

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM**

GLEN PEACH

**VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DOS FUNDAMENTOS DA LÓGICA
MATEMÁTICA POR MEIO DE DIAGRAMAS DE CONJUNTOS**

São Carlos - SP

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

GLEN PEACH

VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DOS FUNDAMENTOS DA LÓGICA
MATEMÁTICA POR MEIO DE DIAGRAMAS DE CONJUNTOS

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Orientação:
Prof. Dr. Renato José de Moura

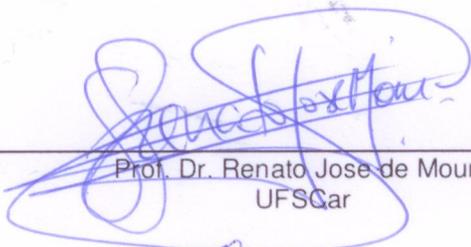
São Carlos - SP

2017



Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Glen Peach, realizada em 05/05/2017:



Prof. Dr. Renato Jose de Moura
UFSCar



Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
USP



Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

À minha família, cujo apoio e incentivo muito contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A todos meus companheiros de trabalho que de alguma forma contribuíram para tornar possível o meu comparecimento às aulas presenciais do PROFMAT na UFSCAR.

À minha família, pelo apoio, incentivo e compreensão nesta minha empreitada.

Ao Prof. Dr. Malagutti pela valiosa colaboração na correção e revisão de todo texto apresentado aqui.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Renato, por sua boa vontade, presteza e competência para me conduzir na elaboração deste trabalho.

A todos os professores do PROFMAT da UFSCar, cujas aulas foram fundamentais para superar os vários desafios ao longo do curso.

MUITO OBRIGADO A TODOS!

RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor um método que permita levar os fundamentos da lógica matemática para o ensino médio por meio da utilização da teoria dos conjuntos, porém fazendo toda a aproximação do assunto utilizando diagramas, tornando possível evitar assim, para as demonstrações e o entendimento necessários ao desenvolvimento do assunto, os rigores da escrita utilizada na lógica matemática, que, em um primeiro contato, podem desestimular o interesse dos alunos iniciantes.

Palavras-chaves: Noções de Conjuntos, Especificações de Conjuntos, Cálculo dos Predicados, Cálculo Sentencial.

ABSTRACT

The purpose of this work is to propose a method that allow to bring the fundamentals of mathematical logic to high school through the use of set theory, however making the whole approach of the subject through diagrams, making it possible to avoid, for the demonstrations and understanding necessary to the development of the subject, the rigors of writing used in mathematical logic, which, in a first contact, tend to discourage the interest of beginning students.

Keywords: Notions of Sets, Set Specifications, Predicate Calculus, Sentential calculus.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1.1 — Diagrama representativo dos "seres vivos"	29
Figura 1.1.2 — Diagrama representativo dos "seres humanos vivos"	30
Figura 1.1.3 — Construção do diagrama de conjuntos para duas restrições	31
Figura 1.1.4 — Etapas da construção do diagrama de conjuntos para duas restrições	31
Figura 1.1.5 — Diagrama de conjunto vazio.....	32
Figura 1.1.6 — Diagrama de conjuntos disjuntos	33
Figura 1.1.7 — Diagrama da interseção de conjuntos.....	35
Figura 1.1.8 — Diagrama da união de conjuntos	35
Figura 1.1.9 — Diagrama de pertinência entre conjuntos	37
Figura 1.1.10 — Diagrama das posições possíveis na relação de continência.....	38
Figura 1.1.11 — Diagrama da relação genérica entre dois conjuntos (A e B).....	39
Figura 1.1.12 — Diagrama da relação "A está contido em B", obtida por meio da supressão da região: "A" e "não B"	39
Figura 1.1.13 — Diagrama da região suprimida do diagrama da relação genérica entre dois conjuntos.....	39
Figura 1.1.14 — Tabela verdade x relação de continência para a implicação lógica	40
Figura 2.1.1 — Diagrama da interseção entre dois conjuntos.....	44
Figura 2.1.2 — Diagrama da relação de continência entre antecedente e conseqüente	46
Figura 2.2.1 — Símbolos dos operadores na Lógica Matemática e na Teoria dos Conjuntos.	47
Figura 2.3.1.1 — Conjunto universo para as proposições P, Q e R	50
Figura 2.3.1.2 — Regiões correspondentes às proposições P, Q e R.....	51
Figura 3.1.1 — Sequência de construção do diagrama monoliteral para uma restrição	57
Figura 3.2.1 — Construção das relações entre duas restrições.	58
Figura 3.2.2 — Diagrama biliteral para dois conjuntos.	59
Figura 3.3.1 — A região do diagrama biliteral para $E \subset A$	61
Figura 3.3.2 — Diagrama biliteral simplificado para $E \subset A$	61
Figura 3.3.3 — Diagrama biliteral para a restrição $\sim A$	62
Figura 3.3.4 — Diagrama simplificado do diagrama biliteral para $E \subset A$ e $\sim A$, seguido pelo diagrama biliteral da restrição $\sim E$	63
Figura 3.4.1.1 — Diagrama biliteral para A.....	64
Figura 3.4.2 .1 — Diagrama biliteral para $\sim A$	65
Figura 3.4.3.1 — Diagrama biliteral para $A \wedge E$	66

Figura 3.4.3.2 — Diagramas bilaterais dos termos da conjunção $A \wedge E$	67
Figura 3.4.4.1 — Diagrama bilateral para $A \vee E$	68
Figura 3.4.4.2 — Diagramas bilaterais dos termos da disjunção $A \vee E$	68
Figura 3.4.5.1 — Diagrama bilateral para $E \rightarrow A$	69
Figura 3.4.6.1 — Diagrama bilateral para $A \leftrightarrow E$	70
Figura 3.4.7.1 — Diagramas bilaterais para a quantificação universal	72
Figura 3.4.8.1 — Possível diagrama bilateral da restrição de existência $\exists x(Ax \wedge Ex)$	73
Figura 3.4.8.3 — Possível diagrama bilateral da restrição de existência $\exists x(Ax \vee Ex)$	74
Figura 3.4.8.2 — Seis diferentes posições e direções do traço para a ligação existencial.....	75
Figura 3.4.8.3 — Quatro diferentes posições e direções do traço para a ligação existencial. .	75
Figura 3.4.8.4 — Diagrama bilateral da restrição $\exists x Ex$	76
Figura 3.4.8.5 Diagrama bilateral da restrição $\exists x Ex$ e $\exists x Ax$	77
Figura 3.4.8.6 — Diagrama bilateral da restrição $\exists x Ex$, $\exists x Ax$ e $\sim \exists x(Ex \wedge Ax)$	77
Figura 3.4.8.7 — Obtenção do diagrama bilateral da restrição $\exists x(Ex \rightarrow Ax)$	78
Figura 3.4.8.8 — Inversão entre as regiões das restrições $\exists x(Ex \vee Ax)$ e $\forall x(Ex \vee Ax)$	79
Figura 3.4.8.9 — Diagrama bilateral para quantificação existencial individualizada.....	80
Figura 3.5.2.1 — Diagrama bilateral para $\forall x Ex$	82
Figura 3.5.2.2 – Alguns diagramas bilaterais que estão contidos na restrição E.....	82
Figura 3.5.4.1 — Interseção de célula suprimida e célula livre (uma restrição)	84
Figura 3.5.4.2 — Interseção de célula suprimida e célula livre (duas restrições)	84
Figura 3.5.4.3 — Interseção de célula suprimida e célula livre.....	85
Figura 3.5.4.3 — Interseção de células livres	85
Figura 4.2.1 — Diagrama trilateral para três premissas M, P e S	88
Figura 4.3.1.1.1 — Diagrama trilateral para o argumento do silogismo Modus Barbara	90
Figura 4.3.1.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Barbara	90
Figura 4.3.1.2.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Barbari	91
Figura 4.3.1.2.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Barbari	92
Figura 4.3.1.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Celarent	93
Figura 4.3.1.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Celarent.....	93
Figura 4.3.1.4.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Celarent	94
Figura 4.3.1.4.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Celarent.....	94
Figura 4.3.1.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Darii.....	95
Figura 4.3.1.6.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Ferio.....	96

Figura 4.3.1.6.1 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Ferio	97
Figura 4.3.2.1.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Camestres	98
Figura 4.3.2.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão silogismo Modus Camestres	98
Figura 4.3.2.2.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Camestros	99
Figura 4.3.2.2.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Camestros	99
Figura 4.3.2.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Cesare	100
Figura 4.3.2.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Cesare	101
Figura 4.3.2.4.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Cesaro	102
Figura 4.3.2.4.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Cesaro	102
Figura 4.3.2.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Baroco	103
Figura 4.3.2.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Baroco	103
Figura 4.3.2.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Festino	104
Figura 4.3.2.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Festino	104
Figura 4.3.3.1.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Darapti	105
Figura 4.3.3.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Darapti	106
Figura 4.3.3.2.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Felapton	107
Figura 4.3.3.2.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Felapton	107
Figura 4.3.3.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Datisi	108
Figura 4.3.3.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Datisi	108
Figura 4.3.3.4.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Disamis	109
Figura 4.3.3.4.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Disamis	109
Figura 4.3.3.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Bocardo	110
Figura 4.3.3.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Bocardo	111
Figura 4.3.3.6.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Ferison	112
Figura 4.3.3.6.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Ferison	112
Figura 4.3.4.1.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Bamalip	113
Figura 4.3.4.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Bamalip	113
Figura 4.3.4.2.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Calemis	114
Figura 4.3.4.2.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Calemis	114
Figura 4.3.4.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Calemos	115
Figura 4.3.4.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Calemos	116
Figura 4.3.4.4.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Fesapo	116
Figura 4.3.4.4.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Fesapo	117
Figura 4.3.4.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Dimatis	118

Figura 4.3.4.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Dimatis	118
Figura 4.3.4.6.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Fresison	119
Figura 4.3.4.6.1 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Fresison.....	119
Figura 5.1.1 — Diagrama tetraliteral (quatro restrições).....	121
Figura 5.1.2 — Regiões do diagrama tetraliteral (quatro restrições).....	121
Figura 5.2.1 — Diagrama pentaliteral (cinco restrições).....	122
Figura 5.2.2 — Diagrama hexaliteral (seis restrições).....	123
Figura 5.3.1.1 — Determinação da região delimitada por $P \rightarrow Q$ (modo 1).....	124
Figura 5.3.1.2 — Determinação da região delimitada por $P \rightarrow Q$ (modo 2).....	124
Figura 5.3.1.4 — Diagrama trilateral do argumento proposto	125
Figura 5.3.1.5 — Diagrama trilateral reduzido a duas restrições	126
Figura 5.3.2.1 — Determinação da região correspondente à restrição $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	127
Figura 5.3.2.2 — Determinação da região correspondente à restrição $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	128
Figura 5.3.2.3 — Determinação da região correspondente à restrição $Q \rightarrow (R \rightarrow \sim P)$	128
Figura 5.3.2.4 — Diagrama trilateral da conclusão do argumento do exemplo 5.3.2.....	128
Figura 5.3.3.1 — Diagrama da proposição $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$	129
Figura 5.3.3.2 — Diagrama tetraliteral do argumento proposto.....	130
Figura 5.3.4.1 — Construção do diagrama da primeira premissa $(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$	131
Figura 5.3.4.2 — Construção do diagrama da segunda premissa $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$	131
Figura 5.3.4.3 — Construção do diagrama tetraliteral do argumento proposto.....	132
Figura 5.3.4.4 — Construção do diagrama trilateral reduzido	132
Figura 5.3.5.1 — Diagramas para a região $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (S \rightarrow (P \rightarrow Q))$	134
Figura 5.3.5.2 — Diagramas para a região $((\sim P \rightarrow Q) \rightarrow \sim R) \rightarrow (S \rightarrow (\sim P \rightarrow Q))$	134
Figura 5.3.5.3 — Diagramas para a região $((\sim P \rightarrow \sim Q) \rightarrow R) \rightarrow (S \rightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q))$	134
Figura 5.3.5.4 — Diagramas para a região $((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow \sim R) \rightarrow (S \rightarrow (P \rightarrow \sim Q))$	134
Figura 5.3.5.5 — Diagramas final para o argumento do exemplo 5.2.5.....	135
Figura 5.3.6.1 — Diagramas pentaliterais para o argumento do exemplo 5.3.6.....	136
Figura 5.3.6.2 — Diagrama pentaliteral da conclusão $P \rightarrow (T \rightarrow R)$ do exemplo 5.3.6...	136
Figura 5.3.7.1 — Sequência de construção dos diagramas pentaliterais correspondentes ao argumento do exemplo 5.3.7.....	137
Figura 5.3.7.2 — Diagrama pentaliteral correspondente ao argumento do exemplo 5.3.7 ...	137

Figura 5.3.8.1 — Diagrama combinado para seis restrições utilizando um diagrama tetraliteral e um diagrama biliteral	138
Figura 5.3.8.2 — Sequência de construção do diagrama combinado tetraliteral e biliteral correspondente à conclusão do argumento de seis restrições do exemplo 5.3.7	139
Figura 6.1.1.1 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.1	142
Figura 6.1.1.2 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.1 (ordem inversa)	142
Figura 6.1.2.1 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.2	143
Figura 6.1.3.1 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.3	143
Figura 6.2.1.1 — Sequência de diagramas trilaterais do exemplo 6.2.1	144
Figura 6.2.2.1 — Sequência de diagramas trilaterais do exemplo 6.2.2	145
Figura 6.3.1.1 — Sequência de diagramas tetraliterais do exemplo 6.3.1	146
Figura 6.3.2.1 — Sequência de diagramas tetraliterais do exemplo 6.3.2	146
Figura 6.3.2.2 — Sequência de diagramas tetraliterais do exemplo 6.3.2	147
Figura 6.3.2.3 — Sequência de diagramas tetraliterais do exemplo 6.3.2	147
Figura 6.4.1.1 — Sequência de diagramas pentaliterais do exemplo 6.4.1	148
Figura 6.4.1.2 — Sequência de diagramas pentaliterais do exemplo 6.4.1	148
Figura 6.4.1.3 — Sequência de diagramas pentaliterais do exemplo 6.4.1	148
Figura 7.1 — Programa de apresentação do diagrama trilateral	149
Figura 7.2 — Efeito do clique sobre os losangos rotulados V	150
Figura 7.3 — Visualização da região de interseção entre as regiões $P \wedge Q \wedge R$	151
Figura 7.4 — Efeito das funções de marcação das células	152
Figura 7.5 — Efeito dos botões dispostos em arco (traço de ligação existencial)	152
Figura 7.6 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a delimitação $\sim Px \rightarrow Q$	153
Figura 7.7 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a supressão $R \rightarrow Q$	154
Figura 7.8 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a delimitação $\sim Q \rightarrow \sim R$	154
Figura 7.9 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a supressão $R \rightarrow Q$	154
Figura 7.10 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a supressão $\sim R \rightarrow \sim P$, a conclusão P e o diagrama final do argumento (conclusão $\sim P$)	154

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	25
1. CONCEITOS BÁSICOS.....	29
1.1. NOÇÃO INTUITIVA DE "CONJUNTO", DOS TERMOS CORRELATOS E DE SUAS RELAÇÕES COM A LÓGICA MATEMÁTICA.....	29
2. TEORIA BÁSICA DOS CONJUNTOS E SUAS APLICAÇÕES AO RACIOCÍNIO LÓGICO.....	41
2.1. TEORIA BÁSICA DOS CONJUNTOS.....	42
2.2. A SIMBOLOGIA DOS OPERADORES UTILIZADOS NA LÓGICA MATEMÁTICA E NA TEORIA DOS CONJUNTOS.....	47
2.3. O CÁLCULO SENTENCIAL NA LINGUAGEM DOS CONJUNTOS.....	48
2.3.1. Definição de proposição no cálculo sentencial e sua correspondência com o conceito de conjunto.....	49
2.3.2. Definição de argumento.....	52
2.4. O CÁLCULO DOS PREDICADOS NA LINGUAGEM DOS CONJUNTOS.....	54
3. O MÉTODO PROPOSTO.....	57
3.1. O DIAGRAMA MONOLITERAL PARA UMA RESTRIÇÃO.....	57
3.2. O DIAGRAMA BILITERAL DAS RELAÇÕES ENTRE DUAS RESTRIÇÕES.....	58
3.3. EXEMPLO SIMPLES DA APLICAÇÃO DO DIAGRAMA BILITERAL PARA DUAS RESTRIÇÕES À LÓGICA MATEMÁTICA.....	60
3.4. A REPRESENTAÇÃO DAS OPERAÇÕES DA LÓGICA MATEMÁTICA NO DIAGRAMA BILITERAL PARA DUAS RESTRIÇÕES.....	64
3.4.1. Afirmação.....	64
3.4.2. Negação.....	65
3.4.3. Conjunção.....	66
3.4.4. Disjunção.....	67
3.4.5. Implicação.....	69
3.4.6. Equivalência.....	70
3.4.7. Quantificação universal.....	71
3.4.8. Quantificação existencial.....	72

3.5. A REPRESENTAÇÃO GERAL DAS RESTRIÇÕES CONTIDAS NO DIAGRAMA BILITERAL.....	80
3.5.1. A ligação existencial do conjunto universo	80
3.5.2. Exemplo de diagramas biliterais que contém a restrição $\forall x \exists x$	81
3.5.3. A representação geral das restrições para a relação de continência.....	82
3.5.4. Interseção das restrições.....	83
4. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL AOS SILOGISMOS	87
4.1. CONCEITO BÁSICO DE SILOGISMO.....	87
4.2. DIAGRAMA TRILITERAL PARA TRÊS RESTRIÇÕES.....	88
4.3. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA TRILITERAL AO SILOGISMO	89
4.3.1. Primeira figura de silogismo	89
4.3.2. Segunda figura de silogismo	97
4.3.3. Terceira figura de silogismo	105
4.3.4. Quarta figura de silogismo	112
5. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL AO CÁLCULO SENTENCIAL.....	121
5.1 O DIAGRAMA PARA QUATRO RESTRIÇÕES	121
5.2 O DIAGRAMA N-LITERAL PARA CINCO E SEIS RESTRIÇÕES	122
5.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL A ARGUMENTOS DE TRÊS, QUATRO, CINCO E SEIS RESTRIÇÕES DO CÁLCULO SENTENCIAL	123
6. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL AO CÁLCULO DE PREDICADOS MONÁDICOS SIMPLEMENTE QUANTIFICADOS.....	141
6.1. Exemplos com duas restrições.	141
Exemplo 6.1.1	141
Exemplo 6.1.2	142
Exemplo 6.1.3	143
6.2 Exemplos com três restrições.....	144
Exemplo 6.2.1	144
Exemplo 6.2.2	145
6.3 Exemplos com quatro restrições.	145
Exemplo 6.3.1	145
Exemplo 6.3.2	146
6.4 Exemplos com cinco restrições.....	147
Exemplo 6.4.1	147

7. PROGRAMA EM GEOGEBRA PARA APRESENTAÇÃO DO MÉTODO EM SALA DE AULA	149
Exemplo 7.1:.....	153
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	157

INTRODUÇÃO

Dentre as qualidades necessárias para um desenvolvimento adequado do intelecto em qualquer área do conhecimento, destacam-se como as principais o raciocínio lógico e a comunicação. Com estas ferramentas, é possível realizar o aprimoramento do saber em todos os campos, pois elas garantem o fluxo de informação (comunicação) e o processamento da informação (raciocínio lógico), que são os dois pilares da evolução do conhecimento. São estas as qualidades que dão ao indivíduo a capacidade de se tornar autodidata, como se espera de todos os alunos no nível de ensino superior, quando a dependência do aluno em relação ao professor deve começar a diminuir, até quase anular-se nos cursos de pós-graduação.

No ensino básico e médio de nossas escolas, os currículos atuais procuram desenvolver diretamente um dos fatores: a comunicação (verbal e escrita), enquanto ensinam apenas indiretamente o outro fator: o raciocínio lógico, ministrando matérias nas quais o raciocínio lógico é implícita e intuitivamente empregado, mas não explorado em suas bases matemáticas. Há diversos estudos que defendem a introdução do estudo da lógica matemática no ensino médio, porém, atualmente, o currículo escolar do Estado de São Paulo (2012) não contempla esta matéria,

Tendo por base o livro *The Game of Logic* (O Jogo da Lógica), escrito por Lewis Carrol em 1886, que desenvolveu de uma forma mais acessível os conceitos básicos da obra fundamental sobre lógica: *The Laws of Thought*, (As Leis do Pensamento), escrita por George Boole em 1850, nosso trabalho também busca tornar mais acessível os fundamentos da lógica matemática, sendo seu principal objetivo propiciar um método que possa ser utilizado para introduzir os conceitos fundamentais da lógica matemática para os alunos do ensino médio, embora não se exclua aqui a possibilidade de que este assunto também possa ser ministrado, de uma forma mais simplificada, para o ensino fundamental.

O livro *O Jogo da Lógica* apresenta todas as formas de silogismos utilizando figuras para representar as proposições envolvidas em cada argumentação. É interessante notar que, naquela época, já havia sido publicada a Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor (1870), cujos conceitos básicos Lewis Carrol utiliza implicitamente em seus diagramas lógicos. Muitos dos recursos de interpretação lógica deste seu livro, Lewis Carrol também empregou na elaboração de sua obra mais famosa: *Alice no País das Maravilhas*, nos diálogos

e situações encontrados pelos personagens daquela fábula, despertando grande interesse de todos os públicos.

Embora o trabalho de John Venn, *Symbolic Logic* (Lógica Simbólica), publicado em 1881, também já propusesse o uso de diagramas (tanto que hoje em dia são bem conhecidos os Diagramas de Venn), a proposta de Lewis Carrol também era bastante interessante em sua abordagem e apresentava ainda a vantagem de poder ser utilizada mais facilmente em argumentos lógicos com mais de três variáveis por meio de gráficos de fácil interpretação. Esta foi justamente a razão pela qual o método proposto aqui neste trabalho baseou-se no trabalho de Lewis Carrol. Tal como naquele livro, nosso método permite que os raciocínios possam ser visualizados passo a passo até a sua conclusão, o que torna mais atrativo o processo para aqueles que iniciam o estudo da lógica.

O método proposto aqui utiliza diretamente a teoria dos conjuntos, de modo que a introdução da lógica possa ser tratada como uma extensão natural dos conceitos utilizados na teoria básica de conjuntos. Esta condição apresenta a vantagem de permitir a introdução deste método como ferramenta de estudo da lógica no ensino médio a partir dos conceitos básicos da teoria dos conjuntos, inserindo-se nesse nível de ensino como uma aplicação direcionada dos conceitos de conjuntos. Com isso, abre-se a possibilidade de entendimento do assunto por meio de diagramas, com os quais os conceitos e as demonstrações são realizados por uma simples conferência visual das figuras. Evita-se assim os rigores das regras e da escrita utilizados na lógica matemática nas diversas leis de inferência, bem como as complicadas tabelas de valores lógicos, que, em um primeiro contato, tendem a esconder o sentido evidente dos argumentos e a desestimular o interesse dos alunos.

Além de procurar mostrar graficamente, por meio da teoria dos conjuntos, os conceitos de lógica, este trabalho também apresenta, como resultado deste processo de explicação por meio de figuras, um método para fazer inferências ou deduções lógicas para os problemas elementares da lógica matemática nas áreas do cálculo sentencial e do cálculo dos predicados, utilizando principalmente a simples visualização de diagramas representativos das diversas situações que estabelecem as relações entre conjuntos.

Normalmente, o raciocínio lógico, tal como aquele tratado no Cálculo Sentencial, é apresentado na forma de um tipo de "desafio", em que, dada uma série de proposições, pede-se para verificar a validade ou não de uma determinada conclusão. Neste processo, a lógica clássica procura encontrar, por meio de um conjunto de regras de dedução lógica, um desenvolvimento lógico adequado, que conduza à conclusão do argumento. É

necessário, portanto encontrar um caminho que nos conduza dos argumentos até a conclusão. Este é um dos maiores obstáculos a serem superados por aqueles que iniciam o aprendizado das leis do raciocínio lógico. Neste sentido, o método proposto aqui apresenta a grande vantagem de dispensar a necessidade de se encontrar um determinado caminho de ligação entre premissas e conclusão, pois a construção gradual dos diagramas das proposições resulta em um diagrama que contém em si não apenas a validade da conclusão pedida, mas também todas as conclusões possíveis para aquele argumento!

A aplicação deste método também permite lidar com aquilo que poderia ser chamado de silogismos com mais de três variáveis, abrindo o campo de aplicação deste método ao raciocínio lógico quantificado para um número maior de variáveis.

Uma característica importante do método contido neste trabalho está no fato deste apresentar todos os argumentos e regras de inferência da lógica de uma forma visual evidente, na qual o resultado e as várias consequências possíveis estão presentes conjuntamente em uma única figura, característica esta que pode facilitar o entendimento de muitos conceitos que, na maioria das vezes, ficam obscurecidos pelo simbolismo sistemático da linguagem da lógica matemática.

Como orientação geral, a apresentação dos conceitos buscará seguir aqui a sequência gradativa natural dos temas, que se desenvolverão a partir dos conceitos da teoria dos conjuntos, aos quais serão gradualmente associados os conceitos da lógica matemática. Com isso, estará sendo proposta também uma forma de apresentação do assunto em sala de aula. Desse modo, as definições irão cada vez mais se desenvolvendo e se aprofundando, até chegarem a um conceito mais rigoroso e formarem um sistema compacto dentro dos limites estabelecidos para este trabalho.

Embora seja suposto na apresentação um conhecimento prévio dos alunos da teoria dos conjuntos, isto não é essencial, pois os conceitos da teoria dos conjuntos são retomados e redefinidos ao longo da exposição.

É importante ressaltar que, apesar de se recorrer aqui à intuição para definir os conceitos em um primeiro momento, a permanente utilização do recurso de visualização gráfica dos conceitos apresenta uma alternativa para auxiliar o entendimento e validar as demonstrações, servindo também para a verificação das conclusões.

No Capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos da teoria dos conjuntos de uma forma intuitiva, dando ênfase às conexões dos conceitos aí utilizados com aqueles da lógica matemática.

No Capítulo 2, retomamos os conceitos básicos da teoria dos conjuntos de um modo mais formal e começamos a utilizar a equivalência da álgebra dos conjuntos e da álgebra da lógica matemática para aplicações dos diagramas de conjuntos no raciocínio lógico.

No Capítulo 3, apresentamos os fundamentos do método dos diagramas n-literais ao raciocínio lógico.

No Capítulo 4, apresentamos a aplicação do método dos diagramas n-literais às 24 figuras de silogismos.

No Capítulo 5, desenvolvemos a aplicação dos diagramas n-literais aos problemas de lógica matemática do cálculo sentencial.

No Capítulo 6, apresentamos algumas aplicações dos diagramas n-literais aos problemas de lógica matemática do cálculo dos predicados.

No Capítulo 7, apresentamos um programa elaborado no software Geogebra para facilitar a apresentação do método em sala de aula.

No Capítulo 8, apresentamos nossas considerações finais a respeito da utilização do método de diagramas n-literais para o ensino dos fundamentos da lógica matemática.

1. CONCEITOS BÁSICOS

Apresentamos neste capítulo os conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos, iniciando de um modo intuitivo e dando ênfase às relações básicas entre estes e os conceitos da lógica matemática na área específica do cálculo dos predicados, para depois apresentar as definições formais.

1.1. NOÇÃO INTUITIVA DE "CONJUNTO", DOS TERMOS CORRELATOS E DE SUAS RELAÇÕES COM A LÓGICA MATEMÁTICA

A principal ideia para desenvolver os conceitos da teoria dos conjuntos relacionados à lógica matemática é a ideia de *restrição*. Para desenvolvê-la, tomemos inicialmente, como foco da nossa atenção, todos os seres vivos. Vamos representar esta ideia graficamente, conforme a Figura 1.1.1, considerando que a folha de papel representa qualquer coisa e que a linha fechada delimita e representa a região dentro da qual situa-se o foco de nossa atenção: os seres vivos.

Figura 1.1.1 — Diagrama representativo dos "seres vivos"



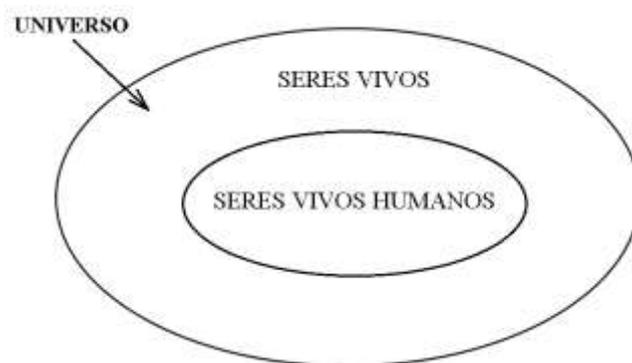
Fonte: O autor

Esta representação estabelece precisamente aquilo a que nos referimos (seres vivos), colocando no foco de nossa atenção qualquer coisa que satisfaça a *restrição* estabelecida. Vamos considerar neste trabalho que os pontos situados na linha delimitadora também fazem parte do foco de nossa atenção. Torna-se imediatamente evidente pela figura que, na região externa à elipse, não pode haver seres vivos.

Façamos agora uma nova ressalva em relação ao foco de nossa atenção, restringindo-a por uma nova condição, com a qual designamos apenas os seres vivos que sejam humanos, conforme a Figura 1.1.2. Assim, tudo que seja um ser, que esteja vivo e que

seja humano está no foco de nossa atenção, constituindo aquilo que se convencionou chamar de "**conjunto**" dos seres humanos vivos, conforme representado na Figura 1.1.3 pela elipse menor, contida na elipse maior. O conceito de conjunto está assim ligado a uma delimitação precisa do foco de nossa atenção para alguma parte específica de um todo preexistente definido. Esta condição está diretamente ligada ao conceito de predicado, que estipula uma qualidade característica capaz de delimitar o foco de nossa atenção. Assim, a restrição "humanos" corresponde ao predicado "humanos" aplicado ao conjunto dos seres vivos.

Figura 1.1.2 — Diagrama representativo dos "seres humanos vivos"

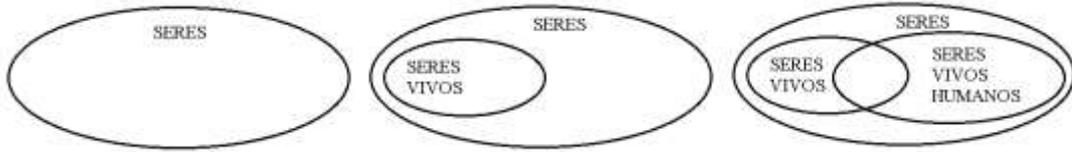


Fonte: O autor

Uma característica fundamental de uma restrição, como definição de um conjunto, é o fato de que esta condição sempre estabelece duas possibilidades: ou a restrição se verifica ou não se verifica. Esta característica está representada no diagrama da Figura 1.1.2 pelas duas regiões nas quais ficou dividida a figura representativa dos seres vivos da Figura 1.1.1. Como se pode ver também, indicado na Figura 1.1.2, podemos considerar que o conjunto dos seres vivos humanos foi formado por meio de uma restrição aplicada a um conjunto maior, que é o conjunto de todos os seres vivos, pois restringiu nossa atenção aos seres vivos que são humanos. Este conjunto maior, no caso "seres vivos", sobre o qual estabelecemos restrições, é denominado conjunto **universo**, ou simplesmente universo.

É importante observar que ambas restrições ("humanos" e "vivos") podem ser vistas também como aplicadas a um conjunto maior, dado pelo conjunto dos seres, que define um novo universo, o qual é primeiramente dividido em duas partes por uma das restrições e, em seguida, tem cada uma destas partes dividida em duas partes pela outra restrição. O diagrama desta dupla restrição pode ser representado pela sequência de diagramas da Figura 1.1.3.

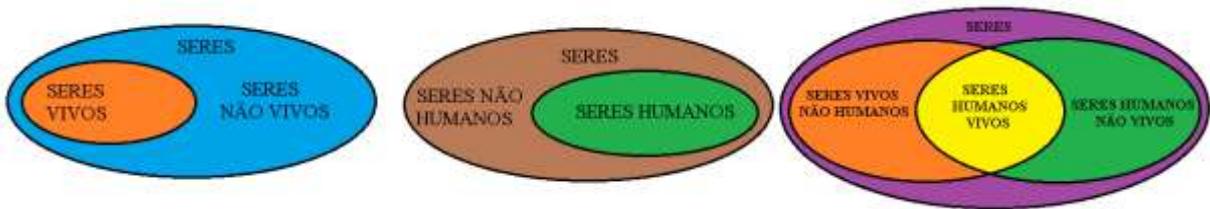
Figura 1.1.3 — Construção do diagrama de conjuntos para duas restrições



Fonte: O autor

A primeira restrição estabeleceu a divisão do universo dos seres em duas partes: os seres vivos e os seres não vivos, e a segunda restrição estabeleceu a divisão de cada uma destas partes em mais duas partes: a dos seres vivos ficou dividida em humanos e não humanos e a dos seres não vivos ficou dividida em humanos e não humanos, conforme podemos observar na Figura 1.1.4.

Figura 1.1.4 — Etapas da construção do diagrama de conjuntos para duas restrições



Fonte: O autor

O resultado da aplicação das duas restrições é o estabelecimento de quatro regiões distintas no universo dos seres: seres vivos humanos, seres não vivos humanos, seres vivos não humanos e seres não vivos não humanos. É fácil intuir que o número de regiões do diagrama final com um número de n restrições é dado por: 2^n .

Assim, a ideia fundamental no conceito de conjunto exposto acima é o fato de que cada restrição aplicada resulta essencialmente na divisão do conjunto ao qual ela foi aplicada em duas partes: uma parte que obedece à restrição (região da restrição) e outra parte que não obedece à restrição (região externa à região da restrição). Assim, na região da restrição, a condição que a define é verificada (verdadeira) e, na região externa à restrição, a condição não é verificada (falsa). Estes são justamente os dois valores básicos do conceito de conjunto que correspondem aos valores fundamentais da lógica matemática (verdadeiro e falso, 1 e 0).

Dizemos que cada um dos seres humanos vivos constitui aquilo que se convencionou chamar de um "**elemento**" do conjunto dos seres humanos vivos. Deste modo, todo conjunto é formado pelos elementos que satisfazem às condições que estabelecem o conjunto. Quando algum elemento satisfaz a restrição de definição de um conjunto, dizemos que esse elemento "**pertence**" ao conjunto (relação de "pertinência" entre um elemento e seu respectivo conjunto).

Para o caso no qual o conjunto seja definido por uma restrição que não possa ser satisfeita (por exemplo: "os seres vivos humanos ovíparos"), não haverá elementos que satisfaçam tal condição, ou seja, o conjunto não conterá nenhum elemento. Neste caso, dizemos que o conjunto é **vazio**. A representação gráfica genérica do conjunto nesta condição, mesmo não contendo elementos, continua sendo uma região determinada por uma linha fechada no papel, cuja área deve ser destacada por alguma característica específica no diagrama, por exemplo hachuras, como indicado na Figura 1.1.5.

Figura 1.1.5 — Diagrama de conjunto vazio



Fonte: O autor

É importante notar que, ao restringirmos o foco de nossa atenção a somente uma parte (seres humanos vivos) do universo estabelecido (todos os seres), estabelecemos um conjunto construído dentro do conjunto universo, aplicando apenas novas condições de seleção (predicado) aos elementos componentes do conjunto universo, mas sem acrescentar nenhum elemento novo. Assim, é evidente que todos os elementos do conjunto formado pela restrição são também elementos do conjunto universo. Nestas condições, dizemos que o conjunto obtido pela restrição está "**contido**" (relação de "continência" entre dois conjuntos) no conjunto sobre o qual foi feita a restrição correspondente.

Uma vez que um ser não pode ser humano e não humano ao mesmo tempo, dizemos que estas condições são **mutuamente exclusivas**, ou seja, uma condição exclui a

outra. Isto significa que um elemento não pode pertencer a um conjunto e não pertencer a este conjunto concomitantemente, o que, graficamente, quer dizer que um ponto do digrama de conjunto não pode estar dentro e fora da região que delimita este conjunto. Esta característica é equivalente ao Princípio da Não Contradição estabelecido por Aristóteles nos fundamentos da lógica, segundo o qual nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Desse modo, o conjunto dos seres vivos pode, por exemplo, ser dividido em duas partes ou conjuntos **disjuntos**: o conjunto dos seres vivos humanos (região de cor verde) e o conjunto dos seres vivos não humanos (região de cor amarela), sendo que estas duas partes juntas formam o conjunto dos seres vivos, conforme mostrado na Figura 1.1.6.

Figura 1.1.6 — Diagrama de conjuntos disjuntos



Fonte: O autor

Dizemos neste caso que o conjunto dos seres vivos não humanos é o conjunto "**complementar**" do conjunto dos seres vivos humanos em relação ao conjunto universo dos seres vivos. De modo análogo, dizemos que o conjunto dos seres não vivos constitui o conjunto complementar do conjunto dos seres vivos em relação ao conjunto universo de todos os seres. Vemos, portanto, que o conceito de conjunto complementar está sempre ligado a um conjunto de referência, em relação ao qual ele é definido, sendo que o conjunto universo é a união de qualquer subconjunto seu com o respectivo complementar em relação a este universo.

Vamos rever o efeito da aplicação consecutivas de restrições a um determinado universo, utilizando outro exemplo. Consideremos que o nosso universo é o conjunto dos seres vivos humanos, de modo que toda nova condição será sempre precedida implicitamente das condições do nosso universo (seres vivos humanos). Assim, ao falarmos simplesmente professores, estamos nos referindo aos seres vivos humanos professores e, ao falarmos casados, estamos nos referindo aos seres vivos humanos casados. Sob estas condições, é fácil

verificar que haverá não só uma região correspondente a casados que são professores e uma região correspondente a professores que são casados, mas também uma região correspondente a professores que não são casados e uma região correspondente a casados que não são professores.

Para demonstrarmos a necessidade da existência destas regiões correspondentes às respectivas restrições, basta ver que, ao estabelecermos a restrição "professores" ao conjunto dos "seres vivos", este conjunto foi dividido em duas partes: a dos seres vivos professores e a dos seres vivos não professores, sendo que estas duas partes juntas constituem o conjunto dos "seres vivos". Assim, ao estabelecer mais uma restrição ao conjunto dos "seres vivos" pela condição "casados", estamos dividindo o conjunto dos "seres vivos" em duas partes: a dos seres vivos casados e a dos seres vivos não casados. Mas o conjunto dos "seres vivos" é formado pelos conjuntos dos seres vivos professores e dos seres vivos não professores, logo a restrição "casados" é estabelecida em cada um destes conjuntos, resultando assim nas regiões: seres vivos professores casados, seres vivos professores não casados, seres vivos não professores casados e seres vivos não professores não casados. Vemos assim que o estabelecimento de uma restrição a um conjunto é equivalente à aplicação da restrição a cada uma das regiões correspondentes às restrições que estão aplicadas àquele conjunto. Desse modo, cada nova restrição implica em dobrar o número das regiões já estabelecidas pelas demais restrições, daí o número de regiões ser dado por uma potência de dois, dada pelo número de restrições, como já vimos.

Uma vez que a restrição professores casados significa a mesma restrição de casados professores, estes dois conjuntos, professores e casados, possuem em comum a região professores casados, que forma o que se convencionou chamar de conjunto "**interseção**" entre o conjunto dos seres vivos humanos professores e o conjunto dos seres vivos humanos casados, conforme mostrado pela região de cor azul na Figura 1.1.7.

Estes conceitos deixam claro que é indiferente a ordem na qual as restrições estão estabelecidas, tal como acontece com a utilização de vários predicados. Quando nos referimos ao conjunto dos seres vivos humanos professores casados, é a mesma coisa que nos referirmos ao conjunto dos seres humanos casados professores vivos ou ao conjunto dos casados humanos seres professores vivos, e assim por diante, pois estamos nos referindo à interseção de todos estes conjuntos independente da ordem na qual estão estabelecidas as restrições. Observemos que pode soar um pouco estranho nos referirmos à restrição "humanos seres", nesta ordem, mas isto simplesmente mostra com clareza que a restrição humanos foi aplicada à restrição seres, de modo que a relação de continência fica evidenciada, uma vez

que o conjunto dos humanos está contido no conjunto dos seres, portanto se algo é humano então este algo é necessariamente também um ser. Assim o mais natural seria falarmos "humanos, logo seres". Esta é a relação fundamental entre a teoria dos conjuntos e a lógica matemática.

Figura 1.1.7 — Diagrama da interseção de conjuntos



Fonte: O autor

É importante ressaltar que, justamente pelo fato de a ordem das restrições efetuadas na definição de um determinado conjunto não modificar este conjunto final obtido pela sequência de restrições, podemos utilizar as restrições justapostas em qualquer ordem, exatamente como se os termos correspondentes a cada restrição fossem os fatores de uma multiplicação (descoberta fundamental de George Boole) cujo resultado é o conjunto interseção final resultante de todas elas. Esta mesma propriedade também se verifica em relação aos predicados utilizados na linguagem comum, como o próprio exemplo demonstra.

Figura 1.1.8 — Diagrama da união de conjuntos



Fonte: O autor

Poderíamos formar também uma condição que restringisse o foco de nossa atenção a duas regiões de um determinado universo. Para tal restrição, portanto, não se impõe uma região comum a ambas as regiões escolhidas, mas tão-somente a condição de que

qualquer uma das duas faz parte da restrição estabelecida. Este tipo de restrição estabelece o que se convencionou chamar de "**união**" entre conjuntos. Assim como pudemos escolher duas regiões, também poderíamos ter escolhido uma quantidade maior de regiões do universo para compor tal restrição. Como exemplo deste tipo de restrição, poderíamos, no conjunto universo dos seres, estabelecer a condição composta pelas regiões dos seres vivos humanos casados e a dos seres vivos humanos professores, conforme indicado pela região em amarelo da Figura 1.1.8.

É importante ressaltar aqui a representação gráfica da região correspondente à união dos seres vivos humanos casados e a dos seres vivos humanos professores, que foi aqui apresentada de forma genérica, a qual abrange todas as possibilidades dadas por duas restrições consecutivas, num total de quatro regiões componentes.

Com estes exemplos, podemos ter uma noção básica dos conceitos de *universo*, *conjunto*, *conjunto vazio*, *elemento*, *pertinência*, *continência*, *complemento*, *interseção* e *união*.

Nesta introdução aos conceitos básicos da teoria dos conjuntos, uma vez fixado um conjunto universo, surge com preponderância a ideia de restrição, a qual está ligada à condição que determina a formação de um determinado conjunto, ou seja, à condição que verifica se um elemento pertence ou não a um determinado conjunto. A ideia de restrição, como apresentada aqui, é equivalente ao conceito de predicado no cálculo dos predicados da lógica matemática. Assim, podemos dizer, por exemplo, que o predicado "vivos" aplicado ao conjunto dos seres restringe os elementos do conjunto de seres àqueles que possuem o atributo ou qualidade de "vivos". Da mesma forma, as restrições "humanos", "professores" e "casados" também são predicados, os quais, tal como as restrições, podem ser aplicados simultaneamente a um determinado conjunto, para levar a uma mesma condição final, independente da ordem na qual sejam aplicados, como no exemplo que foi apresentado. Vemos então que o conceito de predicado é equivalente ao de restrição, ou seja, é equivalente ao conceito de conjunto, pois todo conjunto, como já vimos, é definido por uma determinada restrição. O predicado tem, portanto, a característica fundamental de estabelecer uma condição restritiva que pode assumir apenas dois valores: verdadeiro ou falso, ou seja, pertinência ou não pertinência. Além disso, tal como acontece com os predicados, as restrições também definem conjuntos que podem ser vazios ou não e conjuntos que podem ou não conter todos os elementos de um determinado conjunto ou universo. Assim as restrições definem tais tipos de conjuntos e, portanto, estão relacionados à ideia de quantização neste sentido (todos, nenhum, ao menos um) como veremos mais adiante. Estas qualidades de

restrição e de quantização estabelecidas pelos conjuntos ou restrições são equivalentes aos predicados e fundamentam a caracterização do cálculo dos predicados.

Dentre os conceitos da teoria dos conjuntos, o conceito de continência entre conjuntos (estar contido) destaca-se como um conceito fundamental para o desenvolvimento de toda a lógica matemática, pois estabelece sua relação básica, que é a relação condicional: "se...então", ou relação de "implicação", uma vez que a condição de um elemento pertencer a um conjunto que está contido em outro conjunto estabelece que este elemento tem de pertencer também ao outro conjunto. Esta é a relação fundamental da inferência lógica, constituindo as verdadeiras "pernas" com as quais caminha o raciocínio lógico! Este é o elo fundamental com o qual se forma o encadeamento em uma argumentação lógica!

Pela relação de pertinência é possível raciocinar da seguinte forma: se alguma coisa é um ser vivo humano professor casado, então essa alguma coisa é um ser vivo humano professor, pois o conjunto dos seres vivos humanos professores casados é obtido também por meio de uma restrição do conjunto dos seres vivos humanos professores e, por isso, está contido dentro deste, de modo que os elementos pertencentes àquele conjunto necessariamente pertencem a este. Pelas mesmas razões, poderíamos raciocinar também da seguinte forma: se alguma coisa é um ser vivo humano casado professor, então essa alguma coisa é um ser vivo humano casado, pois o conjunto dos seres vivos humanos casados professores é obtido também por meio de uma restrição do conjunto dos seres vivos humanos casados e, por isso, está contido dentro deste, de modo que os elementos pertencentes àquele conjunto necessariamente pertencem a este. Estes casos podem ser vistos nas figuras 1.1.9.

Figura 1.1.9 — Diagrama de pertinência entre conjuntos

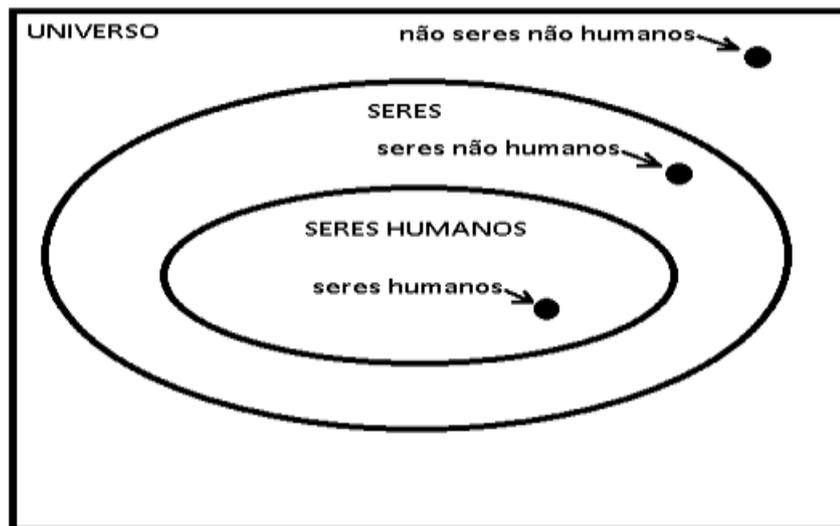


Fonte: O autor

Para entender mais precisamente a relação de continência (ou implicação) é preciso observar o diagrama simplificado da Figura 1.1.10, no qual o conjunto "seres humanos" está contido no conjunto "seres" em relação ao conjunto "universo" de tudo que

existe, mostrando as três regiões possíveis nas quais pode haver um elemento nesta condição de continência.

Figura 1.1.10 — Diagrama das posições possíveis na relação de continência



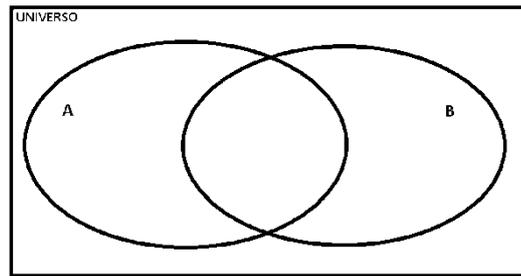
Fonte: O autor

Como podemos ver, não existe a região "humanos não seres" (trata-se de uma região vazia não indicada no diagrama), ou seja, na relação de continência não pode existir nenhum elemento que satisfaça a condição de estar no conjunto "humanos" e não estar no conjunto "seres", como fica evidenciado no diagrama. Assim, uma vez que o conjunto "humanos" está contido no conjunto "seres", se algum elemento pertence ao conjunto "humanos", então ele pertence ao conjunto "seres". Da mesma forma, se um elemento não pertence ao conjunto "seres", então ele não pertence ao conjunto "humanos".

Estas relações são análogas àquelas aplicadas no conceito de implicação da lógica matemática, cuja tabela de valores pode ser claramente entendida sob esta perspectiva de conjuntos. Deve-se notar que este diagrama não está construído na forma genérica, a qual deveria conter as quatro regiões correspondentes às duas restrições consecutivas ("seres" e "humanos"). A representação completa desta relação de continência deveria incluir a região "humanos não seres", porém indicada como um região vazia.

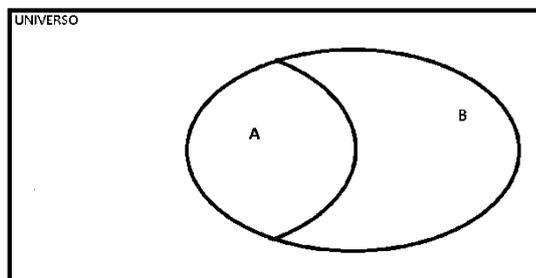
Uma vez que a relação mais genérica entre dois conjuntos A e B pode ser representada pelo diagrama da Figura 1.1.11, vemos que a relação de continência entre o conjunto A e o conjunto B (A está contido em B) é obtida por uma restrição do diagrama genérico, no qual é suprimida a região de A que não está contida em B, do qual resulta o diagrama da Figura 1.1.12.

Figura 1.1.11 — Diagrama da relação genérica entre dois conjuntos (A e B)



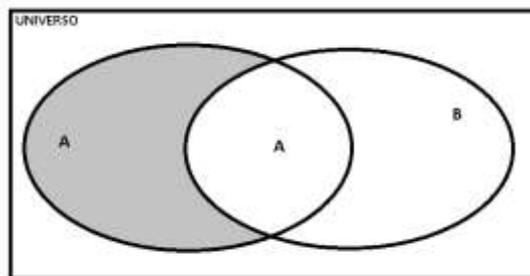
Fonte: O autor

Figura 1.1.12 — Diagrama da relação "A está contido em B", obtida por meio da supressão da região: "A" e "não B"



Fonte: O autor

Figura 1.1.13 — Diagrama da região suprimida do diagrama da relação genérica entre dois conjuntos



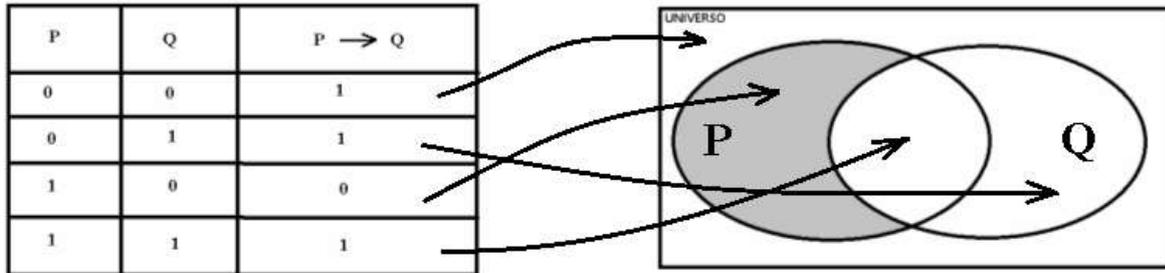
Fonte: O autor

A parte suprimida está mostrada na Figura 1.1.13, sendo esta região exatamente a região que, como já vimos, não pode existir na relação de continência entre A e B (A contido em B), ou seja, a região que corresponde às restrições "A" e "não B".

É interessante notar que a relação de continência entre conjuntos mostra claramente que somente podem ocorrer três casos compatíveis com tal condição. Assim, teremos três condições verdadeiras e uma falsa para a relação de continência, no sentido de

poder ou não haver uma determinada região entre aquelas que determinam a relação geral entre dois conjuntos. Fazendo a representação da condição verdadeira com o valor "1" e a condição falsa com o valor "0", é fácil ver que o resultado é a conhecida tabela de valores da implicação lógica, conforme mostrado na Figura 1.1.14.

Figura 1.1.14 — Tabela verdade x relação de continência para a implicação lógica



Fonte: O autor

Como se pode ver, por meio dos conceitos e dos diagramas de conjuntos é possível compreender graficamente por que os valores da tabela verdade da implicação lógica são aqueles mostrados acima. Na verdade, esta é uma forma alternativa para evidenciar esta tabela de valores, pois estes, em vez de simplesmente aceitos, são visualizados no respectivo diagrama.

2. TEORIA BÁSICA DOS CONJUNTOS E SUAS APLICAÇÕES AO RACIOCÍNIO LÓGICO

Uma vez que o objetivo deste trabalho é apresentar um método para iniciação à lógica matemática de uma forma natural e "palatável" para o aluno do ensino médio, vamos aqui tomar por base a chamada Teoria Ingênua dos Conjuntos, que foi elaborada por Georg Cantor e que se desenvolve sobre conceitos informais e intuitivos. Não estaremos aqui, portanto, trabalhando com os conceitos axiomáticos da moderna teoria dos conjuntos, desenvolvida por Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel (teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha), que nasceu devido a questões levantadas pelo Paradoxo de Russel com relação à teoria de Cantor. Tal paradoxo propõe o seguinte critério:

Um barbeiro de Sevilha obedece duas condições:

1. Faz a barba de todas as pessoas de Sevilha que não se barbeiam;
2. Somente faz a barba de quem não se barbeia.

Como podemos ver, nestas condições, surge a contradição, pois, se o barbeiro faz sua própria barba, então ele não pode fazer sua própria barba e, se o barbeiro não faz sua própria barba, então ele faz sua própria barba. Tal proposição estabelece na definição de um conjunto um critério recursivo, do qual nasce o paradoxo. Foi este tipo de contradição, atribuída à informalidade da Teoria de Cantor, que deu origem à moderna teoria dos conjuntos.

É essencial não ficar dependente dos conceitos lógicos abstratos que fundamentam a moderna teoria dos conjuntos, pois a finalidade deste trabalho é estimular e desenvolver o raciocínio lógico do aluno, sendo esta justamente a ferramenta que, uma vez desenvolvida, tornará justamente possível o aluno compreender os axiomas abstratos da moderna teoria dos conjuntos. Por esta razão, adotaremos aqui apenas os conceitos e as definições básicas da Teoria Ingênua dos Conjuntos, que serão utilizados para a compreensão dos mecanismos básicos do raciocínio lógico e do método de inferência aqui proposto, sempre aplicando comprovações visualizadas por meio de diagramas de conjuntos.

Apresentaremos os conceitos da teoria dos conjuntos concomitantemente com as suas aplicações à lógica matemática, de modo a estarmos sempre lidando com a quantidade

mínima de conceitos necessários para o desenvolvimento gradativo do tema, que é o modo sugerido aqui para a apresentação do assunto aos alunos, a fim de não desanimá-los com cargas desnecessárias.

2.1. TEORIA BÁSICA DOS CONJUNTOS

Neste trabalho, vamos considerar como *conjunto* qualquer coleção bem definida de coisas de qualquer natureza.

Exemplo 2.1 Exemplos de conjuntos:

- a) O conjunto dos números naturais menores do que 10;
- b) O conjunto das emoções humanas;
- c) O conjunto dos alunos do Profmat que se formaram em 2012;
- d) O conjunto dos professores que são casados;
- e) O conjunto dos seres humanos vivos;
- f) O conjunto dos números naturais negativos;
- g) O conjunto dos números naturais.

Se alguma coisa satisfaz à condição de formação de um conjunto, esta alguma coisa é um elemento daquele conjunto. Se a definição de um conjunto não admite nada que a satisfaça, ou seja, se o conjunto não tem nenhum elemento, dizemos que este conjunto é um conjunto vazio, sendo denotado pelo símbolo \emptyset . Portanto todo conjunto não vazio é constituído por pelo menos um elemento. No item f do exemplo 2.1 temos um exemplo de conjunto vazio, pois nada satisfaz aquela condição (não existem números naturais negativos).

Podemos também ter conjuntos com um número finito de elementos (exemplo 2.1.a) ou com um número infinito de elementos (exemplo 2.1.g). Esta questão sobre a quantidade de elementos de um conjunto (cardinalidade do conjunto) não será abordada aqui, pois o método exposto neste trabalho somente se utiliza de diagramas compostos por regiões delimitadas, as quais podem representar conjuntos finitos ou infinitos, não sendo esta condição relevante para o entendimento das relações entre os conjuntos em si e a lógica correspondente.

Vamos utilizar as letras maiúsculas A, B, C, D, ... para designar conjuntos e as letras minúsculas a, b, c, d, ... para designar elementos.

Quando um determinado elemento satisfaz à condição de formação de um conjunto, dizemos que este elemento pertence (relação representada pelo símbolo: \in) a este conjunto. Assim, se b é um elemento do conjunto B , escrevemos que $b \in B$ (relação de pertinência entre o elemento b e o conjunto B), caso contrário diremos que b não pertence a B e escrevemos $b \notin B$. Portanto, se um elemento pertence a um conjunto ele, assim como satisfaz a condição de formação daquele conjunto, também satisfaz a restrição que define aquele conjunto e, portanto, tem o predicado correspondente àquele conjunto.

Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B (relação de continência entre os conjuntos A e B , representada pelo símbolo: \subset), se todos os elementos de A pertencem ao conjunto B . Esta relação é escrita $A \subset B$ (leia-se A está contido em B). Tal condição equivale a afirmar que não existem elementos do conjunto A que não pertençam ao conjunto B . Assim considera-se que o conjunto vazio está contido em qualquer outro conjunto, por exemplo X , pois o conjunto vazio, pelo fato de não possuir elementos, não tem elementos que não pertençam a este conjunto X , ainda que também não contenha elementos pertencentes a este conjunto X .

Os elementos que pertencem ao universo definido U mas não pertencem a um determinado conjunto A deste universo, constituem o conjunto complementar do conjunto A em relação ao conjunto universo U . Esta é a definição matemática para a negação da restrição com a qual construímos um conjunto, como fizemos no exemplo do conjunto dos "seres" "vivos" "não humanos". Matematicamente, o conjunto complementar de um determinado conjunto A , quando não há dúvidas sobre qual é o universo de definição, é indicado por A^C . No caso do conjunto de referência não ser o próprio universo mas sim um conjunto B deste universo, o complemento do conjunto A em relação ao conjunto B é, analogamente, o conjunto dos elementos que pertencem a B mas não pertencem a A , sendo esta relação indicada por A_B^C . Pelo conceito de complementar, é evidente que o complementar do conjunto universo é o conjunto vazio e vice-versa, pois o conjunto universo contém todos os elementos em questão.

Dados dois conjuntos A e B , define-se como interseção (relação representada pelo símbolo: \cap) dos conjuntos A e B ao conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos, sendo este conjunto escrito matematicamente como $A \cap B$. Este conceito de interseção foi utilizado em nossa introdução para podermos fazer as restrições consecutivas no conjunto universo, que foram representadas pela simples justaposição das condições restritivas. Assim, o conjunto dos seres humanos vivos é o

resultado da interseção do conjunto dos seres humanos e do conjunto dos seres vivos, como podemos ver na Figura 2.1.1.

Finalmente, define-se que um conjunto A é igual a um conjunto B , $A = B$, quando o conjunto A está contido no conjunto B e vice-versa, ou seja, não existem elementos de B que não pertençam a A nem elementos de A que não pertençam a B .

Figura 2.1.1 — Diagrama da interseção entre dois conjuntos



Fonte: O autor

Vejam algumas aplicações destes conceitos ao raciocínio lógico.

Como já observamos na seção anterior, a ferramenta fundamental da lógica é a implicação (ou dedução, ou inferência, ou relação de continência). Esta relação lógica ocorre entre dois termos: o antecedente e o conseqüente. Assim, quando dizemos: "se o aluno estuda, então o aluno aprende", o antecedente é a sentença ou proposição "o aluno estuda" e o conseqüente é a sentença "o aluno aprende". De uma forma mais genérica, tanto o termo antecedente como o termo conseqüente podem ser formados por uma série de condições ou restrições, mas a relação de implicação entre os dois permanece. Neste exemplo, o universo é formado por tudo que é aluno, e as restrições ou predicados são respectivamente "estuda" e "aprende".

A principal característica das proposições deste exemplo está no fato de serem classificáveis como falsas ou verdadeiras, sendo esta a condição para que elas sejam consideradas proposições na lógica matemática. Neste exemplo, as proposições assumem o caráter de restrição, definindo subconjuntos de um determinado universo. Assim, no universo de "alunos", temos a restrição ou conjunto daqueles elementos que "estudam" e a restrição ou conjunto daqueles elementos que "aprendem". Neste sentido, estas restrições definem uma condição que pode ou não ser satisfeita pelos elementos do universo, o que define o conceito de *predicado*, qualidade de satisfazer ou não (falso ou verdadeiro) uma determinada condição.

Assim, o modo segundo o qual um predicado é ou não satisfeito pode ser usado para *quantificar* este determinado predicado ou restrição, estabelecendo diferentes graus de satisfação da condição, tais como *todos*, *nenhum*, *algum*, etc. Esta é a característica fundamental para o *Cálculo dos Predicados*, que estuda, na Lógica Matemática, as relações lógicas entre sentenças construídas por meio de predicados quantificados.

Quando, no universo de "alunos" definimos a condição "estuda", estamos delimitando o conjunto dos alunos que estudam, estabelecendo o predicado restritivo "estuda" ao universo de "alunos". Porém, quando afirmamos que o aluno João estuda, estamos nos referindo a um elemento específico do universo "alunos", sendo que este elemento satisfaz o predicado "estuda" (está contido no conjunto dado pela restrição "estuda"), de modo que também concluímos que "João aprende". Assim, quando nos referimos ao predicado em si apenas como restrição, estamos definindo um determinado conjunto, por meio da restrição aplicada pelo predicado a todos os elementos do universo em questão.

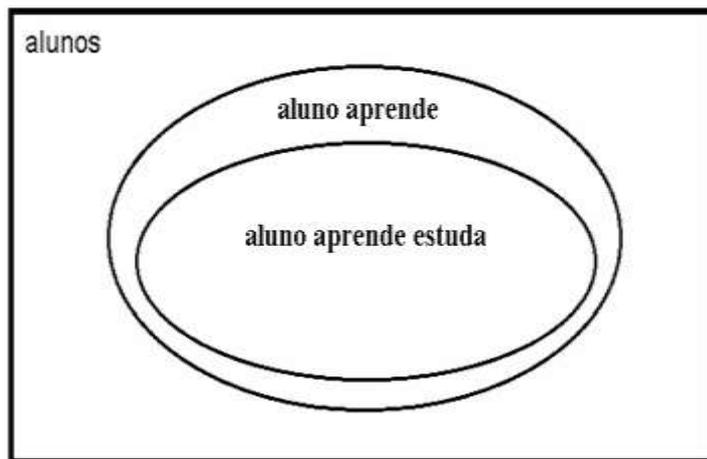
Na lógica matemática também temos o Cálculo Sentencial, que estuda o raciocínio lógico envolvendo sentenças que sejam expressões sintáticas afirmativas declarativas bem definidas. Neste campo, os predicados estão sempre ligados a elementos específicos. No exemplo dado acima, poderíamos ter a seguinte implicação: "se João estuda, então João aprende". Assim, no Cálculo Sentencial, as relações de restrições quantificadas entre conjuntos não são levadas em consideração, mas apenas o valor verdadeiro ou falso de cada termo. Nesta condição, os termos quantificadores (*todos*, *algum*, *nenhum* etc.) assumem unicamente a função de sujeitos na sentença. Assim, por exemplo, a validade da proposição: "se todos saírem, então alguns chegarão" só depende do valor verdadeiro ou falso atribuído a cada uma das sentenças. Mais adiante veremos como é possível tratar também as proposições do Cálculo Sentencial por meio da teoria dos conjuntos.

A inferência apresentada anteriormente, "se o aluno estuda, então o aluno aprende", também pode ser representada na linguagem dos conjuntos. Neste caso, considerando o universo dos alunos, teríamos o conjunto dos elementos que obedecem à condição "aluno estuda", e o conjunto dos elementos que obedecem à condição "aluno aprende" e "aluno estuda". A relação de implicação, assim, fica definida pela relação de continência na qual o conjunto restrito à condição "aluno estuda" está contido naquele restrito à condição "aluno aprende", conforme a Figura 2.1.2.

A condição de aluno, que define nosso universo, é representada pela região limitada pelo retângulo, de modo que, em toda esta região, a condição "aluno" é satisfeita. A condição de "aluno" "aprende" é representada pela região da elipse maior, de modo que a

região delimitada satisfaz a condição "aluno aprende". A condição de "aluno", "aprende" e "estuda" é representada pela região da elipse menor, de modo que a região delimitada satisfaz a condição "aluno aprende estuda". No diagrama, a região correspondente à condição de que a proposição "aluno estuda" é falsa é representada por toda a área externa à elipse menor.

Figura 2.1.2 — Diagrama da relação de continência entre antecedente e consequente



Fonte: O autor

Neste exemplo, se representarmos a proposição "aluno estuda" pela letra E (conjunto E dos alunos que estudam) e a proposição "aluno aprende" pela letra A (conjunto A dos alunos que aprendem), poderíamos expressar o argumento por: "Se E, então A". Utilizando os conceitos de conjunto, este argumento seria representado pela expressão $E \subset A$, com a qual se afirma que, se um elemento pertence ao conjunto E (aluno estuda), então este elemento pertence ao conjunto A (aluno aprende).

Observemos que a característica de uma sentença poder ser classificada como falsa ou verdadeira, como exige a Lógica Matemática, está plenamente representada nos conjuntos acima definidos pela relação de pertinência, pois, se um elemento satisfaz a condição "aluno estuda" ("estuda" é verdadeiro), então ele não satisfaz à condição "aluno não estuda" ("não estuda" é falso) e vice-versa, pois um determinado elemento não pode pertencer e não pertencer ao mesmo conjunto, como fica evidenciado pelos diagramas, nos quais um ponto qualquer do diagrama pode pertencer apenas a uma das regiões delimitadas pelas elipses (*um ponto sobre a linha de uma elipse pertence ao conjunto delimitado por esta elipse*, como já definimos anteriormente).

2.2. A SIMBOLOGIA DOS OPERADORES UTILIZADOS NA LÓGICA MATEMÁTICA E NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Na Figura 2.2.1, são apresentados os símbolos dos operadores (conectivos) correspondentes à álgebra utilizada na teoria dos conjuntos e na lógica matemática.

Tal como na teoria dos conjuntos, a lógica matemática designa suas proposições por letras maiúsculas, e suas constantes, que correspondem aos elementos dos conjuntos, por letras minúsculas. Como já vimos, um conjunto é definido por uma condição que restringe ou delimita um determinado conjunto universo e pode assumir um valor lógico (falso ou verdadeiro).

Assim, ao definirmos a restrição "estuda" (sentença sintaticamente definindo um predicado), estamos nos referindo ao conjunto dos elementos que satisfazem à condição "estuda", sendo que um elemento específico deste conjunto é designado por uma letra minúscula, com exceção das letras x, y, z, w , que são utilizadas para definir variáveis ou elementos genéricos do universo em questão. Desse modo, designando a restrição "estuda" pela letra E e "João" pela letra j , podemos dizer que "João é um aluno que estuda" utilizando a expressão Ej (no universo "alunos"), a qual designa o elemento "João" do conjunto formado pela restrição E . Da mesma forma, se escrevermos " Ex ", isto significa que "um determinado aluno x estuda", onde x pode assumir o valor de qualquer elemento do universo em questão.

Figura 2.2.1 — Símbolos dos operadores na Lógica Matemática e na Teoria dos Conjuntos.

Teoria dos Conjuntos	Lógica Matemática
A^C (complemento)	$\sim A$ (negação)
$A \cap E$ (interseção)	$A \wedge E$ (conjunção)
$A \cup E$ (união)	$A \vee E$ (disjunção)
$E \subset A$ (continência)	$E \rightarrow A$ (implicação)
$A = E$ (igualdade)	$A \leftrightarrow E$ (equivalência)
$\forall x (x \in E)$ (Quantificador Universal)	$\forall x Ex$ (Quantificador Universal)
$\exists x (x \in E)$ (Quantificador Existencial)	$\exists x Ex$ (Quantificador Existencial)

Fonte: O autor

Neste sentido, introduzimos também o Quantificador Universal (\forall), a fim de expressar a condição "todos", como por exemplo, $\forall x Ex$ (todos alunos estudam, ou todo elemento do universo "alunos" pertence ao conjunto delimitado pela condição "estuda"), e o Quantificador Existencial (\exists), a fim de expressar a condição "algum" (no sentido de "pelo menos um"), como por exemplo, $\exists x Ex$ (algum aluno estuda, ou existe ao menos um elemento do universo "alunos" que pertence ao conjunto delimitado pela condição "estuda").

Uma vez que os sistemas algébricos são equivalentes (lógica matemática e teoria dos conjuntos) e que o objetivo deste trabalho é desenvolver o raciocínio lógico, vamos doravante adotar como simbologia principal aquela utilizada na lógica matemática, independente de estarmos lidando estritamente com proposições ou conjuntos, pois o contexto tornará evidente a natureza da aplicação. Também iremos, de maneira geral, nos referir apenas ao sistema da lógica matemática, embora tratando-o sempre por meio dos conceitos e diagramas da teoria dos conjuntos.

Para o propósito deste trabalho, que é desenvolver o raciocínio lógico por meio da utilização de diagramas de conjunto, lidaremos apenas com predicados monádicos, ou seja, predicados aplicados a somente um escopo (variável ou constante), pois o método aqui exposto não foi desenvolvido para predicados poliádicos, tais como "Exy", "Awz", etc., que dizem respeito a aspectos mais avançados da lógica. Pelas mesmas razões, também lidaremos apenas com *quantificações singulares*, ou seja, quantificações aplicadas a proposições não quantificadas. Portanto não lidaremos com quantificações do tipo $\forall x (\exists y (Ax \rightarrow Ey))$, $\forall x (\exists y Ey \rightarrow Ax)$, etc.

2.3. O CÁLCULO SENTENCIAL NA LINGUAGEM DOS CONJUNTOS.

Vamos utilizar os conceitos inerentes à teoria dos conjuntos para definirmos os conceitos básicos do cálculo sentencial, dando assim as condições para desenvolvermos o método dos diagramas nas deduções lógicas.

O cálculo sentencial é um campo da lógica matemática que estuda as relações lógicas entre afirmações completas (proposições), independente do número de termos, as quais podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, sem a presença de quantificadores aplicados às variáveis livres (sentenças abertas). No caso do cálculo sentencial, portanto, somente se aplica o conceito de restrição ou de quantificação no sentido de uma afirmação completa em si, que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, e não como modo de quantificação de um conjunto, como faz o cálculo dos predicados.

2.3.1. Definição de proposição no cálculo sentencial e sua correspondência com o conceito de conjunto

Definimos uma proposição ou afirmação no cálculo sentencial como qualquer expressão declarativa afirmativa sintática bem definida. Da definição, decorre que toda proposição no cálculo sentencial sempre admite a classificação de verdadeira (a declaração se verifica) ou de falsa (a declaração não se verifica). Analogamente ao que fizemos com os conjuntos, adotaremos como símbolo para proposição ou afirmação as letras maiúsculas A, B, C, D, ...

Apresentamos a seguir alguns exemplos de proposição:

- 1) A lua está na fase crescente.
- 2) O tanque ficou vazio.
- 3) Pedro casou-se com Maria
- 4) Os alunos estudaram com os professores para a prova de sábado.
- 5) Todos ficaram satisfeitos.
- 6) Ninguém faltou.

Vemos pelos exemplos que as proposições no cálculo sentencial podem ser constituídas por vários termos e por relações entre eles, porém elas são vistas como uma declaração única. Assim, a quarta proposição, se for falsa, significa que "não é verdade que os alunos estudaram com os professores para a prova de sábado", independente de qual seja a razão, como, por exemplo, se foi no domingo, se foi para o exame, se não foi com os professores, ou se não estudaram. A parte da lógica matemática que estuda as possíveis relações existentes entre os termos de uma proposição é o cálculo dos predicados.

É importante, a título de esclarecimento, notar que a frase "Espere um momento" não é uma proposição, pois, embora possa ser declarativa e sintaticamente bem definida não é afirmativa e, por isso, não pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

A fim de podermos estabelecer uma correspondência entre as proposições do cálculo sentencial e os conceitos de conjuntos, vamos considerar um exemplo no qual temos três proposições: P, Q e R. Para este caso, vamos definir como conjunto universo de interesse o conjunto dos *eventos* em que se verificam todas as combinações possíveis das três proposições e suas respectivas negações, resultando um conjunto universo com um total de oito elementos (*eventos*):

$$\{ P \sim Q R, P \sim Q \sim R, P Q R, P Q \sim R, \sim P Q R, \sim P Q \sim R, \sim P \sim Q R, \sim P \sim Q \sim R \}$$

Assim, o elemento $P Q R$ do universo de interesse, evento no qual as proposições P , Q e R são verdadeiras, representa a ocorrência simultânea das proposições P , Q e R .

Vamos representar graficamente este conjunto universo pelo diagrama indicado na Figura 2.3.1.1. Como podemos ver, o conjunto universo pode ser dividido em oito subconjuntos (oito retângulos menores) constituídos por apenas um elemento (evento), sendo cada um destes subconjuntos definido pela restrição da respectiva combinação das três proposições.

Figura 2.3.1.1 — Conjunto universo para as proposições P , Q e R

$P \sim Q R$	$P \sim Q \sim R$
$P Q R$	$P Q \sim R$
$\sim P Q R$	$\sim P Q \sim R$
$\sim P \sim Q R$	$\sim P \sim Q \sim R$

Fonte: O autor

Também podemos ver que os quatro retângulos superiores formam um retângulo maior no qual todos os elementos satisfazem em comum a restrição de que a proposição P é verdadeira, conforme indicado pelo retângulo azul no primeiro diagrama da Figura 2.3.2. Da mesma forma, os quatro retângulos intermediários formam um retângulo maior no qual todos os elementos satisfazem em comum a restrição de que a proposição Q é verdadeira, conforme indicado pelo retângulo verde no segundo diagrama da Figura 2.3.2. Assim também os quatro retângulos do lado esquerdo formam um retângulo maior no qual todos os elementos satisfazem em comum a restrição de que a proposição R é verdadeira, conforme indicado pelo retângulo vermelho no terceiro diagrama da Figura 2.3.2. Dessa forma, podemos definir no conjunto universo dos oito eventos possíveis uma restrição correspondente ao retângulo P (quatro retângulos superiores), no qual a proposição P é verdadeira, uma restrição correspondente ao retângulo Q (quatro retângulos intermediários),

em que a proposição Q é verdadeira, e uma restrição correspondente ao retângulo R (quatro retângulos do lado esquerdo), em que a proposição R é verdadeira.

Figura 2.3.1.2 — Regiões correspondentes às proposições P , Q e R

$P \sim Q R$	$P \sim Q \sim R$	$P \sim Q R$	$P \sim Q \sim R$	$P \sim Q R$	$P \sim Q \sim R$
$P Q R$	$P Q \sim R$	$P Q R$	$P Q \sim R$	$P Q R$	$P Q \sim R$
$\sim P Q R$	$\sim P Q \sim R$	$\sim P Q R$	$\sim P Q \sim R$	$\sim P Q R$	$\sim P Q \sim R$
$\sim P \sim Q R$	$\sim P \sim Q \sim R$	$\sim P \sim Q R$	$\sim P \sim Q \sim R$	$\sim P \sim Q R$	$\sim P \sim Q \sim R$

Fonte: O autor

Utilizando esses três retângulos, estabelecemos três regiões no universo de interesse, cada uma delas correspondendo à restrição de que é verdadeira a proposição correspondente ao retângulo. Assim, por exemplo, a condição $P \vee Q$, corresponde à restrição dada pela união da região em que a proposição P é verdadeira com a região em que a proposição Q é verdadeira, resultando no retângulo formado pelos seis retângulos superiores. Da mesma forma, a condição $P \wedge Q$ corresponde à restrição dada pela interseção da região em que a proposição P é verdadeira com a região em que a proposição Q é verdadeira, resultando no retângulo formado pelos dois retângulos da segunda linha. Analogamente, a condição P^c corresponde à restrição dada pela região em a proposição P não é verdadeira, resultando no retângulo formado pelos quatro retângulos inferiores. Com isso fica estabelecida a correspondência entre proposições do cálculo sentencial e as propriedades dos conjuntos.

Desta forma de representar as possíveis relações entre proposições no cálculo sentencial por meio de restrições que definem regiões correspondentes a subconjuntos de um conjunto universo, pode-se construir os diagramas criados por Lewis Carrol para outras proposições também no cálculo dos predicados, conforme veremos no próximo capítulo.

Uma vez que toda proposição pode ser representada por um conjunto correspondente em um determinado universo, podemos utilizar esta propriedade para definir o que se entende por *proposição simples* ou *composta*. Uma proposição é *simples* quando não é formada pela combinação de outras proposições, caso contrário ela é *composta*. Assim, por exemplo, A , B , $\sim C$, $\sim D$ são proposições simples, enquanto $\sim A \vee B$, $B \wedge C$, $C \rightarrow D$, $(B \vee C) \rightarrow A$, $C \leftrightarrow D$ são proposições compostas.

Também definiremos a *proposição primária* como toda proposição que não pode ser reescrita (respeitando a forma original da proposição) como uma *conjunção* de duas de suas partes componentes. Assim, $((A \vee B) \wedge (C \leftrightarrow A)) \rightarrow D$ é uma proposição primária, mas $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A) \vee D$ não é uma proposição primária, pois pode ser expressa pela conjunção da proposição $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ e da proposição $(C \rightarrow A) \vee D$.

2.3.2. Definição de argumento

Um argumento ou raciocínio lógico, do ponto de vista da lógica matemática, é uma coleção de proposições simultâneas, chamada de argumento, com as quais se busca comprovar uma proposição final, chamada conclusão do argumento. Um argumento é válido quando a verdade das premissas acarreta a verdade da conclusão e inválido quando isto não acontece.

Um argumento ou raciocínio lógico, do ponto de vista da teoria dos conjuntos, é uma relação de continência entre o conjunto formado por uma sequência de interseções das regiões correspondentes às proposições, chamadas de premissas do argumento, e o conjunto formado pela proposição que se quer provar, chamada de conclusão, sendo válido somente se o conjunto definido pela sequência de interseções das proposições do argumento estiver contido no conjunto definido pela conclusão.

Assim, por exemplo, a expressão $((\sim A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow A$, segundo o ponto de vista dos conjuntos correspondentes ao cálculo sentencial, pode ser considerada um argumento lógico no qual existem duas premissas $\sim A \rightarrow B$ e $\sim B$, propondo como conclusão A . Por outro lado, esta expressão também pode ser considerada apenas como uma proposição, o que significaria uma afirmação desta relação em si, e não um argumento a ser verificado. Assim a expressão $(B \vee C) \rightarrow A$, considerada como argumento, afirmaria a proposição $(B \vee C)$ e proporia como conclusão (verificação ou não da relação de continência) a proposição A , enquanto esta mesma expressão, considerada como proposição, estabeleceria que a região relativa à restrição $(B \vee C)$ tem que estar contida na região da restrição A .

Outro exemplo de argumento poderia ser dado pela seguinte expressão: $((B \wedge C) \vee D) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee D) \rightarrow (A \rightarrow C)$, na qual existem três premissas: $(B \wedge C) \vee D$, $C \rightarrow D$ e $A \vee D$, propondo como conclusão $A \rightarrow C$. Neste caso, também seria possível dizer que o argumento é composto por duas premissas: $((B \wedge C) \vee D) \wedge (C \rightarrow D)$ e

$(A \vee D)$, ou então por apenas uma premissa: $((B \wedge C) \vee D) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee D)$. Assim o número de premissas depende de considerarmos ou não uma proposição composta pela conjunção de duas ou mais proposições como uma única premissa. Por exemplo, se o argumento contiver somente proposições primárias, então o número máximo de premissas em que ele poderá ser expresso será dado pelo número de proposições primárias.

A expressão: $((B \wedge C) \vee D) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee D) \rightarrow (A \rightarrow C)$, quando considerada como argumento segundo o cálculo sentencial, é usualmente apresentada na seguinte forma:

$$1) B \wedge C \vee D$$

$$2) C \rightarrow D$$

$$3) A \vee D$$

$$A \rightarrow C$$

Este argumento, na linguagem dos conjuntos teria como expressão: $((B \cap C) \cup D) \cap (C \subset D) \cap (A \cup D) \subset (A \subset C)$, na qual se procura descobrir se a relação maior de continência – conjunto $((B \cap C) \cup D) \cap (C \subset D) \cap (A \cup D)$ estar ou não contido no conjunto $A \subset C$ – é válida ou não.

Como podemos ver, o cálculo sentencial considera implícita a conjunção (interseção) da sequência de premissas do argumento, colocando a conclusão como o termo conseqüente desta sequência de conjunções, o que, na linguagem dos conjuntos, significa que, no caso do argumento ser válido, a interseção das premissas está contida na conclusão.

Esta é a caracterização geral do cálculo sentencial, que estuda as formas de validar argumentos formados apenas por proposições em variáveis livres e não quantificadas.

Como o cálculo sentencial pode ser representado pelos conceitos da teoria dos conjuntos, um argumento do cálculo sentencial será *válido* quando a relação de continência estabelecida por ele for verificada, caso contrário o argumento não é válido (a continência não se verifica).

Uma vez que o presente trabalho tem por objetivo apresentar o método dos diagramas bilaterais para a solução de argumentos lógicos, não entraremos aqui em questões sobre a coerência das proposições, que diz respeito à correspondência entre a proposição e a realidade comum. Nosso foco está somente na validade do argumento, independente do

conteúdo da proposição (por exemplo: "o cavalo põe ovo"), de modo que nos interessa apenas as consequências de considerarmos a proposição como falsa ou como verdadeira. Assim, neste sentido, é válido, como veremos mais adiante, o seguinte argumento: se "tudo que põe ovo é pássaro" e "o cavalo põe ovo", então "o cavalo é um pássaro", pois no argumento só importa a suposição da veracidade das premissas e não a coerência em si da veracidade.

2.4. O CÁLCULO DOS PREDICADOS NA LINGUAGEM DOS CONJUNTOS

O cálculo dos predicados é o campo da lógica matemática que estuda a validade de argumentos envolvendo predicados (propriedades, restrições ou condições) que são aplicados a variáveis quantificáveis e que podem estabelecer relações entre duas ou mais variáveis.

Para o objetivo deste trabalho, vamos, como já mencionamos, considerar no cálculo dos predicados apenas as proposições que sejam aplicadas somente a uma variável (predicados monádicos) e que sejam quantificadas singularmente (quantificação aplicadas a proposições primárias ou a conjunções de proposições primárias não quantificadas). Os demais tipos de predicados são de estrutura mais complexa e, além de estarem muito adiantados para o ensino fundamental, não oferecem condições para a aplicação do método proposto aqui.

Assim, dada uma restrição P (predicado) aplicada sobre um universo de interesse, indicaremos por Px a condição de que x é qualquer elemento do universo e verifica a restrição P . Por exemplo, como já vimos anteriormente, a restrição E : "estuda" aplicada à variável x (Ex) do universo de alunos significa que " x estuda", ou seja, que x (elemento do universo "alunos") verifica a restrição imposta pelo predicado E , sendo que x pode representar qualquer um dos alunos do universo.

Quando atribuímos à variável do predicado um determinado valor, por exemplo " c ", então a proposição afirma que o elemento " c " do universo em questão cumpre a restrição expressa pelo predicado: Ec . Neste caso, uma vez que um determinado elemento do universo satisfaz o predicado, fica garantida a existência (dada pelo elemento " c ") de que ao menos um elemento do universo cumpre o predicado E (Ec).

A quantificação no cálculo dos predicados se refere a dois casos extremos: 1) Universal: "todos os elementos do conjunto obedecem à restrição"; 2) Existencial: "ao menos um elemento do conjunto obedece à restrição". Destes dois casos podemos derivar os outros dois por negação: 1) Negação universal: "não sucede que tudo obedece à restrição", ou seja,

"ao menos um elemento do conjunto não obedece à restrição"; 2) Negação existencial: "não sucede que ao menos um elemento do conjunto obedece à restrição", ou seja, "nenhum elemento do conjunto obedece à restrição".

No próximo capítulo mostraremos estes conceitos com mais detalhes, utilizando para isso os gráficos biliterais.

3. O MÉTODO PROPOSTO

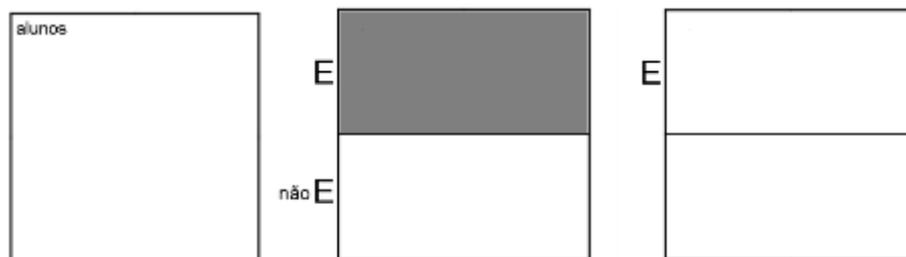
3.1. O DIAGRAMA MONOLITERAL PARA UMA RESTRIÇÃO.

A ideia de diagramas n-literais foi lançada pelo escritor inglês Lewis Carrol, um estudioso da lógica, no seu livros "Symbolic Logic" e "The Game of Logic", no final do século XIX. Trata-se do mesmo autor da famosa obra "Alice no País das Maravilhas". O objetivo principal deste escritor foi apresentar um processo gráfico, na forma de um tabuleiro, para a solução dos silogismos lógicos de uma maneira mais simples e interessante, buscando divulgar o pensamento lógico, daí o nome "O Jogo da Lógica".

O método apresentado aqui, é inspirado na ideia de Lewis Carrol, porém contém alguns desenvolvimentos e modificações, a fim de utilizá-lo para uma gama maior de aplicações no campo da lógica.

O mais simples diagrama n-literal, o diagrama monoliteral, é dado por um universo não vazio e apenas uma restrição. Vamos considerar, para exemplificar, como nosso universo o conjunto "alunos" e como restrição a condição "estuda". A Figura 3.1.1 representa a sequência de construção do diagrama monoliteral desta restrição básica.

Figura 3.1.1 — Sequência de construção do diagrama monoliteral para uma restrição



Fonte: O autor

Primeiramente, construímos um quadrado que representa o universo em questão (primeiro quadrado). A região delimitada pelo quadrado representa a restrição "alunos", que se aplica a tudo que existe. Como se trata do universo escolhido, não definimos a sua negação.

Em seguida, construímos, dentro do quadrado universo o retângulo que divide a região do quadrado em duas partes. O retângulo superior, designado pela região cinza, está rotulado com a letra E ("estuda") à esquerda do quadrado e no centro da lateral do retângulo.

Com isso, estamos associando a posição da letra ao centro da lateral do retângulo correspondente, a fim de facilitar a identificação da região que corresponde àquela letra ou restrição. De modo análogo, temos a identificação do retângulo branco, "não E" (E^C : conjunto complementar de E). Com essa construção, temos agora duas regiões definidas, correspondentes às restrições "estuda" (retângulo cinza) e "não estuda" (retângulo branco). O diagrama final, para efeito de simplicidade e clareza, é representado somente pela linha delimitadora do universo e pela linha divisória da restrição, contendo apenas um rótulo referente à afirmação da restrição (E), pois fica evidente a localização simétrica da restrição correspondente a "não E". Além disso, é suposto conhecido e evidente o universo em questão.

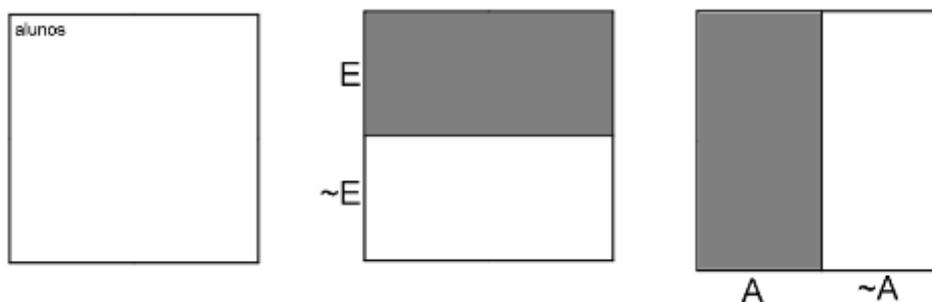
O quadrado representativo do universo ficou dividido pela restrição em dois retângulos ou duas partes. Denominaremos cada uma destas partes por célula.

Uma vez que a situação de uma única restrição é trivial, vamos passar para a condição de duas restrições, a fim de estabelecer os demais critérios de representação das restrições para os diagramas bilaterais.

3.2. O DIAGRAMA BILITERAL DAS RELAÇÕES ENTRE DUAS RESTRIÇÕES.

Vamos considerar o mesmo universo utilizado no item anterior, "alunos" e também a mesma restrição E, "estuda", acrescentando agora uma nova restrição: A, "aprende". Para facilitar a familiarização com as regiões do diagrama biliteral de relações de dois conjuntos, vamos inicialmente colocar no diagrama também os indicadores das regiões correspondentes às negações das condições iniciais, utilizando para símbolo de negação (complementar) o sinal " \sim " (não), que, é um dos símbolos utilizados como operador de negação na lógica matemática.

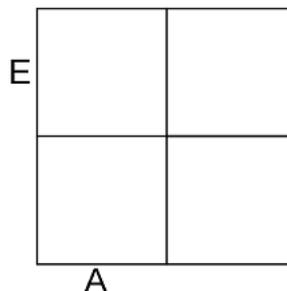
Figura 3.2.1 — Construção das relações entre duas restrições.



Tomando como universo de referência o conjunto "alunos", vamos designar pela letra E o conjunto da condição "estuda", e pela letra A o conjunto da condição "aprende". Vamos também adotar uma representação gráfica diferente para as relações entre os dois conjuntos, conforme a sequência de construção apresentada nas Figura 3.2.1 e o diagrama final obtido na Figura 3.2.2.

Em cada um dos três diagramas da sequência de construção, a área cinza representa a região correspondente ao conjunto definido, de modo que, no diagrama final, temos apenas as linhas delimitadoras de cada região correspondente a cada conjunto. Como podemos ver, a letra E está na lateral esquerda superior, no meio da base do retângulo horizontal cinza, que representa o conjunto E ("estuda"), enquanto a letra A está na parte inferior esquerda, no meio da base do retângulo vertical cinza, que representa o conjunto A ("aprende"). Analogamente, a lateral esquerda inferior, no meio da base do retângulo horizontal branco, que representa o conjunto ("não estuda"), está designada por $\sim E$, enquanto a parte inferior direita, no meio da base do retângulo vertical branco, que representa o conjunto "não aprende", está designada por $\sim A$.

Figura 3.2.2 — Diagrama biliteral para dois conjuntos.



Fonte: O autor

Embora tenhamos utilizado aqui o universo alunos bem como as restrições "estuda" e "aprende" no sentido de predicados, o mesmo diagrama também pode ser utilizado para representar as proposições no sentido completo do cálculo sentencial, E: "o aluno estuda" e A: "o aluno aprende", bastando para isso considerar o universo de eventos da ocorrência das proposições E e A e suas respectivas negações, conforme vimos no capítulo anterior. Assim, é indiferente para a construção do diagrama o fato de estarmos lidando com proposições do cálculo de predicados ou do cálculo sentencial.

O quadrado do diagrama final (Figura 3.2.2) contém apenas as linhas delimitadoras das regiões correspondentes ao conjunto universo e aos conjuntos E e A

construídos a partir do conjunto universo. A posição das letras procura nos indicar o retângulo (horizontal ou vertical) ao qual ela se refere, ficando evidente a região correspondente à respectiva negação. A denominação "alunos" para o universo foi suprimida para simplificação da apresentação, pois supomos sempre conhecida a natureza do universo para o quadrado maior.

Para este caso de duas restrições, podemos ver que o diagrama final ficou dividido em quatro *células*. Cada uma das *células* é composta por uma interseção de dois conjuntos: $E \cap A$, $E \cap \sim A$, $\sim E \cap A$ e $\sim E \cap \sim A$. Vamos chamar este diagrama de diagrama biliteral para duas restrições ou predicados.

3.3. EXEMPLO SIMPLES DA APLICAÇÃO DO DIAGRAMA BILITERAL PARA DUAS RESTRIÇÕES À LÓGICA MATEMÁTICA

Veremos agora a utilização do diagrama biliteral para a dedução na lógica matemática aplicada apenas às duas restrições (predicados) já definidas na seção anterior, conforme as restrições: E: "estuda" (pertinência ao conjunto "alunos" "estuda") e A: "aprende" (pertinência ao conjunto "alunos" "aprende"), ou, equivalentemente, às duas proposições (sentenças) E: "o aluno estuda" e A: "o aluno aprende".

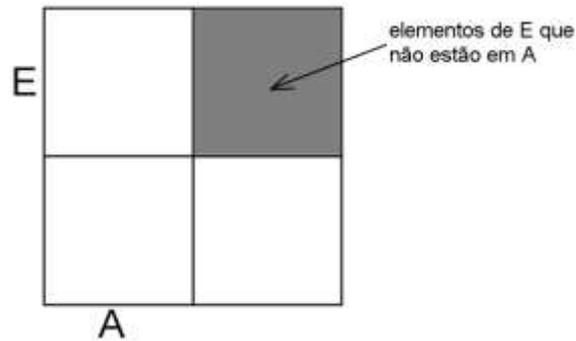
Como já vimos, a relação fundamental da lógica segundo a visão dos conjuntos é a relação de continência, pois é por meio dela que podemos realizar a dedução que nos permite avançar sempre mais em conclusões. Assim, a afirmação lógica dada por: se "o aluno estuda", então "o aluno aprende" é representada pela condição do conjunto E ("aluno" "estuda") estar contido no conjunto A ("aluno" "estuda" "aprende"), ou, equivalentemente, pela continência do conjunto de eventos em que a proposição E se verifica no conjunto em que a proposição A se verifica. Para facilitar a exposição do método, não continuaremos a mencionar a equivalência da aplicação dos diagramas às proposições do cálculo sentencial, que já ficou demonstrada no item 2.3.

Por esta relação de continência, não podem existir no diagrama biliteral elementos da região E fora da região correspondente ao conjunto A, isto significa que devemos suprimir do diagrama a região cinza apresentada na Figura 3.3.1, para que a região E fique toda contida na região A.

Para a simplificação dos diagramas, vamos representar a supressão desta área simplesmente colocando um círculo (lembrando o "zero" utilizado por Lewis Carroll!) no

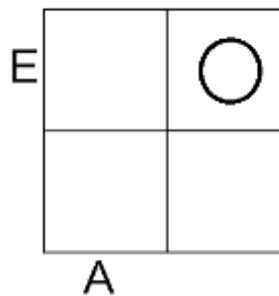
centro dela, de modo que o diagrama final da relação de continência se reduz àquele apresentado na Figura 3.3.2:

Figura 3.3.1 — A região do diagrama biliteral para $E \subset A$.



Fonte: O autor

Figura 3.3.2 — Diagrama biliteral simplificado para $E \subset A$.



Fonte: O autor

Este, então, é o diagrama biliteral representativo da restrição $E \subset A$ aplicada ao universo em questão. Note-se que o diagrama foi reduzido a uma região constituída por apenas três células nas quais é possível existir elementos, tal como já havíamos visto na seção 1.1. Neste caso, verificamos pelo gráfico que esta relação só admite a ocorrência de elementos nas células $E \cap A$, $E \cap \sim A$ e $\sim E \cap \sim A$. Chamamos estas células em branco de *células livres*. Num diagrama n-literal, uma *região livre* será definida como qualquer região do diagrama composta apenas por células livres.

Ao fazermos uma argumentação lógica, como já vimos, estamos simplesmente estabelecendo uma sequência de restrições concomitantes às relações entre os conjuntos representantes das proposições. Quando dizemos concomitantes, isto significa que as restrições se aplicam cumulativamente, ou seja, estamos lidando com restrições justapostas (conjunções), que são representadas pela união das restrições de cada premissa. Com isso, a

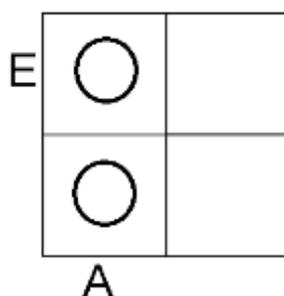
região livre resultante será a interseção de todas as regiões livres de cada proposição, ou seja, a região livre comum a todas as restrições aplicadas.

No caso da relação de implicação, a restrição de continência $E \subset A$ foi aplicada à região do universo, resultando na região livre dada pela interseção entre a região livre dada pelo universo (todo o quadrado) e a região livre da restrição $E \subset A$ (os três retângulos em branco), representada na Figura 3.3.2, pela supressão da região preenchida pelo círculo.

Na lógica matemática, esta condição de continência é representada como uma implicação por $E \rightarrow A$ (se E, então A, ou E implica A). Como já dissemos, a lógica matemática opera apenas com proposições, que são propriedades capazes de assumir valores lógicos: verdadeiro ou falso. Assim, por exemplo, a sentença "utilize a porta da frente" não é uma proposição considerada na lógica matemática, pois não pode assumir um valor verdadeiro nem falso, uma vez que não estabelece uma restrição definida para construirmos um conjunto.

Adotando este método para a construção do diagrama biliteral das relações de dois conjuntos, façamos a representação apenas da restrição $\sim A$ ("não aprende"). Com isso, estamos restringindo nosso universo apenas à condição $\sim A$, o que significa a inexistência da região correspondente a A (aprende). Portanto o diagrama desta condição deve suprimir a região correspondente a A, resultando no diagrama da Figura 3.3.3.

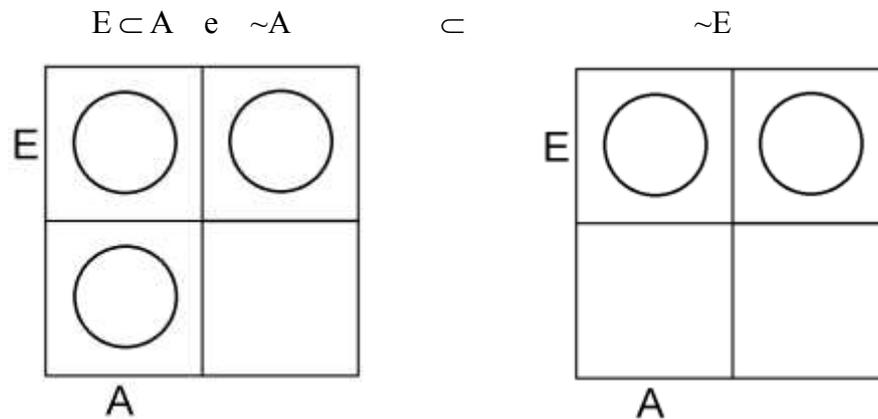
Figura 3.3.3 — Diagrama biliteral para a restrição $\sim A$.



Fonte: O autor

Vamos agora dar um passo a mais no encadeamento lógico, aplicando em nosso universo de alunos a restrição $E \subset A$ seguida pela restrição $\sim A$. Como já vimos, para obtermos o resultado final devido a cada uma destas restrições, basta que façamos a sobreposição de ambas (união das regiões suprimidas), que significa a aplicação das duas restrições simultaneamente, como está apresentado no primeiro diagrama da Figura 3.3.4.

Figura 3.3.4 — Diagrama simplificado do diagrama biliteral para $E \subset A$ e $\sim A$, seguido pelo diagrama biliteral da restrição $\sim E$



Fonte: O autor

Com esse diagrama final, obtido simplesmente pela aplicação sucessiva de duas restrições ao conjunto universo, visualizamos imediatamente que a restrição final está contida na região correspondente à condição $\sim E$, conforme podemos ver pelo segundo diagrama da Figura 3.3.4, pois a região correspondente à restrição E foi totalmente suprimida e existe uma célula livre na restrição $\sim E$, confirmando o Princípio da Não Contradição. Pelo Cálculo Sentencial, isto corresponde a uma argumentação fundamental, conhecida por *modus tollens*, na qual é considerado um argumento com duas proposições simultâneas:

- 1) $E \rightarrow A$
 - 2) $\sim A$
-
- $\sim E$ (conclusão do argumento)

Para este argumento simples de lógica, o diagrama final oferece uma visão clara (que, neste trabalho de iniciação ao raciocínio lógico, será considerada uma demonstração) da razão pela qual a conclusão é válida. Além da visualização das relações, há também a vantagem de se obter o resultado final pela simples representação gráfica das restrições envolvidas no argumento.

É importante ressaltar que o caso particular no qual todas as regiões são preenchidas por círculos somente ocorreria em um universo vazio, pois tal condição significaria a ocorrência de uma restrição e de sua negação. Mas este caso singular, que leva a concluir qualquer coisa, apenas atrapalharia o entendimento inicial do assunto pelo aluno, o

que não interessa para o objetivo deste método, no qual adotamos sempre um universo não vazio. Assim, consideraremos neste contexto que a obtenção de um universo vazio significa uma contradição.

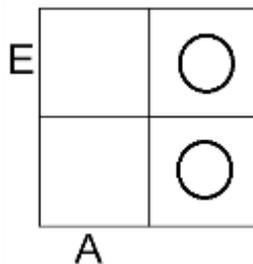
Sob o aspecto de conjuntos, entende-se por argumento uma sequência de restrições concomitantes, das quais é possível obter uma restrição resultante, que deve estar contida (caso o argumento seja válido) na região da restrição correspondente à conclusão. Sob o aspecto da lógica matemática, entende-se por argumento uma série de proposições concomitantes, designadas *premissas*, das quais se obtém uma outra proposição, designada *conclusão*. Embora não seja o escopo deste trabalho demonstrar formalmente isto, trata-se de dois aspectos equivalentes, de duas álgebras equivalentes (álgebra dos conjuntos e álgebra booleana), razão pela qual podemos empregar aqui os diagramas de conjuntos para explicar o raciocínio lógico.

3.4. A REPRESENTAÇÃO DAS OPERAÇÕES DA LÓGICA MATEMÁTICA NO DIAGRAMA BILITERAL PARA DUAS RESTRIÇÕES.

3.4.1. Afirmação

Para obtermos a representação gráfica da restrição do universo de alunos no sentido de restarem apenas as regiões nas quais a condição A (aprende) se verifica, é necessário eliminar as regiões nas quais a condição $\sim A$ (complemento de A) se verifica (Princípio da Não Contradição). Por isso devemos colocar um círculo nas regiões em que a condição " $\sim A$ " se verifica, obtendo assim o diagrama da Figura 3.4.1.1.

Figura 3.4.1.1 — Diagrama biliteral para A .



Fonte: O autor

Observamos pelo diagrama que os elementos do universo "alunos" não podem estar contidos na restrição $\sim A$, ou seja, qualquer que seja o elemento "x" deste universo ele só

poderá estar contido na restrição A . Portanto este diagrama também representa a condição $\forall x Ax$, que significa "todo aluno aprende". Mas também é possível ver no diagrama que não existem elementos na região correspondente à condição $\sim A$, o que significa a condição $\sim \exists x \sim Ax$: "não existe aluno que não estuda". Com isso, é possível verificar visualmente pelo diagrama a equivalência entre as duas restrições de quantificação: $\forall x Ax$ e $\sim \exists x \sim Ax$.

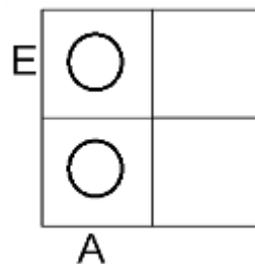
Assim o diagrama biliteral da Figura 3.4.1.1 pode representar a proposição A (predicado ou sentença completa) ou a quantificação universal $\forall x Ax$, que equivale à quantificação existencial $\sim \exists x \sim Ax$.

A representação da proposição E no diagrama é realizada de maneira análoga.

3.4.2. Negação

Para obtermos a representação gráfica da restrição do universo de alunos no sentido de restarem apenas as regiões nas quais a condição $\sim A$ (não aprende) se verifica, é necessário eliminar as regiões nas quais a condição A (complemento de $\sim A$) se verifica (Princípio da Não Contradição). Por isso devemos colocar um círculo nas regiões em que a condição A se verifica, obtendo assim o diagrama da Figura 3.4.2.1.

Figura 3.4.2 .1 — Diagrama biliteral para $\sim A$.



Fonte: O autor

Observamos pelo diagrama que os elementos do universo "alunos" não podem estar contidos na restrição A , ou seja, qualquer que seja o elemento "x" deste universo ele só poderá estar contido na restrição $\sim A$. Portanto este diagrama também representa a condição $\forall x \sim A$, que significa "todo aluno não estuda". Mas também é possível ver no diagrama que não existem elementos na região correspondente à condição A , o que significa a condição $\sim \exists x Ax$: "não existe aluno que estuda" ou "nenhum aluno estuda". Com isso, é

possível verificar visualmente pelo diagrama a equivalência entre as duas restrições: $\forall x \sim A$ e $\sim \exists x Ax$.

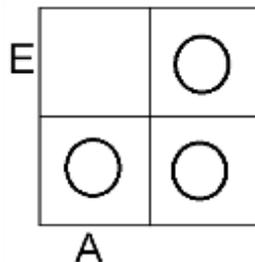
Assim o diagrama biliteral da Figura 3.4.2 .1 pode representar a proposição $\sim A$ (predicado ou sentença completa) ou a quantificação universal $\forall x \sim Ax$, que equivale à quantificação existencial $\sim \exists x Ax$.

A representação da proposição $\sim E$ no diagrama é realizada de maneira análoga.

3.4.3. Conjunção

Para obtermos a restrição do universo de alunos no sentido de restarem apenas as regiões nas quais a condição $A \wedge E$ ("estuda" e "aprende") se verifica, é necessário eliminar as regiões nas quais a condição $A \wedge E$ não se verifica (Princípio da Não Contradição), identificando a região correspondente à restrição $A \wedge E$ e colocando um círculo nas células restantes, conforme indicado no diagrama da Figura 3.4.3.1.

Figura 3.4.3.1 — Diagrama biliteral para $A \wedge E$.



Fonte: O autor

Pelo diagrama obtido, podemos ver que as regiões suprimidas são: $A \wedge \sim E$, $\sim A \wedge E$ e $\sim A \wedge \sim E$ (os três retângulos com círculo). Isto significa que a restrição $A \wedge E$ equivale, pelo diagrama obtido, à negação de três restrições consecutivas, ou seja, à negação de três restrições superpostas: $\sim((A \wedge \sim E) \vee (\sim A \wedge E) \vee (\sim A \wedge \sim E))$. Se alguma destas condições se verificasse, um "círculo" teria de ser suprimido, contrariando a restrição inicial. Também poderíamos dizer que a região a ser suprimida é dada pela negação da conjunção entre a condição $\sim A$ e a condição $\sim E$, ou seja, equivale a $\sim(\sim A \vee \sim E)$.

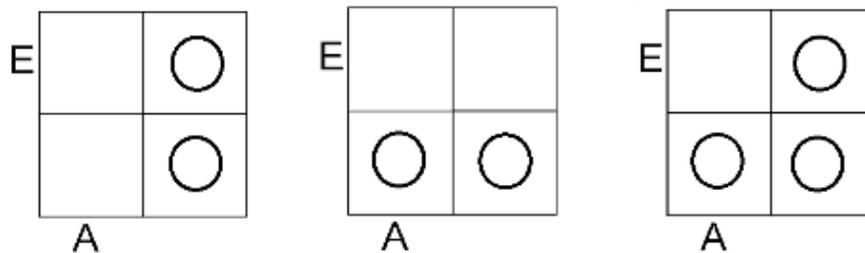
Observamos também pelo diagrama que os elementos do universo "alunos" só podem estar contidos na restrição $A \wedge E$. Portanto este diagrama também representa a condição $\forall x (Ax \wedge Ex)$, que significa "todo aluno estuda e aprende".

Assim o diagrama biliteral da Figura 3.4.3.1 pode representar a proposição composta $A \wedge E$ (predicado ou sentença completa) ou a quantificação universal $\forall x (Ax \wedge Ex)$, que equivale, como podemos ver, à quantificação existencial $\sim \exists x (Ax \wedge Ex)$.

Vejamos agora como obter o diagrama da conjunção por meio da disjunção das regiões suprimidas nos diagramas de cada termo. Na Figura 3.4.3.2, o primeiro termo, A, é representado pelo diagrama da esquerda e o segundo termo, E, é representado pelo diagrama do centro.

Como se trata de uma disjunção ou sobreposição de regiões suprimidas, as restrições são superpostas, de modo que a região final suprimida é equivalente à união das supressões de cada termo da conjunção, resultando no diagrama da direita.

Figura 3.4.3.2 — Diagramas biliterais dos termos da conjunção $A \wedge E$



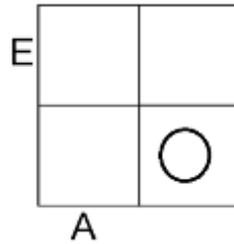
Fonte: O autor

Assim podemos obter o diagrama resultante de uma conjunção fazendo a interseção das regiões livres de cada termo ou fazendo a união das regiões suprimidas em cada termo.

3.4.4. Disjunção

Para obtermos a restrição do universo de alunos no sentido de restarem apenas as regiões nas quais a condição $A \vee E$ ("estuda" ou "aprende") se verifica, é necessário eliminar as regiões nas quais a condição $A \vee E$ não se verifica (Princípio da Não Contradição), colocando um círculo no centro da região nesta condição, obtendo assim o diagrama da Figura 3.4.4.1.

Como podemos ver, a única região que não obedece à restrição $A \vee E$, conforme o diagrama, é aquela correspondente à região $\sim A \wedge \sim E$. Portanto a restrição original, $A \vee E$ é equivalente à supressão desta região, ou seja, é equivalente à restrição $\sim (\sim A \wedge \sim E)$, região na qual foi colocado o círculo.

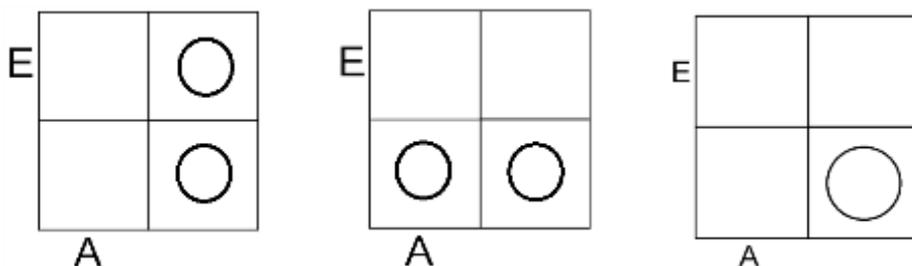
Figura 3.4.4.1 — Diagrama biliteral para $A \vee E$.

Fonte: O autor

Observamos pelo diagrama que os elementos do universo "alunos" não podem estar contidos na restrição $\sim A \wedge \sim E$. Portanto este diagrama também representa a condição $\forall x \sim (\sim Ax \wedge \sim Ex)$, que significa "não existe aluno que não estuda e que não aprende".

Assim o diagrama biliteral da Figura 3.4.4.1 pode representar a proposição composta $A \vee E$ (predicado ou sentença completa) ou a quantificação universal $\forall x \sim (\sim Ax \wedge \sim Ex)$, que equivale à quantificação existencial $\sim \exists x (\sim Ax \wedge \sim Ex)$.

Vejamos agora como obter o diagrama da disjunção por meio da conjunção das regiões suprimidas dos diagramas de cada termo. Na Figura 3.4.4.2, o primeiro termo, E, é representado pelo diagrama da esquerda e o segundo termo, A, é representado pelo diagrama do meio e a interseção das regiões suprimidas no diagrama da direita.

Figura 3.4.4.2 — Diagramas biliterais dos termos da disjunção $A \vee E$ 

Fonte: O autor

Como se trata de uma disjunção (união de duas regiões), as duas regiões definidas são válidas, ou seja, a região resultante de cada restrição é a reunião das duas regiões livres correspondentes a E e A, como indicado na Figura 3.4.4.1. Mas a sobreposição das duas regiões livres é equivalente, como podemos ver graficamente na Figura 3.4.4.2, à interseção das regiões suprimidas de cada uma delas. Assim a região resultante só é suprimida nas células que tenham sido suprimidas em cada um dos termos da disjunção.

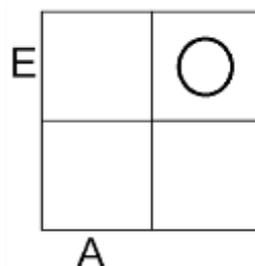
Portanto podemos obter o diagrama resultante de uma disjunção fazendo a união das regiões livres de cada termo ou fazendo a interseção das supressões aplicadas por cada termo.

3.4.5. Implicação

Para obtermos a restrição do universo de alunos no sentido de restarem apenas as regiões nas quais a condição $E \rightarrow A$ ("estuda" implica em "aprende") se verifica (a região correspondente a "estuda" está contida na região correspondente a "aprende"), é necessário eliminar as regiões nas quais a condição $E \rightarrow A$ não se verifica (Princípio da Não Contradição), colocando um círculo no centro da região nesta condição, obtendo assim o diagrama da Figura 3.4.5.1.

Para fazermos a representação desta restrição de implicação, é importante notar que, primeiramente, delimitamos a região da condição E e, em seguida, nesta região delimitada, suprimimos aquela região que não esteja contida na região A . Deste modo, a diagramação da relação de implicação consiste basicamente em aplicar à região delimitada pelo antecedente uma restrição de continência na condição do conseqüente. Isto significa que se deve suprimir na região definida pelo antecedente as regiões que não estejam contidas na região do conseqüente.

Figura 3.4.5.1 — Diagrama biliteral para $E \rightarrow A$.



Fonte: O autor

No diagrama obtido, verificamos que a relação de implicação equivale à condição de suprimir a região correspondente a $E \wedge \sim A$ (célula superior direita), o que equivale à expressão $\sim(E \wedge \sim A)$. Isto significa que não existem elementos do universo alunos na região da condição $E \wedge \sim A$, o que representa a condição $\forall x \sim (Ex \wedge \sim Ax)$.

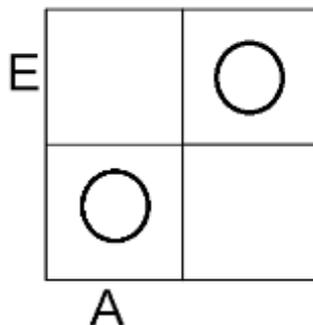
Assim o diagrama biteral da Figura 3.4.5.1 pode representar a proposição composta $E \rightarrow A$ (predicado ou sentença completa) ou a quantificação universal $\forall x \sim (Ax \wedge \sim Ex)$, que equivale à quantificação existencial $\sim \exists x (Ax \wedge \sim Ex)$.

3.4.6. Equivalência

Para obtermos a restrição do universo de alunos no sentido de restarem apenas as regiões nas quais a condição $A \leftrightarrow E$ ("estuda" implica em "aprende" e "aprende" implica "estuda") se verifica (a região correspondente a "estuda" está contida na região correspondente a "aprende" e a região correspondente "aprende" está contida na região correspondente "estuda"), é necessário eliminar as regiões nas quais a condição $A \leftrightarrow E$ não se verifica (Princípio da Não Contradição), colocando um círculo no centro da região nesta condição. Neste caso, esta restrição corresponde a duas restrições de implicação, uma no sentido, $E \rightarrow A$, e outra no sentido $A \rightarrow E$, obtendo assim o diagrama da Figura 3.4.6.1.

No diagrama obtido, verificamos que a relação de equivalência equivale à condição de suprimir a região correspondente a $E \wedge \sim A$ e a região $\sim E \wedge A$, ou seja, equivale à expressão $\sim((E \wedge \sim A) \vee (\sim E \wedge A))$. Isto significa que não existem elementos do universo "alunos" contidos nesta região. Portanto este diagrama também representa a condição $\sim \exists x((E \wedge \sim A) \vee (\sim E \wedge A))$.

Figura 3.4.6.1 — Diagrama biteral para $A \leftrightarrow E$



Fonte: O autor

Assim o diagrama biteral da Figura 3.4.6.1 pode representar a proposição $A \leftrightarrow E$ (predicado ou sentença completa) ou a quantificação universal $\forall x \sim (Ax \wedge \sim Ex)$, que equivale à quantificação existencial $\sim \exists x (Ax \wedge \sim Ex)$.

Com estes seis diagramas biliterais, representativos das operações básicas da lógica matemática, foi possível identificar relações importantes por meio de uma simples inspeção visual, oferecendo assim uma alternativa para o entendimento dos significados e consequências de cada uma destas operações para o aluno que inicia o estudo da lógica. Podemos também demonstrar que a aplicação dos diagramas de conjuntos para as proposições do cálculo sentencial também podem ser empregadas equivalentemente às proposições do cálculo dos predicados.

Apenas para ressaltar esta vantagem da apresentação de diagramas biliterais, basta verificar que no item 3.4.4 (disjunção), foi constatado visualmente a primeira relação de Morgan¹, segundo a qual $(A \vee E) \leftrightarrow \sim(\sim A \wedge \sim E)$, enquanto no item 3.4.3 (conjunção) também foi constatado visualmente a segunda relação de Morgan, segundo a qual $(A \wedge E) \leftrightarrow \sim(\sim A \vee \sim E)$.

3.4.7. Quantificação universal

Nos subitens anteriores, mostramos a representação diagramática da quantificação universal e do seu equivalente, a negação da quantificação existencial. Neste item faremos a abordagem da representação diagramática da quantificação universal em si.

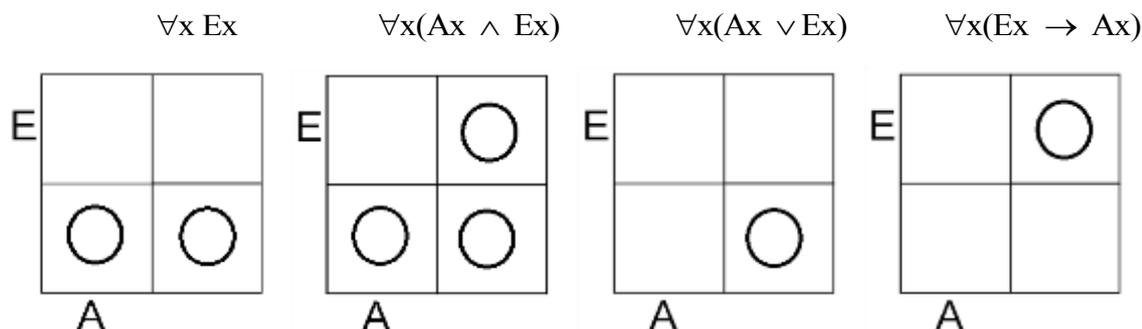
Como a quantificação estabelece uma restrição que suprime as regiões que não satisfazem a proposição à qual a quantificação se refere, sua representação gráfica no diagrama biliteral é idêntica àquela empregada nas proposições não quantificadas. Assim, por exemplo, quando se afirma que todo aluno estuda ($\forall x Ex$), significa que não existem alunos que não estudam. Graficamente, o resultado desta restrição é idêntico àquele obtido pela sentença completa "E". Assim, para representarmos a quantificação universal no diagrama biliteral, empregamos os mesmos critérios utilizados para construir as restrições não quantificadas, como já mostramos nas operações lógicas entre dois conjuntos e indicamos nos exemplos da Figura 3.4.7.1.

¹ As duas Relações de Morgan, enunciadas por Augustus De Morgan (*Formal Logic* -1847), são dadas pelas seguintes equivalências:

I. $(P \vee Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \wedge \sim Q)$

II. $(P \wedge Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \vee \sim Q)$

Figura 3.4.7.1 — Diagramas biliterais para a quantificação universal



Fonte: O autor

Quando, por exemplo, uma restrição afirma que "todo aluno que estuda aprende", ou seja, qualquer que seja o elemento do universo "alunos", ele deve pertencer ao conjunto dado pela restrição "estuda" e "aprende", isto significa que não pode haver elementos deste universo situados fora da região definida por este conjunto, ou seja, não pode haver alunos que estudam, mas não aprendem. Portanto a região da restrição "estuda" deve estar contida na região da restrição "aprende", que é uma relação de continência ou implicação ("estuda" está contida em "aprende" ou "estuda" implica em "aprende"). Portanto esta restrição corresponde a $\forall x (Ex \rightarrow Ax)$, que é idêntica à representação não quantificada $E \rightarrow A$.

3.4.8. Quantificação existencial

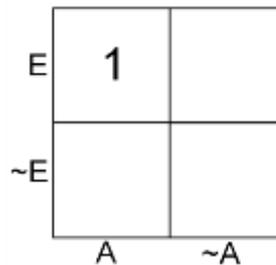
Neste item faremos a abordagem da representação diagramática da quantificação existencial em si, como afirmação de existência.

É importante lembrar que o método aqui proposto, devido às limitações dos recursos disponíveis em um diagrama e também à focalização do estudo nos conceitos mais básicos da lógica matemática, aplica-se apenas aos casos de proposições singularmente quantificadas, ou seja, aplica-se a proposições primárias ou a conjunções de proposições primárias. Portanto restrições tais como $\exists x (Ex \wedge \forall x Ax)$, $\forall x (Ex \wedge \exists x Ax)$, $\exists x (Ex \vee Sx)$, etc. não são consideradas neste método.

Como a afirmação de existência significa a necessidade de haver pelo menos um elemento que satisfaz a restrição imposta, poderíamos intuitivamente representar a existência em uma região restrita (em analogia com o círculo utilizado para a quantificação universal) pela colocação do número 1 no centro de uma das células da região da existência.

Deste modo, seria possível representar por exemplo a restrição $\exists x(Ax \wedge Ex)$ pelo diagrama da Figura 3.4.8.1.

Figura 3.4.8.1 — Possível diagrama biliteral da restrição de existência $\exists x(Ax \wedge Ex)$



Fonte: O autor

Para este caso especial, a representação é bastante clara com relação à restrição de existência, pois, se uma segunda restrição impusesse que $\forall x \sim (Ax \wedge Ex)$, ou seja, que não existem elementos tais que $\forall x \sim (Ax \wedge Ex)$, então, na representação gráfica, teríamos uma indicação clara de contradição, dada pelo fato de uma região (neste caso composta por uma única célula) estar designada com um "círculo" (não ter nenhum elemento) e, ao mesmo tempo, ser designada com o "1" (ter pelo menos um elemento), o que iria contra o Princípio da Não-Contradição.

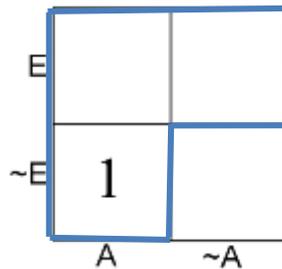
Vejamos agora esta forma de indicar existência num caso mais geral. Tomemos a restrição dada por $\exists x(Ax \vee Ex)$. Neste caso, temos, como já vimos, uma região composta por três células: $A \wedge E$, $A \wedge \sim E$ e $\sim A \wedge E$. Poderíamos representar a existência nesta região escrevendo o número um no centro de apenas uma de suas células, por exemplo na célula $A \wedge E$, conforme representado na Figura 3.4.8.3:

Esta representação indicaria a existência de pelo menos um elemento em toda a região delimitada pelas três células. Assim, no caso de uma restrição que suprimisse esta célula, $\forall x \sim (Ax \wedge Ex)$, poderíamos ser levados a concluir que existe alguma contradição, pois teríamos tanto o "círculo" como o "1" designando a mesma célula. Esta restrição adicional, no entanto, não configuraria uma contradição, caso tivéssemos escolhido a célula $A \wedge \sim E$ para colocar o "1".

Assim, para garantir a coerência da representação, seria necessário ter "1" em todas as células contidas na região da restrição. Mas isto acarretaria que qualquer outra restrição que suprimisse uma destas células com um círculo iria levar à presença simultânea dos símbolos "círculo" e "1" na mesma célula, o que poderia induzir a se concluir pela

existência de uma contradição. Além disso, se fosse adicionada uma terceira restrição, novamente de caráter existencial, isto levaria à possibilidade de se colocar outro "1" na mesma célula, o que nos deixaria o problema de como indicar a existência de dois elementos naquela região!

Figura 3.4.8.3 — Possível diagrama biliteral da restrição de existência $\exists x(Ax \vee Ex)$



Fonte: O autor

Como vemos, deve-se levar em conta não só a garantia de tornar evidente a contradição no diagrama mas também a coerência da existência em restrições consecutivas. Para evitar tais problemas da representação da existência com o número "1", vamos criar uma estrutura diagramática específica para utilizar nestes casos. Trata-se daquilo que chamaremos neste trabalho de "*ligação existencial*".

Uma ligação existencial é definida neste processo como um recurso gráfico empregado na construção de diagramas biliterais para representar uma restrição dada pela quantificação existencial. Este recurso consiste em preencher todas as células que compõem a região submetida à restrição existencial com um traço (em memória do "1" !) desenhado em uma determinada posição e direção. Esta posição e direção do traço identifica a ligação existencial a uma restrição existencial relativa a uma determinada proposição.

Assim, para cada restrição existencial imposta por uma proposição, temos uma determinada posição e direção do traço correspondente. Para as necessidades normais da dedução lógica, temos a possibilidade imediata de seis possíveis ligações existenciais, por meio de seis posições e direções definidas pelas diagonais e pelas laterais de um quadrado girado em 45° , como mostrado na Figura 3.4.8.2.

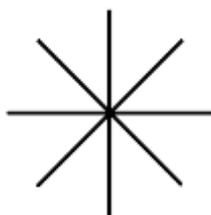
Uma possibilidade mais prática, aplicável ao caso de até quatro restrições existenciais ou menos, seria dada pelas diagonais de um octógono regular, como apresentado na Figura 3.4.8.3.

Figura 3.4.8.2 — Seis diferentes posições e direções do traço para a ligação existencial



Fonte: O autor

Figura 3.4.8.3 — Quatro diferentes posições e direções do traço para a ligação existencial.



Fonte: O autor

O nome "ligação existencial" procura remeter este recurso gráfico a uma propriedade que lhe será atribuída. Esta propriedade está na condição de que se pode suprimir qualquer quantidade de traços de uma determinada "ligação existencial" por restrições que suprimam células nas quais os traços estão contidos, desde que ao menos um traço daquela ligação não seja anulado, a fim de garantir o cumprimento da condição existencial.

Com esta propriedade, resolve-se o problema da contradição aparente, pois um traço, se não for o último traço de uma ligação existencial, pode ser anulado por um "círculo", sem que isso signifique uma contradição. Pode-se ver também, por essa propriedade, que uma contradição somente ocorre quando uma restrição suprime uma célula na qual exista o *último traço* de uma ligação existencial ou uma região na qual esteja contida toda uma ligação existencial. Ao mesmo tempo, a individualidade do traço, dada por sua posição e direção, identificam a sua respectiva restrição, de modo que restrições existenciais consecutivas podem ser visualizadas e controladas em relação à conclusão de existência ou de contradição do argumento.

Deve-se ter em mente que cada ligação existencial está conectada a apenas uma proposição primária, e não a uma premissa. Assim, numa premissa formada pela conjunção de duas ou mais proposições primárias com restrições existenciais, cada uma destas proposições primárias representará uma diferente ligação existencial.

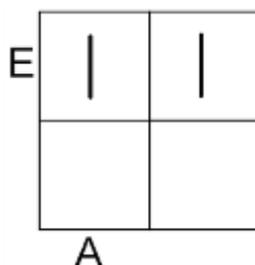
É importante notar que a restrição de existência em uma determinada região por meio da aplicação de uma ligação existencial, é representada pela condição de que esta região é toda preenchida por uma ligação existencial (preenchida com traços de mesma direção e posição), enquanto a condição de que uma região contém toda uma ligação existencial significa que esta região satisfaz a uma restrição existencial. Isto decorre naturalmente da restrição de continência, pois se uma restrição satisfaz uma condição de existência e está contida em uma segunda restrição, então esta segunda restrição também satisfaz àquela condição de existência.

Nestas condições, o conceito fundamental para a validação de um raciocínio lógico, dado pela continência entre o conjunto argumento e o conjunto conclusão, continua válido para o caso no qual a conclusão é uma proposição existencial, mas passa a significar a continência de alguma ligação existencial completa do argumento na região definida pela conclusão existencial. Assim, a conclusão quantificada existencialmente, para ser válida, precisa conter a ligação existencial proposta pelo argumento.

A fim de compreender melhor todos estes aspectos desta ferramenta, vamos apresentar alguns exemplos de aplicação de ligações existenciais.

Começemos com a restrição "existem alunos que estudam", cuja simbolização é $\exists x Ex$, representada na Figura 3.4.8.4.

Figura 3.4.8.4 — Diagrama biliteral da restrição $\exists x Ex$

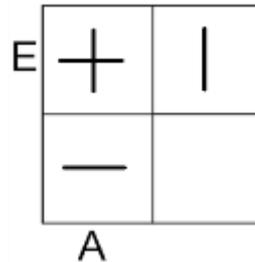


Fonte: O autor

Conforme podemos observar, a região E contém toda uma ligação existencial (preenchida por traços verticais), pois esta é a representação gráfica desta restrição. Por outro lado, vemos que a região da restrição A neste caso, embora contenha um traço de uma ligação existencial, não contém toda uma ligação existencial (existe um traço desta ligação fora da região A) e, por isso, não satisfaz à condição de existência.

Acrescentemos agora uma segunda restrição existencial, dada por "existem alunos que aprendem", simbolizada por $\exists x Ax$ e que está representada por traços horizontais na Figura 3.4.8.5.

Figura 3.4.8.5 Diagrama biliteral da restrição $\exists x Ex$ e $\exists x Ax$

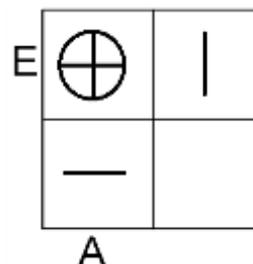


Fonte: O autor

Como se pode ver, a primeira restrição gerou uma ligação existencial (traço vertical) abrangendo duas células, enquanto a segunda gerou uma segunda ligação existencial (traço horizontal) abrangendo outras duas células. Ambas ligações estão claramente identificadas pelos traços verticais e horizontais no diagrama. É importante ressaltar que, de modo análogo às demais restrições efetuadas pelas premissas, a restrição existencial final é dada pela união da sequência de restrições, pois cada uma das restrições existenciais deve ser satisfeita nas premissas do argumento e, portanto, na conclusão.

Acrescentemos ainda mais uma restrição, a fim de verificar os primeiros efeitos da aplicação da ligação existencial. Consideremos a restrição "não existem alunos que estudam e aprendem", simbolizada por $\sim \exists x (Ex \wedge Ax)$. Como já vimos, esta nova restrição suprime a região dada por $Ex \wedge Ax$, que deve ser preenchida com um "círculo". Esta nova restrição está mostrada na Figura 3.4.8.6.

Figura 3.4.8.6 — Diagrama biliteral da restrição $\exists x Ex$, $\exists x Ax$ e $\sim \exists x (Ex \wedge Ax)$



Fonte: O autor

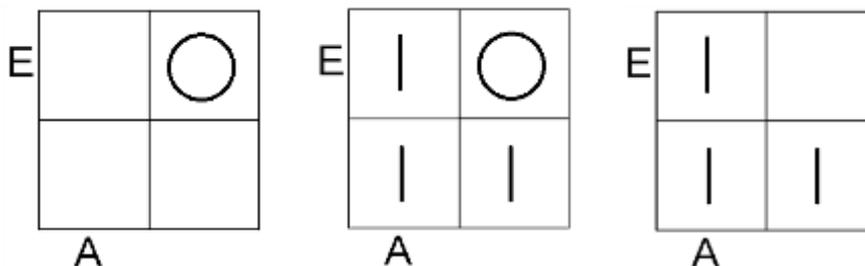
Observando o diagrama final, vemos primeiramente que não há contradição no argumento, pois a região suprimida eliminou dois traços, um de cada ligação existencial, porém nenhum dos dois traços é o último traço de alguma ligação existencial. Vemos também que restou apenas um traço de cada uma das ligações existenciais (traços horizontal e vertical), que não podem ser eliminados, pois isto geraria uma contradição em relação às condições de cada ligação existencial.

Outra informação que aparece claramente são as conclusões de que "existe um aluno que não estuda e aprende" e "existe um aluno que não aprende e estuda", representadas pelas regiões (no caso também células) $\sim E \wedge A$ e $E \wedge \sim A$, que contém cada uma toda uma ligação existencial, estabelecida por um único traço horizontal ou vertical, pois o outro foi eliminado pela supressão imposta pela nova restrição. Desse modo, podemos verificar visualmente pelo gráfico que as conclusões $\exists x (\sim Ex \wedge Ax)$ e $\exists x (Ex \wedge \sim Ax)$ são válidas.

Se fizéssemos uma nova restrição, dada por $\sim \exists x (Ex \wedge \sim Ax)$, isto significaria suprimir a região $(E \wedge \sim A)$, que contém o último traço da segunda condição existencial, o que levaria a uma contradição.

A fim de explorar ainda mais as propriedades da aplicação das ligações existenciais, vejamos outro exemplo para mostrar sua representação em relação à sua correspondente restrição de quantificação universal. Para isso, vamos utilizar a restrição existencial $\exists x (Ex \rightarrow Ax)$. Este processo de construção da ligação existencial é representado em suas três etapas na Figura 3.4.8.7.

Figura 3.4.8.7 — Obtenção do diagrama biliteral da restrição $\exists x (Ex \rightarrow Ax)$



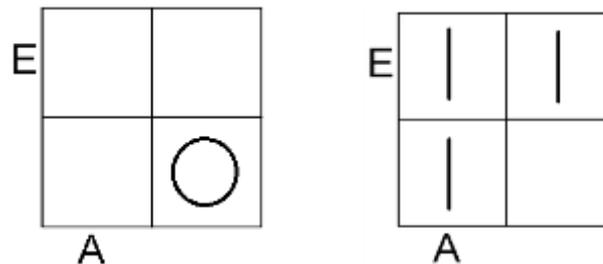
Fonte: O autor

No diagrama da esquerda, construímos a restrição $\forall x (Ex \rightarrow Ax)$, que é restrição de quantificação universal correspondente, suprimindo com um círculo a célula $(E \wedge \sim S)$. Com isso, visualizamos a região que a satisfaz (região livre), composta pelas três células restantes. Em seguida, como estamos representando a restrição de existência desta

condição, preenchemos com um traço vertical todas as células desta região livre, conforme o diagrama do meio. Como a restrição é apenas de existência, isto não impõe nenhuma exigência específica com relação à região suprimida inicialmente pelo círculo, que teve apenas a função de delimitar a região da existência. Assim retiramos o círculo do diagrama, a fim de restaurar a região suprimida, obtendo o diagrama final à direita.

Observando o diagrama resultante (existencial), vemos que ele pode ser obtido do diagrama inicial (universal) pela reposição da região suprimida (supressão do círculo) e pela inserção do traço vertical nas regiões livres restantes. Isto significa que, se quisermos representar a restrição $\exists x(Ex \vee Ax)$, podemos tomar a região da restrição $\forall x(Ex \vee Ax)$ e fazer nela a reposição da região suprimida e a inserção do traço vertical nas células livres da região delimitada, como se fosse uma inversão, conforme indicado nos diagramas da Figura 3.4.8.8.

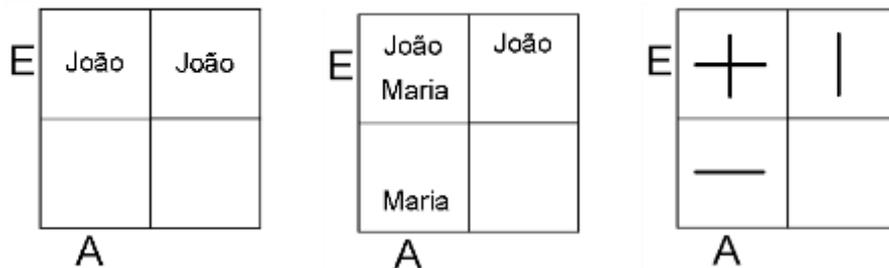
Figura 3.4.8.8 — Inversão entre as regiões das restrições $\exists x(Ex \vee Ax)$ e $\forall x(Ex \vee Ax)$



Fonte: O autor

Considerando as restrições individualizadas das condições existenciais, tais como E_j ("João estuda"), A_m ("Maria aprende"), etc., é possível interpretá-las como uma quantificação existencial individualizada, pois, quando se afirma que "João estuda", estamos dizendo que existe um aluno que se chama João e que estuda. Isto equivale a fazermos uma ligação existencial na qual variável livre está associada ao nome "João", tal como indicado no primeiro diagrama da Figura 3.4.8.9. É importante notar que este diagrama equivale à proposição E_j porque ele estabelece não só a existência do predicado E mas também a equivalência do traço existencial (variável livre) com o indivíduo especificado (João). Se sobrepusermos a esta condição outra quantificação existencial, por exemplo A_m , associada ao nome "Maria", então obteríamos como diagrama final o segundo diagrama da Figura 3.4.8.9.

Figura 3.4.8.9 — Diagrama biliteral para quantificação existencial individualizada



Fonte: O autor

Como podemos ver, o processo de representação dos casos de quantificação existencial individualizada são equivalentes às ligações existenciais já definidas aqui, apresentando apenas uma simbolização diferente para a ligação existencial. Desse modo, uma vez que tenhamos definido uma associação entre um determinado traço e um determinado elemento, podemos representar a quantificação existencial individualizada dada por $Ej \wedge Am$, na qual o traço vertical está associado a "João" e o traço horizontal a "Maria", conforme apresentado no terceiro diagrama da Figura 3.4.8.9. É importante notar que podemos utilizar este método à condição $Ej \wedge Am$ porque esta é composta por uma conjunção de duas proposições primárias quantificadas (tal como acontece nas premissas de um argumento), sendo portanto singularmente quantificada, mas que não podemos aplicá-lo, por exemplo, à condição $Ej \vee Am$, pois isto equivaleria à condição $\exists x Ex \vee \exists y Ay$ (com x equivalendo a j e y equivalendo a m), que é uma proposição primária com duas quantificações. Isto pode ser visto mais claramente no terceiro diagrama da Figura 3.4.8.9, que, embora represente a condição $Ej \vee Am$, não obedeceria às propriedades da ligação existencial, uma vez que permitiria a supressão de uma das duas ligações existenciais da proposição sem que isso configurasse uma contradição

3.5. A REPRESENTAÇÃO GERAL DAS RESTRIÇÕES CONTIDAS NO DIAGRAMA BILITERAL

3.5.1. A ligação existencial do conjunto universo

Na seção 3.4, fizemos, por meio do diagrama biliteral, a representação gráfica das operações lógicas de duas restrições. Assim, dada uma operação lógica, obtivemos o seu correspondente diagrama. Como pudemos observar, todas estas representações foram feitas

pela supressão das regiões incompatíveis com as restrições impostas. O resultado deste processo é um diagrama biliteral com células suprimidas (círculo), células livres (em branco) e células de ligação existencial (preenchidas por traços).

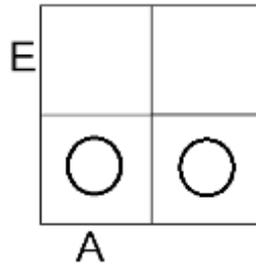
Uma região livre (composta por células livres) pode, à medida em que as restrições são aplicadas, tornar-se uma região de ligação existencial (contendo um ou mais traços) ou então uma região suprimida (contendo círculos), sendo justamente esta possibilidade que fica garantida pela representação de região livre. Assim, de acordo com a representação dos quantificadores, uma região livre pode receber "traços" existenciais ou "círculos" supressores resultantes de restrições que sejam aplicadas.

Porém, dado que pressupomos um universo não vazio e tendo em vista que a representação do universo é o quadrado maior contendo inicialmente todas as células do diagrama em branco, podemos ver que não se pode ter todas as células suprimidas (círculo) ao mesmo tempo, pois isto acarretaria um universo vazio. Assim, vemos que é pressuposto uma primeira ligação existencial em nosso universo, representada particularmente pelo não preenchimento da célula (célula em branco, em vez de preenchida por um traço). Desse modo, tal como em toda ligação existencial, nenhuma supressão pode eliminar a última célula do diagrama, pois isto significaria uma contradição.

Uma vez que toda célula em branco é de fato uma célula submetida à condição existencial pressuposta para o universo em questão, então, em vez de considerarmos uma célula livre as células em branco, fazemos uma definição mais ampla, segundo a qual *célula livre é toda célula não suprimida*. Deste modo, uma célula livre é toda célula que contenha uma condição existencial e, portanto, é também toda célula em branco (condição existencial do universo). Portanto, como consequência da nossa suposição inicial de que sempre lidamos com um universo não vazio, não é possível ter todas as células suprimidas por círculos, o que equivale a dizer que o universo deve corresponder a uma ligação existencial inicial, ou seja, $\exists x(x \in U)$, na qual U representa o universo em questão. Assim, qualquer célula livre (em branco ou com um traço) pode ser suprimida por um círculo, desde que haja ao menos uma célula livre (em branco ou com o traço correspondente) que não tenha sido suprimida.

3.5.2. Exemplo de diagramas biliterais que contém a restrição $\forall x \exists x$

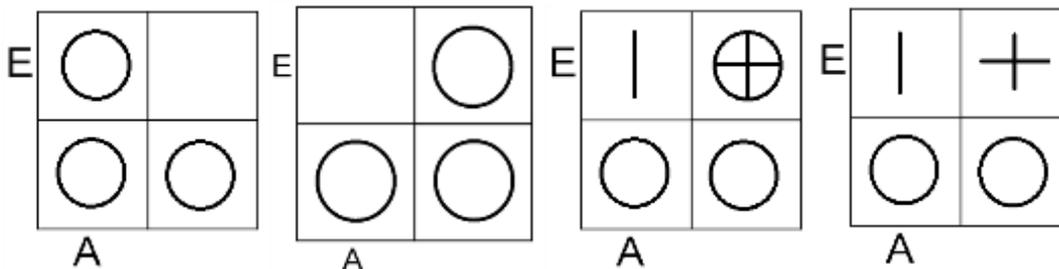
Como já vimos, a restrição $\forall x \exists x$ é representada pelo diagrama da Figura 3.5.2.1.

Figura 3.5.2.1 — Diagrama biliteral para $\forall x Ex$.

Fonte: O autor

A condição para esta restrição, que é a mesma da restrição E, apenas suprime a região $\sim E$, deixando livre a região E. Assim, se pelo menos uma das duas células desta região não contiver um círculo (célula livre), a restrição E estará garantida. Então a região E poderia ter várias restrições, contanto que pelo menos uma de suas células não contenha um círculo. Para exemplificar este conceito, representamos na Figura 3.5.2.2 alguns dos possíveis diagramas que estão *contidos* na restrição $\forall x Ex$.

Figura 3.5.2.2 – Alguns diagramas biliterais que estão contidos na restrição E



Fonte: O autor

Como podemos ver, cada um dos quatro diagramas obedece à condição exigida para estar contido na restrição $\forall x Ex$, que é ter a região $\sim E$ suprimida e conter, na região restante, pelo menos uma célula não suprimida (sem o círculo). Sendo assim, qualquer argumento que resultasse em algum dos quatro diagramas da Figura 3.5.2.2 admitiria a conclusão $\forall x Ex$ como válida (estaria contido na região $\forall x Ex$). O número de possibilidades de diagramas depende do número de ligações existenciais utilizadas nas premissas.

3.5.3. A representação geral das restrições para a relação de continência

Pela definição de célula livre e pela condição da ligação existencial no universo, podemos ver, conforme ilustrado no exemplo dado no item 3.5.2, que uma região

correspondente a uma determinada restrição está contida em outro diagrama quando, neste diagrama, a região suprimida correspondente àquela restrição também está suprimida (círculos) e a região restante da restrição contém ao menos uma célula livre (não suprimida por círculo). Esta é a condição fundamental de continência de uma restrição em um dado diagrama n -literal e, portanto, a propriedade que permite inferir se uma restrição está contida naquele diagrama, ou seja, é a propriedade que valida a inferência da restrição correspondente a uma conclusão a partir das restrições aplicadas consecutivamente pelas premissas.

Assim, se, no diagrama n -literal final resultante de uma série de restrições aplicadas pelas premissas de um argumento, a região da restrição resultante contiver ao menos uma célula não suprimida (sem o círculo) e a sua região suprimida contiver a região correspondente à região suprimida da conclusão procurada, esta conclusão é válida, pois contém em si toda a região resultante das premissas. Isto significa que as premissas implicam a conclusão procurada.

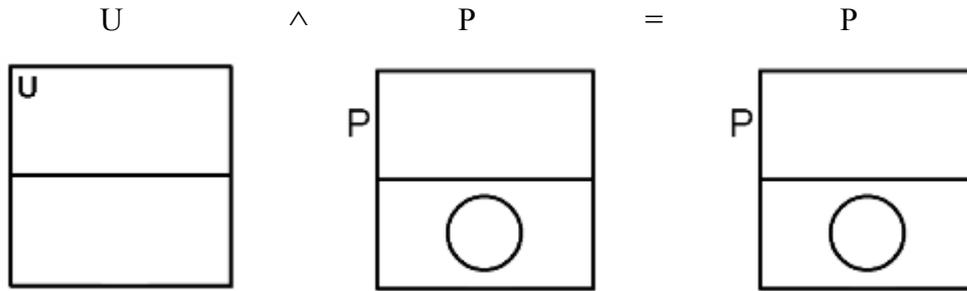
Com isso, podemos concluir também que, para que a região correspondente à restrição de uma conclusão não contenha a região correspondente à restrição das premissas, é suficiente que ao menos uma célula suprimida da região correspondente à conclusão não esteja suprimida na região do argumento.

Dessa exposição decorre que, se dois argumentos resultam em diagramas idênticos, então a restrição resultante de um está contida na do outro e vice-versa, ou seja, os dois argumentos são equivalentes (relação de continência recíproca), mesmos que sejam de formas diferentes.

3.5.4. Interseção das restrições

Quando, em um universo preestabelecido U não vazio, colocamos uma determinada restrição P , dividimos aquele universo em duas regiões: uma que satisfaz a restrição P , e outra que satisfaz a restrição $\sim P$ ou, equivalentemente, que não satisfaz a restrição P . A região P resulta assim, em última análise, da interseção da região correspondente a U e da região correspondente a P . Esta condição pode ser representada pelos diagramas apresentados na Figura 3.5.4.1. Como podemos ver pelo diagrama, a interseção de uma célula suprimida (círculo) com uma célula livre resulta em uma célula suprimida (círculo), como era de se esperar, pois esta operação é simplesmente uma aplicação sucessiva de duas restrições.

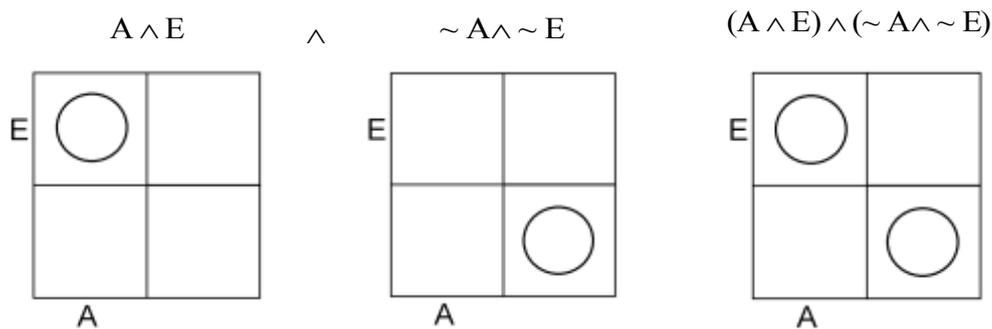
Figura 3.5.4.1 — Interseção de célula suprimida e célula livre (uma restrição)



Fonte: O autor

Assim, como podemos ver na Figura 3.5.4.2, a interseção da região $A \wedge E$ (primeiro diagrama) com a região $\sim A \wedge \sim E$ (segundo diagrama) resulta no terceiro diagrama.

Figura 3.5.4.2 — Interseção de célula suprimida e célula livre (duas restrições)

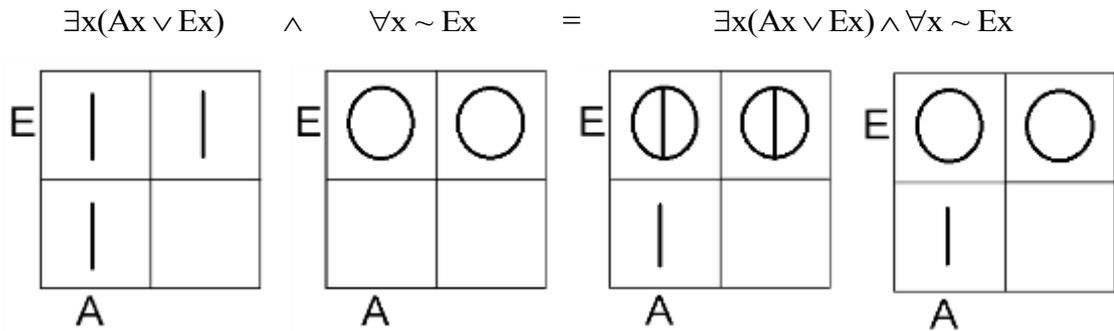


Fonte: O autor

Se tivermos uma condição de existência seguida por uma restrição de supressão, como por exemplo $\exists x(Ax \vee Ex)$ e $\forall x \sim Ex$, acontece também a prevalência da supressão sobre a existência, pois trata-se também da aplicação de restrições sucessivas, tal como indicado na Figura 3.5.4.3. Deve-se observar que, embora a notação do método empregado neste trabalho mantenha o traço suprimido pelo círculo no diagrama final, não só por facilitar a diagramação mas também para que o processo possa ser rastreado, o resultado final indicado pelo terceiro diagrama representa, em última análise, o quarto diagrama, que são equivalentes, embora com notações diferentes.

É importante observar também que, assim como a supressão de uma célula que contenha um último traço de restrição existencial resulta numa contradição, a colocação de uma ligação existencial completa numa região suprimida também resulta em uma contradição.

Figura 3.5.4.3 — Interseção de célula suprimida e célula livre

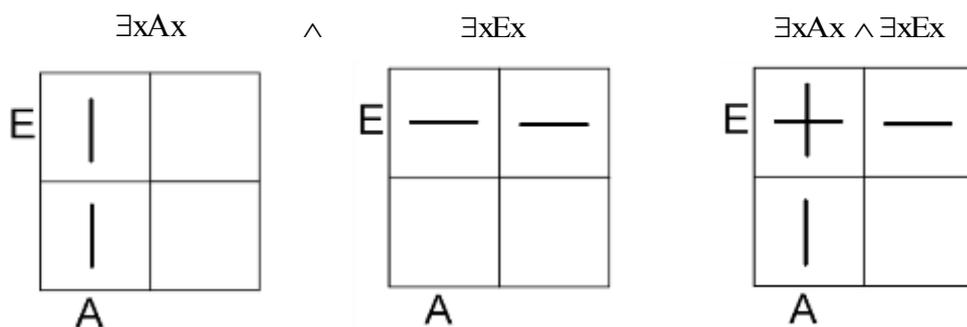


Fonte: O autor

Quando a interseção envolve duas condições existenciais, a condição resultante é a união das duas, pois também se trata de restrições aplicadas sucessivamente, em que a restrição posterior não exclui a restrição anterior, como acontece com a quantificação universal. Assim, por exemplo, se aplicamos a condição de existência com a restrição A e aplicamos também a condição de existência com a restrição B, obtemos como resultado a condição de existência das duas restrições, como indicado na Figura 3.5.4.3.

Desse modo, verificamos que o resultado da interseção de uma célula suprimida com qualquer outro tipo de célula resulta em uma célula suprimida, enquanto a interseção de duas células livres (não suprimidas) resulta numa célula que contém a união das restrições de cada uma delas.

Figura 3.5.4.3 — Interseção de células livres



Fonte: O autor

4. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL AOS SILOGISMOS

Neste capítulo, vamos aplicar o método dos diagramas n-literais aos silogismos, a fim de verificar a facilidade de construção, interpretação e conclusão do raciocínio lógico deste tipo de argumento.

4.1. CONCEITO BÁSICO DE SILOGISMO

A teoria do silogismo foi exposta por Aristóteles, em 384 a.C. Um silogismo é geralmente um argumento lógico envolvendo apenas três termos (restrições) composto por duas ou mais proposições que constituem as premissas, em que cada uma estabelece uma quantificação universal ou existencial envolvendo dois dos três termos, com um termo comum nas premissas, e uma proposição que constitui a conclusão e que também estabelece uma quantificação universal ou existencial envolvendo o termo comum e um dos outros termos.

Podemos citar o exemplo clássico de silogismo:

"Todo homem é mortal"

"Sócrates é homem"

"Logo, Sócrates é mortal"

Neste exemplo, a primeira premissa estabelece uma quantificação universal entre as restrições "homem" e "mortal", a segunda premissa estabelece uma quantificação existencial individualizada entre as restrições "Sócrates" e "homem" e a terceira premissa estabelece uma quantificação existencial individualizada entre as restrições "Sócrates" e "mortal".

Como o objetivo deste trabalho é a visualização do raciocínio lógico por meio de diagramas n-literais, não vamos entrar em detalhes de classificação dos silogismos e de suas inferências. Vamos simplesmente resumir a definição de silogismo e aplicar o método a todos os silogismos válidos, a fim de verificar a facilidade de sua aplicação.

Nos casos de silogismos, as letras S e P designarão restrições que se aplicarão à conclusão, enquanto a letra M representará a restrição combinada com as restrições S e P nas premissas.

As premissas e a conclusão dos silogismos podem ser de quatro tipos (representados pelas letras A, E, I e O), conforme a relação a seguir:

- 1) Afirmações universais: **A** (Todo humano é mortal)
- 2) Negações universais: **E** (Nenhum humano é imortal)
- 3) Afirmações particulares: **I** (Alguns humanos são asiáticos)
- 4) Negações particulares: **O** (Alguns humanos não são altos)

Analisaremos os 24 casos de silogismos válidos, divididos em quatro grupos principais, que correspondem às quatro "Figuras" de silogismos.

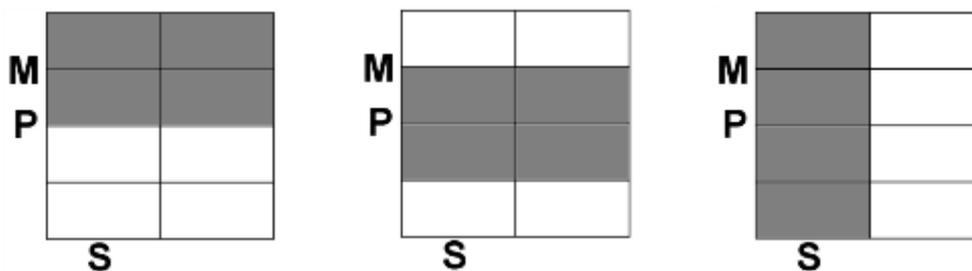
4.2. DIAGRAMA TRILITERAL PARA TRÊS RESTRIÇÕES.

Uma vez que os tipos de silogismos apresentam três restrições, vamos introduzir aqui o diagrama triliteral para este caso.

Para simplificar os diagramas, iremos doravante indicar nos diagramas apenas as restrições, e não mais as negações de suas restrições.

O diagrama triliteral para três restrições é obtido a partir da divisão do diagrama para duas restrições. A Figura 4.2.1 apresenta o diagrama triliteral para três restrições M, P e S, com as regiões correspondentes respectivamente sombreadas (em oposição às regiões claras que representam as respectivas negação das regiões sombreadas). Assim, no diagrama à esquerda temos a região da restrição M sombreada e a restrição $\sim M$ em branco, ocorrendo o mesmo para a restrição P no diagrama central e para a restrição S no diagrama da direita.

Figura 4.2.1 — Diagrama triliteral para três premissas M, P e S



Fonte: O autor

Como podemos ver, o nosso universo (quadrado maior) foi dividido em oito células, que correspondem às oito possíveis interseções entre as três restrições: $M \wedge \sim P \wedge S$,

$M \wedge \sim P \wedge \sim S$, $M \wedge P \wedge S$, $M \wedge P \wedge \sim S$, $\sim M \wedge P \wedge S$, $\sim M \wedge P \wedge \sim S$, $\sim M \wedge \sim P \wedge S$,
 $\sim M \wedge \sim P \wedge \sim S$.

4.3. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA TRILITERAL AO SILOGISMO

Vamos agora aplicar o método dos diagramas n-literais de três restrições aos diversos tipos de silogismos válidos. Nossa atenção estará concentrada principalmente no conceito de restrição, como já mencionamos anteriormente, pois é com este conceito de restringir determinadas regiões de um diagrama que obtemos a visualização de uma conclusão de um argumento. Estaremos assim adotando o universo de todas as coisas, que poderá sofrer as restrições dadas por "M", "P" e "S".

4.3.1. Primeira figura de silogismo

4.3.1.1. Modus Barbara — AAA-1

Este silogismo é dado por: "Todo M é P, todo S é M, logo todo S é P", que é simbolizado por:

$$1) \quad \forall x (Mx \rightarrow Px)$$

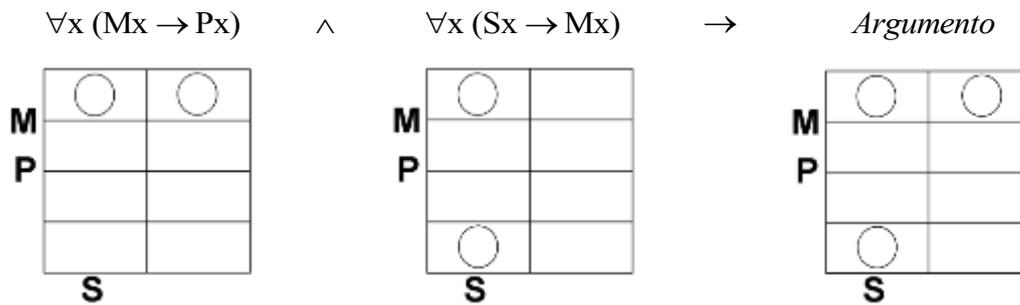
$$2) \quad \forall x (Sx \rightarrow Mx)$$

$$\forall x (Sx \rightarrow Px)$$

Vale a pena lembrar que a declaração "Todo M é P" estabelece uma relação de continência entre a restrição M e a restrição P, daí a relação de implicação quantificada universalmente.

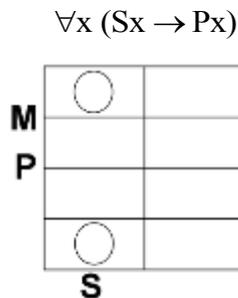
As duas premissas, isoladamente, correspondem respectivamente aos dois primeiros diagramas da Figura 4.3.1.1.1; a conjunção delas resulta no terceiro diagrama, que é, como já vimos, obtido pela união das restrições dos diagramas das premissas e corresponde ao diagrama final do argumento. O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.1.1.2.

Figura 4.3.1.1.1 — Diagrama trilateral para o argumento do silogismo Modus Barbara



Fonte: O autor

Figura 4.3.1.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Barbara



Fonte: O autor

Como fica evidente pelo diagrama final do argumento, a restrição "S", uma vez suprimidas as regiões correspondentes às premissas, está contida na restrição "P", logo vale a relação de implicação $S \rightarrow P$ com ou sem quantificação universal, o que corresponde à restrição da conclusão.

Podemos ver também que o diagrama correspondente ao argumento contém o diagrama correspondente à conclusão (não há células suprimidas na conclusão que também não estejam suprimidas no argumento), logo o argumento é válido.

Uma das grandes das principais características dos diagramas n-literais é que apresentam no diagrama final todas as possíveis conclusões resultantes das premissas, como, por exemplo, vemos que a região $M \wedge \sim P$ está suprimida, razão pela qual outra conclusão apresentada pelo gráfico é $\forall x \sim (Mx \wedge \sim Px)$, ou seja, "nenhum M é não P". Além disso, vemos também que a região $S \wedge \sim P \wedge \sim M$ também foi suprimida; logo, outra conclusão do diagrama é $\forall x \sim (Sx \wedge \sim Px \wedge \sim Mx)$, ou seja, "nada é S e não P e não M".

É importante ressaltar que a construção do diagrama final é obtida pela superposição (união) das restrições impostas pelas premissas, de modo que, uma vez suprimida uma região, como no diagrama à esquerda, esta região estará suprimida no

diagrama final. Assim, é possível, com apenas um diagrama trilateral obter o diagrama final, aplicando a sequência de restrições sucessivamente às regiões restantes do mesmo diagrama.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todos mamíferos são vertebrados; Todos cachorros são mamíferos; Logo Todos cachorros são vertebrados.*

4.3.1.2. Modus Barbari — AAI-1

Este silogismo repete as premissas do silogismo anterior, mas acrescenta uma restrição existencial, para chegar a outra conclusão. O argumento é "Todo M é P, todo S é M, algo é S, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

$$1) \forall x (Mx \rightarrow Px)$$

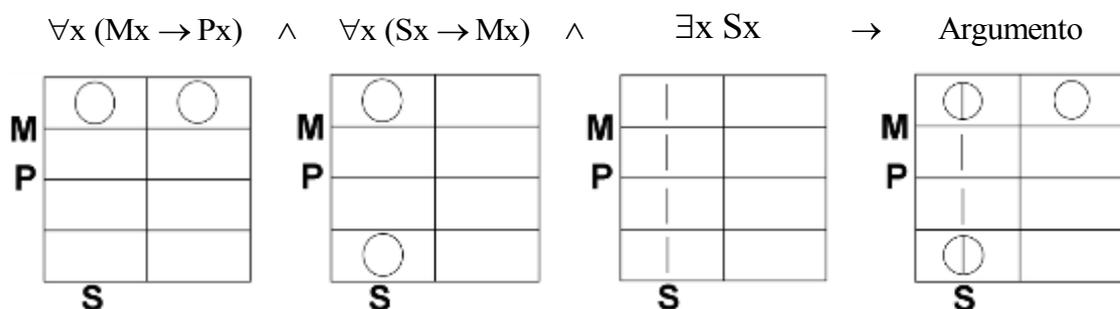
$$2) \forall x (Sx \rightarrow Mx)$$

$$3) \exists x Sx$$

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para o argumento deste silogismo está representado na Figura 4.3.1.2.1.

Figura 4.3.1.2.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Barbari

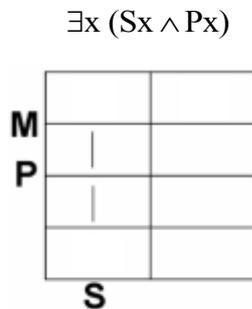


Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.1.2.2. Podemos ver que a ligação existencial imposta pela terceira premissa com os traços verticais, está toda ela contida na região da restrição $S \wedge P$, portanto esta região contém toda uma ligação existencial. Como a conclusão propõe a condição de existência na região

$\exists x (Sx \wedge Px)$, conforme indicado pela Figura 4.3.1.2.2, e esta região contém uma ligação existencial completa do diagrama final do argumento, a conclusão é válida.

Figura 4.3.1.2.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Barbari



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todos mamíferos são vertebrados; Todos cachorros são mamíferos; Existe algum cachorro; Logo algum cachorro é vertebrado.*

4.3.1.3. Modus Celarent — EAE-1

Este silogismo é "Nenhum M é P, todo S é M, logo nenhum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

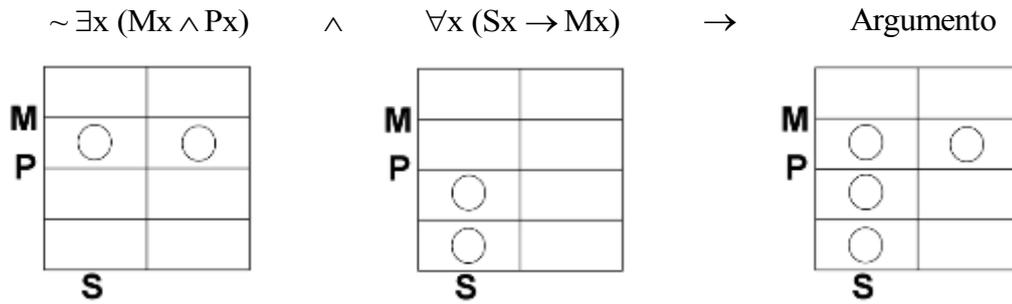
$$1) \sim \exists x (Mx \wedge Px)$$

$$2) \forall x (Sx \rightarrow Mx)$$

$$\sim \exists x (Sx \wedge Px)$$

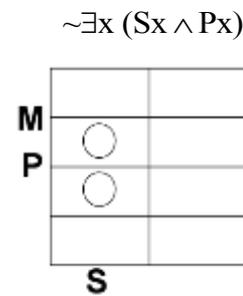
A sequência de construção do diagrama trilateral para o argumento deste silogismo está representado na Figura 4.3.1.3.1. O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.1.3.2. Como se pode ver no diagrama final do argumento (terceiro diagrama), a região $S \wedge P$ resultou suprimida, portanto não existem elementos que satisfaçam a restrição desta região, daí a conclusão do silogismo. Mas também podemos ver que a região do diagrama do argumento está contida na região da conclusão, o que também valida o argumento.

Figura 4.3.1.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Celarent



Fonte: O autor

Figura 4.3.1.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Celarent



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum invertebrado é mamífero; Todo inseto é invertebrado; Logo nenhum inseto é mamífero.*

4.3.1.4. Modus Celarent — EAO-1

Este silogismo é "Nenhum M é P, todo S é M, algo é S, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

1) $\sim \exists x (Mx \wedge Px)$

2) $\forall x (Sx \rightarrow Mx)$

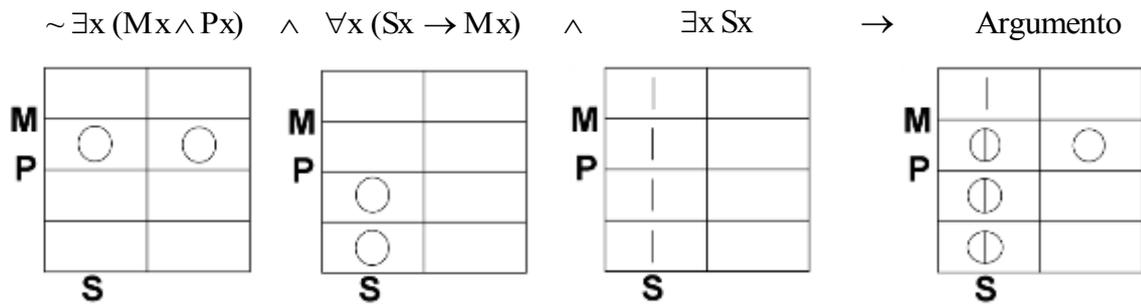
3) $\exists x Sx$

$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$

A sequência de construção do diagrama trilateral para o argumento deste silogismo está representada na Figura 4.3.1.4.1. O diagrama correspondente à conclusão é

apresentado na Figura 4.3.1.4.2. Como se pode ver no diagrama final do argumento, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pela restrição da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então ela satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.1.4.1 — Diagrama triliteral para o silogismo Modus Celarent

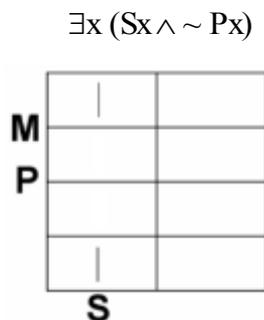


Fonte: O autor

Podemos ver ainda no diagrama do argumento que, analogamente, a restrição M também contém a região da ligação existencial e, por isso, satisfaz esta condição, razão pela qual podemos ver que também deste argumento a conclusão $\exists x Mx$.

Da mesma forma, também podemos ver que a região $S \wedge \sim M$ foi suprimida, de modo que também podemos concluir deste silogismo que $\sim \exists x (Sx \wedge \sim Mx)$, cujo significado é "Nenhum S é não M".

Figura 4.3.1.4.2 — Diagrama triliteral da conclusão do silogismo Modus Celarent



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum invertebrado é mamífero; Todo inseto é invertebrado; A barata é um inseto; Logo a barata não é um mamífero.*

4.3.1.5. Modus Darii — AII-1

Este silogismo é "Todo M é P, algum S é M, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

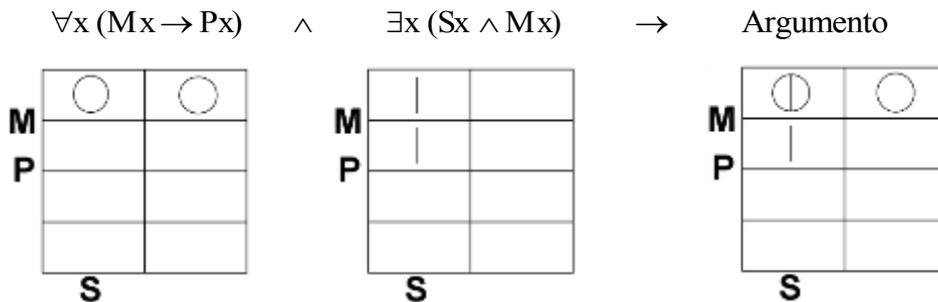
1) $\forall x (Mx \rightarrow Px)$

2) $\exists x (Sx \wedge Mx)$

$\exists x (Sx \wedge Px)$

A sequência de construção do diagrama triliteral para o argumento deste silogismo está representado na Figura 4.3.1.5.1.

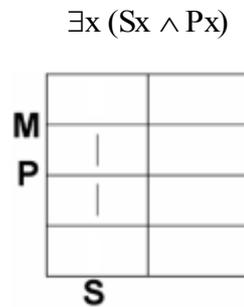
Figura 4.3.1.5.1 — Diagrama triliteral para o silogismo Modus Darii



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.1.5.2.

Figura 4.3.1.5.1 — Diagrama triliteral da conclusão do silogismo Modus Darii



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à segunda premissa foi reduzida pela restrição da primeira premissa a apenas um traço vertical na região $M \wedge P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

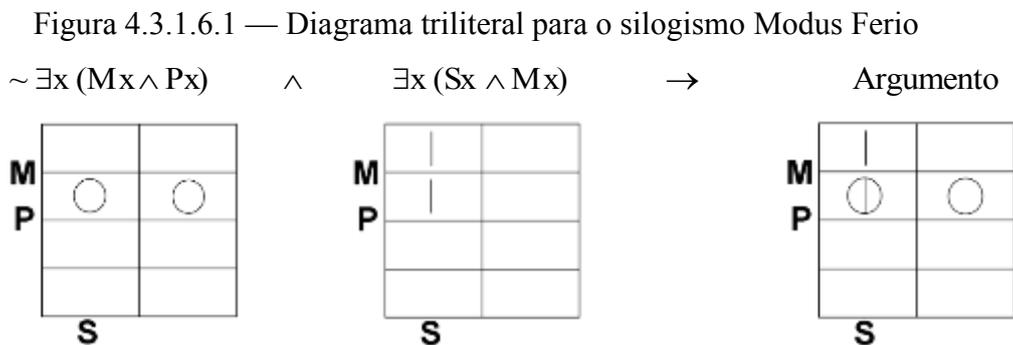
Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todos mamíferos são vertebrados; Algum animal é mamífero; Logo algum animal é vertebrado.*

4.3.1.6. Modus Ferio — EIO-1

Este silogismo é "Nenhum M é P, algum S é M, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\sim \exists x (Mx \wedge Px)$
 - 2) $\exists x (Sx \wedge Mx)$
-
- $\exists x (Sx \wedge \sim Px)$

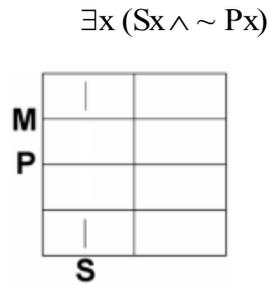
A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.1.6.1.



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.1.6.2.

Figura 4.3.1.6.1 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Ferio



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à segunda premissa foi reduzida pela restrição da primeira premissa a apenas um traço vertical na região $M \wedge P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é vertebrado; Algum animal é inseto; Logo algum animal não é vertebrado.*

4.3.2. Segunda figura de silogismo

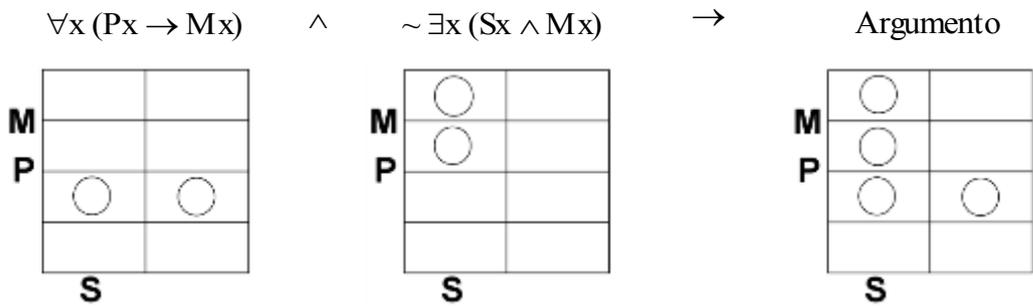
4.3.2.1. Modus Camestres — AEE-2

Este silogismo é "Todo P é M, nenhum S é M, logo nenhum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\forall x (Px \rightarrow Mx)$
 - 2) $\sim \exists x (Sx \wedge Mx)$
-
- $\sim \exists x (Sx \wedge Px)$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.2.1.1.

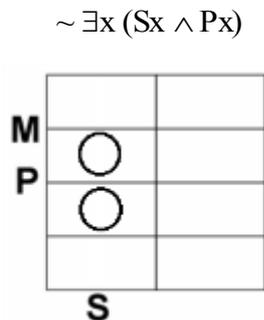
Figura 4.3.2.1.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Camestres



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.2.1.2.

Figura 4.3.2.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão silogismo Modus Camestres



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a região $S \wedge P$ resultou suprimida, portanto não existem elementos que satisfaçam a restrição desta região, daí a conclusão do silogismo.

Como podemos ver, a região do diagrama do argumento está contida na região da conclusão, o que também valida o argumento.

É interessante observar que o diagrama final nos permite inferir diretamente também outras conclusões. Por exemplo, a conclusão $\forall x (Px \rightarrow \sim Sx)$ é válida, pois a região $\sim (P \rightarrow \sim S)$ está suprimida e existe na região $(P \rightarrow \sim S)$ ao menos uma célula não suprimida. Pelas mesmas razões, também se obtém as conclusões $\forall x (Mx \rightarrow \sim Sx)$ e $\forall x (\sim Mx \rightarrow Sx)$.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo mamífero é vertebrado; Nenhum inseto é vertebrado; Logo nenhum inseto é mamífero.*

4.3.2.2. Modus Camestros — AEO-2

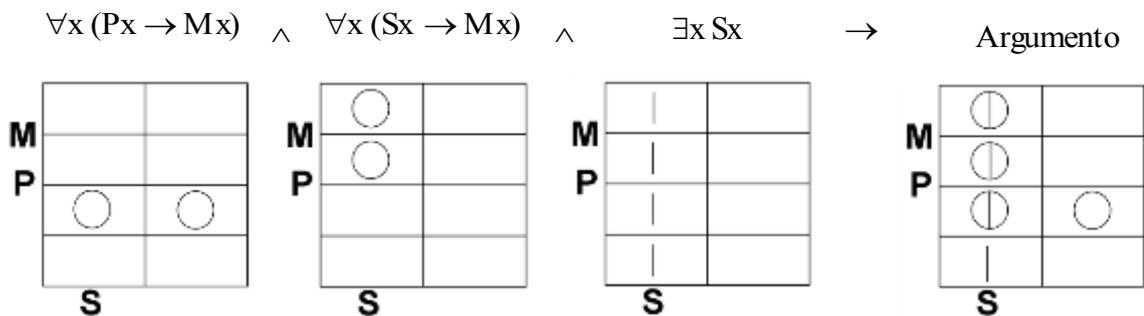
Este silogismo é "Todo P é M, nenhum S é M, algo é S, logo algum S não é P".

Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\forall x (Px \rightarrow Mx)$
 - 2) $\sim \exists x (Sx \wedge Mx)$
 - 3) $\exists x Sx$
-
- $\exists x (Sx \wedge \sim Px)$

A sequência de construção do diagrama triliteral para este silogismo está representada na Figura 4.3.2.2.1.

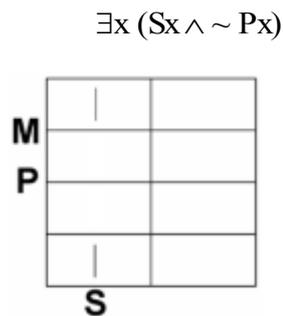
Figura 4.3.2.2.1 — Diagrama triliteral para o silogismo Modus Camestros



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.2.2.2.

Figura 4.3.2.2.2 — Diagrama triliteral da conclusão do silogismo Modus Camestros



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pelas restrições da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $\sim M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Podemos também ver no diagrama que, analogamente, as restrições $\sim M$, $\sim P$ também contém a região da ligação existencial e, por isso, satisfazem esta condição, razão pela qual podemos concluir também deste argumento as conclusões $\exists x \sim Mx$ e $\exists x \sim Px$.

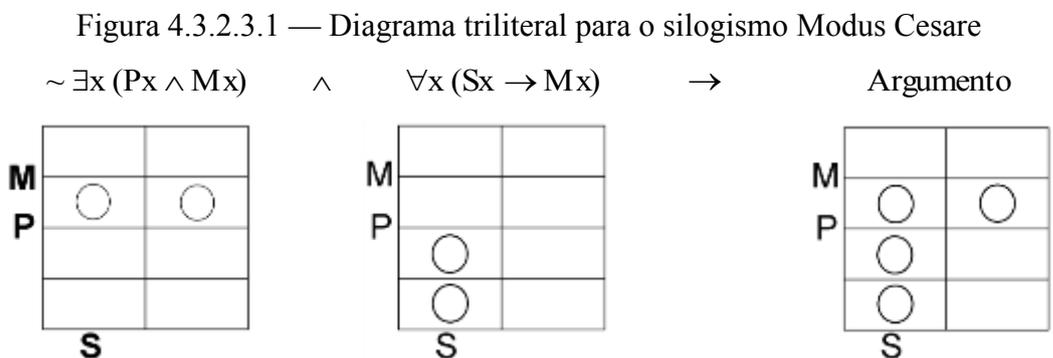
Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo mamífero é vertebrado; Nenhum inseto é vertebrado; Logo algum animal não é mamífero.*

4.3.2.3. Modus Cesare — EAE-2

Este silogismo é "Nenhum P é M, todo S é M, logo nenhum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

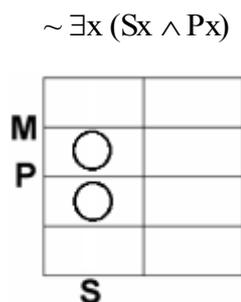
$$\begin{array}{l}
 1) \sim \exists x (Px \wedge Mx) \\
 2) \forall x (Sx \rightarrow Mx) \\
 \hline
 \sim \exists x (Sx \wedge Px)
 \end{array}$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.2.3.1.



O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.2.3.2. Como se pode ver no diagrama final a região da restrição $S \wedge P$ foi suprimida, daí a validade da conclusão do silogismo. Mas também podemos ver que a região do diagrama do argumento está contida na região da conclusão, o que também valida o argumento.

Figura 4.3.2.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Cesare



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é vertebrado; Todo mamífero é vertebrado; Logo nenhum mamífero é inseto.*

4.3.2.4. Modus Cesaro — EAO-2

Este silogismo é "Nenhum P é M, todo S é M, algo é S, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

$$1) \sim \exists x (Px \wedge Mx)$$

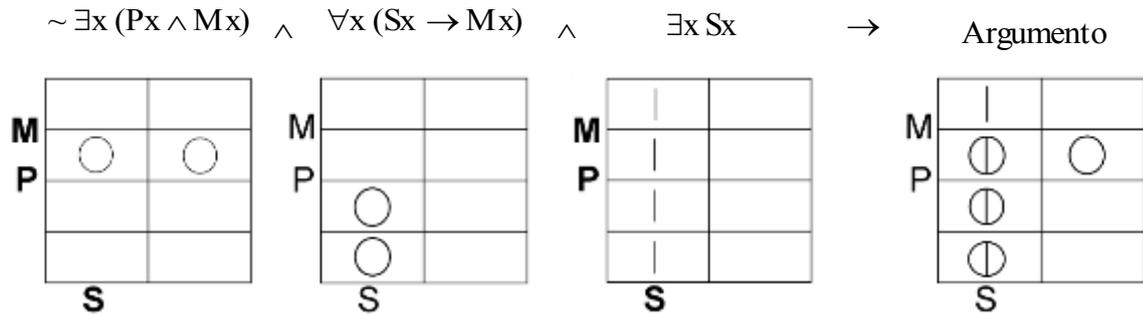
$$2) \forall x (Sx \rightarrow Mx)$$

$$3) \exists x Sx$$

$$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.2.4.1 e o diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.2.4.2.

Figura 4.3.2.4.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Cesaro

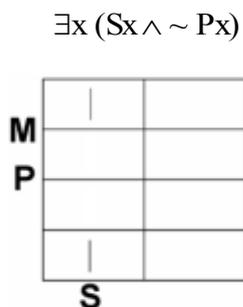


Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pela restrição da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Podemos também ver no diagrama que, analogamente, as restrições M e $\sim P$ também contém a região da ligação existencial do argumento e, por isso, satisfaz esta condição, razão pela qual podemos concluir também que $\exists x Mx$ e $\exists x \sim Px$.

Figura 4.3.2.4.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Cesaro



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é vertebrado; Todo mamífero é vertebrado; Algum animal é mamífero; Logo algum mamífero não é inseto.*

4.3.2.5. Modus Baroco — AOO-2

Este silogismo é "Todo P é M, algum S não é M, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

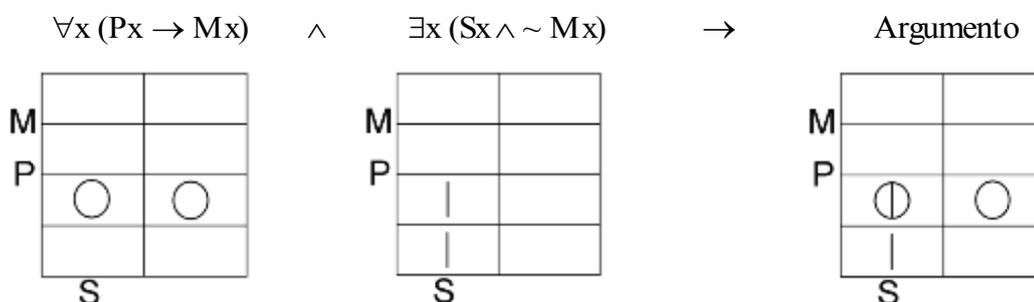
$$1) \forall x (Px \rightarrow Mx)$$

$$2) \exists x (Sx \wedge \sim Mx)$$

$$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$$

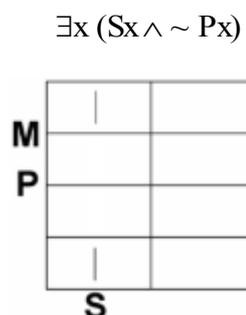
A seqüência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.2.5.1 e o diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.2.5.2.

Figura 4.3.2.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Baroco



Fonte: O autor

Figura 4.3.2.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Baroco



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final a ligação existencial da segunda premissa foi reduzida a um único traço vertical pela restrição da primeira premissa, de modo que esta ligação ficou completamente contida na região dada por $S \wedge \sim P$, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo mamífero é vertebrado; Algum animal não é vertebrado; Logo algum mamífero não é mamífero.*

4.3.2.6. Modus Festino — EIO-2

Este silogismo é "Nenhum P é M, algum S é M, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

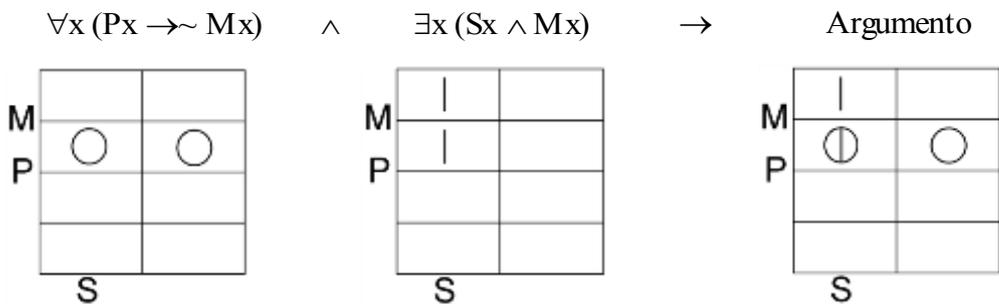
$$1) \forall x (Px \rightarrow \sim Mx)$$

$$2) \exists x (Sx \wedge Mx)$$

$$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$$

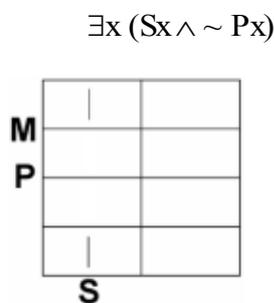
A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.2.6.1 e o diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.2.6.2.

Figura 4.3.2.6.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Festino



Fonte: O autor

Figura 4.3.2.6.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Festino



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final a ligação existencial da segunda premissa foi reduzida a um único traço vertical pela restrição da primeira premissa, de modo que esta

ligação ficou completamente contida na região dada por $S \wedge \sim P$, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é mamífero; Alguns animal é mamífero; Logo algum animal não é inseto.*

4.3.3. Terceira figura de silogismo

4.3.3.1. Modus Darapti — AAI-3

Este silogismo é "Todo M é P, todo M é S, algo é M, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

$$1) \forall x (Mx \rightarrow Px)$$

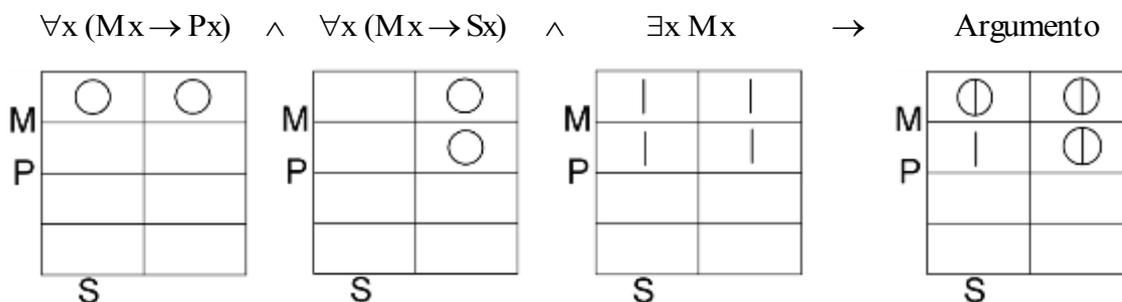
$$2) \forall x (Mx \rightarrow Sx)$$

$$3) \exists x Mx$$

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$

A sequência de construção do diagrama triliteral para este silogismo está representada na Figura 4.3.3.1.1.

Figura 4.3.3.1.1 — Diagrama triliteral para o silogismo Modus Darapti

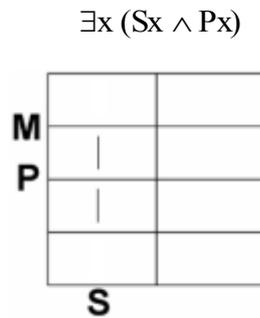


Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.3.1.2. Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pela restrição da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região

$M \wedge P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.3.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Darapti



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: Todo cachorro é vertebrado; Todo cachorro é mamífero; Algum animal é vertebrado; Logo algum mamífero é vertebrado.

4.3.3.2. Modus Felapton — EAO-3

Este silogismo é "Nenhum M é P, todo M é S, algo é M, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

$$1) \quad \forall x (Mx \rightarrow \sim Px)$$

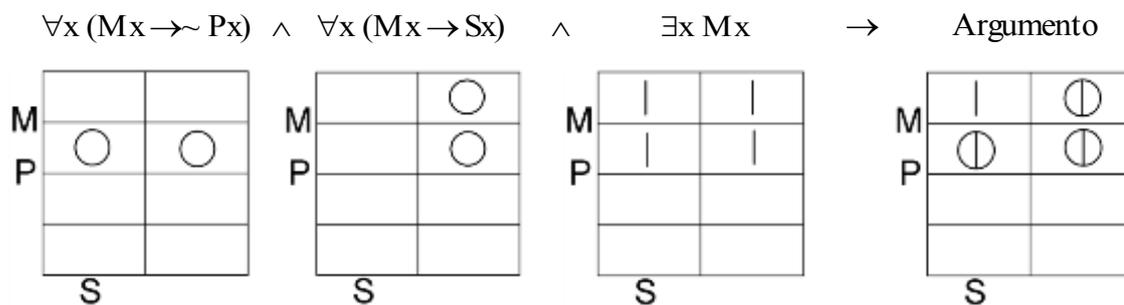
$$2) \quad \forall x (Mx \rightarrow Sx)$$

$$3) \quad \exists x Mx$$

$$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.3.2.1.

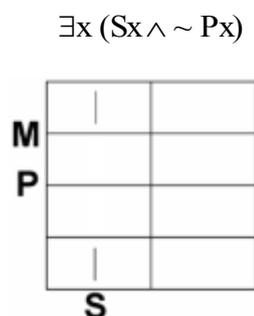
Figura 4.3.3.2.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Felapton



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.3.2.2.

Figura 4.3.3.2.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Felapton



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pela restrição da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é mamífero; Todo inseto é invertebrado; Algum animal é inseto; Logo algum inseto não é mamífero.*

4.3.3.3. Modus Datisi — AII-3

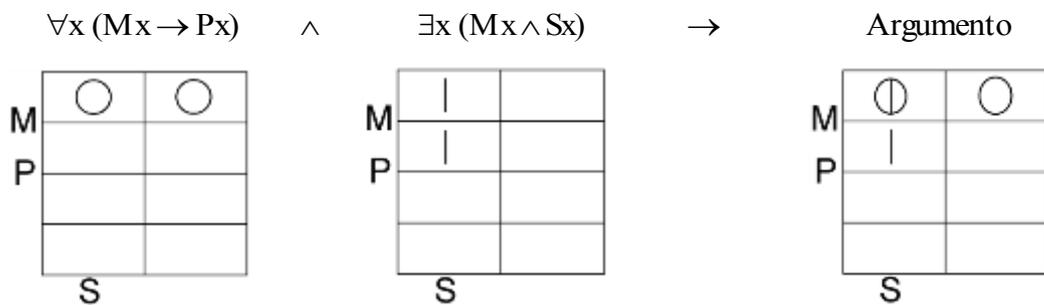
Este silogismo é "Todo M é P, algum M é S, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\forall x (Mx \rightarrow Px)$
- 2) $\exists x (Mx \wedge Sx)$

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.3.3.1.

Figura 4.3.3.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Datisi

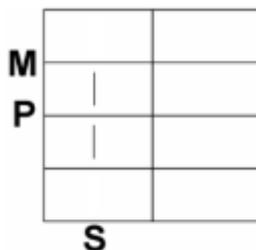


Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.3.3.2. Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial da segunda premissa foi reduzida a um único traço vertical pela restrição da primeira premissa, de modo que esta ligação ficou completamente contida na região dada por $S \wedge P \wedge M$, que está contida na região $Sx \wedge Px$, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.3.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Datisi

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo mamífero é vertebrado; Algum vertebrado é carnívoro; Logo algum carnívoro é vertebrado.*

4.3.3.4. Modus Disamis — IAI-3

Este silogismo é "Algum M é P, todo M é S, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

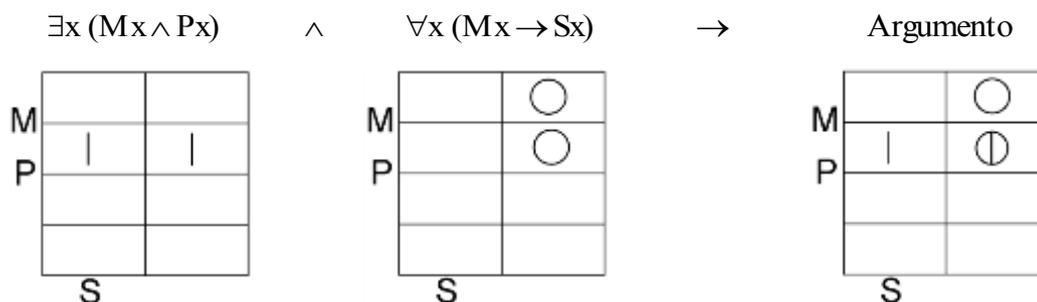
$$1) \exists x (Mx \wedge Px)$$

$$2) \forall x (Mx \rightarrow Sx)$$

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$

A sequência de construção do diagrama triliteral para este silogismo está representada na Figura 4.3.3.4.1.

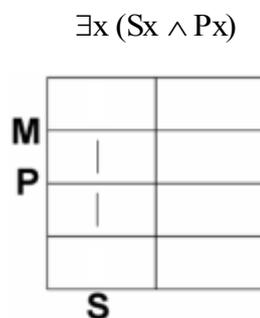
Figura 4.3.3.4.1 — Diagrama triliteral para o silogismo Modus Disamis



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.3.4.2.

Figura 4.3.3.4.2 — Diagrama triliteral da conclusão do silogismo Modus Disamis



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial da primeira premissa foi reduzida a um único traço vertical pela restrição da segunda premissa, de modo que esta ligação ficou completamente contida na região dada por $S \wedge P \wedge M$, que está contida na região $S \wedge P$, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Algum mamífero é carnívoro; Todo mamífero é vertebrado; Logo algum vertebrado é carnívoro.*

4.3.3.5. Modus Bocardo — OAO-3

Este silogismo é "Algum M não é P, todo M é S, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\exists x (Mx \wedge \sim Px)$
 - 2) $\forall x (Mx \rightarrow Sx)$
-
- $\exists x (Sx \wedge \sim Px)$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.3.5.1. O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.3.5.2. Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial da primeira premissa foi reduzida a um único traço vertical pela restrição da segunda premissa, de modo que esta ligação ficou completamente contida na região dada por $S \wedge \sim P \wedge M$, que está contida na região $S \wedge \sim P$, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.3.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Bocardo

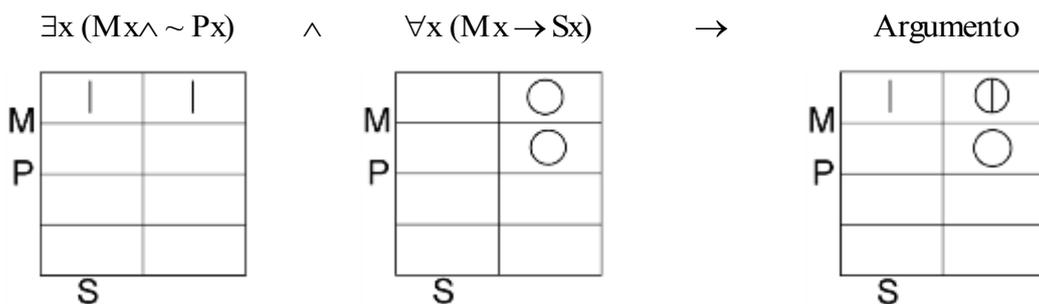
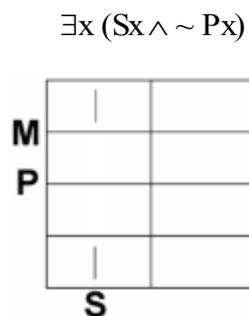


Figura 4.3.3.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Bocardo



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Algum mamífero não é carnívoro; Todo mamífero é vertebrado; Logo algum vertebrado não é carnívoro.*

4.3.3.6. Modus Ferison — EIO-3

Este silogismo é "Nenhum M é P, algum M é S, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

$$1) \forall x(Mx \rightarrow \sim Px)$$

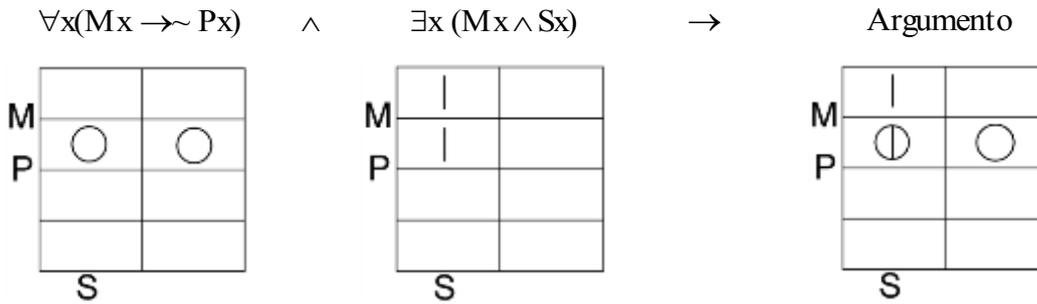
$$2) \exists x (Mx \wedge Sx)$$

$$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.3.6.1 e o diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.3.6.2.

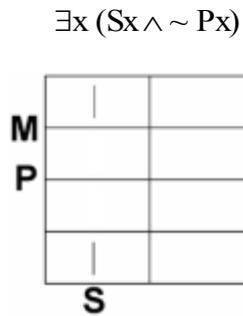
Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial da segunda premissa foi reduzida a um único traço vertical pela restrição da primeira premissa, de modo que esta ligação ficou completamente contida na região dada por $S \wedge \sim P \wedge M$, que está contida na região $S \wedge \sim P$, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.3.6.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Ferison



Fonte: O autor

Figura .3.3.6.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Ferison



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é mamífero; Algum inseto é carnívoro; Logo algum carnívoro não é mamífero.*

4.3.4. Quarta figura de silogismo

4.3.4.1. Modus Bamalip — AAI-4

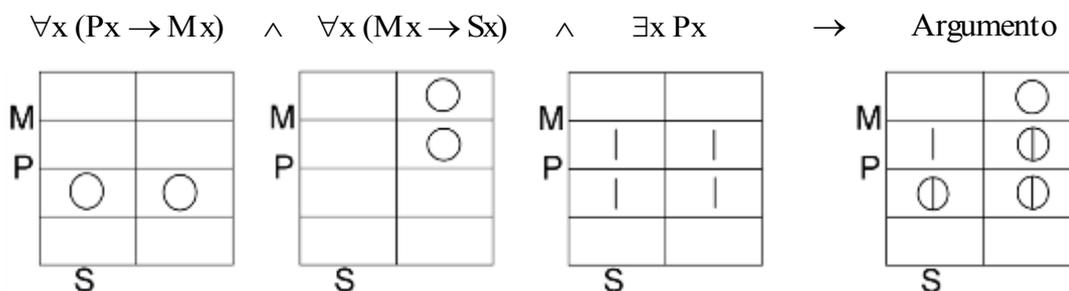
Este silogismo é "Todo P é M, todo M é S, algo é P, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\forall x (Px \rightarrow Mx)$
- 2) $\forall x (Mx \rightarrow Sx)$
- 3) $\exists x Px$

$\exists x (Sx \wedge Px)$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.4.1.1 e o diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.4.1.2.

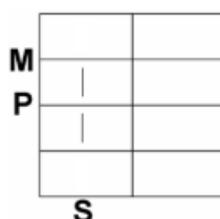
Figura 4.3.4.1.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Bamalip



Fonte: O autor

Figura 4.3.4.1.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Bamalip

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pela restrição da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $M \wedge P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo cachorro é mamífero; Todo mamífero é vertebrado; Algum animal é cachorro; Logo algum vertebrado é cachorro.*

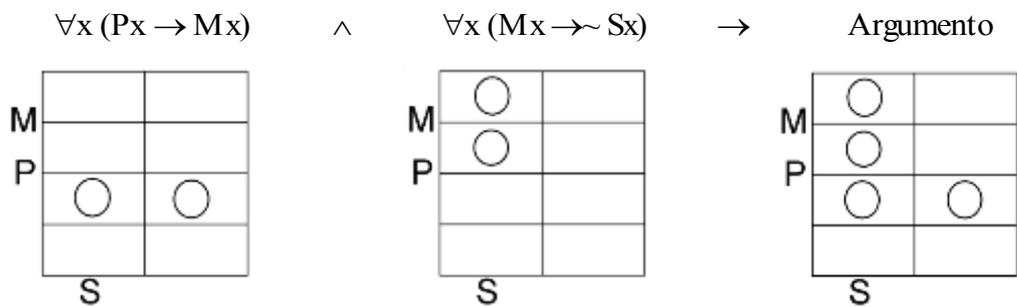
4.3.4.2. Modus Calemis — AEE-4

Este silogismo é "Todo P é M, nenhum M é S, nenhum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\forall x (Px \rightarrow Mx)$
 - 2) $\forall x (Mx \rightarrow \sim Sx)$
-
- $\sim \exists x (Sx \wedge Px)$

A sequência de construção do diagrama triliteral para este silogismo está representada na Figura 4.3.4.2.1.

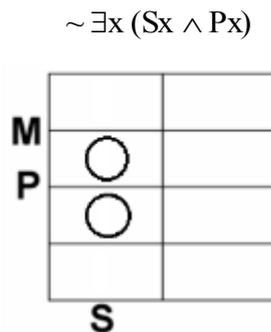
Figura 4.3.4.2.1 — Diagrama triliteral para o silogismo Modus Calemis



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.4.2.2.

Figura 4.3.4.2.2 — Diagrama triliteral da conclusão do silogismo Modus Calemis



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, as restrições das primeira e segunda premissas suprimiram a região $S \wedge P$, razão pela qual não existem elementos contidos nesta região, daí a validade da conclusão do silogismo. Mas também podemos ver que a região do diagrama do argumento está contida na região da conclusão, o que também valida o argumento.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo cachorro é mamífero; Nenhum mamífero é invertebrado; Nenhum invertebrado é cachorro.*

4.3.4.3. Modus Calemos — AEO-4

Este silogismo é "Todo P é M, nenhum M é S, algo é S, logo algum S não é P".

Este argumento pode ser simbolizado por:

$$1) \forall x (Px \rightarrow Mx)$$

$$2) \sim \exists x (Mx \wedge Sx)$$

$$3) \exists x Sx$$

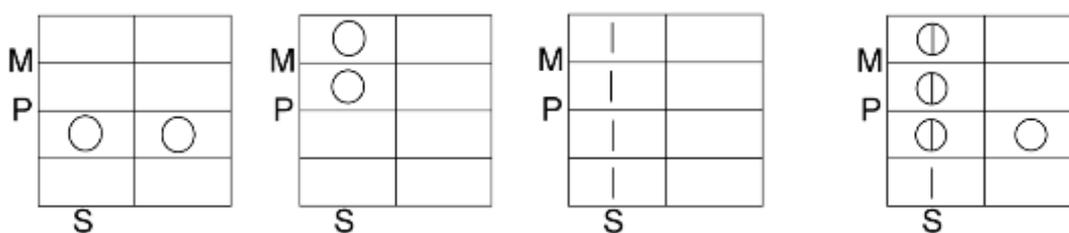
$$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$$

Fonte: O autor

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.4.3.1.

Figura 4.3.4.3.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Calemos

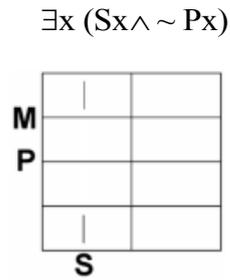
$$\forall x (Px \rightarrow Mx) \wedge \sim \exists x (Mx \wedge Sx) \wedge \exists x Sx \quad \rightarrow \quad \text{Argumento}$$



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.4.3.2. Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pelas restrições da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $\sim M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.4.3.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Calemos



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Todo cachorro é mamífero; Nenhum mamífero é invertebrado; Algum animal é invertebrado; Logo algum invertebrado não é cachorro.*

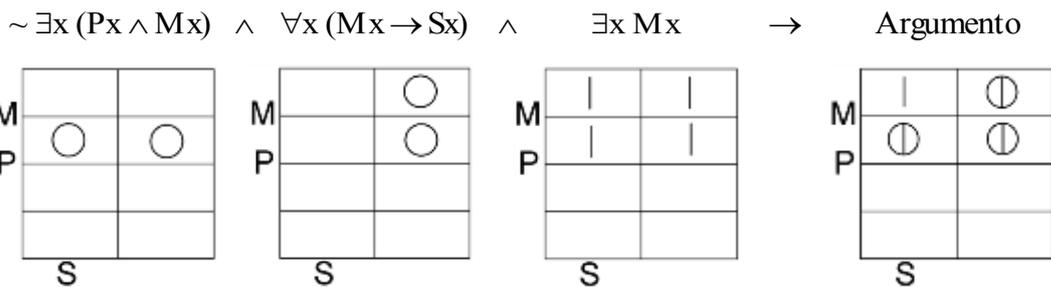
4.3.4.4. Modus Fesapo — EAO-4

Este silogismo é " Nenhum P é M, todo M é S, algo é M, logo algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

- 1) $\sim \exists x (Px \wedge Mx)$
 - 2) $\forall x (Mx \rightarrow Sx)$
 - 3) $\exists x Mx$
-
- $\exists x (Sx \wedge \sim Px)$

O diagrama trilateral para este silogismo está representado na Figura 4.3.4.4.1.

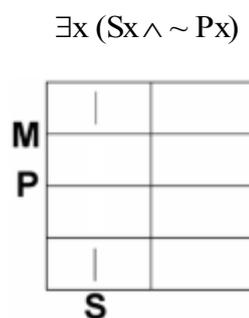
Figura 4.3.4.4.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Fesapo



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.4.4.2. Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à terceira premissa foi reduzida pelas restrições da primeira e segunda premissas a apenas um traço vertical na região $M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Figura 4.3.4.4.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Fesapo



Fonte: O autor

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum mamífero é inseto; Todo inseto é invertebrado; Algum animal é inseto; Logo algum invertebrado não é mamífero.*

4.3.4.5. Modus Dimatis — IAI-4

Este silogismo é "Algum P é M, todo M é S, logo algum S é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

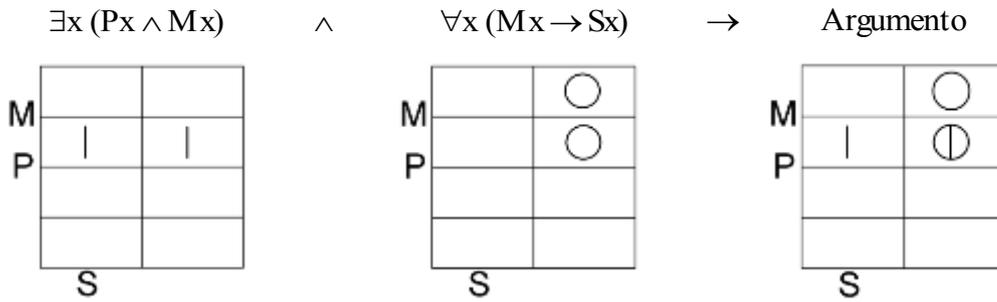
$$1) \exists x (Px \wedge Mx)$$

$$2) \forall x (Mx \rightarrow Sx)$$

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$

A sequência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.4.5.1.

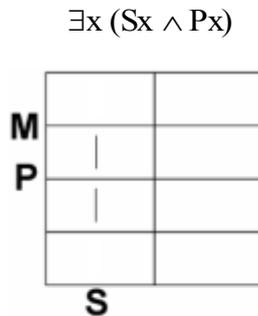
Figura 4.3.4.5.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Dimatis



Fonte: O autor

O diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.4.5.2.

Figura 4.3.4.5.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Dimatis



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à primeira premissa foi reduzida pela restrição da segunda premissa a apenas um traço vertical na região $M \wedge P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Algum carnívoro é mamífero; Todo mamífero é vertebrado; Logo algum vertebrado é carnívoro.*

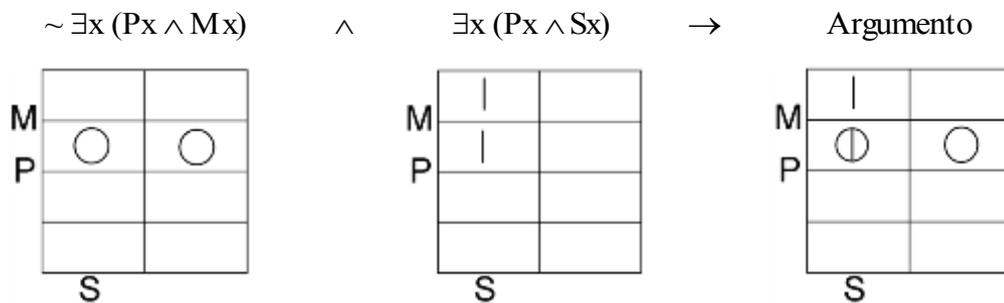
4.3.4.6. Modus Fresison — EIO-4

Este silogismo é "nenhum P é M, algum M é S, algum S não é P". Este argumento pode ser simbolizado por:

$$\begin{array}{l}
 1) \sim \exists x (Px \wedge Mx) \\
 2) \exists x (Px \wedge Sx) \\
 \hline
 \exists x (Sx \wedge \sim Px)
 \end{array}$$

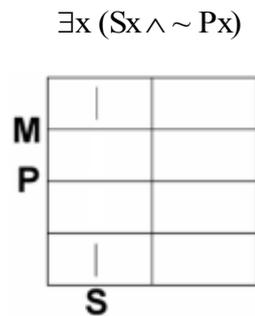
A seqüência de construção do diagrama trilateral para este silogismo está representada na Figura 4.3.4.6.1 e o diagrama correspondente à conclusão é apresentado na Figura 4.3.4.6.2.

Figura 4.3.4.6.1 — Diagrama trilateral para o silogismo Modus Fresison



Fonte: O autor

Figura 4.3.4.6.2 — Diagrama trilateral da conclusão do silogismo Modus Fresison



Fonte: O autor

Como se pode ver no diagrama final, a ligação existencial referente à segunda premissa foi reduzida pela restrição da primeira premissa a apenas um traço vertical na região $M \wedge \sim P \wedge S$, portanto qualquer restrição que contenha esta região satisfará o critério de existência. Como a restrição $S \wedge \sim P$ contém aquela região, então satisfaz o critério de existência, daí a validade da conclusão do silogismo.

Exemplo prático desta figura de silogismo: *Nenhum inseto é mamífero; Algum mamífero é vertebrado; Logo algum vertebrado não é inseto.*

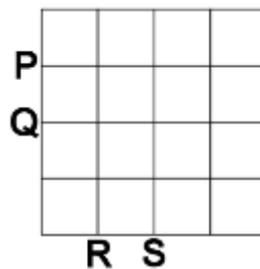
5. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL AO CÁLCULO SENTENCIAL

Vamos aplicar o método dos diagramas n-literais a condições especiais e a problemas comuns do cálculo sentencial de quatro restrições, procurando mostrar os casos que representam os pontos mais importantes da aplicação do método.

5.1 O DIAGRAMA PARA QUATRO RESTRIÇÕES

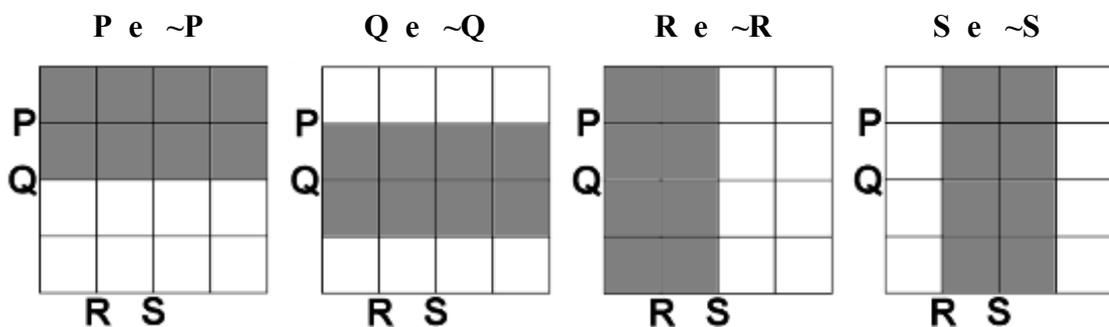
Assim como o diagrama trilateral (três restrições — oito células) foi obtido pela divisão do diagrama biliteral (duas restrições — quatro células), o diagrama tetraliteral (quatro restrições — dezesseis células) é obtido pela divisão do diagrama trilateral. O diagrama resultante está apresentado na Figura 5.1.1.

Figura 5.1.1 — Diagrama tetraliteral (quatro restrições)



Fonte: O autor

Figura 5.1.2 — Regiões do diagrama tetraliteral (quatro restrições)



Fonte: O autor

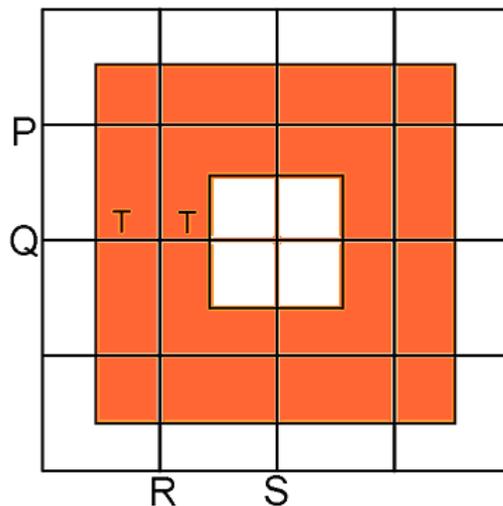
As regiões de cada restrição estão indicadas em cinza e as regiões complementares em branco nos quatro diagramas da Figura 5.1.2.

Nos exemplos a seguir, utilizaremos os diagramas n-literais com o número de restrições mais adequados a cada argumento.

5.2 O DIAGRAMA N-LITERAL PARA CINCO E SEIS RESTRIÇÕES

O diagrama para cinco restrições (diagrama pentaliteral) é obtido a partir do diagrama tetraliteral por meio de uma divisão especial da região, conforme indicado na Figura 5.2.1.

Figura 5.2.1 — Diagrama pentaliteral (cinco restrições)

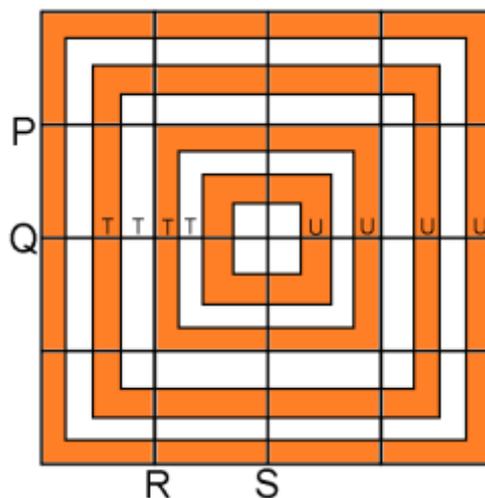


Fonte: O autor

A nova região acrescentada ao diagrama tetraliteral está indicada pela letra T e apresentada em laranja. A região em branco representa naturalmente a região $\sim T$. Como era de se esperar, a região quadrada do universo ficou dividida em 32 células.

Este método de divisão pode ser estendido também para diagrama hexaliteral (seis restrições), conforme apresentado na Figura 5.2.2. A região da restrição U acrescentada está indicada na cor laranja. Como podemos ver, existem agora 64 células, o que torna mais trabalhoso o processo de construção e a visualização dos resultados. Como veremos mais adiante, existem alternativas menos complexas para lidar com seis restrições.

Figura 5.2.2 — Diagrama hexaliteral (seis restrições)



Fonte: O autor

5.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL A ARGUMENTOS DE TRÊS, QUATRO, CINCO E SEIS RESTRIÇÕES DO CÁLCULO SENTENCIAL

Exemplo 5.3.1

Vejamos um argumento contendo uma implicação dupla, dado por:

- 1) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
- 2) $P \rightarrow (Q \wedge \sim R)$

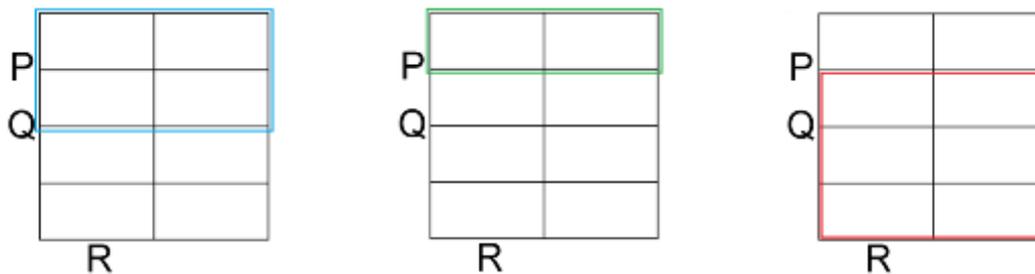
R

Como já dissemos, a restrição da implicação se resume numa supressão estabelecida pelo consequente aplicada à região apenas delimitada (e não suprimida) pelo antecedente. Assim para a implicação maior da proposição, precisamos primeiro delimitar a região do primeiro termo $P \rightarrow Q$, para aplicar em seguida a supressão que faça esta região ficar contida na região correspondente ao segundo termo, R.

Temos dois modos equivalentes para determinar a região delimitada pela restrição $P \rightarrow Q$:

1) Na região P, não consideramos as células em que não ocorre Q. Isto equivale a considerar apenas a região em que P está contido em Q. Este processo está indicado na sequência de diagramas da Figura 5.3.1.1. No primeiro diagrama, identificamos a região P (indicado em azul) e, nesta região, separamos a região que não contém Q (indicado em verde no segundo diagrama), para obtermos a região delimitada indicada em vermelho no terceiro diagrama.

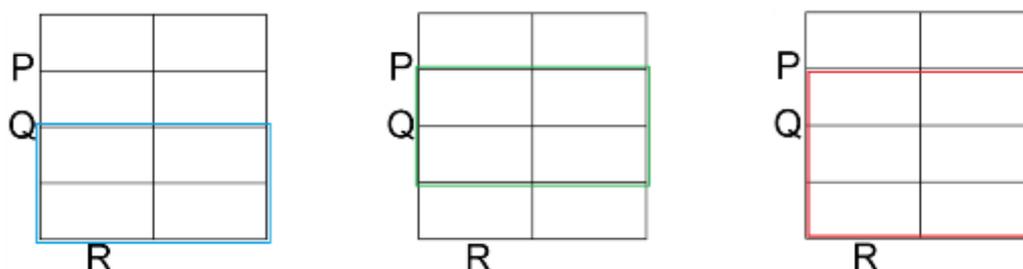
Figura 5.3.1.1 — Determinação da região delimitada por $P \rightarrow Q$ (modo 1)



Fonte: O autor

2) Consideramos apenas a região definida pela conjunção (união) da região correspondente à restrição $\sim P$ com a região correspondente à restrição Q. Este processo está indicado na sequência de diagramas da Figura 5.3.1.2. Isto corresponde a selecionar todos os casos em que a região da restrição P está contida na região da restrição Q. No primeiro diagrama, identificamos a região $\sim P$ (indicado em azul) e, no segundo diagrama, identificamos a região Q (indicada em verde), para obtermos, pela união das duas, a região delimitada indicada em vermelho no terceiro diagrama, que será submetida à supressão.

Figura 5.3.1.2 — Determinação da região delimitada por $P \rightarrow Q$ (modo 2)

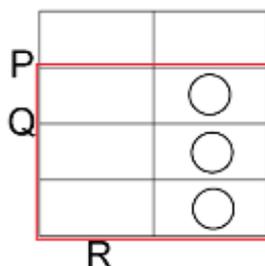


Fonte: O autor

Uma vez delimitada a região correspondente ao antecedente $P \rightarrow Q$ da implicação $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$, devemos agora suprimir nesta região as células nas quais não

ocorra a restrição correspondente ao conseqüente R. Este processo está indicado na Figura 5.3.1.3. Obtemos assim o diagrama trilateral correspondente à primeira premissa.

Figura 5.3.1.3 — Determinação da região suprimida pela restrição R

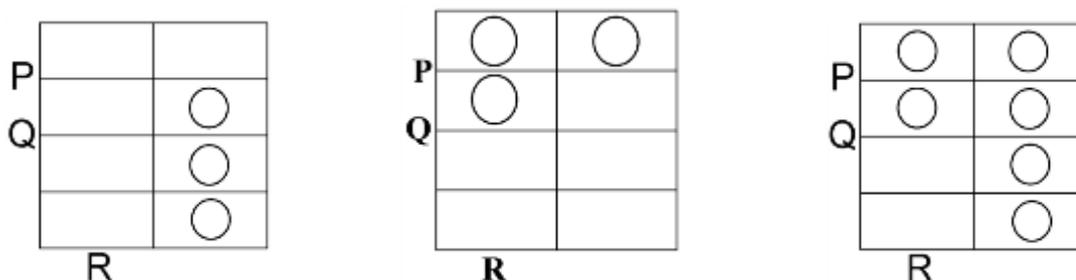


Fonte: O autor

A segunda premissa estabelece a restrição $P \rightarrow (Q \wedge \sim R)$, que é determinada pela supressão das células indicadas no diagrama central da Figura 5.3.1.4, na qual está indicada a sequência de construção do diagrama trilateral do argumento proposto. Conforme podemos ver no diagrama final resultante das restrições das proposições do argumento, a região $\sim R$ foi totalmente suprimida e existe ao menos uma célula não suprimida na região R, logo a conclusão R é válida.

Figura 5.3.1.4 — Diagrama trilateral do argumento proposto

$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \quad \wedge \quad P \rightarrow (Q \wedge \sim R) \quad \rightarrow \quad \text{Argumento}$



Fonte: O autor

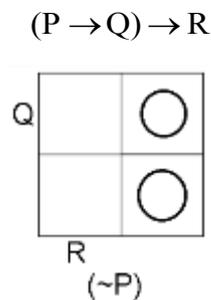
É importante observar que o diagrama final está propriamente contido na região correspondente à região R, razão pela qual a conclusão pode ser inferida. Pelo diagrama final, podemos ver também que o argumento é equivalente à proposição $R \wedge \sim P$. Esta é uma das vantagens da aplicação dos diagramas n-literais aos argumentos lógicos, pois eles nos permitem ver regiões equivalentes a conclusões que são difíceis de inferir imediatamente a partir apenas das proposições.

Há ainda outra observação sobre este exemplo. Caso, neste exemplo, a segunda premissa fosse dada pela proposição simples $\sim P$, de modo que tivéssemos o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} 1) (P \rightarrow Q) \rightarrow R \\ 2) \sim P \\ \hline R \end{array}$$

Então, pelo fato de haver entre as proposições do argumento uma condição relativa apenas a uma das restrições do diagrama trilateral, dada por $\sim P$, seria possível reduzir este diagrama trilateral para um diagrama biliteral: Q e R, pois a restrição $\sim P$ não se altera ao longo da construção do diagrama. Deste modo, pode-se construir o diagrama biliteral final, no qual vamos indicar a restrição pressuposta na parte inferior do diagrama, entre parênteses, conforme indicado na Figura 5.3.1.5.

Figura 5.3.1.5 — Diagrama trilateral reduzido a duas restrições



Fonte: O autor

Com essa redução, a construção do diagrama correspondente à restrição da primeira proposição, que consiste em não considerar na região P as células que não contenham Q, torna-se desnecessária, pois a região P já está suprimida. Assim a região delimitada pela implicação é o próprio diagrama das restrições Q e R, no qual devemos suprimir as células que não contenham R, o que leva ao diagrama da Figura 5.3.1.5. Considerando que este diagrama pressupõe a supressão da região P, verificamos que os diagramas são equivalentes. Este recurso pode simplificar bastante alguns argumentos com mais de cinco restrições que contenham restrições simples ou negações de restrições simples,

cujos diagramas biliterais têm uma construção mais trabalhosa, como veremos ao final deste trabalho.

Exemplo 5.3.2

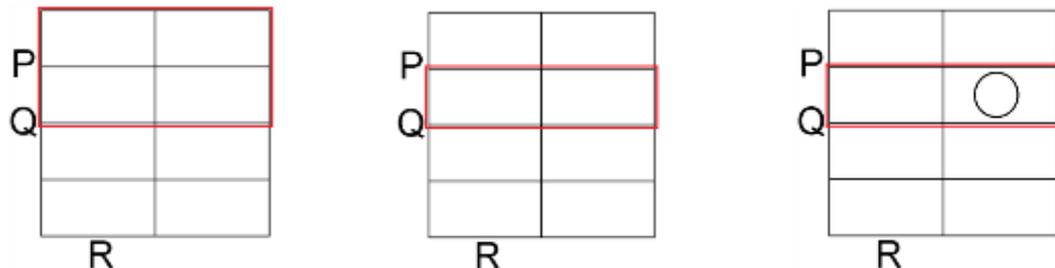
Vejam os outros argumentos contendo uma implicação dupla, porém agora em ordem diferente, dado por:

$$\begin{array}{l} 1) P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ 2) Q \rightarrow (R \rightarrow \sim P) \\ \hline \sim(P \wedge Q) \end{array}$$

Na primeira proposição, o termo antecedente da implicação é P , que é a região na qual deve ser feita a supressão correspondente à restrição do termo consequente $Q \rightarrow R$. Isto significa suprimir na região P todas as células nas quais a restrição $Q \rightarrow R$ não se verifica, ou seja, significa fazer que a região da restrição P fique contida dentro da região da restrição $Q \rightarrow R$. Este processo pode ser realizado de duas maneiras:

1) Delimitamos a região da restrição P e, nesta região, delimitamos a região Q , na qual então suprimimos todas as células nas quais não ocorra R , a fim de fazer a região Q ficar contida em R . Este processo está indicado na sequência de diagramas da Figura 5.3.2.1.

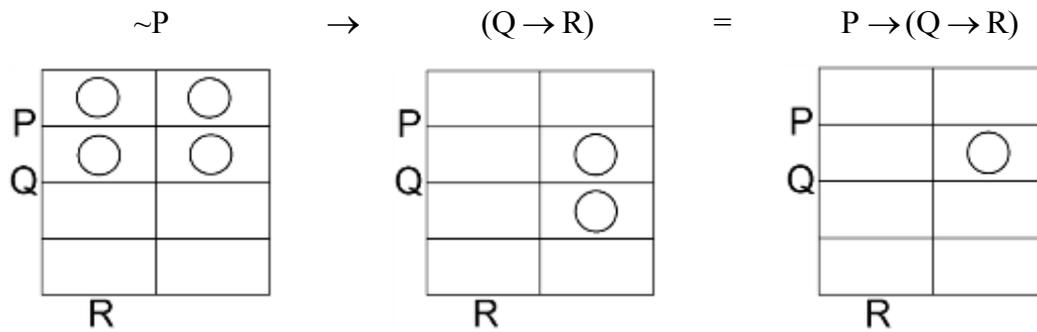
Figura 5.3.2.1 — Determinação da região correspondente à restrição $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$



Fonte: O autor

2) Delimitamos as regiões correspondentes a $\sim P$ e $(Q \rightarrow R)$, e fazemos a interseção das restrições das duas regiões, conforme indicado na sequência de diagramas da Figura 5.3.2.2.

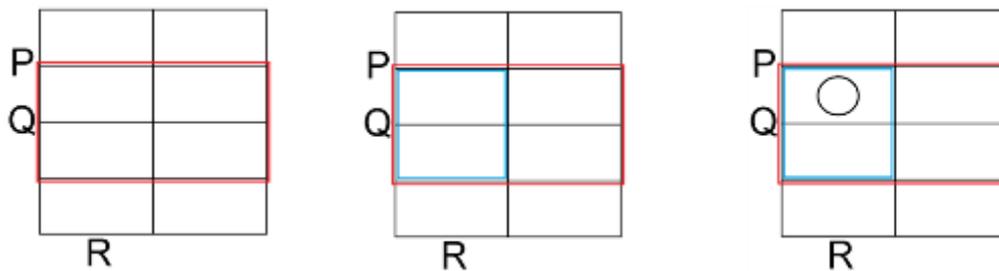
Figura 5.3.2.2 — Determinação da região correspondente à restrição $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$



Fonte: O autor

Aplicando o primeiro método ao segundo argumento, obtemos a sequência de diagramas da Figura 5.3.2.3, que resulta na restrição correspondente à segunda proposição.

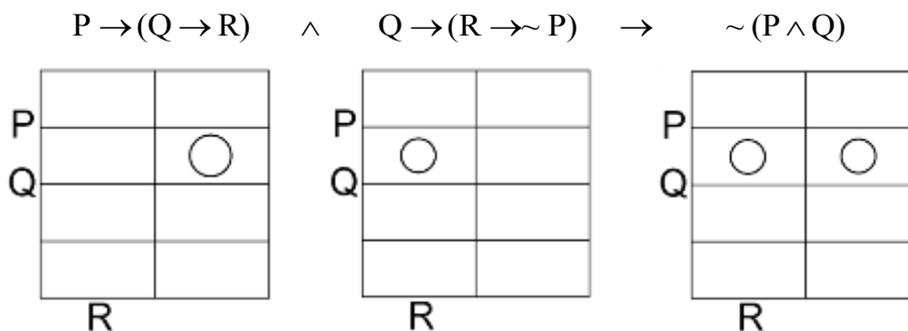
Figura 5.3.2.3 — Determinação da região correspondente à restrição $Q \rightarrow (R \rightarrow \sim P)$



Fonte: O autor

A sequência de diagramas para obter o diagrama final das restrições do argumento está indicado na Figura 5.3.2.3.

Figura 5.3.2.4 — Diagrama trilateral da conclusão do argumento do exemplo 5.3.2



Fonte: O autor

Conforme se pode ver, a região correspondente a $P \wedge Q$ está suprimida, o que comprova a validade da conclusão $\sim(P \wedge Q)$. Neste caso, além de comprovar a validade do argumento, o diagrama mostra também que o argumento é mais forte, pois é também equivalente (diagramas iguais) à conclusão (a região correspondente à conclusão também está contida na região correspondente às restrições das premissas).

Exemplo 5.3.3

Veamos agora o diagrama dado pelo seguinte argumento:

$$1) (P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$$

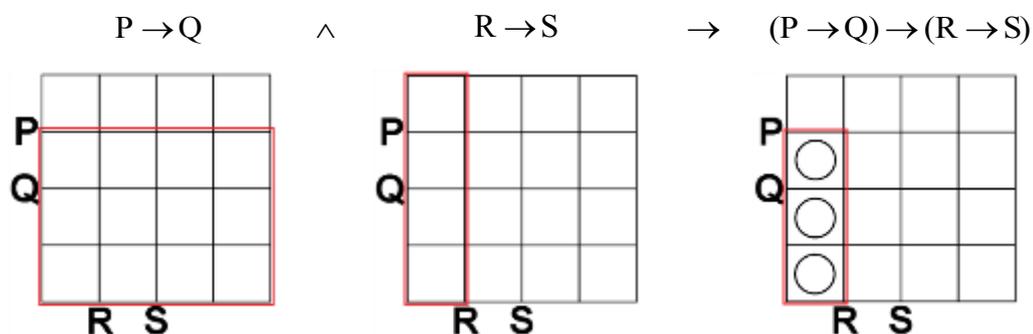
$$2) S \wedge Q$$

$$3) Q \rightarrow R$$

$$\sim(S \wedge \sim R)$$

Como já dissemos, a restrição da implicação se resume numa supressão estabelecida pelo conseqüente aplicada à região delimitada (não suprimida) pelo antecedente. Assim, precisamos primeiro delimitar a região do primeiro termo $P \rightarrow Q$ para, em seguida aplicar a supressão adequada a fim de que esta região fique contida na região do segundo termo $R \rightarrow S$. Para isso, utilizaremos o diagrama tetraliteral.

Figura 5.3.3.1 — Diagrama da proposição $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$



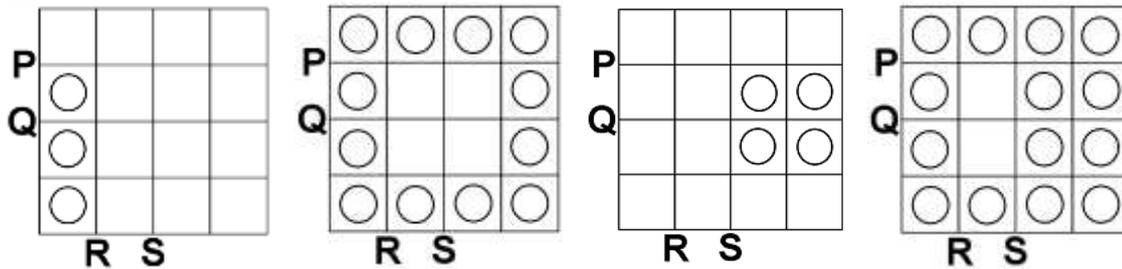
Fonte: O autor

Na Figura 5.3.3.1, temos a sequência de diagramas que estabelece a região correspondente à restrição $P \rightarrow Q$ (primeiro diagrama), depois a correspondente à região $R \rightarrow S$ (segundo diagrama). A restrição do termo consequente é então aplicada apenas à região delimitada pelo termo antecedente, resultando no diagrama correspondente à primeira proposição (terceiro diagrama).

Na Figura 5.3.3.2, apresentamos os diagramas correspondentes a cada proposição e o diagrama correspondente à conclusão do argumento.

Figura 5.3.3.2 — Diagrama tetraliteral do argumento proposto

$(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S) \wedge S \wedge Q \wedge Q \rightarrow R \rightarrow$ Argumento



Fonte: O autor

Como podemos ver, a restrição $\sim(S \wedge \sim R)$ está contida no diagrama final, o que valida a conclusão. É possível também, verificar que outras conclusões também são válidas, como $S \wedge P \rightarrow Q$, $R \wedge \sim P \rightarrow Q$, $Q \wedge R \rightarrow S$, etc.

Exemplo 5.3.4

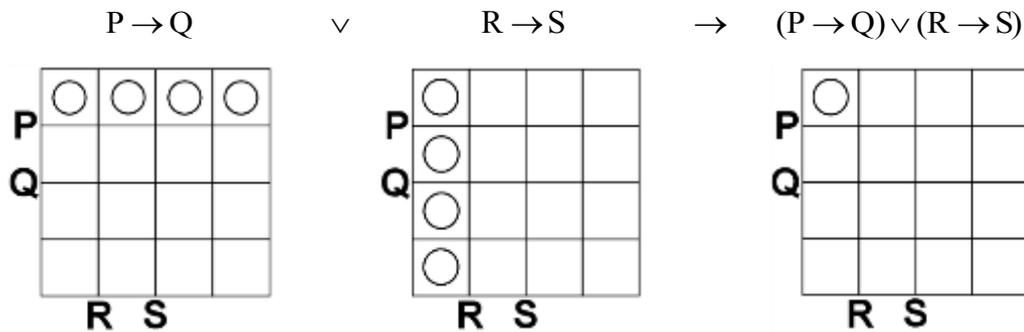
- 1) $(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$
- 2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
- 3) $\sim R$

$R \rightarrow S$

Iremos apresentar a construção por etapas para facilitar o entendimento, porém o método pode ser feito em um único diagrama, como já dissemos anteriormente.

A primeira premissa é uma disjunção, de modo que precisamos delimitar cada uma delas e fazer sua união ou então tomarmos a interseção das suas regiões complementares (suprimidas). O primeiro termo da conjunção é $P \rightarrow Q$. Para a relação de implicação, ou seja, de continência, basta tomarmos a região P e efetuarmos as supressões para que ela fique restrita à região Q . Assim, temos o primeiro diagrama da Figura 5.3.4.1. A seguir, tomamos a restrição do segundo termo $R \rightarrow S$, indicada no segundo diagrama, no qual tomamos a região R e efetuamos as supressões para que ela fique contida na região S . Obtemos então, pela interseção das supressões o terceiro diagrama, que corresponde assim à primeira premissa.

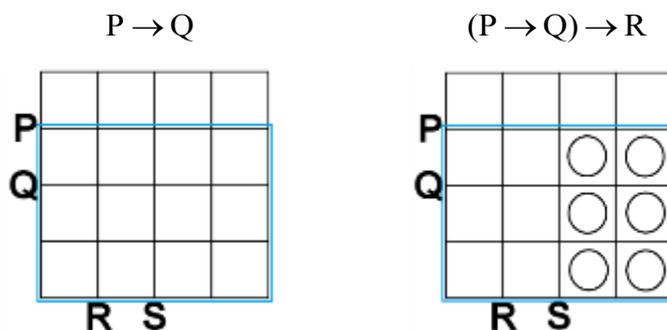
Figura 5.3.4.1 — Construção do diagrama da primeira premissa $(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$



Fonte: O autor

A segunda premissa é basicamente uma implicação, de modo que primeiramente precisamos apenas delimitar (sem suprimir células) a região do termo antecedente para, depois, aplicarmos nesta região a supressão adequada, a fim de que esta região fique contida na região do termo conseqüente. O termo antecedente é $P \rightarrow Q$, cuja região está indicada no primeiro diagrama da Figura 5.3.4.2 por um retângulo azul.

Figura 5.3.4.2 — Construção do diagrama da segunda premissa $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$



Fonte: O autor

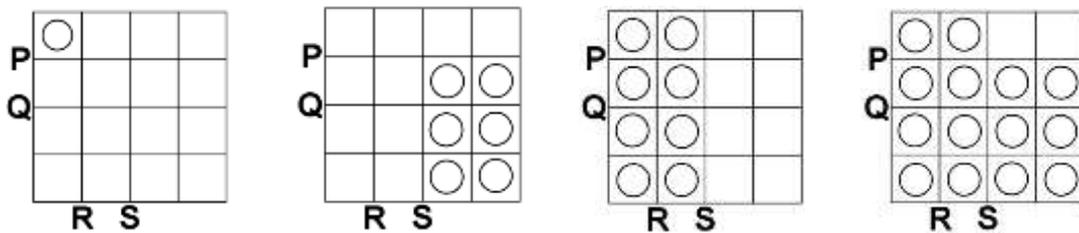
A seguir, aplicamos nesta área as supressões adequadas para que ela fique contida na região R, conforme indicado na segunda figura, que é o diagrama final da segunda premissa.

O diagrama da terceira premissa é imediato, de modo que ficamos com os diagramas correspondentes a cada uma das três premissas conforme indicado respectivamente na sequência dos diagramas da Figura 5.3.4.3. O último diagrama representa o resultado final de todas as restrições das premissas.

Como podemos ver, a região correspondente à conclusão $R \rightarrow S$, já indicada no segundo diagrama da Figura 5.3.4.1 está contida no diagrama resultante do argumento, pois sua região complementar está suprimida e a região em si contém ao menos uma célula não suprimida (no caso duas células não suprimidas). Assim concluímos que o argumento é válido. Podemos ver também, pelo diagrama final, que outras conclusões são válidas também. Por exemplo, P , $\sim Q$, $P \rightarrow \sim R$, $\sim(S \wedge Q)$, $\sim R \rightarrow P$, etc. são conclusões válidas, pois obedecem ao critério de continência no diagrama final.

Figura 5.3.4.3 — Construção do diagrama tetraliteral do argumento proposto

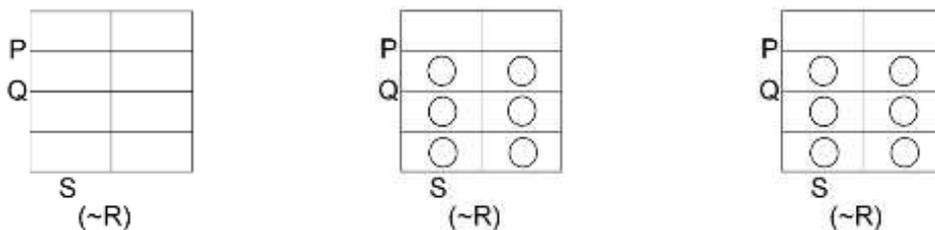
$$(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S) \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow R \wedge \sim R \rightarrow \text{Argumento}$$



Fonte: O autor

Figura 5.3.4.4 — Construção do diagrama trilateral reduzido

$$(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S) \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow S$$



Fonte: O autor

Assim como fizemos no Exemplo 5.3.1, também podemos fazer aqui uma redução do diagrama tetraliteral para apenas três restrições, pois entre as premissas temos uma

restrição completa dada por $\sim R$. Assim, podemos construir o diagrama trilateral resultante da redução do argumento conforme indicado na Figura 5.3.4.4.

Também podemos observar pelo diagrama final a validade de outras conclusões. tais como: $R \rightarrow P$, $R \rightarrow \sim Q$, P , $\sim Q$.

Exemplo 5.3.5

Vamos apresentar um exemplo bastante complexo, envolvendo várias implicações encadeadas e não apresentando nenhuma proposição com restrição simples que permita reduzir o diagrama, dado pelo seguinte argumento:

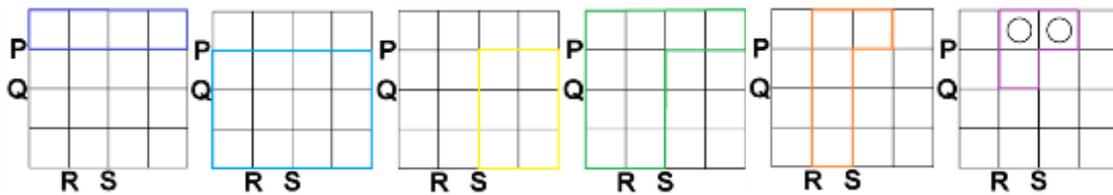
- 1) $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (S \rightarrow (P \rightarrow Q))$
- 2) $((\sim P \rightarrow Q) \rightarrow \sim R) \rightarrow (S \rightarrow (\sim P \rightarrow Q))$
- 3) $((\sim P \rightarrow \sim Q) \rightarrow R) \rightarrow (S \rightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q))$
- 4) $((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow \sim R) \rightarrow (S \rightarrow (P \rightarrow \sim Q))$

$\sim S$

O diagrama da primeira premissa do argumento é obtido conforme indicado pela sequência de diagramas da Figura 5.3.5.1. A premissa é basicamente uma implicação com o antecedente $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ e o conseqüente $S \rightarrow (P \rightarrow Q)$. Assim precisamos primeiramente delimitar a região correspondente ao termo antecedente, que também é uma implicação, cujo termo antecedente é $P \rightarrow Q$ e o termo conseqüente é R . Utilizando o método de, na região correspondente ao antecedente, desconsiderar as células que não pertençam à região correspondente ao conseqüente, obtemos a região indicada por um retângulo azul no segundo diagrama, que resulta do primeiro diagrama, no qual desconsideramos a região indicada com o retângulo violeta, correspondente às células que, na região P , não pertencem à região Q . Na região indicada em azul é necessário desconsiderarmos as células que não pertençam à região R (indicadas pelo retângulo amarelo no terceiro diagrama). Com isso, a região delimitada pelo antecedente $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ reduziu-se ao retângulo verde no quarto diagrama. Nesta região, desconsideramos as células que não pertençam à região S e obtemos a região delimitada em laranja no quinto diagrama. Nesta região, desconsideramos as células que não pertençam à região P e obtemos a região indicada

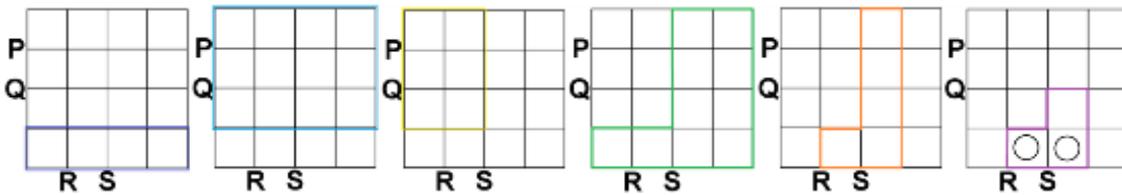
em roxo no sexto diagrama. Finalmente, nesta última região *suprimimos* as células que não pertencem à região Q. Devemos observar que somente foram suprimidas células na última operação, pois trata-se da última relação de continência, enquanto as demais restrições apenas delimitam sucessivamente as regiões. Da mesma forma, obtemos os diagramas da segunda, terceira e quarta premissas, conforme indicado pelas Figuras 5.2.5.2, 5.2.5.3 e 5.2.5.4, nos quais empregamos o mesmo padrão de cores adotado na Figura 5.2.5.1.

Figura 5.3.5.1 — Diagramas para a região $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (S \rightarrow (P \rightarrow Q))$



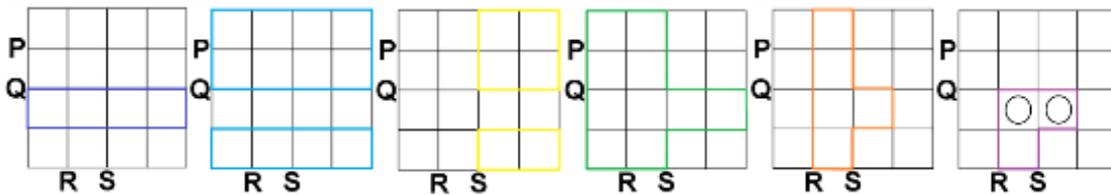
Fonte: O autor

Figura 5.3.5.2 — Diagramas para a região $((\sim P \rightarrow Q) \rightarrow \sim R) \rightarrow (S \rightarrow (\sim P \rightarrow Q))$



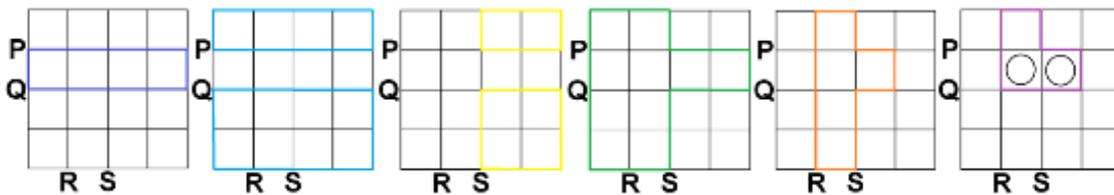
Fonte: O autor

Figura 5.3.5.3 — Diagramas para a região $((\sim P \rightarrow \sim Q) \rightarrow R) \rightarrow (S \rightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q))$



Fonte: O autor

Figura 5.3.5.4 — Diagramas para a região $((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow \sim R) \rightarrow (S \rightarrow (P \rightarrow \sim Q))$

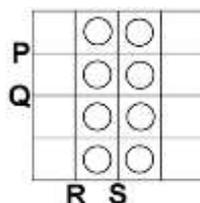


Fonte: O autor

As restrições acumuladas pelas quatro premissas resultam no diagrama final para o argumento apresentado na Figura 5.3.5.5. Como podemos ver, a região correspondente à restrição $\sim S$ está no diagrama final e existe pelo menos uma célula não suprimida (na verdade existem oito células não suprimidas), o que confirma a validade da conclusão.

É interessante observar que a região da restrição $\sim S$ não está apenas contida mas também é igual (equivalente) ao diagrama final do argumento, portanto o diagrama nos permitiu ver que além de uma implicação, o argumento é também equivalente à conclusão. É possível também, por meio dos diagramas correspondentes às premissas, ver que a primeira e quarta premissas equivalem à restrição $P \wedge S$; a terceira e a quarta equivalem à restrição $Q \wedge S$ e a segunda e a terceira equivalem à restrição $\sim P \wedge S$.

Figura 5.3.5.5 — Diagramas final para o argumento do exemplo 5.2.5



Fonte: O autor

Exemplo 5.3.6

Vamos apresentar um exemplo com cinco restrições, conforme o argumento proposto a seguir:

- 1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
- 2) $P \rightarrow (S \rightarrow \sim T)$
- 3) $T \rightarrow (Q \vee S)$

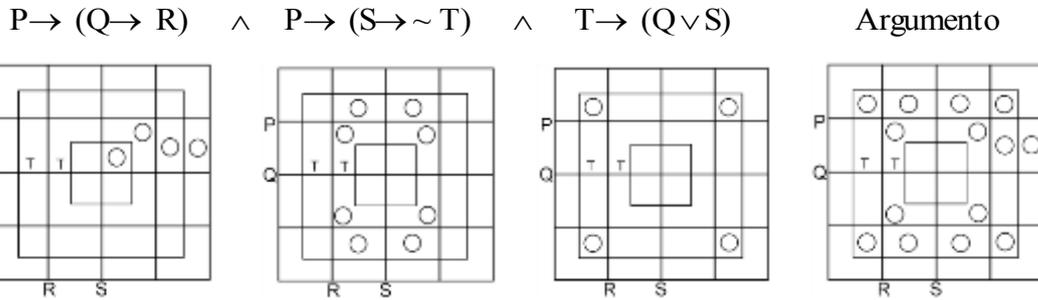
$P \rightarrow (T \rightarrow R)$

A sequência de construção do diagrama pentaliteral final correspondente ao argumento está apresentada na Figura 5.3.6.1.

Como se pode ver, a restrição $P \rightarrow (T \rightarrow R)$, representada na Figura 5.3.6.2, está contida no diagrama final do argumento (quarto diagrama da Figura 5.3.6.1), o que valida

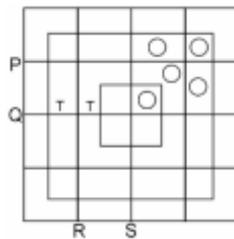
o argumento. Pode-se ver também que há outras conclusões apresentadas neste diagrama, como por exemplo: $P \wedge Q \rightarrow \sim T$, $P \wedge \sim R \rightarrow \sim T$, $S \wedge \sim P \rightarrow \sim T$.

Figura 5.3.6.1 — Diagramas pentaliterais para o argumento do exemplo 5.3.6



Fonte: O autor

Figura 5.3.6.2 — Diagrama pentaliteral da conclusão $P \rightarrow (T \rightarrow R)$ do exemplo 5.3.6



Fonte: O autor

Exemplo 5.3.7

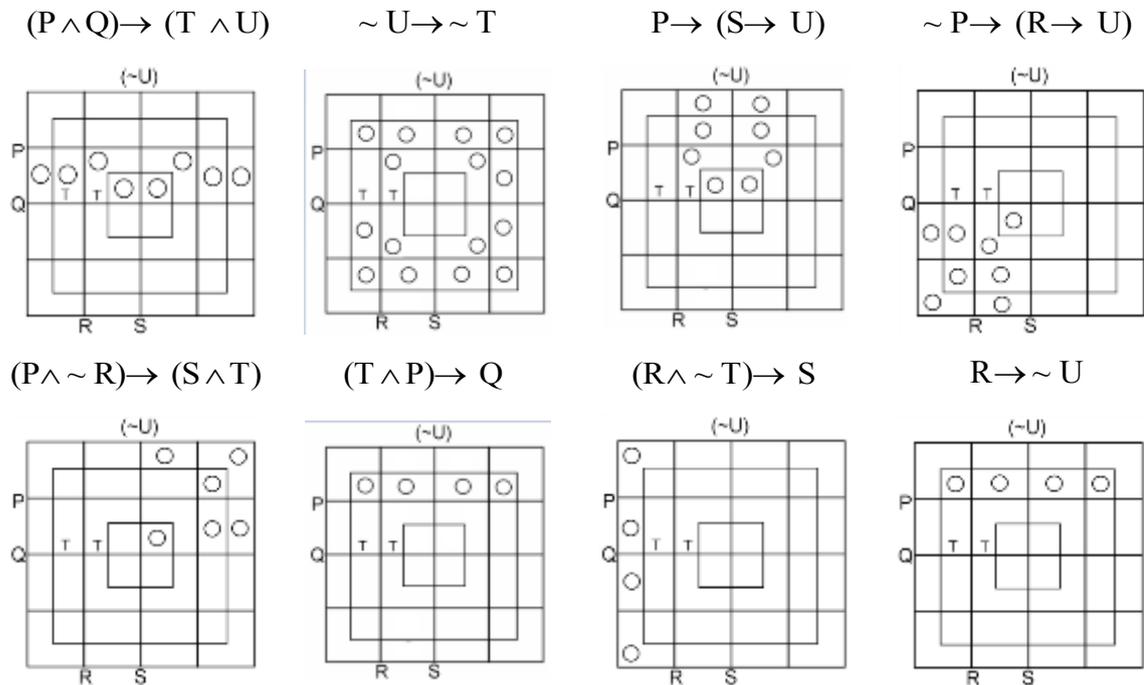
Vamos apresentar agora um exemplo com seis restrições, conforme o argumento a seguir:

- | | |
|--|--|
| <p>1) $(P \wedge Q) \rightarrow (T \wedge U)$</p> <p>2) $\sim U \rightarrow \sim T$</p> <p>3) $P \rightarrow (S \rightarrow U)$</p> <p>4) $\sim P \rightarrow (R \rightarrow U)$</p> <p>5) $(P \wedge \sim R) \rightarrow (S \wedge T)$</p> <p>6) $(T \wedge P) \rightarrow Q$</p> | <p>7) $(R \wedge \sim T) \rightarrow S$</p> <p>8) $R \rightarrow \sim U$</p> <p>9) $\sim U$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$\sim R$</p> |
|--|--|

Este exemplo pode ser resolvido com a utilização do diagrama pentaliteral para cinco restrições, nos quais utilizaremos uma restrição básica ($\sim U$) (quando esta for

eventualmente fornecida no argumento) que estará presente em todos os diagramas como restrição comum ao argumento.

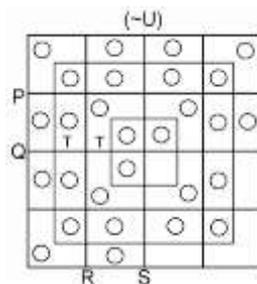
Figura 5.3.7.1 — Sequência de construção dos diagramas pentaliterais correspondentes ao argumento do exemplo 5.3.7



Fonte: O autor

Figura 5.3.7.2 — Diagrama pentaliteral correspondente ao argumento do exemplo 5.3.7

Argumento



Fonte: O autor

É importante notar que todos os diagramas correspondem a regiões das restrições P, Q R, S e T associadas à restrição $\sim U$. Portanto qualquer outra combinação de restrições que esteja ligadas à restrição U não pode estar presente nestes gráficos.

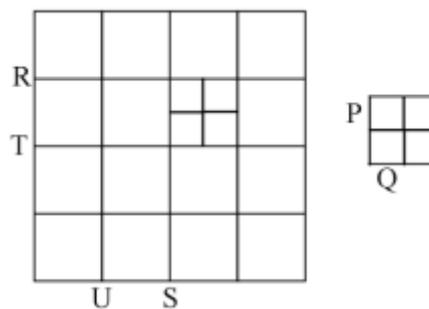
Como podemos ver na Figura 5.3.7.2, o diagrama final do argumento está contido na conclusão $(\sim R)$, que, portanto, é válida.

Exemplo 5.3.8

O exemplo anterior, caso não apresente uma restrição básica como aquela dada pela proposição $\sim U$, que permite utilizar os diagramas pentaliterais, também pode ter seu diagrama construído de outra maneira, que apresentaremos neste exemplo, numa forma de combinação de diagramas com diferentes restrições, como alternativa para o diagrama hexaliteral.

Podemos considerar as seis restrições em duas partes, uma com quatro restrições, utilizando um diagrama tetraliteral, e outra com duas restrições, utilizando um diagrama biliteral, o qual dividirá a princípio cada uma das células do diagrama tetraliteral em quatro células, conforme indicado na Figura 5.3.8.1.

Figura 5.3.8.1 — Diagrama combinado para seis restrições utilizando um diagrama tetraliteral e um diagrama biliteral

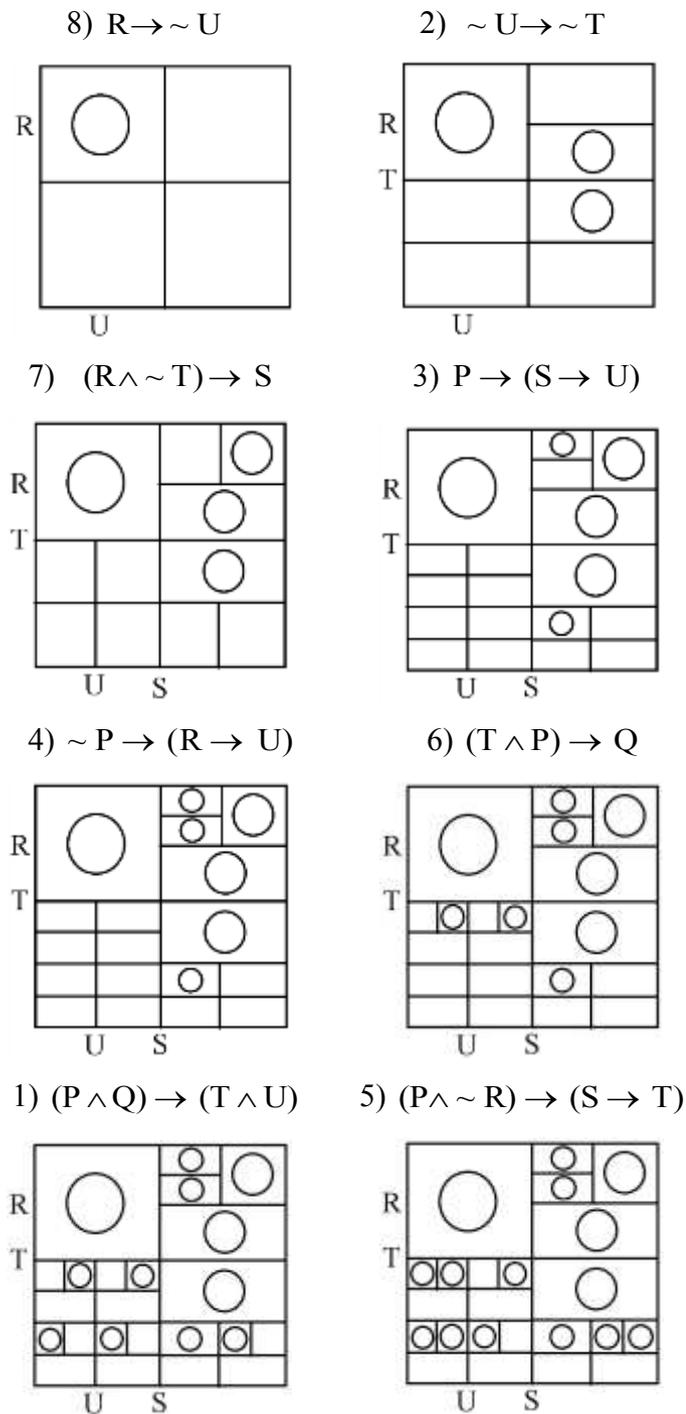


Fonte: O autor

Neste caso, a escolha da ordem de aplicação das restrições correspondentes a cada região dos diagramas pode simplificar o trabalho de elaboração do diagrama correspondente ao argumento. Assim, como podemos ver no argumento do exemplo, se escolhermos as restrições R, U, T e S para as regiões do diagrama tetraliteral e P e Q para as regiões do diagrama biliteral, teremos a possibilidade de construir o diagrama do argumento de uma forma que resulte em um número menor de divisões do diagrama tetraliteral.

Neste sentido foram feitas as escolhas conforme indicado pela sequência de diagramas da Figura 5.3.8.2. Deve-se notar que, por meio da escolha da oitava proposição do argumento como primeira restrição, foi possível suprimir um total de 16 células (quatro do diagrama tetraliteral, cada uma destas correspondendo a quatro do diagrama biliteral).

Figura 5.3.8.2 — Sequência de construção do diagrama combinado tetraliteral e biliteral correspondente à conclusão do argumento de seis restrições do exemplo 5.3.7



Fonte: O autor

Conforme podemos ver pelo diagrama final, a restrição R está toda suprimida, o que confirma a validade da conclusão do argumento.

6. APLICAÇÃO DO DIAGRAMA N-LITERAL AO CÁLCULO DE PREDICADOS MONÁDICOS SIMPLEMENTE QUANTIFICADOS

Vamos aplicar o método dos diagramas biliterais a condições especiais e a problemas comuns do cálculo de predicados monádicos singulares de duas, três e quatro restrições, que são um caso mais geral de silogismo, procurando dar exemplos que mostrem as características mais importantes da aplicação do método.

6.1. Exemplos com duas restrições.

Exemplo 6.1.1

$$1) \forall x(Ex \rightarrow Ax)$$

$$2) Ej$$

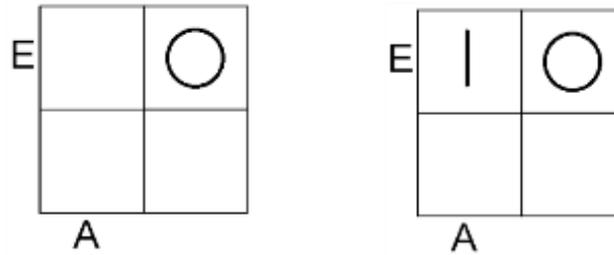
$$Aj$$

A sequência de construção do diagrama biliteral para este argumento, seguindo a ordem das premissas, está indicada na Figura 6.1.1.1.

A primeira premissa foi construída pela condição de que a região correspondente à restrição E tem de estar contida na região correspondente à restrição A. Isto se obtém delimitando-se a região E e suprimindo nesta região delimitada as células de E que não estejam na região A. Com essa representação, vemos pelo diagrama que não existem elementos do universo na região $E \wedge \sim A$ (suprimida pelo círculo), o que corresponde à quantificação aplicada.

A segunda premissa equivale à condição de que pelo menos um elemento "j" do universo está contido na região da restrição E. Associando este elemento "j" com o traço vertical, construímos uma ligação existencial (traço vertical) na região da restrição E. Como só há uma célula da região E no diagrama (a outra célula foi suprimida pela primeira premissa), fazemos apenas um traço nesta célula pois o outro traço é eliminado pelo círculo de supressão, obtendo assim o diagrama final do argumento.

Figura 6.1.1.1 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.1

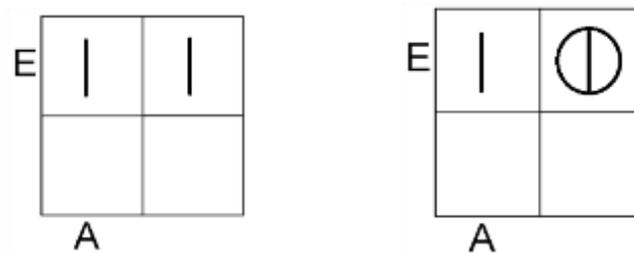


Fonte: O autor

Podemos verificar que a região A contém a ligação existencial correspondente a "j", portanto a conclusão A_j é válida.

É importante notar que, se construíssemos o diagrama na ordem inversa das premissas a construção ficaria conforme indicado na Figura 6.1.1.2 .

Figura 6.1.1.2 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.1 (ordem inversa)



Fonte: O autor

Para efeito de resultado, o diagrama obtido é equivalente, porém, neste caso, foi necessário construirmos uma ligação existencial nas duas células correspondentes à região E.

Exemplo 6.1.2

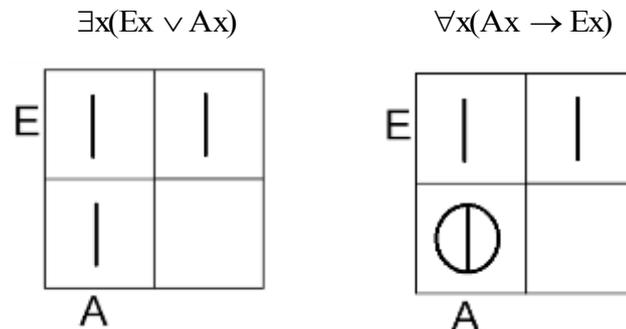
- 1) $\exists x(Ex \vee Ax)$
- 2) $\forall x(Ax \rightarrow Ex)$

$\exists xEx$

A sequência de construção do diagrama biliteral para este argumento, seguindo a ordem das premissas, está indicada na Figura 6.1.1.2. No primeiro diagrama, a ligação

existencial teve de cobrir as três células que compõem a região $E \vee A$. No diagrama final, podemos ver que a região da restrição E contém uma ligação existencial completa, o que valida a conclusão do argumento.

Figura 6.1.2.1 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.2



Fonte: O autor

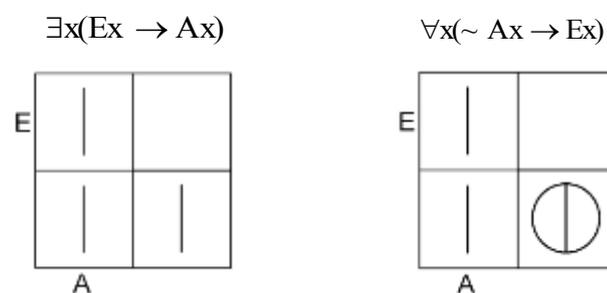
Exemplo 6.1.3

- 1) $\exists x(Ex \rightarrow Ax)$
- 2) $\forall x(\sim Ax \rightarrow Ex)$

$\exists x(Ax)$

A sequência de construção do diagrama biliteral para este argumento, seguindo a ordem das premissas, está indicada na Figura 6.1.1.3

Figura 6.1.3.1 — Diagrama biliteral do exemplo 6.1.3



Fonte: O autor

Conforme podemos ver no diagrama final, a restrição A contém uma ligação existencial completa, portanto a conclusão do argumento $\exists x(Ax)$ é válida.

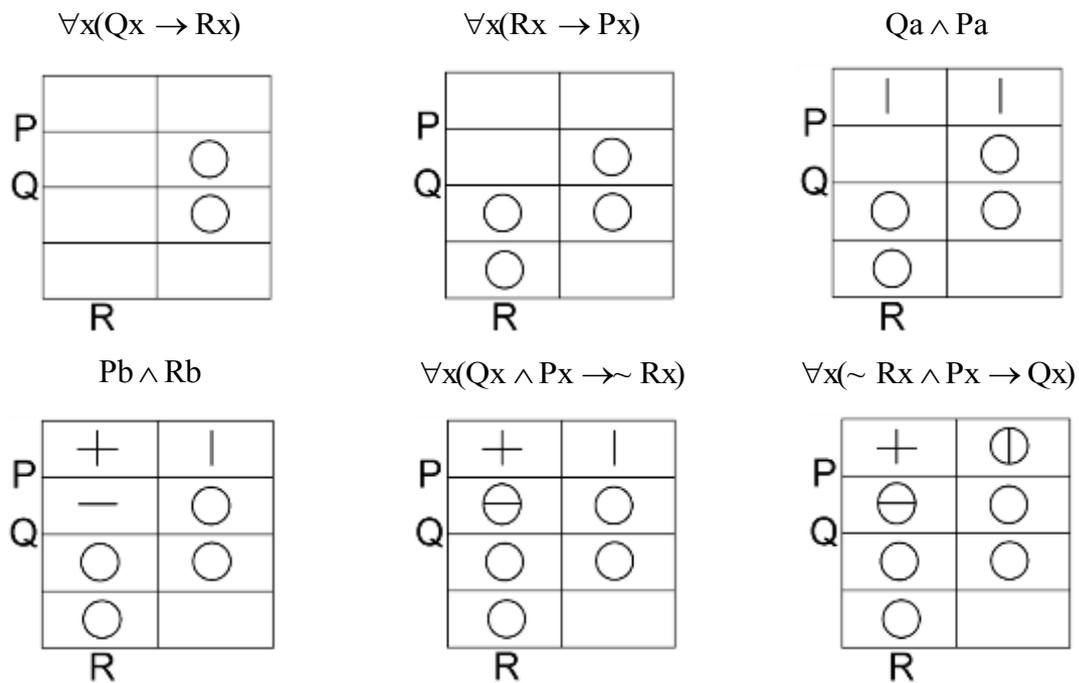
6.2 Exemplos com três restrições.

Exemplo 6.2.1

- 1) $\forall x(Qx \rightarrow Rx)$
- 2) $\forall x(Rx \rightarrow Px)$
- 3) $Qa \wedge Pa$
- 4) $Pb \wedge Rb$
- 5) $\forall x(Qx \wedge Px \rightarrow \sim Rx)$
- 6) $\forall x(\sim Rx \wedge Px \rightarrow Qx)$

$$(Ra \wedge Pa) \wedge (Rb \wedge Pb)$$

Figura 6.2.1.1 — Sequência de diagramas trilaterais do exemplo 6.2.1



Fonte: O autor

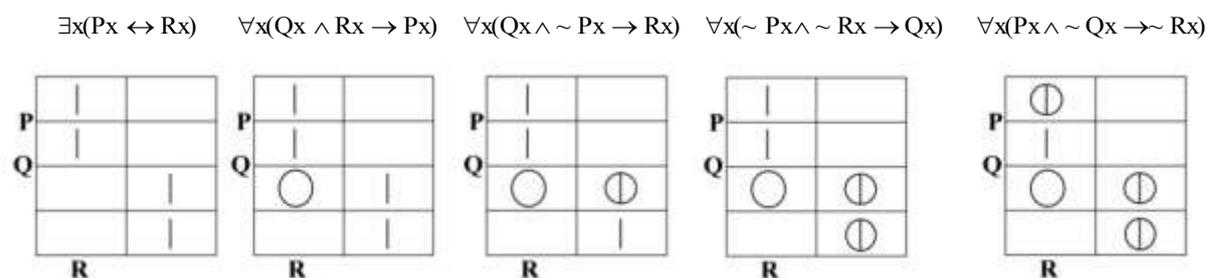
Conforme podemos ver no diagrama final, a restrição $P \wedge Q$ contém as duas ligações existenciais completas, portanto a conclusão do argumento $(Ra \wedge Pa) \wedge (Rb \wedge Pb)$ é válida.

Exemplo 6.2.2

- 1) $\exists x(Px \leftrightarrow Rx)$
- 2) $\forall x(Qx \wedge Rx \rightarrow Px)$
- 3) $\forall x(Qx \wedge \sim Px \rightarrow Rx)$
- 4) $\forall x(\sim Px \wedge \sim Rx \rightarrow Qx)$
- 5) $\forall x(Px \wedge \sim Qx \rightarrow \sim Rx)$

$$\exists x(Px \wedge Qx \wedge Rx)$$

Figura 6.2.2.1 — Sequência de diagramas trilaterais do exemplo 6.2.2



Fonte: O autor

Conforme podemos ver no diagrama final, a restrição $P \wedge Q \wedge R$ contém uma ligação existencial completa, portanto a conclusão do argumento $\exists x(Px \wedge Qx \wedge Rx)$ é válida.

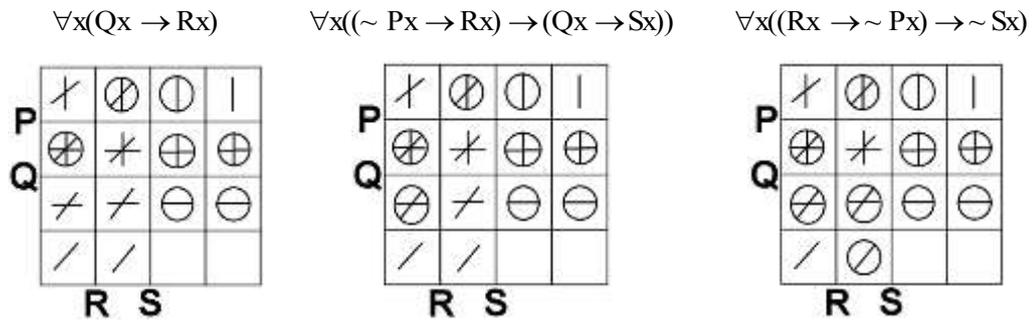
6.3 Exemplos com quatro restrições.

Exemplo 6.3.1

- 1) $\forall x(Px \rightarrow Qx \vee Rx)$
- 2) $\forall x(Qx \rightarrow Sx)$
- 3) $\exists x(Px \wedge \sim Sx)$

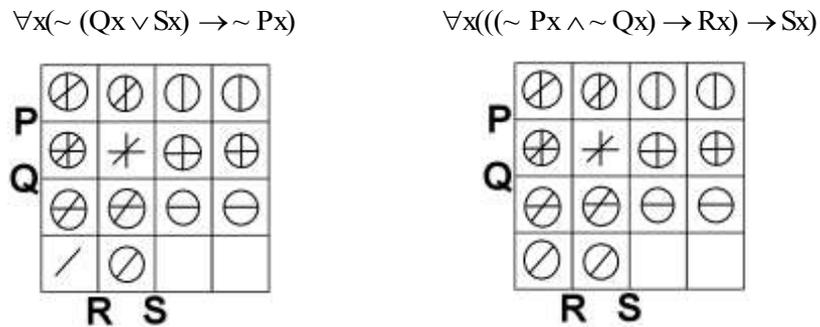
$$\exists x(Px \wedge Rx)$$

Figura 6.3.2.2 — Sequência de diagramas tetraliterais do exemplo 6.3.2



Fonte: O autor

Figura 6.3.2.3 — Sequência de diagramas tetraliterais do exemplo 6.3.2



Fonte: O autor

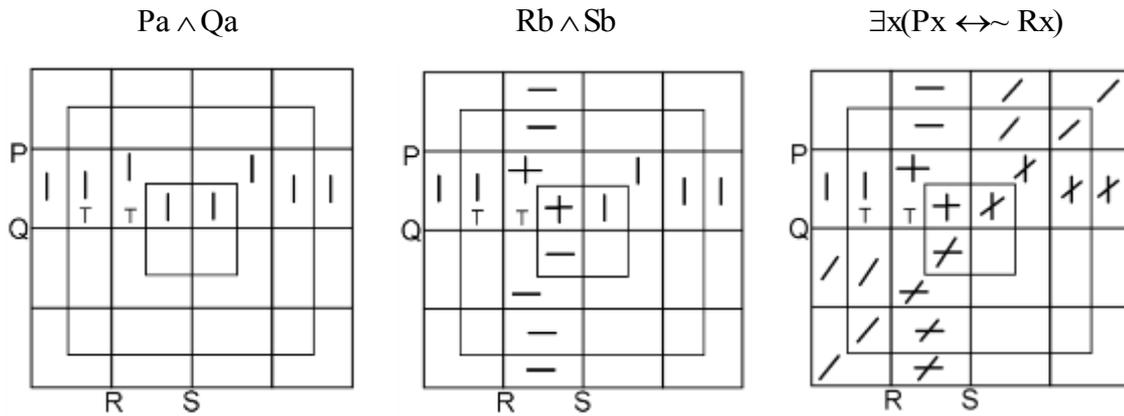
Conforme podemos ver no diagrama final, a região correspondente à restrição $P \wedge Q \wedge R$ contem as três ligações existenciais completas, portanto a conclusão do argumento $Pa \wedge Qa \wedge Ra \wedge Pb \wedge Qb \wedge Rb \wedge Pc \wedge Qc \wedge Rc$ é válida.

6.4 Exemplos com cinco restrições.

Exemplo 6.4.1

- | | |
|---|--|
| <p>1) $Pa \wedge Qa$</p> <p>2) $Rb \wedge Sb$</p> <p>3) $\exists x(Px \leftrightarrow \sim Rx)$</p> <p>4) $\forall x(Sx \wedge Tx \rightarrow Rx)$</p> <p>5) $\forall x((Rx \wedge Sx) \rightarrow \sim Tx)$</p> | <p>6) $\forall x((Px \wedge \sim Rx) \rightarrow Sx)$</p> <p>7) $\forall x(Rx \rightarrow Sx)$</p> <p>8) $\forall x((Px \wedge Sx) \rightarrow Tx)$</p> <hr style="width: 100%;"/> <p>$\sim Pb \wedge \sim Tc$</p> |
|---|--|

Figura 6.4.1.1 — Sequência de diagramas pentaliterais do exemplo 6.4.1



Fonte: O autor

Figura 6.4.1.2 — Sequência de diagramas pentaliterais do exemplo 6.4.1

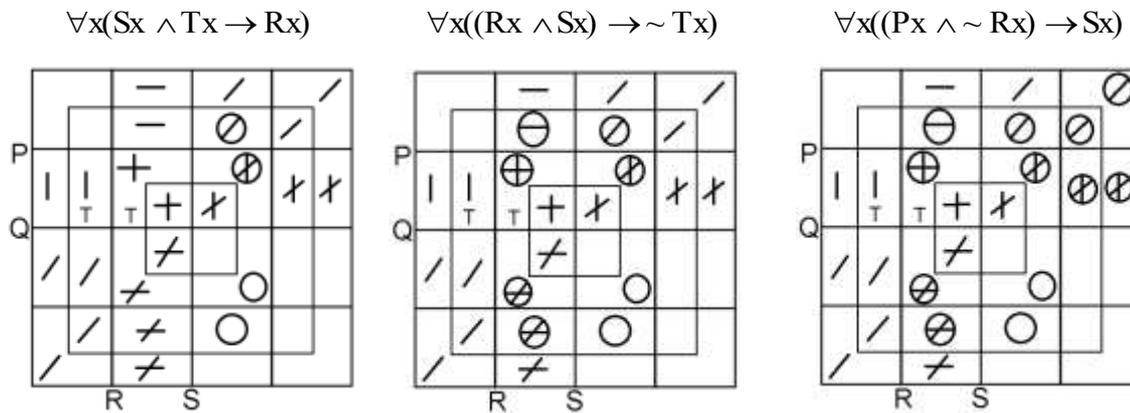
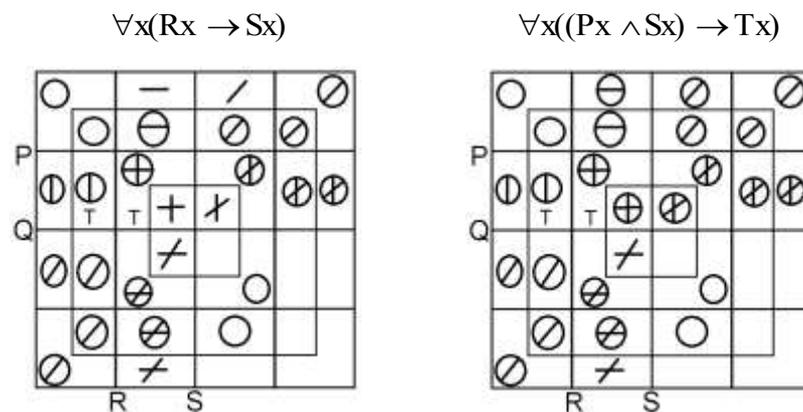


Figura 6.4.1.3 — Sequência de diagramas pentaliterais do exemplo 6.4.1



Fonte: O autor

Conforme podemos ver no diagrama final, a região correspondente à restrição $\sim P \wedge \sim T$ contem as duas ligações existenciais completas, portanto a conclusão do argumento $\sim Pa \wedge \sim Ta$ é válida.

7. PROGRAMA EM GEOGEBRA PARA APRESENTAÇÃO DO MÉTODO EM SALA DE AULA.

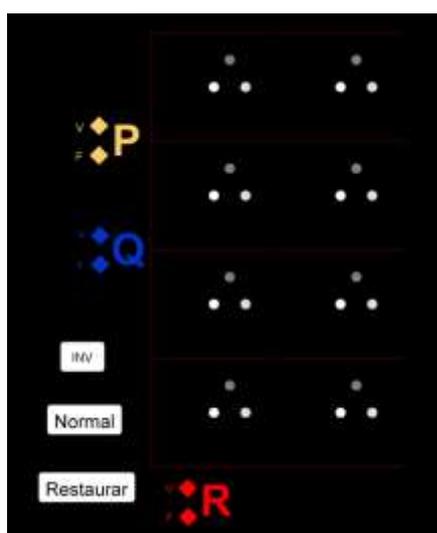
A fim de facilitar a aprendizagem e o ensino do método proposto neste trabalho, apresentamos aqui, como uma proposta inicial, um programa desenvolvido no software Geogebra para a construção dos diagramas n-literais em sala de aula. Foram feitos quatro programas, para diagramas biliterais, trilaterais, tetraliterais e pentaliterais respectivamente. Os diagramas contidos nos programas são uma reprodução colorida dos diagramas apresentados ao longo deste trabalho.

Vamos descrever aqui o programa para o diagrama trilateral, que contém o número de restrições mais utilizado geralmente, como no caso dos silogismos. Além disso, uma vez compreendido o funcionamento do programa neste diagrama, sua aplicação nos demais diagramas é simples, pois funciona da mesma forma.

O programa, assim como os scripts do Geogebra nele utilizados, estão disponíveis no link: <https://ggbm.at/KexQYx68>

Apresentamos na Figura 7.1 a tela inicial do programa para o diagrama trilateral.

Figura 7.1 — Programa de apresentação do diagrama trilateral



Fonte: O autor

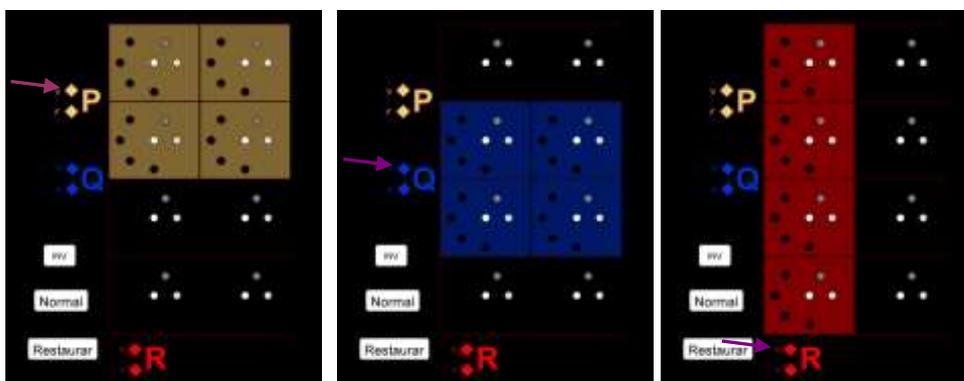
É importante ressaltar que a utilização do programa supõe, naturalmente, que o apresentador conheça o método proposto, caso contrário o programa não fará sentido para

quem desejar utilizá-lo. Esta versão inicial do programa apresenta a possibilidade de utilizarmos até quatro ligações existenciais diferentes em cada diagrama, o que é suficiente para a maioria dos problemas de argumentação lógica simplesmente quantificada.

Apenas como forma de padronização para facilitar a produção do programa, utilizamos as letras P, Q, R, S, T nos quatro diagramas, sendo as letras P, Q e R utilizadas para o diagrama trilateral. Uma vez que o programa é editável, o apresentador poderá mudar estas letras para facilitar o entendimento de argumentos por meio de associação das letras a determinadas restrições.

Como podemos ver na Figura 7.1, cada restrição tem uma cor correspondente, amarela para a restrição P, azul para a restrição Q e vermelho para a restrição R, que são mantidas também para os outros diagramas. Cada restrição tem ao seu lado dois pequenos losangos da mesma cor da restrição, um rotulado com "V" (verdadeiro) e outro rotulado com "F" (falso). Quando se clica (todos os cliques do programa são supostos serem feitos com o botão esquerdo do mouse) num losango rotulado com V, a região em que a restrição correspondente é verdadeira recebe a cor correspondente à restrição e a região em que a restrição correspondente é falsa fica sem a cor correspondente. Quando se clica num losango rotulado com F, a região em que a restrição correspondente é verdadeira fica sem a cor correspondente e a região em que a restrição correspondente é falsa recebe a cor correspondente. Tratam-se naturalmente de condições mutuamente exclusivas. Quando se clica na letra de uma restrição, a cor desta restrição desaparece. Estes efeitos estão indicados na Figura 7.2.

Figura 7.2 — Efeito do clique sobre os losangos rotulados V

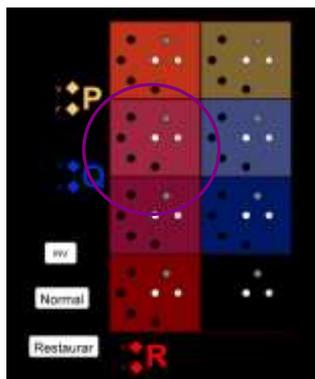


Fonte: O autor

As cores de cada uma das restrições tem opacidade de 50%, o que permite a visualização das regiões de interseção entre elas, conforme mostrado na Figura 7.3.

Dentro de cada célula do diagrama há três pontos formando um triângulo e quatro pontos dispostos em arco em relação ao centro da célula, do lado esquerdo. Cada um destes pontos, ao ser clicado, modifica a condição de visibilidade de um objeto correspondente. Vejamos primeiramente a função dos três pontos formando um triângulo.

Figura 7.3 — Visualização da região de interseção entre as regiões $P \wedge Q \wedge R$



Fonte: O autor

O ponto cinza escuro (superior), ao ser clicado, torna uma célula clara em escura, condição correspondente à supressão da célula, com opacidade de 100% e camada de maior prioridade, tendo assim precedência sobre todas as outras condições.

O ponto claro (base esquerda do triângulo), ao ser clicado, retorna a célula ao seu estado original, sendo esta condição correspondente à célula livre.

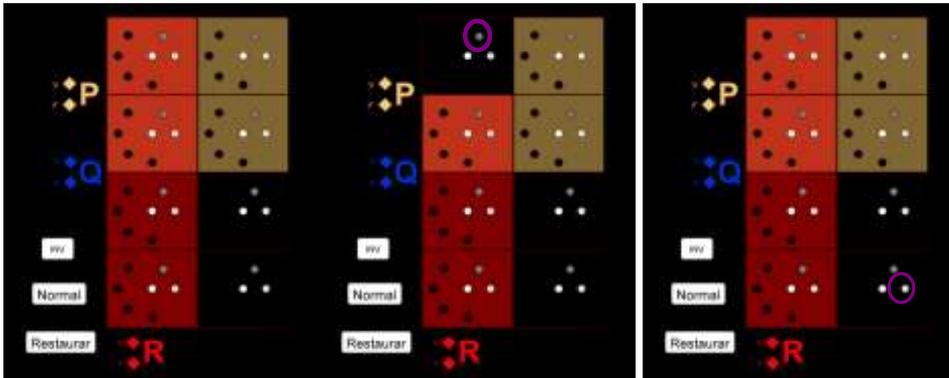
O ponto cinza (base direita do triângulo), ao ser clicado, sobrepõe na célula livre a cor cinza, com opacidade de 50% e prioridade igual às das cores das restrições, sendo esta condição correspondente apenas a uma marcação da célula (delimitação).

Assim, ao clicarmos o ponto superior, a célula livre (clara ou cinza) se tornará suprimida (escura), independente da condição na qual esteja e será considerada suprimida; ao clicarmos o botão da base direita do triângulo, a célula livre receberá a sobreposição da cor cinza, permitindo que se veja as cores já sobrepostas naquela célula e que se faça a seleção de áreas determinadas passo a passo; ao clicarmos o ponto da base esquerda do triângulo, estaremos trazendo a célula para sua condição normal ou livre, isto significa que a célula não estará suprimida ou marcada.

A Figura 7.4 apresenta as duas funções que alteram a condição normal da célula (duas figuras à direita) aplicadas à condição inicial (primeira figura à esquerda) mostrada na Figura 7.4.

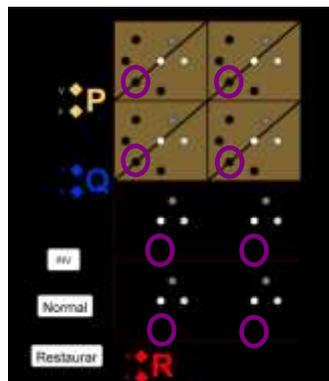
Cada um dos quatro pontos em arco de cada célula, ao ser clicado, faz aparecer um traço na célula em uma determinada direção, que corresponde a uma determinada ligação existencial. Cada um destes botões funciona por inversão de estado no sentido do traço estar visível ou não. Estes traços estarão, quando estiverem acionados, somente estarão visíveis nas células não suprimidas (somente nas células livres ou marcadas). O funcionamento destes botões dispostos em arco está mostrado na Figura 7.5

Figura 7.4 — Efeito das funções de marcação das células



Fonte: O autor

Figura 7.5 — Efeito dos botões dispostos em arco (traço de ligação existencial)



Fonte: O autor

A função do botão “Restaurar” é fazer o diagrama voltar à condição inicial (nenhuma restrição, marcação ou supressão).

A função do botão “INV” é fazer uma troca de estados entre as células livres e as células marcadas de cinza. Assim, quando clicamos o botão “INV”, as células livres ficam cinza e as células cinzas ficam livres. Esta função permite que sejam feitas marcações sucessivas de regiões com restrições encadeadas, principalmente naquelas onde encontram-se implicações de implicações.

Por último, a função do botão “Normal” transforma as células marcadas (cinza) em células livres. Assim, quando clicamos o botão “Normal”, as células cinzas ficam livres. Assim como o botão "INV", o botão "Normal" também auxilia na demarcação de regiões de restrições sucessivas.

Todas as características de funcionamento do diagrama vistas aqui são iguais nos demais diagramas.

Exemplo 7.1:

Vejamos agora um exemplo de utilização do diagrama tetraliteral para o seguinte argumento:

$$1) (\sim P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow Q)$$

$$2) (R \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow \sim R)$$

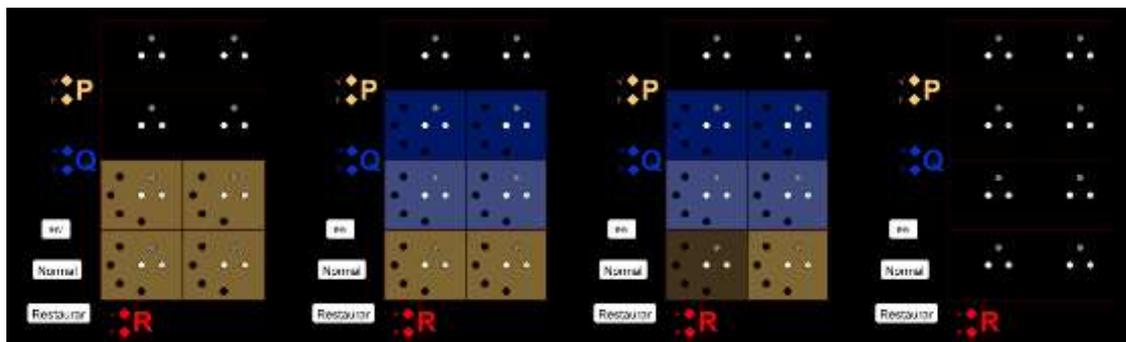
$$3) \sim R \rightarrow \sim P$$

$$\sim P$$

Neste caso, os passos são evidentes e seguem a mesma técnica dos diagramas feitos à mão, porém tomando vantagem dos recursos do programa, conforme mostrado nas Figuras 7.6 e 7.7.

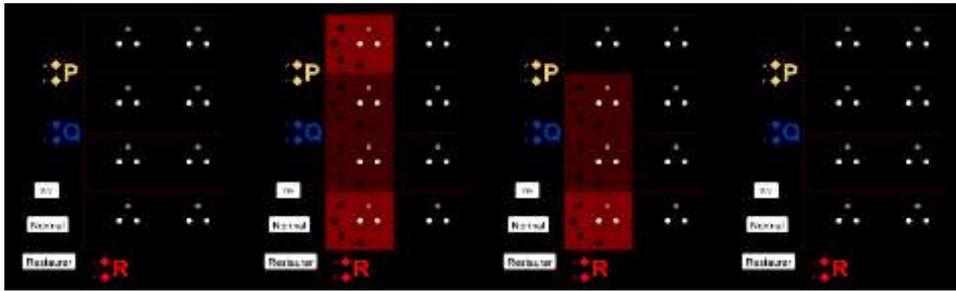
Em cada uma das figuras, as operações das funções do programa para a obtenção das regiões correspondentes às restrições são auto elucidativas.

Figura 7.6 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a delimitação $\sim P \rightarrow Q$



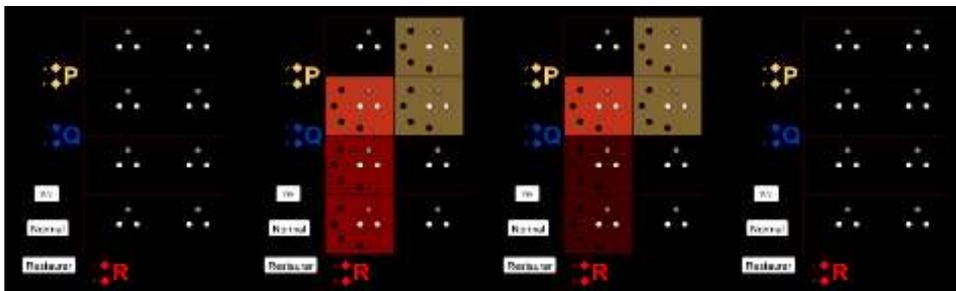
Fonte: O autor

Figura 7.7 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a supressão $R \rightarrow Q$



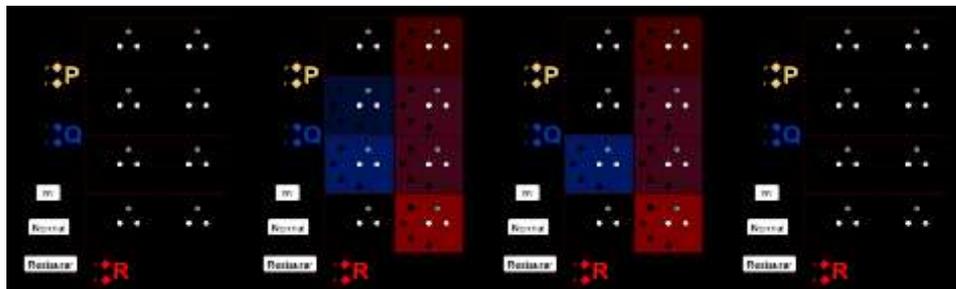
Fonte: O autor

Figura 7.8 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a delimitação $\sim Q \rightarrow \sim R$



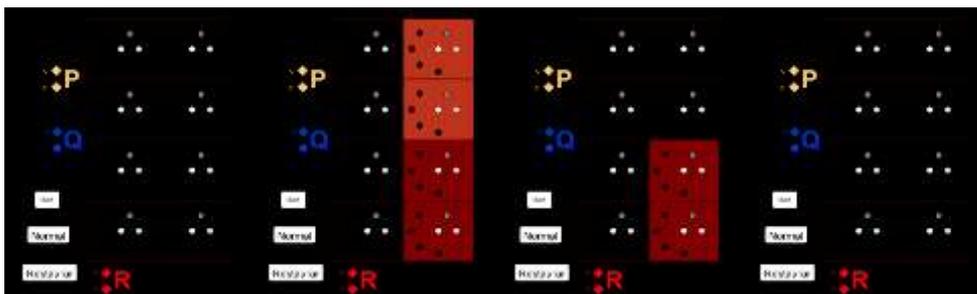
Fonte: O autor

Figura 7.9 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a supressão $R \rightarrow Q$



Fonte: O autor

Figura 7.10 — Sequência de diagramas do exemplo 7.1 para a supressão $\sim R \rightarrow \sim P$, a conclusão P e o diagrama final do argumento (conclusão $\sim P$)



Fonte: O autor

Foram também criados no Geogebra os programas para os diagramas biliteral, tetraliteral e pentagonal, que estão disponíveis nos seguintes endereços:

Diagrama Biliteral: <https://ggbm.at/EZf7KDxD>

Diagrama Tetraliteral: <https://ggbm.at/gdEsDDVa>

Diagrama Pentagonal: <https://ggbm.at/WaBfPvrn>

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos ao longo deste trabalho apresentar uma proposta para fazer do estudo da lógica matemática um tópico para ser ministrado no ensino médio. Com este objetivo, utilizamos a teoria básica dos conjuntos e, aproveitando a sua equivalência algébrica com as operações da lógica matemática, desenvolvemos um processo de análise do raciocínio lógico com base nos diagramas das relações entre conjuntos. O processo não só é inspirado no trabalho desenvolvido por Lewis Carrol em seu livro "The Game of Logic" mas também busca o mesmo objetivo daquele autor, que foi simplificar as leis básicas da lógica por meio da visualização de diagramas de conjuntos e transformá-las tanto quanto possível num jogo inteligente e desafiante, a fim de estimular as pessoas a desenvolverem o raciocínio lógico. Alguns pontos do presente trabalho foram desenvolvidos de forma diferente daquela apresentada por Carrol, a fim de permitir a aplicação da análise gráfica dos raciocínios lógicos de uma forma que, conforme nossa opinião, aparenta ser mais fácil de ser operada. Além disso, também adaptamos o método para ser utilizado nas deduções comuns ao cálculo sentencial.

Durante toda a exposição de nossa proposta, utilizamos demonstrações de caráter gráfico, que podem ser intuitivamente entendidas e aceitas por uma simples visualização. Com isto, procuramos estabelecer um caminho mais atrativo para a introdução da matéria no ensino médio, pois tudo se verifica pela evidência das figuras e pelos conceitos intuitivos da teoria dos conjuntos. Embora tenhamos seguido esta linha de entendimento e de demonstração intuitiva, verificada nos gráficos, isto em nada diminui a sua completa validade como prova rigorosa das diversas proposições aqui apresentadas, pois em todos os gráficos estão sempre subentendidas as diversas relações possíveis entre conjuntos, com as quais estão associadas por equivalência as relações entre as proposições lógicas. Sendo assim, consideramos que a introdução dos fundamentos da lógica matemática no ensino fundamental, seguindo o método aqui proposto, apresentaria uma alternativa para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno e poderia ser mais bem recebida por parte dos alunos, devido não só a esta característica de visualização gráfica intuitiva, mas também ao seu aspecto de "jogo", como um desafio na construção dos gráficos equivalentes aos raciocínios propostos.

A sequência de nossa apresentação procurou estabelecer uma proposta de como deveria ser progressivamente ministrada esta matéria para os alunos. Assim, como já foi mencionado na introdução, o prévio conhecimento da teoria dos conjuntos, embora seja desejado, não é considerado essencial para o ensino desta matéria, pois o assunto pode ser apresentado gradualmente em seus dois aspectos e respectivas equivalências, de modo que a teoria lógica vai sempre surgindo por analogia dos respectivos conceitos da teoria dos conjuntos e vice-versa.

Muitos dos conceitos e ferramentas apresentados aqui podem certamente ser adaptados e aperfeiçoados, mas isto demandaria uma abrangência que estaria além do escopo proposto neste trabalho, que apenas indicou os fundamentos do processo de visualização da lógica matemática por diagramas de conjuntos.

Como última observação, o presente trabalho limitou-se às operações básicas da lógica matemática, não só devido ao público ao qual ela está sendo direcionada (ensino médio) mas também devido às limitações aqui encontradas para a construção de gráficos equivalentes na teoria dos conjuntos. Sendo assim, os aspectos mais avançados da lógica matemática, no que diz respeito à lógica dos predicados, não são tratados aqui, mas poderão ter sua compreensão facilitadas pela utilização do método proposto aqui.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOOLE, G. **An Investigation of the Laws of Thought**. MACMILLAN AND CO. London, 1854. 424 p.

CARROL, L. **The Game of Logic**. MACMILLAN AND CO., London, 1886. 96 p.

GEOGEBRA. Version 5.0.350.0-3D. Linz: International GeoGebra Institute, 2017. Windows.

HARDEGREE, G. **Symbolic Logic — A first Course (older edition)**. Disponível em: <<https://courses.umass.edu/phil110-gmh/MAIN/IHome-5.htm>>. Acesso em setembro de 2015.

HEGENBERG, L. **Lógica: Simbolização e Dedução**. EPU, Ed. da Universidade de São Paulo, 1975. 219 p.

HEGENBERG, L. **Lógica: O Cálculo de Predicados**. Herder, 1973. 177 p.

VENN, J. **Symbolic Logic**. MACMILLAN AND CO. London, 1881. 443 p.