Rafael de Freitas Lopes

Concreto ou Imaginário? Os números complexos no Ensino Médio

Dissertação apresentada por **Rafael de Freitas Lopes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Miriam del Milagro Abdón

Niterói
Janeiro 2016.

L869 Lopes, Rafael de Freitas.
Concreto ou Imaginário? Os números complexos no Ensino Médio / Rafael de Freitas Lopes. - Niterói, RJ: [s.n.], 2016.

41 f.

Orientador: Prof. Dra. Miriam del Milagro Abdón.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal Fluminense, 2016.

1. Ensino de Matemática. 2. Número Complexo 3. Transformações Geométricas. I. Título

CDD: 510.7

Rafael de Freitas Lopes

Concreto ou Imaginário? Os números complexos no Ensino Médio

Dissertação apresentada por **Rafael de Freitas Lopes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.
Linha de Pesquisa: Números Complexos.

Banca Examinadora

Aprovada em:

Prof. Miriam del Milagro Abdón - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Luciane Quoos Conte - Membro
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Maria Darci Godinho da Silva - Membro
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Wanderley Moura Rezende - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói
Janeiro de 2016.

"O caminho mais curto entre duas verdades no campo real [muitas vezes] passa pelo campo complexo"

Hadamard (1865-1963)

AGRADECIMENTOS

A Deus por permitir que pudesse concluir este trabalho.

À minha mãe Maria Aparecida e ao meu padrasto Dalberto que não mediram esforços para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Às minhas irmãs Patrícia e Fernanda por estarem sempre ao meu lado.

À minha orientadora Mirian Abdón, por sua orientação, compreensão e incentivo sem os quais este trabalho jamais seria finalizado. Muito Obrigado!

Aos alunos da turma MAM271 do IFRJ - *Campus* Rio de Janeiro, que participaram, com muita dedicação, das atividades aplicadas permitindo a conclusão deste trabalho.

Ao programa PROFMAT e aos professores da Universidade Federal Fluminense que tornaram esta conquista possível.

Aos membros desta banca, professores Luciane Quoos, Maria Darci e Wanderley Rezende por se disponibilizarem a ler e fazer uma análise crítica deste trabalho.

Aos meus amigos de longa e recente data, os quais não enumerarei com receio de cometer a injustiça de esquecer algum nome. Obrigado por vocês fazerem parte da minha vida.

Aos professores Thiago e Eliane por atenderem meu pedido de socorro para fazer o *Abstract* e a revisão ortográfica deste trabalho. Meus sinceros agradecimentos.

Aos companheiros Cosme Leite, Roberto Hastenreiter e Jorge Kwasinski pelos seus conselhos, puxões de orelha e, principalmente, por suas palavras de incentivo para que este dia, finalmente, pudesse se realizar.

RESUMO

No presente trabalho, apresenta-se o conjunto dos números complexos, partindo de um problema motivador que sugere uma solução via equações algébricas do terceiro grau. Neste contexto, aparecem naturalmente as ideias de Cardano-Tartaglia para a solução de equações cúbicas, ressaltando a insuficiência dos números reais. Os números complexos, dessa forma, se impõem como caminho natural para a solução do referido problema. A proposta metodológica aqui escolhida apontou para a descrição pormenorizada dos números complexos em seus aspectos operacionais, em especial a interpretação geométrica destas, a saber: a adição como soma vetorial, a multiplicação como composição de rotações e homotetias no plano complexo. Além disso, ficou evidente a importância da radiciação em $\mathbb{C}$ e sua relação com a Geometria.

Palavras chaves: Números Complexos, Equação de Cardano-Tartaglia, Transformações Geométricas.

ABSTRACT

In this study, we present the set of the complex numbers, starting from a motivating problem that suggests a solution by using algebraic third degree equations. In this context, Cardano-Tartaglia ideas naturally show up for solving cubic equations, emphasizing the insufficiency of the real numbers. The complex numbers, thus, impose themselves as the natural way to solve the refered problem. The methodological proposition chosen here pointed to the detailed description of the complex numbers in their operational aspects, especially concerning their geometric interpretation, namely: addition as vector sum, multiplication as composition of rotations and homotheties in the complex plan. Furthermore, the importance of root extraction in $\mathbb{C}$ and its relationship with Geometry became clear.

Key words: Complex Numbers, Cardano-Tartaglia Equation, Geometric Transformations.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Por que números complexos? É uma pergunta que se faz naturalmente, quando se começa a estudar as primeiras noções de número complexo. Aquele intrigante número i, que para piorar a situação é denominado, nada mais nada menos, de "unidade imaginária", causa uma angustiante atmosfera de profundo mistério. Continuando o mistério, o professor anuncia, em seguida, algumas regras que permitirão um tratamento adequado aos complexos visando a suas aplicações. Quase sempre, se definem os complexos como números da forma $a + bi$, tomando-se o cuidado de alertar para o fato de que $i^2 = -1$, sem uma justificativa convincente e, dessa forma, as operações com estes números "mágicos"se tornam perfeitamente factível, além de uma perfeita e natural simbiose aritmética com os números reais. Porém, apesar dessas operações serem assimiladas pelos alunos, a dúvida sempre fica no ar: esses números existem? São reais?

Neste trabalho, procuraremos apresentar um problema motivador, que mostra uma situação perfeitamente compreensível em sua formulação, bem como naturalmente unânime com respeito à possibilidade de haver uma solução real, dado que possui forte apelo visual e, portanto, intuitivo. Assim procedendo, acreditamos que o aluno encontrará elementos necessários à compreensão do fato de que os números reais, como os conhecemos, não são suficientes para explicar a totalidade dos fenômenos da realidade. O que acontece é que a terminologia números reais pode e deve ser estendida ao caso complexo, mostrando que este é mais real do que se imagina. A denominação real, querendo significar o que pode ser concebido e construído, entra em conflito com o senso comum acerca do que vem a ser algo real.

Levaram-se milhares de anos para que a humanidade descobrisse os números complexos, mas somente duzentos anos, após sua concepção, começou a perceber o verdadeiro significado de suas potencialidades nas aplicações, não somente em Matemática como nas ciências de modo geral. Passado mais um longo período, até os dias de hoje, ainda encontramos dificuldades no ensino desses poderosos números. Em CARNEIRO (2004), podemos encontrar o seguinte comentário:

> [...] Os números complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados assunto elementar de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo tachados de estranhos, de difícil compreensão e, sobretudo inúteis. De fato, que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução imaginária para uma equação que sabemos que não tem solução, como foi antes demonstrado por várias vezes [...] (CARNEIRO, 2004)

Não há como mascarar os aspectos abstratos que aparecem na álgebra dos conjuntos, quando se define uma operação, que consiste em como combinar elementos de um dado conjunto para gerar elementos do mesmo. A partir destas operações, é que se pode perceber a utilidade dos conjuntos. Na Matemática, não basta conhecer os elementos de um conjunto, pura e simplesmente; é preciso que se defina uma operação que, de certa forma, dá identidade ao conjunto. Em CARNEIRO (2004), esta preocupação pode ser evidenciada quando afirma que enfim o conjunto dos números complexos ganhou junto à academia direito de cidadania. Em PCN (1999), destacamos o seguinte trecho, que corrobora com esta perspectiva abstrata.

> (...) no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais abrangente capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Ultimamente, os programas de geometria dinâmica possibilitam um tratamento rico em recursos didáticos que, notadamente, potencializam tal estudo. Estes programas que se constituem em réguas e compassos eletrônicos, atuam como agentes catalisadores no processo ensino aprendizagem, por terem sido desenvolvidos especificamente para o estudo da geometria e do desenho geométrico. Como os complexos possuem uma íntima relação com a geometria, nada mais natural do que se utilizar dessas ferramentas modernas para o melhor entendimento de sua natureza e suas propriedades. Nesta ótica, as transformações geométricas de rotação, translação, reflexão e homoteia podem ser exploradas nos softwares disponíveis, como o *Geogebra* que, além de tudo, tem a vantagem de ser um software livre.

Capítulo 2

Aspectos Iniciais Relevantes

2.1 Aspectos Geométricos

Faremos uma breve apresentação das transformações geométricas usuais que serão de grande importância para o desenvolvimento das operações com números complexos. Mostraremos, também, como elas podem ser visualizadas no programa *Geogebra*.

1) Translação

Definição: Uma *translação* corresponde a uma transformação geométrica em que qualquer ponto de um plano sofre um deslocamento linear paralelamente a uma direção fixada. Este deslocamento se dá segundo uma magnitude determinada (comprimento do deslocamento) e um sentido. Definimos, formalmente, tal transformação como segue: Seja A um ponto qualquer do plano e v um vetor desse plano. Dizemos que o ponto A' é a imagem de A pela translação de vetor v, se o segmento orientado AA' é equipolente ao vetor v, isto é, o segmento AA' possui mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido que o vetor v ou, equivalentemente, o quadrilátero $POAA'$ é um paralelogramo, conforme podemos ver na Figura 2.1.

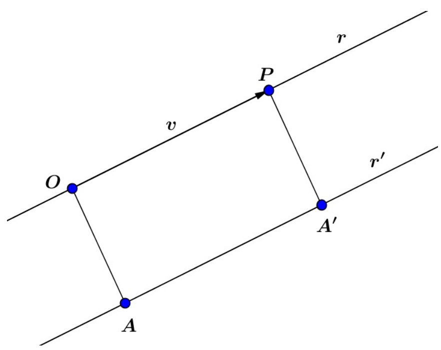


Figura 2.1:

Observação: Por *módulo* entendemos o comprimento do vetor, ou, a magnitude do deslocamento; a direção diz respeito ao paralelismo.

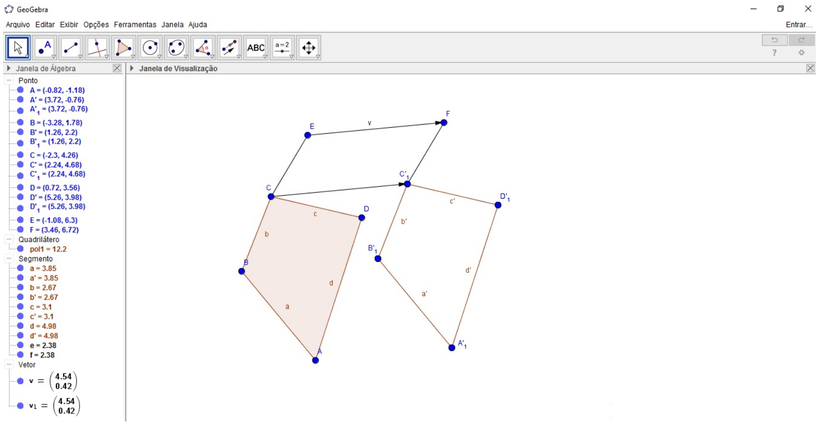


Figura 2.2: Translação no Geogebra

2) Rotação

Rotação é uma transformação geométrica que consiste em "girar"um objeto ao redor de um ponto fixo do plano chamado de centro de rotação.

Definição: Seja O um ponto fixo de um plano π, A um ponto desse plano com $A \neq O$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Sejam r a reta passando por O e A e s a reta passando por O tal que sendo A' o ponto de s satisfazendo $OA = OA'$, tem-se $A\hat{O}A' = \theta$. O ponto A' é chamado de imagem de A pela rotação de centro em O e ângulo θ, conforme mostra a Figura 2.3 que segue.

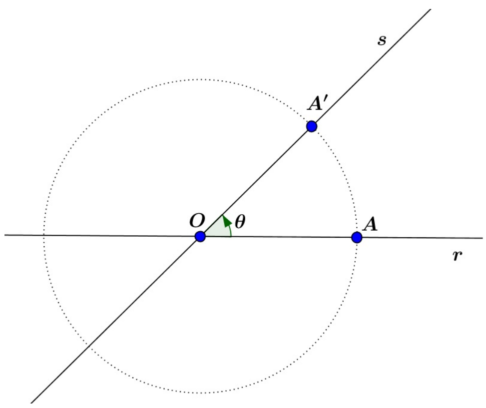


Figura 2.3:

3) Reflexão

Definição: Seja s uma reta do plano e P um ponto qualquer deste plano. A transformação S (S de Simetria Axial) do plano que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $S(P)$ tal que a reta s seja a mediatriz do segmento de extremos P e $P' = S(P)$ é denominada de *reflexão de eixo* s. Na Figura 2.5, M é o ponto médio do segmento de extremos P e $S(P)$ e s é perpendicular à reta que passa por P e $S(P)$, conforme podemos ver na Figura 2.5. Os pontos pertencentes à reta s são invariantes por esta transformação, isto é, se Q pertence à reta s, então , $S(Q) = Q$.

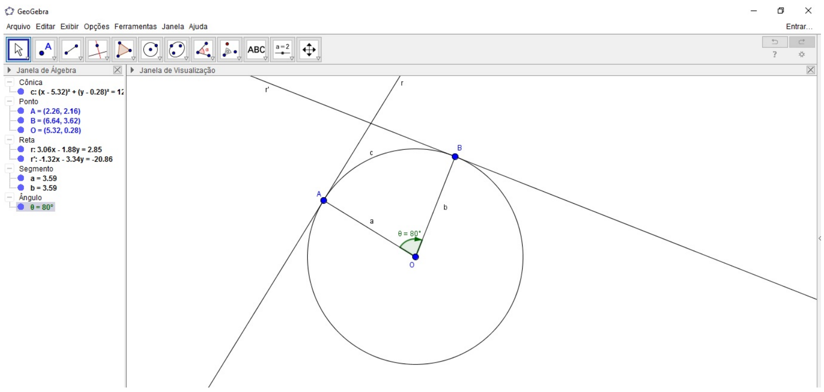


Figura 2.4: Rotação no Geogebra

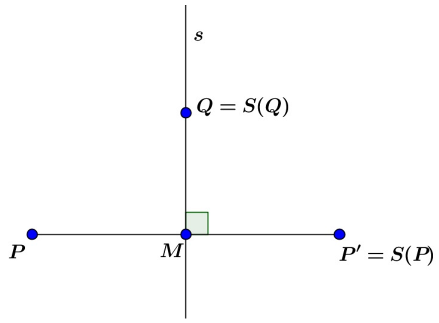


Figura 2.5:

4) Homotetia

Definição: Seja O um ponto pertencente ao plano π e k um número real. Define-se a *Homotetia de centro O e razão k* à transformação no plano que faz corresponder a cada ponto A pertencente ao plano π um ponto A' de modo que se tenha $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{OA}$.

Como podemos ver, na Figura 2.7, os pontos O, A e A', em razão da definição, são colineares e pertencem à reta r. Ainda com respeito a esta figura, o valor de k é positivo e maior do que 1, já que o vetor $\overrightarrow{OA'}$ é de mesmo sentido que o vetor $\overrightarrow{OA}$ e $\|\overrightarrow{OA'}\| = k\cdot\ \|\overrightarrow{OA}\|$.

2.2 Aspectos Algébricos

Vamos desenvolver as propriedades básicas do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) que serão necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Serão definidas as propriedades da adição e da multiplicação dos números reais, além de estudar propriedades de fatoração e solução de equações dentre outros procedimentos algébricos. Estes aspectos dos reais não devem ser considerados como uma revisão do que se conhece a respeito desses números, mas sim um olhar mais criterioso sobre tais relações, buscando fornecer um tratamento um pouco mais formal dessa estrutura algébrica. Estudaremos dozes propriedades: as nove primeiras se referem às operações de adição e multiplicação; as três últimas se referem à ordem desse conjunto. As operações são definidas, a princípio, para pares de números, isto é, são de natureza binária.

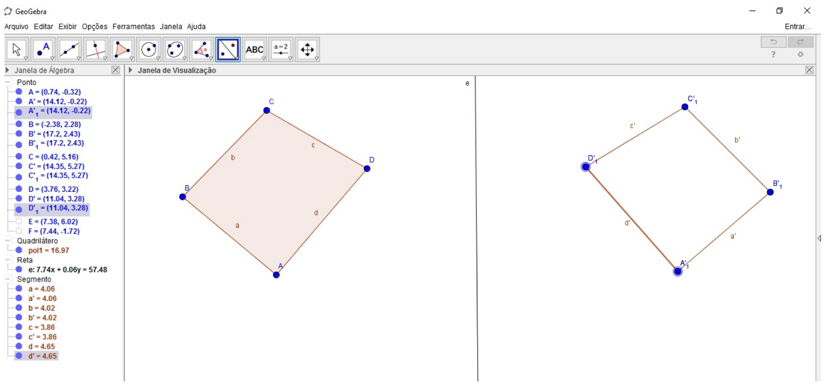


Figura 2.6: Reflexão no Geogebra

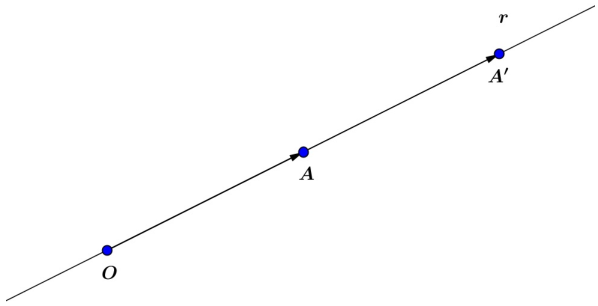


Figura 2.7:

Propriedades da Adição e Multiplicação

Estas operações são definidas para quaisquer pares de números reais a e b. A adição faz corresponder a cada par de números reais $a, b \in \mathbb{R}$ sua *soma* $a + b \in \mathbb{R}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu *produto* $a \cdot b \in \mathbb{R}$ (esses números podem coincidir).

Enumeraremos as propriedades por **P1)**, **P2)**, ... , **P9)**.

P1): A soma $a + b + c$ de três números reais satisfaz a propriedade: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ (associatividade da adição).

Para quatro números reais a, b, c e d, a soma $a + b + c + d$ podem ser realizada das seguintes maneiras:

$$((a + b) + c) + d, (a + (b + c)) + d, a + ((b + c) + d), a + (b + (c + d)), (a + b) + (c + d).$$

Este procedimento ajuda a entender que esta propriedade pode generalizar a definição de adição para um número qualquer de parcelas como em $a_1 + a_2 + ... + a_n$.

P2): O número zero, denotado por 0, tem a seguinte propriedade: Para qualquer número real a, $a + 0 = 0 + a = 0$ (elemento neutro com respeito à adição).

P3): Para todo número real a, existe um número real $-a$, tal que $a + (-a) = (-a)$

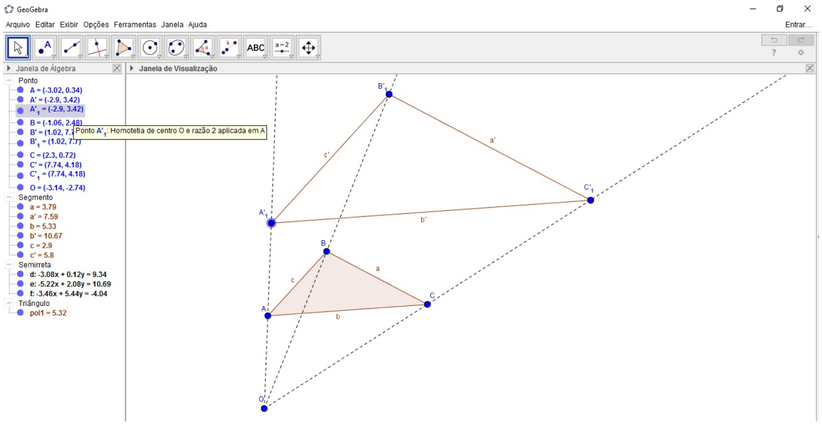


Figura 2.8: Homotetia no Geogebra

$+\ a = 0$ (elemento inverso com respeito à adição).

É interessante verificar que se um número real x é tal que $a+x = a$ para todo a, então $x = 0$. Esta propriedade nos diz que o número zero, denotado por 0, é único.

A prova é a seguinte: Se $a + x = a$, então $(-a) + (a + x) = (-a) + a = 0$. Logo, $((-a) + a) + x = 0$, donde $0 + x = 0$ e então $x = 0$.

É interessante também verificar que se um número real b é tal que $a + b = 0$ então $b = -a$, isto é, o elemento inverso com respeito à adição é único. De fato, somando $-a$ a ambos os membros da igualdade $a+b = 0$, temos que $(-a)+(a+b) = -a+0$. Utilizando as propriedades **P1)**, **P2)** e **P3)** a soma $(-a) + (a + b)$ e a propriedade bf P2) à soma $-a + 0$, obtemos $b = -a$.

Uma observação se faz necessária neste ponto, a saber: a soma $a + (-b)$ pode ser representada por $a - b$ e esta operação é chamada de diferença entre a e b. Ao número $-a$ dá-se o nome de simétrico de a ou inverso aditivo. Portanto, uma diferença de dois números pode ser interpretada como a soma de um deles com o simétrico do outro. Com base nas três propriedades definidas até o momento, podemos resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação: $x + 3 = 5$.

Os passos rigorosos para se resolver esta equação podem ser acompanhados como segue: Se $x + 3 = 5$ então $(x + 3) + (-3) = 5 + (-3)$. Logo $x + (3 + (-3)) = 5 - 3 = 2$, donde $x + 0 = 2$. Portanto, $x = 2$.

Na prática, não se perde muito tempo resolvendo esta equação seguindo-se todos esses passos. Ela pode ser executada mais objetivamente.

P4): Se a e b são dois números reais então $a+b = b+a$ (comutatividade com relação à adição).

Esta propriedade nos diz que a ordem em que as parcelas aparecem na soma não interfere em seu resultado. É ela que permite concluir que $a+b+c = a+c+b = b+c+a = b+a+c = c+a+b = c+b+a$.

P5): Se a, b e c são números reais, então $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade com relação à multiplicação).

P6): Se a e b são dois números reais quaisquer, então $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade com relação à multiplicação).

P7): Se a é um número real qualquer, então $1 \cdot a = a$ e, além disso, $1 \neq 0$ (elemento neutro com relação à multiplicação).

Pode, à primeira vista, parecer estranha esta exigência, mas o fato é que com as propriedades definidas, até agora, seria impossível demonstrar este fato.

P8): Para todo número real $a \neq 0$, existe um número real a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (elemento inverso com respeito a multiplicação).

Um detalhe que merece destaque é o fato de em **P8)** se exigir que $a \neq 0$, já que $a \cdot 0 = 0$ para todo número a real (admitiremos este resultado conhecido por um momento, pois ele será demonstrado quando enunciarmos a próxima propriedade). Isso implica que não existe nenhum número 0^{-1} tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Esta restrição tem uma consequência importantíssima para a divisão de números reais. Assim, como a subtração foi definida em função da adição, a divisão pode ser definida em função da multiplicação: o símbolo $\frac{a}{b}$ significa $a \cdot b^{-1}$. Posto que 0^{-1} não tem sentido, tampouco o tem $\frac{a}{0}$, o que significa que dividir por zero é sempre uma operação patológica.

A propriedade **P8)** tem duas consequências importantes. Se $a \cdot b = a \cdot c$, então não se tem necessariamente que $b = c$ (basta analisar o caso em que $a = 0$). Mas caso tenhamos $a \neq 0$, b deve ser igual a c. Esta conclusão pode ser deduzida de **P8)** como se segue: Se $a \cdot b = a \cdot c$, com $a \neq 0$, então $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$, donde $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$. Logo $1 \cdot b = 1 \cdot c$, e segue que $b = c$. Também é consequência de **P8** o fato de que se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Com efeito: Se $a \cdot b = 0$ e $a \neq 0$, então $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot 0)$. Daí, $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$ nos fornece $1 \cdot b = 0$, donde $b = 0$. Este último fato permite mostrar a unicidade do elemento netro multiplicativo, como fizemos na adição.

Observe que não está excluída a hipótese de serem a e b ambos iguais a zero. Em matemática, o conectivo *ou* em a ou b quer dizer o mesmo que pelo menos um. Esta última conseqüência de **P8)** se usa, frequentemente, na solução de equações fatoradas como em $(x - 2)(x - 3) = 0$. Isto posto, ou bem $x - 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$, de modo que $x = 3$ ou $x = 2$. Essas oito propriedades ainda não são bastantes para se deduzir muita coisa na álgebra dos números reais. A elas se junta uma composição da soma com a multiplicação que se traduz na propriedade seguinte:

P9): Se a, b e c são números reais quaisquer, então, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade da multiplicação com relação à adição).

Como auxílio dessa e de outras propriedades enunciadas anteriormente, podemos demonstrar dois fatos que são do nosso conhecimento, desde o Ensino Fundamental, e de que boa parte dos professores não fazem a devida justificativa, a saber:

1) $a \cdot 0 = 0$, para qualquer que seja o número real a;

2) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Vejamos a demonstração de cada um desses fatos:

1)

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0+0) \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 \end{aligned}$$

Chamando o número $a \cdot 0$ de y, temos, então, que $y = y + y$. Logo, como o número real y admite $-y$ como elemento inverso com relação à adição, temos que $y + (-y) = (y + y) + (-y)$, e segue que ,

$$\begin{aligned} 0 &= y + (y + (-y)) \\ &= y + 0 \\ &= y \end{aligned}$$

Assim, $a \cdot 0 = y = 0$.

2)

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (-1) \\ &= [1 + (-1)] \cdot (-1) \\ &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= (-1) + (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

Logo, $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$, isto é, o inverso aditivo de -1, que é igual a 1. Graças a este fato, pode-se mostrar, sem muita dificuldade, que $(-1) \cdot a = -a$ e, principalmente, que $(-a) \cdot (-a) = a^2$, para todo número real a.

As três propriedades restantes são relativas à ordem do conjunto dos números reais. Escrevemos $a < b$ para indicar que a é menor do que b ou, equivalentemente, que $b > a$ para dizer que b é maior do que a. Os números reais a que satisfazem a desigualdade $a > 0$ são chamados de números reais positivos e aqueles em que $-a > 0$ são chamados de números reais negativos. Escrever que $a < b$ é o mesmo que dizer que $b - a$ é positivo. O conjunto de todos os números reais positivos será representado por $\mathbb{R}^+$. Assim, podemos definir as três propriedades seguintes:

P10): Para todo número real a, se cumpre uma e somente uma das afirmações: ou $a = 0$, ou $a \in \mathbb{R}^+$ ou $-a \in \mathbb{R}^+$ (tricotomia).

P11): A soma de números reais positivos resulta em um número real positivo (fechamento com relação à adição).

P12): O produto de números reais positivos resulta em um número real positivo (fechamento com relação à multiplicação).

Uma observação importante a ser feita é que, graças às propriedades **P10)** e **P12)** junto com o fato de que $(-a)\cdot(-a) = a^2$ e $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que o quadrado de qualquer número real nunca pode resultar em um número negativo. De fato, se $a = 0$, já sabemos que $0 \cdot 0 = 0$. Agora, se $a \neq 0$, pela triconomia ou a é positivo ou a é negativo. No caso de a ser um número positivo, pelo fechamento de elementos positivos com relação à multiplicação, a^2 é positivo. Por outro lado, no caso de a ser um número real negativo, pela triconomia, $-a$ é um número real positivo e, portanto, $(-a)\cdot(-a) = a^2$ é positivo. Em particular, números reais negativos não podem ser quadrados de nenhum número real. Portanto, não há raiz quadrada de números reais negativos. Este fato já era consenso entre os matemáticos, conforme podemos ver nas citações abaixo:

> [...] como na natureza das coisas um negativo não é quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada. **(afirmação do matemático indiano Mahavira, século IX)**

> o quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo, pois ele não é um quadrado. **(afirmação do matemático indiano Bhaskara, século XII)**

Um conjunto para o qual seus elementos satisfaçam a todas as nove primeiras propriedades é chamado de **corpo**. Temos, então, que o conjunto dos números reais se constitui em um corpo. Também é possível mostrar que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com as operações $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ é exemplo de um corpo.

Lembremos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. O simétrico de $\frac{a}{b}$ é $-(\frac{a}{b})$. O zero é $\frac{0}{b}$, seja qual for $b \neq 0$. O inverso do número racional $\frac{a}{b} \neq 0$ é $\frac{b}{a}$. Já o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, assim como o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, com as operações de adição e multiplicação que conhecemos, não são corpos.

Um corpo K no qual se pode destacar um subconjunto $P \subset K$ (chamado *conjunto dos elementos positivos de* K), tal que as três últimas propriedades são satisfeitas é chamado de um **corpo ordenado**. Temos, então, que os números reais constituem um corpo ordenado. Podemos provar, também, que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado.

Capítulo 3

A Insuficiência dos Números Reais

3.1 Problema Motivador

Na Figura 3.1 estão representados um cubo e um paralelepípedo. Sejam V_C o volume do cubo de aresta x e V_P o volume do paralelepípedo com área da base igual a 3 e altura igual a aresta do cubo. Determine x de modo que $V_C = V_P + 1$.

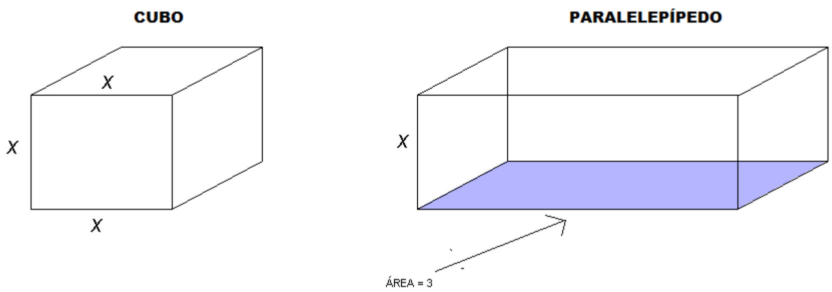


Figura 3.1:

Antes de tentar resolver este problema, observemos que existe, de fato, um valor x para a aresta do cubo que resolve a questão. Vejamos: quando a aresta x do cubo é pequena, o volume V_C será menor que $V_P + 1$. Por exemplo, para $x = 1$, $V_C = 1$, $V_P + 1 = 4$ e $V_C < V_P + 1$. Por outro lado, à medida que x aumenta, todas as arestas do cubo aumentam, o que não ocorre com o paralelepípedo e, por isso, o volume V_C se aproxima de $V_P + 1$, chegando mesmo a ultrapassá-lo. Isso pode ser constatado para o valor $x = 2$ como segue: $x = 2$, $V_C = 8$, $V_P + 1 = 7$ e, então, $V_C > V_P + 1$. Raciocinando dessa forma, se x for aumentando contínua e lentamente, de 1 até 2, haverá uma situação em que $V_C = V_P + 1$. Para essa situação, a equação que resolve este problema é dada por $x^3 = 3x + 1$ ou $x^3 - 3x - 1 = 0$. Esta situação pode ser interpretada de outra maneira, a saber: a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^3 - 3x - 1$ é tal que $p(1) = -3$ e $p(2) = 1$. Uma vez que esta função p é contínua, ao restringirmos esta função ao intervalo $[1,\ 2]$ ainda obtemos uma função contínua. Como $p(1) < 0 < p(2)$, existe, pelo Teorema do Valor Intermediário, um número real c tal que $p(c) = c^3 - 3c - 1 = 0$, isto é, a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ possui uma raiz real no intervalo $[1,\ 2]$. Esta estimativa pode até ser melhorada sabendo que $p(1,8) \cdot p(1,9) < 0$. Outra constatação da existência deste valor de x, que resolve o problema proposto, pode ser contemplada em uma perspectiva gráfica, sabendo que este valor de x corresponde à abscissa do ponto de interseção dos gráficos das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3x + 1$, conforme podemos observar na Figura 3.2.

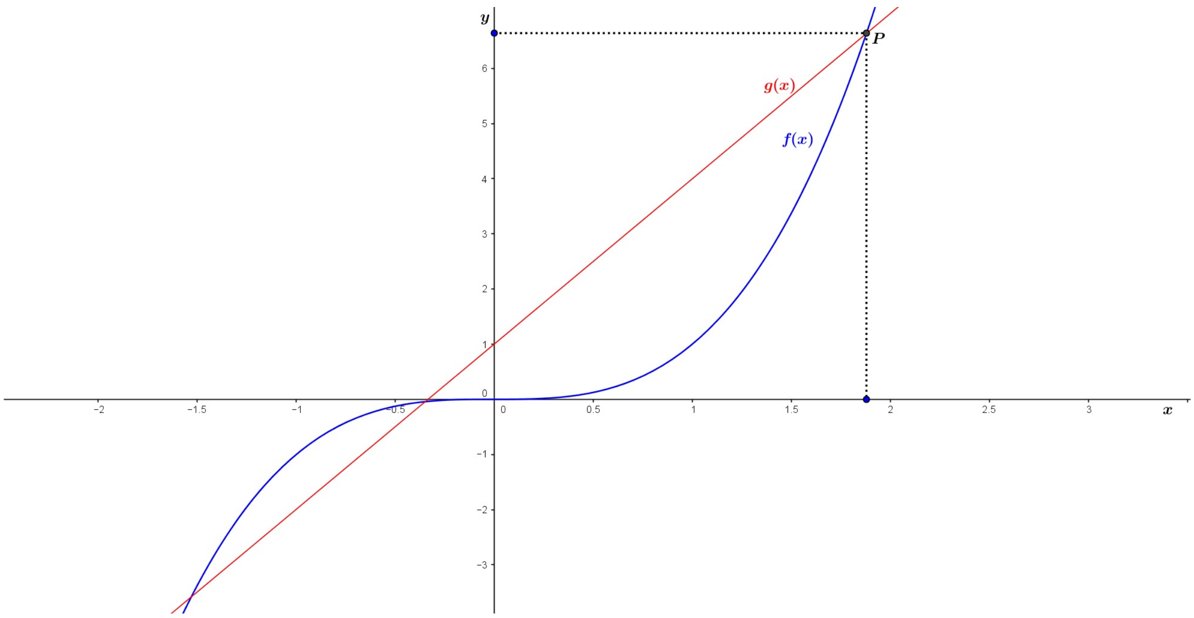


Figura 3.2:

Conclusão: para resolver este problema será necessário resolver uma equação polinomial do terceiro grau. A história das equações polinomiais do terceiro e quarto graus constituem-se em uma parte da história da Matemática, abordada neste trabalho, em que grandes personalidades do mundo da Matemática deram importantes contribuições. O nosso objetivo, a partir de agora, consiste em abordar alguns temas que são de grande relevância para o entendimento de como se deu a evolução das teorias das equações algébricas até se chegar à necessidade dos números complexos como os conhecemos hoje em dia. Vamos acompanhar a evolução das técnicas de soluções de equações algébricas, desde os babilônios, passando por Viète até chegarmos à prova de Cardano-Tartáglia. Em especial, estaremos interessados em estudar uma equação polinomial do 3^o grau desprovida do termo em x^2 como em $x^3 + ax + b = 0$, que tem solução por radicais na forma $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$.

3.2 O método de Viète para a solução de uma equação do segundo grau

O método de Viète [1] para a solução da equação do segundo grau será aqui comentado por oferecer uma alternativa à solução da equação do segundo grau, a nosso ver, muito instrutiva e, também, oportuna, pois servirá como referência para a solução das equações

[1] François Viète foi um matemático francês nascido no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou direito e tornou-se membro do parlamento francês.

do terceiro e quarto graus.

Consideremos a equação $ax^2+bx+c=0$ em que podemos supor (sem perda de generalidade) $a>0$. Admite-se que uma solução de tal equação seja uma soma de dois números, isto é, $x=u+v$. Substituindo-se este valor na equação tem-se: $a(u+v)^2+b(u+v)+c=0$. Desenvolvendo, temos que $au^2+av^2+2auv+bu+bv+c=0$, de modo que $au^2+av^2+u(2av+b)+bv+c=0$, com $a>0$. Escolhendo v tal que $2av+b=0$, temos que $v=-\frac{b}{2a}$. Essa escolha faz com que $u^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, logo $u=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $u=\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Como x foi escolhido de tal modo que $x=u+v$, então os valores de x que são soluções da equação inicial são $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Esta técnica para resolver a equação do segundo grau possibilita substituir a equação dada por uma outra que lhe seja equivalente. Porém, com o termo em x suprimido. É como se a equação do segundo grau do tipo $ax^2+bx+c=0$ pudesse ser transformada em uma outra do tipo $a'x^2+b'=0$. Essa técnica pode também ser usada para resolver a equação $x^3=3x+1$ seguindo a solução de Cardano para uma equação geral do tipo $x^3+ax+b=0$, cuja fórmula será deduzida a seguir.

3.3 Fórmula de Cardano-Tartaglia para solução da equação $x^3+ax+b=0$

A ideia inicial é a mesma que utilizada no Método de Viète: admitiremos que uma solução da equação $x^3+ax+b=0$ seja dada como uma soma de dois números, isto é, $x=u+v$. Temos, então, que $x^3=(u+v)^3$. Como $(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+v^3+(3uv)(u+v)$, temos que $x^3=u^3+v^3+(3uv)(u+v)$, que é o mesmo que $x^3-(3uv)(u+v)-u^3-v^3=0$. Podemos reescrever esta última igualdade como $x^3-(3uv)x-(u^3+v^3)=0$, uma vez que $x=u+v$. Assim, comparando as equações $x^3+ax+b=0$ e $x^3-(3uv)x-(u^3+v^3)=0$, temos que $3uv=-a$ e $u^3+v^3=-b$. Portanto, os números u e v que buscamos são tais que $u^3+v^3=-b$ e $uv=-\frac{a}{3}$. A princípio, pode parecer complexo tentarmos descobrir quem são esses números. Entretanto, se elevarmos ao cubo os dois membros da igualdade $uv=-\frac{a}{3}$, teremos que $u^3v^3=-\frac{a^3}{27}$. Dessa forma, se chamarmos de $u'=u^3$ e $v'=v^3$, temos que o nosso problema se resume em encontrar dois números u' e v' tais que sua soma seja igual a $-b$ e seu produto seja igual a $-\frac{a^3}{27}$, o que não é difícil pois, para isso, basta resolvermos a equação do 2º grau $y^2+by-\frac{a^3}{27}=0$. As soluções dessa equação são dadas por $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ e $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$, onde $\Delta=b^2+\frac{4a^3}{27}$. Uma vez que u' e v' são ambas soluções dessa equação, podemos supor (sem perda de generalidade) que $u'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ e $v'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$, com $\Delta=b^2+\frac{4a^3}{27}$. Efetuando um pouco mais de cálculos, podemos reescrever u' e v' da seguinte maneira: $u'=-\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}$ e $v'=-\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}$. Finalmente, como $u^3=u'$ e $v^3=v'$, temos que $u=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}}$ e $v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}}$.
Dessa forma, $x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}}$.

Observação: Dada uma equação geral do 3º grau do tipo $Py^3+Qy^2+Ry+S=0$, com $P,Q,R,S\in\mathbb{R}$ e $P\neq 0$ podemos mediante divisão por P sempre escrevê-la na forma

$y^3 + py^2 + qy + r = 0$, com $p, q, r \in \mathbb{R}$ quaisquer. Por sua vez, esta última equação pode sempre ser transformada em uma equação do tipo $x^3 + ax + b = 0$, bastando fazer a substituição $y = x - \frac{p}{3}$.

Como exemplo, podemos usar a fórmula de Cardano-Tartáglia deduzida, anteriormente, para obtermos a solução da equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, equação esta obtida através do nosso problema motivador. Fazendo $a = -3$ e $b = -1$, encontramos como resultado $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$.

Esta resultado via Cardano-Tartáglia, à primeira vista, nos indicaria que o problema não tem solução real, como no caso de uma equação do segundo grau com discriminante negativo. Ora, sabemos da análise do problema que a originou, que este tem uma solução real. Esta solução real parece não ter sido apontada pela solução da equação cúbica evidenciada pela raiz quadrada de um número negativo. Fica, então, a pergunta: como sair deste impasse?

Uma possibilidade de encontrar a saída consiste em:

1º) Perceber que a impossibilidade de extração de raízes quadradas de números negativos não é definitiva, mas está relacionada com a nossa situação presente, em que só conhecemos os números reais;

2º) Pensar na possibilidade de se admitirem números que elevados ao quadrado possam resultar em números negativos. Somente dessa forma é possível prosseguir com a resolução da equação via a fórmula de Cardano-Tartaglia (esta é uma forma de negar, de não aceitar, a impossibilidade que se apresenta. É o modo de vencermos esta barreira que nos impede de avançar na tentativa de resolver a equação.)

3º) Pensar, ainda, que ao admitir a existência de tal conjunto, que ele seja bem comportado no que diz respeito à obediência às regras usuais das operações de adição e multiplicação de números reais, já que se trata de uma espécie de extensão dos números reais. Esta hipótese é razoável de se conjecturar, já que da passagem de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ essa preocupação esteve presente. As propriedades a serem preservadas são as usuais de associatividade, comutatividade, distributividade da multiplicação em relação à soma, etc.

4º) Retornar ao problema motivacional e verificar se, operando com os novos números, é possível resolver a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ em $\mathbb{R}$, isto é, obter uma solução em $\mathbb{R}$.

A proposta deste trabalho leva em consideração o estabelecimento dessas quatro etapas anteriores. A primeira delas foi superada. Passaremos, então, às seguintes.

Voltando ao problema motivador, a solução encontrada para x é dada por $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$. Na tentativa de descobrir como operar com raízes quadradas de um número negativo, façamos o caminho inverso que foi feito para se chegar à raiz x. Elevando ao cubo, teremos que:

$x^3 = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} + 3(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}})^2 \cdot (\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}) + 3(\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}})^2 \cdot (\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}})$.

Daí, temos que $x^3 = 1+3(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}})(\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}})(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}})$. Uma vez que $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}}$, temos que $x^3 = 1+3x(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}})(\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}})$.

Podemos efetuar o produto $(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}})(\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}})$ de duas maneiras as quais dependem de qual escolha fazer para a operação $(\sqrt{-\frac{3}{4}})^2$, isto é, decidimos pelo valor $-\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4}$. A primeira opção nos conduzirá a equação final $x^3 = 1+3x$. Já a segunda, nos levará à equação $x^3 = 1+(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}})x$. Isso mostra que a primeira escolha foi a mais adequada. De modo geral, todas essas escolhas podem se resumir a uma situação bem simples que é a seguinte: Tomemos a seguinte raiz quadrada $\sqrt{-4}$ como expressando-se por $\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$. Assim, podemos supor que calcular $(\sqrt{-4})^2$ seja o mesmo que calcular $(\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1})^2$, o que remeteria a todos os casos de quadrados de raízes quadradas à investigação do que se definiria por $(\sqrt{-1})^2$, que pelos indicativos dos cálculos realizados na busca da equação desejada seria o valor -1. Este fato é muito interessante na medida em que nos remete a um pseudo-paradoxo que é o seguinte:

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})^2 &= (\sqrt{-1})\cdot(\sqrt{-1})\\ &= \sqrt{(-1)\cdot(-1)}\\ &= \sqrt{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Por outro lado, $(\sqrt{-1})^2 = -1$, o que seríamos levados a concluir que $1 = -1$.

O absurdo foi devido ao fato de se admitir, como verdadeira, a possibilidade de se operar $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ como se este número fosse real o que, de fato, não acontece. Logo, as regras de multiplicação como a concebemos, em $\mathbb{R}$, têm algumas limitações para elementos deste novo conjunto. Estas investigações nos permitirão ver que esta nova qualidade de números (não reais) podem ser escritos na forma $x+yi$, em que i denota $\sqrt{-1}$ de modo que se cumpra a exigência $i^2 = i\cdot i = -1$.

Capítulo 4

Estender é preciso

4.1 Definindo a Estrutura Algébrica desse novo conjunto

O conjunto que, aqui, veremos, leva o nome de *conjunto dos números complexos*. Uma maneira de definir os elementos desse conjunto, bem como suas operações, foi proposta por Gauss e reforçada por Hamilton, a saber: como pares ordenados de números reais com as operações $+$ e $\cdot$ (adição e multiplicação, respectivamente) definidas da seguinte maneira:

Adição:
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

Multiplicação:
$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Observação: Como consequência desta identificação, cada ponto (x, y) corresponde a um único número complexo e vice-versa. Em particular, se (x, y) e (x', y') representam o mesmo número complexo, então, devemos ter que $x = x'$ e $y = y'$.

Uma observação a ser feita é que esta estrutura é tal que ela, de certa forma, contém uma "cópia"dos números reais. Isso porque os números complexos da forma (x, y) com $y = 0$ podem ser identificados com os números reais, fazendo a seguinte associação: a cada número real x associamos ao par ordenado$(x, 0)$. Com esta identificação, temos que $(x, 0)+(y, 0) = (x+y, 0+0) = (x+y, 0)$ e $(x, 0)\cdot(y, 0) = (x\cdot y-0\cdot 0, x\cdot 0+0\cdot y) = (xy, 0)$ de modo que somar ou multiplicar dois números reais é o mesmo que somar e multiplicar neste novo conjunto de pares ordenados em que a segunda coordenada é sempre nula. Essa forma de identificação possui uma nomenclatura específica que se chama de *isomorfismo*, isto é, estruturas que possuem em comum os aspectos algébricos, mas possuem naturezas de ordem estética distintas (para maiores detalhes ver MONTEIRO (1969)).

Este isomorfismo permite associar um número complexo (x, y) com o ente $x + yi$, em que $i = (0, 1)$ é tal que $i^2 = i \cdot i = -1$.

De fato, dado um número complexo (x, y), temos que:

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\
&= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)
\end{aligned}
$$

Assim, identificando os pares ordenados $(x, 0)$ e $(y, 0)$ (via isomorfismo) com os números reais x e y e denotando por i o par ordenado $(0, 1)$, temos que todo número complexo (x, y) pode ser escrito na forma $x + yi$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
i^2 &= (0, 1) \cdot (0, 1) \\
&= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\
&= (-1, 0) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Usando esta associação, temos que as operações de adição e multiplicação de números complexos definidas, inicialmente, podem ser reescritas como segue: dados $(x, y) = x + yi$ e $(x', y') = x' + y'i$ dois números complexos, com $i^2 = -1$, temos que:

adição:
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \Leftrightarrow (x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i$

multiplicação:
$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \Leftrightarrow (x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$

Podemos provar que, neste novo conjunto, todos os seus elementos satisfazem com relação à operação adição e, também, em relação à operação multiplicação a condição de corpo, isto é, as propriedades de **P1)** a **P9)** são satisfeitas para as operações adição e multiplicação que foram definidas para esses números. Esse novo corpo se representa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, que é o *corpo dos números complexos*. Neste conjunto, o elemento neutro é o par $(0, 0)$, o elemento unidade corresponde ao complexo $(1, 0)$, o elemento simétrico do complexo (x, y) corresponde ao complexo $(-x, -y)$ e o elemento inverso multiplicativo do complexo não nulo (x, y) corresponde ao complexo $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$.

Na passagem de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$, as propriedades algébricas de adição e multiplicação são todas preservadas. Porém, não é possível preservar a ordem de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. De fato, se pudéssemos ter uma ordenação em $\mathbb{C}$ com uma estrutura compatível com a ordenação de $\mathbb{R}$, então, em particular, os números complexos $(1, 0) \cdot (1, 0)$ e $(0, 1) \cdot (0, 1)$ deveriam ser positivos, uma vez que eles são não nulos e, em um corpo ordenado, o quadrado de qualquer elemento não nulo é sempre positivo. Neste caso, devido ao fechamento para adição de elementos positivos, o número $(1, 0) \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot (0, 1)$ também seria um número positivo. Mas isso não pode acontecer, pois $(1, 0) \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot (0, 1)$ é, precisamente, o elemento neutro da adição em $\mathbb{C}$, que não nem é positivo e nem negativo. Assim, não faz sentido perguntar em $\mathbb{C}$, por exemplo, qual dos números complexos é maior ou menor (a menos que ambos sejam reais).

O número complexo (x, y) será designado pela letra z, então escreveremos $z = (x, y)$, em que os números x e y são chamados, respectivamente, de parte real e parte imaginária de z e os denotaremos (nessa ordem) por $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$. A Figura 4.1 ilustra a representação do número complexo $z = (x, y)$ no plano.

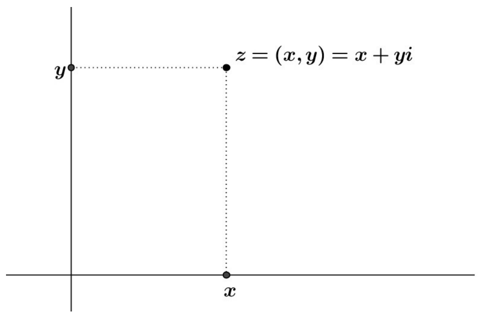


Figura 4.1:

Uma inspeção de natureza geométrica permite verificar que o número complexo z, resultado da soma de dois outros complexos z_1 e z_2 , representa o quarto vértice de um paralelogramo em que dois deles são representantados por de z_1 e z_2 sendo a origem o terceiro vértice, como podemos ver na Figura 4.2:

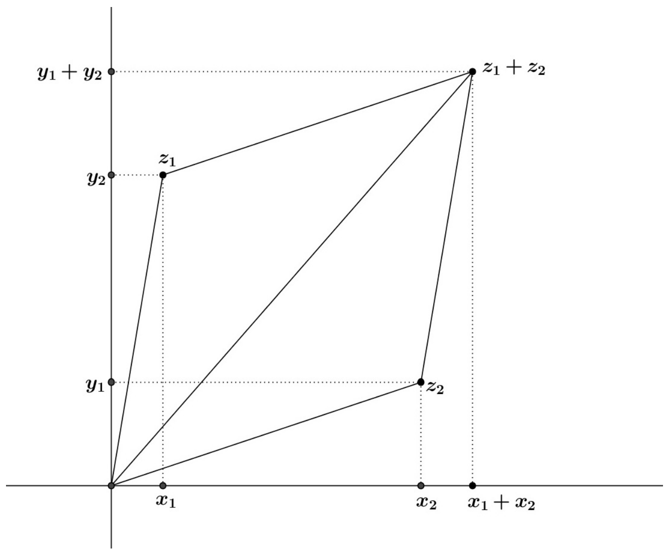


Figura 4.2:

Quase sempre, os alunos confundem esta estrutura algébrica definida pelos complexos, gerando algumas confusões. É preciso que se esclareça que uma estrutura algébrica fica definida por um conjunto e suas operações. Por exemplo, os números inteiros munidos da operação adição possui uma estrutura de Grupo. Já com a operação multiplicação não se constitui em um Grupo. Isso mostra que não se deve olhar um conjunto apenas sob a ótica estética de seus elementos, mas sim da forma como esses elementos se combinam para gerar outros elementos deste mesmo conjunto, isto é, o conjunto e uma operação nele definida. Voltando ao plano cartesiano que se identifica com o conjunto dos números complexos, apenas na sua forma, foram definidas duas operações. Agora, o plano cartesiano munido das operações de adição e multiplicação, como definidas, constitui o que chamamos de **Plano Complexo** ou de **Plano de Argand-Gauss**. Um ponto desse plano se atribui o nome de *afixo* do complexo.

Vejamos com um exemplo ilustrativo, como se dá a dinâmica das operações em dois conjuntos, vistos como pertencentes a duas estruturas algébricas distintas, mas que guardam entre si uma explícita relação de similaridade entre a forma de se operar com seus elementos. Essas analogias, à luz do que se chama em Matemática de isomorfismo, possibilitará um avanço inestimável para a evolução das ideias matemáticas.

Por exemplo, tentemos resolver a equação $z^2 = 4$ em $\mathbb{R}$. Temos que $(z-2)\cdot(z+2) = 0$, logo, $z - 2 = 0$ ou $z + 2 = 0$, em que concluímos que $z = 2$ ou $z = -2$.

Para a mesma equação, agora considerada em $\mathbb{C}$ a equação $z^2 = 4$ possui o seguinte significado: $z^2 = (4, 0)$. Como $z = (x, y)$, tem-se que $(x, y)^2 = (4, 0)$. Resolvê-la implica determinar o par (x, y) que satisfaz tal equação. Mas $(x, y)^2 = (x, y)\cdot(x, y) = (x^2-y^2, 2xy)$. Daí, substituindo-se na equação, teremos que: $(x^2 - y^2, 2xy) = (4, 0)$, o que acarreta em $x^2 - y^2 = 4$ e $2xy = 0$. De $2xy = 0$ temos que $x = 0$ ou $y = 0$. Para $y = 0$ teremos que $x^2 = 4$, que agora é uma equação em $\mathbb{R}$, já que x e y são números reais. Essa equação já foi resolvida, anteriormente, e tem como soluções $x = 2$ ou $x = -2$. Como estamos em $\mathbb{C}$, as soluções correspondentes a esses valores são, respectivamente, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. A hipótese $x = 0$ conduz à equação $-y^2 = 4$, em que $y^2 = -4$, que é impossível em $\mathbb{R}$. Logo, as únicas soluções são $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

Este exemplo mostra a naturalidade com que as soluções de uma equação em $\mathbb{R}$ pode ser considerada como a restrição de uma equação em $\mathbb{C}$. Continuemos com mais um exemplo elucidativo.

Consideremos, agora, a equação $z^2 + 1 = 0$. Essa equação certamente, que não possui solução real. Por outro lado, considerando o conjunto dos números complexos, devemos procurar um tal valor de z como sendo um número da forma $z = (x, y)$. Essa providência nos conduz aos seguintes cálculos: $(x^2 - y^2, 2xy) + (1, 0) = (0, 0)$. Daí, teremos que $x^2 - y^2 + 1 = 0$ e $2xy = 0$. Para $x = 0$ temos que $y = 1$ ou $y = -1$, o que acarreta nas soluções $(0, 1)$ e $(0, -1)$, respectivamente. Para $y = 0$ não teremos solução. Logo, essa equação possui solução em $\mathbb{C}$, mas não em $\mathbb{R}$. Observe que com a possibilidade de se operar com complexos e reais, em um mesmo contexto, via a representação binomial $x + yi$, as soluções desta equação podem ser representadas por i e $-i$, o que ajuda a entender que o número i corresponde ao par $(0, 1)$, isto é, $i = (0, 1)$.

Essas sutilezas matemáticas são de profunda fecundidade para o desenvolvimento de toda a Matemática aplicada. Sua compreensão exige do aluno e, principalmente, do professor uma especial atenção. Podemos dizer que há um certo grau de abstração nessas ideias. Por outro lado, é perfeitamente possível trabalhar, concretamente, tais ideias quando conduzidas com o devido cuidado e a adequada contextualização.

4.2 Definindo raízes quadradas de números complexos

Podemos, neste momento, dar significado às raízes quadradas de números negativos. Por exemplo, calcular as raízes quadradas do número -4, corresponde A resolver a equação $w^2 + 4 = 0$. Essa equação resolvida em $\mathbb{C}$ tem como soluções os números complexos $2i$ e $-2i$. Dessa forma, podemos, então, dizer que $\sqrt{-4} = \pm 2i$, isto é, $\sqrt{-4} = 2i$ ou $\sqrt{-4} = -2i$. Podemos ir além e calcular as raízes quadradas de um número complexo não real, isto é, dado um número complexo $z = a + bi$, queremos encontrar todos os números complexos $w = x + yi$ tais que $w^2 = z$.

Como $w^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, temos que $w^2 = z$ se, e somente se, $x^2 - y^2 = a$ e $2xy = b$. Observemos que $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$, que é um número real não negativo. Logo, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, temos o sistema formado pelas equações $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $x^2 - y^2 = a$, em que podemos concluir que $x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ e $y^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Uma vez que $\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ e $\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ são números não negativos, chamemos de α o número real dado por $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ e de β o número real dado por $\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, em que $\sqrt{\ }$ denota a raiz quadrada não negativa de números reais não negativos, então, quando b é positivo, nós temos que $x = \alpha, y = \beta$ ou $x = -\alpha, y = -\beta$; no caso em que b é negativo, nós temos que $x = \alpha, y = -\beta$ ou $x = -\alpha, y = \beta$. Nós concluímos que a equação $w^2 = z$ tem soluções $\pm(\alpha + \beta i)$, em que α e β são dadas pelas fórmulas precedentes, no caso em que $b \geq 0$. Também, concluímos que a equação $w^2 = z$ tem soluções $\pm(\alpha - \beta i)$, quando $b < 0$.

Como consequência desse fato, equações quadráticas do tipo $az^2 + bz + c = 0$, em que $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, podem ser resolvidas pela forma quadrática usual, isto é, por $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Assim, por exemplo, podemos resolver a equação $z^2 + z - (1 - 3i) = 0$ exatamente como fazíamos para equações do 2º grau com coeficientes reais. Para essa equação, temos que $b^2 - 4ac = 1^2 + 4 \cdot (1 - 3i) = 5 - 12i$, cujas raízes quadradas são dadas por $\pm(3 - 2i)$, devido à fórmula obtida anteriormente. Assim, as soluções dessa equação são $z = \frac{-1+(3-2i)}{2} = 1 - i$ ou $z = \frac{-1-(3-2i)}{2} = -2 + i$.

Para finalizarmos este assunto, podemos concluir três fatos, a partir das expressões de α e β, a saber:

1) As raízes quadradas de um número complexo são reais se, e somente se, o número complexo é um real não negativo.

2) As raízes quadradas de um número complexo são da forma $\pm bi$ (com $b \neq 0$) se, e somente se, o o número complexo é real e negativo.

3) As duas raízes quadradas de um número complexo coincidem se, e somente se, o número complexo é zero.

4.3 Mais uma vez retornando ao problema motivador

Seguindo a proposta deste trabalho, vimos que o problema dos volumes recaiu em uma equação do terceiro grau. A aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia exigiu o cálculo da raiz quadrada de um número negativo. Entretanto, a certeza da existência de uma raiz real para o problema levou à criação do conjunto dos números complexos, em que foi possível calcular a raiz quadrada de números negativos e, de modo geral, de um número complexo qualquer. A respeito da possibilidade de se conceber um tal conjunto, é oportuno descrever as impressões iniciais de Bombelli [1]: *"Foi uma idéia louca, na opinião de muitos. Eu também, por muito tempo, partilhei desta opinião. Tudo o mais parecia baseado em sofismas que em verdades. Porém, tanto pensei, que acabei provando ser mesmo verdade"*.

Mais de duzentos anos depois, Gauss faria o seguinte comentário sobre as quantidades imaginárias: "*(...) São mais toleradas que totalmente aceitas, elas mais parecem um jogo vazio com símbolos(...)*".

É bom lembrar que foi o próprio Gauss que contribuiu para que os complexos fossem totalmente aceitos (ver CARNEIRO (2004)).

Ao retornarmos ao nosso problema motivador, podemos reescrever a solução $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$ da seguinte maneira: $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$. Mesmo assim, a resposta definitiva para este problema esbarra em mais um complicador, a saber: como fazer para proceder à extração de raízes cúbicas e, mais geralmente, de raízes n-ésimas de um número complexo?

A princípio, parece que essa questão está superada, por outro lado, vamos ver o que acontece quando tentamos realizar o cálculo das raízes cúbicas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, como feito para as raízes quadradas.

Podemos admitir, então, que $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = x+yi$. Assim, deveremos ter que $(x+yi)^3 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Portanto, $x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+y^3i^3 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Usando o fato de que $i^2 = -1$ e que $i^3 = i{\cdot}i{\cdot}i = -i$, temos que o lado esquerdo da igualdade é igual a $(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i$. Portanto, devemos ter que $(x^3 - 3xy^2) = \frac{1}{2}$ e $(3x^2y - y^3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Recaímos, portanto, em um sistema de equações do terceiro grau, e tudo indica que estamos em um *looping*: para resolver a equação do terceiro grau pela fórmula de Cardano-Tartáglia precisamos extrair a raiz cúbica de um número complexo e esta, por sua vez, nos leva a um sistema de equações do terceiro grau. O problema se agrava quando se necessita calcular raízes com índices maiores do que três. Algo deve ser feito, neste momento, e o que deve ser feito, agora, é a utilização da representação geométrica dos números complexos.

[1]Rafael Bombelli foi um matemático italiano nascido no ano 1526 e morreu em Roma no ano de 1572. Foi pioneiro em determinar as regras algébricas dos números negativos e dos números complexos, em sua obra *L'Algebra*.

4.4 Trigonometria e Números Complexos

Como sabemos, podemos localizar um ponto P do plano cartesiano através de suas coordenadas cartesianas x e y. Uma forma alternativa para a localização dos pontos, no plano, é aquela que utiliza coordenadas polares. Essa forma de se representar os pontos do plano é de fundamental interesse, neste contexto, e sua definição é como segue. Considerando a Figura 4.3,

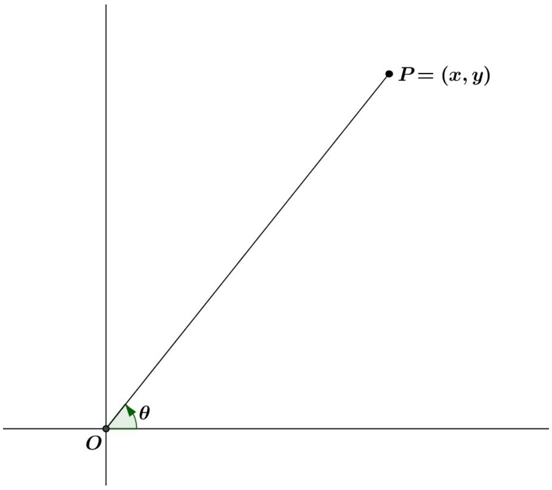


Figura 4.3:

1º) Seja $\overline{OP}$ o segmento que liga a origem O ao ponto P, com $P \neq O$;

2º) Consideremos, também, o ângulo θ , com $0 \text{ rad} \leq \theta < 2\pi$ rad ou $0^o \leq \theta < 360^o$, em que o eixo das abscissas deve girar no sentido anti-horário, em torno da origem O, até se superpor ao segmento $\overline{OP}$ pela primeira vez.

Observação: Restringimo-nos a ângulos de 0^o a 360^o (exclusive), com o intuito de evitar que um ponto P, neste sistema de coordenadas, possua uma infinidade de representações. A referida restrição estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e um par $\overline{OP}$ e θ. Essa escolha também poderia ser para ângulos θ tais que $-180^o \leq \theta < 180^o$, ou, ainda $-\pi \text{ rad} \leq \theta < \pi$ rad.

Admitamos que o ponto P represente o complexo $z = x + yi$ não nulo. Define-se $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ que, geometricamente, representa a distância do afixo z à origem. O ângulo θ é chamado de argumento de z e representado por $\text{Arg}(z)$. Este ângulo é univocamente determinado quando se conhecem os valores de $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ e $\sin\theta = \frac{y}{|z|}(0 \leq \theta < 2\pi)$. Podemos, usando a representação polar do complexo z, escrevê-lo em função dessas coordenadas e, então, teremos o complexo escrito na sua forma polar ou trigonométrica, fórmula essa de grande utilidade como se verá adiante. Teremos, então, que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

É importante ressaltar que a forma binomial $x + yi$ do complexo $z = (x, y)$ se mostra mais apropriada para efeito das mais fecundas e promissoras aplicações dos números complexos. É ela que permitirá a melhor operacionalidade dos complexos, deixando vir à tona as potencialidades destes poderosos e revolucionários números, não apenas no terreno exclusivo da Matemática, mas também em sua utilização nas demais ciências como a Física. A geometria dos números complexos encontra terreno fértil em suas aplicações e isto será evidenciado quando a trigonometria se introduz, naturalmente, aos números complexos possibilitando uma forma alternativa para se representarem os complexos. Convém observar que a operação de soma de números complexos pode ser melhor interpretada, geometricamente, em sua forma binomial. Já a multiplicação de complexos, vista na forma binomial, não revela seu importante e crucial efeito geométrico. É essa propriedade que a trigonometria resgata. Quando aliada à trigonometria, será possível mostrar que a multiplicação de complexos consiste em executar transformações de rotações e homotetias. Convém, neste momento, analisar alguns casos particulares de multiplicações de complexos que deixam claro estas propriedades.

4.5 Multiplicação de números complexos em que um deles é real

Iremos analisar o efeito geométrico de uma multiplicação do tipo $z_1 \cdot z_2$ para $z_1 = (a, 0)$ e $z_2 = (x, y)$. Devemos, então, efetuar $(a, 0) \cdot (x, y) = (ax, ay)$ ou na forma binomial a multiplicação se representa por $a \cdot (x + yi) = ax + (ay)i$. Olhando esta multiplicação no plano complexo, podemos verificar que esta operação se traduz em uma transformação homotética de razão a e centro na origem, conforme a Figura 4.4.

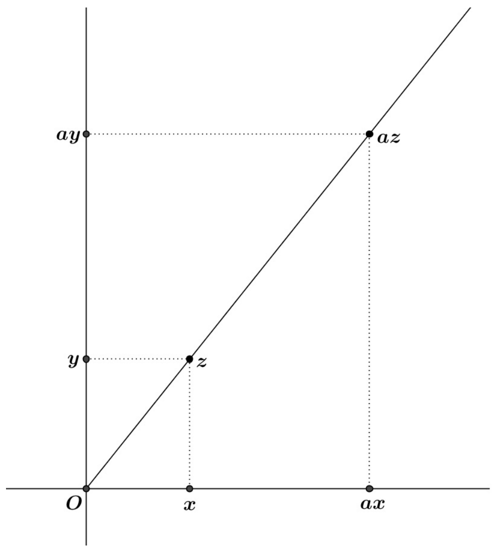


Figura 4.4:

Ao analisarmos, graficamente, essa multiplicação, vemos que a Figura 4.5 mostra, naturalmente, as imagens homotéticas de dois triângulos determinados pela origem, os respectivos complexos e suas coordenadas. De modo geral, temos:

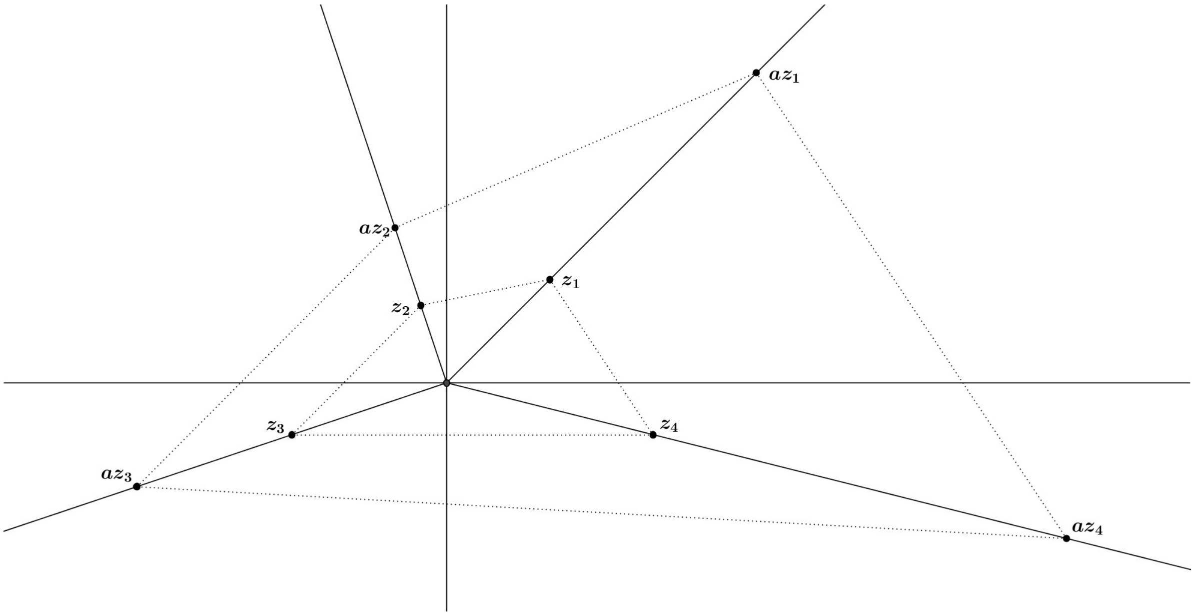


Figura 4.5:

4.6 Multiplicação de um número complexo qualquer pelo complexo i

Dado o complexo $z = (x, y)$ ou $z = x + yi$ estamos interessado no complexo iz. Fazendo os cálculos, temos que $iz = i(x + yi) = -y + xi$. Na forma pontual, podemos ver que esta multiplicação transforma o ponto (x, y) no ponto $(-y, x)$. Essa situação corresponde a uma rotação de 90º do complexo z, no sentido anti-horário, em torno da origem O, conforme mostra a Figura 4.6:

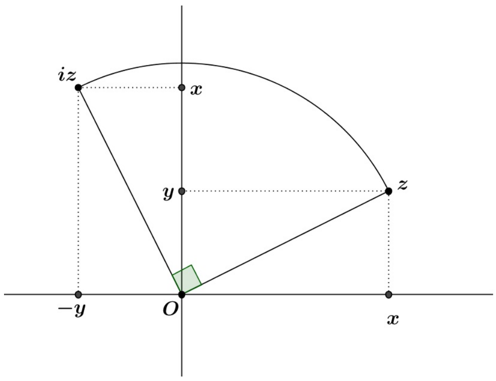


Figura 4.6:

Observe que, se multiplicarmos o complexo iz por i, isto é, calcularmos $i \cdot (iz)$ temos que $i \cdot (iz) = -x - yi = -z$, o que corresponde a multiplicar o complexo z, duas vezes, por i. Isso gera uma rotação de 180º no sentido anti-horário, o que pode ser comprovado pela relação que guardam entre si os pontos (x, y) e $(-x, -y)$, conforme ilustra a Figura 4.7, na próxima página.

Infelizmente, a multiplicação de um complexo da forma $x + yi$ por outro complexo

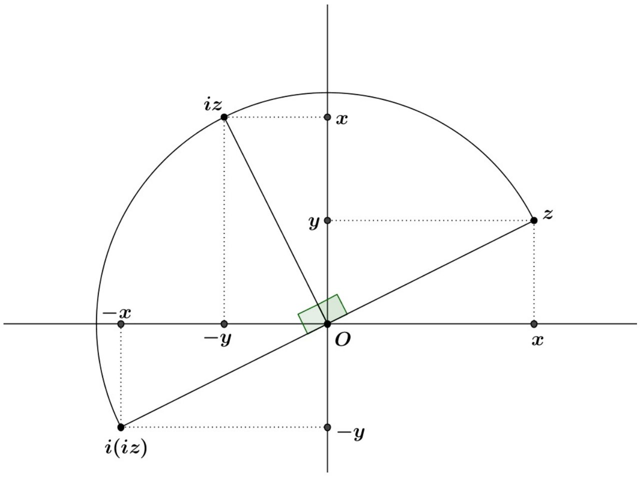


Figura 4.7:

$x' + y'i$ não oferece esta simplicidade para sua análise. Por outro lado, com o que foi visto até aqui, é possível deduzir que, ao se multiplicar um complexo z por outro do tipo $z' = ai$ ($a \in \mathbb{R}$), o efeito geométrico correspondente é a composição de uma homotetia e uma rotação de 90^o, conforme mostra a Figura 4.8.

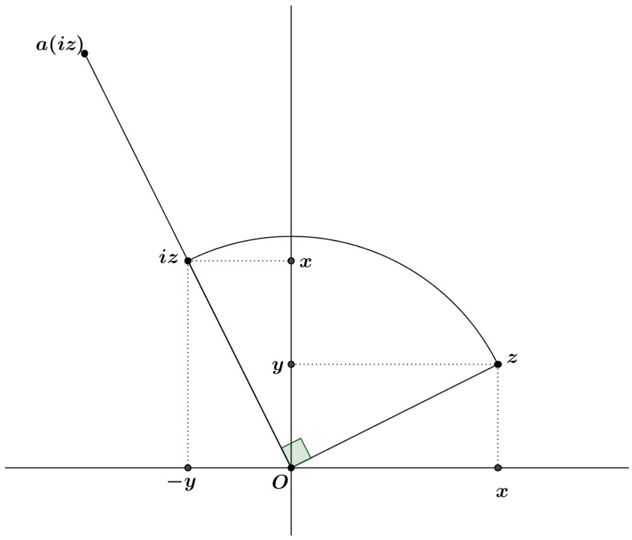


Figura 4.8:

Nosso próximo passo, será mostrar que esse efeito é, de certa forma, preservado para qualquer multiplicação entre complexos, isto é, será uma composição de uma homotetia e uma rotação de um ângulo θ (ainda a determinar). Neste fato reside toda a força das aplicações dos números complexos. Mas, para isso ser possível, recorreremos a alguns fatos e resultados vistos em trigonometria, pois será essencial para a investigação da geometria da multiplicação nos complexos.

4.7 Fórmula de adição e subtração de arcos em Trigonometria

Faremos uma demonstração do seguinte resultado: Para quaisquer números reais α e β, temos que $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ e $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

Para tanto, consideraremos os pontos P e Q na circunferência unitária da Figura 4.9, de tal modo que $P = (\cos\beta, \sin\beta)$ e $Q = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

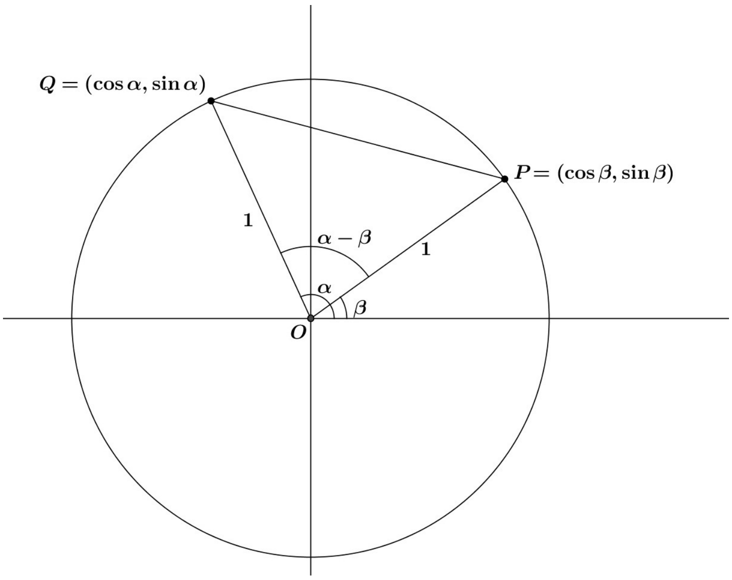


Figura 4.9:

Calculemos a medida do segmento $\overline{PQ}$ de dois modos diferentes. O primeiro deles aplicando a lei dos cossenos no triângulo POQ. Dessa forma, temos que: $\overline{PQ}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cdot \cos(\alpha - \beta)$. Calculando, agora, a distância entre os pontos P e Q, considerando suas coordenadas cartesianas, teremos que: $\overline{PQ} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$. Logo, $\overline{PQ}^2 = (\cos\alpha)^2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + (\cos\beta)^2 + (\sin\alpha)^2 - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + (\sin\beta)^2 = 2 - 2(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta)$. Igualando os dois valores encontrados para $\overline{PQ}^2$, obtemos que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Como $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$, para todo número real x, temos que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Para mostrarmos as fórmulas restantes, lembremos que para todo número real x vale $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ e $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$. Usando este fato, temos que $\sin(\alpha + \beta) = \cos((\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$. Por fim, $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

4.8 Multiplicação de dois números complexos quaisquer

Vamos, agora, multiplicar o complexo $z_2 = |z_2|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ pelo complexo $z_1 = |z_1|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Apesar da multiplicação entre números complexos ser comutativa, é importante, neste momento, fixarmos esta ordem.

Ao efetuarmos esta multiplicação, teremos:

$$\begin{aligned} z_2 \cdot z_1 &= [|z_2|(\cos\alpha + i\sin\alpha)][|z_1|(\cos\beta + i\sin\beta)] \\ &= |z_2||z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= |z_2||z_1|(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) + i(\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha) \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de cosseno e seno de adição de arcos obtidas na seção anterior, concluímos que $z_2z_1 = |z_2||z_1|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$. Essa forma final da multiplicação mostra que o complexo resultante possui módulo igual a $|z_2||z_1|$ e argumento igual a $\alpha+\beta$, isto é, seu módulo é igual ao produto dos módulos dos complexos originais e seu argumento é igual à soma dos argumentos dos complexos originais. Observando a Figura 4.10, a determinação do complexo z_2z_1 é conseguida girando-se no sentido trigonométrico o complexo z_1 de um ângulo igual ao argumento do complexo z_2, seguida de uma homotetia de centro, na origem, e razão igual ao módulo do complexo z_2; ou, também, girando-se no sentido trigonométrico o complexo z_2 de um ângulo igual ao argumento do complexo z_1 seguido de uma homotetia de centro na origem e razão igual ao módulo do complexo z_1.

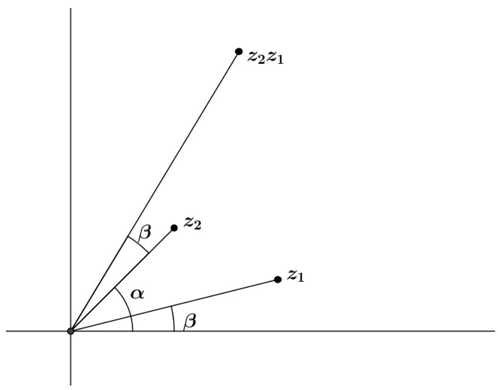


Figura 4.10:

No estudo das transformações geométricas, esta composição de rotação com uma homotetia é designada por *Roto-homotetia*.

4.9 Potenciação na forma trigonométrica

Sabemos que, para multiplicar dois complexos na forma trigonométrica, basta multiplicar seus módulos e somar seus argumentos. Podemos utilizar este fato para obter o valor de z^n, em que n é um número inteiro e $z = |z|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ é um número complexo. Para isso, definimos a *potenciação* da maneira usual: $z^0 = 1$ e para todo número natural $n \geq 1$

$z^n = \underbrace{z \dots z}_{n \text{ vezes}}$, para todo número complexo z, e $z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \dots z^{-1}}_{n \text{ vezes}}$ se $z \neq 0$, em que $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

Para calcularmos z^n, em que n é um número inteiro, comecemos dividindo nosso problema em três casos:

caso 1: n é um inteiro positivo

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \dots z}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{[|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)] \dots [|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)]}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(|z| \dots |z|)}_{n \text{ vezes}} \underbrace{[(\cos\alpha + i\sin\alpha) \dots (\cos\alpha + i\sin\alpha)]}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(|z| \dots |z|)}_{n \text{ vezes}}[\cos(\underbrace{\alpha + \dots \alpha}_{n \text{ vezes}}) + i\sin\underbrace{(\alpha + \dots \alpha)}_{n \text{ vezes}}] \\ &= |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha). \end{aligned}$$

caso 2: $n = -1$ e $z \neq 0$

Neste caso, temos que $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{1}{|z|}\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$. Contudo, sabemos que se $w = x + yi$ é um número complexo não nulo, então, $w^{-1} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$. Em particular, como $\cos\alpha - i\sin\alpha \neq 0$, temos que $\frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2} = \cos\alpha - i\sin\alpha$. Sabemos da trigonometria que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e que $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Assim, $\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$. Com isso,

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \\ &= \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \\ &= |z|^{-1}(\cos((-1)\cdot\alpha) + i\sin((-1)\cdot\alpha)) \end{aligned}$$

Ou seja, ainda podemos obter z^{-1} do mesmo modo que se tivéssemos que calcular este resultado para uma potência com expoente positivo.

caso 3: n é um inteiro negativo e $z \neq 0$

Neste caso, $n = -|n|$, onde $|n| > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-|n|} \\ &= \underbrace{z^{-1} \dots z^{-1}}_{|n| \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{[|z|^{-1}(\cos((-1)\cdot\alpha) + i\sin((-1)\cdot\alpha)] \dots [|z|^{-1}(\cos((-1)\cdot\alpha) + i\sin((-1)\cdot\alpha))]}_{|n| \text{ vezes}} \\ &= [\underbrace{|z|^{-1} \dots |z|^{-1}}_{|n| \text{ vezes}}][\underbrace{(\cos((-1)\cdot\alpha) + i\sin((-1)\cdot\alpha) \dots (\cos((-1)\cdot\alpha) + i\sin((-1)\cdot\alpha)}_{|n| \text{ vezes}}] \\ &= |z|^{-|n|}((\cos(-|n|\cdot\alpha) + i\sin(-|n|\cdot\alpha)) \\ &= |z|^n((\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) \end{aligned}$$

Façamos um exemplo. Suponhamos que se pretenda calcular z^9, para o caso em que em que $z = \sqrt{3}+i$. Se formos calcular a potência, diretamente na forma binomial, deveremos fazer o seguinte cálculo: $(\sqrt{3}+i)^9$, que pode ser realizado pela fórmula do binômio de Newton. Estamos de acordo que estes cálculos são exaustivos. Por outro lado, podemos representar o referido complexo em sua forma trigonométrica e efetuar a potenciação como foi vista. A forma trigonométrica do complexo em questão é $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$. Proseguindo, então, teremos que: $z^9 = 2^9(\cos\frac{9\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{9\pi}{6}) = 512(\cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}) = -512i$.

4.10 Radiciação na Forma Trigonométrica

Nosso objetivo, agora, é demonstrar o importante resultado: *Todo número complexo $z = |z|(cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$, não nulo, admite n raízes n-ésimas distintas. Todas elas possuem módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$, enquanto seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\alpha}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.*

Equivalentemente, podemos enunciar este resultado da seguinte maneira: *As raízes n-ésimas de um número complexo z, no plano de Argand-Gauss são, para $n = 2$, as extremidades de um diâmetro de uma circunferência de raio igual a $\sqrt[n]{|z|}$. Para $n > 2$, elas são os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio igual a $\sqrt[n]{|z|}$.*

Procuraremos as raízes n-ésimas de z, isto é, queremos obter números complexos w, tais que $w^n = z$. Admitamos ser $w = |w|(cos\theta + i\sin\theta)$. Daí segue que $w^n = |w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$. Como $w^n = z$, temos que $|w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$. Dessa igualdade, temos que $|w|^n = |z|$. Isso implica que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (aqui, $\sqrt[n]{\ }$ é a raíz n-ésima real). Além disso, deve ser cumprido o seguinte: $\cos n\theta = \cos\alpha$ e $\sin n\theta = \sin\alpha$. Essa última exigência diz que os arcos $n\theta$ e α são côngruos e, em consequência, teremos que $n\theta = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $\theta = \frac{\alpha+2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Como θ depende de k, podemos escrever que $\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Assim, se $w = |w|(cos\theta + i\sin\theta)$ é uma raíz n-ésima do número complexo $z = |z|(cos\alpha + i\sin\alpha)$ então $w \in \mathcal{A}$, em que $\mathcal{A} = \{w_k; w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, com $\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ e $k \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{Z}$ e $w_k \in \mathcal{A}$, temos que $w_k^n = |z|(cos\alpha + i\cdot\sin\alpha) = z$, isto é, w_k é uma raiz n-ésima de w. Assim, o conjunto de todas as raízes n-ésimas de z coincide com o conjunto $\mathcal{A}$.

A princípio, parece que existe uma infinidade de raízes n-ésimas de z, uma vez que os ângulos θ_k estão em função do número inteiro k e todos eles são diferentes entre si (já que eles estão em uma progressão aritmética de razão positiva). Entretanto, vejamos que isso não ocorre. Para isso, mostremos o seguinte fato: existem, exatamente, n raízes n-ésimas e elas são iguais a $\{w_0 \ldots, w_{n-1}\}$. Para vermos isso, mostremos que os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\{w_0; \ldots; w_{n-1}\}$ são, na verdade, os mesmos.

De fato, é claro que, para cada $j = 0; \ldots; n-1$, temos que $w_j \in \mathcal{A}$. Por outro lado, dado $w \in \mathcal{A}$, temos que $w = w_m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. Ao dividirmos m por n, pelo

Algoritmo da Divisão, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < n$ tal que $m = qn + r$. Assim,

$$\begin{aligned} v_m &= v_{qn+r} \\ &= \sqrt[n]{|z|}(\cos\theta_{qm+r} + i\sin\theta_{qm+r}) \\ &= \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(qn+r)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(qn+r)\pi}{n})) \\ &= \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha+2r\pi}{n} + 2q\pi) + i\sin(\frac{\alpha+2r\pi}{n} + 2q\pi)]. \end{aligned}$$

Como as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2r\pi}{n} + 2q\pi) + i\sin(\frac{\alpha+2r\pi}{n} + 2q\pi) &= \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2r\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2r\pi}{n}) \\ &= w_r. \end{aligned}$$

Assim, $w \in \{w_0; \ldots; w_{n-1}\}$ e, portanto, temos a igualdade.

Por outro lado, caso haja em $\mathcal{A}$ dois elementos w_j e w_l (com $j \neq l$) tais que $w_j = w_l$, então, teríamos que $\sqrt[n]{|z|}(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) = \sqrt[n]{|z|}(\cos\theta_l + i\sin\theta_l)$. Isso equivale a concluir que θ_j e θ_l são côngruos e, portanto, $\theta_j - \theta_l = 2p\pi$, para algum $p \in \mathbb{Z}$. Assim, $\frac{\alpha+2j\pi}{n} - \frac{\alpha+2l\pi}{n} = 2p\pi$, o que é o mesmo que dizer que $j - l = np$, por causa disso concluímos que n divide $j - l$. Uma vez que $j \neq l$, então, podemos supor (sem perda de generalidade) que $j < l$. Como j e l são não negativos e menores do que n, então, $0 \leq j < l < n$. Desta forma, $0 < |j - l| < n$, o que é um absurdo, já que n é um divisor de $j - l$.

Usaremos a notação $\sqrt[n]{z}$ para denotar todas as raízes n-ésimas do número complexo z. Desta forma, temos que $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}))$, para $k = 0; 1; \ldots; n-1$.

Podemos, como exemplo, calcular as raízes sextas da unidade, isto é, encontrar todos os números complexos w tais que $w^6 = 1$. Se $z = 1$, então, $|z| = 1$ e argumento igual a $\alpha = 0$. Então, cada uma das raízes sextas de 1 tem módulo igual a $\sqrt[6]{1}$. Sabemos, também, que os argumentos dessas raízes formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ e cujo primeiro termo é igual a $\frac{\alpha}{6} = 0$. Assim, os argumentos das seis raízes sextas da unidade são: $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \theta_3 = \frac{3\pi}{3} = \pi, \theta_4 = \frac{4\pi}{3}$ e $\theta_5 = \frac{5\pi}{3}$. Portanto, as raízes sextas da unidade são $w_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1, w_1 = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2 = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1, w_4 = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $w_5 = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Para complementar este importante resultado, vamos marcar no plano de Argand-Gauss as raízes sextas da unidade. Veja na Figura 4.11.

Observe que os pares de raízes w_1 e w_5 e w_2 e w_4 são números complexos que chamamos de conjugados. Isto significa dizer que elas são imagens uma da outra por uma reflexão com relação ao eixo x (eixo real). Note que elas possuem a mesma parte real e as partes imaginárias simétricas. De um modo geral, o conjugado de um complexo $z = x + yi$ é denotado por $\overline{z} = x - yi$. Assim, por exemplo, podemos escrever w_4 como $\overline{w_2}$ e w_5 como $\overline{w_1}$.

Na forma trigonométrica, os complexos conjugados se representam da seguinte forma $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $\overline{z} = |z|(\cos\alpha - i\sin\alpha)$. No caso em que $|z| = 1$, teremos que $z + \overline{z} = 2\cos\alpha$. Esse resultado nos será útil mais adiante.

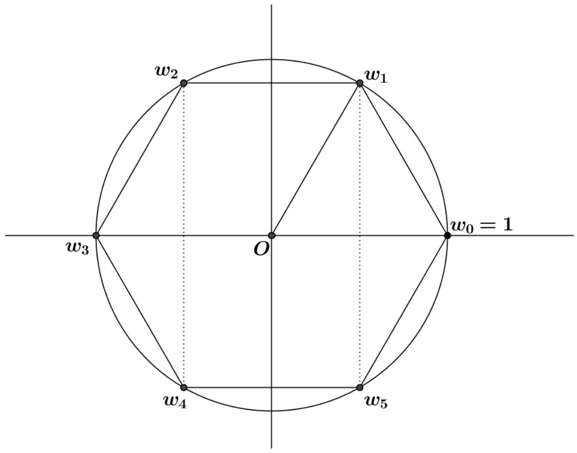


Figura 4.11:

4.11 Finalmente resolvendo o problema motivador

Neste momento, estamos prontos para concluir nossa intenção inicial de apresentar os números complexos com o objetivo de resolver o problema motivador e, dessa forma, perceber a materialidade desse poderoso número que acaba de emergir de um problema real. Relembrando, então, o problema motivador sobre volume recaiu em uma equação do terceiro grau. A resolução dessa equação pela fórmula de Cardano-Tartáglia foi interrompida, pela primeira vez, ao nos depararmos com a raiz quadrada de um número negativo. Esta barreira foi superada com a criação dos números complexos, porém, tivemos que interromper, novamente, a resolução quando chegamos ao seguinte cálculo do número $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$, uma vez que cada parcela desta soma envolvia raízes cúbicas de um número complexo. A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos, através da forma trigonométrica. Vamos, então, finalizar a resolução daquele problema inicial.

Comecemos, primeiro, calculando as raízes cúbicas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Temos que $|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$ e $\text{Arg}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3} = 60^o$. Fazendo $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = w$, temos que $|w| = \sqrt[3]{|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i|} = 1$ e os argumentos dessas raízes cúbicas determinam uma progressão aritmética de razão $\frac{360^o}{3} = 120^o$ e cujo primeiro termo é igual a $\frac{60^o}{3} = 20^o$. Assim, as raízes cúbicas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ são dadas por $w_0 = 1(\cos 20^o + i \sin 20^o) = (\cos 20^o + i \sin 20^o)$, $w_1 = 1(\cos 140^o + i \sin 140^o) = (\cos 140^o + i \sin 140^o)$ e $w_3 = 1(\cos 260^o + i \sin 260^o) = (\cos 260^o + i \sin 260^o)$. De modo análogo, podemos repetir o raciocínio utilizado, anteriormente, para encontrar as raízes cúbicas de $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, que são dadas por $w'_0 = \overline{w_0} = (\cos 20^o - i \sin 20^o)$, $w'_1 = \overline{w_1} = (\cos 140^o - i \sin 140^o)$ e $w'_2 = \overline{w_2} = (\cos 260^o - i \sin 260^o)$.

Agora, como $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ e as raízes cúbicas, de cada parcela, foram calculadas, anteriormente, temos como obter nosso número x. Para isso, basta substituirmos as raízes cúbicas $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ e $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ por cada um dos valores encontrados. A princípio, parece que nosso problema tem 9 soluções, a saber: $w_0 + \overline{w_0}, w_0 + \overline{w_1}, w_0 + \overline{w_2}, w_1 + \overline{w_0}, w_1 + \overline{w_1}, w_1 + \overline{w_2}, w_2 + \overline{w_0}, w_2 + \overline{w_1}, w_2 + \overline{w_2}$.

Entretanto, o seguinte resultado de Álgebra fará com que eliminemos algumas delas (a demonstração deste fato encontra-se em GONÇALVES (1991), pag. 68): *Toda equação polinomial de grau n, com todos os seus coeficientes em um certo corpo K, tem, no máximo, n soluções que pertencem a este corpo.*

Isso significa que, por exemplo, a equação obtida, no problema motivador, (o qual já sabíamos ter, pelo menos, uma solução real) deve ter, no máximo, 3 soluções reais, uma vez que ela é do 3º grau e tem todos os seus coeficientes reais. Contudo, essa equação não pode ter apenas uma solução real, pois vimos também que, ao esboçarmos os gráficos das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3x + 1$ eles interceptavam-se em, pelo menos, três pontos, portanto, a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ deve ter, pelo menos, 3 soluções. Graças ao fato enunciado, anteriormente, concluímos que a equação do nosso problema motivador deve ter *exatamente* 3 soluções reais. Mas quais dentre esses 9 números são reais?

Não é difícil observar que os números $w_0 + \overline{w_0}$, $w_1 + \overline{w_1}$ e $w_2 + \overline{w_2}$ são reais, uma vez que para todo número complexo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2x \in \mathbb{R}$. Quanto aos outros seis números, uma vez que $\sin 20^{\text{o}}$, $\sin 140^{\text{o}}$ e $\sin 260^{\text{o}}$ são distintos, dois a dois, temos que a parte imaginária de cada um dos 6 complexos restantes é não nula, logo, estes 6 números não são números reais.

Com isso, as soluções do nosso problema motivador são $x = w_0 + \overline{w_0} = 2\cos 20^{\text{o}}$, $x = w_1 + \overline{w_1} = 2\cos 140^{\text{o}}$ e $x = w_2 + \overline{w_2} = 2\cos 260^{\text{o}}$. Dessas três soluções, apenas, $x = 2\cos 20^{\text{o}}$ atende o nosso problema motivador, uma vez que as outras soluções são negativas. Logo, a aresta pedida mede $x = 2\cos 20^{\mathbf{o}}$.

É importante salientar que não só se resolveu o problema proposto, mas mostrou-se, essencialmente, que os complexos se configuraram como estratégicos para sua solução. Outro fato que fica esclarecido é que os complexos não têm nada de imaginário, como fruto da herança que carregou desde seu nascedouro até os dias de hoje. Eles, além de resolverem problemas concretos, também, evidenciam sua existência concreta. O fato de não se poder usar os números complexos para contagem e, também, de não se poder definir uma ordem para eles, causam uma espécie de desconfiança em admiti-los como números com os quais lidamos na vida prática. A possibilidade de ampliar a ideia de número via álgebra abstrata e geometria mostra o poder do universo da pesquisa em Matemática e sua relação com as demais ciências. Os números Complexos são um belo exemplo de que: quando estamos imersos em um processo sincrônico, somos incapazes de perceber seus aspectos diacrônicos.

Capítulo 5

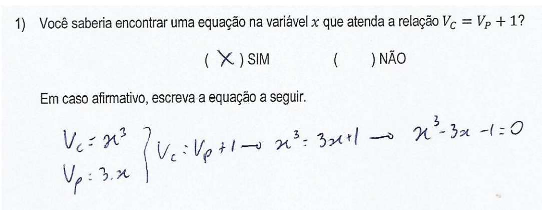
Atividades e Comentários

Neste capítulo teceremos alguns comentários sobre três atividades que foram elaboradas e aplicadas para uma turma de quinze alunos do 3º ano da escola em que leciono (IFRJ - *Campus* Rio de Janeiro). Essas atividades têm como objetivo estimular os alunos a perceberem que o conjunto dos números reais não são suficientes para explicar a totalidade dos fenômenos da realidade (note que algo parecido aconteceu ao final do Ensino Fundamental: o conjunto dos números reais foi introduzido para mostrar a insuficiência do conjunto dos números racionais). Acredito que, com essas atividades, a introdução do assunto Números Complexos possa ser feita de forma natural. Para isso, utilizaremos como ponto de partida o problema proposto no início do Capítulo 3. Todas as atividades aplicadas encontram-se no Anexo e algumas respostas fornecidas por esses alunos foram escaneadas.

5.1 Comentários sobre as respostas da Atividade 1

A Atividade 1 tinha como objetivo verificar se o aluno, a partir do problema proposto, podia chegar à equação do nosso problema motivador $x^3 - 3x - 1 = 0$ (primeiro item desta atividade). A partir dela, o aluno deveria traçar alguma estratégia para comprovar se a equação obtida admitia ou não solução real (segundo e terceiro itens desta atividade).

Com relação ao primeiro item da atividade, a grande maioria conseguiu obter a equação desejada, conforme podemos ver na Figura 5.1.


1) Você saberia encontrar uma equação na variável x que atenda a relação $V_C = V_P + 1$?

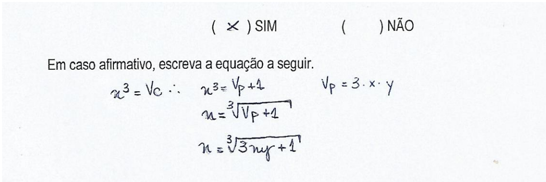
(X) SIM ( ) NÃO

Em caso afirmativo, escreva a equação a seguir.

$V_c = x^3$, $V_p = 3.x$ } $V_c = V_p + 1 \to x^3 = 3x+1 \to x^3 - 3x - 1 = 0$

Figura 5.1:

Os alunos que não conseguiram obter a equação proposta, conversei, individualmente, após a aplicação dessa atividade, para tentar entender por qual motivo eles não conseguiram obter tal equação. Durante a conversa, eles informaram que não haviam obtido a equação apesar de terem compreendido o problema, por não terem observado o fato da área da base do paralelepípedo ser igual a 3. Eles acharam que esse número correspondia à medida de uma das arestas da base, fato este que fez com que alguns deles incluíssem uma varíavel y para resolverem este problema, como podemos ver a seguir na solução apresentada na Figura 5.2.


(x) SIM ( ) NÃO

Em caso afirmativo, escreva a equação a seguir.

$x^3 = V_c \therefore x^3 = V_p + 1$ $V_p = 3 \cdot x \cdot y$

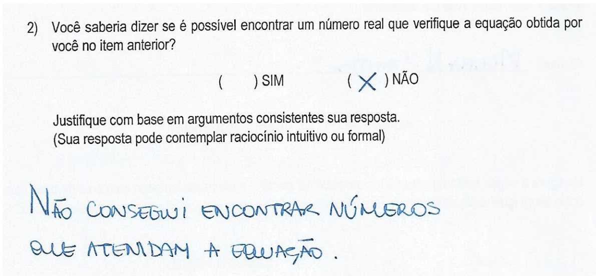
$x = \sqrt[3]{V_p + 1}$

$x = \sqrt[3]{3xy + 1}$

Figura 5.2:

Convém observar, também, que mesmo tendo obtido a equação correta, alguns alunos extraíram raiz cúbica de ambos os membros da igualdade, como fez o aluno acima.

Com relação aos itens restantes, pode-se observar que todos os alunos tentaram respondê-los, ou buscando exibir um número que verificasse a equação do item anterior ou utilizando alguma manipulação algébrica para chegar à resposta, pois, para eles, saber se uma determinada equação admite ou não solução, necessariamente, é resolver a equação. Isto pode ser constatado nas respostas dadas a seguir (Figura 5.3 e 5.4).

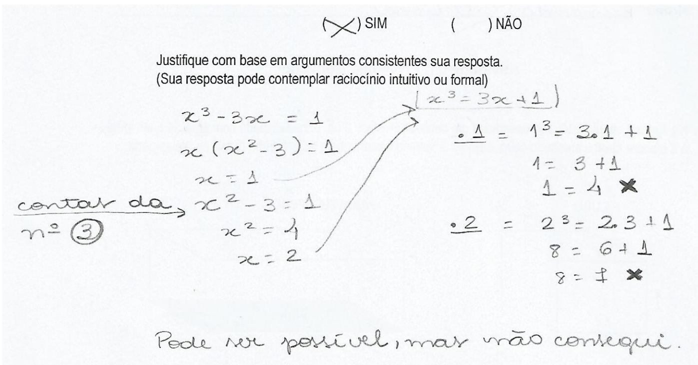

2) Você saberia dizer se é possível encontrar um número real que verifique a equação obtida por você no item anterior?

( ) SIM (X) NÃO

Justifique com base em argumentos consistentes sua resposta.
(Sua resposta pode contemplar raciocínio intuitivo ou formal)

NÃO CONSEGUI ENCONTRAR NÚMEROS QUE ATENDAM A EQUAÇÃO.

Figura 5.3:


(X) SIM ( ) NÃO

Justifique com base em argumentos consistentes sua resposta.
(Sua resposta pode contemplar raciocínio intuitivo ou formal)

$x^3 - 3x = 1$

$x(x^2 - 3) = 1$

$x = 1$

contar da nº 3 $x^2 - 3 = 1$

$x^2 = 4$

$x = 2$

$(x^3 = 3x + 1)$

$\cdot 1 = 1^3 = 3 \cdot 1 + 1$

$1 = 3 + 1$

$1 = 4$ ✗

$\cdot 2 = 2^3 = 2 \cdot 3 + 1$

$8 = 6 + 1$

$8 = 7$ ✗

Pode ser possível, mas não consegui.

Figura 5.4:

Observe que a resolução descrita acima, na Figura 5.4, não apareceu nessa atividade uma única vez. Note que, ao tentar resolver a equação deste modo na verdade, eles estão generalizando um fato que é consequência da propriedade **P7)**, descrito na seção 2.2: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$. Ao perceber que esse tipo de resolução não apareceu uma única vez, foi feito um comentário com todos os alunos, uma vez que ao conversar individualmente com um deles sobre o porquê de ter resolvido a equação desta maneira, o mesmo afirmou que achava que essa propriedade era verdadeira independente do valor que se encontrava no lado direito da igualdade.

Depois que todos os alunos terminaram de responder, foi corrigido no quadro o primeiro item da atividade. Quanto aos itens restantes, foram ouvidas as tentativas de verificar se a equação obtida tinha ou não solução real. Todos relataram que, para isso, deveríamos resolver a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, o que não foi possível fazer. Neste momento, os questionei se para saber se a equação tinha ou não solução, era sempre preciso resolver a equação. Eis que um aluno sugere que pensássemos em olhar essa equação como "função". Isso foi a "deixa"para que iniciássemos a atividade seguinte.

5.2 Comentários sobre as respostas da Atividade 2

Após a sugestão dada pelo aluno, recordamos com eles como deveriam ver uma equação em termos de função. Em seguida, foi distribuída, para todos eles, a segunda atividade dando um tempo para que eles a resolvessem. Essa atividade tinha como objetivo esboçar, em planos cartesianos separados, o gráfico das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = x^3$ (primeiro item da atividade) e $g(x) = 3x + 1$ (segundo item da atividade). Depois, esboçar, no mesmo plano cartesiano, o gráfico dessas duas funções (terceiro item da atividade) para, em seguida, informar (via interseção entre os gráficos) se a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ tinha ou não solução real (quarto item da atividade).

Com relação ao primeiro item dessa atividade, muitos alunos tiveram um pouco de dificuldade e a razão se deve ao fato da função f ser uma função "nova"para eles, isto é, ser uma função diferente daquelas que foram estudadas nos anos anteriores. Neste caso, como era uma função "nova", consequentemente, o gráfico da função não seria um gráfico, talvez, conhecido por eles. Para esboçar o gráfico, em um primeiro momento, eles utilizaram a técnica de atribuir valores para x e a maioria deles obtiveram o gráfico esperado, como podemos ver na Figura 5.5.

Dentre os alunos que não obtiveram o gráfico desejado, o maior insucesso se deu ao fato de que ele não passava pelo ponto $(0, 0)$. Caso tivessem observado esse fato, os esboços estariam corretos. Apenas um aluno esboçou o gráfico ligando-os por meio de segmentos de reta. Note que, a ideia de traçar gráficos de funções ligando os pontos, por meio de segmentos de reta, ainda persiste, mesmo sabendo que essa técnica não é adequada.

Os itens restantes não apresentaram dificuldades para os alunos, de modo que eles conseguiram obter os gráficos das funções f e g e conseguiram responder aos itens restantes, como podemos observar nas respostas a seguir (Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8).

Terminada a atividade, cada item foi corrigido no quadro, em que os gráficos de cada função foi esboçado utilizando o programa *Geogebra*. Com isso, todos puderam ver que a equação proposta tinha solução real (pelo menos 3). Apesar deste método permitir saber (em muitos casos) se uma equação pode ou não ter solução, ele não informa como encontrá-las.

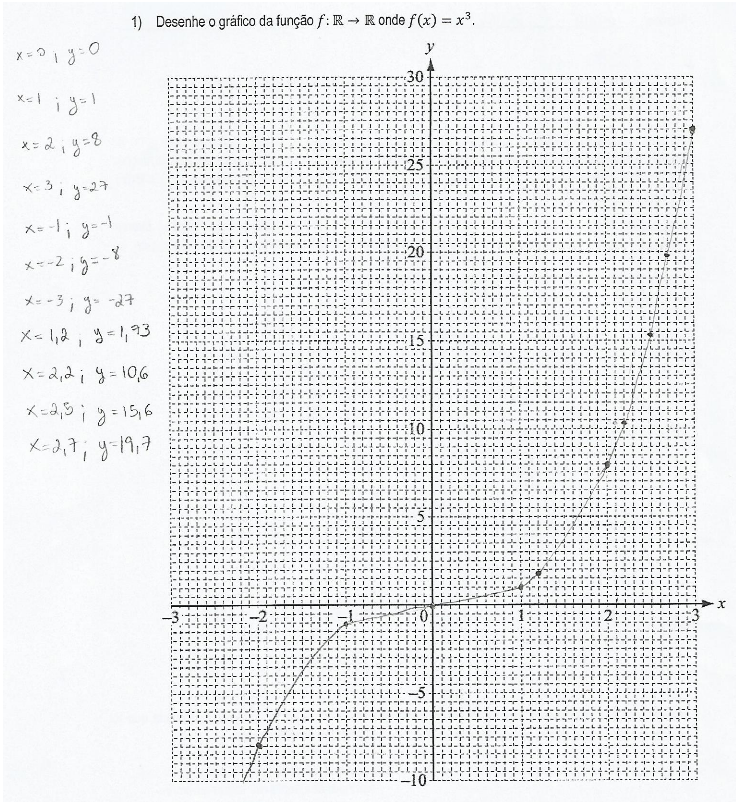


Figura 5.5:

5.3 Comentários sobre as respostas da Atividade 3

Nesta última atividade, uma vez que os alunos constataram que a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ admitia solução, restava responder à seguinte pergunta: existe alguma fórmula que permite resolver a equação? Para isso, foi feita uma breve apresentação sobre o assunto equações polinomiais. Definiu-se o que era um polinômio com coeficientes reais, grau de um polinômio e, por fim, o que era uma equação polinomial. Foi definido, também, o conceito de raiz de um polinômio. A equação obtida, no problema, foi constatada pelos alunos que era uma equação polinomial do 3º grau.

Foi recordado que equações polinomiais do 1º e 2º graus admitiam fórmulas que permitiam obter suas soluções. Após essa recordação, os indaguei com a seguinte pergunta: Existe uma fórmula para resolver qualquer equação polinomial do 3º grau? E do 4º grau? E do 5º grau? Ao mencionar esse último grau um aluno disse que não havia (tinha lido em algum lugar). Neste momento, para responder à essa pergunta, passei para a turma um vídeo da série *Isto é Matemática*, Temporada 7, Episódio 12: Évarist Galois uma novela matemática (ver [12]), com intuito de responder à pergunta.

Terminado o vídeo, foi fornecida a folha com a Atividade 3, em que era apresentada a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver equações polinomiais do 3º grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$. No primeiro item, eles deveriam utilizar a fórmula para obter o valor de x e, em seguida, diante do resultado obtido, o que eles poderiam afirmar sobre a equação ter ou não solução, levando apenas o resultado obtido na fórmula.

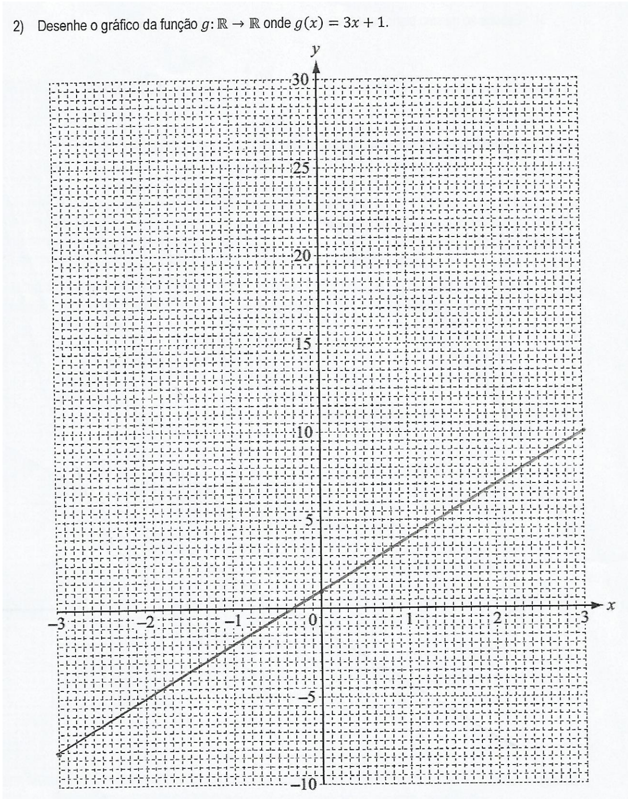


Figura 5.6:

No primeiro item, todos os alunos não tiveram dificuldade em utilizar a fórmula fornecida, como podemos ver na Figura 5.9 a resolução de um desses alunos.

Observemos que, na última linha do desenvolvimento deste aluno, ele atribuiu a x um ponto de interrogação, pois obteve em seus cálculos $\sqrt{-0,75}$ que, para ele, isso não é possível de se calcular no conjunto dos números reais. Aliás, a raiz quadrada desse número negativo que apareceu ao efetuar as devidas substituições não estavam nos planos de nenhum deles. Isso fez com que achassem que haviam cometido algum erro de cálculo, de modo que alguns vieram perguntar se, de fato, aquilo mesmo ocorria. Quando isso acontecia, sempre dizia para eles que tivessem confiança nos cálculos efetuados. Com isso, acreditando nos resultados obtidos, todos responderam o segundo item desta atividade. Na Figura 5.10, transcevemos uma dessas respostas.

Neste item, os alunos responderam que, apenas pela fórmula de Cardano-Tartaglia, a solução não apresentaria solução real por causa da raiz quadrada de número negativo. Contudo, com a realização da Atividade 2, alguns alunos puderam perceber que algo de estranho estava acontencendo. Um aluno, inclusive, descreveu isso na sua justificativa, como podemos ver na Figura 5.11.

Desta forma, a sensação que os números reais não podia “resolver”tudo pairava no ar.

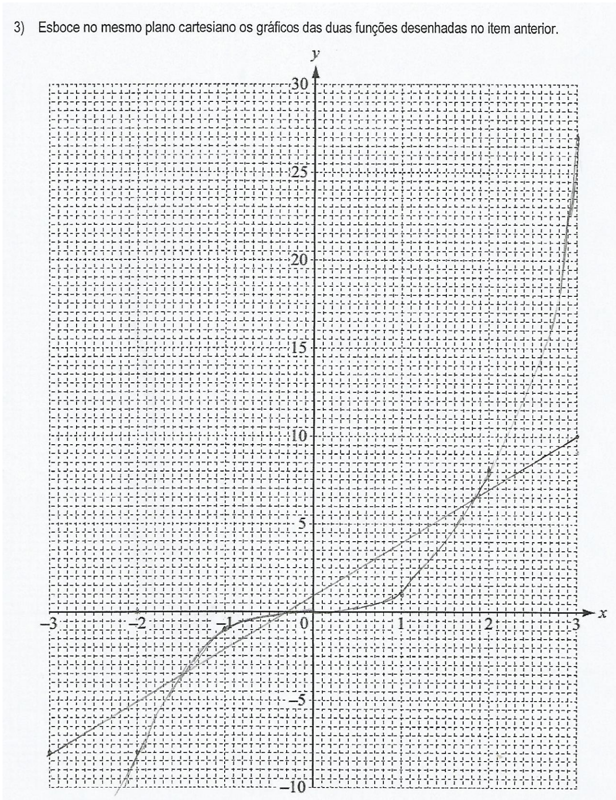
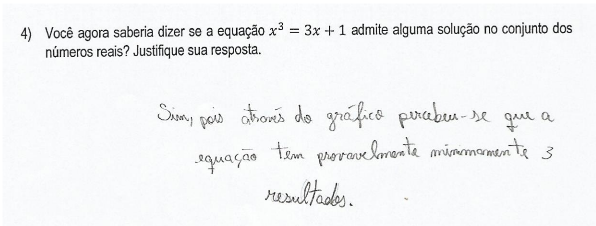


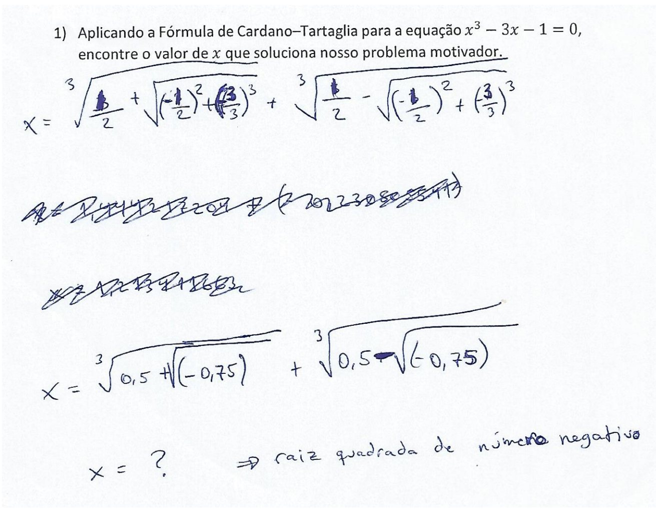
Figura 5.7:



4) Você agora saberia dizer se a equação $x^3 = 3x + 1$ admite alguma solução no conjunto dos números reais? Justifique sua resposta.

Sim, pois através do gráfico percebeu-se que a equação tem provavelmente minimamente 3 resultados.

Figura 5.8:



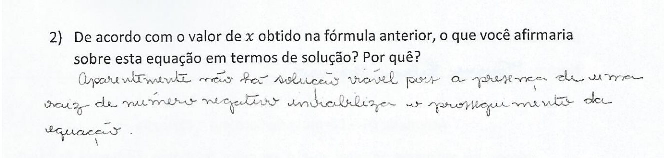
1) Aplicando a Fórmula de Cardano–Tartaglia para a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, encontre o valor de x que soluciona nosso problema motivador.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{0,5 + \sqrt{(-0,75)}} + \sqrt[3]{0,5 - \sqrt{(-0,75)}}$$

$x = ?$ $\Rightarrow$ raiz quadrada de número negativo

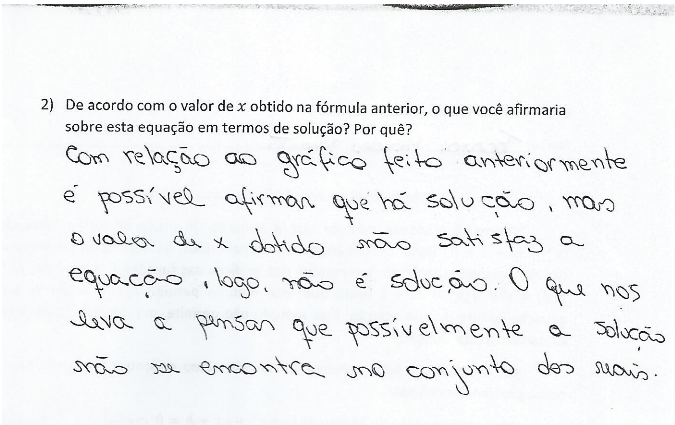
Figura 5.9:



2) De acordo com o valor de x obtido na fórmula anterior, o que você afirmaria sobre esta equação em termos de solução? Por quê?

Aparentemente não há solução viável por a presença de uma raiz de número negativo inviabiliza o prosseguimento da equação.

Figura 5.10:



2) De acordo com o valor de x obtido na fórmula anterior, o que você afirmaria sobre esta equação em termos de solução? Por quê?

Com relação ao gráfico feito anteriormente é possível afirmar que há solução, mas o valor de x obtido não satisfaz a equação, logo, não é solução. O que nos leva a pensar que possivelmente a solução não se encontra no conjunto dos reais.

Figura 5.11:

Capítulo 6

Considerações Finais

Com a ideia de se desenvolver o estudo dos complexos, através de um problema motivador, foi possível perceber a existência de solução real de uma equação do 3º grau cuja solução, via Cardano-Tartaglia, parecia, em primeira análise, nos mostrar uma impossibilidade. Essa primeira análise possibilitou inferir por intermédio desta perspectiva, perceber que o conjunto dos números reais mostrava-se insuficiente para tratar de equações algébricas e, dessa forma, a deficiência encontrada com os números reais precisava ser superada e o caminho era estender tal conjunto, abrigando uma nova qualidade (espécie) de número. Com base nessas considerações iniciais, houve a superação da dificuldade encontrada para o significado de raízes quadradas de números negativos. Raízes essas que, praticamente, durante toda nossa vida escolar, passamos negando sua existência.

Neste trabalho, tratamos de apresentar os números complexos como pares ordenados de números reais e não como números da forma $x + yi$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, como a maioria dos nossos livros didáticos o fazem. A despeito desta abordagem não ser a melhor opção, ela se mostra operacionalizável do ponto de vista objetivo. Por outro lado, sua desvantagem é que ela não suscita, no educando, uma conexão entre número complexos, geometria analítica e a dinâmica de suas operações à luz das transformações geométricas. Em termos de Ensino-Aprendizagem, a abordagem proposta, neste trabalho, possibilita um ganho conceitual significativo, levando-se ainda em conta que o estudo de geometria analitica precede o estudo dos números complexos, em todos os manuais, sem exceção.

Ainda que o professor faça, mais tarde, o *link* entre números da forma $x + yi$ e pares ordenados $(x; y)$ apresentando-lhes o Plano Complexo, esta oportunidade de vê-los como entes geométricos, dificilmente, poderá ser recuperado, opinião esta que pode ser compartilhada em CARNEIRO (2004).

"(...) O enfoque algébrico permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas a experiência tem mostrado que quando se perde a chance de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, em geral, esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece (quando aparece) a "forma trigonométrica"."

Na medida em que o trabalho se desenvolvia, foi possível constatar que a ordem dos capítulos poderia ser flexibilizada, sem prejuízo, para o entedimento dos alunos. Essa afirmação pode ser corroborada através das atividades propostas do Capitúlo 3.

No decorrer das atividades, ficou latente a dificuldade encontrada pelos alunos com o manuseio das propriedades operatórias dos números reais, em especial, as relativas à comutatividade, associatividade e distributividade. Desta forma, uma breve revisão destas propriedades, como foi feita no capítulo 2, é aconselhável. Afinal, partimos do pressuposto que seria desejável que as propriedades operatórias dos números reais fossem preservadas para esta nova qualidade de números. Dessa forma, se faz necessária uma abordagem metodológica que privilegie a estrutura algébrica de $\mathbb{R}$, ou seja, que atente para um trabalho criterioso que favoreça uma prática com essas operações. Nada mais justo que recordemos tudo isso e, em geral, os livros didáticos não costumam fazer esta correlação antes de apresentar os números complexos. Essa atitude pode ser percebida, consultando alguns livros didáticos, inclusive, aprovados pelo PNLD (ver IEZZI (2004) e PAIVA (2013)).

Foi extremamente gratificante constatar que os alunos demonstraram grande interesse em realizar as atividades propostas, bem como a clara demonstração de surpresa diante da visível possibilidade de se ampliar o conjunto dos números reais.

Como trabalho futuro, pretendo elaborar material didático com o fim de aproveitar os *softwares* em geometria dinâmica, dado seu potencial didático, com o intuito de trabalhar as transformações geométricas de rotação e homotetia como ferramental estratégico na abordagem das operações de multiplicação, divisão e radiciação de complexos. Enfim, explorar os aspectos geométricos dos complexos. Trabalhando, nessa perspectiva, os alunos poderão vislumbrar uma ótica que lhes permita concluir que os números complexos possuem uma existência tão concreta como a concebida para os números reais.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl; *História da Matemática.* Editora Edgard Blucher, 1974.

[2] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria/Números Complexos* Editora SBM, 2005.

[3] CARNEIRO, José Paulo; *A Geometria e o Ensino dos Números Complexos.* Editora RPM nº 55, pg 15-25, 2004.

[4] CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. *História dos Números Complexos.* Disponível em `http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf`. Acesso em: 15 dez. 2015.

[5] FERNANDEZ, Cecilia de Souza; BERNARDES Jr, Nilson da Costa. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* Editora SBM, terceira edição, 2014.

[6] GONÇALVES, Adilson; *Introdução à Algebra.* Editora Projeto Euclides, IMPA, quinta edição, 1991.

[7] IEZZI, Gelson; Osvaldo, Dolci; David, Degenszajn; Roberto, Périgo; Nilze, Almeida; *Matemática, Ciência e Aplicações, PNLD.* Editora Atual, 2004.

[8] LIMA, E,L; *A equação do terceiro grau, em Meu Professor de Matemática e outras histórias* Editora SBM, 1991.

[9] MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy; *Elementos de Álgebra.* Editora Ao Livro Técnico S.A, Rio de Janeiro, 1969.

[10] PAIVA, Manoel; *Matemática: Paiva, PNLD.* Editora Moderna, segunda edição, 2013.

[11] PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio; *Conhecimentos de Matemática.* Editora Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

[12] SIGMA3WEB, Isto é Matemática. *Évariste Galois uma novela matemática.* Disponível em `https://www.youtube.com/watch?v=DuhQnu1fgDc&list=PLKTNxZkADYLtGR6OlWCUlf-Rndu9jGq6j&index=12`. Acesso em 17 dez. 2015.

[13] SPIVAK, Michael; *Cálculo Infinitesimal.* Editora Reverté, S.A , segunda edição, 1992.

[14] TROTTA, F.; IMENES, L. M.; JAKUBOVIC, J.; *Matemática Aplicada.* Editora Moderna, 3 volumes, 1941.

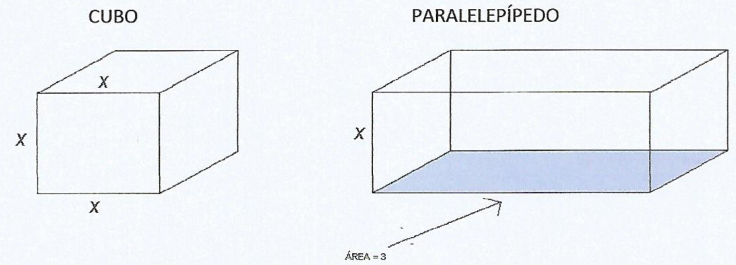
Anexos

IFRJ – Campus Rio de Janeiro

Nome: ____

Atividade 01: Problema Motivador

Na figura a seguir estão representados um cubo de aresta x e um paralelepípedo com área de base igual a 3 e altura igual à aresta do cubo. Seja V_C o volume desse cubo e V_P o volume desse paralelepípedo.



Sabe-se ainda que estes volumes se relacionam da seguinte forma: $V_C = V_P + 1$.

1) Você saberia encontrar uma equação na variável x que represente o problema proposto?

( ) SIM ( ) NÃO

Figura 6.1:

2) Você saberia dizer se é possível encontrar um número real que verifique a equação obtida por você no item anterior?

( ) SIM ( ) NÃO

Justifique com base em argumentos consistentes sua resposta.
(Sua resposta pode contemplar raciocínio intuitivo ou formal)

Figura 6.2:

3) Você saberia determinar exatamente um número real que verifique a equação obtida no item 1)?

( ) SIM ( ) NÃO

Justifique com base em argumentos consistentes sua resposta.
(Sua resposta pode contemplar raciocínio intuitivo ou formal)

Figura 6.3:

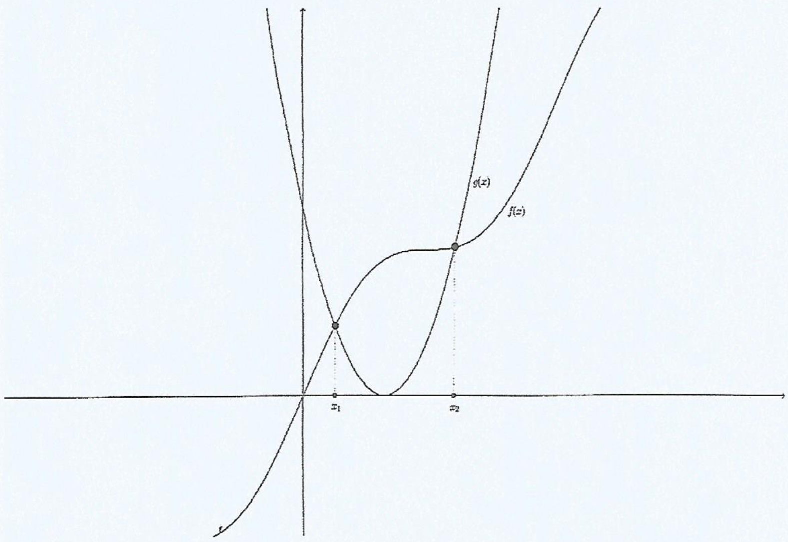
IFRJ – Campus Rio de Janeiro

Nome: ____

Atividade 01: Verificando se uma equação admite ou não solução

Dada uma equação na variável x, ela pode ser escrita na forma $A(x) = B(x)$. Podemos verificar se ela possui ou não solução recorrendo à análise de gráficos de funções. Para isso, consideremos duas funções f e g com o mesmo domínio D tais que suas leis de formação são dadas pelas expressões $A(x)$ e $B(x)$. Em seguida, representamos no plano cartesiano os gráficos dessas duas funções.

A equação $A(x) = B(x)$ admitirá alguma solução $x \in D$ se os gráficos dessas funções tiverem interseção quando ao desenharmos no mesmo plano cartesiano, conforme mostra o desenho a seguir.



Vamos usar o procedimento descrito acima para verificar se a equação $x^3 = 3x + 1$, (aquela que foi obtida na atividade anterior) possui alguma solução no conjunto dos números reais.

Figura 6.4:

Para isso, siga os passos a seguir:

1) Desenhe o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^3$.

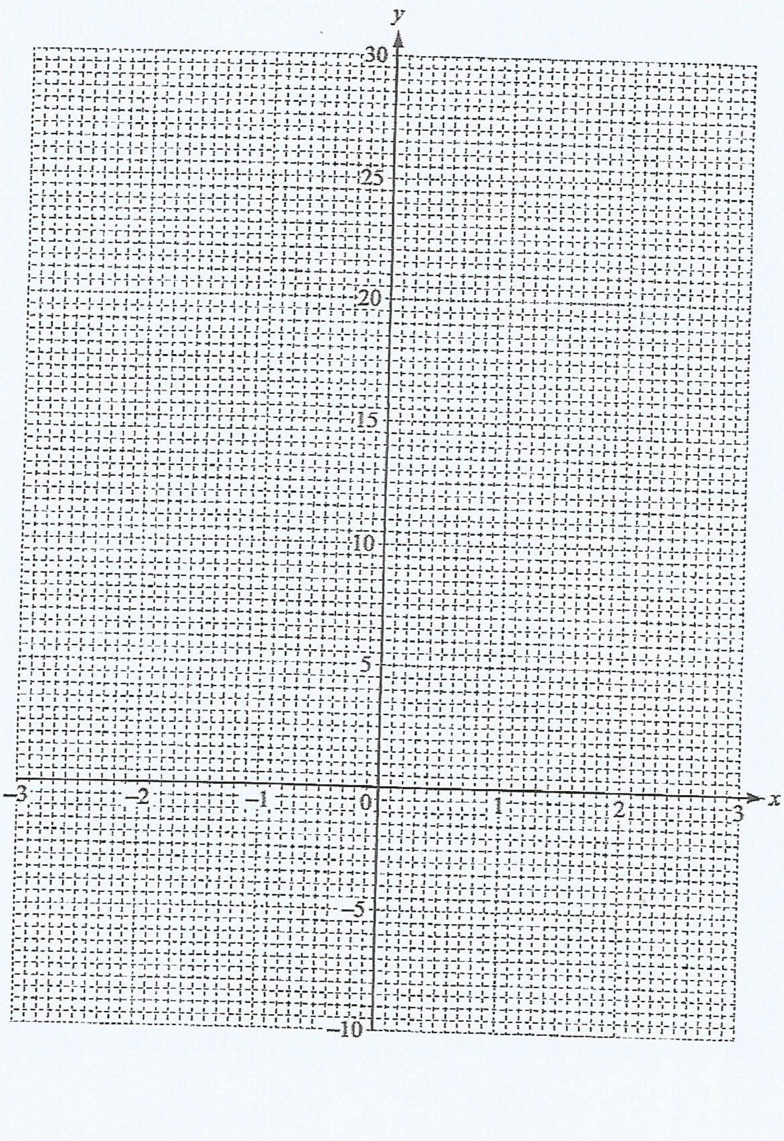


Figura 6.5:

2) Desenhe o gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $g(x) = 3x + 1$

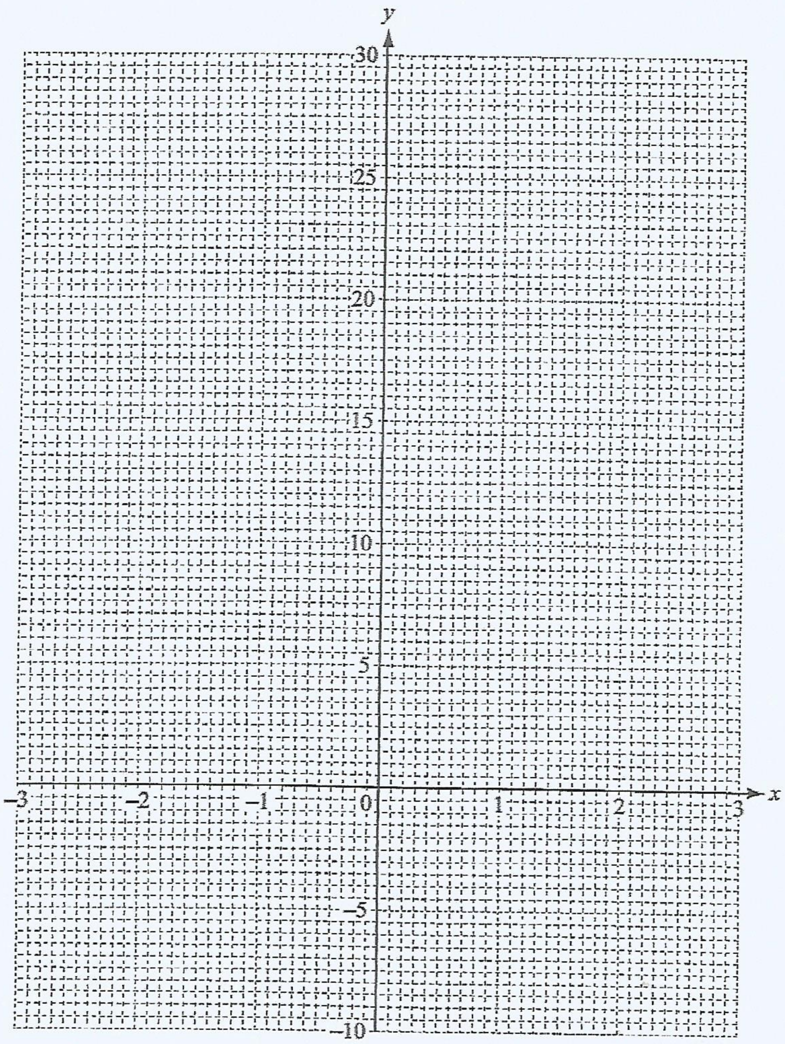
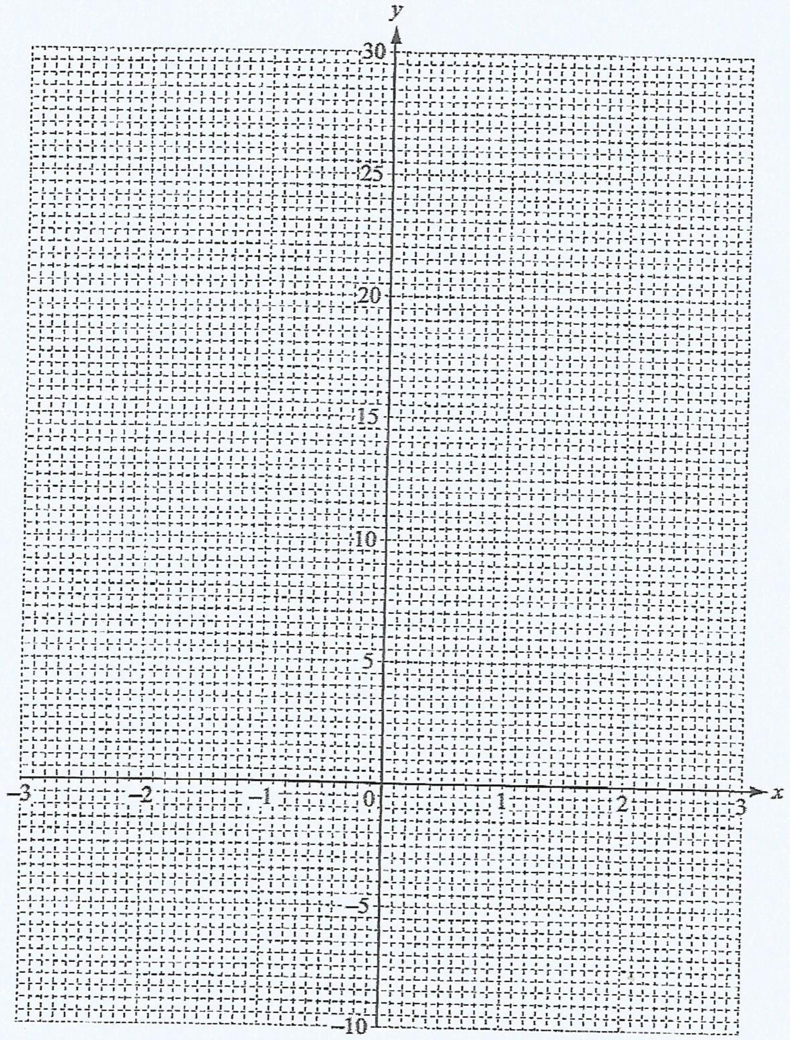


Figura 6.6:

3) Esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos das duas funções desenhadas no item anterior.



4) Você agora saberia dizer se a equação $x^3 = 3x + 1$ admite alguma solução no conjunto dos números reais? Justifique sua resposta.

Figura 6.7:

IFRJ – Campus Rio de Janeiro

Nome:____

Atividade 03 – Fórmula de Cardano – Tartaglia

Vimos na atividade anterior que a equação do nosso problema motivador ($x^3 - 3x - 1 = 0$) tinha solução (mesmo sem podermos, *a priori*, exibir tal número). Isto foi possível através das interseções dos gráficos das funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^3$e $g(x) = 3x + 1$ (note que este método permite apenas saber se uma equação admite ou não solução. Ele não permite, por exemplo, determinar exatamente esta solução).

Na atividade de hoje, veremos finalmente como encontrar a solução para o nosso problema motivador.

Dada uma equação do 3º grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, a solução desta equação é dada por $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$ (*Fórmula de Cardano-Tartaglia*).

1) Aplicando a Fórmula de Cardano-Tartaglia para a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, encontre o valor de x que soluciona nosso problema motivador.

Figura 6.8:

2) De acordo com o valor de x obtido na fórmula anterior, o que você afirmaria sobre esta equação em termos de solução? Por quê?

Figura 6.9: