéricos sobre preços, idade das pessoas ou medidas dos lados das figuras e passaram a englobar também as próprias expressões algébricas. Para a resolução de equações correntes distintas foram desenvolvidas, numa à procura das raízes exatas e na outra a busca das raízes aproximadas de uma equação do tipo  $f(x) = 0$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Em 1600, François Viète (1540-1603) projetou uma técnica de perturbação para a solução das equações polinomiais escalares, que forneceu uma casa decimal da solução desconhecida por etapa através do cálculo explícito de polinômios de perturbações sucessivas. Em termos modernos, o método convergia linearmente. Parece que este método também tinha sido publicado em 1427 pelo astrônomo persa e matemático al-Kashi (1380-1429) em seu trabalho *The Key to Aritmética* com base no trabalho de al-

Biruni (973-1048) e não é claro até que ponto este trabalho foi conhecido à época na Europa. Por volta de 1647, o método de Viète foi simplificado pelo matemático inglês Oughtred (1574-1660).

Em 1664, Isaac Newton (1643-1727) chegou a conhecer o método de Viète que até 1669 tinha melhorado por linearização dos polinômios sucessivamente decorrentes. Como exemplo, ele discutiu a solução numérica cúbica polinomial  $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ . Newton começou por referenciar uma parte inteira da raiz  $x_0 = 2$  e, em seguida, por meio de  $x = 2 + p$ , ele obteve a equação polinomial

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Newton negligenciou os termos de ordem superior e encontrou  $p \approx 0,1$ . Em seguida, inseriu  $p = 0,1 + q$  o que resultou na equação polinomial

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0,$$

novamente negligenciando termos de ordem superior, encontrou  $q \approx -0,0054$ . Continuando o processo em mais um passo chega a  $r \approx 0,00004853$  e, por conseguinte, para a terceira iteração obtendo-se

$$x_3 = x_0 + p + q + r = 2,09455147.$$

Pode se notar que as relações  $10p - 1 = 0$  e  $11,23q + 0,061 = 0$ , dadas anteriormente, correspondem exatamente à

$$p = x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

sendo  $f'(x_0)$  a derivada de  $f$  no ponto  $x_0$ , e para

$$q = x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

sendo  $f'(x_1)$  a derivada de  $f$  no ponto  $x_1$ .

Como mostra o exemplo apresentado, ele também observou que, mantendo todas as casas decimais, o número de valores precisos dobraria em cada etapa, ou seja, à uma convergência quadrática. Em 1687 Newton trabalhou na equação

$$x - e \operatorname{sen} x = M$$

onde  $M$  é a anomalia média e  $x$  a anomalia excêntrica utilizando suas técnicas polinomiais já desenvolvidas através da expansão em série de  $\operatorname{sen}(x)$  e  $\operatorname{cos}(x)$ . No entanto, nenhum indício sobre o conceito de derivada é incorporado na resolução.

Em 1690, Joseph Raphson (1648-1715) conseguiu evitar o cálculo tedioso dos polinômios sucessivos, jogando o esquema computacional de volta para o polinômio

original; neste esquema agora totalmente interativo, ele também manteve todas as casas decimais das correções. Ele tinha a sensação à época de que o seu método diferiu do método de Newton, pelo menos, por sua derivação.

Em 1740, Thomas Simpson (1710-1761) introduziu derivadas em seu livro '*Essays on Several Curious and Useful Subjects: in Speculative and Mix'd Mathematicks*', ilustrado por uma variedade de exemplos. Ele escreveu a iteração para uma equação (não polinomial) e para um sistema de duas equações em duas incógnitas, a extensão correta para os sistemas pela primeira vez.

## 2 MÉTODO DO PONTO FIXO

Os resultados obtidos neste capítulo podem ser encontrados em Ruggiero e Lopes (1996), Burden e Faires (2008) e Franco (2006).

A importância de abordarmos este método está mais nos conceitos que são introduzidos em seu estudo do que em sua eficiência computacional.

Seja  $f(x)$  uma função com valores reais,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua em  $[a, b]$ , intervalo que contém uma raiz da equação  $f(x) = 0$ . O método consiste em transformar esta equação em uma equivalente  $x = \varphi(x)$  e a partir de uma aproximação inicial  $x_0$  gerar a sequência  $\{x_k\}$  de aproximações para  $\xi$  pela relação  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ , de forma que a função  $\varphi(x)$  é tal que  $f(\xi) = 0$  se, e somente se,  $\varphi(\xi) = \xi$ . Transformamos assim o problema de encontrar um zero de  $f(x)$  no problema de encontrar um ponto fixo de  $\varphi(x)$ .

Uma função  $\varphi(x)$  que satisfaz a condição acima é chamada de função de iteração para a equação  $f(x) = 0$ .

A forma geral das funções de iteração  $\varphi(x)$  é  $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$ , com a condição que em  $\xi$ , ponto fixo de  $\varphi(x)$ , se tenha  $A(\xi) \neq 0$ . Mostremos que  $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\xi$  tal que  $f(\xi) = 0$ , então

$$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi) = \xi \text{ (pois, } f(\xi) = 0\text{)}.$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $\varphi(\xi) = \xi$ , então

$$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi) \Rightarrow \xi = \xi + A(\xi)f(\xi) \Rightarrow A(\xi)f(\xi) = 0$$

como  $A(\xi) \neq 0$ , logo

$$f(\xi) = 0.$$

O teorema a seguir nos fornece condições suficientes para que o processo seja convergente.

**TEOREMA 2.1.** Seja  $\xi$  uma raiz da equação  $f(x) = 0$ , isolada num intervalo  $I$  centrada em  $\xi$ .

Seja  $\varphi(x)$  uma função de iteração para a equação  $f(x) = 0$ . Se

- i)  $\varphi(x)$  e  $\varphi'(x)$  são contínuas em  $I$ ;
- ii)  $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ ; e
- iii)  $x_0 \in I$

então a sequência  $\{x_k\}$  gerada pelo processo iterativo  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  converge para  $\xi$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Note que basta provar que:

i) se  $x_0 \in I$ , então  $x_k \in I, \forall k$ ;

ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ .

Inicialmente provaremos a primeira parte:

i)  $\xi$  é uma raiz exata da equação  $f(x) = 0$ .

Assim,  $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \varphi(\xi)$  e, para qualquer  $k$ , temos:  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$\Rightarrow x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) \quad (1)$$

Note que  $\varphi(x)$  é contínua e diferenciável em  $I$ , então, pelo Teorema do Valor Médio, se  $x_k \in I$ , existe  $c_k$  entre  $x_k$  e  $\xi$  tal que

$$\varphi'(c_k)(x_k - \xi) = \varphi(x_k) - \varphi(\xi)$$

e assim temos que

$$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi), \forall k$$

assim,

$$x_{k+1} - \xi = \varphi'(c_k)(x_k - \xi)$$

logo

$$|x_{k+1} - \xi| = |\varphi'(c_k)| |x_k - \xi| < |x_k - \xi|, \text{ pois, } |\varphi'(c_k)| < 1$$

ou seja, a distância entre  $x_{k+1}$  e  $\xi$  é estritamente menor que a distância entre  $x_k$  e  $\xi$ , como  $I$  está centrado em  $\xi$ , temos que se  $x_k \in I$ , então  $x_{k+1} \in I$ .

Por hipótese,  $x_0 \in I$ , então  $x_k \in I, \forall k$ .

Provaremos agora a segunda parte:

ii) De (1) segue que:

$$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_0)| |x_0 - \xi| \leq M|x_0 - \xi|$$

para um  $c_0$  entre  $x_0$  e  $\xi$ ,

$$|x_2 - \xi| = |\varphi(x_1) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_1)| |x_1 - \xi| \leq M|x_1 - \xi| \leq M^2|x_0 - \xi|$$

para um  $c_1$  entre  $x_1$  e  $\xi$ .

Procedendo de forma análoga, temos:

$$|x_k - \xi| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c_{k-1})| |x_{k-1} - \xi| \leq M|x_{k-1} - \xi|$$

$$M|x_{k-1} - \xi| \leq M^k|x_0 - \xi|$$

para um  $c_k$  entre  $x_k$  e  $\xi$ .

Então,  $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M^k|x_0 - \xi| = 0$ , pois por hipótese  $0 < M < 1$ .

Assim,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ .

■

No algoritmo do método do ponto fixo, escolhe-se  $x_k$  como raiz aproximada de  $\xi$  se  $|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \varepsilon$ .

Observe que  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$  não implica necessariamente que  $|x_k - \xi| < \varepsilon$ .

**DEFINIÇÃO 2.1.** Seja  $\{x_k\}$  uma sequência que converge para um número  $\xi$  e seja  $E_k = x_k - \xi$  o erro na iteração  $k$ . Se existir um número  $p > 1$  e uma constante  $C > 0$ , tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p} = C \quad (2)$$

então  $p$  é chamada de ordem de convergência da sequência  $\{x_k\}$  e  $C$  é a constante assintótica de erro. Se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{k+1}}{E_k} = C$ ,  $0 \leq |C| < 1$ , então a convergência é pelo menos linear.

Uma vez obtida a ordem de convergência  $p$  de um método iterativo, ela nos dá uma informação sobre a rapidez de convergência do processo, pois de (2), podemos escrever a seguinte relação:

$$|E_{k+1}| \approx C|E_k|^p \text{ para } k \rightarrow \infty.$$

Considerando que a sequência  $\{x_k\}$  é convergente, temos que  $E_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , portanto quanto maior for  $p$ , mais próximos de zero estará o valor  $C|E_k|^p$  (independentemente do valor de  $C$ ), o que implica uma convergência mais rápida da sequência  $\{x_k\}$ . Assim, se dois processos iterativos geram sequências  $\{x_k^1\}$  e  $\{x_k^2\}$ , ambas convergentes para  $\xi$ , com ordem de convergência  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, e se  $p_1 > p_2 \geq 1$ , o processo que gera a sequência  $\{x_k^1\}$  converge mais rapidamente que o outro.

Mostraremos que o método do ponto fixo, em geral, tem convergência apenas linear. Da demonstração do Teorema 2.1 temos a relação:

$$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(C_k)(x_k - \xi)$$

com  $C_k$  entre  $x_k$  e  $\xi$ , então

$$\frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(C_k)$$

tomando o limite quando  $k \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi'(C_k) = \varphi' \left( \lim_{k \rightarrow \infty} (C_k) \right) = \varphi'(\xi),$$

e, portanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{k+1}}{E_k} = \varphi'(\xi) = C$  e  $|C| < 1$ , pois  $\varphi'(x)$  satisfaz as hipóteses do Teorema

2.1.

Apresentado o Método do Ponto Fixo, no próximo capítulo será abordado o Método de Newton.

### 3 MÉTODO DE NEWTON

Os resultados obtidos neste capítulo podem ser encontrados em Ruggiero e Lopes (1996), Burden e Faires (2008), Franco (2006), Ardelean (2012), Garcia (2009), Homeier (2009), Machado e Alves (2013), Manuel *et al* (2007), Moreira (2010), Newton (2012), Polyak (2007) e em Shiskowski e Frinkle (2011).

No estudo do método do ponto fixo abordado no Capítulo 2, concluímos que:

i) uma das condições de convergência é que  $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ , onde  $I$  é um intervalo fechado;

ii) a convergência do método será mais rápida quanto menor for  $|\varphi'(\xi)|$ .

O que o método de Newton faz, na tentativa de garantir e acelerar a convergência do método do ponto fixo é escolher para função de iteração a função  $\varphi(x)$  tal que  $\varphi'(\xi) = 0$ .

Então, dada a equação  $f(x) = 0$  e partindo da forma geral para  $\varphi(x)$ , queremos obter a função  $A(x)$  tal que  $\varphi'(\xi) = 0$ :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x + A(x)f(x) \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x) \\ \Rightarrow \varphi'(\xi) &= 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \\ \Rightarrow \varphi'(\xi) &= 1 + A(\xi)f'(\xi)\end{aligned}$$

assim,  $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$ , assim, considere  $A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ .

Portanto, dada  $f(x)$ , a função de iteração  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  será tal que  $\varphi'(\xi) = 0$ , pois como podemos verificar:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

e, como  $f(\xi) = 0$ ,  $\varphi'(\xi) = 0$  (desde que  $f'(\xi) \neq 0$ ).

Assim, escolhido  $x_0$ , a sequência  $\{x_k\}$  será determinada por  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

### 3.1 ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO MÉTODO

O Método de Newton é representado geometricamente da seguinte forma: Dado o ponto  $(x_k, f(x_k))$  traçamos a reta  $L_k(x)$  tangente à curva neste ponto cuja equação é:

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

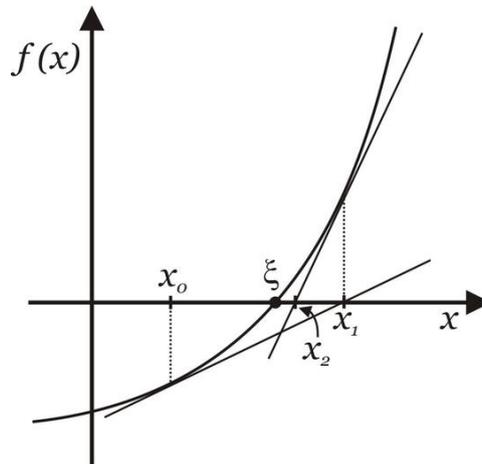
$L_k(x)$  é um modelo linear que aproxima a função  $f(x)$  numa vizinhança de  $x_k$ .

Encontrando o zero deste modelo, obtemos:

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{para } f'(x_k) \neq 0$$

Então toma  $x_{k+1} = x$ . As retas tangentes podem ser observadas na Figura 1.

**Figura 1** – Representação gráfica do Método de Newton



Fonte: RUGGIERO e LOPES (1996, p. 68)

### 3.2 ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON

**TEOREMA 3.1.** Sejam  $f(x)$ ,  $f'(x)$  e  $f''(x)$  contínuas num intervalo  $I$  que contém a raiz  $x = \xi$  de  $f(x) = 0$ . Se  $f'(\xi) \neq 0$ , então existe um intervalo  $\bar{I} \subset I$ , contendo a raiz  $\xi$ , tal que se  $x_0 \in \bar{I}$ , a sequência  $\{x_k\}$  gerada pela fórmula recursiva  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  convergirá para a raiz de  $f(x)$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Foi apresentado anteriormente no trabalho que o método de Newton é um método do ponto fixo com função de iteração  $\varphi(x)$  dada por

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Portanto, para provar a convergência do método, basta verificar que, sob as hipóteses acima, as hipóteses do Teorema 3.1 estejam satisfeitas para  $\varphi(x)$ , ou seja, é preciso provar que existe  $\bar{I} \subset I$  centrado em  $\xi$ , tal que:

- i)  $\varphi(x)$  e  $\varphi'(x)$  são contínuas em  $\bar{I}$ ;
- ii)  $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \bar{I}$ .

Temos que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \implies \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Por hipótese,  $f'(\xi) \neq 0$  e, como  $f'(x)$  é contínua em  $I$ , é possível obter  $I_1 \subset I$  tal que  $f'(x) \neq 0, \forall x \in I_1$ .

Assim, no intervalo  $I_1 \subset I$ , tem-se que  $f(x)$ ,  $f'(x)$  e  $f''(x)$  são contínuas e  $f'(x) \neq 0$ . Portanto,  $\varphi(x)$  e  $\varphi'(x)$  são contínuas em  $I_1$ .

Agora,  $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ . Como  $\varphi'(x)$  é contínua em  $I_1$  e  $\varphi'(\xi) = 0$ , é possível escolher  $I_2 \subset I_1$  tal que  $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I_2$  e, ainda mais,  $I_2$  pode ser escolhido de forma que  $\xi$  seja seu centro.

Concluindo, conseguimos obter um intervalo  $I_2 \subset I$ , centrado em  $\xi$ , tal que  $\varphi(x)$  e  $\varphi'(x)$  sejam contínuas em  $I_2$  e  $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I_2$ . Assim,  $\bar{I} = I_2$ .

Portanto, se  $x_0 \in \bar{I}$ , a sequência  $\{x_k\}$  gerada pelo processo iterativo  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  converge para a raiz  $\xi$ . ■

Em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que  $x_0$  seja escolhido suficientemente próximo da raiz  $\xi$ .

### 3.3 ALGORITMO

Para determinar uma solução para  $f(x) = 0$ , dada uma aproximação inicial  $x_0$ :

ENTRADA aproximação inicial  $x_0$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de iterações  $N_0$ .

SAÍDA solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro.

PASSO 1 Faça  $i = 1$ .

PASSO 2 Enquanto  $i \leq N_0$ , execute os passos 3 a 6.

PASSO 3 Faça  $x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ . (Calcula  $x_i$ ).

PASSO 4 Se  $|x - x_0| < TOL$ , então

SAÍDA ( $x$ ); (Procedimento concluído com sucesso.)

PARE

PASSO 5 Faça  $i = i + 1$ .

PASSO 6 Faça  $x_0 = x$ . (Atualiza  $p_0$ .)

PASSO 7 SAÍDA ('O método falhou após  $N_0$  iterações,  $N_0 = \cdot, N_0$ );  
(O procedimento não foi bem-sucedido.)

PARE

### 3.4 ORDEM DE CONVERGÊNCIA

Inicialmente supomos que o método de Newton gera uma sequência  $\{x_k\}$  que converge para  $\xi$ .

Ao observá-lo como um método do ponto fixo, diríamos que ele tem ordem de convergência linear. Contudo, o fato de sua função de iteração ser tal que  $\varphi'(\xi) = 0$  nos permite a demonstrar que a ordem de convergência é quadrática, ou seja,  $p = 2$ .

Supondo que estão satisfeitas aqui todas as hipóteses do Teorema 3.1. Temos que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow E_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = E_{k+1}$$

Considerando o desenvolvimento de Taylor de  $f(x)$  em torno de  $x_k$ , temos:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(C_k)}{2}(x - x_k)^2,$$

sendo  $C_k$  entre  $x$  e  $x_k$ . Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)(x_k - \xi) + \frac{f''(C_k)}{2}(x_k - \xi)^2 \\ \Rightarrow f(x_k) &= f'(x_k)(x_k - \xi) - \frac{f''(C_k)}{2}(x_k - \xi)^2 && \div f'(x_k) \\ \Rightarrow \frac{f''(C_k)}{2f'(x_k)} E_k^2 &= -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + E_k = E_{k+1} \\ \Rightarrow \frac{E_{k+1}}{E_k^2} &= \frac{f''(C_k)}{2f'(x_k)} \end{aligned}$$

logo,

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{k+1}}{E_k^2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f''(C_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \frac{f''\left[\lim_{k \rightarrow \infty} (C_k)\right]}{f'\left[\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k)\right]} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{1}{2} \varphi''(\xi) = C$$

Portanto, o método de Newton tem convergência quadrática.

### 3.5 CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA

Quando aplicamos o Método de Newton para se resolver um problema algumas condições para a escolha do ponto inicial ( $x_0$ ) e do intervalo  $[a, b]$  precisam ser cumpridas para se garantir a convergência do método.

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , duas vezes derivável, com  $f''$  contínua, se:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;
- $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ ;
- $f''(x)$  tem sinal constante em  $(a, b)$ , ou seja,  $f''(a) \cdot f''(b) > 0$ ;
- O valor inicial  $x_0$ , satisfaz  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

Então a sequência  $(x_n)$  gerada pelas iterações do Método de Newton converge para a única raiz do intervalo.

### 3.6 ESCOLHA DE UMA BOA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

A escolha do valor inicial é considerada boa quando  $x_0$ , satisfaz a desigualdade  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ . Se  $f''(x)$  deve manter sinal constante para todo  $x \in \mathbb{R}$  na vizinhança da raiz  $]a, b[$ , teremos duas situações:

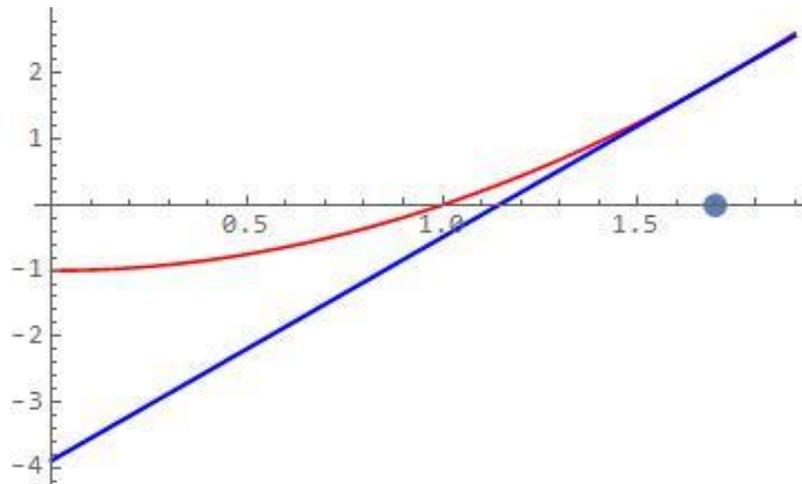
- 1)  $f(x_0) > 0, f''(x_0) > 0$ .
- 2)  $f(x_0) < 0, f''(x_0) < 0$ .

Para cada uma das situações por sua vez temos dois casos.

Para o primeiro caso, temos:

- Quando  $f(x_0) > 0, f'(x_0) > 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , ilustrado na Figura 2.

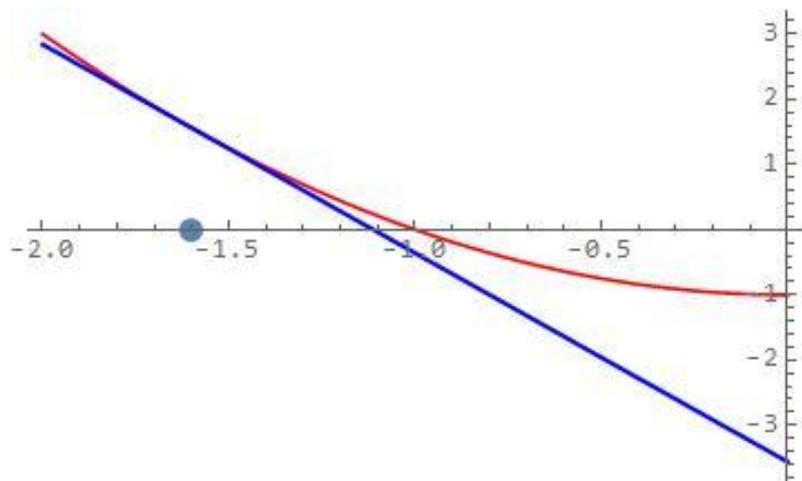
**Figura 2** – Representação de uma função  $f(x)$  com  $f(x_0) > 0$ ,  $f'(x_0) > 0$  e  $f''(x_0) > 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Quando  $f(x_0) > 0$ ,  $f'(x_0) < 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , como podemos ver no gráfico da Figura 3:

**Figura 3** – Representação de uma função  $f(x)$  com  $f(x_0) > 0$ ,  $f'(x_0) < 0$  e  $f''(x_0) > 0$

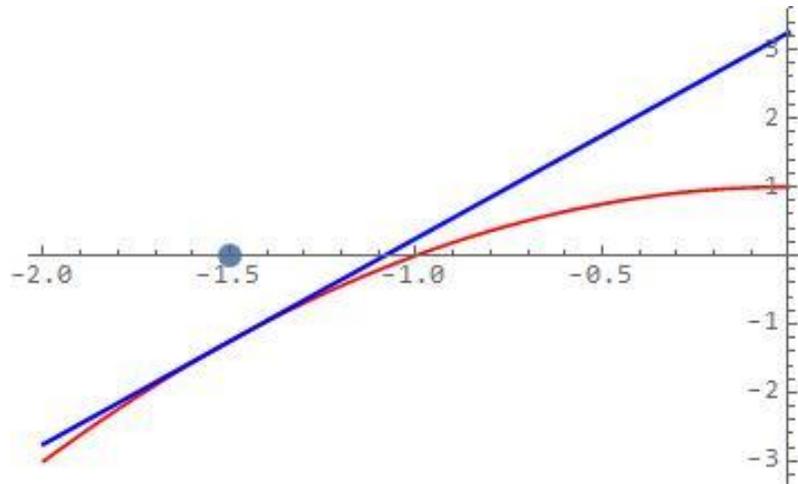


Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o segundo caso, temos:

- Quando  $f(x_0) < 0$ ,  $f'(x_0) > 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , como podemos ver no gráfico da Figura 4:

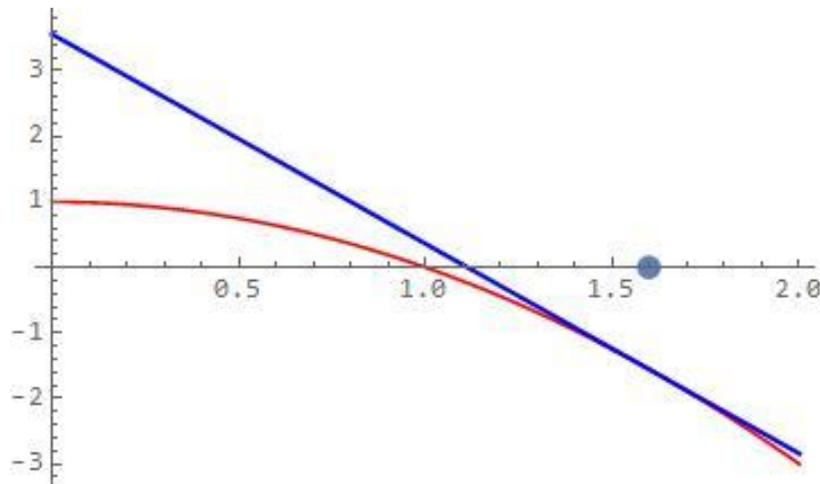
**Figura 4** – Representação de uma função  $f(x)$  com  $f(x_0) < 0$ ,  $f'(x_0) > 0$  e  $f''(x_0) < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Quando  $f(x_0) < 0$ ,  $f'(x_0) < 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , como podemos observar no gráfico da Figura 5:

**Figura 5** – Representação de uma função  $f(x)$  com  $f(x_0) < 0$ ,  $f'(x_0) < 0$  e  $f''(x_0) < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostraremos analiticamente agora que a escolha de  $x_0$ ,  $f''(x)$  deve manter sinal constante para todo  $x \in \mathbb{R}$  na vizinhança da raiz  $]a, b[$ , satisfazendo a condição  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  garante a construção de uma sequência convergente pela direita para o primeiro caso e pela esquerda no segundo caso.

A série de Taylor de  $f(x)$  para a raiz  $r$  da segunda derivada fica:

$$f(r) = f(x_k) + f'(x_k)(r - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(r - x_k)^2$$

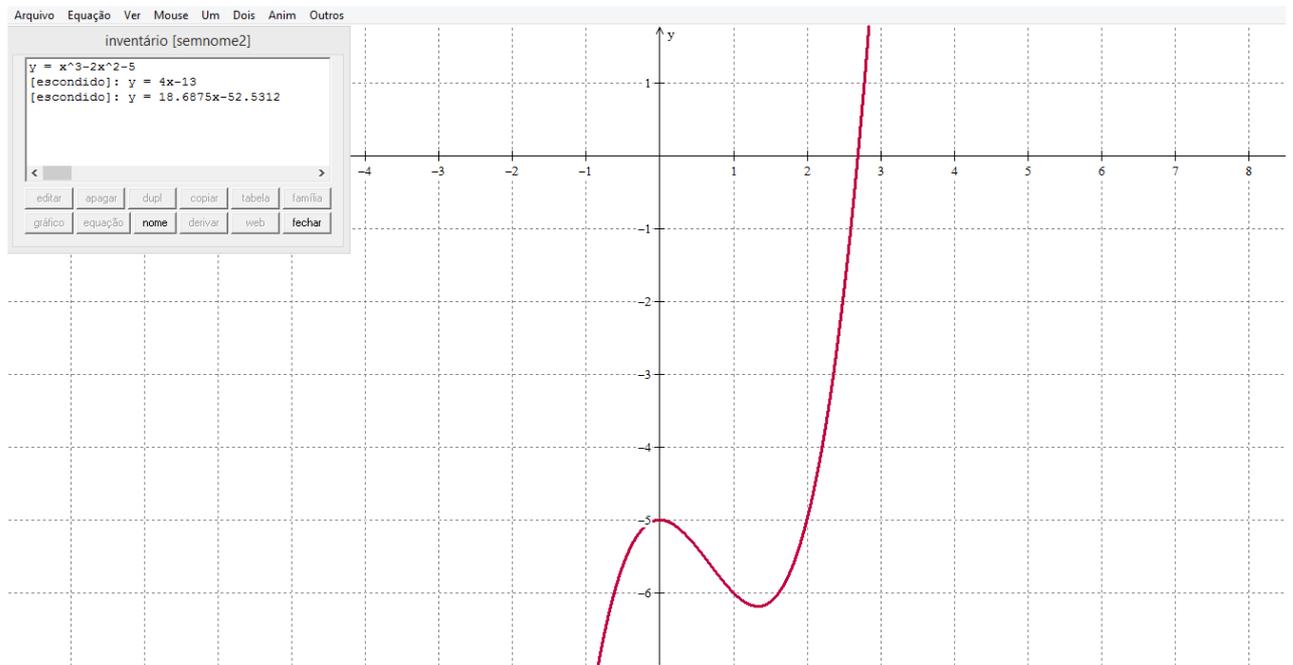
Supondo o primeiro caso onde  $f(x_0) > 0$ ,  $f'(x_0) > 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , como  $f(r) = 0$  e por ser raiz da equação, então o termo  $\frac{f''(x_k)}{2}(r - x_k)^2 > 0$ . Logo teremos que obrigatoriamente  $f(x_k) + f'(x_k)(r - x_k) < 0$  de onde isolando  $r$  obtemos a desigualdade  $r < x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1}$ , que mostra que neste caso construímos uma sequência de aproximações a direita de  $r$ . O estudo analítico para os outros três casos são análogos.

### 3.7 EXEMPLOS

**Exemplo 3.7.1.** Determine o zero da função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$  com precisão de  $10^{-4}$ , entre  $[1, 4]$ .

Para facilitar foi utilizada a representação gráfica de  $f(x)$ , conforme mostra a Figura 6:

**Figura 6** – Gráfico da função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$



Fonte: Elaborada pelo autor.

1ª iteração:

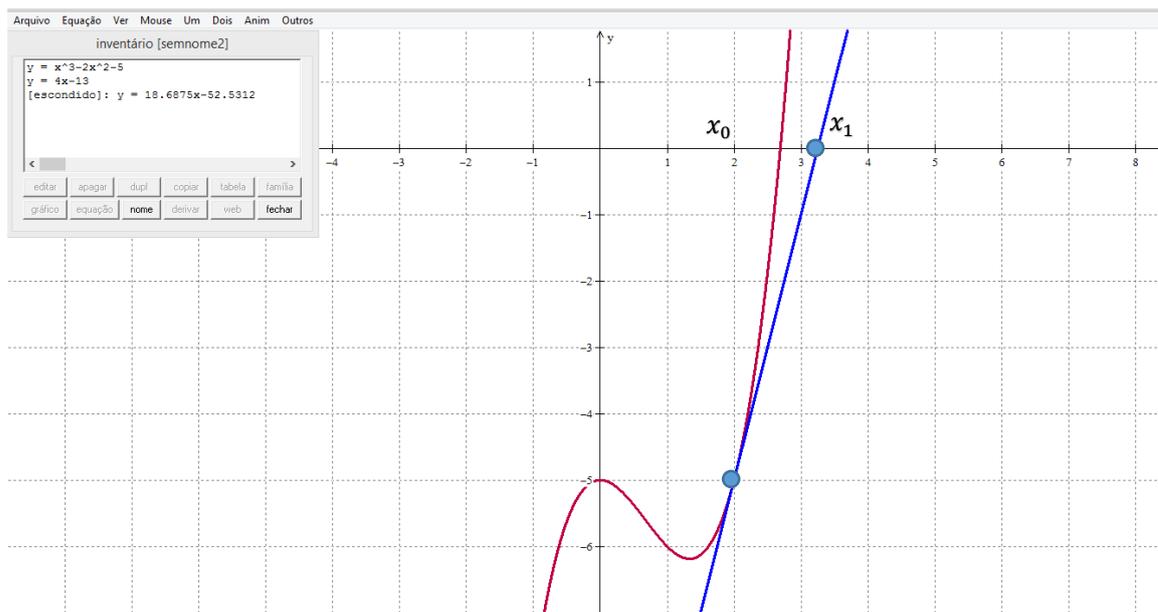
Tomando  $x_0 = 2$ , como  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ , logo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{(-5)}{4} \Rightarrow x_1 = 3,25$$

note que  $|x_1 - x_0| = |3,25 - 2| = 1,25 > E$ .

Na representação gráfica apresentado na Figura 7, podemos ver a função  $f(x)$  e a reta tangente ao ponto  $x_0 = 2$

**Figura 7** – Gráfico da função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$  e da reta tangente ao ponto  $(x_0, f(x_0))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

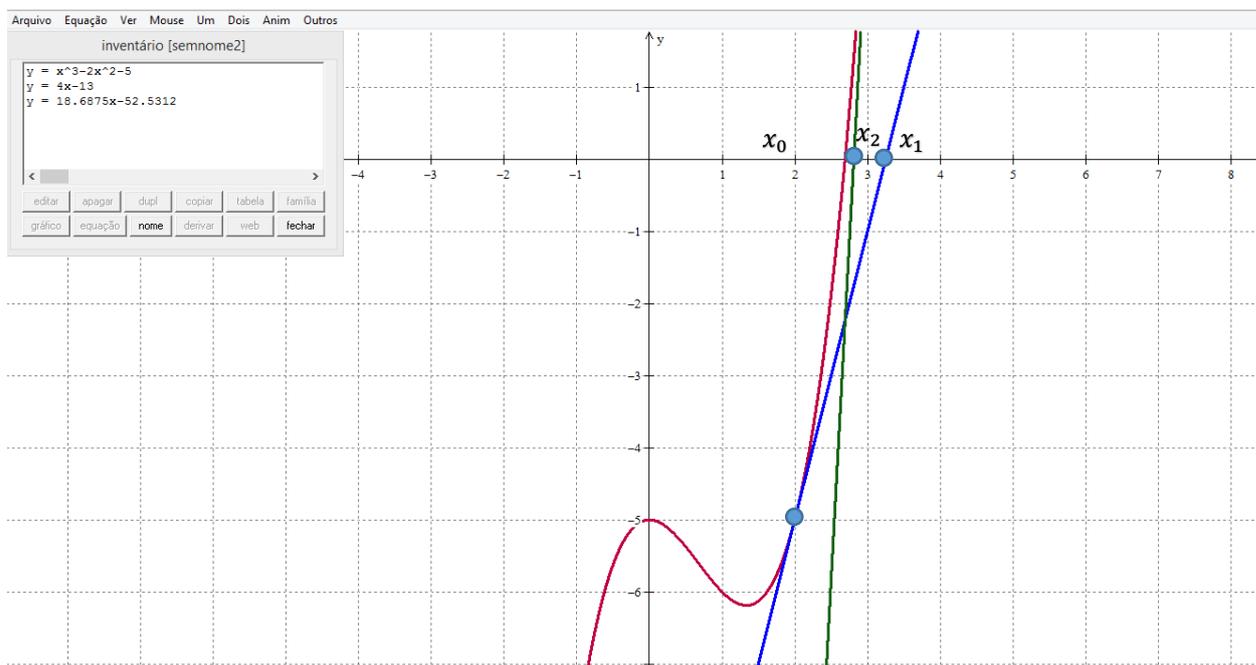
2ª iteração:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = 3,25 - \frac{8,203125}{18,6875} \Rightarrow x_2 = 2,811036789$$

note que  $|x_2 - x_1| = |2,811036789 - 3,25| = 0,438963211 > E$ .

Na representação gráfica apresentada na Figura 8, podemos ver a função  $f(x)$  e as retas tangentes aos pontos  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 3,25$ :

**Figura 8** – Gráfico da função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$  e das retas tangentes aos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

3ª iteração:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 = 2,811036789 - \frac{1,408754173}{12,46163633} \Rightarrow x_3 = 2,697989502$$

note que  $|x_3 - x_2| = |2,697989502 - 2,811036789| = 0,113047287 > E$ .

4ª iteração:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow x_4 = 2,697989502 - \frac{0,080768435}{11,04548405} \Rightarrow x_4 = 2,690677153$$

note que  $|x_4 - x_3| = |2,690677153 - 2,697989502| = 0,007312349 > E$ .

5ª iteração:

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \Rightarrow x_5 = 2,690677153 - \frac{0,000325457}{10,95652201} \Rightarrow x_5 = 2,690647449$$

note que  $|x_5 - x_4| = |2,690647449 - 2,690677153| = 0,00000000408 < E$ .

E assim é atendido o critério de parada.

Note que mesmo quando o valor inicial não satisfaz a condição de convergência  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ , é possível através do método de Newton convergir para a raiz. Como neste exemplo, onde  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$  e  $f''(x) = 6x - 4$ , então  $f(2) = -5$  e  $f''(2) = 8$ , logo  $f(2) \cdot f''(2) = (-5) \cdot 8 < 0$ .

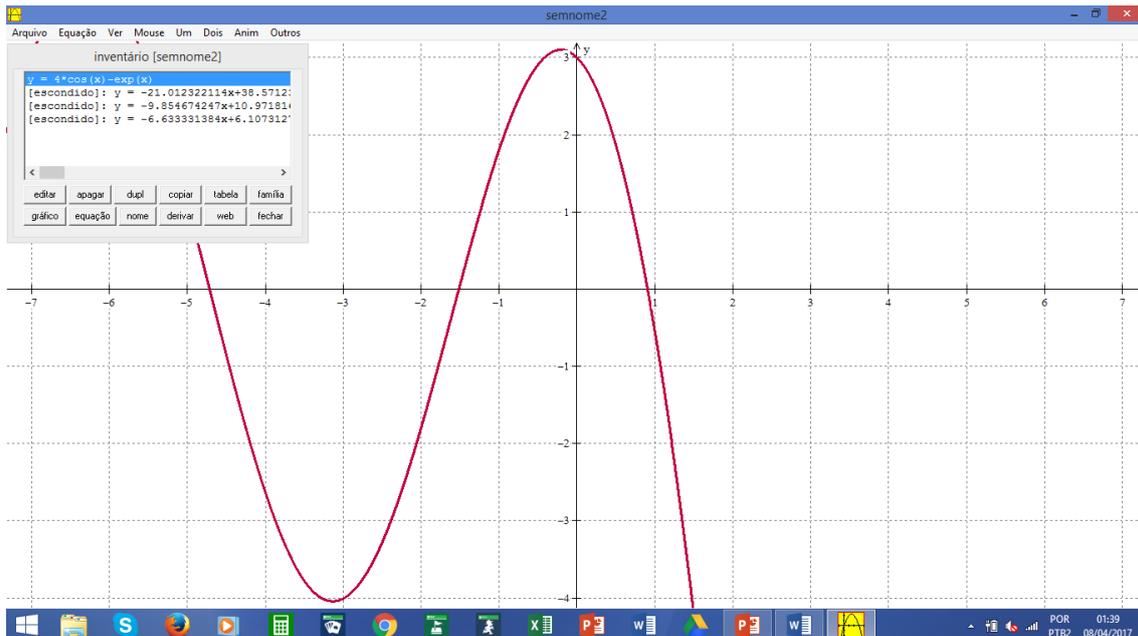
**Exemplo 3.7.2.** Determinar, usando o Método de Newton, a menor raiz positiva da equação:

$$4 \cos x - e^x = 0$$

com erro inferior a  $10^{-2}$ .

Para facilitar utilizou-se a representação gráfica de  $f(x)$ , conforme a Figura 9:

**Figura 9** – Gráfico da função  $f(x) = 4 \cos x - e^x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando  $x_0 = 3$ , como  $f'(x) = -4 \sin x - e^x$  e  $f''(x) = -4 \cos x - e^x$ , note que

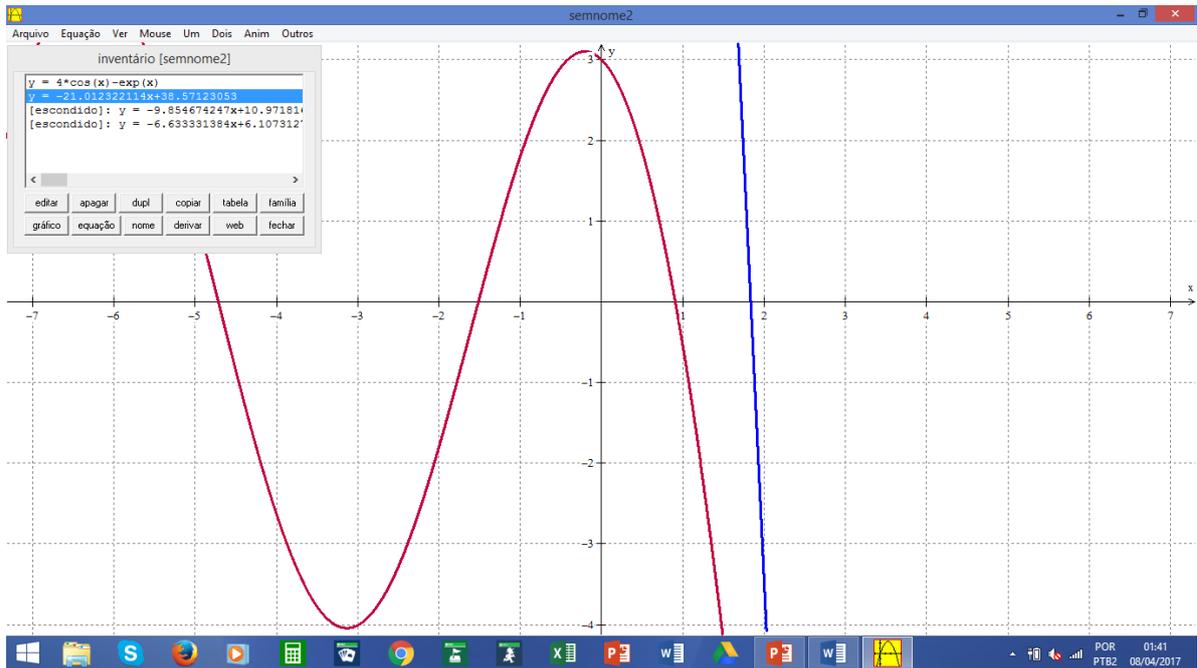
$$f(3) = -24,04550691$$

$$f''(3) = -16,12556694$$

logo  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  e então  $x_0 = 3$  é considerada uma boa primeira aproximação.

$$1^{\text{a}} \text{ iteração: } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = 1,835569629$$

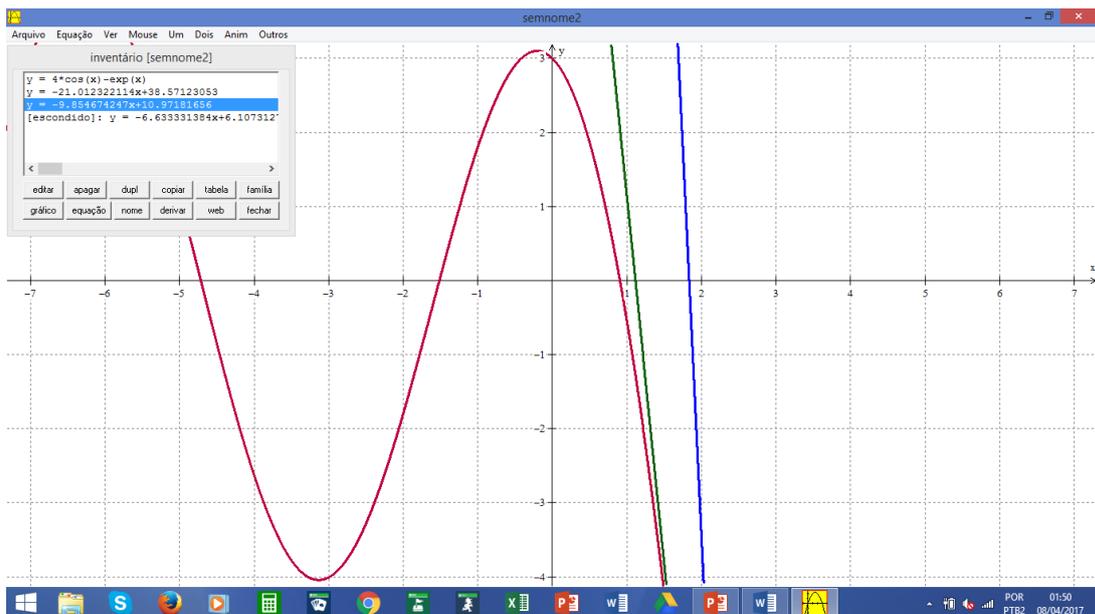
**Figura 10** – Gráfico da função  $f(x) = 4 \cos x - e^x$  e da reta tangente ao ponto  $(x_0, f(x_0))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$2^{\text{a}} \text{ iteração: } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = 1,113362007$$

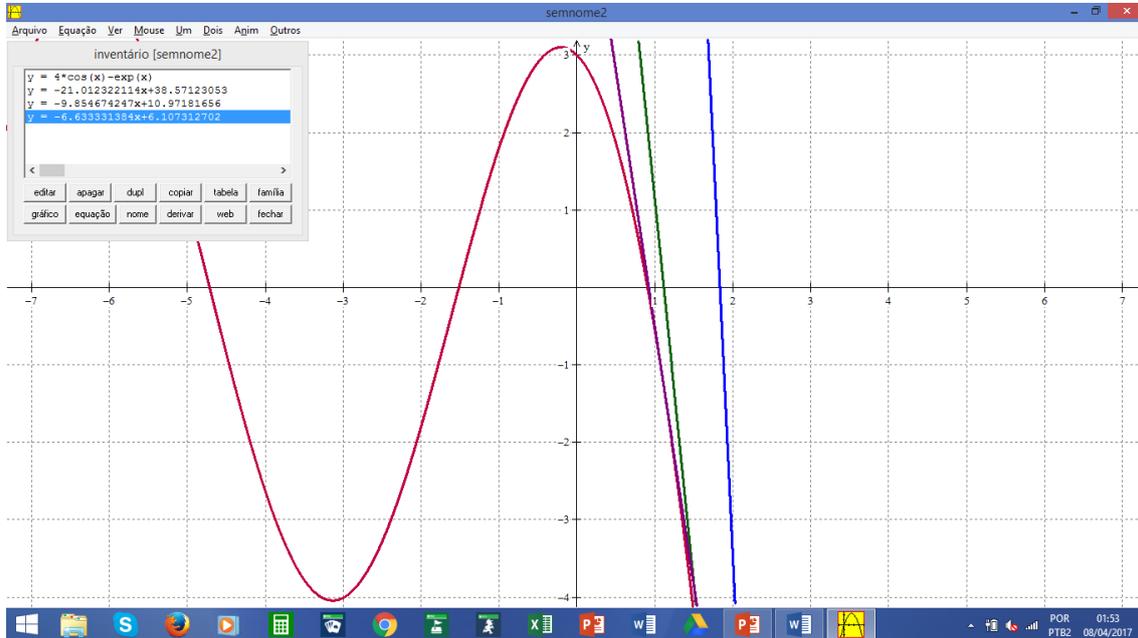
**Figura 11** – Gráfico da função  $f(x) = 4 \cos x - e^x$  e das retas tangentes aos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$3^{\text{a}} \text{ iteração: } x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 = 0,920700678$$

**Figura 12** – Gráfico da função  $f(x) = 4 \cos x - e^x$  e das retas tangentes aos pontos  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$4^{\text{a}} \text{ iteração: } x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow x_4 = 0,904897937$$

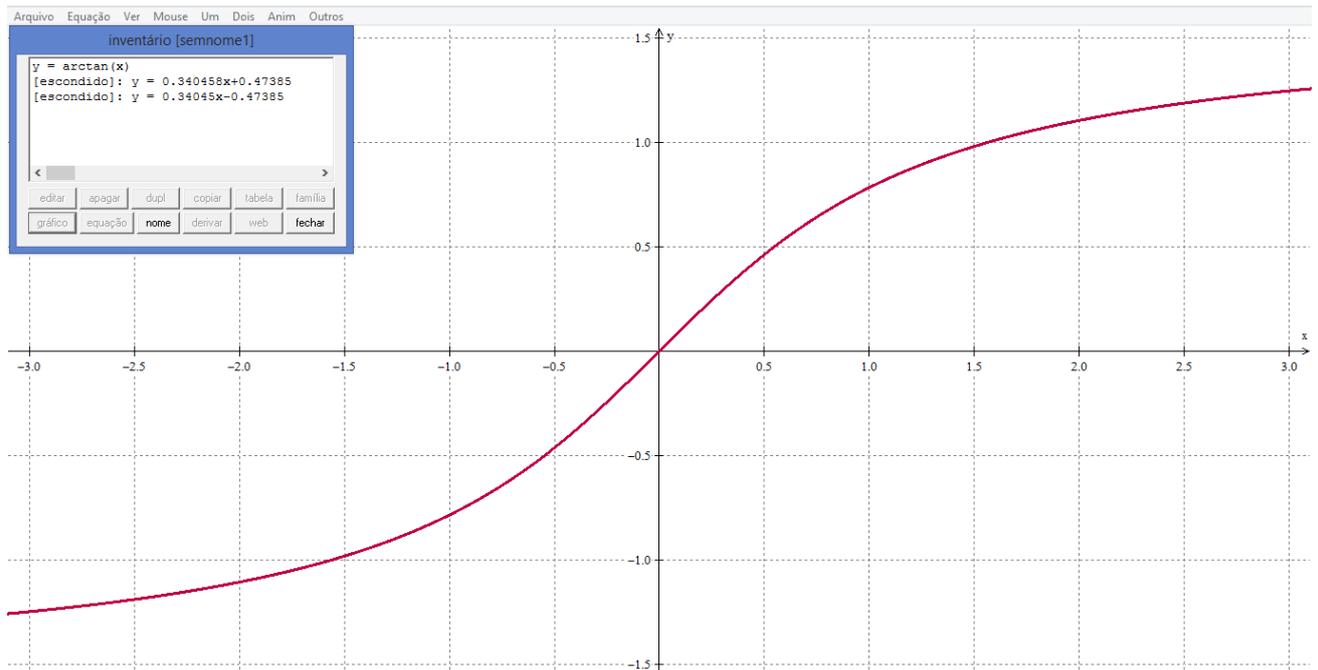
$$5^{\text{a}} \text{ iteração: } x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \Rightarrow x_5 = 0,904788223$$

$$6^{\text{a}} \text{ iteração: } x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} \Rightarrow x_6 = 0,904788217$$

$$7^{\text{a}} \text{ iteração: } x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} \Rightarrow x_7 = 0,904788217$$

**Exemplo 3.7.3.** Sabemos que a equação  $\arctan x = 0$  pelo comportamento da função  $f(x) = \arctan x$  tem raiz nula, porém note que se tentarmos encontrá-la utilizando o método de Newton, nunca terá um boa primeira aproximação, então pode convergir, divergir ou oscilar ciclicamente entre dois valores.

**Figura 13** – Gráfico da função  $f(x) = \arctan x$



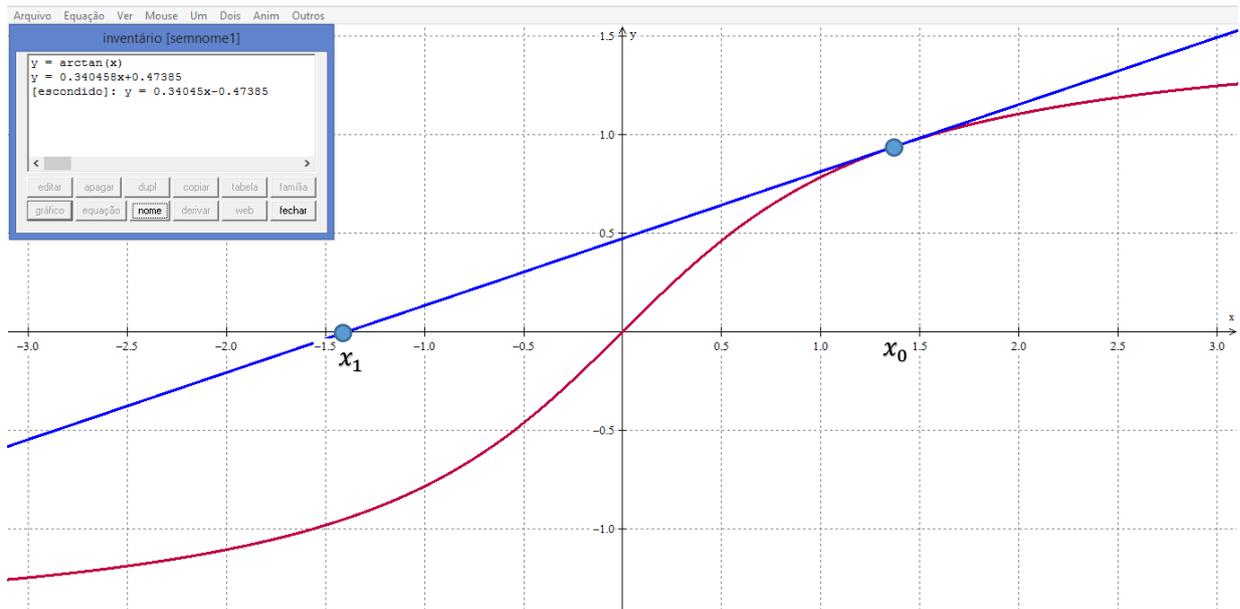
Fonte: Elaborada pelo autor.

1ª iteração:

Tomando  $x_0 = 1,3918$ , como  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , logo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = -1,3918$$

**Figura 14** – Gráfico da função  $f(x) = \arctan x$  e da reta tangente ao ponto  $x_0 = 1,3918$

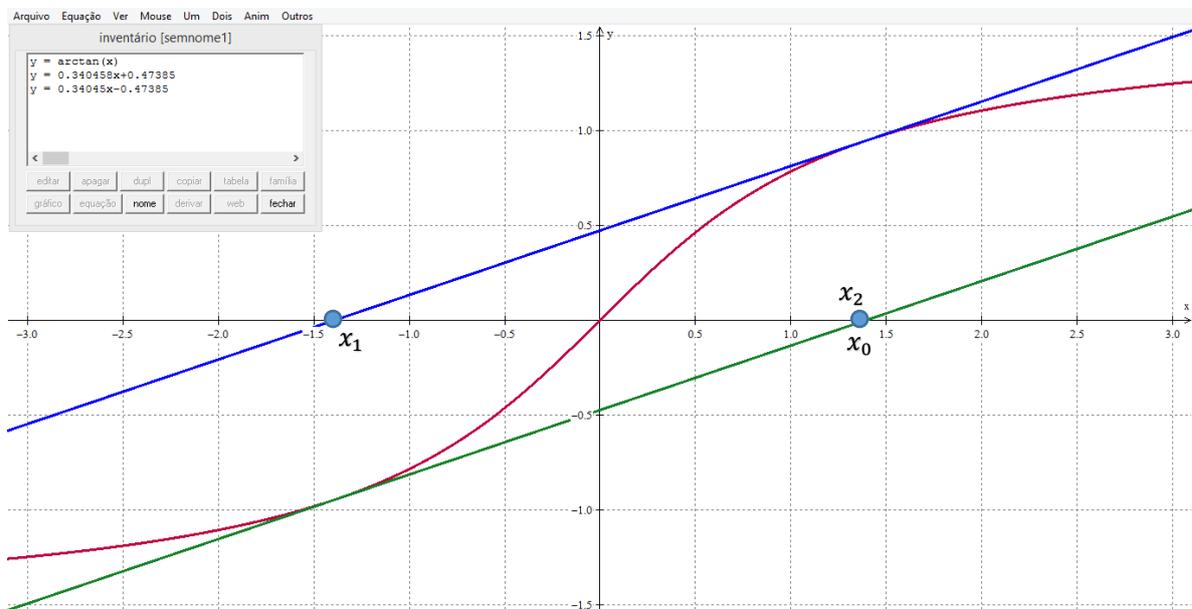


Fonte: Elaborada pelo autor.

2ª iteração:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = 1,3918$$

**Figura 15** – Gráfico da função  $f(x) = \arctan x$  e das retas tangentes aos pontos  $x_0 = 1,3918$  e  $x_1 = -1,3918$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que se calcularmos  $x_3$  o resultado será novamente  $-1,3918$ , ou seja, ficará oscilando entre os mesmos valores e com isso não converge para a raiz da função  $f(x) = 0$ .

Portanto, neste caso através do método de Newton não conseguimos encontrar uma raiz aproximada.

**Exemplo 3.7.4.** No *software Mathematica* (versão free) foi programado um arquivo para ajudar na visualização do método geometricamente e numericamente. Utilizaremos a equação  $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$  para ilustrar.

- Para a visualização numérica do problema utilizamos o algoritmo a seguir:

Figura 16 – Algoritmo no *Software Mathematica*

## Método de Newton

```
In[1]:= MiNewton[f_, var_, x0_, iter_] := NewtonAuxiliar[Function[var, f], N[x0], iter];
NewtonAuxiliar[f_, x0_, iter_] :=
Module[{x = x0, xx = x0, i},
df[x_] := f'[x];
For[i = 0, i < iter, i++, x = xx; Print[xx];
If[df[x] ≠ 0, xx = N[x -  $\frac{f[x]}{df[x]}$ ],
Return["Error: derivada igual a cero"]
] (*fim del If*)
]; (*fim del For*)
Print["solução aproximada: "];
Print[xx];
Print["erro de aproximações sucesivas: "];
Print[Abs[xx - x]];
Print["-----"];
xx
] (*fim de Module*)
```

```
In[4]:= MiNewton[x^3 - 2 x^2 - 5, x, 2, 6]
```

```
2.
3.25
2.81104
2.69799
2.69068
2.69065
solução aproximada:
2.69065
erro de aproximações sucesivas:
4.89005 × 10-10
-----
```

```
Out[4]= 2.69065
```

Fonte: Elaborada pelo autor

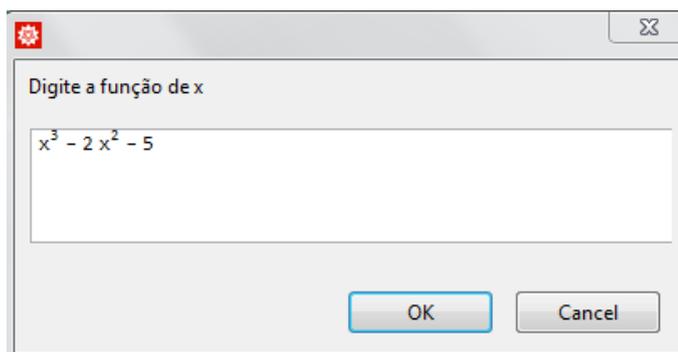
Para a visualização geométrica do problema foram digitados no ambiente do *software* os seguintes comandos:

```

expresion=Input["Digite a função de x"];x0=Input["Digite a primeira aproximação"];
f=Function[x,Evaluate[expresion]];
df=Function[x,D[f[x],x]];
g=RecurrenceTable[{newton[n+1]==N[(x-f[x]/df[x])/x-  
>newton[n]],newton[1]==N[x0]},newton,{n,1,9}];menor=Min[g];maior=Max[g];
If[menor>0,menor=0,Continue];
    Manipulate[Show[{Plot[{Evaluate[f[x]/.x->t],Flatten[Table[(f[x]+df[x](t-x))/x-  
>g[[i]],{i,1,n}]}],{t,menor,maior},PlotStyle-  
>{Red,{Blue,Thick}}],ListPlot[Table[{g[[i]],0},{i,1,n}],PlotStyle-  
>PointSize[0.03]}],Style[{"Resolução pelo método de Newton de","primeira aproximação  
x0="}{TraditionalForm[expresion==0],TraditionalForm[x0]},Bold,Medium],{n,1,"iterações"}  
,1,9]]
  
```

Que ao executar abre uma janela de entrada de dados sobre a função  $f(x)$ , como mostra a imagem a seguir:

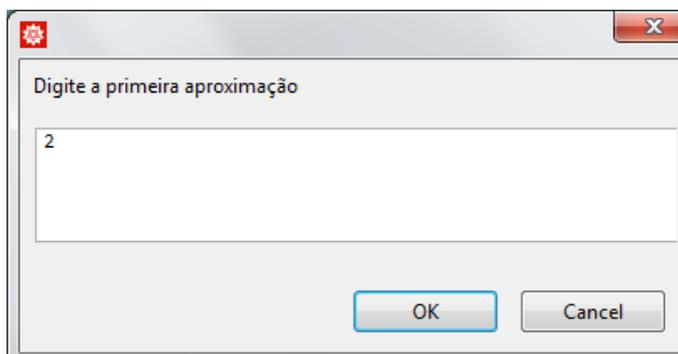
**Figura 17** – Janela para digitalização da função



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida abre outra janela para a primeira aproximação:

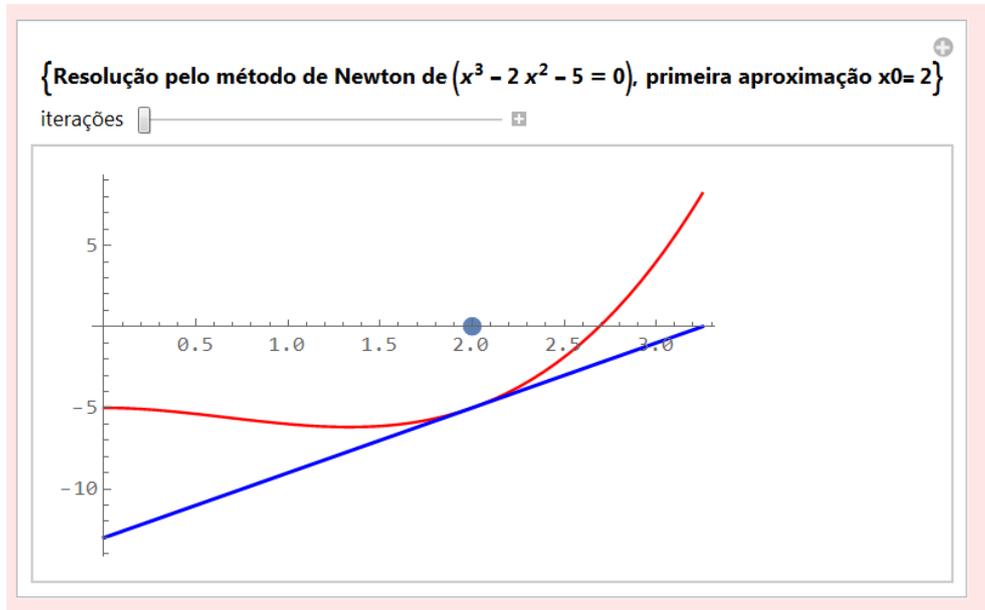
**Figura 18** – Janela para digitalização do valor inicial



Fonte: Elaborada pelo autor.

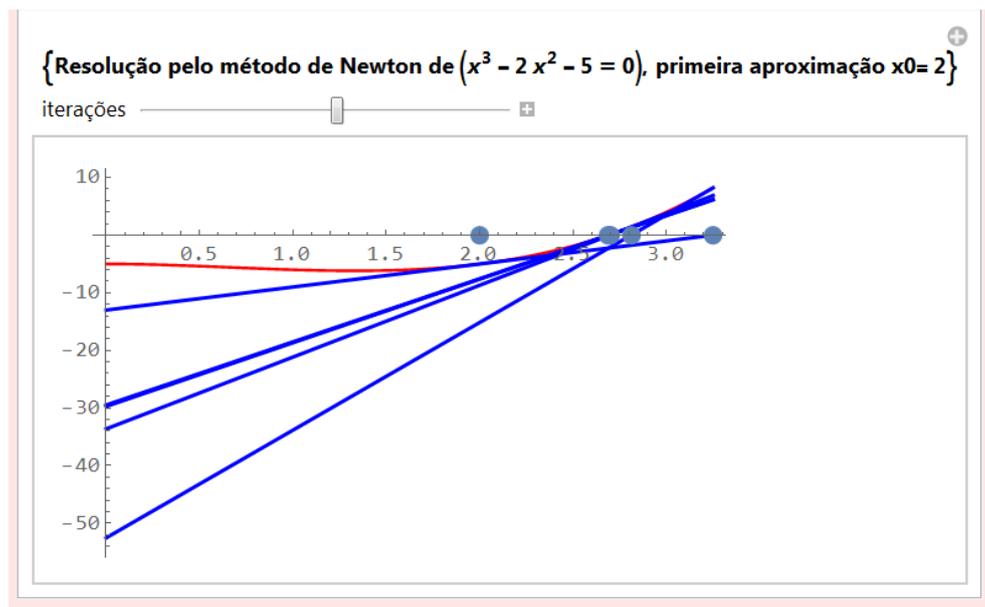
Então teremos uma janela com o controle de iterações para visualizar passo a passo a sequência de tangentes e raízes aproximadas:

**Figura 19** – Gráficos da função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$  e da reta tangente ao ponto  $x_0 = 2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 20** – Gráficos da função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$  e das retas tangentes geradas por sucessivas iterações



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4 MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Os resultados obtidos neste capítulo podem ser encontrados em Ruggiero e Lopes (1996), Ardelean (2012), Burden e Faires (2008), Garcia (2009), Homeier (2009), Machado e Alves (2013), Manuel *et al* (2007), Moreira (2010), Newton (2012) e em Polyak (2007).

O método de Newton é o mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não lineares. No caso de uma equação não linear de uma variável do tipo  $f(x) = 0$ , vimos no Capítulo 3 que, geometricamente, o método de Newton consiste em se tornar um modelo local linear da função  $f(x)$  em torno de  $x_k$  que corresponde a reta tangente à  $f(x)$  em  $x_k$ .

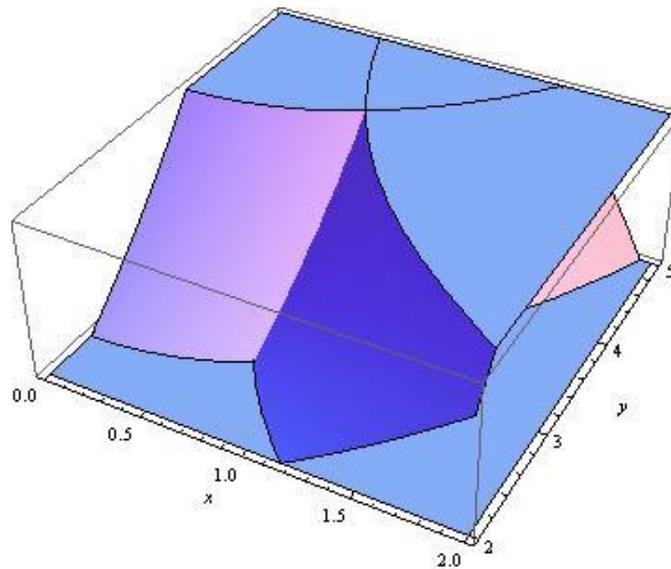
Neste capítulo apresentamos a abordagem do método para sistemas de equações não lineares de duas variáveis.

### 4.1 ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE DUAS VARIÁVEIS

O método de Newton para uma equação do tipo  $f(x) = 0$  não linear tem a sua interpretação geométrica bastante conhecida, haja vista que é comumente abordada em muitos livros de Cálculo Numérico, porém para o caso de um sistema de duas equações de duas variáveis dificilmente são tratados nesta perspectiva nas referências bibliográficas.

Neste caso, pode-se construir uma visualização da solução aproximada de sistemas de equações do tipo  $\{f(x, y) = 0, g(x, y) = 0\}$ . Podemos observar que as superfícies  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$  se interceptam formando uma curva que intercepta o plano  $xy$  no ponto  $P(r_1, r_2)$ , onde a primeira aproximação é um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  próximo dele, então os planos tangentes às superfícies no ponto  $(x_0, y_0)$  se cortam formando uma reta que corta o plano  $xy$  no ponto  $P_1(x_1, y_1)$  que deve estar mais próximo de  $(r_1, r_2)$ . Conforme pode ser observada na Figura 21.

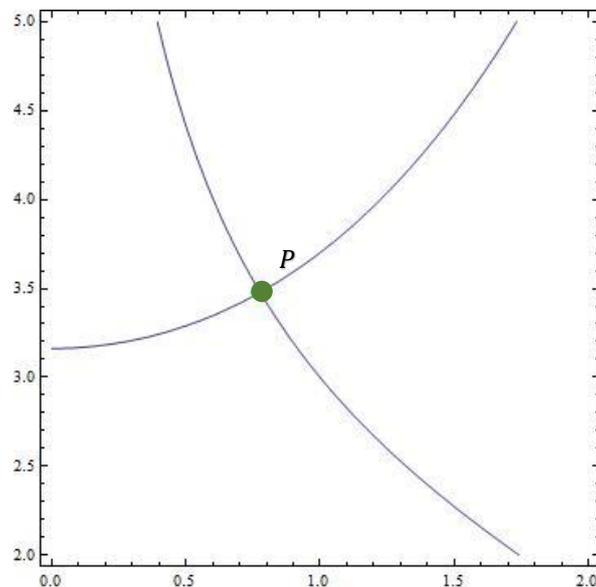
**Figura 21** – Representação gráfica de duas funções de duas variáveis



Fonte: Elaborada pelo autor.

As superfícies  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$  se cortam formando uma curva que passa pelo plano  $xy$  pelo ponto  $P(r_1, r_2)$  (ponto verde) raiz do sistema, observemos no plano  $xy$ :

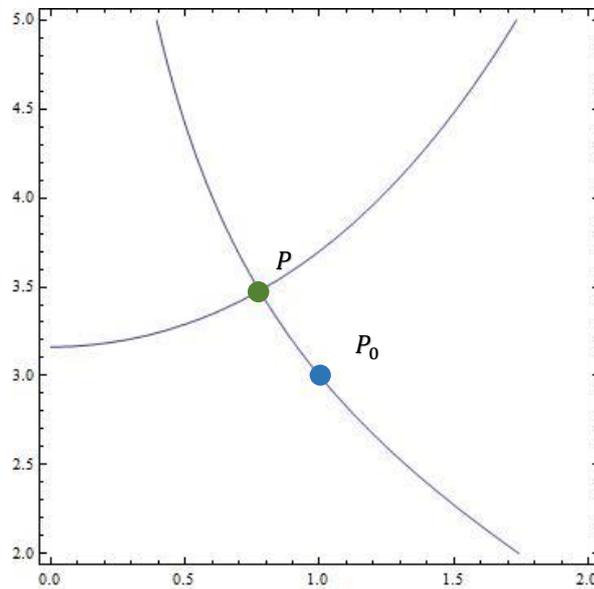
**Figura 22** – Representação gráfica das curvas de nível para duas funções de duas variáveis no plano  $xy$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando uma aproximação inicial  $P_0(x_0, y_0)$  (ponto azul) nas proximidades da raiz conforme ilustra a Figura 23. Veja no plano  $xy$ :

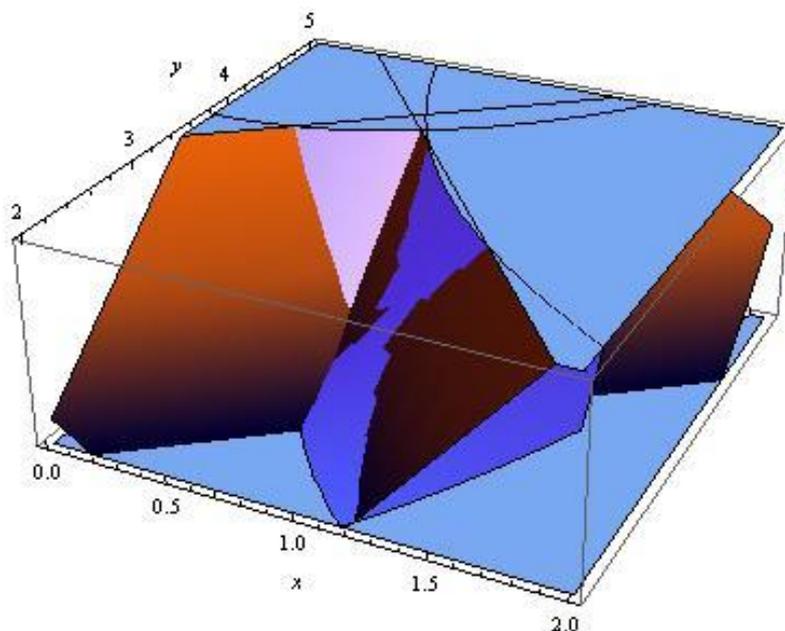
**Figura 23** – Representação gráfica das curvas de nível para duas funções de duas variáveis no plano  $xy$  e um ponto inicial  $P_0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

O próximo passo será determinar as equações dos planos tangentes das superfícies  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$  no ponto  $P_0(x_0, y_0)$ , respectivamente e traça-los junto às superfícies, conforme ilustrado na Figura 24.

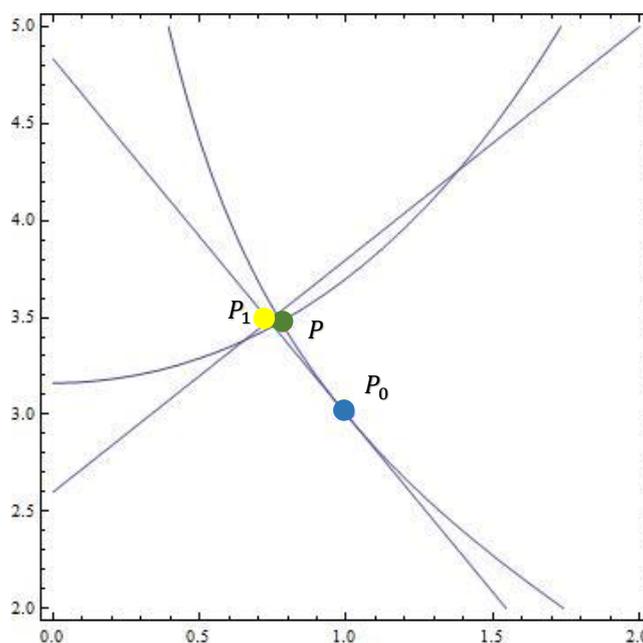
**Figura 24** – Representação gráfica de duas funções de duas variáveis e seus respectivos planos tangentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar com mais clareza o processo por meio das intersecções das curvas de nível  $C_1: f(x, y) = 0$  e  $C_2: g(x, y) = 0$  no ponto  $P(r_1, r_2)$  a primeira aproximação  $P_0(x_0, y_0)$  (ponto azul) e o ponto do plano  $xy$  onde se cortam as retas intersecção dos planos tangentes  $P_1(x_1, y_1)$  (ponto amarelo), conforme ilustrado na Figura 25.

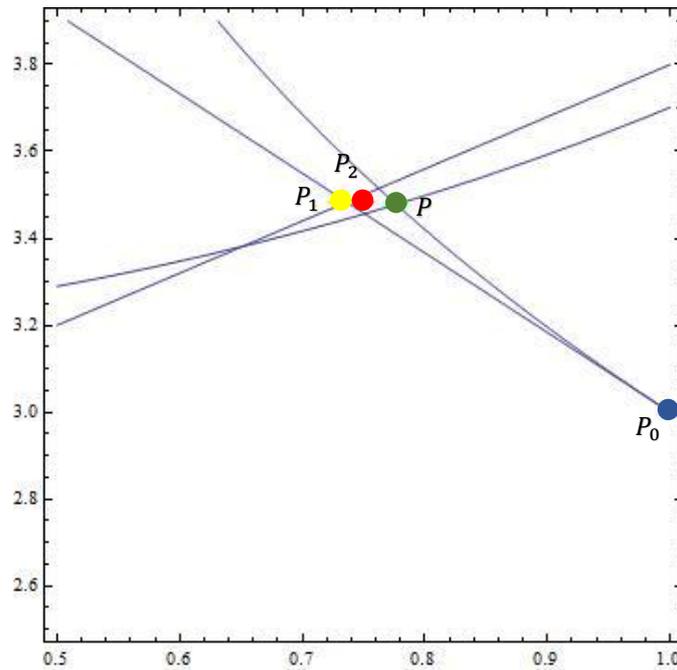
**Figura 25** – Representação gráfica das curvas de nível para duas funções de duas variáveis no plano  $xy$ , ponto inicial  $P_0$  e ponto  $P_1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na seguinte aproximação utilizamos  $P_1(x_1, y_1)$  e obtivemos  $P_2(x_2, y_2)$  (ponto vermelho) e continua o processo convergindo para  $P(r_1, r_2)$  veja na Figura 26.

**Figura 26** – Representação gráfica das curvas de nível para duas funções de duas variáveis no plano  $xy$ , ponto inicial  $P_0$ , ponto  $P_1$  e ponto  $P_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4.2 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Nesta seção vamos deduzir as fórmulas. Note que a equação do plano tangente a uma superfície  $z = f(x, y)$  num ponto  $(x_1, y_1)$  é

$$z - z_1 = f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1)$$

como são duas superfícies  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$ . Os planos tangentes de ambas no ponto  $(x_1, y_1)$  são:

$$z - z_1 = f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1) \quad (3)$$

$$z - z_1 = g_x(x_1, y_1)(x - x_1) + g_y(x_1, y_1)(y - y_1) \quad (4)$$

sendo  $z_1 = f(x_1, y_1)$  em (3) e  $z_1 = g(x_1, y_1)$  em (4), como  $(x_2, y_2)$  é o ponto de intersecção das retas projeção dos planos no plano  $xy$  onde  $z = 0$ , então temos o sistema com relação a  $(x_2, y_2)$ :

$$-f(x_1, y_1) = f_x(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y_2 - y_1) \quad (5)$$

$$-g(x_1, y_1) = g_x(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + g_y(x_1, y_1)(y_2 - y_1) \quad (6)$$

Para isolar  $x_2$  e  $y_2$  basta multiplicar (5) por  $g_y(x_1, y_1)$  e (6) por  $-f_y(x_1, y_1)$ , para eliminar os termos de  $y$  somamos as equações, observe que as funções e derivadas são todas avaliadas em  $(x_1, y_1)$ , obtemos então uma fórmula para isolar  $x_2$

$$\begin{aligned} -f \cdot g_y + g \cdot f_y &= -g_y \cdot f_x \cdot (x_2 - x_1) + g_x \cdot f_y \cdot (x_2 - x_1) \\ \Rightarrow x_2 &= x_1 - \frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{g_y \cdot f_x - g_x \cdot f_y}, \text{ para } (g_y \cdot f_x - g_x \cdot f_y) \neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

para eliminar os termos  $x$  e obter a fórmula para  $y_2$  multiplicamos (5) por  $g_x(x_1, y_1)$  e (6) por  $-f_x(x_1, y_1)$  e somamos as equações, obtemos

$$\begin{aligned} -f \cdot g_x + g \cdot f_x &= g_x \cdot f_y \cdot (y_2 - y_1) - f_x \cdot g_y \cdot (y_2 - y_1) \\ \Rightarrow y_2 &= y_1 - \frac{f_x \cdot g - g_x \cdot f}{g_y \cdot f_x - g_x \cdot f_y}, \text{ para } (g_y \cdot f_x - g_x \cdot f_y) \neq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

As fórmulas (7) e (8) aplicando-as recursivamente com uma aproximação inicial  $(x_1, y_1)$ , permite construirmos uma sequência de aproximações  $(x_n, y_n)$ , tomando como critério de parada  $|X_n - X_{n+1}| < \text{Erro}$ , com  $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ .

### 4.3 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

Para se determinar os elementos que compõe as fórmulas de (3) a (8) é necessário que as funções que determinam as superfícies sejam contínuas e com plano tangente único para cada ponto na vizinhança do ponto  $P(r_1, r_2)$ , ainda assim pode ter seus pontos singulares, conforme detalhado nos casos seguintes:

1. Quando um plano tangente a uma curva é paralelo ao plano  $xy$ , teremos derivadas parciais nulas, ou seja,  $g_y(x, y) = g_x(x, y) = 0$  ou  $f_y(x, y) = f_x(x, y) = 0$ .
2. O método não funciona também quando  $g_y f_x - g_x f_y = 0$ , isto ocorre também quando os planos tangentes são paralelos, pois as derivadas parciais  $g_y = k_1 \cdot f_y$  e  $f_x = k_2 \cdot g_x$  avaliadas no ponto  $(x_i, y_i)$  são os coeficientes de inclinação das retas tangentes na direção dos eixos  $x$  e  $y$  e isto significa que são proporcionais, isto é, são paralelas e portanto os planos onde elas estão também são paralelos e não teriam reta comum de intersecção.
3. O método pode levar a uma redundância de valores entre duas aproximações a reta intersecção dos planos tangentes no ponto  $(x_i, y_i)$  levem a ponto  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  e a reta de intersecção dos planos tangentes neste ponto levam de volta ao ponto  $(x_i, y_i)$  de forma cíclica.

4. Podemos ter a reta de intersecção dos planos tangentes quase paralela ao plano  $xy$  e neste caso teríamos um ponto  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  fora da vizinhança da raiz  $(r_1, r_2)$ .

#### 4.4 EXEMPLOS

##### Exemplo 4.4.1

Determinar, usando o Método de Newton, a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 + 3xy - y^4 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Tomando como aproximação inicial  $\begin{cases} x_0 = -6,6 \\ y_0 = 2,3 \end{cases}$

$$1^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_1 = -3,5700662 \\ y_1 = 1,621861 \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_2 = -2,1686753 \\ y_2 = 1,1695758 \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_3 = -1,6977762 \\ y_3 = 0,91776541 \end{cases}$$

$$4^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_4 = -1,6353746 \\ y_4 = 0,8309499 \end{cases}$$

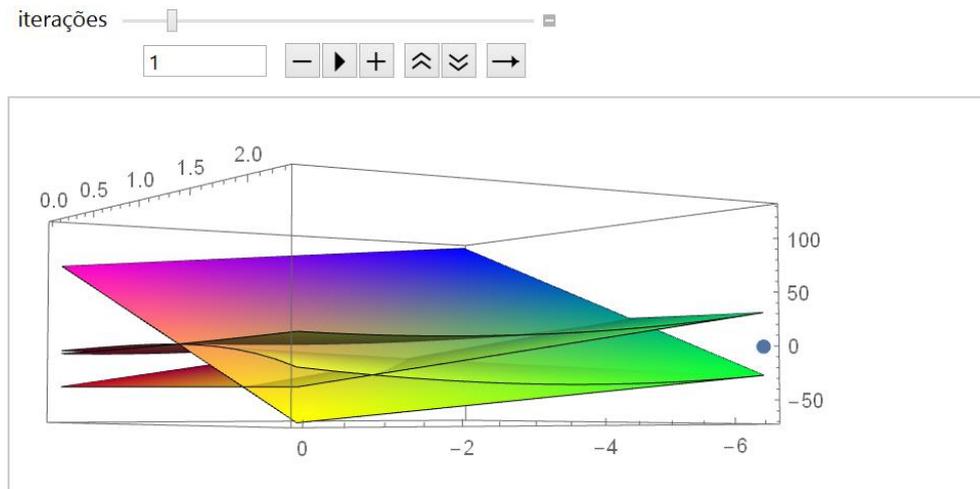
$$5^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_5 = -1,6329974 \\ y_5 = 0,8228946 \end{cases}$$

$$6^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_6 = -1,6329767 \\ y_6 = 0,8228399 \end{cases}$$

$$7^{\text{a}} \text{ iteração: } \begin{cases} x_7 = -1,6329767 \\ y_7 = 0,8228399 \end{cases}$$

**Figura 27** – Representação gráfica das funções de duas variáveis

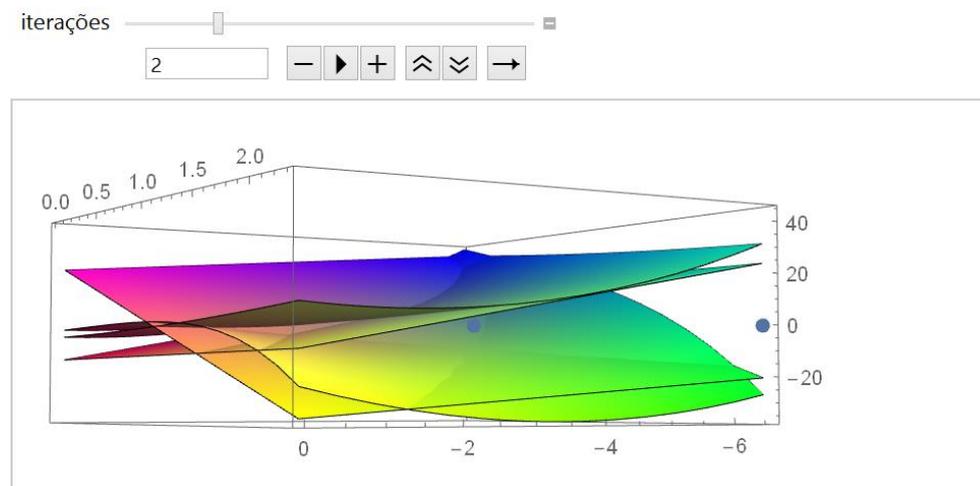
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$ , e sua 1ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 28** – Representação gráfica das funções de duas variáveis

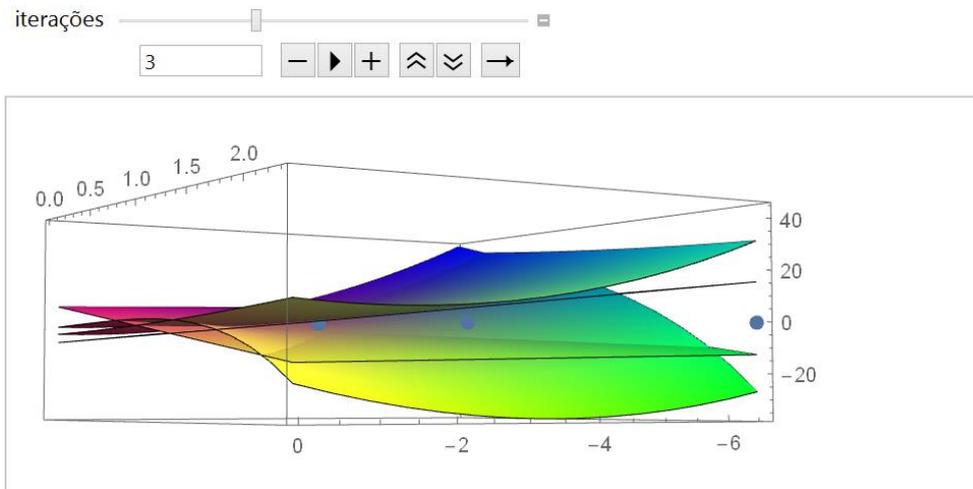
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$ , e sua 2ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 29** – Representação gráfica das funções de duas variáveis

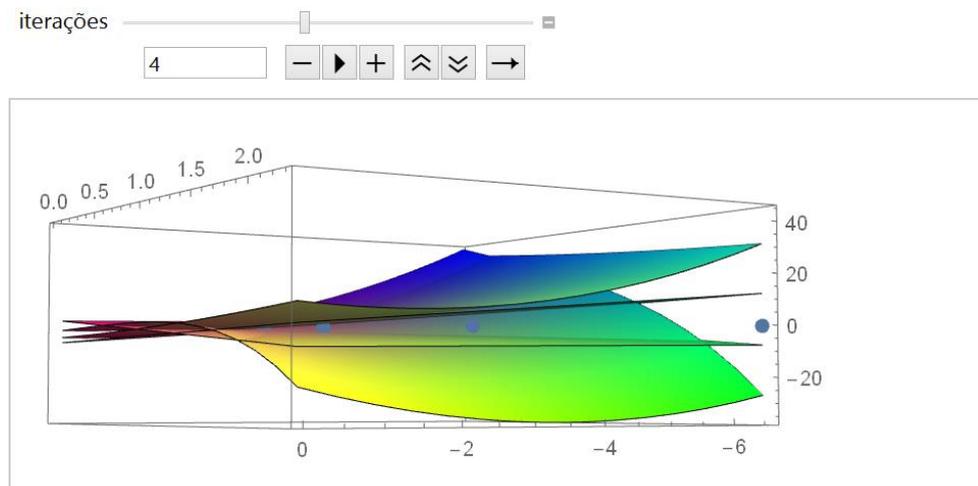
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$ , e sua 3ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 30** – Representação gráfica das funções de duas variáveis

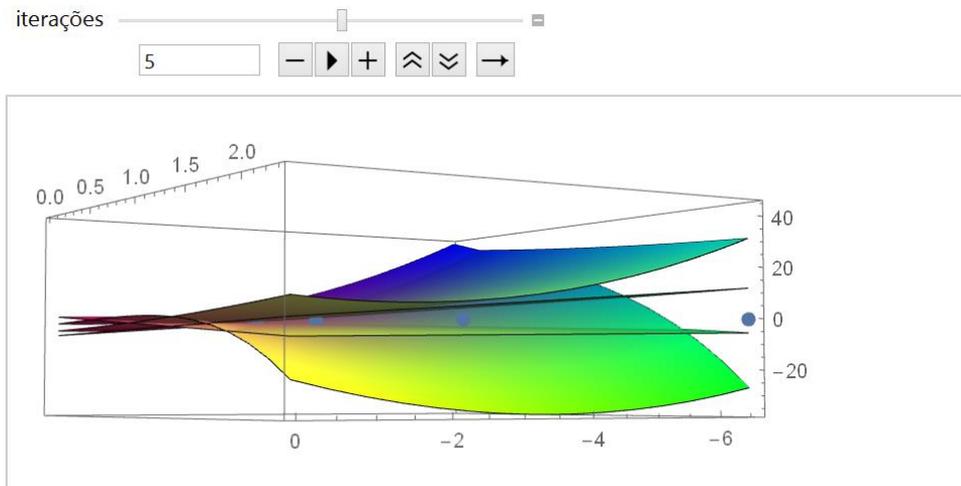
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$ , e sua 4ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 31** – Representação gráfica das funções de duas variáveis

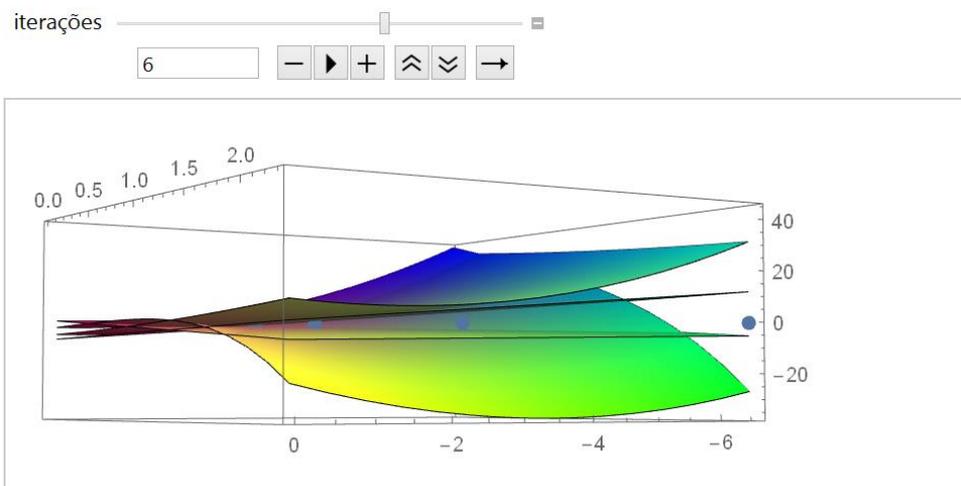
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$ , e sua 5ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

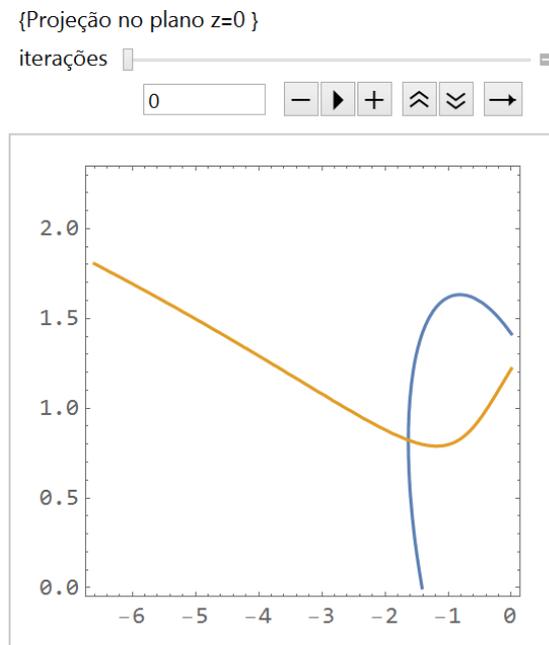
**Figura 32** – Representação gráfica das funções de duas variáveis

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$ , e sua 6ª iteração



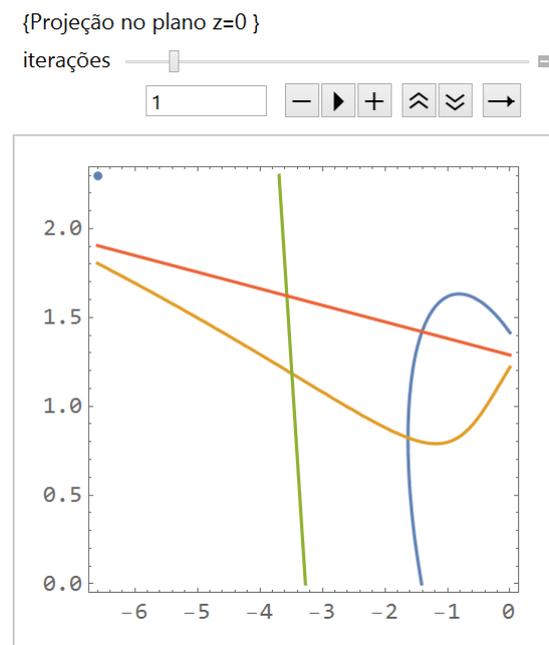
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 33** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$



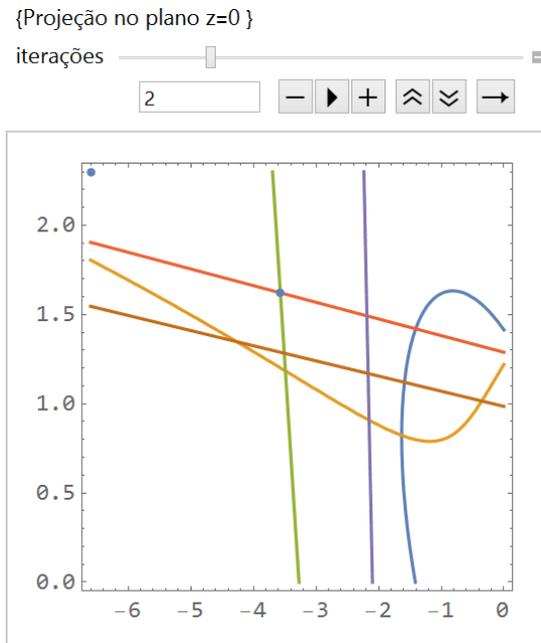
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 34** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$ , e sua 1ª iteração



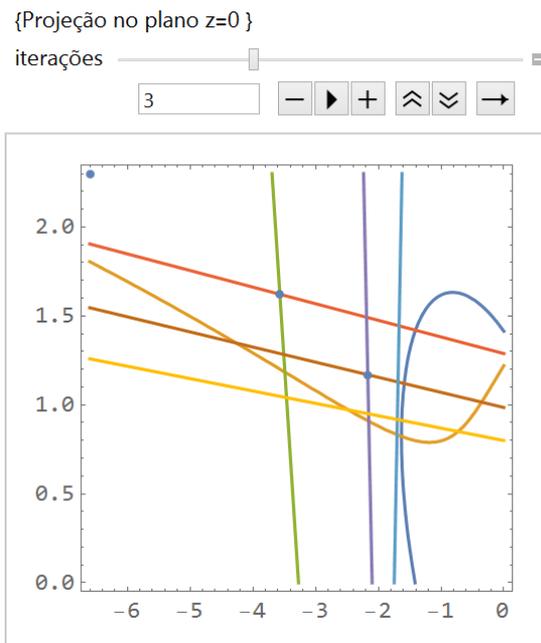
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 35** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$ , e sua 2ª iteração



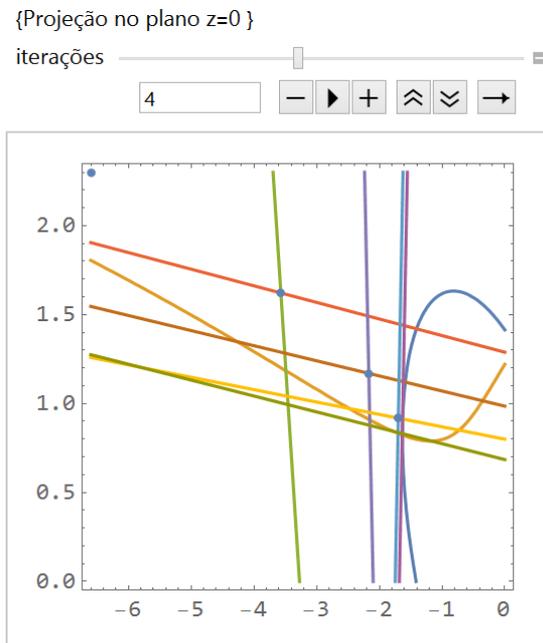
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 36** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$ , e sua 3ª iteração



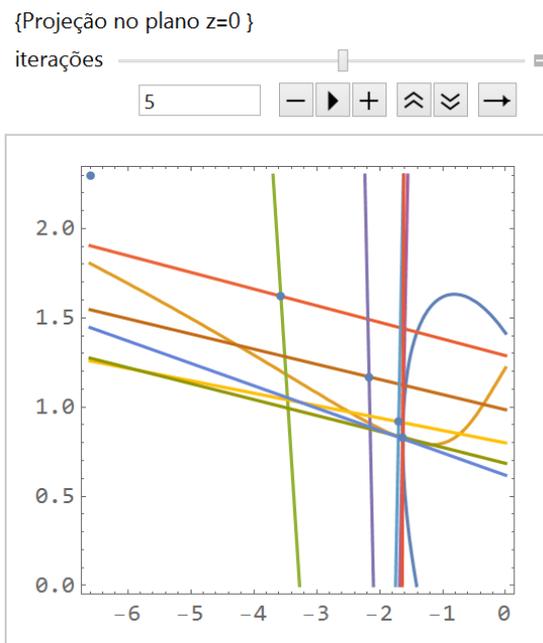
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 37** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$ , e sua 4ª iteração



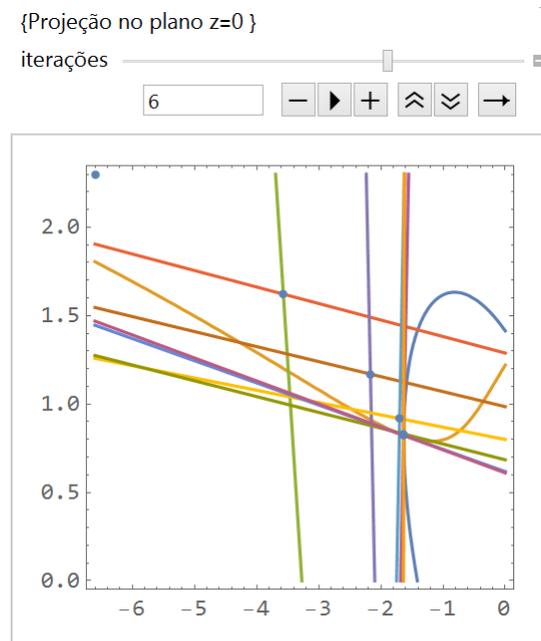
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 38** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$ , e sua 5ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 39** – Representação gráfica das curvas de nível para as funções  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2$  e  $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^4 + y + 1$  de duas variáveis no plano  $xy$ , e sua 6ª iteração



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### Exemplo 4.4.2

Determinar uma solução para o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - \cos(xy) = 1 \\ \text{sen } y = 2 \cos x \end{cases}$$

Note que  $F(\vec{x}) = \begin{cases} x^2 - \cos(xy) - 1 \\ \text{sen } y - 2 \cos x \end{cases}$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e que a Jacobiana fica

$$JF(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x + y \text{sen}(xy) & x \text{sen}(xy) \\ 2 \text{sen } x & \cos y \end{bmatrix}$$

Tomando como aproximação inicial  $(x_0, y_0) = (1,1)$  e utilizando o *software Scilab* os valores encontrados para as raízes nas iterações foram:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1,7615250 & y_1 = -0,9294177 \\ x_2 = 1,6705957 & y_2 = 0,0745652 \\ x_3 = 1,4180085 & y_3 = 0,3041000 \\ x_4 = 1,3572853 & y_4 = 0,4350957 \\ x_5 = 1,3471224 & y_5 = 0,4595237 \end{array}$$

$$x_6 = 1,3468113 \quad y_6 = 0,4603187$$

$$x_7 = 1,3468109 \quad y_7 = 0,4603195$$

$$x_8 = 1,3468109 \quad y_8 = 0,4603195$$

a partir da sétima iteração os valores encontrados foram iguais até a sétima casa decimal.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do presente trabalho teve como motivação o estudo do método de Newton, que por sua vez mostra-se muito eficiente para determinar raízes aproximadas.

Desde a elaboração do projeto desejou-se propor algo que pudesse contribuir com o ensino da Matemática na área de Cálculo Numérico. Neste sentido este trabalho iniciou apresentando um breve histórico sobre o método de Newton e seguiu abordando o método em uma perspectiva geométrica tanto no caso unidimensional (resolução de uma equação não linear) como também no caso bidimensional (resolução de sistema de duas equações não lineares com duas incógnitas), para o caso bidimensional não foi encontrado na literatura específica a abordagem geométrica. Na resolução dos problemas foram apresentados a resolução numérica iterativa e os gráficos que ilustram o processo de busca de solução utilizado com o objetivo de propiciar a visualização e facilitar a compreensão dos alunos sobre o assunto. Além disso, no estudo foi apresentado alguns casos de de equações não lineares em que o método de Newton falha.

Trabalhos como este podem auxiliar outros estudantes que se interessam pelo método de Newton e por seus resultados. Terminamos assim, por deixar como dica ao leitor a continuação do estudo do método, em especial para sistemas de equações não lineares.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARDELEAN, G. **The Attraction Basis of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations**. 56 f. Tese (Doutorado). North University Center at Baia Mare, 2012.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- DEUFLHARD, P. A Short History of Newton's Method. **Documenta Mathematica**. Extra volume, p. 25 – 30, 2012.
- EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Campinas: Ed. UNICAMP, 2004.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- GARCIA, A. J. L. **Apuntes de Métodos Numéricos I**. 2009.
- HOMEIER, H. H. H. On Newton-Type Methods for Multiple Roots With Cubic Convergence. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 231, p. 249 – 254, 2009.
- MACHADO, I. A.; ALVES, R. R. Método de Newton. **Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia**, v. 4, p. 30 – 45, 2013.
- MANUEL, A.; ALFREDO G.; ROGELIO L. **Matemática Numérica**, 2ª ed. 2007.
- MOREIRA, F. R. Uma Discussão sobre o Método de Newton. **Revista Eletrônica de Matemática**, n. 2, p. 8, 2010.
- NEWTON, I. **The Newton Project: De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas**. Royal Society Library, London, UK. 2012.
- POLYAK, B. T. Newton's Method and Its Use In Optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 181, p. 1086 – 1096, 2007.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1996.
- SHISKOWSKI, K.; FRINKLE, K. **Principles of Linear Algebra With Maple™ The Newton-Raphson Method**. 2011.