Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-Graduação em Matemática

Itamara Marques Nogueira Ferreira

Os Lemas de Kaplansky e o Problema de Lucas

Rio de Janeiro

2017

ITAMARA MARQUES NOGUEIRA FERREIRA

OS LEMAS DE KAPLANSKY E O PROBLEMA DE LUCAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do Grau de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. RONALDO DA SILVA BUSSE

RIO DE JANEIRO

2017

ITAMARA MARQUES NOGUEIRA FERREIRA

OS LEMAS DE KAPLANSKY E O PROBLEMA DE LUCAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UNIRIO - PROFMAT , como requisito para obtenção do Grau de Mestra em Matemática.

Aprovada em 20 de Abril de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse - Orientador
UNIRIO

Prof. Dr. Fábio Xavier Penna
UNIRIO

Profª. Drª. Patrícia Nunes da Silva
UERJ

RIO DE JANEIRO
2017

Dedico este trabalho aos meus pais por terem me mostrado desde muito cedo que o conhecimento é o bem mais valioso do ser humano. Ao meu filho e ao meu marido por compreenderem a minha ausência em prol do conhecimento.

Agradecimentos

A Deus por me dar força e sabedoria para concluir esta jornada e por se fazer presente em tudo que faço.

Ao meu orientador Prof. Ronaldo Busse, pelas sugestões, paciência, sabedoria e amizade dedicadas a mim. Muito obrigada pela oportunidade de trabalhar com o senhor.

Aos meus pais, marido e filho, pelo incentivo, paciência, carinho e apoio dados no decorrer de todo o curso.

À amiga Aline, pelo estímulo, ajuda e amizade sincera de tantos anos.

Aos meus alunos e a todos os professores(as) que passaram pela minha vida, aprendi e aprendo muito com vocês a cada dia.

A todos os professores do corpo docente do mestrado da UNIRIO por compartilharem seus conhecimentos e por toda paciência que tiveram comigo.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta."

(Carl Friedrich Gauss)

Resumo

Este trabalho, tem o objetivo de abordar o ensino da Análise Combinatória através de uma linguagem simples e elementar, apresentando algumas técnicas de contagem, tais como: o Princípio de Inclusão e Exclusão, Permutações Caóticas, Combinações Completas e os Lemas de Kaplansky, que são ferramentas de extrema utilidade na hora de resolver problemas da Análise Combinatória, sobretudo aqueles que costumam ser cobrados em processos seletivos para universidades, IME, ITA e etc. Essas técnicas nos servirão de base para demonstrar duas formas distintas de resolver um problema desafiador que levou mais de meio século para ser solucionado, conhecido como o Problema de Lucas. Para finalizar iremos envolver o leitor propondo e solucionando mais alguns problemas, com níveis de dificuldade variados, utilizando o mesmo contexto do Problema de Lucas.

Palavras-chave: Princípio de Inclusão e Exclusão. Lemas de Kaplansky. Problema de Lucas.

Abstract

This work aims to address the teaching of Combination Analysis through a simple and elementary language, which presents some counting techniques, such as: Principle of Inclusion and Exclusion, Chaotic Permutations, Complete Combinations and Slogans Kaplansky , which are tools Extremely useful in solving problems of Combinatorial Analysis, especially those that are charged in selective processes for universities, IME, ITA and etc. These techniques on the server-side demonstrate two different ways of solving a challenging problem that took more than half a century to solve, known as the Lucas Problem. Finally, we will involve the reader by proposing and solving some more problems, with varying levels of difficulty, using the same context of the Lucas Problem.

Keywords: Principle of Inclusion and Exclusion. Slogans Kaplansky. Lucas problem.

Sumário

Introdução

A Análise Combinatória é uma ferramenta importante utilizada em várias áreas como Biologia Molecular, Programação de Computadores, Economia, Estatística, Álgebra, Topologia, Probabilidade e etc. Porém, nota-se que alunos e boa parte dos professores apresentam dificuldades em lidar com situações que envolvem conhecimentos combinatórios.

Vazquez e Noguti (2004) afirmam que a Análise Combinatória é um conteúdo matemático que apresenta grande dificuldade em relação à formulação e, principalmente, interpretação dos seus enunciados. É um ramo da Matemática em que se permite que escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto sem que haja necessidade de enumerá-los. Além disso, os problemas que envolvem a Análise Combinatória constituem um desafio para os alunos, pois exigem flexibilidade de pensamento: é necessário concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los.

Concordamos com as autoras, e acreditamos que um dos fatores que influenciam na dificuldade dos alunos nessa matéria está relacionado à forma com que ela é ensinada. O ensino desta matéria se dá na maioria das vezes de forma mecânica e com uso abusivo de fórmulas, sem proporcionar ao aluno o raciocínio necessário para aplicar em problemas variados. Acreditamos que o aluno deve participar do desenvolvimento das fórmulas, vendo-as como facilitadoras para a resolução de problemas, e entendendo que os problemas podem e devem, em alguns casos, ser resolvidos sem o uso das mesmas.

Devemos alfabetizar os nossos alunos em combinatória, ou seja, precisamos despertar o pensamento combinatório, e para isso é de extrema importância que inicialmente o aluno seja levado a resolver os problemas de contagem através de desenhos ou listando todos os casos e contando-os para que posteriormente consiga resolver problemas mais complexos onde ele criará uma estratégia para contar os casos sem que haja necessidade de enumerá-los. Nesse contexto, é de suma importância que o professor incentive os alunos a expor suas estratégias de resolução, valorizando o pensamento do aluno, promovendo assim a construção do conhecimento.

Visando contribuir de certa forma para o ensino da Análise Combinatória no ensino médio, iremos abordar através de uma linguagem simples e elementar, algumas técnicas de contagem, tais como: o Princípio de Inclusão e Exclusão, Permutações Caóticas, Combinações Completas e os Lemas de Kaplansky, que são ferramentas de extrema utilidade na hora de resolver problemas de combinatória, sobretudo aqueles que costumam ser cobrados em processos seletivos para universidades, IME, ITA e etc. Iniciaremos a elucidação de cada umas dessas técnicas resolvendo problemas mais simples que nos servirão como facilitadores para que o leitor se familiarize com o pensamento combinatório envolvido.

Também versaremos sobre um problema desafiador conhecido como o Problema de Lucas, ou Ménege Problem, cujo enunciado é o seguinte:

> De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Este problema foi formulado em 1891 pelo matemático François Édouard Lucas e apesar do enunciado simples, apresentou certa resistência para ser resolvido levando mais de meio século para tal. Apresentaremos duas soluções para este problema: uma baseada na solução dada pelo matemático Irving Kaplansky em 1943 e outra baseada na solução dada pelos matemáticos Bogart e Doyle publicada em 1986 num artigo com o título ***Non-sexist solution of the ménage problem***, onde os autores afirmam que a tradição de sentar as senhoras primeiro fizeram o problema de Lucas ficar mais difícil e que esse teria sido o motivo deste problema permanecer tantos anos sem que um matemático conseguisse solucioná-lo.

> *De todas as formas em que o sexismo impediu o avanço da matemática, essa pode muito bem ter sido a mais peculiar (BOGART e DOYLE, 1986).*

Estudando a história da matemática podemos notar que vários assuntos dessa disciplina se desenvolveram por meio de problemas. Matemáticos como: Galileu, Arquimedes, Pascal, Fermat, Euler, entre outros, viram nos problemas uma maneira de desenvolver o raciocínio e suas habilidades. Segundo Lima (1991), em seu livro *Meu professor de Matemática e Outras Histórias*, antigamente os matemáticos frequentemente participavam de disputas matemáticas, nesses duelos intelectuais presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por numerosa audiência eles se desafiavam. Além disso, a importância da utilização de problemas no processo de aprendizagem da matemática pode também ser verificada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, os quais definem o papel da matemática no ensino escolar, como disciplina que

> *contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000)*

Os problemas que envolvem Combinatória sempre me encantaram por serem desafiadores nos exigindo criatividade para sairmos da nossa zona de conforto e aprendermos a “pensar fora da caixinha”. A motivação para a escolha desse tema se deve a esse fascínio que tenho pela combinatória e a escassez de livros e trabalhos nacionais que versem sobre essas técnicas, principalmente sobre os Lemas de Kaplansky e o Problema de Lucas. Em vista disso, o objetivo deste trabalho é desenvolver material didático para o aprofundamento de técnicas de contagem, servindo como fonte de consulta direcionado para professores, alunos e admiradores da Análise Combinatória, que desejam saber um pouco mais dessa matéria desafiadora e inebriante e que gostem de apreciar um bom problema.

Este trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos: no primeiro apresentaremos e demonstraremos o Princípio de Inclusão e Exclusão e as Permutações Caóticas, que serão vistas como uma aplicação do Princípio de Inclusão e Exclusão. O primeiro capítulo consta ainda do estudo sobre as Combinações Completas.

No segundo capítulo trataremos dos Lemas de Kaplansky e suas aplicações. Nesse capítulo apresentaremos, generalizaremos e demonstraremos os Lemas de Kaplansky.

No terceiro capítulo apresentaremos o Problema de Lucas com duas soluções diferentes: uma baseada na solução dada por Kaplansky e outra baseada na solução dada por Bogart e Doyle.

Finalmente, no capítulo quatro apresentaremos e resolveremos outros problemas interessantes parecidos com o Problema de Lucas, porém com níveis de dificuldade variados direcionados para alunos do ensino médio de forma a ambientá-los com as técnicas de contagem e despertar o pensamento combinatório fazendo com que os alunos criem estratégias de resolução. Também veremos que um problema pode ser resolvido de várias formas diferentes e que questões com enunciados semelhantes podem necessitar de técnicas díspares para que consigamos solucioná-las.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O Princípio de Inclusão e Exclusão

Segundo Morgado (2006), o Princípio de Inclusão e Exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos.

Inicialmente, vamos considerar as situações onde teremos dois, três e quatro conjuntos finitos. Em seguida vamos generalizar essa situação para os casos em que teremos n conjuntos. A partir daqui, iremos representar a cardinalidade de um conjunto finito A por $|A|$.

1.1.1 Cardinalidade da união de dois, três e quatro conjuntos

Cardinalidade da união de dois conjuntos

Dado um conjunto S, sejam A e B dois subconjuntos. Se A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$, então $|A \cup B| = |A| + |B|$. O mesmo não se verifica quando $A \cap B \neq \emptyset$. De fato, quando $A \cap B \neq \emptyset$ os elementos que são comuns aos dois conjuntos são contados duas vezes. Assim, dados A e B, subconjuntos de S, o número de elementos de $A \cup B$ é dado por:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

***Uma Justificativa*:**

$|A \cup B|$ é o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Para contar os elementos de $A \cup B$ contamos todos os elementos de $A = |A|$ e todos de $B = |B|$. Ao fazermos isso, os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes, uma em $|A|$ e outra em $|B|$, portanto devemos descontar a segunda contagem e obtemos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

***Outra Justificativa*:**

Suponhamos que o número de elementos comuns a A e B seja y e que além disso haja x elementos que pertençam a A e não a B e z elementos que pertençam a B mas não a A. Vejamos a Figura 1.1 abaixo.

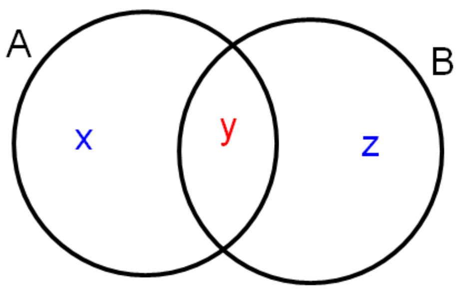


Figura 1.1: União de dois conjuntos

Assim, $|A \cup B| = x+y+z$. Por outro lado, $|A|+|B|-|A \cap B| = (x+y)+(y+z)-y = x+y+z$.

Portanto, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Exemplo 1.1.1. *Numa pesquisa com alunos de uma escola, foram feitas as seguintes perguntas para que respondessem sim ou não: Gosta de matemática? Gosta de português?*

Sabendo que 652 alunos responderam sim a primeira pergunta, 434 responderam sim a segunda pergunta e 267 sim a ambas e supondo que todos eles tenham respondido sim a pelo menos uma das opções, responda: quantos alunos foram entrevistados?

Solução: Seja

- $A = \{$alunos que gostam de matemática$\}$. Sua cardinalidade será dada por: $|A| = 652$

- $B = \{$alunos que gostam de português$\}$. Sua cardinalidade será dada por: $|B| = 434$

- $|A \cap B| = \{$alunos que gostam de ambas as matérias$\}$. Sua cardinalidade será dada por: $|A \cap B| = 267$

Estamos interessados em saber $|A \cup B|$. Se somarmos $|A| + |B|$ teremos contado duas vezes o número de alunos que se encontram na interseção de A e B. Portanto, para descobrir o número de alunos entrevistados devemos retirar o número de alunos que foi contado duas vezes, ou seja,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 652 + 434 - 267 = 819.$$

Cardinalidade da união de três conjuntos

Sejam os conjuntos A, B e C, subconjuntos de um conjunto S. A cardinalidade da união de três conjuntos é dada por:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (1.1)$$

Vejamos um exemplo, onde inicialmente utilizaremos diagramas de Venn em sua resolução e posteriormente usaremos a solução final obtida para ilustrar e facilitar o entendimento da construção da identidade 1.1 apresentada acima.

Exemplo 1.1.2. *(Prova da Escola Naval 2009) Os 36 melhores alunos do Colégio Naval submeteram-se a uma prova de 3 questões para estabelecer a antiguidade militar. Sabendo que dentre esses alunos, 5 só acertaram a primeira questão, 6 só acertaram a segunda, 7 só acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda, 10 acertaram a primeira e a terceira, 7 acertaram a segunda e a terceira e 4 erraram todas as questões, podemos afirmar que o número de alunos que não acertaram todas as 3 questões é:*

Solução:

Tome X como o número de alunos que acertaram as 3 questões, assim 36 - X será o número de alunos que não acertaram as 3 questões, que é a resposta que desejamos saber. Seja,

- A = conjunto dos alunos que acertaram a primeira questão;

- B = conjunto dos alunos que acertaram a segunda questão;

- C = conjunto dos alunos que acertaram a terceira questão;
- D = conjunto dos alunos que não acertaram nenhuma questão;
- U = conjunto universo.

O enunciado diz que 9 alunos acertaram a primeira e a segunda questões. Como este número 9 é a interseção entre os conjuntos A e B, temos que diminuir de 9 este valor X, pois aí teremos o número de alunos que acertaram somente a 1ª e a 2ª questões, ou seja, teremos $(A \cap B) \cap C^c = 9 - X$. Seguindo esta ideia, podemos tomar os seguintes conjuntos:

A´= candidatos que acertaram somente a primeira questão: 5

B´= candidatos que acertaram somente a segunda questão: 6

C´= candidatos que acertaram somente a terceira questão: 7

$A \cap B \cap C$ = candidatos que acertaram todas as questões: X

$(A \cap B) \cap C^c$ = candidatos que acertaram somente a primeira e a segunda questão: 9-X

$(A \cap C) \cap B^c$ = candidatos que acertaram somente a primeira e a terceira questão: 10-X

$(B \cap C) \cap A^c$ = candidatos que acertaram somente a segunda e a terceira questão: 7-X

D = candidatos que não acertaram nenhuma questão: 4

Perceba que os conjuntos A´, B´, C´, D, $A \cap B \cap C$, $(A \cap B) \cap C^c$, $(A \cap C) \cap B^c$ e $(B \cap C) \cap A^c$ são disjuntos e sua união gera o universo dos 36 alunos que se submeteram a prova, veja a Figura 1.2 abaixo.

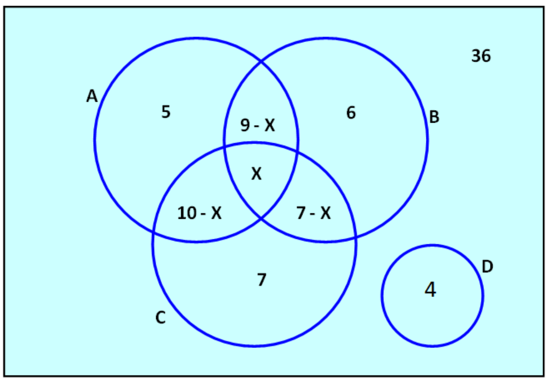


Figura 1.2: Resolução do problema da Escola naval 2009.

Assim, $5 + 6 + 7 + x + 9 - x + 10 - x + 7 - x + 4 = 36 \Rightarrow x = 6$. E portanto, 30 alunos não acertaram as três questões.

Na Figura 1.3 abaixo, inserimos no diagrama os valores obtidos substituindo $x = 6$.

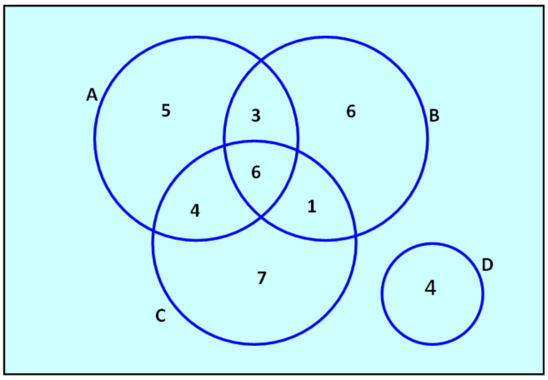


Figura 1.3: Valores obtidos com a resolução do problema da Escola naval 2009.

Agora que já sabemos todos os valores, se quiséssemos obter $|A \cup B \cup C|$ utilizando a fórmula 1.1 do Princípio de Inclusão e Exclusão deveríamos somar os os elementos dos conjuntos A, B e C ($|A| = 5{+}4{+}6{+}3 = 18$, $|B| = 6{+}3{+}6{+}1 = 16$ e $|C| = 7{+}4{+}6{+}1 = 18$) e depois retirar os valores que contamos duas vezes, note que contamos o valor 4 e o valor 6 duas vezes, uma no conjunto A e outra no conjunto C, ou seja, devemos retirar esses valores que na verdade representam o conjunto $|A \cap C| = 4 + 6 = 10$, o mesmo acontecerá com os valores 3 e 6 que também contamos duas vezes, uma no conjunto A e outra no conjunto B que são representados por $|A \cap B| = 3 + 6 = 9$, igualmente com os valores 6 e 1 que são representados por $|B \cap C| = 6 + 1 = 7$ que também foram contados duas vezes, uma no conjunto B e outra no conjunto C. Note que ao retirar esses valores, estaremos retirando o valor 6 três vezes o que fará com que esse valor não apareça nos nossos cálculos, já que somamos três vezes inicialmente na soma dos conjuntos A, B e C e retiramos três vezes posteriormente com as interseções desses conjuntos. Assim, devemos incluí-lo uma vez na contagem, ou seja, devemos somar $|A \cap B \cap C| = 6$. Assim,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 18 + 16 + 18 - 9 - 10 - 7 + 6 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Agora que você já entendeu a construção da fórmula, vejamos duas justificativas.

***Primeira justificativa*:**

A cardinalidade da união de três conjuntos, $|A \cup B \cup C|$, é dada pelo número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A, B e C. Para contar os elementos de $A \cup B \cup C$, contamos os elementos de A, de B e de C. Mas então os elementos de $A \cup B$ foram contados duas vezes ,uma em $|A|$ e outra em $|B|$, o mesmo ocorrendo com os elementos de $A \cup C$ e $B \cup C$. Portanto, devemos descontar uma vez $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$. Já os elementos de $A \cap B \cap C$ foram contados três vezes, pois foram contados em $|A|$, em $|B|$ e em $|C|$ e descontados três vezes em $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$. Como eles foram contados três vezes e descontados três vezes, significa que eles não estão sendo contados, então devemos incluí-los uma vez na contagem, assim

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

***Segunda justificativa*:** Pelo Teorema 1.1.1,

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\
&= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap C \cap B \cap C| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

Cardinalidade da união de quatro conjuntos

Sejam os conjuntos A, B, C e D, subconjuntos de um conjunto S. A cardinalidade da união de quatro conjuntos é:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| \\
&\quad - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
&\quad - |A \cap B \cap C \cap D|.
\end{aligned}$$

***Justificativa*:**

Por raciocínio análogo ao que utilizamos nas justificativas das cardinalidades da união de dois e de três conjuntos. Podemos dizer que o número de elementos da união de quatro conjuntos é obtida somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três e subtraindo os da interseção quatro a quatro.

1.1.2 Cardinalidade da união de n conjuntos

A partir dos casos anteriores podemos induzir a cardinalidade da união de n conjuntos. Nesta seção demonstraremos o caso geral do Princípio da Inclusão e Exclusão de duas formas.

Princípio da Inclusão e Exclusão

Dados n conjuntos finitos $A_1, A_2, ..., A_n$ pertencentes ao conjunto S. Qual o número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$?

Teorema 1.1.1. *(Princípio da Inclusão e Exclusão) Dados n conjuntos finitos $A_1, A_2, ..., A_n$ contidos em S. O número de elementos na união deles, denotado por $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n|$ é dado por:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n| = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Demonstração 1: Segundo Santos (2008), a demonstração é feita mostrando que um elemento k, que aparece em p dos n conjuntos $(1 \leq p \leq n)$, é contado pela fórmula anterior exatamente uma vez.

Assim, vemos que, realmente, se k aparece em p dos n conjuntos, então ele é contado:

- C_p^1 vezes em

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}|$$

- C_p^2 vezes em

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|,$$

pois k só aparece em $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ se está em A_{i_1} e em A_{i_2}. Como temos p conjuntos que possuem k, o número de formas de tomar dois deles com o elemento em jogo (observe que a ordem em que se toma os conjuntos não importa para a contagem) é C_p^2 ;

- C_p^3 vezes em

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

pois k só aparece em $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}$ se está em A_{i_1}, em A_{i_2} e em A_{i_3}.

Prosseguindo com o raciocínio, notaremos que k aparece $C_p^p = 1$ vez no somatório do número de elementos das interseções de p conjuntos. É claro que uma interseção com mais de p conjuntos não terá o elemento em questão, pois ele só aparece em p conjuntos. Logo, se certo elemento k aparece em p dos n conjuntos ($p = 1, 2, 3, ..., n$), então k é contado em $(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_n})$ exatamente:

$$(C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 - C_p^4 + ... + (-1)^{p-1} C_p^p) \text{ vezes.}$$

Finalmente, para mostrar que a expressão acima vale 1, basta fazer a expansão de $(1-1)^p$ pela fórmula binomial de Newton :

$$\begin{aligned} (1-1)^p &= 1^p \cdot (-1)^0 \cdot C_p^0 + 1^{p-1} \cdot (-1)^1 . C_p^1 + ... + 1^0 \cdot (-1)^p \cdot C_p^p \\ &= C_p^0 - C_p^1 + ... + (-1)^p . C_p^p \end{aligned}$$

Como $(1-1)^p = 0$ e $C_p^0 = 1$, chegamos em:

$$-1 = -C_p^1 + C_p^2 + ... + (-1)^p \cdot C_p^p$$

E, dividindo-se ambos os membros da igualdade por (-1), chegamos que

$$C_p^1 - C_p^2 + ... + (-1)^{p-1} . C_p^p = 1$$

o que conclui a demonstração, pois garante que cada elemento só aparece uma vez na contagem. ■

Demonstração 2: Nesta segunda demonstração faremos como Nunes (2015) e utilizaremos indução sobre n. Já provamos que para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ o Teorema 1.1.1 é verdadeiro. Assumindo que o Teorema 1.1.1 é verdadeiro para $n = r$, quaisquer que sejam os conjuntos $A_1, A_1, ..., A_r$. Vejamos o que ocorre no caso em que $n = r + 1$ onde consideraremos $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r)$ como um único conjunto.

Para $n = r + 1$ teremos:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r \cup A_{r+1}| &= |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r) \cup A_{r+1}| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r| + |A_{r+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r) \cap A_{r+1}|. \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução para os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_r$, tem-se:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r \cup A_{r+1}| &= \sum_{1 \leq i_1 \leq r} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| \\ &+ ... + (-1)^{r-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r| + |A_{r+1}| \\ &- |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r) \cap A_{r+1}|. \end{aligned}$$

Juntando os termos $\sum_{1 \leq i_1 \leq r} |A_{i_1}|$ e $|A_{r+1}|$ escritos em azul do lado direito da equação, podemos reescrevê-los como $\sum_{1 \leq i_1 \leq r+1} |A_{i_1}|$. Assim,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_r \cup A_{r+1}| &= \sum_{1 \leq i_1 \leq r+1} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + ... \\ &+ (-1)^{r-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \\ &- |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r) \cap A_{r+1}|. \end{aligned}$$

Por outro lado sabemos que:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_r) \cap A_{r+1}| = |(A_1 \cap A_{r+1}) \cup (A_2 \cap A_{r+1}) \cup ... \cup (A_r \cap A_{r+1})|.$$

Como $(A_1 \cap A_{r+1}) \cup (A_2 \cap A_{r+1}) \cup ... \cup (A_r \cap A_{r+1})$ representa a união de r conjuntos finitos, então aplicando novamente a hipótese de indução para estes conjuntos obteremos:

$$\begin{aligned}|(A_1 \cap A_{r+1}) \cup (A_2 \cap A_{r+1}) \cup ... \cup (A_r \cap A_{r+1})| &= \sum_{1 \leq i_1 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{r+1}| \\ &- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{r+1}| + ... \\ &+ (-1)^{r-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r \cap A_{r+1}|.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup ... \cup A_{r+1}| &= \sum_{1 \leq i_1 \leq r+1} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + ... + (-1)^{r-1} \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_r}| \\ &- \Bigg(\sum_{1 \leq i_1 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{r+1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{r+1}| + ... + \qquad (1.2) \\ &(-1)^{r-2} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_{r-1} \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_{r-1}} \cap A_{r+1}| + \\ &(-1)^{r-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r \cap A_{r+1}| \Bigg).\end{aligned}$$

Podemos unir alguns somatórios da equação acima. Como exemplo note que

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{r+1}| = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

Ou seja, veja que para $2 \leq k \leq r$ temos:

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{k-1} \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_{r+1}}| = \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|.\end{aligned}$$

Dessa forma, simplificando alguns somatórios podemos reescrever a equação (1.2) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_r \cup A_{r+1}| \quad = \quad & \sum_{1 \leq i_1 \leq r+1} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\
& + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - ... \\
& +(-1)^{r-2} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_r \leq r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_{r-1}} \cap A_{i_r}| \\
& +(-1)^r \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r \cap A_{r+1}|.
\end{aligned}
$$

Com isso encerramos a prova do Teorema 1.1.1.

■

Exemplo 1.1.3. *(IME/08) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.*

Solução: Inicialmente, temos 10! possibilidades de colocarmos esses 10 veículos na posição de largada sem nenhuma restrição. Dessas permutações devemos utilizar o Princípio de Inclusão e Exclusão para excluir as permutações em que alguma das equipes esteja lado a lado. Listemos alguns casos a serem analisados:

I- Permutações com ao menos 1 equipe lado a lado.

Temos C_5^1 formas de escolhermos essa equipe e devemos multiplicar esse valor por 5, pois temos 5 posições na coluna. Além disso, devemos permutar os carros de uma mesma equipe 2! modos e os demais 8 carros de 8! modos. Assim, temos $C_5^1 \cdot 5 \cdot 2! \cdot 8!$ formas distintas em que ao menos dois carros de uma mesma equipe estão lado a lado.

II- Permutações com ao menos 2 equipes lado a lado.

Temos C_5^2 formas de escolhermos as duas equipes e devemos multiplicar esse valor por $5 \cdot 4$, pois devemos escolher 2 das 5 posições na coluna. Além disso, devemos permutar os carros de uma mesma equipe de $(2!)^2$ modos e os demais 6 carros de 6! formas. Assim, temos $C_5^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2!^2 \cdot 6!$ formas distintas em que ao menos duas equipes estão lado a lado.

Seguindo essa linha de raciocínio, obteremos que o número de formações possíveis em que ao menos 3, 4 e 5 equipes estarão lado a lado será dada por $C_5^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!^3 \cdot 4!$, $C_5^4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2!^4 \cdot 2!$ e $C_5^5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2!^5$ respectivamente.

Utilizando o Princípio de Inclusão e Exclusão excluiremos do total de configurações possíveis sem nenhuma restrição aquelas em que algum dos cinco carros tenha ao seu lado um carro da mesma equipe. Assim, seja F o número de formações para a largada, então

$$\begin{aligned} F &= 10! - C_5^1 \cdot 5 \cdot 2! \cdot 8! + C_5^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2!^2 \cdot 6! - C_5^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!^3 \cdot 4! \\ &\quad + C_5^4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2!^4 \cdot 2! - C_5^5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2!^5 \\ &= 3.628.800 - 2.016.000 + 576.000 - 115.200 + 19.200 - 3.840 \\ &= 2.088.960 \end{aligned}$$

Portanto, teremos 2.088.960 possibilidades para formar a largada.

1.1.3 Uma Aplicação do Princípio de Inclusão e Exclusão

Permutações Caóticas

Uma permutação dos elementos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é dita caótica quando nenhum dos elementos ocupa o seu lugar primitivo.

Seja D_n o número de permutações caóticas, isto é, a quantidade de permutações dos n elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ nos quais nenhum deles ocupa sua posição original. Quando $n = 1$, temos somente um elemento. Logo não existe forma de "desarranjá-lo" , portanto, $D_1 = 0$. Quando $n = 2$, podemos "desarranjar" os elementos a_1 e a_2 apenas de uma forma: a_2a_1. Assim, $D_2 = 1$. Quando $n = 3$, podemos permutar os elementos a_1, a_2, a_3 de 6 maneiras: $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_3a_1a_2$, $a_3a_2a_1$, onde $a_2a_3a_1$ e $a_3a_1a_2$ são os únicos "desarranjo". Portanto, $D_3 = 2$. Continuando a análise de casos particulares, verifica-se que $D_4 = 9$ e $D_5 = 44$, mas, a partir daí, as alternativas tornam-se muito numerosas de tal modo que é preciso deduzir matematicamente a lei de formação de D_n. Antes de deduzirmos essa lei de formação de D_n, apresentaremos um exemplo no qual o Princípio de Inclusão e Exclusão, visto no seção 1.1.2 deste trabalho, será extremamente útil.

Exemplo 1.1.4. *Qual é o número de anagramas da palavra ALUNO em que nenhuma das letras está em sua posição original. Em síntese, iremos calcular* D_5.

Solução: Chamemos o número total de anagramas da palavra ALUNO de $S = 5! = 120$. Seja,

- A_1 = anagramas da palavra ALUNO com a letra "A" na primeira posição;
- A_2 = anagramas da palavra ALUNO com a letra "L" na segunda posição;
- A_3= anagramas da palavra ALUNO com a letra "U" na terceira posição;
- A_4= anagramas da palavra ALUNO com a letra "N" na quarta posição;
- A_5= anagramas da palavra ALUNO com a letra "O" na quinta posição.

O número de anagrama nos cinco conjuntos acima listados onde fixamos uma letra e permutamos as outras é dado por $|A_i| = 4! = 24$, onde $1 \leq i \leq 5, i \in \mathbb{N}$.

Ao analisarmos as duplas interseções possíveis $(A_{i_1} \cap A_{i_2})$, onde $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$, temos que estes conjuntos consistem de anagramas obtidos fixando-se duas letras da palavra em questão e deixando as outras três permutarem livremente nas posições restantes. Logo: $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = 3!$ e o número de duplas interseções possíveis é: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!}$

Ao analisarmos as triplas interseções possíveis $(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$, onde $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5$, temos que estes conjuntos consistem de anagramas obtidos fixando-se três letras da palavra em questão e deixando as outras duas permutarem livremente nas posições restantes. Logo: $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = 2!$ e o número de triplas interseções possíveis é: $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!}$

Ao analisarmos as quádruplas interseções possíveis $(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4})$, onde $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5$, temos que estes conjuntos consistem de anagramas obtidos fixando-se quatro letras da palavra em questão e deixando uma opção para o preenchimento da posição restante. Logo: $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| = 1!$ e o número de quádruplas interseções possíveis é: $C_5^4 = \dfrac{5!}{4!1!}$

A quíntupla interseção possível $(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})$ consiste de um único anagrama. Ele é obtido fixando-se todas as cinco letras da palavra nas posições originais. Logo: $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5}| = 0! = 1$. Além disso, o número de quíntuplas interseções possíveis é: $C_5^5 = \dfrac{5!}{5!0!} = 1$.

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| &= C_5^1 \cdot 4! - C_5^2 \cdot 3! + C_5^3 \cdot 2! - C_5^4 \cdot 1! + C_5^5 \cdot 0! \\
&= \frac{5!}{1!4!} \cdot 4! - \frac{5!}{2!3!} \cdot 3! + \frac{5!}{3!2!} \cdot 2! - \frac{5!}{4!1!} \cdot 1! + \frac{5!}{5!0!} \cdot 0! \\
&= 5! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right)
\end{aligned}$$

Logo, o número de anagramas pedido será:

$$\begin{aligned}
D_5 &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| \\
&= 5! - 5! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right) \\
&= 5! \left(1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right) \\
&= 5! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) \\
&= 5! \sum_{i=0}^{5} \frac{(-1)^i}{i!} = 120 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right) = 44
\end{aligned}$$

Então, temos 44 anagramas da palavra ALUNO em que nenhuma das letras está na posição original. O Teorema a seguir generaliza o resultado.

Teorema 1.1.2. *Seja n um número inteiro. A quantidade de desarranjos de n elementos distintos é dada por*

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

ou seja, $D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Demonstração:

Seja D_n o conjunto das permutações em que nenhum elemento ocupa a sua posição original, denotaremos por A_i o conjunto das permutações de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ que tem a_i na i-ésima posição $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Assim

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n|$$

Aplicando o Princípio de Inclusão e Exclusão (Teorema 1.1.1), obtemos

$$\begin{aligned} D_n &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n| \\ &= n! - \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + ... + (-1)^n \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n}|. \end{aligned}$$

Contaremos cada conjunto A_i com $1 \leq i \leq n$. Vale lembrar que A_i representa o conjunto das permutações dos n objetos em que o i-ésimo permanece na posição original e os outros elementos permutam entre si. Logo, temos que

- $|A_1| = (n-1)!$ e como temos n, é o número total de termos no primeiro somatório, então

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| = n(n-1)! = n!$$

- $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (n-2)!$ e como temos $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$, então esse é o número total de termos no segundo somatório e

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (n-2)! \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!}$$

- $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = (n-3)!$ e como temos $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$, então esse é o número total de termos no terceiro somatório e

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = (n-3)! \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{3!}$$

- $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} A_{i_n}| = (n-4)!$ e como temos $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!}$, então esse é o número total de termos no quarto somatório e

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| = (n-4)! \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{4!}$$

Prosseguindo o raciocínio, chegaremos até as interseções de n conjuntos, que sabemos ser única, pois $C_n^n = 1$, então o número de termos no último somatório é igual a 1.

Assim,

$$\begin{aligned}
D_n &= n! - \sum_{1\leq i_1\leq n} |A_{i_1}| + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| - \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \\
&\sum_{1\leq i_1<i_2<i_3<i_4\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4}| + ... + (-1)^n \cdot |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap ... \cap A_{i_n}| \\
&= n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + ... + (-1)^n \cdot 1\right) \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.1.5. *Nove casais que fazem aula de dança resolvem participar do concurso promovido pela professora. A professora resolve dar 2,0 pontos extra para o casal que não for composto de marido e mulher, porém das 9 esposas concorrente, 5 se recusam a dançar com outro homem que não seja o seu marido. Dessa forma, de quantas maneiras a professora poderá organizar o concurso composto por estes nove casais?*

Solução: Os cinco casais formados por marido e mulher ficarão fixos, logo só precisamos determinar utilizando a fórmula da permutação caótica demonstrada no Teorema 1.1.2 o valor de D_4, pois neste caso estamos determinando os casos em que a esposa não ficará com o seu respectivo marido. Assim,

$$\begin{aligned}
D_n &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\
&= 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\
&= 4!\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Portanto existem 9 modos distintos da professora organizar este concurso.

Exemplo 1.1.6. *Considere que haja cinco cartas, digamos a, b, c, d, e f, endereçadas a cinco pessoas distintas. Quantas são as formas de realizar a entrega dessas correspondências de modo que nenhuma das cinco cartas seja entregue ao destinatário correto?*

Solução: Novamente utilizando o Teorema 1.1.2 necessitamos calcular o valor de D_5. Desse modo, a resposta do problema proposto será:

$$\begin{aligned}
D_n &= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{(-1)^n}{n!}\right)\\
&= 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)\\
&= 5!\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)\\
&= 44.
\end{aligned}$$

O exemplo acima foi motivado por um problema proposto por Nicolaus Bernoulli (1687 – 1759), e posteriormente resolvido por Leonard Euler (1707-1783). Tal problema ficou conhecido como *Problema Das Cartas Mal Endereçadas* onde se perguntava de quantas formas podemos distribuir n cartas destinadas a n destinatários distintos de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto.

1.2 Combinações Completas

Dado um conjunto A, com n elementos, chamamos de **combinação completa** ou **combinação com repetição** dos n elementos, tomados p a p, cada um dos grupos que podem ser formados, contendo p elementos de A, com ou sem repetição. Vejamos um exemplo em que utilizaremos esse conceito

Exemplo 1.2.1. *Ana foi a uma loja de roupas com sua mãe para escolher o seu presente de aniversário. A atendente lhe mostrou 5 modelos de blusas e Ana gostou dos 5 modelos, mas a mãe de Ana disse que só poderia comprar 3 unidades independente do modelo. De quantos modos Ana pode escolher 3 peças dos 5 modelos de blusas?*

Solução: Perceba que agora não podemos utilizar apenas uma combinação simples, de 5 elementos tomados 3 a 3, pois neste caso ela poderia escolher mais de uma blusa do mesmo modelo.

Representando os modelos de blusas por $b_1; b_2; b_3; b_4$ e b_5, podemos encarar a solução do problema das combinações completas da escolha de 3 modelos de blusas, distintas ou não, dentre 5 modelos como sendo as soluções inteiras e não negativas da equação:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 3 \tag{1.3}$$

Cuja solução (1, 0, 0, 2, 0) significaria que desses 5 modelos de blusa que a loja possui Ana escolheria 1 blusa do modelo b_1 e 2 blusas do modelo b_4. Vamos representar as soluções para a Equação (1.3) por intermédio dos símbolos (+) e (|), onde (+) será utilizado para separar os valores das variáveis e (|) representará as quantidades assumidas pelas variáveis, assim

$(1, 0, 0, 2, 0) \Rightarrow | + + + | \, | +$

$(0, 0, 0, 2, 1) \Rightarrow + + + | \, | + |$

$(0, 0, 3, 0, 0) \Rightarrow + + | \, | \, | + +$

Note que temos 4 símbolos de (+) que servirão para separar os 5 modelos de blusas e 3 (|) que representam a quantidade de blusas que podemos comprar. Deste modo, temos uma sequência de 7 símbolos que está caracterizada pelas posições ocupadas pelas (|). Logo, devemos permutar esses 7 símbolos, sendo que um deles aparece repetido 3 vezes e o outro 4 vezes. Para isso basta escolhermos 3 das 7 posições para o símbolo (|).

$$CR_5^3 = C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

Portanto, a Equação (1.3) tem 35 soluções nos inteiros não negativos.

Teorema 1.2.1. *A quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação* $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$*, onde* p *é um inteiro positivo é dada por*

$$CR_n^p = C_{n-1+p}^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \cdot p!} \tag{1.4}$$

Demonstração: De maneira análoga ao que fizemos no exemplo acima, nesse caso teríamos p barrinhas (|) e $n - 1$ sinais (+). Logo, o total de soluções naturais dessa equação será dado pela combinação de $p + n - 1$ símbolos tomados p a p. Ou seja, o total de soluções será dada por 1.4

■

Exemplo 1.2.2. *Professora Aline fará um Quiz de Matemática com os seus alunos. Ela dividiu a turma em 8 grupos e fará 15 perguntas. Cada questão só será pontuada* *pelo grupo que primeiro levar a resposta correta até ela. Dessa forma, quantas soluções possíveis teremos em relação aos acertos obtidos por cada grupo?*

Solução: Nomeando os grupos como $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7$ e G_8. Observe que (1, 0, 0, 2, 8, 3, 1, 0) representa uma solução possível , onde nesse caso G_2, G_3 e G_8 não acertaram nenhuma questão, G_1 e G_7 acertaram uma questão, G_4 acertou duas questões, G_6 acertou três questões e G_5 acertou oito questões. Ou seja, podemos resolver este problema descobrindo o número de soluções que equação abaixo possui.

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7 + G_8 = 15$$

Utlizando símbolos representaríamos a solução (1, 0, 0, 2, 8, 3, 1, 0) dada acima como

$$| + + + | | | + | | | | | | | | | + | | | | + | | +$$

Assim, devemos calcular o número de combinações de 22 símbolos tomados 15 a 15, ou seja,

$$CR_8^{15} = C_{22}^{15} = \frac{22!}{7! \cdot 15!} = 170.544$$

Portanto, teremos 170.544 soluções possíveis para o placar final do quiz.

Exemplo 1.2.3. *Um elevador subindo com m pessoas tem de fazer n paradas, nesse caso não é permitido que pessoas entrem no elevador até que as m pessoas tenham saído. De quantas maneiras distintas o elevador pode ser esvaziado ao longo das n paradas?*

Solução: Como temos no total m pessoas e n paradas, podemos resolver este problema descobrindo o número de soluções inteiras e não negativas da seguinte equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m$$

Portanto, pelo que foi visto no Teorema 1.2.1, existem $\dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$ maneiras distintas do elevador ser esvaziado ao longo dessas n paradas.

Exemplo 1.2.4. *De 1 até 1.000.000 quantos números existem tais que a soma dos seus algarismos é igual a 6?*

Solução: Vamos considerar os números de 1 até 999.999, visto que o número 1.000.000 não possui soma dos seus algarismos igual a 6. Podemos observar que qualquer número nesse intervalo pode ser representado como um número com 6 algarismos, já que 754 pode ser visto como 000754. Assim, para resolver este problema basta descobrirmos o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$.

Logo, pelo Teorema 1.2.1, existem $\dfrac{11!}{6! \cdot 5!} = 462$ números de 1 até 1.000.000 que possuem soma dos seus algarismos igual a 6.

Capítulo 2

Lemas de Kaplansky

Irving Kaplansky (1917-2006), matemático americano, publicou o artigo "Solution of the problème des ménages" em Bulletin of the American Mathematical Society em 1943, com uma solução para o famoso Problema de Lucas. Nesse artigo, ele desenvolveu o que se conhece hoje por lemas de Kaplansky para resolver o problema.

Kaplansky fez doutorado na Universidade de Harvard (1941), foi professor da Universidade de Chicago durante os anos de 1945 até 1984. Recebeu vários prêmios. Foi eleito para a Academia Americana de Arte e Ciências.

Seu trabalho na Matemática foi amplo, embora em sua maioria nas áreas de álgebra. Fez grandes contribuições na Teoria de Anéis, Teoria dos Grupos e Teoria dos Corpos. Publicou mais de 150 artigos e trabalhou com mais de vinte coautores.

Figura 2.1: Matemático Irving Kaplansky. Fonte: < http://www-news.uchicago.edu>. Acesso em: 18 de janeiro de 2017.

2.1 1º e 2º Lemas de Kaplansky

Iniciaremos esta seção com um exemplo onde poderemos compreender a utilidade dos Lemas criados por Kaplansky.

Exemplo 2.1.1. *De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que não haja números consecutivos?*

Para resolver este problema formaremos subconjuntos onde marcaremos com o sinal (+) os elementos que farão parte dele e com o sinal (-) os elementos que não farão parte do subconjunto. Logo,

$\{1, 3, 5, 9\}$ pode ser representado por $+-+-+---+$
$\{2, 4, 6, 8\}$ pode ser representado por $-+-+-+-+-$
$\{2, 5, 7, 8\}$ pode ser representado por $-+--+-++-$ (observe que neste caso não é válido, pois 2 sinais (+) juntos significa que teremos números consecutivos)

De fato, entendendo o problema podemos notar que para resolve-lo basta calcularmos o número de maneiras distintas de permutar 9 símbolos, sendo 5 sinais (−) e 4 sinais (+) de modo que não tenhamos 2 sinais (+) juntos.

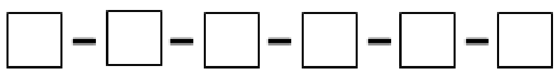


Figura 2.2: Temos seis espaços para colocar quatro sinais (+)

Observe na figura acima que podemos colocar 4 sinais (+) em 6 possíveis lugares, ou seja, devemos escolher 4 dos 6 lugares vagos (representado pelos quadradinhos) para colocarmos os sinais (+) o que pode ser feito de $C_6^4 = 15$ modos distintos.

Portanto, podemos formar 15 subconjuntos que listaremos a título de curiosidade na tabela a seguir.

{1,3,5,7}	{1,3,5,9}	{1,3,5,8}
{1,3,6,8}	{1,3,6,9}	{1,3,7,9}
{1,4,6,8}	{1,4,6,9}	{1,4,7,9}
{1,5,7,9}	{2,4,6,8}	{2,4,6,9}
{2,5,7,9}	{2,4,7,9}	{3,5,7,9}

Tabela 2.1: Subconjuntos com 4 elementos do conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} de modo que não haja entre seus elementos números consecutivos.

Primeiro Lema de Kaplansky

De quantos modos podemos formar um subconjunto com p elementos do conjunto {1,2,3,.., n} de modo que não haja números consecutivos?

Teorema 2.1.1. *(Primeiro Lema de Kaplansky) O número de p-subconjuntos de* $\{1, 2, 3, ..., n\}$ *nos quais não há números consecutivos é*

$$f(n, p) = C^p_{n-p+1}.$$

Demonstração:

Queremos formar subconjuntos de p elementos não consecutivos. De maneira análoga ao exemplo anterior, representando os elementos desse subconjunto com o sinal (+). Desta forma teremos $(n - p)$ elementos que representaremos com o símbolo (-), que representam os números que não estarão no subconjunto. Entre os sinais (-) vão existir $(n - p + 1)$ espaços vazios disponíveis. Desta forma basta escolher entre os $(n - p + 1)$ espaços vazios aqueles que serão ocupados pelos sinais (+).

Logo,

$$f(n, p) = C^p_{n-p+1}.$$

■

Os Lemas de Kaplansky são ferramentas de extrema utilidade na hora de resolver problemas difíceis de combinatória, sobretudo aqueles que costumam ser cobrados em processos seletivos para universidades, IME, ITA e etc. Problemas que teriam soluções trabalhosas se tornam super simples com o uso dos lemas. Vejamos como exemplo uma questão do IME.

Exemplo 2.1.2. *(IME/1985) Um exame de vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de matemática. Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas de modo que as provas da área de Matemática não se sucedam.*

Solução: Devemos escolher 3 lugares entre os 10 da sequência das provas de forma que não haja lugares consecutivos. Assim, utilizando o Primeiro Lema de Kaplansky, temos que tal escolha pode ser feita de $f(10,3) = C_8^3 = 56$.

Agora, levando em consideração que as provas são distintas, temos 3! formas de acomodar as provas de matemática e 7! maneiras de acomodar as outras provas.

Portanto, a sequência dessas 10 provas poderá ser programada de $C_8^3 \cdot 3! \cdot 7! = 56 \cdot 6 \cdot 5.040 = 1.693.440$ formas.

Exemplo 2.1.3. *Vanessa tirará 10 dias de férias do dia 17/07/17 ao dia 26/07/17. Ela deseja caminhar em 4 dias, porém por conta de recomendações médicas ela terá que ter pelo menos 1 dia de descanso entre as caminhadas. De quantos modos é possível escolher os dias que ela caminhará?*

Solução: Podemos observar que uma das opções de dias possíveis é 18, 20, 23 e 26. Que no nosso caso pode ser representado por - + - + - - + - - +, ou seja, em seis desses dias ela não poderá caminhar e portanto, teremos 7 espaços vazios entre os sinais de menos para escolher 4 desses espaços.

$$f(n,p) = C_{n-p+1}^{p} = C_7^4 = 35.$$

Dessa forma, Vanessa terá 35 modos para escolher os dias em que caminhará nas férias.

Exemplo 2.1.4. *Daniel deseja caminhar três vezes por semana durante este bimestre. Quantos são os modos de escolher os dias de caminhada, se Daniel não deseja caminhar em dias consecutivos?*

Solução: Este problema tem uma sutileza em relação ao último. Neste caso temos um ciclo onde domingo e segunda são considerados dias consecutivos, como podemos ver na ilustração a seguir:

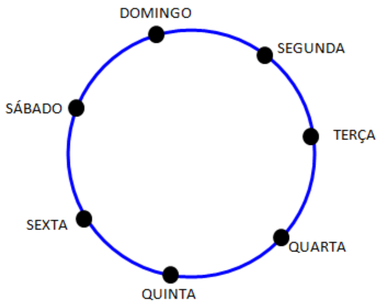


Figura 2.3: Dias da semana dispostos em um círculo.

Assim, Daniel deve escolher 3 dias entre: domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado, de modo que não haja dois dias consecutivos. Observe que domingo e sábado são dias consecutivos, então não podemos usar diretamente o primeiro lema de Kaplansky. Contudo, poderíamos dividir o problema em dois casos:

I - Daniel irá caminhar no domingo.

Neste caso, ele não poderá caminhar na segunda e no sábado. Dessa forma, bastaria escolher dois dias entre: terça, quarta, quinta e sexta; de tal forma que não haja dois dias consecutivos. Utilizando o Primeiro Lema de Kaplansky, vemos que tal escolha poderá ser feita através de uma $f(4,2) = C_3^2 = 3$ formas.

II- Daniel não caminhará no domingo.

Neste caso, temos que escolher três dias entre: Segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado; de modo que, não haja dias consecutivos. Assim, $f(6,3) = C_4^3 = 4$.

Conclui-se que há $3 + 4 = 7$ maneiras de fazer essa escolha.

A seguir, iremos deduzir uma fórmula para os casos similares ao exemplo acima.

Segundo Lema de Kaplansky

De quantos modos podemos formar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, .., n\}$ de modo que não haja números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos?

Teorema 2.1.2. *(Segundo Lema de Kaplansky) O número de p-subconjuntos de* $\{1, 2, 3, ..., n\}$ *nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos, é igual a*

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}.$$

Demonstração:

Usando o mesmo raciocínio utilizado no exemplo anterior, vamos dividir o problema em dois casos:

I - O elemento 1 figura no subconjunto com p elementos.

Neste caso, teremos que verificar de quantos modos podemos escolher os outros p – 1 elementos do conjunto $\{3, 4, 5, ..., n-1\}$ (pois, como o número 1 figura, o número 2 e o número n não podem figurar). Assim, o número de modos que isso pode ser feito utilizando o Primeiro Lema de kaplansky 2.1.1 é: $f(n-3, p-1) = C_{n-p-1}^{p-1}$.

II - O elemento 1 não figura no subconjunto com p elementos.

Neste caso, teremos que verificar de quantos modos podemos escolher os p elementos do conjunto $\{2, 3, 4, 5, ..., n\}$, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Assim, o número de modos que isso pode ser feito é: $f(n-1, p) = C_{n-p}^{p}$.

Portanto, de (I) e (II) segue que a solução do problema proposto é dada por:

$$
\begin{aligned}
g(n,p) &= f(n-3, p-1) + f(n-1, p) = C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^{p} \\
&= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{(n-p-1)! \cdot p + (n-p)!}{p!(n-2p)!} = \frac{(n-p-1)! \cdot [p + (n-p)]}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n \cdot (n-p-1)!}{p!(n-2p)!} = \frac{n}{n-p} \cdot \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Observe que na penúltima igualdade da Equação 2.1 foi utilizado o artifício de substituir $(n-p-1)!$ por $\dfrac{(n-p)!}{n-p}$, que são equivalentes, para obtermos uma forma simplificada. ∎

Exemplo 2.1.5. *(IME) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.*

Solução: Resolveremos este exemplo de duas formas: passo a passo e com a utilização direta da fórmula apresentada acima.

Imagine que os cavaleiros estão sentados em uma mesa redonda como se formassem um relógio, numerando-os de 1 a 12. Iremos separar o problema em dois casos:
I - Um cavaleiro específico participa.

Sem perda de generalidade, vamos supor o cavaleiro 12. Como o cavaleiro 12 participa, obrigatoriamente, o 11 e o 1 não podem participar do grupo que tem o cavaleiro 12, pois eles são vizinhos e, consequentemente, inimigos. Agora, temos que selecionar mais 4 cavaleiros dentre os 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 de modo que não tenhamos dois vizinhos. Teremos que escolher 4 (simbolizados por $+$) e restarão 5 (simbolizados por $-$). Por exemplo, o caso $+--+-+--+$ é válido e significa que foram escolhidos os cavaleiros 2, 5, 7 e 10. Já o caso $--+-+-++-$ não é válido, pois ele representa a escolha dos cavaleiros 4, 6, 8 e 9 (dois vizinhos: 8 e 9).

Portanto, teremos 6 espaços vazios entre os sinais de menos para escolher 4 destes espaços. Isso pode ser feito de $C_6^4 = 15$ formas diferentes.
II - O cavaleiro 12 não participa.

Como o cavaleiro 12 não participa, devemos escolher 5 cavaleiros dentre todos os outros 11 (1, 2, 3, ..., 10, 11). Teremos que escolher 5 (simbolizados por $+$) e restarão 6 (simbolizados por $-$). Por exemplo, o caso $+--+-+--+-+$ é válido e significa que foram escolhidos os cavaleiros 1, 4, 6, 9 e 11. Com isso, teremos 7 espaços vazios entre os sinais de menos para escolher 5 destes espaços, e isso pode ser feito de $C_7^5 = 21$ formas diferentes.

Logo, temos 15 + 21 = 36 formas distintas de escolher 5 dentre os 12 cavaleiros com as restrições impostas pelo problema.

Optamos por resolver passo a passo de modo a reforçar a ideia da demonstração do Segundo Lema de Kaplansky. No entanto, poderíamos ter obtido o resultado por uma aplicação direta do Lema 2.1.2, com $n = 12$ e $p = 5$.

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p} \Rightarrow g(12,5) = \frac{12}{7} \cdot C_7^5 = 36.$$

OBS.: É importante notar que, em problemas dessa natureza, os Lemas de Kaplansky são muito úteis para determinar as posições. Em seguida, deve-se observar a permutação das pessoas.

Exemplo 2.1.6. *Cinco pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?*

Solução: Utilizando o Segundo Lema de Kaplanky 2.1.2 em que $n = 12$ e $p = 5$ para escolher cinco cadeiras não consecutivas onde as cinco pessoas se sentaram, teremos

$$g(15, 5) = \frac{15}{10} \cdot C_{10}^{5} = \frac{3}{2} \cdot 252 = 378.$$

Uma vez escolhidas as cinco cadeiras a serem ocupadas devemos designá-las para cada pessoa, ou seja, temos 5! maneiras das cinco pessoas escolherem entre as cinco cadeiras escolhidas anteriormente.

Assim, a resposta deste problema será dada por:

$$g(15, 5) \cdot 5! = 378 \cdot 120 = 45.360 \text{ modos.}$$

2.2 Generalizações dos Lemas de Kaplansky

Nesta seção, apresentaremos duas generalizações dos Lemas de Kaplansky vistos anteriormente. Antes porém, vamos pensar em como poderíamos solucionar problemas como o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2.1. *De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com 4 elementos do conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 12\}$ *de modo que eles difiram de ao menos 3? Por exemplo, se o número 4 figurar no subconjunto além do 3 e o 5 não poderão figurar o 2 e o 6. Isto é, dado um elemento x, não podemos ter no mesmo conjunto os elementos x – 2, x – 1, x + 1 e x + 2.*

Solução: Novamente representando com o símbolo de (+) os elementos que pertencerão ao subconjunto e (-) os elementos que não pertencerão. Podemos observar que uma configuração mínima para este problema seria $+ - - + - - + - - +$. O fato de sempre termos entre dois sinas (+) dois sinais (−) nos garante que nunca poderemos escolher dois números cuja diferença entre eles seja menor que 3.

Neste conjunto A queremos escolher 4 elementos, teremos 4 sinais (+), e consequentemente, deixaremos de escolher 8 elementos, teremos 8 sinais (−). Mas, a configuração mínima usa 4 sinais (+) e 6 sinais (−), restando, portanto, 2 sinais (−) para colocarmos em 5 possíveis lugares (antes, entre ou depois dos sinais (+)). Assim, nosso problema fica resumido ao seguinte: Quantas soluções inteiras e não negativas a equação linear

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \tag{2.2}$$

possui?
Sabemos que a resposta para este problema é dada por CR_5^2 como visto no capítulo anterior.

Por exemplo, se escolhermos o subconjunto $\{2, 6, 9, 12\}$ significa que a solução da Equação 2.2 é (1, 1, 0, 0, 0) o que nos daria a configuração $- + - - - + - - + - - +$.

Logo, a solução para o problema proposto é $CR_5^2 = C_6^2 = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

Generalização do Primeiro Lema de Kaplansky

De quantos modos podemos formar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, .., n\}$ de modo que entre dois elementos escolhidos para o subconjunto haja pelo menos r elementos do conjuntos não escolhidos?

Teorema 2.2.1. *(Generalização do Primeiro Lema de Kaplansky) O número de p-subconjunto de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto é uma função de n, p e r dada por:*

$$f(n, p, r) = C^{p}_{n-(p-1)\cdot r}$$

Demonstração:

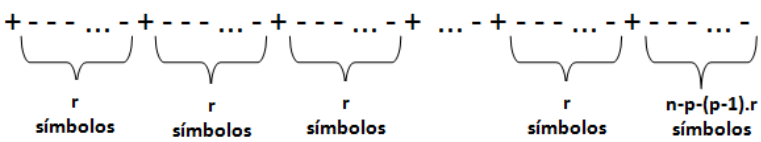
De maneira análoga ao exemplo anterior, representando os p elementos que pertencerão a este subconjunto com o sinal de (+). Desta forma teremos $(n - p)$ elementos que representaremos com o símbolo (-), que serão os elementos que não pertencerão ao subconjunto.

Podemos observar que uma configuração mínima em termo da quantidade de sinais (+) e (-) usados para representar uma solução para este problema seria formada da seguinte forma:

- Começamos inserindo o primeiro símbolo (+) na primeira posição.

- Em seguida, inserimos r símbolos (-) seguido de um novo símbolo (+) e continuamos dessa forma, intercalando um símbolo (+) com r símbolos (-), até que utilizemos p símbolos (+) e $(p - 1) \cdot r$ símbolos (-).

- Alocamos todos os $n - p - (p - 1) \cdot r$ símbolos (-) que restarem à direita do último símbolo (+). Conforme ilustração a seguir:



Logo, para obtermos todos os subconjuntos nas condições do enunciado, basta distribuir os $n - p - (p - 1) \cdot r$ símbolos (-) restantes nos $p + 1$ espaços (antes, entre ou depois dos p sinais $(+)$), ou seja, nosso problema se resume a encontrar o número de soluções inteiras e não negativas que a Equação 2.3 abaixo possui?

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{p+1} = n - p - (p-1) \cdot r \tag{2.3}$$

Por sua vez, de acordo com o Teorema 1.2.1, a equação acima possui $C^p_{n-(p-1)\cdot r}$ soluções inteiras não negativas.

Concluímos, portanto, que

$$f(n,p,r) = C^p_{n-(p-1)\cdot r}.$$

■

Podemos observar que para:

- $r = 0$, temos $f(n,p,0) = C^p_n$. Que corresponde ao número de combinações simples de n elementos tomados p a p.
- $r = 1$, temos $f(n,p,1) = C^p_{n-p+1}$. Que corresponde ao Primeiro Lema de Kaplansky 2.1.1.

Exemplo 2.2.2. *Um Aluno precisa realizar cinco provas referentes à recuperação final em 5 disciplinas. A escola deu o prazo do dia 05/01 até o dia 23/01 (incluindo sábados e domingos) para a realização de tais provas. Sabendo que o aluno pode escolher as datas que irá realizar cada prova e que ele deseja fazer uma prova por dia com um intervalo de três dias entre uma prova e outra, para poder estudar, responda: de quantas formas esse aluno pode escolher os dias para a realização das cinco provas?*

Solução: De acordo com o enunciado o aluno terá 19 dias para escolher 5, assim utilizando a Generalização do Primeiro Lema de Kaplansky, 2.2.1 onde $n = 19$, $p = 5$ e $r = 3$, teremos que o número de maneiras de escolher os cinco dias para a realização das provas será dado por

$$f(n,p,r) \quad = \quad C^p_{n-(p-1)\cdot r} = C^5_7 = 21.$$

Como são cinco disciplinas distintas, então ele terá $5! = 120$ maneiras de escolher a ordem das provas. Portanto, ele terá $21 \cdot 120 = 2520$ maneiras para escolher os dias das provas.

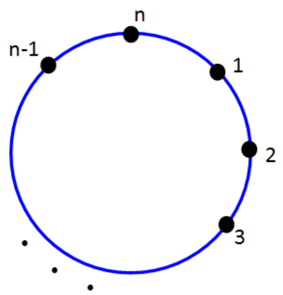
Generalização do Segundo Lema de Kaplansky

De quantos modos podemos formar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, .., n\}$ de modo que entre dois elementos escolhidos para o subconjunto haja pelo menos r elementos do conjuntos não escolhidos, onde 1 e n são adjacentes?

Teorema 2.2.2. *(Generalização do Segundo Lema de Kaplansky) O número de p-subconjunto de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ onde 1 e n são "adjacentes" e de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto é uma função de n, p e r dada por:*

$$g(n, p, r) = \frac{n}{n - pr} \cdot C^{p}_{n-pr}$$

Demonstração: Antes de iniciar a demonstração, convém observar que como os elementos 1 e n são adjacentes, então poderíamos interpretar intuitivamente a situação dada acima dispondo os elementos ao redor de um círculo. Observe a ilustração a seguir:



Assim seguiremos um raciocínio semelhante ao que utilizamos na demonstração do Teorema 2.2.1, porém neste caso dividiremos o problema em r casos disjuntos, pois devemos contar todas as permutações em que um elemento específico entre $1, 2, 3, ..., r$ pertence ao subconjunto, mais as configurações onde esses elementos não aparecem.

I - Os subconjuntos possuem o elemento 1.

Neste caso, não podemos escolher os elementos $\{n - r + 1,\ n - r + 2,\ ...,\ n - 1,\ n,\ 2,\ ..., r,\ r + 1\}$ do conjunto, restando $n - 2r - 1$ elementos dos quais teremos que escolher $p-1$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto. Assim, o número de modos que isso pode ser feito utilizando a Generalização do Primeiro Lema de Kaplansky 2.2.1 é igual a

$$f(n-2r-1, p-1, r) = C^{p-1}_{n-2r-1-(p-2)\cdot r}.$$

II - Os subconjuntos possuem o elemento 2.

Neste caso, não podemos escolher os elementos $\{n-r+2,\ n-r+3,\ ...,\ n,\ 1,\ ...,\ r,\ r+1,\ r+2\}$ do conjunto, restando $n-2r-1$ elementos dos quais teremos que escolher $p-1$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto. Assim, novamente o número de modos que isso pode ser feito é igual a

$$f(n-2r-1, p-1, r) = C^{p-1}_{n-2r-1-(p-2)\cdot r}.$$

Os casos em que os subconjuntos possuem os elementos $3, 4, ..., r$ são análogos ao que fizemos acima, por isso analisaremos agora o último caso.

Neste último caso os subconjuntos a serem escolhidos não possuem nenhum dos elementos do conjunto $1, 2, 3, ..., r$, dessa forma restam $n-r$ elementos, dos quais deveremos escolher p, de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto. Isto pode ser feito de

$$f(n-r, p, r) = C^{p}_{n-r-(p-1)\cdot r}.$$

Assim, o número de subconjuntos será dado pela soma de todos os casos analisados anteriormente, ou seja,

$$\begin{aligned}
g(n,p,r) &= r \cdot C^{p-1}_{n-2r-1-(p-2)\cdot r} + C^{p}_{n-r-(p-1)\cdot r} = r \cdot C^{p-1}_{n-pr-1} + C^{p}_{n-pr} \\
&= r \cdot \frac{p}{n-pr} \cdot \frac{n-pr}{p} \cdot \frac{(n-pr-1)!}{(n-pr-1-p)! \cdot (p-1)!} + \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)! \cdot p!} \\
&= \frac{rp}{n-pr} \cdot \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)! \cdot p!} + \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)! \cdot p!} \\
&= \left(\frac{rp}{n-pr} + 1\right) \cdot \left(\frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)! \cdot p!}\right) = \frac{n}{n-pr} \cdot \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)! \cdot p!} \\
&= \frac{n}{n-pr} \cdot C^{p}_{n-pr}
\end{aligned}$$

Podemos observar que para:

- $r = 0$, temos $g(n,p,0) = C^p_n$. Que corresponde ao número de combinações simples de n elementos tomados p a p.
- $r = 1$, temos $g(n,p,1) = \dfrac{n}{n-p} \cdot C^p_{n-p}$. Que corresponde ao Segundo Lema de Kaplansky 2.1.2.

$\blacksquare$

Exemplo 2.2.3. *Isabel recebeu uma proposta para trabalhar em uma multinacional no Japão. A empresa lhe prometeu duas férias por ano, sempre nos mesmos meses, com passagem paga pela empresa, para ela poder visitar seus familiares no Brasil. A única restrição que a empresa fez foi que houvesse um intervalo de pelo menos 3 meses entre as duas férias. Quantas são as formas de Isabel escolher os meses das suas férias?*

Solução: Como a escolha dos meses será mantida pelos anos seguintes, temos uma aplicação da Generalização do Segundo Lema de Kaplansky 2.2.2, onde $n = 12$, $p = 2$ e $r = 3$.

Dessa forma, a escolha dos meses poderá ser feita de

$$g(12,2,3) = \frac{12}{6} \cdot C^2_6 = 30 \text{ formas diferentes.}$$

Capítulo 3

O Problema de Lucas

Neste capítulo falaremos um pouco de quem foi o matemático que formulou o Problema de Ménege em 1891, mais conhecido como Problema de Lucas, enunciaremos o problema e posteriormente apresentaremos duas soluções: uma dada por Kaplansky (1943) e outra por Bogart e Doyle (1986).

Figura 3.1: Matemático Édouard Lucas. Fonte: <http://www.nautilus.com.br>. Acesso em: 18 de janeiro de 2017.

François Édouard Anatole Lucas, um dos maiores matemáticos da história, nasceu em 4 de abril de 1842 em Amiens, França, e morreu em 3 de outubro de 1891, em Paris. É conhecido pelos seus estudos na famosa fórmula matemática de Fibonacci, trabalho que lhe rendeu o descobrimento da sequência de Lucas. Foi um dos maiores estudiosos dos números primos. Foi o matemático que, manualmente, encontrou o maior número primo conhecido, a saber, $2^{127} - 1$. Hoje, com a ajuda dos super computadores, que usam recursos algorítmicos desenvolvidos com base nos próprios estudos de Fibonacci e Lucas, é possível encontrar números primos muito maiores do que o número de Lucas. Também inventou vários brinquedos. Os mais populares foram o Quebra-cabeças de Baguenaudier e a Torre de Hanói, que ele comercializou largamente na Europa.

A sua morte se deu por um fato inesperado. Em um banquete da Association française pour l'avancement des sciences, um garçom tropeçou e deixou cair a bandeja. Um prato se quebrou e um dos estilhaços do mesmo veio a ferir o queixo de Lucas. Poucos dias depois, Lucas faleceu de uma inflamação no ferimento. Provavelmente uma septicemia.

3.1 Solução para o Problema de Lucas utilizando a ideia de Kaplansky

Nesta seção resolveremos finalmente o Problema de Lucas. Começaremos resolvendo alguns casos particulares para depois enfim resolver o caso generalizado.

Problema de Lucas

De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Solução para $n = 1$: Como só temos um casal, é impossível colocá-los sem que o homem fique ao lado se sua mulher. Logo, a resposta neste caso é igual a zero.

Solução para $n = 2$: Neste caso teremos dois casais, e também será impossível colocá-los sem que o homem fique ao lado se sua mulher e pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas. Logo, a resposta neste caso também será igual a zero.

Solução para $n = 3$: Neste caso teremos três casais, vamos seguir alguns passos para resolver este problema:

1º passo: Numerar os lugares de 1 a 6, pois as cadeiras são distintas.

2º passo: Nomear as mulheres de M_1, M_2 e M_3 e os homens de H_1, H_2 e H_3.

3º passo: Acomodar as mulheres nos lugares pares ou ímpares (isso nos garantirá não haver pessoas do mesmo sexo juntas). Teremos duas possibilidades para fazer essa escolha.

4º passo: Uma vez determinado a posição para cada sexo devemos escolher os lugares para alocar as mulheres, isso será feito de 3! maneiras.
5º passo: Devemos alocar os homens tomando-se o cuidado para que nenhum homem fique ao lado de sua esposa. Iremos representar a quantidade de formas de isso ocorrer por U_3.

Assim, seja S_3 a quantidade de formas de dispor os três casais ao redor de uma mesa redonda respeitando as restrições do problema. Então, a solução para o Problema de Lucas para $n = 3$ será dada por

$$S_3 = 2 \cdot 3! \cdot U_3$$

Precisamos descobrir quanto vale U_3. Para isso, renumerando os espaços disponíveis aos homens por 1, 2 e 3 e definindo os conjuntos:

- A = conjuntos das permutações dos homens (livre de qualquer restrição).
- A_i = conjuntos das permutações dos homens em que o i-ésimo homem está à esquerda de sua esposa, onde $1 \leq i \leq 3$.
- A_i' = conjuntos das permutações dos homens em que o i-ésimo homem está à direita de sua esposa, onde $1 \leq i \leq 3$.

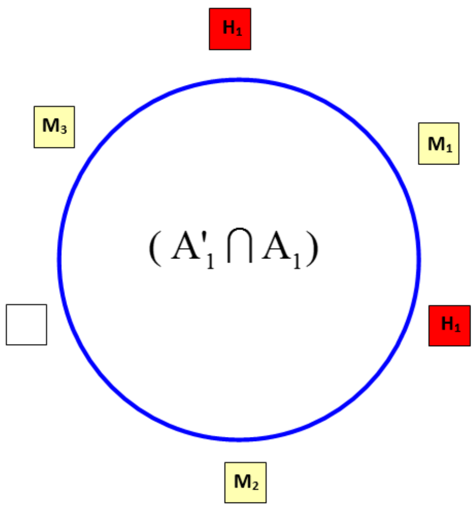
Como estamos interessados em determinar o valor de U_3, onde nenhum homem pode se sentar ao lado de sua esposa, então basta que utilizemos o Princípio de Inclusão e Exclusão 1.1.1 obtendo

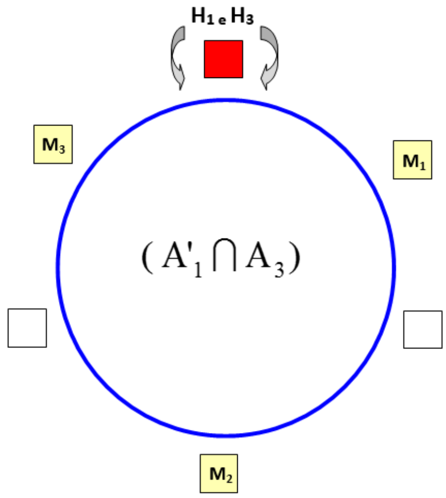
$$U_3 = |A| - |A_1' \cup A_1 \cup A_2' \cup A_2 \cup A_3' \cup A_3| \tag{3.1}$$

Vejamos as cardinalidade de cada termo da equação 3.1 acima:
I - $|A| = n! = 3! = 6$, pois representa as permutações dos três homens sem nenhuma restrição.

II - $|A_i| = |A_i'| = (n-1)! = 2!$, pois neste caso estamos deixando um dos homens fixos e permutando os outros. Assim, $|A_1| = |A_1'| = |A_2| = |A_2'| = |A_3| = |A_3'| = 2$

III - A interseção de dois conjuntos consecutivos escolhidos dentre $A_1', A_1, A_2', A_2, A_3', A_3$ considerando A_3 e A_1' consecutivos é sempre vazia, pois o mesmo homem não pode ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo ($|A_1' \cap A_1| = |A_2' \cap A_2| = |A_3' \cap A_3| = 0$) e dois homens diferentes não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, ($|A_1' \cap A_3| = |A_2' \cap A_1| = |A_3' \cap A_2| = 0$). Observe na ilustração abaixo.





IV - A cardinalidade das interseções de dois conjuntos escolhidos dentre $A_1', A_1, A_2', A_2, A_3', A_3$ onde nenhum dos conjuntos considerados na interseção são consecutivos será dada por $(3-2)! = 1$, pois neste caso teremos dois homens fixos. A quantidade de conjuntos pode ser calculada utilizando o Segundo Lema de Kaplansky, já que temos 6 elementos e queremos tomar subconjuntos com dois elementos não consecutivos (A_3 e A_1' são consecutivos). O que nos daria

$$g(6,2) = \frac{6}{6-2} \cdot C_{6-2}^{2} = 9.$$

Neste caso, como temos poucos termos podemos listá-los

$$|A_1' \cap A_2'| = |A_1' \cap A_2| = |A_1' \cap A_3'| = 1$$
$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3'| = |A_1 \cap A_3| = 1$$
$$|A_2' \cap A_3'| = |A_2' \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1.$$

Assim, a soma das cardinalidades das interseções de dois conjuntos será dada por:

$$g(6,2) \cdot 1! = 9.$$

IV - A cardinalidade das interseções de três conjuntos será nula se algum deles for consecutivo, no caso em que nenhum dos conjuntos são consecutivos, teremos 2 interseções, pois

$$g(6,3) = \frac{6}{6-3} \cdot C^3_{6-3} = 2.$$

A cardinalidade de ambas ($|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$) será igual a 1, pois as mulheres já estavam fixas.

Assim, a soma das cardinalidades das interseções de três conjuntos escolhidos entre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, A'_3, A_3$ é dada por:

$$g(6,3) \cdot 1 = 2.$$

IV - A cardinalidade das interseções de quatro conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, A'_3, A_3$ será nula, pois neste caso teremos pelo menos dois conjuntos consecutivos.

Finalmente, pelo Princípio de Inclusão e Exclusão:

$$\begin{aligned} U_3 &= |A| - |A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup A'_3 \cup A_3| \\ &= 3! - 6 \cdot 2! + g(6,2) \cdot 1! - g(6,3) \cdot 1 \\ &= 6 - 12 + 9 - 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De fato, observe na figura a seguir a única solução para U_3, visto que as mulheres já estão alocadas.

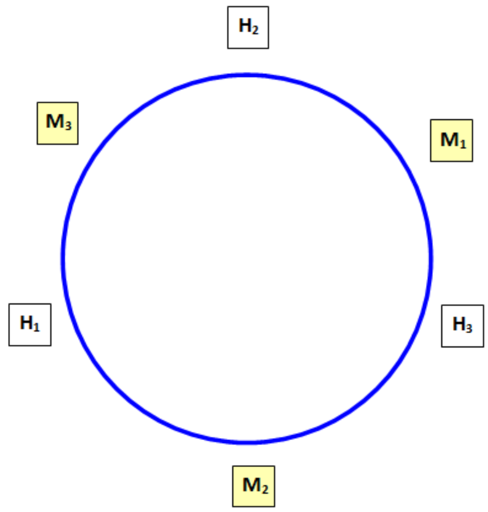


Figura 3.2: Resolução mostrando que $U_3 = 1$.

Portanto, a solução para o Problema de Lucas onde $n = 3$ é igual

$$S_3 = 2 \cdot 3! \cdot U_3 = 2 \cdot 6 \cdot 1 = 12.$$

Solução para o Problema de Lucas com n casais:

Usando o mesmo raciocínio utilizado na solução anterior, seguiremos alguns passos para resolver este problema:

1º passo: Numerar os lugares de 1 a 2n.

2º passo: Nomear as mulheres por M_i e os homens por H_i, onde $1 \leq i \leq n$.

3º passo: Acomodar as mulheres nos lugares pares ou ímpares (isso nos garantirá não haver pessoas do mesmo sexo juntas). Teremos duas possibilidades para fazer essa escolha.

4º passo: Uma vez determinado a posição para cada sexo devemos escolher os lugares para alocar as mulheres, isso será feito de $n!$ maneiras.

5º passo: Devemos alocar os homens tomando o cuidado para que nenhum homem fique ao lado de sua esposa. Iremos representar a quantidade de formas de isso ocorrer por U_n.

Seja S_n a quantidade de formas de dispor os n casais ao redor de uma mesa redonda respeitando as restrições do problema. Então, a solução para o Problema de Lucas para n casais será dada por

$$S_n = 2 \cdot n! \cdot U_n.$$

Para descobrir o valor de U_n numeraremos os espaços disponíveis aos homens por $1, 2, 3, ..., n$, observe a Figura 3.3.

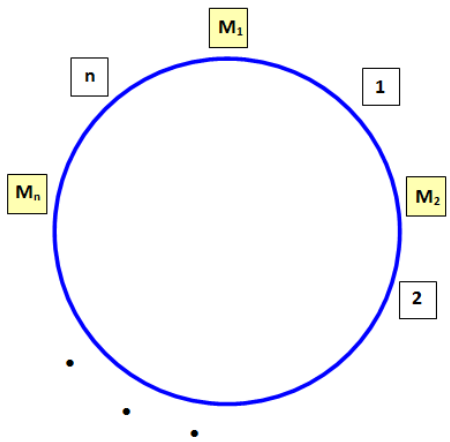


Figura 3.3: Lugares disponíveis para dispormos dos homens.

Seja,

- A = conjunto das permutações dos homens (livre de qualquer restrição).
- A_i = conjunto das permutações dos homens em que o i-ésimo homem está à esquerda de sua esposa, onde $1 \leq i \leq n$.
- A'_i = conjunto das permutações dos homens em que o i-ésimo homem está à direita de sua esposa, onde $1 \leq i \leq n$.

Utilizando o Princípio de Inclusão e Exclusão 1.1.1 obtemos

$$U_n = |A| - |A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup A'_3 \cup A_3 \cup ... \cup A'_n \cup A_n| \tag{3.2}$$

A seguir analisaremos a cardinalidade de cada termo da Equação 3.2 acima:
I - $|A| = n!$, pois representa as permutações dos n homens sem nenhuma restrição.

II - $|A_i| = |A'_i| = (n-1)!$, pois neste caso estamos deixando um dos homens fixos e permutando os outros.

III - A interseção dos conjuntos (tomados dois a dois, três a três,..., k a k) que contenha dois conjuntos consecutivos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, ..., A'_n, A_n$ considerando A_n e A'_1

consecutivos é sempre vazia. Por exemplo, $(A'_1 \cap A_1)$ é vazia pois H_1 não pode ocupar simultaneamente os lugares 1 e n. Já $(A_n \cap A'_1)$ é vazia pois o n-ésimo lugar não pode ser ocupado simultaneamente por H_n e H_1.

IV - A interseção de k dos conjuntos $A'_1, A_1, A'_2, A_2, ..., A'_n, A_n$ que não contenha dois conjuntos consecutivos, considerando A_n e A'_1 consecutivos, é uma permutação de n elementos com k elementos em posições pré fixadas e, portanto, possui $(n-k)!$ configurações $(k \leq n)$. A quantidade de conjuntos deste tipo pode ser calculada utilizando o Segundo Lema de Kaplansky, já que temos $2n$ elementos e queremos tomar subconjuntos com k elementos não consecutivos. Logo,

$$g(2n,k) = \frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k}$$

Assim, a interseção dos conjuntos tomados k a k será dada por uma soma com $\frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k}$ parcelas iguais a $(n-k)!$ e com as demais parcelas nulas.

Observe que se considerarmos as interseções de mais de n conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, ..., A'_n, A_n$, ou seja, se tomarmos $k = n+1, n+2, ..., 2n$, teremos que a cardinalidade da interseção será nula, pois sempre teremos pelo menos dois conjuntos consecutivos.

Logo, pelo Princípio de Inclusão e Exclusão 1.1.1

$$\begin{aligned}
U_n &= |A| - |A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup ... \cup A'_n \cup A_n| \\
&= n! - 2n \cdot (n-1)! + \frac{2n}{2n-2} \cdot C^2_{2n-2} \cdot (n-2)! - ... \\
&\quad +(-1)^n \frac{2n}{2n-n} \cdot C^n_{2n-n} \cdot (n-n)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k} \cdot (n-k)!
\end{aligned}$$

Portanto a solução do Problema de Lucas é,

$$\begin{aligned}
s_n &= 2 \cdot n! \cdot U_n \\
&= 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k} \cdot (n-k)! \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

A tabela a seguir apresentará alguns valores de U_n e S_n

Número de casais (n)	U_n	S_n
1	0	0
2	0	0
3	1	12
4	2	96
5	13	3.120
6	80	115.200
7	579	5.836.320
8	4.738	382.072.320
9	43.387	31.488.549.120
10	439.792	3.191.834.419.200

Tabela 3.1: Valores para o Problema de Lucas para $1 \leq n \leq 10$.

3.2 Solução para o Problema de Lucas utilizando a ideia de Bogart e Doyle

Em 1986 Bogart e Doyle publicaram um artigo no jornal *The American Mathematical Monthly* com o título ***Non-sexist solution of the ménage problem***. Neste artigo eles trazem uma solução diferente da que foi dada por Kaplansky, dado que eles não sentam as mulheres (ou os homens) primeiro.

Nesta seção conheceremos um pouco sobre os autores, solucionaremos o Problema Relaxado de Lucas que servirá para ajudar a se ambientar com a técnica, já que é um problema similar ao de Lucas, porém um pouco mais simples já que nesse caso relaxamos a exigência de que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e posteriormente resolveremos o Problema de Lucas utilizando a ideia desses autores.

Kenneth P. Bogart obteve seu Ph.D em Matemática pela Universidade Call Tech em 1968. Trabalhava como professor de Matemática na Faculdade Dartmouth. Durante sua carreira, Ken publicou nove livros e mais de 60 artigos, vários deles voltados para o estudo de Análise Combinatória. Faleceu em 31 de março de 2005 após um acidente de bicicleta.

Peter G. Doyle obteve seu Ph.D em Matemática pela Faculdade Dartmouth em

Figura 3.4: Professor Kenneth P. Bogart. Fonte: <https://math.dartmouth.edu>. Acesso em: 17 de janeiro de 2017.

1982. Juntamente com Laurie Snell escreveu um livro chamado *Random Walks and Eletric Networks*. Atualmente trabalha como professor na Faculdade Dartmouth.

Figura 3.5: Professor Peter G. Doyle. Fonte: <http://dartmouth.edu/faculty-directory/peter-doyle>. Acesso em: 17 de janeiro de 2017.

Problema Relaxado de Lucas

De quantas maneiras n casais podem se sentar em torno de uma mesa circular, com $2n$ cadeiras distintas, de forma que ninguém se sente ao lado de seu parceiro ou parceira?

Solução:

Utilizaremos a seguinte estratégia para resolver este problema: contaremos todas as maneiras de sentar os n casais sem nenhuma exigência e descontaremos desse total utilizando o Princípio de inclusão e Exclusão os casos que não satisfazem o enunciado, ou seja, descontando os casos em que marido e mulher estão sentados juntos. Note que neste caso, diferentemente do Problema de Lucas, é permitido que tenhamos pessoas do mesmo sexo sentadas juntas.

Como as cadeiras são distintas, temos $(2n)!$ formas para sentar $2n$ pessoas em uma mesa redonda. Denotaremos o número de configurações em que se tem pelo menos k casais sentados juntos por W_k, assim através do Princípio de Inclusão e Exclusão estaremos adicionando e subtraindo algumas configurações para que no final cada caso só seja contado uma vez. Tomando S_n como a solução do problema, vemos que

$$S_n = (2n)! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot W_k$$

Imagine cada um dos n casais como uma peça de dominó que deveremos alocar formando um círculo onde peças não podem ficar sobrepostas. Observe a Figura 3.6 a seguir

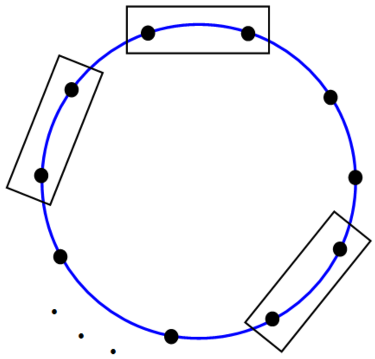


Figura 3.6: Dominós não sobrepostos em um círculo.

A partir de agora seguiremos alguns passos para descobrir a expressão que define W_k.

I - Podemos escolher os casais que ficarão fixos através de uma combinação de n elementos tomados k a k, ou seja C_n^k. Para escolher os lugares onde os k casais se sentarão à mesa, pensaremos nesta escolha como o número de maneiras de colocar k peças de dominós indistinguíveis, não sobrepostos em $2n$ vértices dispostos em um círculo.

Não poderemos tomar dominós sobrepostos, pois neste caso teríamos que algum homem ou alguma mulher tem dois parceiros. Observe na Figura 3.7 a seguir o que não poderá acontecer.

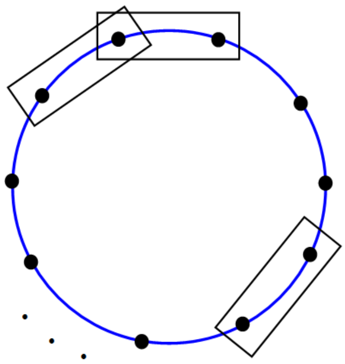


Figura 3.7: Dominós sobrepostos em um círculo.

Utilizando o Segundo Lema de Kaplansky escolheremos vértices não consecutivos no círculo, o que nos garantirá a acomodação das peças impedindo que as mesmas fiquem sobrepostas. Assim,

$$g(2n,k) = \frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k} \text{ maneiras.}$$

Dado que já escolhemos os lugares, Podemos permutar os casais escolhidos de $k!$ formas. Em cada casal fixado, esposa e marido podem trocar de lugar. O que pode ser feito de 2^k formas.

II - Os outros casais que não estão fixados podem permutar entre si de $(2n-2k)!$ formas.

Assim,

$$W_k = C^k_n \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k} \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!$$

Conectando a expressão encontrada para W_k a equação que define S_n e simplificando alguns termos, teremos que

$$\begin{aligned}
S_n &= (2n)! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot W_k \\
S_n &= (2n)! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot C^k_n \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C^k_{2n-k} \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)! \\
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \cdot C^k_n \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \frac{(2n-k)!}{(2n-2k)! \cdot k!} \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)! \\
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \cdot C^k_n \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot (2n-k)! \cdot 2^k
\end{aligned}$$

A tabela a seguir apresentará alguns valores para o Problema Relaxado de Lucas.

Número de casais (n)	Solução (s_n)
1	0
2	8
3	192
4	11.904
5	1.125.120
6	153.262.080
7	28.507.207.680
8	6.951.513.784.320
9	2.153.151.603.671.040
10	826.060.810.479.206.400

Tabela 3.2: Valores para o Problema Relaxado de Lucas para $1 \leq n \leq 10$.

Solução do Problema de Lucas

Utilizaremos a mesma estratégia empregada na solução do Problema Relaxado, só que agora não podemos ter pessoas do mesmo sexo sentadas juntas, então calcularemos o total de soluções em que homens e mulheres se sentam alternadamente e desse total retiraremos os casos em que os casais estejam sentados juntos.

Há $2 \cdot n! \cdot n!$ formas de acomodarmos $2n$ pessoas alternando entre homens e mulheres. Denotaremos o número de configurações em que se tem pelo menos k casais sentados juntos por W_k, assim através do Princípio de Inclusão e Exclusão 1.1.1 estaremos adicionando e subtraindo algumas configurações para que no final cada caso só seja contado uma vez. Tomando S_n como a solução do problema, vemos que

$$S_n = 2(n!)^2 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot W_k$$

Seguiremos alguns passos para descobrir a expressão que definirá W_k.

I - Podemos escolher os casais que ficarão fixos através de uma combinação de n elementos tomados k a k, ou seja C_n^k. Para escolher os lugares onde os k casais se sentarão à mesa utilizaremos o Segundo Lema de Kaplansky, obtendo

$$g(2n, k) = \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^{k} \text{ maneiras.}$$

Dado que já escolhemos os lugares, podemos permutar os casais escolhidos de $k!$ formas. Devemos ainda decidir se o primeiro casal será composto de homem-mulher ou mulher-homem, note que uma vez tomada essa decisão a posição dos outros casais já estará definida, para tal temos 2 possibilidades.

II - Os outros casais que não estão fixados devem permutar entre si de forma que sua posições fiquem alternadas. Assim, teremos $(n-k)!$ maneiras de permutar os $n-k$ homens restantes e $(n-k)!$ maneiras de permutar as mulheres.

Logo,

$$W_k = C_n^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^k \cdot k! \cdot 2 \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!.$$

Conectando a expressão encontrada para W_k a equação que define S_n e simplificando alguns termos, teremos que

$$\begin{aligned}
S_n &= 2(n!)^2 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot W_k \\
&= 2(n!)^2 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot C_n^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^k \cdot k! \cdot 2 \cdot (n-k)! \cdot (n-k)! \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{n!}{\cancel{(n-k)!} \cdot \cancel{k!}} \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^k \cdot \cancel{k!} \cdot 2 \cdot \cancel{(n-k)!} \cdot (n-k)! \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^k \cdot (n-k)! \qquad (3.4) \\
&= 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^k \cdot (n-k)!
\end{aligned}$$

Observe que a solução apresentada na Equação 3.4 onde foi utilizada a ideia de Bogart e Doyle é igual a solução dada por Kaplanky 3.3, como era de se esperar.

Capítulo 4

Problemas Parecidos com o Problema de Lucas

Neste capítulo apresentaremos e resolveremos alguns problemas desafiadores parecidos com o Problema de Lucas, porém com níveis de dificuldade variados para que possamos cativar nossos alunos do ensino médio e ambientá-los com as técnicas de contagem. Desafios com essa temática são importantíssimos para o uso em sala de aula, já que despertam o pensamento combinatório fazendo com que os alunos criem estratégias de resolução. Também veremos que um problema pode ser resolvido de várias formas diferentes e que questões com enunciados semelhantes podem necessitar de técnicas díspares para que consigamos solucioná-las.

Problema 1 - De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em uma mesa retangular, semelhante à mesa da Figura 4.1 abaixo, de modo que marido e mulher não se sentem de frente um para o outro?

Solução: Inicialmente temos $(2n)!$ formas de sentar as pessoas sem nenhuma restrição. Dessas permutações devemos retirar utilizando o Princípio de Inclusão e Exclusão aquelas em que temos algum casal sentado de frente um para o outro. Seja,

A_1 = Permutações em que ao menos um casal está sentado um na frente do outro.

Para contarmos esses casos devemos primeiro escolher um casal, o que pode ser feito por C_n^1, e multiplicar esse valor por n, pois temos n posições na mesa para escolhermos e depois multiplicar por 2, pois temos duas possibilidades para permutar esse casal escolhido.

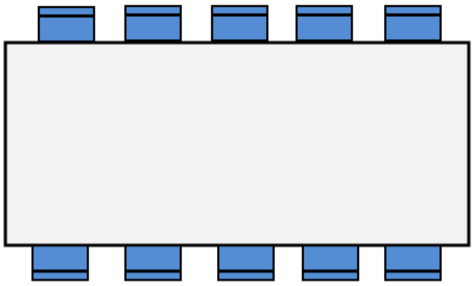


Figura 4.1: Mesa retangular - Problema 1.

Além disso devemos sentar as outras pessoas, o que nos dá $(2n-2)!$ formas.

Logo, $A_1 = C_n^1 \cdot n \cdot 2 \cdot (2n-2)!$.

$A_2 =$ Permutações em que ao menos dois casais estão sentados um na frente do outro.

Devemos escolher dois casais, o que pode ser feito por C_n^2, e multiplicar esse valor por $n \cdot (n-1) = \dfrac{n!}{(n-2)!}$, pois temos n posições na mesa e queremos escolher duas. Multiplicar por 2^2, pois temos duas possibilidades para permutar cada casal escolhido. Além disso devemos sentar as outras pessoas, o que nos dá $(2n-4)!$ formas.

Logo, $A_2 = C_n^2 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} \cdot 2^2 \cdot (2n-4)!$.

Seguindo esse raciocínio, as permutações em que ao menos k casais, onde $1 \leq k \leq n$, estão sentados um na frente do outro será dada por

$$A_k = C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!.$$

Já que devemos escolher k casais, o que pode ser feito por C_n^k, devemos multiplicar esse valor por $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, pois temos n posições na mesa e queremos escolher k. Devemos multiplicar por 2^k, pois temos duas possibilidades para permutar cada casal escolhido. Além disso devemos sentar as outras pessoas, o que nos dá $(2n-2k)!$ formas.

Portanto, seja S a solução do problema, pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos que:

$$\begin{aligned}
S &= (2n)! - A_1 + A_2 - .... + (-1)^k \cdot A_k \\
&= (2n)! - \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^k \cdot (2n-2k)! \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!
\end{aligned}$$

Assim, teremos $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!$ maneiras de sentar os n casais satisfazendo o enunciado.

Problema 2 - De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em uma mesa retangular, semelhante à mesa do problema 1, de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum casal (marido e mulher) ou pessoas do mesmo sexo se sentem de frente um para o outro?

Solução: Para sentar $2n$ pessoas sem que pessoas do mesmo sexo se sentem juntas ou de frente uma para a outra teremos $2 \cdot n! \cdot n!$, pois temos $n!$ maneiras de sentar os homens, $n!$ maneiras de sentar as mulheres e temos 2 fomas para escolher se iniciaremos com Homem ou Mulher (note que definindo se será um Homem ou uma Mulher que acomodaremos na primeira cadeira já estaremos definindo as posições das $2n$ pessoas em relação ao sexo e não teremos pessoas do mesmo sexo sentadas de frente uma para a outra). Observe na Figura 4.2 abaixo, dois exemplos que satisfazem esta condição.

H_2	M_4	H_3	M_1	H_5
M_3	H_4	M_5	H_1	M_2

M_1	H_3	M_3	H_2	M_5
H_4	M_2	H_1	M_4	H_5

Figura 4.2: Exemplo com os casais sentados à mesa sem haver pessoas do mesmo sexo sentadas juntas.

Dessas $2 \cdot n! \cdot n!$ permutações devemos retirar utilizando o Princípio de Inclusão e Exclusão aquelas em que temos algum casal sentado de frente um para o outro. Os dois exemplos representados na Figura 4.2 acima não satisfazem o enunciado, pois na primeira mesa temos dois casais de frente um para o outro, M_4 com H_4 e M_1 com H_1, já na segunda mesa temos M_5 com H_5.

A partir de agora analisaremos todas as permutações em que alguma pessoa está sentada de frente para o seu parceiro e pessoas do mesmo sexo não estão sentadas juntas. Seja,

A_1 = Permutações alternadas em que ao menos um casal está sentado um na frente do outro.

Para contarmos esses casos devemos primeiro escolher um casal, o que pode ser feito por C_n^1, devemos multiplicar esse valor por n, pois temos n posições na mesa para escolhermos e depois multiplicar por 2, pois temos duas possibilidades para permutar esse casal escolhido. Observe que neste caso decidindo a ordem que o casal ocupará homem-mulher ou mulher-homem nas cadeiras escolhidas, já estaremos decidindo a ordem em relação ao sexo dos demais só faltando permutá-los de forma que suas posições fiquem alternadas, o que nos dá $(n-1)! \cdot (n-1)!$ formas.

Logo, $A_1 = C_n^1 \cdot n \cdot 2 \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!$.

A_2 = Permutações alternadas em que ao menos dois casais estão sentados um na frente do outro.

Devemos escolher dois casais, o que pode ser feito por C_n^2, devemos multiplicar esse valor por $\frac{n!}{(n-2)!}$, pois temos n posições na mesa e queremos escolher duas. Multiplicar por 2, pois temos duas possibilidades para permutar um dos casais escolhidos e com isso a ordem em relação ao sexo dos outros casais já ficará definida. Além disso devemos sentar as outras pessoas, o que nos dá $(n-2)! \cdot (n-2)!$ formas.

Logo, $A_2 = C_n^2 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} \cdot 2 \cdot (n-2)! \cdot (n-2)!$.

Seguindo esse raciocínio, as permutações em que ao menos k casais, onde $1 \leq k \leq n$, estão sentados um na frente do outro será dada por

$$A_k = C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2 \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!\,,$$

visto que devemos escolher k casais, o que pode ser feito por C_n^k, e multiplicar esse valor por $\frac{n!}{(n-k)!}$, pois temos n posições na mesa e queremos escolher k. Devemos multiplicar por 2, pois temos duas possibilidades para permutar um dos casais escolhidos e com isso a ordem em relação ao sexo dos outros casais já ficará definida. Além disso devemos sentar as outras pessoas, o que nos dá $(n-k)! \cdot (n-k)!$ formas.

Assim, se S é a solução do problema, pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos que:

$$
\begin{aligned}
S &= 2 \cdot n! \cdot n! - A_1 + A_2 - .... + (-1)^k \cdot A_k \\
&= 2 \cdot (n!)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2 \cdot (n-k)! \cdot (n-k)! \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2 \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!
\end{aligned}
$$

Portanto, teremos $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2 \cdot (n-k!) \cdot (n-k)!$ maneiras de sentar os n casais satisfazendo o enunciado.

Problema 3 - Uma diretora pretende fazer uma reunião com os representantes das turmas do ensino médio de sua escola que possui 3 turmas de 1º ano, 6 de 2º ano e 7 de 3º ano, sendo dois representantes por turma. Contudo, os alunos do 1º ano são muito tagarelas e ela precisará sentá-los separados para que eles não atrapalhem a reunião com conversas paralelas. Pensando nisso, ela teve uma ideia: sentará todos os alunos em cadeiras distintas formando um círculo de forma que entre dois alunos do 1º ano tenha no mínimo dois alunos das outras séries e ela ficará no centro do círculo. Dessa forma, quantas formações possíveis ela terá para sentar os alunos?

Solução: Ao todo teremos 32 alunos nessa reunião, 6 alunos do 1º ano, 12 alunos do 2º ano e 14 alunos do 3º ano. Começaremos utilizando a Generalização do Segundo Lema de Kaplansky, para escolher os lugares das cadeiras escolhidas para os alunos do 1º ano de forma que haja no mínimo duas cadeiras entre elas. Tal escolha será dada por:

$$g(32, 6, 2) = \frac{32}{20} \cdot C_{20}^6 = 62.016 \text{ formas diferentes.}$$

Escolhido os lugares devemos permutar os 6 alunos do 1º ano de 6! formas e permutar os outros alunos de 26!.

Portanto, teremos $62.016 \cdot 6! \cdot 26!$ maneiras distintas de sentar os alunos de forma a satisfazer o enunciado.

Problema 4 - (OBMEP 2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na Figura 4.3 a seguir.

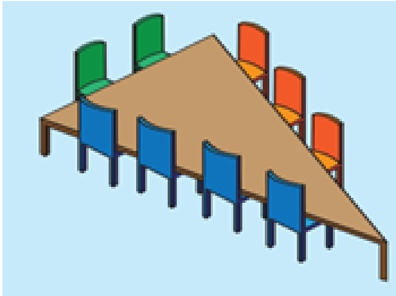


Figura 4.3: Mesa Triaangular. Fonte: <http://www.obm.org.br>

De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Solução: Podemos escolher escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa de 6 formas: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os outros quatro amigos poderão escolher 4 dos 7 lugares vazios de $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ maneiras.

No total, os amigos podem sentar-se à mesa de $6 \cdot 2 \cdot 840 = 10.080$ maneiras distintas.

O problema que resolveremos a seguir foi deixado como exercício no artigo ***Non-sexist solution of the ménage problem*** [2]. Mesmo tendo um enunciado bem parecido com alguns problemas que já resolvemos neste capítulo, esse problema tem uma particularidade que dificulta a sua solução, visto que não conseguimos usar os lemas de Kaplansky ou o Princípio de Inclusão e Exclusão para obter sua solução. Assim, utilizaremos outra estratégia para solucioná-lo.

Problema 5 - De quantas maneiras 5 casais podem se sentar em cadeiras diferentes numa mesa retangular, semelhante à mesa do problema 1, de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e ninguém sente ao lado ou em frente ao seu parceiro?

Primeira solução:

Nomearemos os homens como H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5 e as mulheres como M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 e representaremos as 5 posições na mesa por peças de dominó. Observe algumas peças na Figura 4.4.

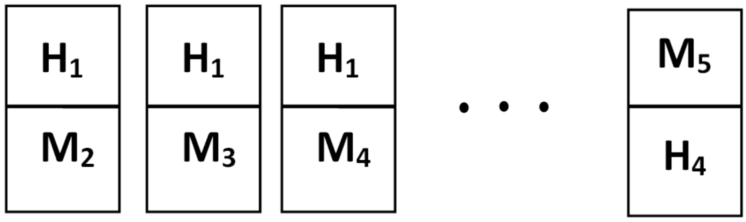
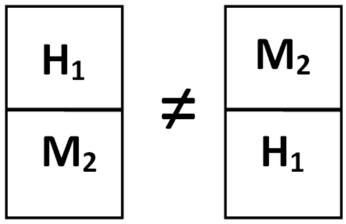


Figura 4.4: Formação dos casais representados por peças de dominó.

Poderemos formar $10 \cdot 4 = 40$ peças distintas de dominó para utilizar em nossa solução, pois para a parte de cima da peça do dominó teremos qualquer uma das 10 pessoas e para a parte de baixo teremos 4 pessoas, já que devemos tomar uma pessoa do sexo diferente da pessoa que estará na parte de cima da peça e dessas pessoas não poderemos utilizar o parceiro da pessoa que já saiu, note que



Para a primeira posição na mesa podemos escolher qualquer uma das 40 peças, para a segunda posição não podemos escolher nenhuma peça que tenha o homem ou a mulher que já estão na primeira peça e além disso não podemos utilizar os parceiros das duas pessoas que já saíram. Ou seja, digamos que escolhemos a peça $[M_1, H_2]$ para ocupar a primeira posição, para formar peças para a segunda posição só poderemos utilizar H_3, H_4, H_5, M_3, M_4 e M_5 como a primeira peça começou com uma mulher, então deveremos iniciar a segunda peça com um homem, para isso temos 3 escolhas (H_3, H_4 e H_5), já para a parte debaixo dessa segunda peça só teremos duas possibilidade já que não poderemos tomar a parceira desse homem que já saiu. Assim, para a segunda posição na mesa teremos 6 peças disponíveis, $[H_3, M_4]$, $[H_3, M_5]$, $[H_4, M_3]$, $[H_4, M_5]$ $[H_5, M_3]$, e $[H_5, M_4]$.

Para a escolha das outras peças teremos 4 possibilidades, pois para escolhermos a terceira peça temos 2 opções, sendo que para cada uma dessas peças teremos 2 permutações possíveis. Ou seja, digamos que escolhemos a peça $[M_1, H_2]$ para ocupar a primeira posição e a peça $[H_3, M_4]$ para ocupar a segunda posição, então a terceira peça poderá ser $[M_5, H_1]$ ou $[M_2, H_5]$, se escolhermos a peça $[M_2, H_5]$ teremos 2 peças possíveis para alocarmos no quarto lugar, $[H_1, M_3]$ ou $[H_4, M_3]$, o que já definirá a última peça. Em contrapartida, se escolhermos a peça $[M_5, H_1]$ para o terceiro lugar, então teremos 2 peças possíveis para alocarmos no quarto lugar, $[H_4, M_2]$ ou $[H_4, M_3]$, o que já definirá a quinta peça. Veja na Figura 4.5 a seguir, as quatro possíveis formações dos casais influenciadas pela escolha da terceira peça de dominó.

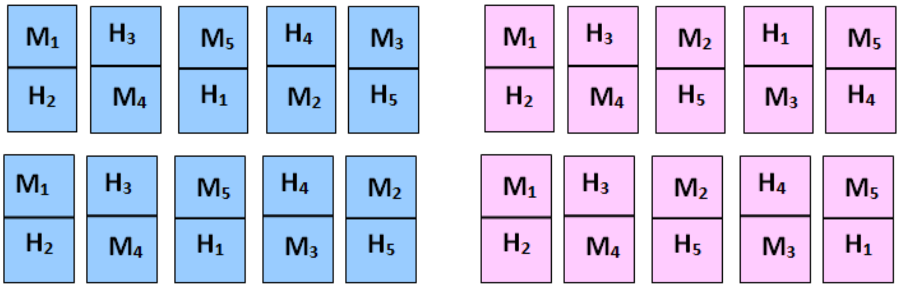


Figura 4.5: Formações dos casais influenciadas pela escolha da terceira peça de dominó.

Assim, os 5 casais poderão se sentar de $40 \cdot 6 \cdot 4 = 960$ maneiras.

Segunda solução: Nesta solução primeiro sentaremos as mulheres para depois analisar as possibilidades que teremos para sentar os homens.

Temos 2 formas para escolher se teremos uma mulher ou um homem na primeira cadeira a esquerda, fazendo essa escolha a posição das outras pessoas em relação ao sexo já estará pré-definida. Para sentarmos as mulheres temos 5! arrumações distintas. Veja na Figura 4.6 abaixo uma arrumação onde numeramos os lugares vazios destinados aos homens para facilitar a explicação do problema.

M_1	2	M_3	4	M_5
1	M_2	3	M_4	5

Figura 4.6: Escolhendo os homens dado que as mulheres já estão sentadas.

Para sentarmos os homens começaremos escolhendo o homem que sentará na posição 1, temos três homens para escolher, H_3, H_4 ou H_5. Se H_3 for escolhido teremos duas permutações possíveis satisfazendo o enunciado. Por outro lado se escolhermos H_4 ou H_5, então só teremos uma configuração possível para cada. Observe essas configurações na Figura 4.7 a seguir.

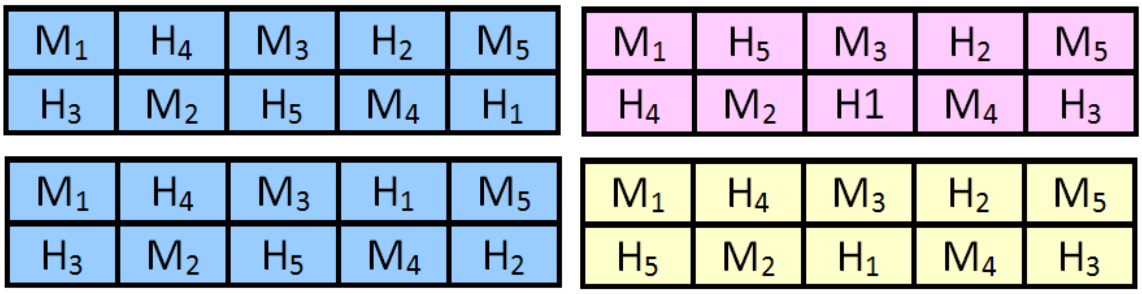


Figura 4.7: As quatro configurações possíveis dado que as mulheres já estão sentadas.

Portanto, teremos $2 \cdot 5! \cdot 4 = 960$ maneiras de sentar os casais satisfazendo as condições exigidas pelo enunciado.

Considerações Finais

A motivação para trabalhar com problemas, se deve ao fato de acreditarmos na capacidade que eles tem de estimular a curiosidade, aguçando assim o nosso apetite em aprender. É emocionante constatar o prazer que surge quando um aluno, por si só, consegue solucionar um problema. De uma forma geral, quanto mais difícil for o problema, maior satisfação teremos ao conseguir resolvê-lo.

Ao longo deste trabalho foram apresentadas e demonstradas algumas técnicas de contagem super interessantes e importantes, às vezes, negligenciadas no ensino da Análise Combinatória no ensino básico e até mesmo nas graduações por serem consideradas extremamente complexas - eu mesma só tive contato com algumas dessas técnicas no mestrado. Vimos que o Princípio de Inclusão e Exclusão e os Lemas de Kaplansky são muito úteis na resolução de vários problemas e que a fórmula da Permutaçõe Caótica, que costuma ser temida por uma boa parte dos alunos, aparece como uma aplicação natural quando se compreende o Princípio de Inclusão e Exclusão em sua forma geral.

Enfim, esperamos que este trabalho sirva como texto inicial de apoio para professores e alunos, e que se tenha contribuído de alguma forma para minimizar as dificuldades encontradas no trato dessa matéria desafiadora e fascinante, que é a Análise Combinatória.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

[2] BOGART, Kenneth P.; DOYLE, Peter G. *Non-sexist solution of the ménage problem.* Artigo publicado no jornal The American Mathematical Monthly em 1986. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable>. Acesso em: 19 novembro 2016.

[3] GARCIA, Rômulo. *Análise Combinatória - Outros Métodos de Contagem.* Disponível em:< http://matematicaconcursos.blogspot.com.br>. Acesso em: 05 janeiro 2017.

[4] KAPLANSKY, Irvin. *Solution of the Problème des Ménages.* Publicado American Mathematical Society em 1943. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183505432>. Acesso em: 19 novembro 2016.

[5] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[6] MARTINS, Luiz Gustavo. *O Problema de Lucas.* Dissertação (Especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

[7] MENDES, Daniel F. *A Abrangência das Permutações na Análise Combinatória.* Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

[8] MORGADO, Augusto C., *Análise Combinatória e Probabilidade.* Coleção do Professor de Matemática, 9.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 343 p. (2006).

[9] NUNES, Alexmay S. *As Permutações Caóticas, O Problema de Lucas e a Teoria dos Permanentes.* Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

[10] SANTOS, J. Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C.. *Introdução à Análise Combinatória.* Editora Unicamp. Terceira Edição - (2008).

[11] VAZQUEZ, Cristiane M. R.; NOGUTI, Fabiane C. H. - *Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica* -, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em 08 de fevereiro de 2017.

[12] WIEN, Hans Humenberger. *Paare an einem runden Tisch - das Ménage - Problem.* Publicado Stochastik in der Schule em 2006. Disponível em:http://www.fachportal-paedagogik.de/ Acesso em: 05 janeiro 2017.

[13] Biografia de François Édouard Lucas .Disponível em: <http://www.nautilus.com.br>. Acesso em: 18 de janeiro de 2017.

[14] Biografia de Irving Kaplansky. Disponível em:< www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kaplansky.html>. Acesso em: 18 de janeiro de 2017.

[15] Biografia Kenneth P. Bogart .Disponível em: <https://math.dartmouth.edu/publicity/general/kpbogart.phtml>. Acesso em: 17 de janeiro de 2017.

[16] Biografia Peter G. Doyle. Disponível em: <http://dartmouth.edu/faculty-directory/peter-doyle>. Acesso em: 17 de janeiro de 2017.

[17] Lista com exercícios de combinatória para vestibular. Disponível em:< http://www.matematicadovestibular.com.br>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2017.

[18] Prova da Escola Naval 2009. Disponível em:< http://www.rumoaoita.com>. Acesso em: 05 de dezembro de 2016.