

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CAIXA DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA
COM MATERIAL CONCRETO E
MANIPULÁVEL**

por

Sergiana Alves Cangusçu Miranda

Mestrado Profissional em Matemática - Vitória da Conquista - BA

Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis

Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes
obtido através da SBM-PROFMAT-UESB.

Sergiana Alves Cangusçu Miranda

**Caixa de Funções: Uma Proposta com Material Concreto e
Manipulável**

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA
ABRIL/2017

Sergiana Alves Cangusçu Miranda
Caixa de Funções: Uma Proposta com Material Concreto e Manipulável/ Sergiana
Alves Cangusçu Miranda. Vitória da Conquista-BA, Abril/2017- 119 p.
Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis
Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA
BAHIA
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO , Abril/2017.
Inclui referencias.118-119

1. Funções
2. Material Concreto e Manipulável
3. Caixa de Funções
4. Proposta de Atividades

Sergiana Alves Cangusçu Miranda

Caixa de Funções: Uma Proposta com Material Concreto e Manipulável

Vitória da Conquista-BA, 12 / 04 / 2017

Comissão Examinadora



Prof. Dr. Júlio César dos Reis
UESB
(Orientador)



Prof. Dr. André Nagamine
UESB



Profª. Drª Selma Rozane Vieira
IFBA

Aos meus pais Sérgio e Neuza, por serem minha base e meu porto seguro, me ensinando, com simplicidade e sabedoria, nunca desistir dos meus sonhos e buscar meios para concretizá-los.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, sempre ao meu lado, mostrando caminhos certos a seguir na realização dos meus sonhos e em todos os momentos da minha vida.

A minha mãe, Sr^a Neuza Alves Cangusçu, meu anjo enviado por Deus, responsável por me tornar esse ser humano persistente, capaz de enfrentar desafios e lutar por ideais e objetivos.

Ao Sr. Sérgio Santos Cangusçu, meu pai, que com sua simplicidade soube transmitir de forma concreta e bela o real valor da educação.

Ao meu irmão, Neilor Sérgio, meu parceiro, amigo, companheiro, cúmplice em todos os momentos de felicidade ou de desânimo.

Ao meu esposo, José Vanderlei, cujo amor e dedicação me dá forças e me ampara nos momentos de cansaço, e compartilhou comigo a alegria de ser selecionada para realização desse sonho e vencer todos os obstáculos até a culminância da minha defesa. Essa conquista é nossa, meu amor!

Ao meu filho amado, vida da minha vida, alma da minha alma, Sérgio Gabriel, que compreendeu todos meus momentos de ausência.

Ao meu Orientador, Professor Doutor Júlio César dos Reis, que com maestria desempenhou importante papel no meu trabalho, me conduzindo e me mostrando qual o melhor caminho a seguir.

A todos os professores do Mestrado, pelos ensinamentos e por me ajudarem a ampliar meus conhecimentos.

Aos meus queridos colegas de mestrado por todos os momentos de certezas e incertezas, de deslumbramento e cansaço, durante estes dois anos de estudo.

A minha amiga eterna Edifrance, pela troca de experiências vividas, pelo carinho e sentimento de amizade pura e verdadeira.

Ao meu amigo Eric, que me auxiliou em vários momentos difíceis e sempre esteve ao meu lado me incentivando a continuar.

A todos os amigos que sempre me apoiaram e entenderam as minhas decisões.

A toda a minha família, pelas orações e palavras de incentivo durante todo o curso.

A diretora da instituição de ensino onde trabalho, Olga Neta, que me acolheu e compreendeu cada momento atribulado que vivi nesses dois anos.

À Capes pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

“A simples transmissão de informações poderia ser facilmente substituída por televisões e computadores. Agora, transmitir com paixão é privilégio do professor que ama seu ofício e os assuntos em que se especializou.”(Flávio Gikovake)

Caixa de Funções: Uma Proposta com Material Concreto e Manipulável

RESUMO

Este trabalho apresenta algumas atividades propostas, contendo objetivos específicos, para serem utilizadas em sala de aula, tendo como material concreto e manipulável, uma Caixa de Funções construída a partir de materiais simples. Esta Caixa de Funções tem como objetivo principal facilitar o processo ensino-aprendizagem de Funções, através da compreensão do conceito, a princípio, mas também composição e inversa. A composição de funções será realizada a partir de sobreposição das caixas, onde cada caixa representa uma função, podendo realizar composição entre duas, três ou mais funções, favorecendo assim, a compreensão desse conteúdo, bem como o conceito de função inversa. Esta Caixa de Funções pode possibilitar ao aluno ser agente ativo no processo ensino-aprendizagem, bem como promover maior interação entre o professor-aluno. Após a compreensão do conceito de composição e inversa, bem como suas propriedades, o aluno poderá construir uma tábua de composição de funções através da utilização da Caixa de Funções, podendo efetuar composições com mais propriedade e facilidade. A Caixa de Funções será utilizada para compreender o conceito de função. para isso propomos algumas atividades que envolva, por exemplo, composição e inversa de funções. Portanto, esperamos que este material possa servir como apoio para o ensino de funções, se constituindo como um elemento mediador entre o conhecimento teórico e o desenvolvimento subjetivo do aluno. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre Funções e materiais concretos juntamente com um recorte histórico sobre o tema. Em seguida, dois momentos se destacaram: o primeiro, onde buscou-se a construção e a compreensão da Caixa de Funções, com seus erros e acertos, até o seu produto final e, o segundo, onde houve a análise dos tópicos relacionados a funções que poderiam ser utilizados como instrumento facilitador.

Palavras-chave: Atividades. Caixa de funções. Funções. Material concreto.

Box of Functions: A Proposal with Concrete and Manipulable Material

ABSTRACT

This paper presents some proposed activities, containing specific objectives, to be used in the classroom, having as concrete and manipulable material, a Function Box constructed from simple materials. This function box has as main objective to facilitate the teaching-learning process of Functions, through the understanding of the concept, in principle, but also composition and inverse. The composition of functions will be performed from the overlapping of the boxes, where each box represents a function, being able to perform composition between two, three or more functions, thus favoring the understanding of this content, as well as the concept of inverse function. This Box of Functions can enable the student to be active agent in the teaching-learning process, as well as to promote greater interaction between the teacher-student. After understanding the concept of composition and inverse, as well as its properties, the student can construct a board of composition of functions through the use of the Box of Functions, being able to make compositions with more property and facility. The Function Box will be used to understand the concept of function. For this we propose some activities that involve, for example, composition and inverse of functions. Therefore, we hope that this material can serve as support for the teaching of functions, constituting as a mediating element between theoretical knowledge and subjective development of the student. For this, a bibliographical research on Functions and concrete materials was carried out along with a historical cut on the theme. Then, two moments stood out: the first one, where it was sought the construction and the understanding of the Function Box, with its errors and correctness, until its final product, and the second, where there was the analysis of the topics related to functions Which could be used as a facilitator.

Keywords: Activities. Function box. Functions. Concrete material.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Quadrado	9
Figura 1.2 – Triângulos	11
Figura 1.3 – Triângulos subdivididos	11
Figura 1.4 – Plano cartesiano	14
Figura 1.5 – Quadrantes	15
Figura 1.6 – Eixos cartesianos	15
Figura 1.7 – Projeções do ponto P	15
Figura 1.8 – Plano cartesiano com pontos identificados	16
Figura 1.9 – $A \times B$	17
Figura 1.10 – $B \times A$	17
Figura 1.11 – Gráfico $A \times B$	18
Figura 1.12 – Gráficos $A \times B$ e $B \times A$	18
Figura 1.13 – Plano Cartesiano Ortogonal	19
Figura 1.14 – Plano cartesiano - Exemplo 1.2.13	20
Figura 1.15 – Diagrama de flechas - Exemplo 1.2.13	20
Figura 1.16 – Gráfico cartesiano - Exemplo 1.2.14	21
Figura 1.17 – Diagrama de flechas - Exemplo 1.2.14	21
Figura 1.18 – Representações gráficas de $A \times B$ e $B \times A$	21
Figura 1.19 – Diagrama de R	22
Figura 1.20 – Gráficos de $A \times B$ e de R	23
Figura 1.21 – Gráficos de R e R^{-1}	24
Figura 1.22 – Relação R	25
Figura 1.23 – Relação S	25
Figura 1.24 – Relação T	25
Figura 1.25 – Relação V	26
Figura 1.26 – Relação W	26
Figura 1.27 – Diagramas de Relações	27
Figura 1.28 – Representação gráfica da função A em $\mathbb{R}$	27
Figura 1.29 – Representação gráfica da relação A em $\mathbb{R}$	28
Figura 1.30 – Representação gráfica da função B em $\mathbb{R}$	28
Figura 1.31 – Diagrama de f	29
Figura 1.32 – Diagrama identificando D , Im e CD	30
Figura 1.33 – Diagrama - Exemplo 1.3.6	30
Figura 1.34 – Gráfico da função f	31
Figura 1.35 – Composição de g com f	34
Figura 1.36 – Diagrama da função h	34

Figura 1.37–Representação da função composta	35
Figura 1.38–Diagrama da função $h = g \circ f$	35
Figura 1.39–Representação das composições $f \circ g$ e $g \circ f$	36
Figura 1.40– f de A em B	37
Figura 1.41–Diagrama da função injetora f	38
Figura 1.42–Diagrama - Exemplo 1.5.9	39
Figura 1.43–Gráfico 1a	40
Figura 1.44–Gráfico 1b	40
Figura 1.45–Gráfico 2a	41
Figura 1.46–Gráfico 2b	41
Figura 1.47–Gráfico 3a	41
Figura 1.48–Gráfico 3b	41
Figura 1.49–Diagramas de f e f^{-1}	42
Figura 1.50–Diagrama de f e f^{-1}	43
Figura 1.51–Diagrama $f_0 \circ f_0$	48
Figura 1.52–Diagrama $f_0 \circ f_1$	48
Figura 1.53–Diagrama $f_1 \circ f_1$	49
Figura 1.54–Diagrama $f_1 \circ f_1$	50
Figura 1.55–Diagrama $f_1 \circ f_0$	51
Figura 1.56–Diagrama $f_1 \circ f_2$	51
Figura 3.1 – Esboço da caixa para ser traçado no papelão 51cm x 55cm	61
Figura 3.2 – Esboço da caixa de funções planificada com as dimensões identificadas	62
Figura 3.3 – Esboço da placa de papelão com os traçados de corte e dobra	63
Figura 3.4 – Placa de papelão com os traçados corte e dobra	63
Figura 3.5 – Placa de papelão com os cortes e dobras	64
Figura 3.6 – Retângulo 5cm os pontos A, B, C, D, E, F e G	65
Figura 3.7 – Retângulo 5 com as circunferências de diâmetro BC traçadas	65
Figura 3.8 – Papelão com as circunferências dos retângulos 4 e 5 traçadas	67
Figura 3.9 – Semicircunferências e circunferências traçadas	68
Figura 3.10–Placa de papelão com todas as circunferências e semicircunferências cortadas	68
Figura 3.11–Caixa montada com luvas soldáveis	69
Figura 3.12–Caixa pintada	69
Figura 3.13–Permutações possíveis	70
Figura 3.14–Caixas com conduítes fixados	71
Figura 3.15–Caixa fechada pintada com spray prata	71
Figura 3.16–Caixa de Funções	72
Figura 3.17–Copinho	73
Figura 3.18– f_0	73

Figura 3.19– f_1	74
Figura 3.20– f_2	74
Figura 3.21– g_1	74
Figura 3.22– g_2	74
Figura 3.23– g_3	75
Figura 3.24–Protótipo com caixa de sapato-vista superior	76
Figura 3.25–Protótipo com caixa de sapato-vista lateral	76
Figura 3.26–Protótipo rascunho inicial espacial da Caixa de Funções	76
Figura 3.27–Caixa traçada no papelão	77
Figura 3.28–Caixa com conduítes	77
Figura 3.29–Tampa fixada com tecido	78
Figura 3.30–Tampa fixada com esparadrapo	78
Figura 3.31–Caixa forrada com papel prata	79
Figura 3.32–Caixa de Funções	80
Figura 4.1 – Diagramas associados as Caixas de Funções	86
Figura 4.2 – Diagramas de flechas associadas a caixa de funções	90
Figura 4.3 – Plano Cartesiano	91
Figura 4.4 – Lembrete	92
Figura 4.5 – Composição I	94
Figura 4.6 – Composição II	95
Figura 4.7 – Composição III	95
Figura 4.8 – Tabuleiro para o jogo da velha composição	98
Figura 4.9 – Trilha da composição	99
Figura 4.10–Triângulo da composição	99
Figura 4.11–Diagrama resposta	104
Figura 4.12–Diagrama resposta	105
Figura 4.13–Gráfico da Caixa 1	107
Figura 4.14–Gráfico da Caixa 2	107
Figura 4.15–Gráfico da Caixa 3	107
Figura 4.16–Gráfico da Caixa 4	107
Figura 4.17–Gráfico da Caixa 5	107
Figura 4.18–Gráfico da Caixa 6	107
Figura 4.19–Composição I	108
Figura 4.20–Composição II	109
Figura 4.21–Composição III	110
Figura 4.22–Diagrama f_0 o f_1	113
Figura 4.23–Diagrama f_1 o f_1	113

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC's	Atividades Complementares
DCET	Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

Lista de figuras	x
INTRODUÇÃO	1
1 – FUNÇÕES	6
1.1 Ideia de Função Intuitiva no Cotidiano	7
1.2 Conceitos Associados ao Ensino de Funções	12
1.2.1 Par ordenado	12
1.2.2 Sistema cartesiano ortogonal	14
1.2.3 Produto cartesiano	16
1.2.4 Relação Binária	18
1.2.5 Relação Inversa	23
1.3 Conceito de função	24
1.3.1 A noção de funções por meio de conjuntos	24
1.3.2 Definição	26
1.3.3 Notação das funções	28
1.3.4 Domínio e Imagem	29
1.4 Função Composta	33
1.5 Função sobrejetora, injetora e bijetora	37
1.5.1 Função sobrejetora	37
1.5.2 Função injetora	38
1.5.3 Função bijetora	39
1.6 Função Inversa	42
1.7 Permutações	45
2 – MATERIAL CONCRETO E MANIPULÁVEL	53
2.1 Emprego de materiais concretos e manipuláveis no ensino de matemática	53
2.2 Considerações acerca das Definições e Uso de Materiais Concretos no Ensino Matemático	55
2.3 Um Breve Olhar Sobre o Uso de Materiais Concretos no Ensino de Matemática ao Longo da História	55
2.4 Materiais Concreto Como Recurso Facilitador da Prática Docente	56
3 – CAIXA DE FUNÇÕES	59
3.1 Construção	59
3.2 Erros e acertos	75

3.2.1	Os primeiros passos	75
3.2.2	A caixa tomando forma	77
3.2.3	Na reta final	80
4	–PROPOSTA DE ATIVIDADES	82
4.1	Atividade A	83
4.2	Atividade B	88
4.3	Atividade C	93
4.4	Atividade D	99
4.5	Soluções das Atividades	103
4.5.1	Soluções da Atividade A	103
4.5.2	Soluções da Atividade B	105
4.5.3	Soluções da Atividade C	108
4.5.4	Solução da Atividade D	112
5	–CONCLUSÃO	115
	Referências	118

INTRODUÇÃO

Atualmente, a sociedade vivencia transformações consideráveis que vêm acarretando impactos e novos desafios, inclusive no âmbito escolar. A escola tradicional do passado cedeu espaço para a implantação de novas ferramentas que facilitam a compreensão e aplicação do conhecimento como um todo, sendo que a partir da ótica da pós-modernidade, um dos desafios principais para os educadores e os próprios educandos é analisar o que pode ser usado, o que pode ser remodelado e o que deve ser produzido a partir do montante gigantesco de informações que o acesso à tecnologia propicia.

Quando pensamos sobre a situação do ensino da matemática no momento atual, percebemos que o mesmo encontra-se repleto de desafios para tornar-se realmente significativo. Conforme Bicudo e Borba (2004):

É sabido que a matemática tem desempenhado um papel importante no desenvolvimento da sociedade e que problemas de Matemática tem ocupado um lugar central no currículo escolar desde a Antiguidade. Hoje, esse papel se mostra ainda mais significativo. A necessidade de se “entender” e “ser capaz” de usar a matemática na vida diária e nos locais de trabalho nunca foi tão grande. (Bicudo e Borba, 2004, pg. 213)

Nesta perspectiva, muitos estudiosos detectaram que um dos grandes problemas enfrentado pelo sistema de ensino brasileiro refere-se ao baixo desempenho dos alunos no Ensino Básico de Matemática, sendo que uma plausível explicação para essa questão é, justamente, perceber que o ensino da matemática constrói sempre novos caminhos e possibilidades de conhecimento para o aluno, haja visto que favorece a sua autonomia e amplia o seu potencial na realização de situações problemas encontrados na sua realidade. No entanto, o ensino dessa disciplina quando realizado através de mera repetição, de conhecimentos cristalizados e inadequados, geram desinteresse e dificuldades de aprendizagem matemática.

Porém, sabe-se que não basta o professor dominar os conteúdos e técnicas didáticas, ele tem que fazer uma construção desenvolvida a partir das necessidades dos alunos no seu cotidiano, uma vez que a matemática é uma área do conhecimento que surgiu e tem-se desenvolvido a partir dos problemas que o homem encontra. Dessa forma, a essência da Matemática é a resolução de problemas. Por este motivo para o seu ensino não basta só conhecer, é necessário ter criatividade, fazer com que os alunos participem da construção do conhecimento e das resoluções dos problemas de forma dinâmica e significativa. Conforme Vitti (1999):

“Se o ensino e o desenvolvimento da matemática fosse inspirado nas necessidades e realidade do homem e em seu momento histórico, e não apenas levando aos alunos regras e mais regras, dizendo que isso é matemática, além de estarmos contemplando um binômio indissociável em didática – o que vou ensinar e para que vou ensinar – também amenizaria a violência que é praticada contra a criatividade do aluno moderno, tentando ensinar matemática à moda tradicional.” (P.40)

Dessa forma, percebemos a preocupação atual com o ensino dessa disciplina, pois a mesma passa por uma fase de reanimação no ensino, na qual o ensinar é prioridade para a aprendizagem e os professores como agentes de mudança, estão à procura de novos métodos e formas diversificadas de ensino. No ensino médio, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) do Ensino Médio, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência, com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza.

Outra questão relevante abordada nos PCN's + do Ensino Médio é o que diz respeito ao aprendizado da Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, trazendo o desafio de desenvolver competências e habilidades formadoras.

Nesse contexto, podemos perceber que são as competências que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, além de capacitá-lo para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar, tirar conclusões próprias, tomar decisões e outras ações necessárias à sua formação. Ademais, o desenvolvimento dessas competências não deve rejeitar os conteúdos programados nas séries do Ensino Médio, nem as disciplinas, mas sim aprofundar sua implementação, criando condições de aprendizagem significativa, tornando o professor mediador no processo de ensino e aprendizagem e o aluno como protagonista desse processo.

Sobre essa questão, Fiorentini e Miorim (1990), afirmam que a função primordial do ensino de matemática é o próprio ensino dessa disciplina e para que se possa cumprir essa tarefa fundamental é necessário lançarmos mão de todos os recursos de que dispomos. Ademais, o aluno possui o direito de aprender de forma significativa, onde participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

No entanto, podemos observar que muitos professores não alcançam os objetivos almejados e enfrentam muitas dificuldades em ocupar a posição de mediador no processo ensino-aprendizagem, o que torna a disciplina de matemática como temida e vista como o “bicho papão” da educação.

Com base nesta abordagem, essa dissertação tem como objetivos específicos desenvolver, analisar e descrever uma proposta de ensino mediada pela utilização de material concreto e manipulável no estudo de funções, uma vez que, de acordo com Fiorentini e

Miorim (1990), o material concreto e manipulável pode ser fundamental para que ocorra a aprendizagem significativa, pois durante a construção ou a utilização de um material concreto e manipulável, o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva.

Assim, o presente trabalho, consiste em uma proposta de ensino com um material concreto e manipulável denominado Caixa de Funções. Um dos objetivos deste material é apresentar uma alternativa para o ensino-aprendizagem de funções e alguns conceitos relacionados como função inversa e composições de funções.

A Caixa de Funções, material concreto e manipulável, desenvolvido e descrito, não garante o sucesso da aprendizagem, mas indica que pode haver êxito quando um mesmo assunto é abordado com representações distintas.

A definição do tema desse trabalho surgiu a partir dos obstáculos encontrados pelos alunos quando abordado o conteúdo de funções compostas. As dificuldades em fazer a associação entre a parte teórica e a prática, levaram-me a pensar em como contribuir para redução de tais dificuldades.

A observação do desempenho dos alunos nas aulas de Matemática, antes de apresentarmos a proposta em questão, foi determinante no seu processo de criação. Ao perceber que os alunos encontravam dificuldades em conceitos subjacentes ao conceito de função e, a partir destas dificuldades somadas aquelas apontadas como frequentes em avaliações oficiais externas, como, por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), foi inserido o material concreto e manipulável, cuja principal finalidade diz respeito a um melhor entendimento, pelos alunos, dos conteúdos propostos em sala de aula, mais especificamente do conteúdo funções.

Diante dessa proposta de atividades, em que foram envolvidos os principais conceitos associados às funções, foi possível através da atividade envolvendo a Caixa de Funções, propor, de uma forma dinâmica, a manipulação das variáveis que são inerentes às funções dessa natureza, pois foram pensadas em consonância com as hipóteses do trabalho, a saber:

- Os alunos de 1º ano apresentam dificuldades para compreender uma função, bem como informações úteis ao seu emprego em situações problema;
- Os alunos não fazem a correspondência de informações do campo teórico para o campo prático e vice-versa;
- O material concreto pode ser um facilitador no ensino das funções.

Dessa forma, o trabalho se divide em: (i) pesquisa bibliográfica, que fornece ao pesquisador a bagagem teórica, de conhecimento, e o treinamento científico que habilitam

a produção de trabalhos originais e pertinentes, através da análise de livros e um apanhado sobre os principais trabalhos científicos já realizados sobre o tema escolhido. Estes trabalhos importantes por fornecer, um estudo teórico de funções e falar sobre a importância do uso de material concreto no ensino de matemática; (ii) construção da caixa, bem como sua viabilidade para professor e aluno, através de atividades propostas para serem realizadas com alunos do 1º ano.

Importante ressaltar que as discussões realizadas durante as aulas do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática) – UESB (Universidade Estadual da Bahia) e nas AC's (Atividades Complementares) acerca da utilização de material concreto no processo ensino-aprendizagem de matemática, foram o ponto de partida para a escolha do tema desta dissertação, somados a conversa inicial realizada junto ao meu orientador, foram os agentes responsáveis por direcionar o produto final, que é a construção da Caixa de Funções e uma sequência de atividades, que serve como material de apoio para o ensino do conteúdo funções.

Com a revisão bibliográfica, demos atenção aos trabalhos que fazem estudos sobre funções e a utilização de material concreto no ensino da Matemática; aos que abordam a formação de professores e, aos que apontam as tecnologias como recursos didáticos, levando-se em consideração os estudos atuais sobre o tema e os autores consagrados como: Lorenzato (2010), Vitti (1999), Bicudo e Borba (2004), Fiorentini e Miorim (1990), Borba e Penteado (2003), dentre outros.

Assim, o trabalho foi estruturado em cinco capítulos:

- No primeiro capítulo, é apresentada uma revisão teórica sobre função, desde definições iniciais até função inversa e composta;
- No segundo capítulo, é discutida a importância do material concreto, fazendo uma alusão aos fatos históricos e seu desenvolvimento junto às propostas metodológicas de ensino;
- No terceiro capítulo, é feita uma descrição da construção da Caixa de Funções, bem como os erros e acertos acerca da sua construção;
- No quarto capítulo, é feita uma descrição da Caixa de Funções e atividades propostas com a mesma;
- No quinto capítulo, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

ℓ

1 FUNÇÕES

Neste capítulo serão apresentados algumas ideias sobre funções como noção intuitiva, a definição formal de função, função composta e função inversa.

O leitor familiarizado com esses assuntos pode omitir a leitura das primeiras seções e ler a partir da seção que fala sobre permutação.

O conceito de Função Matemática está presente nos mais diferentes ramos do conhecimento humano e teve sua origem, dividida em três etapas específicas, conforme Youschkevitch (1976), o desenvolvimento da noção de função divide-se em três etapas específicas: a primeira, na antiguidade, ao verificar-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem, contudo destacar a noção de variáveis e funções; a segunda, na Idade Média onde aparece a noção de função sob a forma geométrica e mecânica, ainda em descrições gráficas e verbais; e, no período moderno, onde surgem as expressões analíticas de função, revolucionando a Matemática devido a sua eficácia, garantindo, assim, à noção de funções um lugar de destaque nas ciências exatas. Ademais, o estudo de função não é restrito apenas aos interesses da Matemática, pois as funções fazem parte do nosso cotidiano e estão presentes na realização das coisas mais elementares que fazemos, apesar de nem sempre percebemos.

Portanto, muitos são os exemplos que motivam o estudo de funções, como: a relação existente entre as grandezas espaço e tempo; as várias situações corriqueiras, onde muitas grandezas presentes no nosso dia-a-dia se relacionam de forma especial, desde o número de pães que se compra, com o preço a pagar; número de questões que se acerta em uma avaliação, com a nota que se obtém; velocidade média de um automóvel, com o tempo de duração de uma viagem; até a medida do lado de um quadrado e sua área, dentre outros. Dessa forma, Funções torna-se um dos conteúdos mais importantes da matemática, ocupando lugar de destaque em várias de suas partes e a relação funcional ocorre em todos os campos do conhecimento.

Assim, iremos tratar de forma mais detalhada sobre a importância do uso de funções através de exemplos, visando uma maior e mais clara noção intuitiva da mesma e, em seguida, nos aprofundaremos no conceito desta, fundamentados pelas seguintes obras:

- Matemática: Ensino Médio: volume 1, de Kátia Stocco Smole e Ignez Diniz;
- Teoria Elementar das Funções, de Maurício Zahn;
- Novo Olhar Matemática volume 1, de Joamir Souza;
- Matemática: Contextos e Aplicações, de Luiz Roberto Dante;

- Álgebra Moderna de Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi;
- Fundamentos de Matemática Elementar, Conjuntos e Funções de Gelson Iezzi.

1.1 Ideia de Função Intuitiva no Cotidiano

Vejam os abaixo algumas situações corriqueiras

Exemplo 1.1.1. *O biodiesel é um tipo de combustível obtido a partir de plantas oleogêneas, como o algodão, o girassol, a mamona e a soja. Entre as vantagens na utilização desse combustível, pode-se destacar a menor emissão de gases poluentes na atmosfera, se comparado ao diesel comum, aquele obtido a partir do petróleo.*

Observe no quadro abaixo a relação entre a quantidade de mamona (em tonelada) e de biodiesel (em litros) produzida.

Quadro 01- Quantidade de biodiesel produzida

QUANTIDADE DE MAMONA (em t)	QUANTIDADE DE BIODIESEL (em l)
1	560
2	1120
3	1680
4	2240
...	...
x	$560 \cdot x$

Fonte: Souza (2010, p.46)

Note que existe uma relação entre as grandezas “quantidade de mamona”(x) e “quantidade de biodiesel”(q) produzida. Essa relação é um exemplo de função. Para determinarmos quantos litros de biodiesel são produzidos a partir de certa quantidade de mamona, podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$q = 560 \cdot x$$

q = quantidade de biodiesel (em l);

560 = Quantidade de biodiesel produzida com 1 t de mamona;

x = quantidade de mamona (em t).

Podemos calcular por exemplo, quantos litros de biodiesel são produzidos a partir de 12,5 toneladas de mamona:

$$q = ?$$

$$x = 12,5t$$

$$q = 560.12,5 \Rightarrow q = 7000l$$

Com 12,5 toneladas de mamona podem ser produzidos 7000 litros de biodiesel.

Também podemos calcular, por exemplo quantas toneladas de mamonas foram utilizadas para produzir 2800 litros de biodiesel:

$$x = ?$$

$$q = 2800l$$

$$q = 560.x \Rightarrow 2800 = 560.x \Rightarrow x = 5t$$

Foram utilizadas 5 toneladas de mamona para produzir 2800l de biodiesel.

No exemplo 2.1.1, dizemos que a “quantidade de biodiesel” produzida está em função da “quantidade de mamona” ou seja, a produção de biodiesel depende da quantidade de mamona.

Exemplo 1.1.2. *Uma estamparia cobra uma taxa fixa, referente ao trabalho de desenvolvimento da estampa padrão, mais um valor por peça de roupa estampada. Para estampar camisetas de certa encomenda, o orçamento calculado estabelecia uma taxa fixa de R\$ 30,00 mais R\$ 2,50 por camiseta.*

Observe a quantidade de camisetas e o valor cobrado.

Quadro 02 - Quantidade de camisetas e valor cobrado

Quant. de camisetas	1	2	10	20	50	...	x
Valor cobrado (R\$)	$\underbrace{32,50}_{30+2,50}$	$\underbrace{35}_{30+2,50.2}$	$\underbrace{55}_{30+2,50.10}$	$\underbrace{80}_{30+2,50.20}$	$\underbrace{155}_{30+2,50.50}$	...	$30 + 2,50.x$

Fonte: Souza (2010, p.47)

A relação entre a quantidade de camisetas e o valor cobrado é descrita por uma função, cuja fórmula é dada por:

$$v = 30 + 2,50.x$$

v = valor cobrado

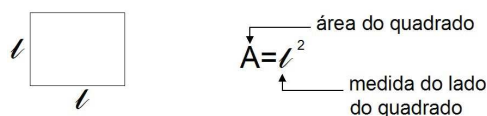
30 = taxa fixa

2,50 = valor cobrado por camiseta

x = quantidade de camisetas

Exemplo 1.1.3. A área de um quadrado depende da medida de seu lado. Se o lado mede 1, a área é 1, se o lado mede 5, a área é 25, se o lado mede l , então a área é $A = l^2$.

Figura 1.1 – Quadrado



Fonte: Souza (2010, p.47)

A cada valor que atribuímos à medida do lado do quadrado está associado a um valor correspondente à área desse quadrado.

Quadro 03 - Lado do quadrado e sua área correspondente

l	$A = l^2$	A
1 cm	$A = 1^2 = 1$	1 cm ²
2 cm	$A = 2^2 = 4$	4 cm ²
3 cm	$A = 3^2 = 9$	9 cm ²
4 cm	$A = 4^2 = 16$	16 cm ²
5 cm	$A = 5^2 = 25$	25 cm ²

Fonte: Souza (2010, p.47)

O quadro pode ser construído atribuindo-se para l qualquer valor real positivo, porém o mesmo não ocorreria em relação a número do calçado no próximo exemplo, que só pode ser um número natural.

Exemplo 1.1.4. A numeração usada na confecção de sapatos depende do comprimento do pé das pessoas. Os fabricantes de calçados brasileiros usam a fórmula $N = \frac{5c + 28}{4}$, em que c é o tamanho do pé em cm e N é o número do calçado.

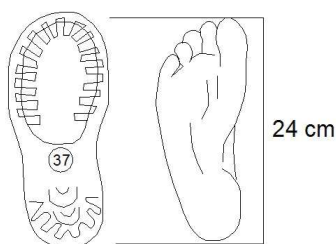
Observe no quadro a relação para algumas medidas de pé entre 20 cm e 30 cm, e o número do calçado.

Quadro 04 - Correspondência do tamanho do pé ao número do calçado

Tamanho do pé (em cm)	Número do calçado
20	32
22	$34,5 \cong 35$
24	37
26	$39,5 \cong 40$
28	42
30	$44,5 \cong 45$

Fonte: Smole(2010. p.73)

Representação do pé cujo número do calçado é 37



Fonte: Smole (2010. p.73)

A indústria brasileira não produz números intermediários de calçados, daí a importância de experimentá-los no momento da compra. Assim, se o valor do c é 23 cm, por exemplo, podemos calcular o valor esperado para o calçado.

$$c = 23\text{cm}$$

$$N = ?$$

$$N = \frac{5.c + 28}{4} \Rightarrow N = \frac{5.23 + 28}{4} \Rightarrow N = 35,75 \cong 36$$

Assim, o valor esperado é 36.

Para calcular, por exemplo, a medida do pé de uma pessoa que calça 38:

$$c = ?$$

$$N = 38$$

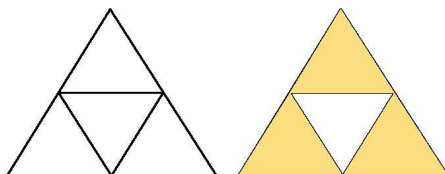
$$N = \frac{5.c + 28}{4} \Rightarrow 38 = \frac{5.c + 28}{4} \Rightarrow 5.c + 28 = 152 \Rightarrow 5.c = 124 \Rightarrow c = 24,8\text{cm}$$

Então, a medida do pé é aproximadamente 24,8 cm.

Exemplo 1.1.5. Alguns padrões geométricos também estão relacionados com função. O padrão que vamos descrever é construído a partir de uma regra que se repete indefinidamente.

Tudo começa com um triângulo equilátero, dividido em 4 triângulos equiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos equiláteros, veja abaixo.

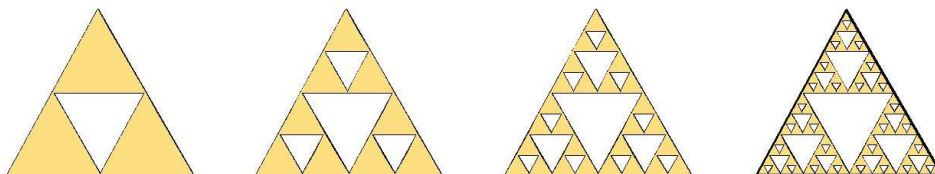
Figura 1.2 – Triângulos



Fonte: Smole (2010. p.73)

Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos equiláteros congruentes, desconsiderando sempre o triângulo do centro:

Figura 1.3 – Triângulos subdivididos



Fonte: Smole (2010. p.73)

O número de triângulos em cada etapa do processo é uma função do número da etapa da sua construção.

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do triângulo?

Se representarmos pela letra T o número de triângulos existentes na etapa de número n , poderemos calcular o valor de T por meio da igualdade $T = 3^{n-1}$, em que n é qualquer número natural maior ou igual a 1. Assim, na décima etapa da construção dos triângulos temos:

$$n = 10$$

$$T = ?$$

$$T = 3^{10-1} = 19683 \text{ triângulos.}$$

Vimos em cada um dos exemplos anteriores duas grandezas relacionadas de uma forma especial, onde o valor numérico de uma grandeza depende de alguma forma do valor da outra, a este tipo de situação denominamos função.

Em uma função, a grandeza que depende de uma outra é chamada de variável dependente, esta outra grandeza é denominada variável independente.

Para que seja função faz-se necessário que todas as variáveis independentes sejam utilizadas e ainda que cada variável, sendo utilizadas, tem de se associar a uma única variável dependente, mas esta, por sua vez, pode ser associada a mais de uma variável independente.

No entanto, nem sempre uma relação entre duas grandezas é uma função, para entendermos isso, vamos observar um contraexemplo.

Em matemática, a palavra contraexemplo é usada quando queremos dar um exemplo contrário ao que estamos destacando. No caso, vamos dar exemplo de uma relação que não é uma função.

A cada número natural n vamos associar os números inteiros que elevados ao quadrado resultam em n . Veja a quadro abaixo:

Quadro 05 - N° inteiros que elevados ao quadrado são iguais a n

n	0	1	2	3	4	5	...
N° inteiros que elevados ao quadrado são iguais a n	0	1 e -1	$\nexists$	$\nexists$	2 e -2	$\nexists$	...

Fonte: Smole (2010. p.74)

Apesar da situação acima descrita ser possível, ela não satisfaz duas das condições para ser função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$: todo valor de $n \in \mathbb{N}$ deve possuir um correspondente em $\mathbb{Z}$ e não pode haver mais de um correspondente em $\mathbb{Z}$ para o mesmo valor n . Portanto, a cada valor de $n \in \mathbb{N}$ deve estar associado um único valor em $\mathbb{Z}$. Entretanto, no quadro vemos que a alguns valores de n está associado mais de um valor em $\mathbb{Z}$, e a outros não existe valor em $\mathbb{Z}$ associados a eles.

1.2 Conceitos Associados ao Ensino de Funções

Apresentaremos nesta seção alguns conceitos e exemplos básicos sobre funções.

1.2.1 Par ordenado

Em situações simples, do nosso cotidiano, muitas vezes precisamos localizar alguns objetos como uma chave, uma blusa, uma rua, e aí podemos ter várias possibilidades de

caminhos para se chegar a estes, porém em situações como mapas aéreos e marítimos são usados pares ordenados para localização de pontos na superfície da Terra. Assim sendo, vamos definir inicialmente par de elementos e em seguida plano cartesiano.

Definição 1.2.1. : *Chama-se par todo conjunto formado por dois elementos.*

Assim $\{1, 2\}, \{3, -1\}, \{a, b\}$, indicam pares. Lembrando o conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par: $\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{3, -1\} = \{-1, 3\}, \{a, b\} = \{b, a\}$

Em matemática, existem situações, em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos.

$$\text{Por exemplo, ao resolver o sistema de equações } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Obtemos a solução $x = 2$ e $y = 1$, mas $x = 1$ e $y = 2$ não é solução.

Se representarmos por um conjunto, teríamos: $\{2, 1\}$ seria solução e $\{1, 2\}$ não seria solução. Há uma contradição, pois sendo $\{2, 1\} = \{1, 2\}$, o mesmo conjunto é e não é solução. Por causa disso, dizemos que o primeiro elemento 2 se refere a incógnita x e o segundo elemento 1 refere-se a incógnita y .

Definição 1.2.2. : *A noção de par ordenado admitiremos como um conceito primitivo. Dados dois elementos por exemplo, a e b , onde para cada elemento a e b , admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b) que denominamos par ordenado de modo que se tenha:*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2.3. $(3, 5)$ é o par ordenado em que o primeiro elemento é 3 e o segundo elemento é 5.

Exemplo 1.2.4. $(5, 3)$ é o par ordenado em que o primeiro elemento é 5 e o segundo elemento é 3.

Note que os pares $(3, 5)$ e $(5, 3)$ diferem entre si pela ordem de seus elementos. Eles também podem ter os primeiros e segundos elementos idênticos tais como: $(1, 1)$ e $(5, 5)$ Assim, o par ordenado (a, b) não é a mesma coisa que o conjunto $\{a, b\}$ porque $\{a, b\} = \{b, a\}$ sempre, mas $(a, b) = (b, a)$ somente se $a = b$.

O par ordenado (a, b) também pode ser representado de uma maneira geométrica no plano cartesiano.

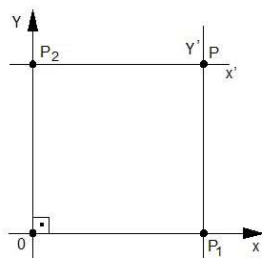
1.2.2 Sistema cartesiano ortogonal

Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O , os quais determinam um plano, o qual chamaremos de α .

Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas: $x' // x$ e $y' // y$.

Denominemos P_1 a intersecção de x com y' e P_2 a intersecção de y com x' .

Figura 1.4 – Plano cartesiano



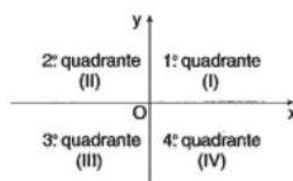
Fonte: Iezzy (1977, p. 60-A)

Nessas condições definimos:

- (a) Abscissa de P é o número real x_p representado por P_1 .
- (b) Ordenada de P é o número real y_p representado por P_2 .
- (c) Coordenadas de P são números reais x_p e y_p , geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p) onde x_p é o primeiro termo.
- (d) Eixo das abscissas é o eixo x (ou O_x).
- (e) Eixo das ordenadas é o eixo y (ou O_y).
- (f) Sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy .
- (g) Origem do sistema é o ponto O .
- (h) Plano cartesiano é o plano.

Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos chama-se quadrante. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar dos quadrantes correspondentes aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas.

Figura 1.5 – Quadrantes

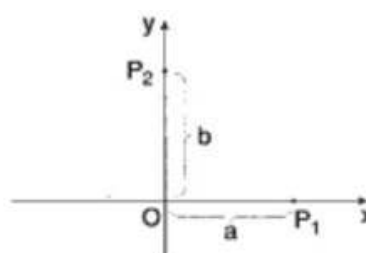


Fonte: Iezzy (2004, p.46)

Assim, podemos representar de maneira geométrica, o par ordenado (a, b) no plano cartesiano.

- 1º Passo : Desenhamos dois eixos perpendiculares e usamos a sua intersecção O como origem para cada um deles;
- 2º Passo : Marcamos no eixo horizontal o ponto P_1 , correspondente ao valor de a ;
- 3º Passo : Marcamos no eixo vertical o ponto P_2 , correspondente ao valor de b ;
- 4º Passo : Traçamos por P_1 uma reta r paralela ao eixo vertical;
- 5º Passo : Traçamos por P_2 uma reta s paralela ao eixo horizontal;
- 6º Passo : Destacamos a intersecção das retas r e s chamando de P , que é o ponto que representa graficamente o par ordenado (a, b) .

Figura 1.6 – Eixos cartesianos

Figura 1.7 – Projeções do ponto P 

Fonte: Iezzy (2004, p.46)

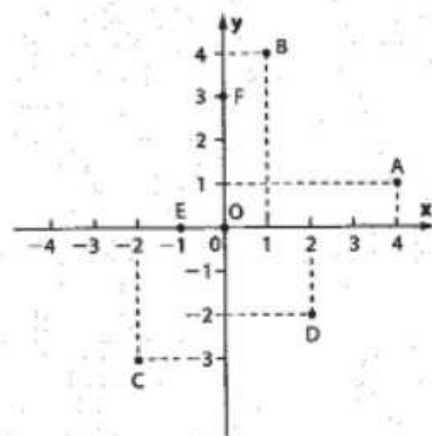
Teorema 1.2.5. *Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p, y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca.*

Isto quer dizer que a cada par ordenado de números reais correspondentes a um ponto P do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto P do plano correspondem um par ordenado de números reais.

Essa correspondência biunívoca entre pares de números reais e pontos no plano permite escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais.

Por exemplo, vamos localizar num plano cartesiano os pontos $A(4, 1)$, $B(1, 4)$, $C(-2, -3)$, $D(2, -2)$, $E(-1, 0)$, $F(0, 3)$ e $O(0, 0)$.

Figura 1.8 – Plano cartesiano com pontos identificados



Fonte: Dante (2010, p.48)

Ponto - $A(4, 1) \rightarrow$ ponto A de coordenadas cartesianas 4 e 1, sendo que 4 é abscissa e 1 ordenada.

Ponto - $B(1, 4) \rightarrow$ ponto B de coordenadas cartesianas 1 e 4, sendo que 1 é abscissa e 4 ordenada.

Ponto - $C(-2, -3) \rightarrow$ ponto C de coordenadas cartesianas -2 e -3, sendo que -2 é abscissa e -3 é ordenada.

Ponto - $D(2, -2) \rightarrow$ ponto D de coordenadas cartesianas 2 e -2, sendo que 2 é abscissa e -2 é ordenada.

1.2.3 Produto cartesiano

Definição 1.2.6. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y) onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B .*

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$$

O símbolo $A \times B$ lê-se “A cartesiano B” ou “produto cartesiano de A por B”.

Se A ou B for um conjunto vazio, definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio.

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$\emptyset \times B = \emptyset$$

$$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

Exemplo 1.2.7. *Sejam $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$. Temos:*

$$A \times B = \{(1, 2); (1, 4); (1, 5); (3, 2); (3, 4); (3, 5)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1); (2, 3); (4, 1); (4, 3); (5, 1); (5, 3)\}$$

e as representações gráficas $A \times B$ e $B \times A$ respectivamente.

Figura 1.9 – $A \times B$

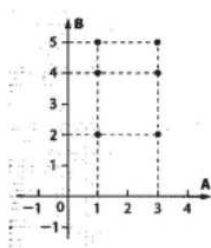
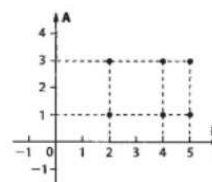


Figura 1.10 – $B \times A$



Fonte: Dante (2010, p.51)

Nitidamente, notamos que $A \times B \neq B \times A$, pois por exemplo $(1, 2) \in A \times B$, mas $(1, 2) \notin B \times A$. Logo, o produto cartesiano entre dois conjuntos, A e B , com $A \neq B$, não goza da propriedade comutativa.

De fato, teremos $A \times B = B \times A$ se, e só se, $A = B$.

O número de elementos de um produto cartesiano $A \times B$, sendo A e B finitos, é dado por $n(A).n(B)$. No exemplo acima temos:

- $n(A \times B) = n(A).n(B) = 2.3 = 6$
- $n(B \times A) = n(B).n(A) = 3.2 = 6$

Portanto, o $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$, pares ordenados, porém, o conjunto dos 6 pares ordenados de $A \times B$, são diferentes dos 6 pares ordenados de $B \times A$.

Entretanto, se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

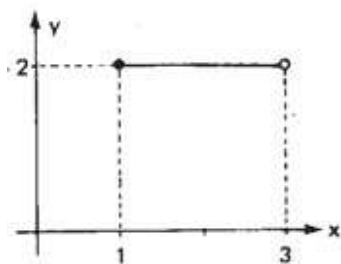
Exemplo 1.2.8. *Se $A = \{2, 3\}$ então $A \times A$ (que também pode ser indicado por A^2 e lê-se “A dois”) é:*

$$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Exemplo 1.2.9. Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 3\}$ e $B = 2$ então temos $A \times B = \{(x, 2) | x \in A\}$

A representação gráfica de $A \times B$ dá como resultado o conjunto dos pontos do segmentos paralelo ao eixo dos x da figura abaixo.

Figura 1.11 – Gráfico $A \times B$

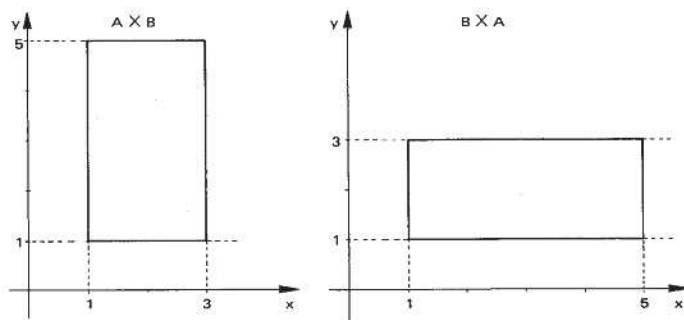


Fonte: Iezzy (1977, p.63-A)

Exemplo 1.2.10. : Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$ temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 5\}$ representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo, bem como, os pontos que estão no interior dele.

Notemos que $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 5 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$ é representado por um retângulo distinto do anterior.

Figura 1.12 – Gráficos $A \times B$ e $B \times A$



Fonte: Iezzy (1977, p.63-A)

1.2.4 Relação Binária

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

O produto cartesiano de A por B é o conjunto, $A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$ formado por $3 \cdot 5 = 15$ elementos. Se agora considerarmos o conjunto dos pares ordenados (x, y) de $A \times B$ tais que $x \mid y$ (lê-se: x é divisor de y), teremos:

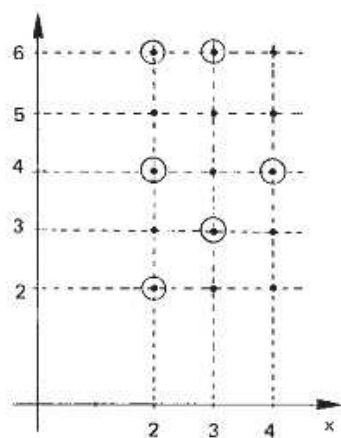
$R = \{(x, y); x \in A \times B | x/y\} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$ que é chamada relação entre dois elementos de A e de B ou, mais simplesmente, uma relação binária de A em B .

O conjunto R está contido em $A \times B$ e é formado por pares (x, y) em que o elemento x de A é “associado” ao elemento y de B mediante um certo critério de “relacionamento” ou “correspondência”.

Será bastante útil a representação da relação por meio de flechas, do **diagrama de flechas**, pois indicam quais pares ordenados pertencem a relação.

Outra maneira de representar uma relação é por meio do **plano cartesiano ortogonal**, formado por dois eixos, enumerados com números reais e perpendiculares: um horizontal, abscissa (x) e outro vertical, ordenada (y), que se cruzam na origem das coordenadas, como na figura abaixo.

Figura 1.13 – Plano Cartesiano Ortogonal



Fonte: Iezzy (1977, p.65-A)

Definição 1.2.11. *Dados dois conjuntos A e B , chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.*

$$R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A \times B.$$

Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de $A \times A$ é chamado relação binária em A

$$R \text{ é relação binária em } A \Leftrightarrow R \subset A \times A$$

Utilizaremos as seguintes nomenclaturas já consagradas

A = conjunto de partida da relação R

B = conjunto de chegada ou contra-domínio da relação R .

Quando o par (x, y) pertence a relação R , escrevemos xRy (lê-se : x erre y)

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$$

E se o par (x, y) não pertence a relação R escrevemos $x \not R y$ (lê-se : x não erre y)

$$(x, y) \notin R \Leftrightarrow x \not R y$$

Exemplo 1.2.12. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) | x < y\}$ de A em B ?

Os elementos de R são todos os pares ordenados de $A \times B$ nos quais o primeiro elemento é menor que o segundo, isto é, são pares formados pela “associação de cada elemento $x \in A$ com cada elemento de $y \in B$ tal que $x < y$ ”

Temos então

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Exemplo 1.2.13. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quais são os elementos da relação binária R de A em B assim definida: $xRy \Leftrightarrow y = x + 2$?

Fazem parte da relação R todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $y = x + 2$.

Utilizando as representações gráficas

Figura 1.14 – Plano cartesiano - Exemplo 1.2.13

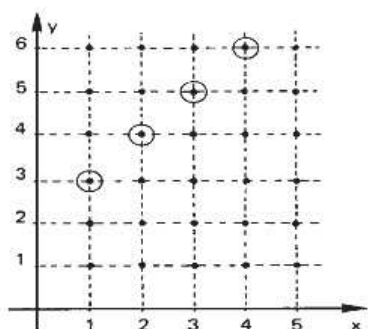
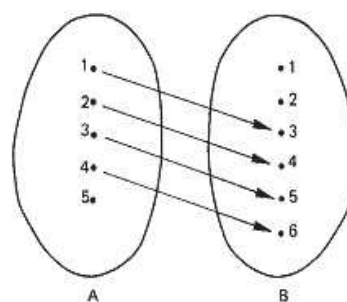


Figura 1.15 – Diagrama de flechas - Exemplo 1.2.13



Exemplo 1.2.14. Se $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 = y^2\}$?

Fazendo a representação gráfica, notamos que

$$R = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1), (2, 2)\}$$

Figura 1.16 – Gráfico cartesiano - Exemplo 1.2.14

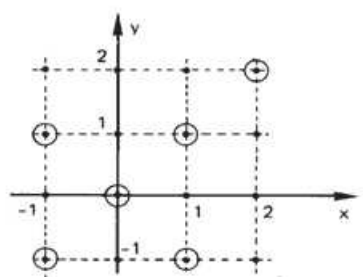
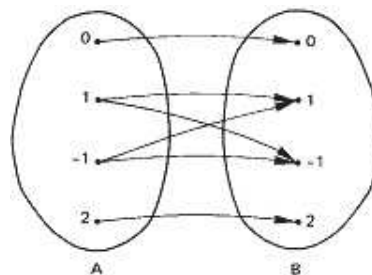


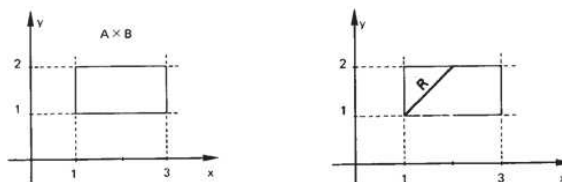
Figura 1.17 – Diagrama de flechas - Exemplo 1.2.14



Fonte: Iezzy (1977, p.67-A)

Exemplo 1.2.15. Se tiver $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 2\}$ pede-se a representação cartesiana de $A \times B$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$?

Figura 1.18 – Representações gráficas de $A \times B$ e $B \times A$



Fonte: Iezzy (1977, p.67-A)

Domínio e Imagem

Seja R uma relação de A em B .

Definição 1.2.16. Chama-se domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R .

$$x \in D \Leftrightarrow \exists y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

Definição 1.2.17. Chama-se imagem de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R .

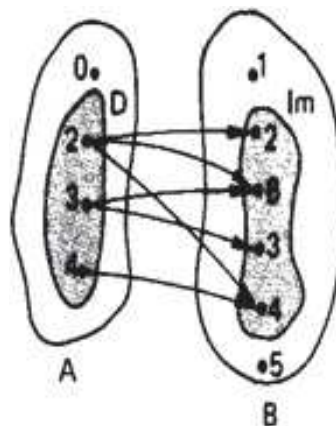
$$y \in \text{Im} \Leftrightarrow \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Decorre da definição de $D \subset A$, e $\text{Im} \subset B$.

Exemplo 1.2.18. : Se $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$

Utilizando o esquema das flechas é fácil perceber que **D** é o conjunto dos elementos de A dos quais partem flechas e que **Im** é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam flechas, portanto:

Figura 1.19 – Diagrama de R



Fonte: Iezzy (1977, p.69-A)

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

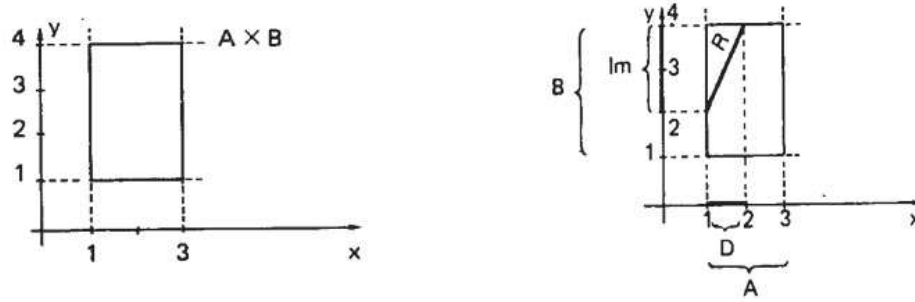
$$D = \{2, 3, 4\}$$

$$\text{Im} = \{2, 3, 4, 6\}$$

Exemplo 1.2.19. : Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$?

Utilizando a representação cartesiana

$$\text{Temos } D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \text{ e } B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 4\}$$

Figura 1.20 – Gráficos de $A \times B$ e de R 

Fonte: Iezzy (1977, p.69-A)

1.2.5 Relação Inversa

Definição 1.2.20. Dada uma relação binária R de A em B , consideremos o conjunto R^{-1} é subconjunto de $B \times A$, então R^{-1} é uma relação binária de B em A , à qual daremos o nome de relação inversa de R .

$$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

Decorre dessa definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Exemplos:

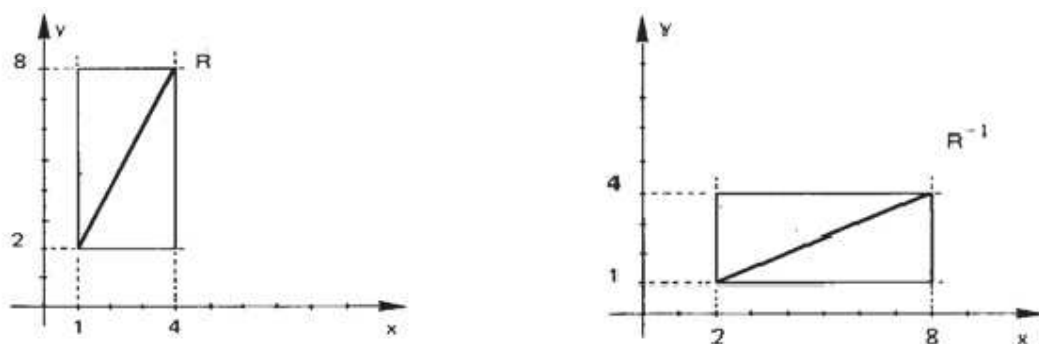
Exemplo 1.2.21. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ quais são os elementos de $R = \{(x, y) \in A \times B | x < y\}$ e de R^{-1} ?

Listando os pares ordenados de R e R^{-1} , temos:

$$R = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 7)\} \text{ e}$$

$$R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4), (7, 5)\}$$

Exemplo 1.2.22. Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} | 2 \leq y \leq 8\}$ representar no plano cartesiano as relações $R = \{(x, y) \in A \times B | y = 2x\}$ e sua inversa R^{-1} .

Figura 1.21 – Gráficos de R e R^{-1} 

Fonte: Iezzy (1977, p.71-A)

Propriedades

São evidentes as seguintes propriedades

$$1^a) D(R^{-1}) = Im(R)$$

isto é, o domínio de R^{-1} é igual a imagem de R .

$$2^a) Im(R^{-1}) = D(R)$$

Isto é, a imagem de R^{-1} é igual ao domínio de R .

$$3^a) (R^{-1})^{-1} = R$$

Isto é, a relação inversa de R^{-1} é a relação R .

1.3 Conceito de função

1.3.1 A noção de funções por meio de conjuntos

Depois de estudarmos intuitivamente uma função, vamos agora estudar essa mesma noção usando a nomenclatura de conjuntos.

Assim, vamos considerar, por exemplo, os conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

e as seguintes relações binárias de A em B :

$$R = \{(x, y) \in A \times B | y = x + 1\}$$

$$S = \{(x, y) \in A \times B | y^2 = x^2\}$$

$$T = \{(x, y) \in A \times B | y = x\}$$

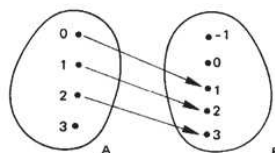
$$V = \{(x, y) \in A \times B | y = (x - 1)^2 - 1\}$$

$$W = \{(x, y) \in A \times B | y = 2\}$$

Analisando cada uma das relações temos:

- $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

Figura 1.22 – Relação R



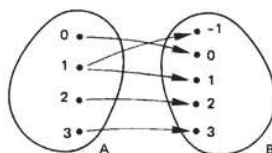
Fonte: Iezzy (1977, p.73-A)

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

Como o elemento 3 $\in A$, não existe $y \in B$ tal que $(3, y) \in R$.

- $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 3)\}$

Figura 1.23 – Relação S

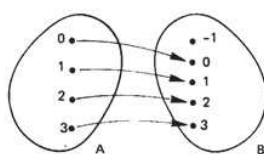


Fonte: Iezzy (1977, p. 73-A)

A cada elemento $x \in A$, com exceção do 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. Para o elemento 1 $\in A$ existem dois elementos de B, o 1 e o -1 tais que $(1, 1) \in S$ e $(1, -1) \in S$.

- $T = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Figura 1.24 – Relação T

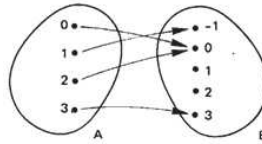


Fonte: Iezzy (1977, p. 74-A)

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in T$.

- $V = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$

Figura 1.25 – Relação V

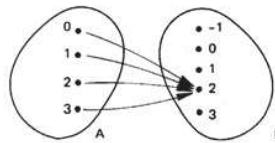


Fonte: Iezzy (1977, p. 74-A)

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$.

- $W = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

Figura 1.26 – Relação W



Fonte: Iezzy (1977, p.74-A)

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in W$.

As relações T, V, W, que apresentam a particularidade: “para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que (x, y) pertence a relação”, recebem o nome de função de A em B ou função definida em A com imagens em B.

1.3.2 Definição

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, formados de números reais, uma relação f de A em B recebe o nome de função de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

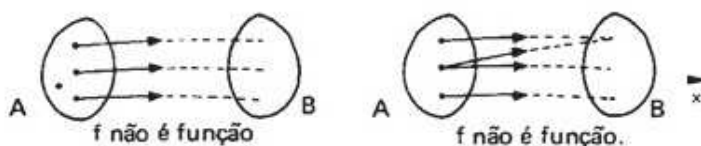
$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists! y \in B : (x, y) \in f)$$

Vejamos agora com o auxílio do esquema das flechas, ver que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser função.

- 1) é necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha.
- 2) é necessário que cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

Uma relação f , não é função se não satisfazer uma das condições acima isto é:

Figura 1.27 – Diagramas de Relações



Fonte: Iezzy (1977, p.75-A)

Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

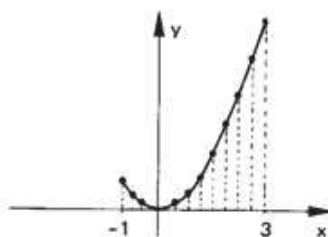
Podemos verificar através da representação cartesiana da relação de f de A em B se f é ou não função.

Para isso basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto $(x, 0)$, onde $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.

Observação: Veja que as retas são conduzidas por pontos da forma $(x, 0)$ mas apenas para x que pertença ao domínio da relação.

Exemplo 1.3.1. A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, representada abaixo é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f num só ponto.

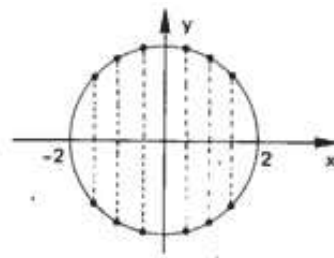
Figura 1.28 – Representação gráfica da função A em $\mathbb{R}$



Fonte: Iezzy (1977, p.75-A)

Exemplo 1.3.2. A relação f de A em $\mathbb{R}$ representada abaixo, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.

Figura 1.29 – Representação gráfica da relação A em $\mathbb{R}$

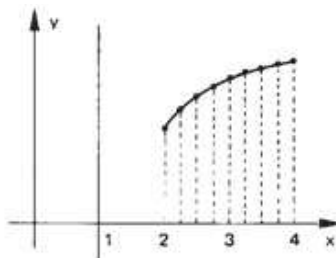


Fonte: Iezzy (1977, p.75-A)

Exemplo 1.3.3. A relação f de A em $\mathbb{R}$ representada abaixo, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ não é função de A em $\mathbb{R}$, pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(1, 0)$ não encontra o gráfico de f .

Observemos que f é função de B em $\mathbb{R}$ onde $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$

Figura 1.30 – Representação gráfica da função B em $\mathbb{R}$



Fonte: Iezzy (1977, p.76-A)

1.3.3 Notação das funções

Toda função é uma relação binária de A em B , portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$

Isto significa que, dados os conjuntos A e B , a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicarmos uma função f , definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações

$$f : A \rightarrow B \quad x \mapsto f(x)$$

$$\text{ou } A \xrightarrow{f} B \quad x \mapsto f(x)$$

é uma função que faz corresponder a cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$.

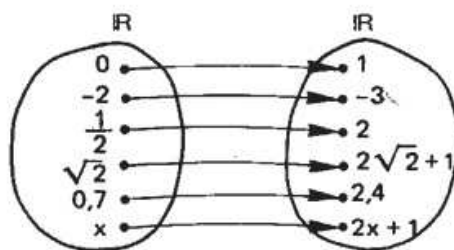
Se $(a, b) \in f$, como já dissemos anteriormente, o elemento b é chamado imagem de a pela função f ou valor de f no elemento a , indicamos:

$$f(a) = b$$

que se lê “ f de a é igual a b ”.

Exemplo 1.3.4. *Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto 2x + 1$ então*

Figura 1.31 – Diagrama de f



Fonte: Iezzy (1977, p.78-A)

a) a imagem de 0 pela função f é 1, isto é:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

b) a imagem de -2 pela função f é -3, isto é:

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$$

c) analogamente $f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$$

$$f(0,7) = 2 \cdot 0,7 + 1 = 2,4$$

1.3.4 Domínio e Imagem

Definição 1.3.5. *Considerando que toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um domínio e uma imagem.*

Chamamos de domínio o conjunto **D** dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

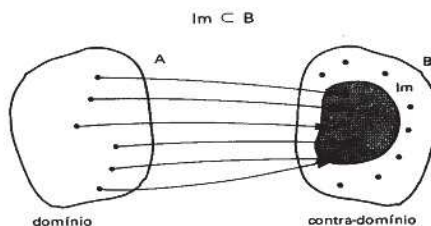
isto é,

$$D = A$$

Chamamos de imagem o conjunto **Im** dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, portanto :

Imagem é subconjunto do contradomínio

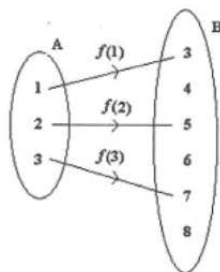
Figura 1.32 – Diagrama identificando D , Im e CD



Fonte: Iezzy(1977, p.80-A)

Exemplo 1.3.6. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e defina $f : A \rightarrow B$ por $f(x) = 2x + 1$. Em diagrama temos:

Figura 1.33 – Diagrama - Exemplo 1.3.6



Fonte: ZAHN (2009, p.68)

Observamos que:

- para $x = 1$, $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Logo $1 \xrightarrow{f} 3$, i.e., a imagem de 1 é 3 mediante f ;
- para $x = 2$, $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Logo $2 \xrightarrow{f} 5$, i.e., a imagem de 2 é 5 mediante f ;
- para $x = 3$, $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Logo $3 \xrightarrow{f} 7$, i.e., a imagem de 3 é 7 mediante f .

Disso, concluímos que o $D(f) = A = \{1, 2, 3\}$, $CD(f) = B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $Im(f) = \{3, 5, 7\} \subset B$.

Chamamos o elemento do domínio da f de variáveis independentes e os elementos da imagem da f de variáveis dependentes. Isto porque cada imagem depende do domínio, i.e., $y = f(x)$, ou seja, a variável y da imagem é função de um elemento x do domínio.

Obs.: Chamamos atenção para não confundir os símbolos f e $f(x)$: o primeiro denota a função f e o segundo denota a imagem do elemento x do domínio mediante f .

Notemos, que, feita a representação cartesiana, temos:

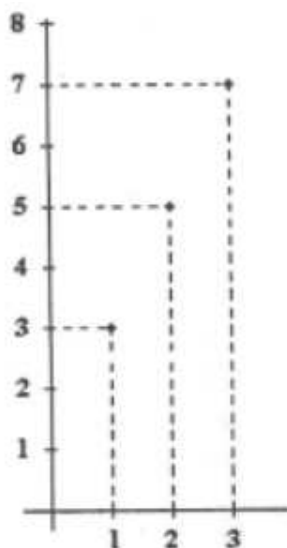
Domínio (D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f , isto é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f .

Imagem (Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f , isto é o conjuntos formado por todas as ordenadas do gráfico de f .

Em outras palavras, no gráfico cartesiano, o domínio é a projeção dos pontos sobre o eixo horizontal e imagem a projeção dos pontos sobre o eixo vertical.

Assim, feita a representação cartesiana do exemplo dado acima da função $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $f(x) = 2x + 1$, temos:

Figura 1.34 – Gráfico da função f

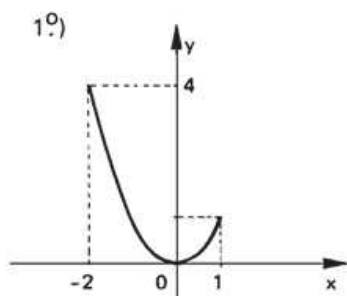


Fonte: ZAHN (2009, p.69)

Nesse caso, o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico, isto é, a projeção dos pontos sobre o eixo horizontal, da esquerda para a direita, nos dá o domínio, $D(f) = \{1, 2, 3\}$ e a imagem é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam

o gráfico de f , isto é, a projeções dos pontos sobre o eixo vertical, nos dá a imagem, $Im = \{3, 5, 7\}$.

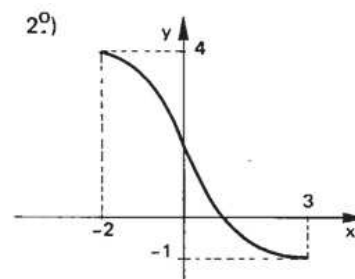
Exemplos:



Fonte: IEZZY (1977, p.81-A)

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

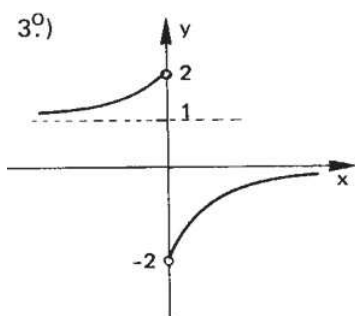
$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$$



Fonte: Iezzy (1977, p.81-A)

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

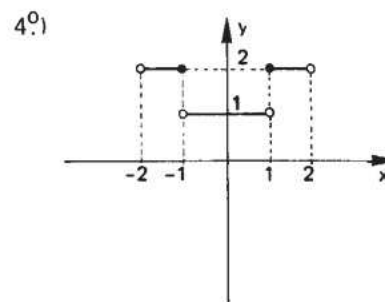
$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 4\}$$



Fonte: Iezzy (1977, p.81-A)

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0 \text{ ou } 1 < y < 2\}$$



Fonte: Iezzy (1977, p.81-A)

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$

$$Im = \{1, 2\}$$

As funções que apresentarão maior interesse na Matemática, são as funções numéricas, isto é, aquelas em que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. As funções numéricas são também chamadas funções reais da variável real.

Observemos que uma função f fica completamente definida quando são dados o seu domínio D , o seu contradomínio e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Quando nos referimos à função f e dermos apenas uma sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subentendemos que D é o conjunto dos números reais x cujas imagens são números reais, isto é:

$$x \in D \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos :

Tomemos algumas funções e determinemos o seu domínio.

- 1) $y = 2x$ notando que $2x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos: $D = \mathbb{R}$.
- 2) $y = x^2$ notando que $x^2 \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos: $D = \mathbb{R}$.
- 3) $y = \frac{1}{x}$ notemos que $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, x é real e diferente de zero; temos então $D = \mathbb{R}^*$.
- 4) $y = \sqrt{x}$ notemos que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, x é real não negativo, então $D = \mathbb{R}_+$.
- 5) $y = \sqrt[3]{x}$ notemos que $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos: $D = \mathbb{R}$.

1.4 Função Composta

Vamos considerar a seguinte situação:

Um terreno foi dividido em 20 lotes, todos de forma quadrada e de mesma área. Nestas condições vamos mostrar que a área do terreno é uma função da medida do lado de cada lote representando uma composição de funções.

Para isso indicaremos por:

- x = medida do lado de cada lote;
- y = a área de cada lote;
- z = área do terreno.

$$1) \text{ A área de cada lote} = (\text{medida do lado})^2 \Rightarrow y = x^2$$

Então, a área de cada lote é uma função da medida do lado, ou seja:

$$y = f(x) = x^2$$

$$2) \text{ Área do terreno} = 20 \cdot (\text{área de cada lote}) \Rightarrow z = 20y$$

Então, a área do terreno é uma função da área de cada lote, ou seja:

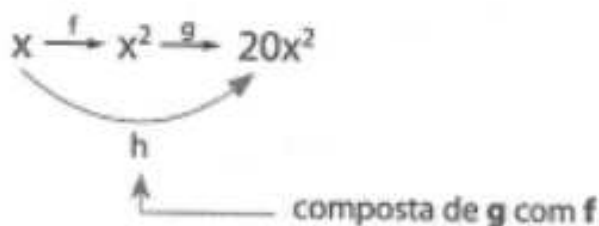
$$z = g(y) = 20y$$

Comparando 1 e 2, temos:

$$\text{Área do terreno} = 20 \cdot (\text{medida do lado})^2, \text{ ou seja } z = 20x^2, \text{ pois } y = x^2 \text{ e } z = 20y.$$

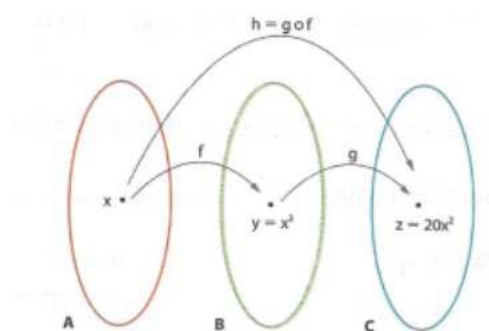
Então, a área do terreno é uma função da medida do lado de cada lote, ou seja:

$$z = h(x) = 20x^2.$$

Figura 1.35 – Composição de g com f 

Fonte: DANTE (2010, p.99)

A função $\mathbf{h}$, assim obtida, denomina-se função composta de $\mathbf{g}$ com $\mathbf{f}$ e pode ser indicada por $g \circ f$.

Figura 1.36 – Diagrama da função h 

Fonte: DANTE (2010, p.99)

Vemos que:

- A cada $x \in A$ corresponde um único y em B tal que $y = x^2$;
- A cada $y \in B$ corresponde um único z em C tal que $z = 20y$;
- A cada $x \in A$ corresponde um único z em C tal que $z = 20y = 20x^2$.

Logo existe uma função $\mathbf{h}$ (composta de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{f}$) de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{C}$ definida por $h(x) = 20x^2$. Assim, $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in D(f)$.

Obs.: $g(f(x))$: lê-se “ g de f de x ”.

Definição:

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C ; chama-se função composta de g em f à função h de A em C definida por:

$$h(x) = g(f(x))$$

para todo x em A .

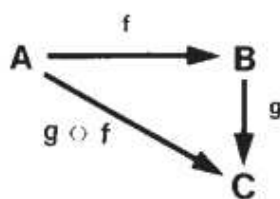
Indicaremos esta função **h** por **g o f** (lê-se: **g** composta com **f** ou **g** círculo **f**) portanto:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para todo x em A .

Podemos representar também a composta **g o f** pelo diagrama.

Figura 1.37 – Representação da função composta



Fonte: Iezzy (1977, p.179-A)

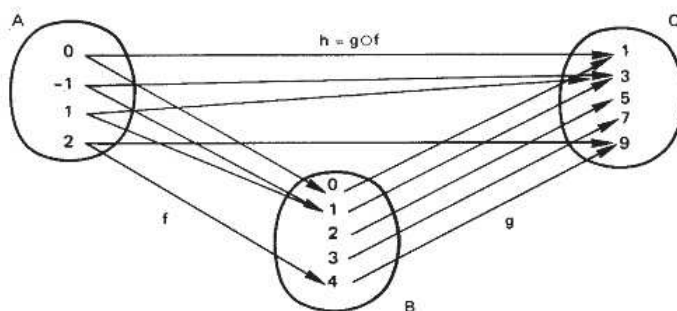
Exemplos:

Exemplo 1.4.1. Sejam os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e as funções:

f , de A em B , definida por $f(x) = x^2$

g , de B em C , definida por $g(x) = 2x + 1$

Figura 1.38 – Diagrama da função $h = g \circ f$



Fonte: Iezzy (1977, p.179-A)

Observemos, por exemplo que: $f(2) = 4$, $g(4) = 9$ e $h(2) = 9$, isto é $h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

Para obtermos a lei de correspondência da função composta $h = g \circ f$, fazemos assim: $g(f(x))$ é obtida a partir de $g(x)$ trocando-se x por $f(x)$.

No exemplo 1.4.1, temos:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2.f(x) + 1 = 2x^2 + 1.$$

Se vamos calcular $h(2)$, fazemos deste modo:

$$h(2) = 2.2^2 + 1 = 9$$

Exemplo 1.4.2. Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x+1$ e $g(x) = x^2+x+1$.

Notemos que a função composta $h_1 = g \circ f$ é definida por:

$$h_1(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$$

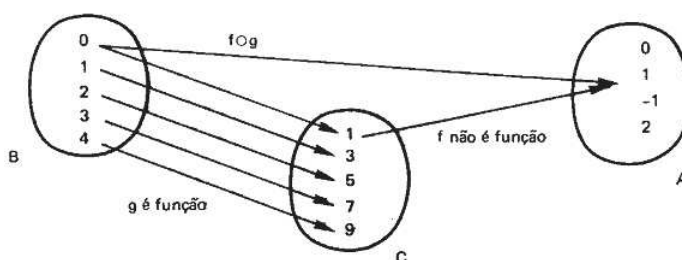
Notemos, por outro lado, que a função composta $h_2 = f \circ g$ é definida por:

$$h_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + x + 1 + 1 = x^2 + x + 2.$$

Observações:

- 1) A composta $g \circ f$ só está definida quando o contradomínio da f é igual ao domínio da g . Em particular se as funções f e g são de A em A então as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas e são funções de A em A .
- 2) Notemos que em geral, $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a composição de funções não é comutativa. Pode acontecer que somente uma das funções $f \circ g$ ou $g \circ f$ esteja definida. Assim, no exemplo 1.4.1, se tentarmos obter $f \circ g$ verificaremos que é impossível, pois: g é função de B em C mas f não é função de C em A .

Figura 1.39 – Representação das composições $f \circ g$ e $g \circ f$



Fonte: Iezzy (1977, p.179-A)

- 3) No exemplo 1.4.2, temos que as duas composições $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas, mas $f \circ g \neq g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + x + 2$$

1.5 Função sobrejetora, injetora e bijetora

1.5.1 Função sobrejetora

Definição 1.5.1. Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe pelo menos um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$

Em símbolos temos:

$$\begin{array}{c} f : A \rightarrow B \\ f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A | f(x) = y \end{array}$$

Notemos que $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(f) = B$.

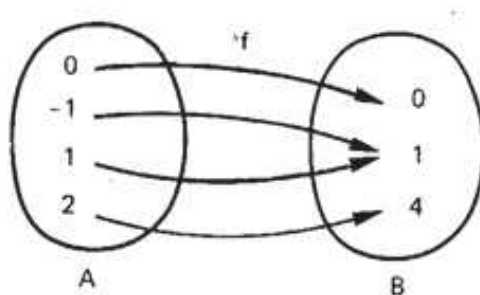
$$\begin{array}{c} f : A \rightarrow B \\ f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow Im(f) = B \end{array}$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função sobrejetora de A em B ” poderemos dizer “ f é uma sobrejeção de A em B ”

Exemplo 1.5.2. A função f de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ é sobrejetora pois, para todo elemento $y \in B$, existe o elemento $x \in A$ tal que $y = x^2$.

Observemos que para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.

Figura 1.40 – f de A em B



Fonte: Iezzy (1977, p.179-A)

Exemplo 1.5.3. A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 1\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora pois, para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $y = x^2 + 1$, bastando para isso tomar $x = \sqrt{y - 1}$ ou $x = -\sqrt{y - 1}$.

1.5.2 Função injetora

Definição 1.5.4. Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$

Em símbolos

$$\begin{array}{c} f : A \rightarrow B \\ f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}$$

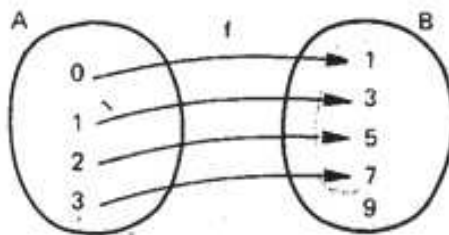
Notemos que a definição proposta é equivalente a uma função f de A em B , sendo injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

$$\begin{array}{c} f : A \rightarrow B \\ f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \end{array}$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função injetora de A em B ” poderemos dizer “ f é uma injeção de A em B ”.

Exemplo 1.5.5. A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ definida pela lei $f(x) = 2x + 1$ é injetora pois, dois elementos distintos de A têm como imagens dois elementos distintos de B . Observamos que não existem duas ou mais flechas convergindo para um mesmo elemento de B .

Figura 1.41 – Diagrama da função injetora f



Fonte: Iezzy (1977, p.187-A)

Exemplo 1.5.6. A função de $A = \mathbb{N}$ em $B = \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x$ é injetora, pois, qualquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{N}$, se $x_1 \neq x_2$ então $2x_1 \neq 2x_2$.

Exemplo 1.5.7. A função de $A = \mathbb{R}^*$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetora, pois, qualquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}^*$, se $x_1 \neq x_2$ então $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

1.5.3 Função bijetora

Definição 1.5.8. Uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.

Em símbolos

$$\begin{array}{c} f : A \rightarrow B \\ f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow f \text{ é sobrejetora e injetora} \end{array}$$

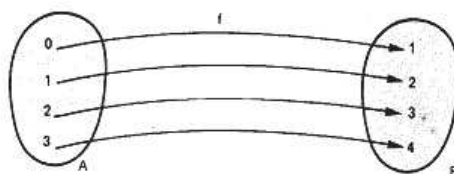
A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento y pertencente a B existe um único elemento x pertencente a A , tal que $f(x) = y$.

$$\begin{array}{c} f : A \rightarrow B \\ f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists! x, x \in A | f(x) = y \end{array}$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função bijetora de A em B ” poderemos dizer “ f é uma bijeção de A em B ”.

Exemplo 1.5.9. A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(x) = x + 1$ é bijetora

Figura 1.42 – Diagrama - Exemplo 1.5.9



Fonte: Iezzy (1977, p.188-A)

Pois, f é sobrejetora e injetora, isto é, para todo elemento $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$, tal que $y = x + 1$. Observemos que cada elemento de B converge uma só flecha.

Exemplo 1.5.10. A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ é bijetora, pois:

I. Qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 2$, basta tomarmos $x = \frac{y-2}{3}$. Logo f é sobrejetora;

II. Quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$ então $3x_1 + 2 \neq 3x_2 + 2$, isto é, f é injetora.

Observemos que existem funções que não são sobrejetoras nem injetoras.

Assim, por exemplo, a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

I. Veja que para $y=-2$ não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $-2 = |x|$, portanto f não é sobrejetora;

II. Existem 3 e -3 em $\mathbb{R}$, 3 e -3 opostos (e portanto $3 \neq -3$) tais que $|3| = |-3|$, isto é f não é injetora.

Através da representação cartesiana de uma função f podemos verificar se f é injetora ou sobrejetora ou bijetora. Para isso, basta analisarmos o número de pontos de intersecção das retas paralelas ao eixo dos x , conduzidas por cada ponto $(0,y)$ onde $y \in B$ (contradomínio de f)

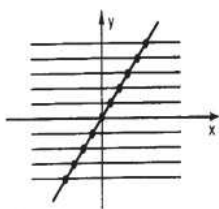
1) Se cada uma das retas paralelas horizontais cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é *injetora*.

Exemplos:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$

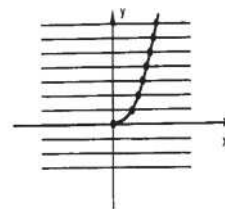
b) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$

Figura 1.43 – Gráfico 1a



Fonte: Iezzy(1977, p.188-A)

Figura 1.44 – Gráfico 1b



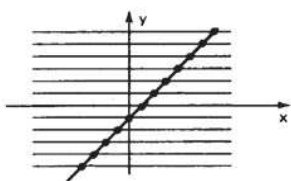
Fonte: Iezzy (1977, p.188-A)

2) Se cada uma das retas paralelas horizontais cortar o gráfico em um ou mais pontos então a função é sobrejetora.

Exemplos

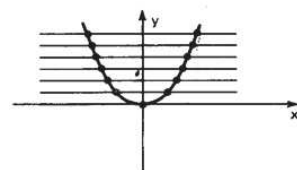
a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x-1$ b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$

Figura 1.45 – Gráfico 2a



Fonte: Iezzy (1977, p.188-A)

Figura 1.46 – Gráfico 2b



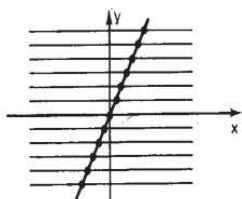
Fonte: Iezzy (1977, p.188-A)

3) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é bijetora.

Exemplos

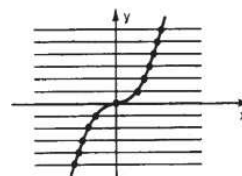
a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x$ b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot |x|$

Figura 1.47 – Gráfico 3a



Fonte: Iezzy (1977, p.188-A)

Figura 1.48 – Gráfico 3b



Fonte: Iezzy (1977, p.188-A)

Resumo:

Dada a função f de A em B , consideram-se as retas paralelas horizontais passando pelos pontos $(0, y)$ com $y \in B$:

- 1) se nenhuma reta horizontal corta o gráfico mais de uma vez, então f é injetora.
- 2) Se toda reta horizontal que passa por um ponto do domínio da função corta o gráfico, então ela é sobrejetora.
- 3) Se toda reta horizontal que passa por um ponto do domínio da função corta o gráfico apenas uma vez, então f é bijetora.

Teorema 1.5.11. *Se duas funções f de A em B e g de B em C são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também sobrejetora.*

Teorema 1.5.12. *Se duas funções f de A em B e g de B em C são injetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também injetora.*

As demonstrações dos teoremas 1.5.11 e 1.5.12 podem ser consultadas em Iezzi, 1977, p. 190-A

1.6 Função Inversa

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.

Notemos que a função é bijetora formada pelos pares ordenados $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ onde $D(f) = A$ e $Im(f) = B$.

A relação $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$, inversa de f , é também uma função, pois f é uma bijeção de A em B , isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

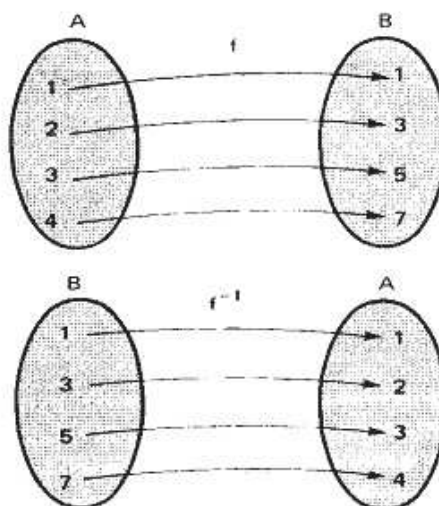
A função f^{-1} é formada pelos pares ordenados.

$$f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$$

onde

$$D(f^{-1}) = B \text{ e } Im(f^{-1}) = A.$$

Figura 1.49 – Diagramas de f e f^{-1}



Fonte: Iezzy (1977, p.193-A)

Observemos que a função f é definida pela sentença $y = 2x - 1$, e f^{-1} é definida pela sentença $x = \frac{y+1}{2}$, isto é:

1) f leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$.

2) f^{-1} leva cada elemento $y \in B$ até o $x \in A$ tal que $x = \frac{y+1}{2}$

Teorema 1.6.1. *Seja $f : A \rightarrow B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.*

A demonstração do teorema 1.6.1 pode ser consultadas em Iezzi, 1977, p.193-A e p.194-A

Definição 1.6.2. *Se f é uma função bijetora de A em B , a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos função inversa de f e indicamos por f^{-1} .*

Observações:

1) Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f , permutando-se os elementos de cada par, isto é $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

2) Pela observação anterior, temos $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

Agora, se considerarmos a função inversa de f^{-1} , teremos:

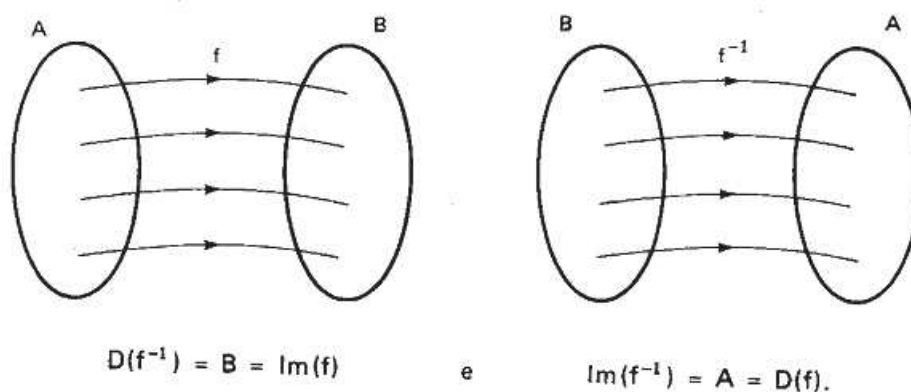
$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

isto é, a inversa de f^{-1} é a própria função f
 $(f^{-1})^{-1} = f$.

Podemos assim afirmar que f e f^{-1} são inversas entre si, ou melhor, uma inversa da outra.

3) O domínio da função f^{-1} é B , que é a imagem da função f . A imagem da função f^{-1} é A , que é o domínio da função f .

Figura 1.50 – Diagrama de f e f^{-1}



Fonte: Iezzy (1977, p.193-A)

Vimos no exemplo anterior que se a função f é definida pela sentença aberta $y = 2x - 1$, então a função inversa f^{-1} é definida por $x = \frac{y+1}{2}$.

Observemos, por exemplo, que $x = 2$ e $y = 3$ satisfazem a condição $y = 2x - 1$ e também $x = \frac{y+1}{2}$. Isto não quer dizer que o par ordenado $(2,3)$ pertença a f e a f^{-1} . De fato

$$(2,3) \in f \text{ e } (3,2) \in f^{-1}$$

As sentenças abertas $y = 2x - 1$ e $x = \frac{y+1}{2}$ não especificam quem ($x?$ ou $y?$) é o primeiro termo do par ordenado.

Ao construir o gráfico cartesiano da função f , colocamos x em abscissas e y em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

e ao representarmos no mesmo plano cartesiano o gráfico de f^{-1} , como o conjunto $f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid x = \frac{y+1}{2}\}$

devemos ter y em abscissa e x em ordem.

Afim de que possamos convencionar que:

1) dada uma sentença aberta que define uma função, x representa sempre o primeiro termo dos pares ordenados

2) dois gráficos de funções distintas podem ser construídos no mesmo plano cartesiano com x em abscissas e y em ordenadas.

Justifica-se a seguinte regra prática.

Regra prática

Dada a função bijetora f de A em B , definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1} , procedemos do seguinte modo:

1) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x , obtendo $x = f(y)$.

2) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplos

Exemplo 1.6.3. Qual é a função inversa da função f bijetora em definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I. Permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II. Expressando y em função de x :

$$x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x - 2}{3}$$

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$.

Exemplo 1.6.4. Qual é a função inversa da função f bijetora em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática, temos: $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

Resposta: é a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Teorema 1.6.5. Seja f a função bijetora de A em B . Se f^{-1} é a função inversa de f então $f^{-1} \circ f = I_A$ e $f \circ f^{-1} = I_B$.

As demonstrações dos teoremas 1.6.5 podem ser consultadas em Iezzi, 1977, p.198-A.

Teorema 1.6.6. Se as funções f de A em B e g de B em C são bijetoras então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

As demonstrações dos teoremas 1.6.6 podem ser consultadas em Iezzi, 1977, p.199-A.

Na próxima seção vamos estudar um tipo específico de função, uma bijeção.

1.7 Permutações

Permutação é o termo específico usado para designar uma bijeção de um conjunto nele mesmo. Se A indica um conjunto não vazio, denotaremos por $S(A)$ o conjunto das permutações dos elementos de A . A composição de funções é, neste caso, uma operação sobre $S(A)$, pois se f e g são permutações de A , ou seja, se $f: A \rightarrow A$ e $g: A \rightarrow A$ são bijeções, então a composta $g \circ f: A \rightarrow A$ também é uma bijeção.

A associatividade, na composição, é a propriedade que permite que funções com elementos pertencentes a A , no caso do tipo f, g, h possam ser escritas sem ambiguidade, ou seja, uma composição $(f \circ g) \circ h$ dá o mesmo resultado caso a composição que seja, $(h \circ f) \circ g$.

Assim, sabemos que vale a associatividade para essa operação e que $i_A: A \rightarrow A$ (função identidade de A), que obviamente é uma bijeção, é o elemento neutro nesse caso, posto que: $(i_A \circ f)(x) = i_A(f(x)) = f(x)$, para todo $x \in A$, o que garante a igualdade $i_A \circ f = f$. Analogamente se prova $f \circ i_A = f$. Finalmente, se f é uma permutação de A , então o mesmo acontece com f^{-1} (função inversa de f), que é uma bijeção e é o elemento inverso de f para a composição de funções, pois $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_A$.

A composição f o g , com $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, é uma permutação sobre A .

Um caso particular importante de permutações é aquele em que $A = \{1, 2, \dots, n\}$, em que $n \geq 1$. Nesse caso, em vez da notação genérica, $S(A)$, usa-se S_n para indicar o conjunto de permutações sobre A . E a própria composição de S_n em S_n , tem um nome especial: função simétrica de grau n . A análise combinatória nos ensina que existem $n!$ número de permutações que se podem construir com n elementos, permutações essas que podem ser perfeitamente colocadas em correspondência biunívoca com os elementos de S_n .

Se temos um conjunto A com dois elementos ele terá $2!$ permutações, 2 possibilidades; caso tenha 3 elementos terá $3!$ permutações, 6 possibilidades e se n elementos em A , terá $n!$ permutações, ou seja $n.(n-1).....1$ possibilidades.

Para o estudo das funções simétricas costuma-se usar a seguintes notação: se $f \in S_n$ e $f(1) = i_1, f(2) = i_2, \dots, f(n) = i_n$, então:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a permutação idêntica é denotada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Nessa notação, a ordem das colunas não importa, embora em geral se usem os elementos da primeira linha em ordem crescente. Por exemplo, em S_3 ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pois ambos tem o mesmo efeito sobre os elementos de A .

Com essa notação, a composição de duas permutações

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

se faz da seguinte maneira :

$$gof = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i_r & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_{ir} & \dots & j_n \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_r & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & r & \dots \\ \dots & j_{ir} & \dots \end{pmatrix}$$

Por exemplo, em S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Notar que, por exemplo, a imagem de 3 pela composta se obtém da seguinte maneira: $3 \mapsto 4 \mapsto 3$. Ainda de acordo com essa notação, se

$$f = \begin{pmatrix} \dots & a & \dots & r & \dots & b & \dots \\ \dots & 1 & \dots & i_r & \dots & n & \dots \end{pmatrix}$$

então:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i_r & \dots & n \\ a & \dots & r & \dots & b \end{pmatrix}$$

Por exemplo, em S_4 a permutação inversa de

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.7.1. : *Tábua de S_2*

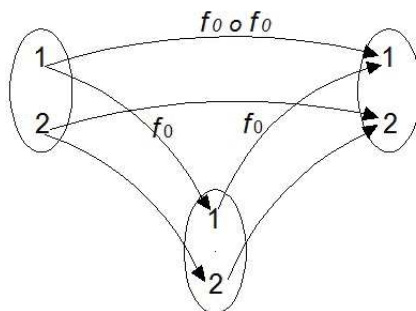
Fazendo

$$S_2 = \left\{ f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lembrando que $f_0 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ e $f_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ então:

$$\text{I) } f_0 \circ f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = f_0$$

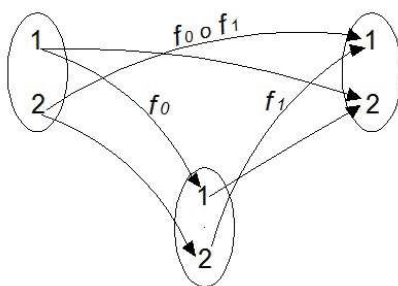
no diagrama de flechas

Figura 1.51 – Diagrama $f_0 \circ f_0$ 

Fonte: Arquivo pessoal

$$\text{II) } f_0 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = f_1$$

no diagrama de flechas

Figura 1.52 – Diagrama $f_0 \circ f_1$ 

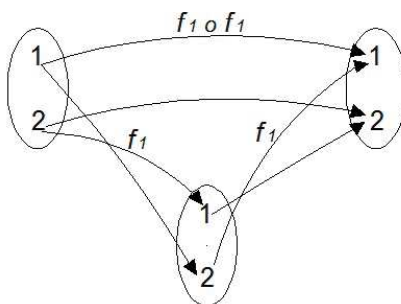
Fonte: Arquivo pessoal

Obs.: A composição de uma função f qualquer em $\mathbb{R}$ com a sua identidade é sempre igual a função f .

$$\text{III) } f_0 \circ f_1 = f_1 \circ f_0 = f_1$$

Como vale a propriedade comutativa para a composição, não é necessário realizar a composição III, já que ela equivale a mesma composição realizada em II.

$$\text{IV) } f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = f_0$$

Figura 1.53 – Diagrama $f_1 \circ f_1$ 

Fonte: Arquivo pessoal

Podemos resumir as quatro composições feitas anteriormente na seguinte tabela no S_2 , onde na primeira linha e primeira coluna temos uma composição de f_0 com f_0 e a função obtida foi f_0 , na primeira linha e segunda coluna, temos uma composição f_0 com f_1 obtendo a função f_1 , como vale a propriedade comutativa da composição, tem o mesmo resultado na segunda linha, primeira coluna e segunda coluna, segunda coluna, temos o resultado da composição f_1 com f_1 , f_0 . Desta forma temos:

Tábua S_2

$\circ$	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

Fonte: Domingues (2003, p.147)

Exemplo 1.7.2. Tábua de S_3 :

Façamos

$$S_3 = \left\{ f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Note que as funções de S_3 podem ser assim descritas:

$$f_0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \quad g_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \quad g_2 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$f_2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\} \quad g_3 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

Observemos como obter os “Produtos” da tabela no S_3

Na primeira Linha:

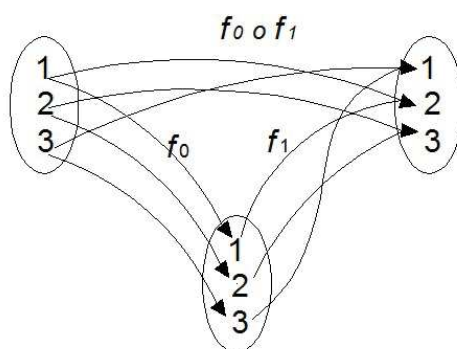
$$\text{I) } f_0 \circ f_0 = f_0$$

Como f_0 é uma função identidade, a composição de duas funções identidade é a própria identidade

$$\text{II) } f_0 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_1$$

No diagrama de flechas

Figura 1.54 – Diagrama $f_1 \circ f_1$



Fonte:Arquivo pessoal

Note que, a composição de qualquer função com a função identidade é igual a ela mesma, pois na função identidade, o elemento do domínio é igual ao elemento da imagem, ou seja, f_0 é elemento neutro.

Assim, temos:

$$\text{III) } f_0 \circ f_2 = f_2$$

$$\text{IV) } f_0 \circ g_1 = g_1$$

$$\text{V) } f_0 \circ g_2 = g_2$$

$$\text{VI) } f_0 \circ g_3 = g_3$$

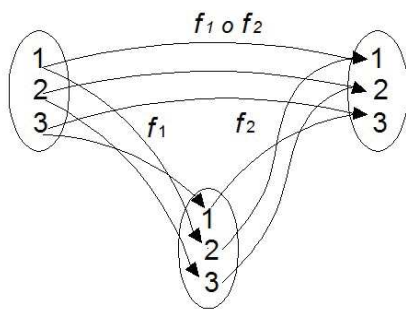
Na segunda linha

$$\text{I) } f_1 \circ f_0 = f_1 \text{ (análogo a primeira linha)}$$

$$\text{II) } f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = f_0$$

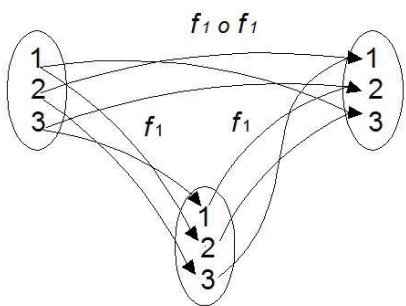
No diagrama de flecha

Figura 1.55 – Diagrama $f_1 \circ f_0$



Fonte:Arquivo pessoal

Figura 1.56 – Diagrama $f_1 \circ f_1$



Fonte: Arquivo pessoal

De maneira análoga se obtêm os demais “produtos”. Feito isso e colocando esses produtos numa tábua, o resultado será o seguinte:

Tábua do S_3

Quadro 06 - Tábua S_3

O	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_0	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_1	f_1	f_2	f_0	g_3	g_1	g_2
f_2	f_2	f_0	f_1	g_2	g_3	g_1
g_1	g_1	g_2	g_3	f_0	f_1	f_2
g_2	g_2	g_3	g_1	f_2	f_0	f_1
g_3	g_3	g_1	g_2	f_1	f_2	f_0

Fonte: Domingues (2003, p.148)

Vale observar também que esta tábua não é simétrica em relação a diagonal. Por exemplo $f_2 \circ g_3 = g_1$ ao passo que $g_3 \circ f_2 = g_2$. Entretanto, se considerarmos $C_3 = \{f_0, f_1, f_2\}$, ele é simétrico em relação a diagonal principal sendo possível todas as propriedades válidas para a tábua.

Finalmente é importante observar ainda na tábua que $f_1^2 = f_1 \circ f_1 = f_2$, $g_1 \circ f_1 = g_2$ e $g_1 \circ f_1^2 = g_1 \circ (f_1 \circ f_1) = g_3$ e que portanto

$$S_3 = \{f_1^0, f_1, f_1^2, g_1, g_1 \circ f_1, g_1 \circ f_1^2\}$$

Ao substituírmos f_2 por f_1 e g_1 por g_2 o g_3 , obteremos uma alternativa equivalente de escrever os elementos da permutação S_3 . Essa observação é importante porque mostra que é possível escrever (“gerar”) todos os elementos da permutação usando apenas dois deles.

Mostraremos agora como fica a tábua da permutação S_3 com essa forma de escrever seus elementos.

Evidentemente é só trocar, na tábua já construída, f_2 por f_1^2 , g_2 por $g_1 \circ f_1$ e g_3 por $g_1 \circ f_1^2$:

Tábua S_3 em função de dois dos seus elementos:

Quadro 07 - Tábua S_3 em função de dois elementos, f_1 e g_1 .

O	f_1^0	f_1	f_1^2	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$
f_1^0	f_1^0	f_1	f_1^2	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$
f_1	f_1	f_1^2	f_1^0	$g_1 \circ f_1^2$	g_1	$g_1 \circ f_1$
f_1^2	f_1^2	f_1^0	f_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$	g_1
g_1	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$	f_1^0	f_1	f_1^2
$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$	g_1	f_1^2	f_1^0	f_1
$g_1 \circ f_1^2$	$g_1 \circ f_1^2$	g_1	$g_1 \circ f_1$	f_1	f_1^2	f_1^0

Fonte: Domingues (2003, p.148)

No capítulo 4 , vamos vivenciar todas estas composições e construção da tábua S_3 na prática utilizando um material concreto e manipulável, a Caixa de Funções.

2 MATERIAL CONCRETO E MANIPULÁVEL

Este capítulo traz uma abordagem acerca da utilização de material concreto e manipulável no ensino da matemática com algumas considerações sobre o uso destes ao longo da História no Ensino de Matemática e uma breve reflexão sobre a importância da compreensão de que os materiais concretos e manipuláveis funcionam como recurso facilitador da prática docente e se constituem como uma alternativa que fortifica o processo de ensino e aprendizagem, promovendo ao aluno uma nova forma de lidar com o conhecimento matemático, tornando-o mais participativo, crítico e auto avaliativo.

2.1 Emprego de materiais concretos e manipuláveis no ensino de matemática

A atual sociedade tecnológica, vivencia transformações constantes e consideráveis, responsáveis por acarretarem grandes impactos na maneira de se relacionar e no Universo do conhecimento, acarretando novos desafios no âmbito escolar.

Já não existe mais espaço para a escola tradicional do passado, que foi surpreendida com a implantação de novas ferramentas cujo objetivo primordial é a compreensão e aplicação do conhecimento de forma integral, ou seja, o conhecimento passa a ser concebido como um todo e não fragmentado por disciplinas específicas.

No entanto, apesar de todas essas mudanças, ainda é comum verificarmos que o processo ensino-aprendizagem de matemática, caracteriza-se por uma metodologia arcaica e muitas vezes não condizente com a realidade do aluno, onde prioriza-se o abstrato, o uso de processos mecânicos, como regras, fórmulas e cálculos, em detrimento ao uso de materiais atrativos e concretos que contribuiriam sobremaneira para a formação do aluno participativo e não meros repetidores, além de, efetivamente, tornar o aprender significativo e condizente com a realidade na qual estão inseridos. A proposta de novos recursos, como o uso de materiais concretos, objetiva a não mecanização do ensino da matemática e a memorização temporária e atende a um dos requisitos básicos da matemática, que é a interpretação, compreensão e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Como citado anteriormente, o material concreto e manipulável é um recurso em matemática que pode contribuir muito para redução do desinteresse dos alunos pelos conteúdos matemáticos e ou a desmistificação que a mesma é uma Disciplina complicada e de difícil aprendizagem. Segundo Lorenzato (2010), o material manipulável, que o mesmo denominou como material concreto, é um instrumento importante pois proporciona um maior envolvimento dos alunos na sala de aula, desenvolvendo assim várias competências

e no que se refere a capacidade de abstrair, generalizar, projetar e transcender, sendo que o professor torna-se o orientador do processo ensino-aprendizagem e passa a direcionar a formalização do conhecimento e a realização de tarefas.

Desde 1998, encontramos, por exemplo, em D'Ambrósio, críticas as aulas tradicionais de matemática, onde o professor tinha como principal recurso a lousa utilizada em aulas expositivas, cujos exercícios de fixação eram primordiais para a apreensão dos conteúdos. De 1998 até os dias atuais, grandes avanços tecnológicos ocorreram, vivemos a era da robotização, da informática, das máquinas e, no entanto, a mesma aula expositiva, composta de exercícios de fixação continuam a vigorar nas escolas, sendo que não se constitui uma prática comum o uso de outros recursos pedagógicos, como os materiais concretos, para a melhoria do processo ensino-aprendizagem.

Por este motivo, ao lidarmos com essa nova geração que vivencia os avanços tecnológicos de forma constante e contínua, sem uma proposta pedagógica atrativa, é comum percebermos que as aulas tornam-se cansativas e os alunos desinteressados, pois os métodos tradicionais de ensino não promovem a participação, os questionamentos e, principalmente, a atuação do aluno como protagonista do processo ensino-aprendizagem.

Para corroborar este pensamento, recorremos a Medeiros (2005) que afirma:

No ensino tradicional da matemática não tem havido, em geral, um respeito pela criatividade do aluno. Na prática de ensino de um grande número de professores, alheios à preocupação com a criatividade matemática, há um desencontro entre esta e a forma metódica como as ideias parecem surgir àqueles em suas exposições de sala de aula. (Medeiros 2005, p. 20)

Dessa forma, observamos que os problemas relacionados ao processo ensino-aprendizagem de matemática necessitam de soluções a curto prazo, que para Lins (2005) poderia começar com a forma tradicional utilizada pelos professores no trabalho com os conteúdos matemáticos, sendo que para este autor aulas significativas poderiam ser concebidas a partir do uso de materiais concretos e exemplos práticos do cotidiano do aluno.

Medeiros (2005), concorda com Lins (2005) e acrescenta que o uso do material concreto nas aulas de matemática proporciona uma maior aproximação entre o professor e o aluno, além de uma prática na qual o aluno passa a construir seu próprio conhecimento, discutindo coletivamente os temas abordados.

Nesta perspectiva, consideramos que o trabalho pedagógico, por meio de materiais concretos, é um grande instrumento para mudanças no ensino e aprendizagem de matemática, pois o processo de ensino-aprendizagem da disciplina na atualidade, como abordado nos parágrafos anteriores, não apresentam bons resultados e aproveitamento significativo do que foi ensinado.

Assim, verificamos que vários pesquisadores, destacam a importância e a eficácia da utilização de material concreto para aprendizagem do ensino de matemática.

2.2 Considerações acerca das Definições e Uso de Materiais Concretos no Ensino Matemático

Ao tentarmos definir o que pode ser denominado como material concreto, encontramos em Nacarato (2005, p.3), que os mesmos podem ser entendidos como objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais cuja aplicação ocorre no dia-a-dia ou objetos que são usados para representar uma ideia.

Pautados nesta perspectiva, podemos então definir materiais concretos como objetos, desenvolvidos e/ou criados para trabalhar com diversos conceitos matemáticos ou de outras áreas-disciplinas, produzidos pelos próprios alunos (orientados pelo professor) ou pelo próprio professor, com vistas a facilitar a compreensão e o desenvolvimento do aluno, tornando o processo de aprendizagem uma construção significativa onde o aluno passa a ser o sujeito principal deste processo e o professor um mediador-orientador.

Ainda sobre a importância da utilização dos materiais concretos, recorremos a Lorenzato (2010), que em consonância com a nossa linha de pensamento, considera que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/ aluno/ conhecimento no momento em que um saber está sendo construído. Assim sendo o professor deve ter um cuidado especial quando for utilizar esse recurso. Tendo em vista a posição ocupada pelo professor nesta situação, este precisa investir em formação de professor de matemática tanto inicial como continuada, que frise este aspecto.

2.3 Um Breve Olhar Sobre o Uso de Materiais Concretos no Ensino de Matemática ao Longo da História

Data de longa data, conforme Lorenzato (2010), o uso de materiais concretos como recursos para facilitar a aprendizagem de crianças e jovens. Platão (427-347 a.C.), considerado por muitos estudiosos como o primeiro pedagogo, acreditava que a educação das crianças até os dez anos de idade deveria acontecer por meio da ludicidade e de esportes, através de materiais concretos, seguida pela fase da música, proporcionando assim interesse e motivação para o estudo da Matemática. Aristóteles (384-322 a.C.), o grande discípulo de Platão, filósofo e matemático, dedicou-se primordialmente à Lógica e utilizou experiências concretas para explicar os fenômenos naturais.

Portanto, ao longo da história, vários educadores já acreditavam na utilização dos materiais concretos como importantes instrumentos mediadores da aprendizagem. Dentre

esses educadores, Comenius (1592–1670), considerado o pai da didática e defensor da escola aberta a todos, onde a sala de aula deveria ser um ambiente de associação entre a teoria e a prática, em que os alunos buscariam na natureza a referência de aprendizagem, tendo como seguidor Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), é citado por Lorenzato (2010), como um grande defensor de aulas práticas onde a educação deveria partir da percepção de objetos concretos.

Ainda de acordo com Lorenzato (2010), outros educadores ao longo da história acreditavam e defendiam o uso de materiais concretos na eficácia do processo ensino-aprendizagem. Dentre estes, podemos citar Locke (1632-1704), que acreditava que só se aprendia pela experiência, tentativa e erro; Herbart (1776-1841), que entendia o funcionamento da mente a partir de representações de imagens ou ações praticadas pelo aprendiz; Dewey (1859-1952), que defendia a união da teoria e prática, por meio de questionamentos e reflexão; Claparède (1873-1940), que via nos jogos e brincadeiras, recursos para motivarem e despertarem, no aluno, o interesse pelos estudos e Cuisenaire (1891-1976), que a partir das dificuldades de alunos em aprender Matemática, criou um material para trabalhar frações, conhecido por Barra Cuisenaire e, depois, batizado de Material Cuisenaire.

Na atualidade, encontramos nos documentos oficiais que regem a educação brasileira, uma grande preocupação com o uso de jogos e materiais manipuláveis como metodologia de ensino e tendência em educação matemática a favorecer o ensino significativo. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394/1996, traça um roteiro para identificação da maneira adequada de ensinar Matemática procurando, desenvolver no educando dentre outras habilidades, a autonomia e a reflexão, preparando-os para uma sociedade complexa. Dentre esses documentos, destacam-se os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais); PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio); PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais); e OCEM (Orientações Curriculares para o Ensino Médio).

É importante ressaltar que a utilização desses materiais não requer a abolição de outras metodologias de ensino, pois nenhum material é válido por si só, o professor precisa ter a clareza que esses materiais são recursos que devem ser aliados à uma prática pedagógica eficiente e objetiva.

2.4 Materiais Concreto Como Recurso Facilitador da Prática Docente

Tendo em vista que o processo ensino-aprendizagem de matemática traz no seu cerne a concepção de que é uma disciplina difícil e cansativa, tanto por parte dos alunos quanto dos professores, a procura por novas práticas, tendências e metodologias do ensino de matemática deve se tornar comum entre os professores dessa disciplina. Portanto, a

diversidade de materiais concretos elaborados com a finalidade de melhorar a aprendizagem do indivíduo é aceitável para enriquecer as aulas de matemática, estimular a criatividade dos alunos e tornarem-se menos exaustivas, não como uma mistificação onde prevaleça a crença dos mesmos serem a solução para sanar todas as dificuldades de aprendizagem na área de matemática.

Assim, os materiais concretos por si só não ensinam Matemática, torna-se premente a necessidade do professor-mediador, e para isso é preciso que o professor que se disponha a fazer uso dessas práticas de ensino, faça um estudo dos materiais didáticos que pretendem utilizar, observando não apenas o modo de usar dos referidos materiais, mas sim o processo de criação dos mesmos e em que condições e quais assuntos podem ser explorados com o uso deste ou de outro material. Sem dúvida, isso dará maior segurança ao professor, fazendo com que seus alunos possam tirar um maior proveito dessas aulas.

Importante ressaltar que o uso dos materiais concretos, aumentam o leque de possibilidades a serem trabalhadas, não apenas com conceitos matemáticos, mas também com conceitos sociais, como o convívio, a colaboração do aluno com os seus colegas, o respeito ao próximo, convívio com ganhos e perdas, entre outro e que o material a ser utilizado com os alunos deve ser escolhido considerando a idade, o grau de desenvolvimento, nível de aprendizado, bem como aliando o lúdico ao desafio, promovendo assim o desenvolvimento dos mesmos.

Reflexões mais profundas acerca do material a ser utilizado são necessárias, uma proposta que o justifique, pois o processo inverso pode ocorrer, podem continuar a ser meros repetidores, ocasionando resultados negativos, afinal os conceitos matemáticos não estão em nenhum dos materiais, mas sim na abstração do aluno durante o processo, no significado adquirido durante na ação interiorizada do mesmo.

Enfim, o objetivo “ensinar matemática”, requer constantes reflexões do professor de matemática sobre sua prática pedagógica, proporcionando ao aluno um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando e o material concreto com as considerações supracitadas poderá ser um recurso com o intuito de auxiliar a efetivação deste objetivo. Entretanto, entre os professores de matemática, ainda existe muitas divergências de opiniões em relação a utilização do material concreto, gerando uma certa confusão acerca dos princípios teóricos e prática no uso de material concreto. Para que isso possa ser solucionado, existe a necessidade de compreensão dos docentes sobre a utilização de materiais concretos na aprendizagem, onde se possa visualizar que ao oferecerem a oportunidade de uma aprendizagem significativa ocorrerá, conseqüentemente, um maior interesse e envolvimento por parte dos mesmos. Ademais, os materiais concretos proporcionam reflexão e estabelecem relações lógicas pelos alunos. Ou seja, proporcionam além do desafio, o pensamento reflexivo dos alunos, que podem ser utilizados em diversas situações cotidianas, levando a matemática a contribuir no estímulo do senso de iniciativa,

além de auxiliar em melhor interação entre professor e aluno, o que tornará as aulas produtivas e prazerosas.

3 CAIXA DE FUNÇÕES

Este capítulo apresenta o processo de construção da Caixa de Funções, um material concreto e manipulável, descrevendo inicialmente materiais e ferramentas utilizadas com suas respectivas quantidades e dimensões e, em seguida, o passo a passo desta construção, compreendendo também os registros fotográficos em cada passo até o produto final.

Há de ressaltar que o passo a passo da construção da parte externa de uma caixa será realizado seis vezes para que possa compreender as seis permutações possíveis com três itens, contudo, para executar algumas das questões sugeridas nas atividades propostas no capítulo seguinte faz-se necessário a construção da parte externa de mais três caixas, sendo especificada a parte interna destas três caixas após o fim do 5º passo.

Além das descrição dos primeiros passos até o produto final, Caixa de Funções, relatamos os erros e acertos, bem como as conclusões obtidas a partir das experiências envolvendo alguns materiais testados e descartados com suas respectivas justificativas, visando economia, praticidade e aproveitamento deste material que esperamos proporcionar maior assimilação e construção de conceitos envolvendo Funções.

Ainda no que concerne a construção deste instrumento sugere-se maior atenção para os passos listados e observação dos erros e acertos objetivando a eficácia do material, que poderá ser trabalhado em sala de aula em grupo, onde cada grupo utilizará uma caixa devidamente identificada pelo professor de acordo com a necessidade do conteúdo abordado. Desta forma esperamos possibilitar aos grupos uma análise tanto dos aspectos qualitativos quanto os quantitativos de Funções.

Na verdade, nosso trabalho pode ser interpretado como um exemplo prático das ideias teóricas e propostas curriculares organizadas no capítulo 1 e, para efetuarmos a análise dos dados, dividimos todas as informações em duas categorias.

(I) CONSTRUÇÃO

(II) ERROS E ACERTOS

3.1 Construção

Desde a ideia inicial até a construção final da caixa de funções, a mesma passou por muitas transformações. As primeiras ideias e conversas, nos levaram a pesquisar sobre a utilização e a viabilidade de materiais com custo reduzido e prático que proporcionassem o uso da caixa em sala de aula de forma adequada e objetiva, sendo considerados itens

primordiais: o fácil acesso a esses materiais e a compreensão do produto final, de forma clara e precisa.

Portanto, agora, descreveremos os passos seguidos até a construção da Caixa de Funções que foi o nosso “produto” do trabalho. Inicialmente, iremos elencar quais os materiais utilizados para a construção de seis caixas e as ferramentas necessárias para a execução do trabalho, nos quadros 08 e 09 respectivamente.

Quadro 08 - Material utilizado para confecção de uma caixa de função.

MATERIAL UTILIZADO	QUANTIDADE
Placas de papelão 51x55cm	6
Luva PVC soldável 3/4”	36
Conduíte corrugado amarelo 3/4”	2m
Conduíte corrugado preto 3/4”	2m
Conduíte corrugado verde 3/4”	2m
Bisnaga de cola quente	3
Tubo grande de cola branca	1
Tinta acrílica preto	1
Tinta acrílica verde	1
Tinta acrílica amarela	1
Tinta acrílica Branca	1
Bolinha de PVC	18
Placa de isopor	1/2
Copinho de doce para festa	18
Spray prata	2

Fonte: Arquivo pessoal

Quadro 09 - Ferramentas utilizadas para a confecção das caixas.

FERRAMENTAS UTILIZADAS
Tesoura
Estilete grande
Estilete pequeno 3/4”
Compasso
Régua de 50cm
Lápis preto
Pistola de cola quente

Fonte: Arquivo pessoal

Agora, com os materiais descritos na quadro 08 e as ferramentas da quadro 09 começaremos a construção da Caixa de Funções com os sete passos elencados a seguir.

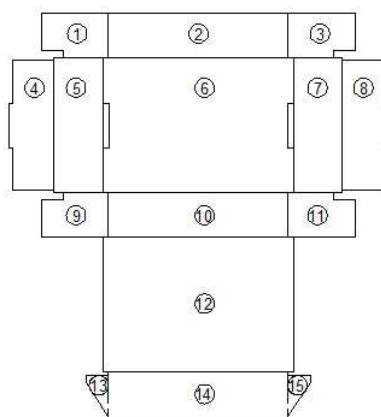
PASSO 1 - TRAÇAR A CAIXA NO PAPELÃO

Inicialmente, com uma placa de papelão, no mínimo, 51cm x 55cm, utilizando régua e lápis traçaremos como na figura 01 identificado:

- 3 retângulos de dimensão 6cm x 24,5cm, cujos números correspondentes são: 2, 10 e 14.
- 2 retângulos 25,5cm x 18cm, cujos correspondentes são 6 e 12.
- 2 retângulos 6cm x 18cm, cujos números correspondentes são: 5 e 7.
- 2 retângulos 6cm x 17,5cm, com um encaixe sobressaindo de 0,5cm x 6cm, cujos correspondentes são: 4 e 8.
- 4 retângulos 9cm x 6cm, retirados na extremidade externa um retângulo 1cm x 3cm, cujos números correspondentes são: 1, 3, 9 e 11.
- 2 triângulos retângulos cujos catetos medem: 3cm e 5cm, tendo como correspondentes: 13 e 15.
- 2 retângulo vazados 0,5cm x 6cm, no retângulo 6

É possível observar a seguir, na figura 3.1, um esboço da caixa de funções planificada com todas as suas partes e suas respectivas posições elencadas acima.

Figura 3.1 – Esboço da caixa para ser traçado no papelão 51cm x 55cm

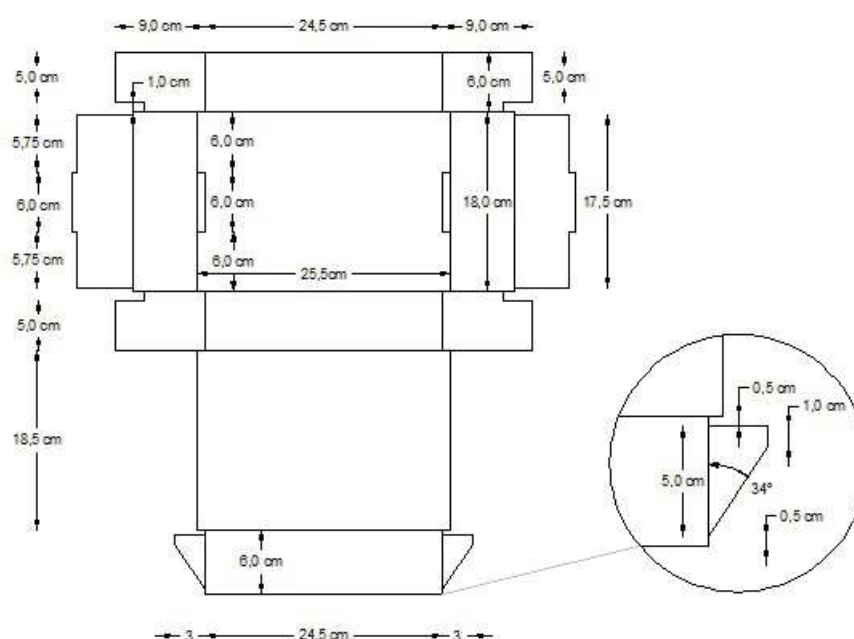


Fonte: Arquivo pessoal

Esta numeração das partes do esboço será a base da condução desta construção pois esta definição nos possibilitará uma maior clareza mediante a descrição da confecção da caixa de funções.

Tendo em vista a quantidade de informações descritas no início deste primeiro passo, a figura 3.2, nos possibilita visualizar os itens descritos para serem traçados no papelão com suas respectivas. Assim, temos na figura 3.2 a placa de papelão traçada conforme o esboço da figura 3.1.

Figura 3.2 – Esboço da caixa de funções planificada com as dimensões identificadas

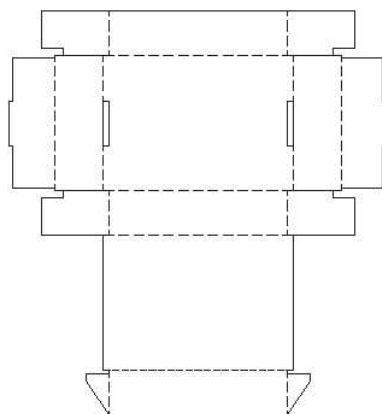


Fonte: Arquivo pessoal

Há de se ressaltar que algumas linhas do traçado são feitas para serem dobradas e as linhas comuns cortadas, como identificado na figura 3.3.

Agora, utilizando a figura 3.1, base para se direcionar durante esta confecção da caixa de funções e a figura 3.2 com as dimensões especificadas, traçaremos a caixa considerando os traços da figura 3.3, pois estes especificarão dobras e cortes como segue.

Figura 3.3 – Esboço da placa de papelão com os traçados de corte e dobra

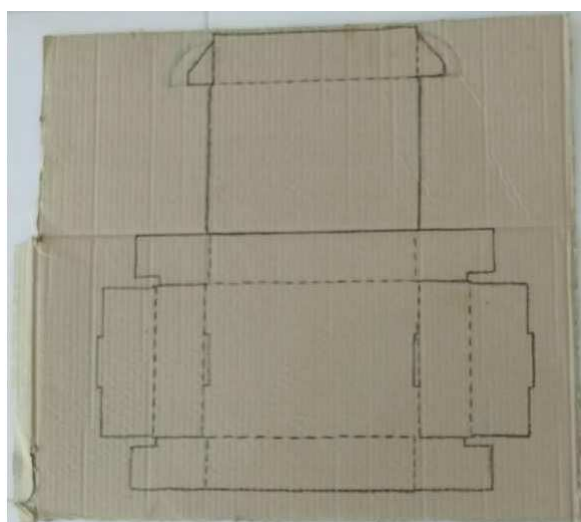


Fonte: Arquivo pessoal

Há de ressaltar que os retângulos vazados contidos no retângulo 6, estão localizados no centro do lado cuja medida é 18cm, ou seja, esse lado tem 6cm acima e 6cm abaixo destes, e distam desse mesmo lado 0,5cm. Além disso também possuem traços contínuos o que indicam cortes com o estilete para que sejam vazados e permitam o encaixe do lado correspondente.

Após traçar as dimensões identificadas na figura 3.2, tendo como base o esboço da figura 3.1 e fazendo as linhas contínuas e tracejadas, identificadas na figura 3.3 em uma placa de papelão, obtemos a figura 3.4.

Figura 3.4 – Placa de papelão com os traçados corte e dobra



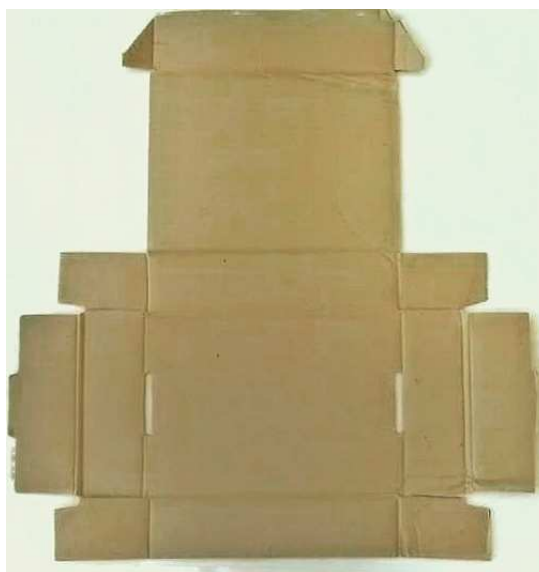
Fonte: Arquivo pessoal

Agora, utilizando um estilete largo com lâmina de 13mm, principalmente se o papelão for de espessura mais grossa, por este tipo de estilete ser o indicado para facilitar

o trabalho de corte de maneira segura e prática, faremos os cortes necessários. Assim, iniciamos os cortes indicados no gabarito da Figura 3.3.

Entretanto, o corte com o estilete deve ser preciso e com uma certa suavidade para somente riscar o papelão até a metade de sua espessura, evitando danificar o papelão através da força imprimida para atravessar o papelão. Logo após marcar os locais de corte, e numa segunda utilização do estilete no mesmo lugar já riscado, completa-o atravessando a folha de papelão, fechando assim todo o traçado contínuo identificado na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Placa de papelão com os cortes e dobras



Fonte: Arquivo pessoal

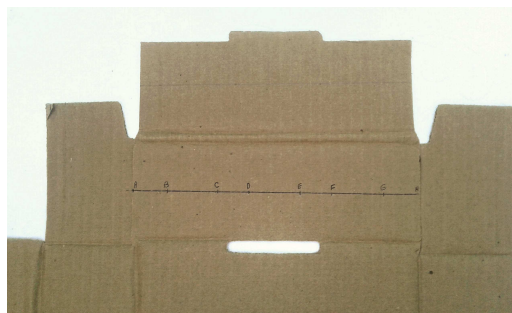
PASSO 2 - TRAÇAR AS CIRCUNFERÊNCIAS

I. NOS RETÂNGULOS 5 E 7

Nos retângulos 5 e 7, traçamos três circunferências paralelas e congruentes de diâmetro 3,3cm em cada retângulo utilizando régua, compasso e lápis distantes dos lados do retângulo e entre elas horizontalmente, ou seja do lado de 6cm, 2cm. Do lado 18cm, elas distam 1,3cm acima e abaixo da mesma.

Para traçar estas circunferências traçamos uma reta dividindo o retângulo 6 de dimensões 6cm x 18cm em dois de 3cm x 18cm. Em seguida, do início da reta fixamos a régua no zero no ponto A e marcamos em 2,0cm (ponto B), 5,3cm (ponto C), 7,3cm (ponto D), 10,6cm (ponto E), 12,6cm (ponto F), 17,9cm (ponto G) gerando a sequência de segmentos $AB = 2,0\text{cm}$, $BC = 3,3\text{cm}$, $CD = 2,5\text{cm}$, $DE = 3,3\text{cm}$, $EF = 2,5\text{cm}$, $FG = 3,3\text{cm}$ e obtemos os traçados como na figura 3.6.

Figura 3.6 – Retângulo 5cm os pontos A, B, C, D, E, F e G



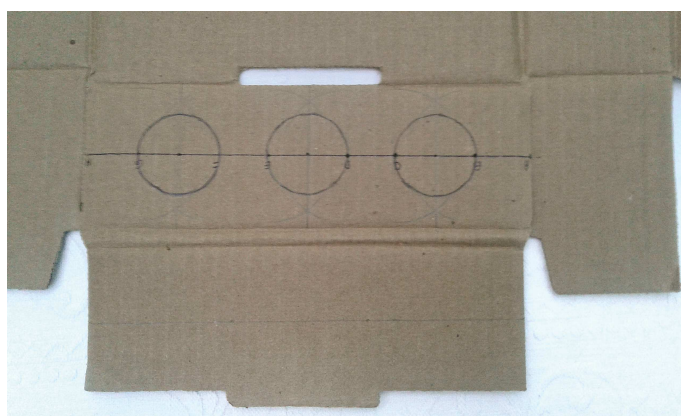
Fonte: Arquivo pessoal

Agora, traçaremos a mediatriz do segmento BC. Para encontrar o centro da circunferência cujo diâmetro é BC. Assim, fixamos a ponta seca do compasso no ponto B e com a abertura maior que a metade marcamos um arco acima e abaixo deste segmento. Da mesma forma, fixamos a ponta seca do compasso no ponto C e traçamos um arco acima e abaixo do segmento BC até se cruzem.

Com a régua traçamos uma reta passando por esses dois pontos obtidos e encontramos o ponto médio do segmento BC. Em seguida, com a ponta seca do compasso no centro de BC e raio, traçamos a circunferência cujo diâmetro é BC.

Repetimos o processo realizado no segmento BC nos segmentos DE e FG, encontrando as três circunferências paralelas e congruentes. Note que a distância entre os centros de duas circunferências sucessivas é aproximadamente 5,3cm.

Figura 3.7 – Retângulo 5 com as circunferências de diâmetro BC traçadas



Fonte: Arquivo pessoal

Há de ressaltar que apesar da luva soldável ter 3,35cm de diâmetro, ao fazer o corte de uma circunferência 3,3cm de diâmetro permite um encaixe adequado da mesma.

É perceptível que ao somarmos o diâmetro da circunferência à medida acima e abaixo dela, teoricamente, corresponde a 5,9cm de altura e não 6cm, porém quando se trata de cortes em papelão pode haver uma discreta diferença que não causará impactos ao objetivo almejado neste instrumento do trabalho.

Em seguida, análogo ao retângulo 5, construímos as circunferências no retângulo 7.

II. NOS RETÂNGULOS 4 e 8

Com o intuito de sobrepor mais adequadamente, ou seja, para não ficar um retângulo esmagando o outro na parte interna e não gerar elevações nos vértices da caixa em que ocorreram dobras fez-se necessário reduzir os lados paralelos maiores dos retângulos 4 e 8. Assim sendo, os retângulos 4 e 8 possuem dimensões 6cm x 17,5cm.

Contudo, ao dobrar a parte tracejada que une os retângulos 4 e 5 há uma redução na dimensão 6cm que a depender da espessura do papelão e da espessura da dobra feita, pode variar entre 2cm a 5cm. Desta forma, precisando reduzir esta diferença superior para que as circunferências traçadas no retângulo 4 coincidam com as traçadas no retângulo 5 e, também, o retângulo 7 coincida com o retângulo 8.

Há de se ressaltar, que o retângulo 6cm x 0,5cm nas extremidades dos retângulos 4 e 8 se encaixarão nas partes vazadas do retângulo 6.

No papelão utilizado para caixa neste trabalho, há uma dobra discretamente mais larga, observando-se na mesma uma diferença de 0,5cm. Desta forma, dividimos, com lápis e régua, primeiramente o retângulo 4 de dimensões 6cm x 17,5cm em dois, cujas dimensões são 3,5cm x 17,5cm e 2,5cm x 17,5cm, correspondentes, respectivamente, a parte próximo da tampa e a parte do fundo da caixa.

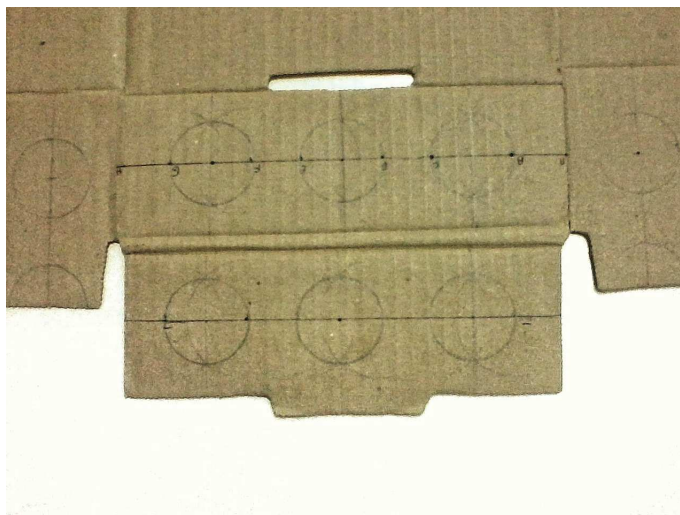
Neste segmento, AH, traçado do início da reta, fixamos a régua no zero, onde marcaremos o ponto A (ponto 0), o Ponto B distante 1,75cm de A, o ponto C distante 3,3cm de B, o ponto D distante 2cm de C, o ponto E distante 3,3cm de D, o ponto F distante 2cm de E, o ponto G distante 3,3cm de F e o ponto H, fim do segmento AH, estará distante 1,7cm de G.

Agora, repetimos o processo do 3º passo para calcular a mediatriz dos segmentos BC, DE e FG, de modo que a circunferências traçadas distem na parte superior, considerando ele na parte interna da caixa, 1,8cm e na parte inferior 0,8cm.

De modo análogo, traçaremos as circunferências no retângulo 8.

Após traçadas as circunferências nos retângulos 4 e 8 teremos o papelão como indicado na figura 3.7, onde é possível também verificar o primeiro e o segundo passo.

Figura 3.8 – Papelão com as circunferências dos retângulos 4 e 5 traçadas



Fonte: Arquivo pessoal

III. NOS RETÂNGULOS 1, 3, 9 e 11

Ao montar a caixa, seguimos as sequências de sobreposição de retângulos, 1 e 9 sobre o retângulo 5 e por último o retângulo 4, que possui uma extremidade que se encaixará na parte vazada de 6. Desta forma, fez-se necessário que nas extremidades inferiores dos retângulos 1 e 9, que se coincidem com o centro da caixa, fosse retirado de cada um retângulo $1\text{cm} \times 3\text{cm}$, de modo que reduzisse a quantidade de camadas para possibilitar um encaixe mais efetivo do retângulo 4 na parte vazada.

Assim, iniciamos, no retângulo 1, cujas dimensões são $9\text{cm} \times 6\text{cm}$, com régua e lápis dividindo o mesmo em dois, de dimensões $4,5\text{cm} \times 3\text{cm}$. Assim, marcamos o ponto A, ponto O, no lado adjacente ao retângulo 2, marcamos o ponto B em 2cm , o ponto C em $5,3\text{cm}$, o ponto D em $7,3\text{cm}$ e o ponto E em 9cm .

Em seguida, traçaremos a mediatriz do segmento BC para encontrar o centro O, do mesmo. Com a ponta seca do compasso no centro O e abertura OB, traçaremos a circunferência de diâmetro BC.

Ainda com abertura OC, fixaremos a ponta seca do compasso em E traçaremos uma semicircunferência com de centro E. Note que é possível fazer isto porque a semicircunferência de centro E é parte de uma circunferência congruente de centro O.

De modo análogo, traçaremos as circunferências e semicircunferências nos retângulos 3, 9 e 11.

Assim, na figura 3.9, verificamos todas estas circunferências e semicircunferências traçadas no item III do passo 2, bem como os itens I e II e o passo 1.

Figura 3.9 – Semicircunferências e circunferências traçadas



Fonte: Arquivo pessoal

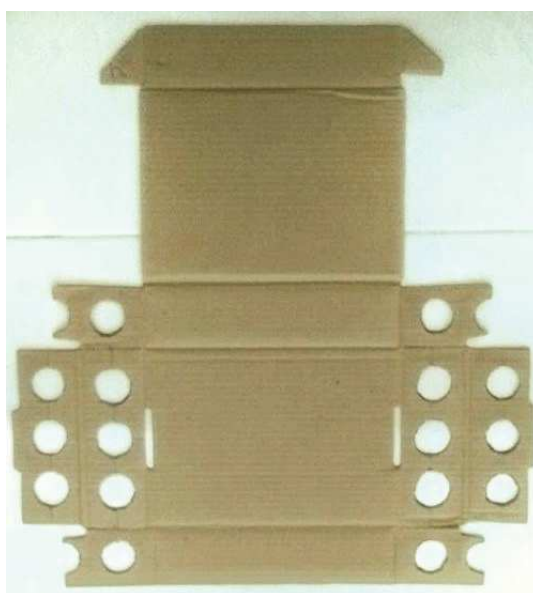
PASSO 3 - CORTAR AS CIRCUNFERÊNCIA E SEMICIRCUNFERÊNCIAS

Ao obtermos a placa de papelão como identificada na figura 8, ou seja, com todas as circunferências traçadas, utilizamos o estilete para cortar. Entretanto, não é interessante passar o estilete de modo a atravessar a placa de papelão de um lado a outro, pois pode gerar defeitos na caixa, chegando a inutilizá-la.

Assim, marcamos as circunferências e semicircunferências com estilete, deixando o corte ir até a metade da espessura do papelão e depois é que atravessamos o papelão em duas etapas o que proporcionará maior precisão do corte evitando danificar o papelão.

Desta forma, realizando este procedimento em todas as circunferências e semicircunferências, obtendo assim uma placa de papelão como na figura 3.10.

Figura 3.10 – Placa de papelão com todas as circunferências e semicircunferências cortadas



Fonte: Arquivo pessoal

PASSO 4 - MONTAR A CAIXA

Primeiramente, utilizando a cola branca, por possibilitar uma excelente adesão entre as partes envolvidas, fixamos os retângulos 1 e 9 no retângulo 5 e depois o retângulo 4 sobre os retângulos 1 e 9, de forma a encaixar na parte vazada no retângulo 6. Da mesma forma, fixamos os retângulos 3 e 11 no retângulo 7 e depois o retângulo 8 nos retângulos 3 e 11 de forma a encaixar também na parte vazada em 6.

Entretanto, se não utilizar a cola branca, também é possível montar os lados da caixa, mas, como não há necessidade de planificar a caixa fixamos com cola branca.

É notório que um par de lados paralelos da caixa ficaram mais grossos com o intuito de fixar melhor a luva soldável.

Logo após, fixa-se com cola quente, por resistência e estética, uma luva soldável 3/4 (largura 3,3cm, altura 4,0cm e diâmetro interno 2,5cm) em cada circunferência totalizando seis .

Após fixar as seis luvas soldáveis, obtemos a caixa identificada na figura 3.11.

Figura 3.11 – Caixa montada com luvas soldáveis



Fonte: Arquivo pessoal

Agora, para que a caixa de funções se torne mais apresentável, esteticamente falando, utilizaremos um spray prata para pintar a caixa, já que tintas convencionais poderiam gerar deformações na mesma e, a cor prata não vai brigar com as cores dos conduítes, nem suja tanto como o branco.

Ao terminar de pintar a parte externa da caixa, colocaremos a mesma para secar por uma hora em média.

Assim, após este tempo destinado para a secagem da caixa teremos uma caixa como identificada na figura 3.12.

Figura 3.12 – Caixa pintada



Fonte: Arquivo pessoal

Agora, temos que repetir os passos 1, 2, 3 e 4 outras seis vezes, de modo que tenhamos seis caixas iguais.

Com as caixas prontas, ou seja, o esqueleto da caixa de funções, passaremos para a construção da parte interna.

PASSO 5 - MONTAGEM INTERNA DA CAIXA

A utilização de objetos distintos, podem ser arranjados em inúmeras ordens diferentes, ou seja, teremos inúmeras permutações diferentes. Entretanto, neste trabalho utilizaremos três itens diferentes, conduíte de três cores diferentes, o que determinarão 6 permutações distintas.

Assim, usando conduíte de três cores distintas, preta, verde e amarelo, com medida de 2,0 m cada e dividindo cada cor em quatro pedaços de 35cm dois de 30cm, representamos as seguintes permutações nas caixas de funções.

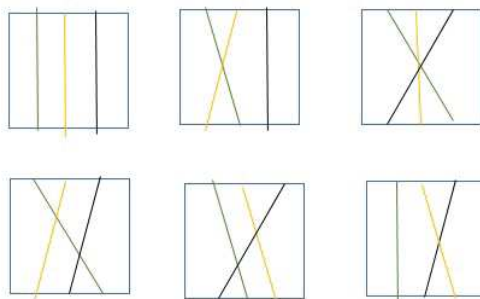
Entretanto, os pedaços menores, 30cm serão os correspondentes às caixas que estão representadas de forma reta.

Dessa forma, escolhe-se um lado para ser superior e fixa-se os conduítes. No lado oposto (que será o inferior), é colocado o conduíte. O conduíte deve ultrapassar os limites da luva em 3 cm.

Estas cores dos conduítes identificadas no esboço foram encontradas em loja de materiais de construção, cujo diâmetro é $3/4$ e com um certo manejo encaixa-se perfeitamente na luva soldável, mas, é necessário fixar com cola de silicone para que não haja a possibilidade de soltar durante uma atividade.

Assim, na figura 3.13, é possível identificar todas as possibilidades utilizando três cores de permutação.

Figura 3.13 – Permutações possíveis



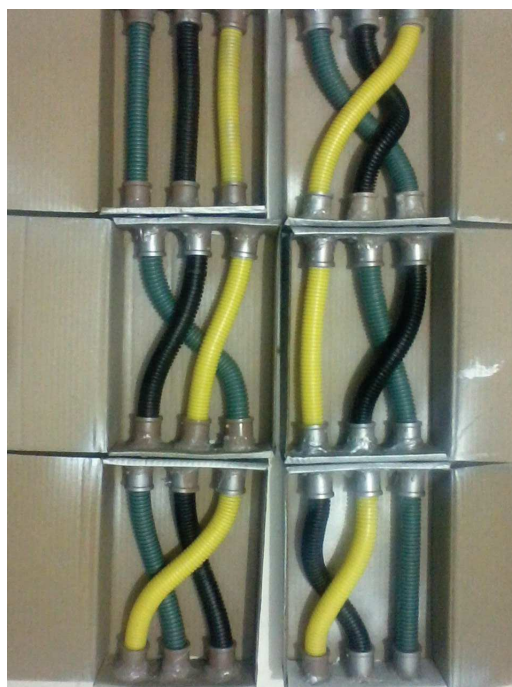
Fonte: Arquivo pessoal

Agora, reproduzimos esses esboços nas caixas montadas no 5 passo, será fixado o conduíte nas luvas soldáveis com silicone, de forma que um lado na caixa não mostre o

conduíte e no outro ele ultrapasse 3cm como supracitado.

Na figura 3.14 podemos ver os esboços da figura 3.13 representados na caixa de funções confeccionada.

Figura 3.14 – Caixas com conduítes fixados



Fonte:Arquivo pessoal

PASSO 6 - IDENTIFICAÇÃO DA CAIXA

Depois de introduzir os conduítes em suas respectivas posições, fechamos a caixa, encaixando tampa retângulo 12 sobre o 6, e, encaixando concomitantemente o retângulo 14 sobre o 2 e as partes 13 e 15, trapézio com bases maior e menor respectivamente 5cm e 1cm e altura 3cm na fenda geradas das dobras correspondente aos lados menores do retângulo 2.

A seguir, veremos a caixa fechada e pintada na Figura 3.15.

Figura 3.15 – Caixa fechada pintada com spray prata



Fonte: Arquivo pessoal

Logo após a caixa pronta, é necessário identificá-la para que o professor possa saber a caixa correspondente e também que possa variar a identificação de acordo a sua necessidade. Assim, fixamos na tampa de cada uma delas a etiqueta de identificação. Esta foi adaptada para a situação, a qual obteve as dimensões 6cm x 3cm, quando cortamos as bordas plásticas e retiramos a presilha metálica que daria o suporte de fixação da mesma, vejamos na Figura 3.16 como ficou a etiqueta de identificação na caixa.

Figura 3.16 – Caixa de Funções



Fonte: Arquivo pessoal

Esta figura 3.16 representa o “produto final”, a CAIXA DE FUNÇÕES.

PASSO 7 - CONFEÇÃO DOS COPOS E BOLINHAS

Dentro das caixas de funções confeccionadas, através dos conduítes, passarão bolinhas de plástico em média com 1cm de diâmetro, sendo uma bolinha em cada conduíte, totalizando 3 bolinhas por caixa. Entretanto, a bolinha tem que ser identificada pela cor do conduíte.

Assim, teremos que confeccionar uma bolinha verde, uma preta e uma amarela para cada caixa, totalizando 18 bolinhas.

Contudo, as bolinhas coloridas não são tão fáceis de encontrar, logo podemos comprar na cor branca e pintar com tinta guache.

Essas bolinhas pintadas serão colocadas na entrada da caixa, necessitando uma espécie de cesto para a recepção, o qual deve ser transparente para verificar qual bolinha chegou.

Para esta função de cesto de recepção das bolinhas, utilizamos um potinho de doce transparente de altura 5cm, diâmetro superior (4,3cm) parte aberta e diâmetro inferior fechado (3,0cm). No entanto, foi necessário lidar com o tamanho da circunferência da parte aberta do copo .

Diante desta dificuldade, a solução utilizada foi o isopor de espessura em média de 1cm para preencher a parte interna do copo 1cm abaixo da borda.

Para tanto, numa placa de isopor, em média com 1cm de espessura, traçamos duas circunferências concêntricas uma de 4,3cm e outra de 3,3cm como o esboço.

Ao cortar as duas linhas contínuas obtemos uma coroa circular de altura 1cm. Desta mesma forma, confeccionamos 1coroa para cada copinho, como são três copinhos em cada caixa e são seis caixas, são 18 coroas fixadas no copinho com cola quente.

Para finalizar o copinho, precisaremos de 15cm de cada cor de conduíte, ou seja 15cm verde, 15cm preto e 15cm amarelo. Depois, dividiremos todos os pedaços de 15cm em pedaços de 2,5cm e, fixaremos 1 pedaço em cada copinho utilizando cola quente. Em seguida, pintamos a parte do copinho com isopor e a base, um verde, um preto e um amarelo, em cada caixa, para diferenciar a chegada das bolinhas, resultando em três copos como o da figura 3.17.

Figura 3.17 – Copinho



Fonte: Arquivo pessoal

Agora, com as seis caixas, 18 copinhos e 18 bolinhas encerramos nossa confecção.

PASSO 8 - DESIGNAÇÃO DAS CAIXAS

As seis Caixas de Funções recebem denominações especiais de acordo com a sua partida e sua chegada correspondente. Essas denominações nos nortearam durante todo este trabalho. Assim temos as seguintes designações:

a caixa 1, como f_0 ,

Figura 3.18 – f_0



Fonte: Arquivo pessoal

a caixa 2, como f_1 ,

Figura 3.19 – f_1 

Fonte: Arquivo pessoal

a caixa 3, como f_2 ,Figura 3.20 – f_2 

Fonte: Arquivo pessoal

a caixa 4 como g_1 ,Figura 3.21 – g_1 

Fonte: Arquivo pessoal

a caixa 5, como g_2 ,Figura 3.22 – g_2 

Fonte: Arquivo pessoal

a caixa 6 como g_3

Figura 3.23 – g_3



Fonte: Arquivo pessoal

Essas seis caixas são as ferramentas base para este trabalho, mas a depender da atividade realizada pode ser necessário a confecção de mais caixas, nove ou doze, devidamente especificadas no início de cada atividade.

3.2 Erros e acertos

3.2.1 Os primeiros passos

A ideia de confeccionar as caixas de funções, surgiu na primeira conversa que tive com meu orientador, onde analisando alguns rabiscos no caderno, foi possível perceber a importância de levar para sala de aula um instrumento no qual utilizava material concreto com o intuito de contribuir no processo ensino-aprendizagem de funções, de modo que esta não seja apenas lúdica, mas útil, tanto na introdução do conteúdo quanto na compreensão dos conceitos já abordados.

Após os primeiros esboços, até o formato atual das caixas de funções, houve algumas adaptações de acordo com as dificuldades que iam surgindo. A cada passo dado e analisado, foi-se melhorando a aparência e a funcionalidade, gerando assim muitos erros e acertos nos quais iremos mostrar a seguir.

Inicialmente, tentamos utilizar uma caixa de sapato conforme mostra a Figura 3.24 e 3.25, porém nos deparamos com as seguintes dificuldades:

- A caixa era muito mole, ficando tudo torto
- A luva soldável não tinha firmeza, ficando torta e impossibilitando o encaixe com as outras caixas.
- Não era possível identificar as correspondências distintas domínio e imagem

Figura 3.24 – Protótipo com caixa de sapato-vista superior



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 3.25 – Protótipo com caixa de sapato-vista lateral



Fonte: Arquivo pessoal

Para resolver o problema da caixa muito mole, ficando tudo torto, substituímos a mesma pela caixa de papelão comum, encontradas em supermercados e lojas. Assim, traçamos uma caixa como ilustrado na idealização inicial figura 3.19, traçado na figura 3.20 e montado como na figura 3.21.

Figura 3.26 – Protótipo rascunho inicial espacial da Caixa de Funções

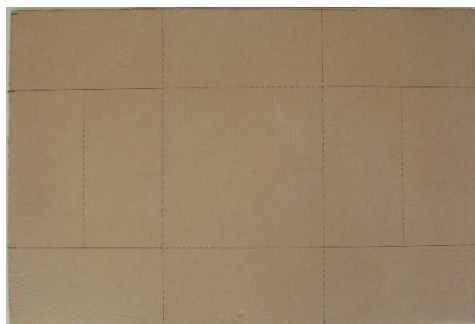


Fonte: Arquivo pessoal

Já a questão da luva soldável torta, sobressaindo no lado da caixa, foi solucionada encorpando mais a face onde a mesma seria fixada. Assim ela ficou com o formado mostrado na figura 3.27.

Buscando melhorar a estética da caixa e cumprir a função de colar a luva soldável substituímos a cola quente, utilizada na figura 3.26 e 3.27 por cola de silicone que não formava aquele amontoado de cola ao redor da borda da luva soldável.

Figura 3.27 – Caixa traçada no papelão



Fonte:Arquivo pessoal

Inicialmente, a cola de silicone parecia a solução do problema, mas com o passar do tempo soltou a luva soldável, então voltamos a utilizar a cola quente com um pouco mais de cautela, propocionando resistência e melhorando a estética da Caixa de Funções.

3.2.2 A caixa tomando forma

Para diferenciar as correspondências domínio e imagem da função, usamos conduíte nas cores preto, verde e amarelo e obtemos a caixa da figura 3.28.

Figura 3.28 – Caixa com conduítes



Fonte: Arquivo pessoal

É notório o melhoramento em relação a caixa inicial, mas, ainda precisamos “galgar alguns degraus” até chegar a caixa atual.

Observamos que a caixa não estava muito apresentável, precisava de um fechamento e uma aparência melhor, pois parecia uma mera caixa de papelão que poderia ser jogada em qualquer lugar. Sendo assim, cortamos uma tampa 20cm x 25cm e tentamos fixar a mesma na caixa.

Para efetuar a ação supracitada, utilizamos como elo entre a caixa e tampa, inicialmente, tecido e depois esparadrapo, que por sua vez, atingiu da melhor forma possível, naquele momento, os objetivos almejados, tampa e estética, como pode ser observado na figura 3.29 e 3.30.

Figura 3.29 – Tampa fixada com tecido



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 3.30 – Tampa fixada com esparadrapo



Fonte: Arquivo pessoal

Em meio a esta situação com a tampa, observamos, que apesar de precisarmos fortalecer os lados onde seriam colocados os conduítes, poderíamos causar deformidades na caixa ao colocar três camadas de papelão sobreposto em um lado da caixa. Consequentemente, resolvemos reduzir em uma camada a face da caixa que seria fixada a luva soldável, em vez de três retângulos, teríamos 1 retângulo e dois quadrados, compondo a face em que seria fixada as luvas soldáveis.

Ainda faltava resolver o problema da apresentação externa da caixa, então, optamos por forrar com um papel prata, mas foi uma decepção, pois por mais que tentássemos melhorar parecia ficar pior, tudo amassado. Chegamos a caixa que podemos ver na figura 3.31, que também já estava identificada para que fosse possível diferenciar a mesma.

Figura 3.31 – Caixa forrada com papel prata



Fonte: Arquivo pessoal

Em meio a toda esta situação de erros e acertos, ainda tinha a questão da obtenção da matéria-prima base, aquisição de caixas, pois tínhamos dificuldades com caixas amassadas demais, caixas que não tinham as dimensões necessárias, o local de trabalho, ficou parecendo um galpão de material reciclável, especializado em papelão.

Há de ressaltar que as dificuldades não desanimavam, apenas fomentavam o ânimo, gerando mais ideias até chegar ao produto final: a Caixa de Funções. Assim, veio a (i) ideia de construir a caixa com a tampa em vez de anexar, posteriormente, à confecção da mesma, bem como (ii) pintá-la de spray cinza, o qual não seria capaz de sobressair-se às cores dos conduítes que eram a essência da mesma.

Entretanto, ainda podemos perceber outro problema: os pedaços de conduíte que estão externos a caixa ficaram tortos, proporcionando dificuldades de encaixar uma caixa na outra.

Diante do exposto acima, pensamos em cortar pedaços de cano 3/4 para colocar no encaixe do conduíte na lateral da caixa, mas não seria algo tão prático como a luva soldável e poderia ter uma aparência grosseira em relação ao cano. Consequentemente, optamos por luvas soldáveis nos lados paralelos menores da caixa.

Ainda nesta etapa da caixa, utilizamos velcro para fechá-la, porém gerou um barulho que poderia gerar algazarra em sala, destoando do objetivo de compreensão do conteúdo.

Desta forma, optamos por fazer uma caixa que não usasse velcro, mas a tampa continuaria solta. Então percebemos uma fenda entre as dobras e optamos por fazer um encaixe, mas a borda da tampa era muito fina.

Para resolver esta situação, prolongamos a borda da tampa gerando um novo retângulo, no entanto, os encaixes para fenda inicialmente eram retangulares ficando ruim para encaixar.

Contudo, percebemos que se a borda para encaixe fosse curva, encaixaria melhor.

Logo, a borda de encaixe é $1/4$ da circunferência de raio igual ao lado menor do retângulo de fechamento da caixa.

Apesar de reduzir um retângulo das faces sobreposta, ainda ficava comprimida as partes sobrepostas internas da caixa, assim, resolvemos reduzir as faces laterais em 0,5cm para que se encaixassem melhor nas laterais.

3.2.3 Na reta final

Ao resolver os problemas das laterais sobrepostas, percebemos que havia também esse problema supracitado entre as faces sobrepostas e o fundo da caixa, então resolvemos fazer uma parte vazada no fundo para que a última face sobreposta pudesse se encaixar.

Essa parte vazada no fundo da caixa também poderia possibilitar ao professor prender a caixa em um suporte, caso fosse necessário.

Diante deste encaixe percebemos os quadrados cortados na segunda camada não ajudariam tanto, logo voltamos a fazer dois retângulos na segunda camada que corresponderiam a face abaixo e acima deles.

Ainda enfrentávamos a dificuldade de encontrar uma caixa de papelão nas dimensões 60cm x 64cm. Então, observamos que a caixa é para ser usada, primordialmente, por alunos do primeiro ano do ensino médio que ainda estão em formação, logo, alguns teriam dificuldade de segurar uma caixa com 10cm de altura por muito tempo. Uma consequência, alteramos as dimensões da caixa, pois ao reduzir a largura, aumentamos a altura e o comprimento para facilitar a fixação do conduíte.

Assim, ao reduzir as partes internas nas laterais em 0,5cm, colocarmos um encaixe na última face, aumentarmos comprimento e altura, reduzirmos largura e criamos um encaixe na caixa da figura 3.31, obtemos a caixa de funções “produto”, a caixa almejada, desde as primeiras conversas com meu orientador e transformada no material concreto, como é possível ver na figura 3.32.

Figura 3.32 – Caixa de Funções



Fonte:Arquivo pessoal

Os copinhos estavam localizados para receber a bolinha, mas como saber em qual chegou? Pensamos inicialmente em prolongar o conduíte dentro do copinho, mas o problema seria para voltar a bolinha, logo resolver por o conduíte nivelado com o isopor e pintar a parte do copinho correspondente ao isopor e a base chegando a Caixa de Funções identificada na figura 3.32.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Esta proposta de ensino visa contribuir no processo ensino-aprendizagem de funções, propondo-se não uma mera repetição de conteúdos, mas a possibilidade de saída do aluno da posição de passivo para ativo. Desta forma, o professor será um mediador do conhecimento ao direcionar as atividades, possibilitando questionamentos e discussões que poderão conduzir ao desenvolvimento gradativo dos conceitos que cercam o estudo de funções. A mesma foi desenvolvida com base nas competências e habilidades dos PCNs de matemática.

Importante ressaltar, que apesar de cada atividade ter o seu descritor específico, cada uma possui um poder de integração.

Ainda em relação as propostas de atividades, o primeiro passo foi conhecer os instrumentos utilizados, para, em seguida, aplicar e formular conceitos referentes a função, dando ênfase a função composta e inversa, com estratégias de ação e raciocínio que podem ser empregados pelos alunos em cada etapa das atividades.

Tendo em vista a quantidade de atividades possíveis relacionadas à Caixa de Funções, dividimos esta proposta de atividade em quatro seções, A, B, C e D, com objetivos definidos no início de cada atividade, o tempo necessário para a execução e os recursos necessários para as mesmas. Também, estão subdivididas em momentos, contendo o tema a ser trabalhado e as definições pertinentes para a resolução destes.

Na seção “Atividade A”, tratamos do conceito de funções; compreendendo variável dependente e independente; domínio, imagem e contradomínio; funções identidade.

Na seção, “Atividade B”, além do conceito de funções, discutiremos funções identidade, sobrejetiva, injetiva e bijetiva.

A função composta e a permutação são, respectivamente, os temas desenvolvidos nas seções “Atividade C” e “Atividade D”.

Há de ressaltar que estas atividades são apenas algumas sugestões que objetivam auxiliar o professor em sua prática.

4.1 Atividade A

OBJETIVOS

- Conhecer a Caixa de Funções,
- Compreender o conceito de função, variável dependente, variável independente,
- Definir domínio, imagem, contradomínio,

RECURSOS: lápis, borracha e Caixa de Funções

DURAÇÃO: 2 aulas (100 min)

METODOLOGIA

1º Momento: CONHECER A CAIXA DE FUNÇÕES

A sala será dividida em seis grupos e cada um receberá uma caixa, 3 copos e 3 bolinhas nas cores verde, amarelo e preto, de modo que o grupo 1 receberá a caixa 1 o grupo 2, a caixa 2, o grupo 3, a caixa 3, o grupo 4, a caixa 4, o grupo 5, a caixa 5 e o grupo 6, a caixa 6.

Em seguida, vamos solicitar que eles se familiarizem com a caixa e façam o que se pede no 2º momento.

I. Grupo 1 jogará a bolinha amarela no conduíte amarelo e toda a turma anotará o resultado obtido, ou seja, em que cor do copinho a bolinha chegou. Logo depois, eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

CAIXA 1	PARTIDA	CHEGADA

II. Grupo 2 jogará a bolinha amarela no conduíte amarelo e toda a turma anotará o resultado obtido, ou seja, em que cor do copinho a bolinha chegou. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

CAIXA 2	PARTIDA	CHEGADA

III. Grupo 3 jogará a bolinha amarela no conduíte amarelo e toda a turma anotará o resultado obtido, ou seja, em que cor do copinho a bolinha chegou. Logo depois eles

repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

CAIXA 3	PARTIDA	CHEGADA

IV. Grupo 4 jogará a bolinha amarela no conduíte amarelo e toda a turma anotará o resultado obtido, ou seja, em que cor do copinho a bolinha chegou. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

CAIXA 4	PARTIDA	CHEGADA

V. Grupo 5 jogará a bolinha amarela no conduíte amarelo e toda a turma anotará o resultado obtido, ou seja, em que cor do copinho a bolinha chegou. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

CAIXA 5	PARTIDA	CHEGADA

VI. Grupo 6 jogará a bolinha amarela no conduíte amarelo e toda a turma anotará o resultado obtido, ou seja, em que cor do copinho a bolinha chegou. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

CAIXA 6	PARTIDA	CHEGADA

2º Momento: Questões problemas:

A partir dos dados das tabela acima, responda:

- Há alguma partida que não está associada a nenhuma chegada?
- Há alguma chegada que não está associada a nenhuma partida?
- Exatamente uma mesma partida pode estar associada a duas chegadas distintas?

- d) Uma mesma chegada pode estar associada a duas partidas distintas?
- e) Na caixa 2, a bolinha que partiu da cor amarela, onde chegou?
- f) Na caixa 1, o que podemos observar?
- g) Tem alguma caixa idêntica a caixa 1?
- h) Em qual das caixas a partida verde tem a mesma chegada da caixa 1?
- i) Na caixa 3, ficou alguma cor sem chegar em algum lugar?
- j) Em quais caixas a partida amarela teve a mesma chegada?
- k) Qual conceito matemática relacionado a esta atividade ?

3º Momento: VARIÁVEL DEPENDENTE X VARIÁVEL INDEPENDENTE

Função é um tipo especial de relação, em que todas as partidas possuem uma única chegada, onde ocorre uma relação de dependência entre a partida (variável independente) e a chegada (variável dependente).

Neste momento vamos formalizar o conceito de função, com as observações realizadas na caixas, bem como a definição de variável dependente e independente obtidos.

Assim, com base nesta definição e nos conceitos já supracitados, responda:

- a) Na caixa 1, há uma relação de dependência entre a partida e a chegada?
- b) Na caixa 2, há uma relação de dependência entre a partida e a chegada?
- c) Em caso afirmativo, no item b, descreva esta dependência.
- d) Observando agora os resultados obtidos, partida e chegada, na caixa 4, posso considerá-la uma função? Por quê?
- e) Analise a caixa 5, o que podemos afirmar sobre a cor verde (partida) em relação a dependência?
- f) Quais as cores que representam a variável independente na caixa 6 e na caixa 4? O que podemos observar?
- g) Quais as cores que representam a variável dependente da variável independente, cor amarela, nas caixas 2 e 3? O que podemos concluir?
- h) Em qual das caixas a variável independente verde tem duas cores que representam a variável dependente?
- i) Em alguma das caixas, a cor que representa a variável independente é a mesma que representa a variável dependente? Em caso afirmativo, qual?
- j) Em grupo, mencione duas situações corriqueiras, em que é possível reconhecer

este conceito entre duas grandezas identificando a variável dependente e independente.

4º Momento: DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

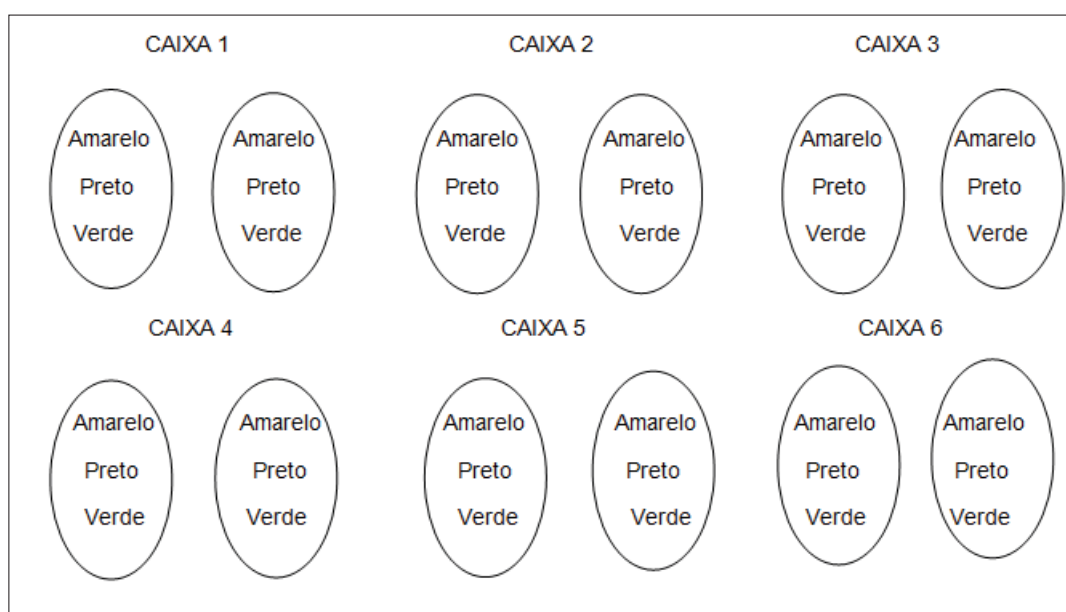
Numa função o domínio (variáveis independentes) são os elementos do primeiro conjunto, correspondem a partida, a chegada (variável dependente) são os elementos da imagem que está contida no contradomínio, segundo conjunto.

Um tipo de função é a identidade, recebe esta denominação por ter os valores de x iguais aos valores de y em todos os seus pares ordenados.

O diagrama de flechas é uma forma de representar funções, onde temos dois conjuntos, o primeiro corresponde a partida, o segundo a chegada e as flechas ligam a partida a sua chegada.

Agora, utilizando as tabelas preenchidas no primeiro momento vamos traçar as flechas do diagrama correspondente a cada caixa.

Figura 4.1 – Diagramas associados as Caixas de Funções



Fonte: Arquivo pessoal

Note que ao relacionar a partida com a chegada geramos um par, um casamento da variável independente (x), com sua variável dependente correspondente (y) designado **par ordenado**.

Desta forma denominamos as caixas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 por f_0 , f_1 , f_2 , g_1 , g_2 e g_3 , respectivamente.

Também vamos ordenar as partidas e as chegadas. As partidas são , nessa ordem, amarela, verde e preta. A primeira chegada (oposta a cor amarela), a segunda (oposta a cor verde) e a terceira (oposta a cor preta).

Agora, escreva os pares ordenados de cada função colocando as iniciais de cada cor, amarelo A, preto P, verde V, correspondente, respectivamente a partida e chegada de cada bolinha .

Caixa 1 $f_0: \{(,), (,), (,)\}$

Caixa 2 $f_1: \{(,), (,), (,)\}$

Caixa 3 $f_2: \{(,), (,), (,)\}$

Caixa 4 $g_1: \{(,), (,), (,)\}$

Caixa 5 $g_2: \{(,), (,), (,)\}$

Caixa 6 $g_3: \{(,), (,), (,)\}$

Agora responda as seguintes perguntas, considerando as caixas e as denominações supracitadas:

- a) Qual o domínio de f_0 ?
- b) Qual a imagem de g_3 ?
- c) Considerando a caixa 2 e 3, o que posso afirmar sobre seus domínios?
- d) Em relação ao conjunto imagem em g_1 e g_2 , o que podemos afirmar?
- e) Denominando os elementos do domínio por x , qual a imagem de $x = \text{verde}$ na caixa 5?
- f) Denominando o elemento que representam a imagem por y , qual o valor corresponde de x , na caixa 4, cuja imagem é preta?
- g) Em qual das funções a imagem de $x = \text{preta}$ é a mesma?
- h) A função f_0 apresenta uma correspondência especial. Que correspondência é essa?
- i) Qual a denominação da função que apresenta esta característica especial?

4.2 Atividade B

OBJETIVOS:

- Conhecer a Caixa de Funções
- Compreensão do conceito de função associado ao diagrama de flechas e ao gráfico cartesiano
- Compreender as características das funções: identidade, constante, sobrejetora, injetora e bijetora

RECURSOS: lápis, borracha e Caixa de Funções

DURAÇÃO: 2 aulas (100min)

METODOLOGIA

1º Momento: CONHECER A CAIXA DE FUNÇÕES UTILIZANDO O DIAGRAMA DE FLECHAS

A sala será dividida em seis grupos e cada um receberá uma caixa ficando o grupo 1, com a caixa 1, o grupo 2 com a caixa 2, o grupo 3 com a caixa 3, o grupo 4 com a caixa 4, o grupo 5 com a caixa 5, o grupo 6 com a caixa 6.

Uma função é um tipo especial de relação, desta maneira uma das formas de representá-la é através do diagrama de flechas, onde os elementos que representam a partida estejam no primeiro conjunto, a chegada no segundo conjunto e a partida é levada a chegada através de uma flecha.

Assim sendo, vamos denominar o conduíte na cor amarela, como 1, na cor verde, como 2, na cor preta, como 3, a partida onde é colocada a bolinha como conjunto A, a chegada onde sai a bolinha como conjunto B. Agora simultaneamente, os grupos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 farão as atividades solicitadas e socializarão os resultados com os outros grupos.

NÚMERO	COR
1	Amarelo
2	Preto
3	Verde

Fonte: Arquivo pessoal

I. Grupo 1 jogará a bolinha amarela no conduíte de partida amarelo, isto é, no número 1, observará a chegada desta bolinha e registrará no diagrama 1, ou seja, em que cor do copinho chegou e asso ciará o número de chegada ao número correspondente a cor do copinho. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

II. Grupo 2 jogará a bolinha amarela no conduíte de partida amarelo, isto é, no número 1, observará a chegada desta bolinha e registrará no diagrama 1, ou seja, em que cor do copinho chegou e asso ciará o número de chegada ao número correspondente a cor do copinho. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

III. Grupo 3 jogará a bolinha amarela no conduíte de partida amarelo, isto é, no número 1, observará a chegada desta bolinha e registrará no diagrama 1, ou seja, em que cor do copinho chegou e associará o número de chegada ao número correspondente a cor do copinho. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

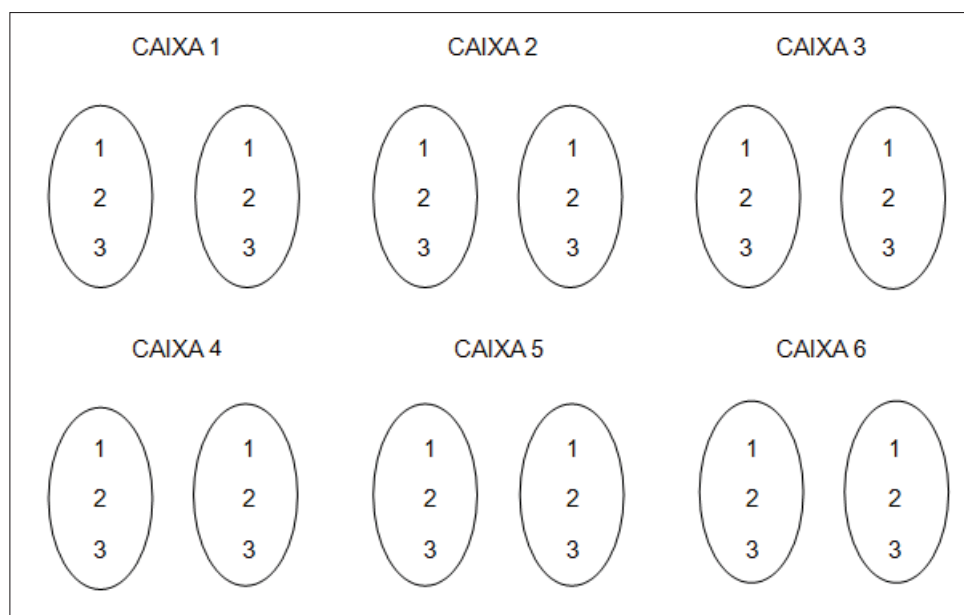
IV. Grupo 4 jogará a bolinha amarela no conduíte de partida amarelo, isto é, no número 1, observará a chegada desta bolinha e registrará no diagrama 1, ou seja, em que cor do copinho chegou e associará o número de chegada ao número correspondente a cor do copinho. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

V. Grupo 5 jogará a bolinha amarela no conduíte de partida amarelo, isto é, no número 1, observará a chegada desta bolinha e registrará no diagrama 1, ou seja, em que cor do copinho chegou e associará o número de chegada ao número correspondente a cor do copinho. Logo depois eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

VI. Grupo 6 jogará a bolinha amarela no conduíte de partida amarelo, isto é, no número 1, observará a chegada desta bolinha e registrará no diagrama 1, ou seja, em que cor do copinho chegou e associará o número de chegada ao número correspondente a cor do copinho. Logo depois, eles repetirão o processo com a bolinha verde e a bolinha preta.

Após os registros solicitados acima, um aluno de cada equipe levantará e apresentará seus resultados oralmente de modo que as outras equipes possam registrar os resultados dos diagramas que não representam a caixa do seu grupo. Desta forma, levantará o aluno da equipe 1, socializará o resultado com as equipes 2, 3, 4, 5 e 6, repetindo o processo realizando pela equipe 1 nas equipes 2, 3, 4, 5 e finalizando com os resultados obtidos pela equipe 6.

Figura 4.2 – Diagramas de flechas associadas a caixa de funções



Fonte: Arquivo pessoal

2º Momento: FUNÇÃO: DIAGRAMA DE FLECHAS.

Observe os diagramas obtidos acima, com base neles e considerando os lembretes abaixo, responda as perguntas seguintes:

- Qual o domínio, imagem e o contradomínio da função representada pela caixa 2?
- Qual a relação entre o domínio e a imagem destas funções?
- Qual a imagem do elemento do domínio 3 no diagrama 6?
- Qual o elemento do domínio no diagrama 2 cuja imagem é 3?
- Nos diagramas 2 e 4 o elemento 1 do domínio tem a mesma imagem?
- Quais os diagramas em que o elemento 2 do domínio tem a mesma imagem?
- Quais os pares ordenados identificados no diagrama 4?
- Por que posso afirmar que o diagrama 6 é um tipo especial de relação, isto é, uma função?
- Que tipo de função é expresso no diagrama 1? Que lei de formação representa esta função?

3º Momento: FUNÇÃO : PLANO CARTESIANO.

O Plano Cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal (abscissa) e outro vertical (ordenada). O Plano Cartesiano é muito utilizado na construção de gráficos de funções, onde os valores relacionados à x (variável independente) constituem o domínio e a imagem da função são valores em y (variável dependente). No plano cartesiano, para verificarmos se uma relação é função precisamos traçar retas verticais paralelas ao eixo y e se estas intersectarem o gráfico em apenas um ponto concluímos que é função. Assim sendo, vamos denominar por A, B e C os três pontos obtidos nos diagramas e cada equipe fará o que se pede correspondente a caixa de sua equipe e socializará os resultados com a sala ao findar a atividade.

a) Escreva os pontos A, B e C correspondentes a sua caixa, sendo o primeiro valor a partida e o segundo a chegada.

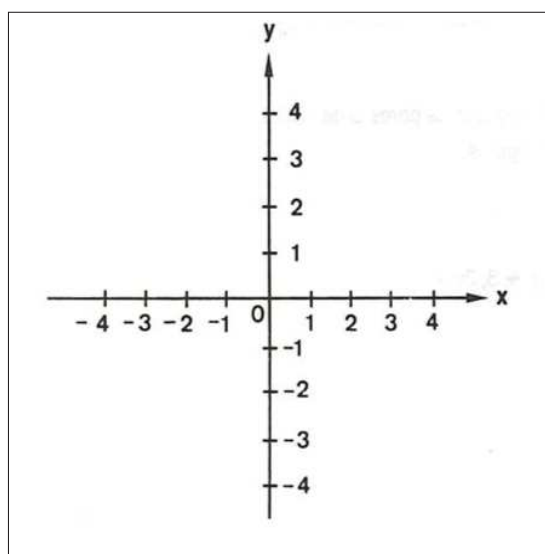
$A(\quad , \quad)$ $B(\quad , \quad)$ $C(\quad , \quad)$

b) Nos pontos A, B e C o primeiro valor corresponde a x e o segundo valor a y , preencha a tabela com um ponto em cada linha:

x	y

c) No plano cartesiano, marque os pontos da tabela acima .

Figura 4.3 – Plano Cartesiano



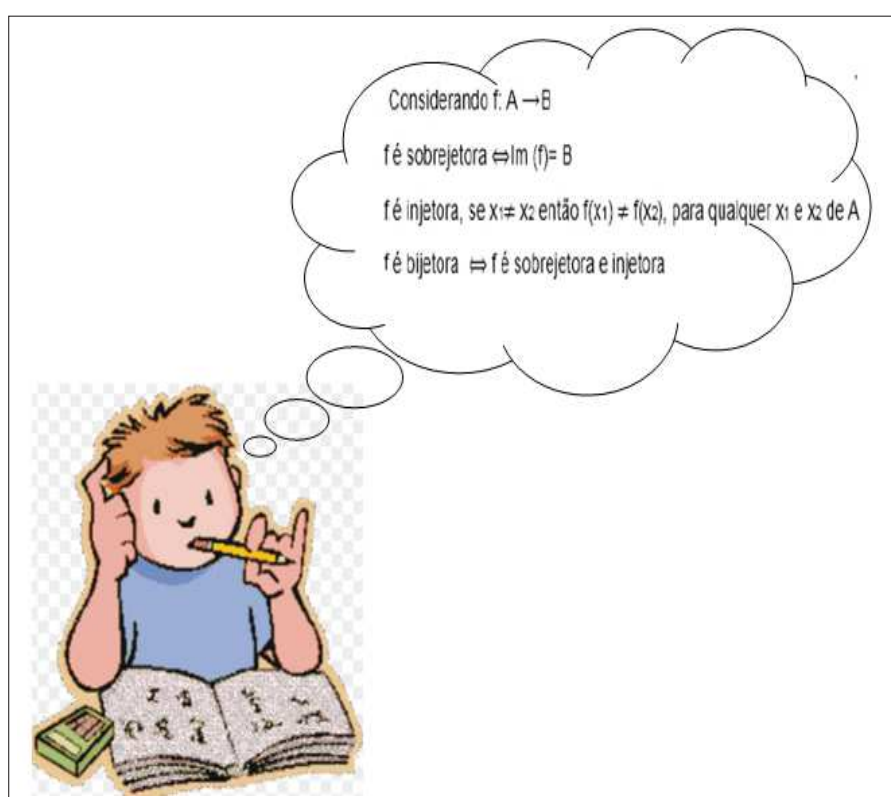
Fonte: Arquivo pessoal

- d) O ponto A está localizado em qual quadrante? E o ponto B?
- e) O ponto C está no segundo quadrante?
- f) Existe algum ponto localizado no terceiro e quarto quadrante?
- g) O gráfico construído na letra c representa uma função? Justifique.

4º Momento: FUNÇÃO SOBREJETIVA, INJETIVA E BIJETIVA.

Observe o seguinte lembrete:

Figura 4.4 – Lembrete



Fonte: Arquivo pessoal

Utilizando os diagramas de flechas construído no 2º momento e considerando cada um deles representação de uma função de A em B , onde a partida é A e a chegada é B responda as seguintes questões.

- a) No diagrama 2, os diferentes elementos do domínio possuem imagens iguais?
- b) No diagrama 3, existe elementos no contradomínio que não são imagens de nenhum elemento do domínio?
- c) O que podemos afirmar sobre a imagem e o contradomínio do diagrama 5?

- d) O diagrama 3 representa uma função injetora? E o diagrama 4?
- e) O diagrama 1 representa uma função sobrejetora? E o diagrama 5?
- f) Há alguma função que é injetora e não é sobrejetora? Justifique.
- g) Que tipo de função o diagrama 2 representa, injetora, sobrejetora ou bijetora? Justifique sua resposta.
- h) Há alguma função que é injetora e não é sobrejetora?
- i) Quais dos diagramas de funções representam uma função bijetora (injetora e sobrejetora)?

4.3 Atividade C

OBJETIVOS Conhecer a Caixa de Funções e compreender do conceito de função composta.

RECURSOS: régua lápis, borracha e 6 Caixas de Funções, sendo 2, f_0 , f_1 e f_2 .

DURAÇÃO: 2 aulas (100min)

METODOLOGIA

1º momento: Definir função composta.

A função composta pode ser entendida pela determinação de uma terceira função C , formada pela junção das funções A e B . Matematicamente falando, temos que $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, denomina a formação da função composta de g com f , $h : A \rightarrow C$. Dizemos função g composta com a função f , representada por $g \circ f$.

Ela é utilizada quando é possível relacionar mais de duas grandezas através de uma mesma função, no caso, poderia existir variável que seria dependente e independente na composição. Por exemplo, a altura que a lava e o vapor atingem em um vulcão em erupção é obtida em função da pressão dos gases no interior do Vulcão e da Terra. Contudo, essa pressão depende da temperatura atingida pela atividade vulcânica.

2º momento: Conhecer as caixas.

A sala será dividida em seis grupos e cada um receberá uma caixa ficando o grupo 1, com a caixa 1, o grupo 2 com a caixa 2, o grupo 3 com a caixa 3, o grupo 4 com a caixa 4, o grupo 5 com a caixa 5, o grupo 6 com a caixa 6.

Primeiramente denominaremos a entrada, os elementos do domínio, amarela como o número 1, a entrada verde como número 2 e a entrada preta como número 3. Da mesma forma, as saídas, ou seja, imagens, a primeira será a 1, a segunda a 2 e a terceira a 3.

Agora denominando a caixa 1 como f_0 ; a caixa 2 como f_1 ; a caixa 3 como f_2 ; a

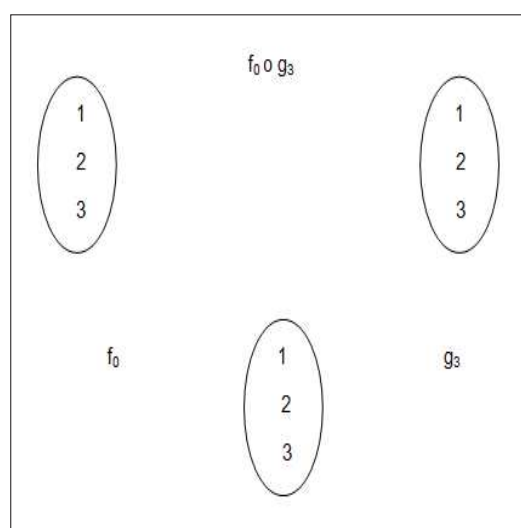
caixa 4 como g_1 ; a caixa 5 como g_2 e a caixa 6 como g_3 .

Ao sobrepor, por exemplo, a caixa 1, f_0 , sobre a caixa 2, f_1 , estaremos realizando uma composição já que teremos como resultado uma nova função com o domínio da caixa 1 e a imagem da caixa 2.

Depois das designações necessárias, começaremos pelo item I onde levantará um aluno da equipe f_0 com sua caixa e um aluno da equipe g_3 encaxairão f_0 sobre g_3 e jogarão as bolinhas amarela (1), verde (2) e preta (3) em seus lugares correspondentes e todos da turma anotarão o resultado. Em seguida separarão as caixas e repetirão o processo realizado com as caixas unidas e conhecerão f_0 e g_3 , respondendo o que for solicitado em cada item. De modo análogo faremos nos itens II e III.

I) Composição entre f_0 e g_3

Figura 4.5 – Composição I



Fonte: Arquivo pessoal

Caixa 1 $f_0: \{ (\quad , \quad), (\quad , \quad), (\quad , \quad) \}$

Caixa 6 $g_3: \{ (\quad , \quad), (\quad , \quad), (\quad , \quad) \}$

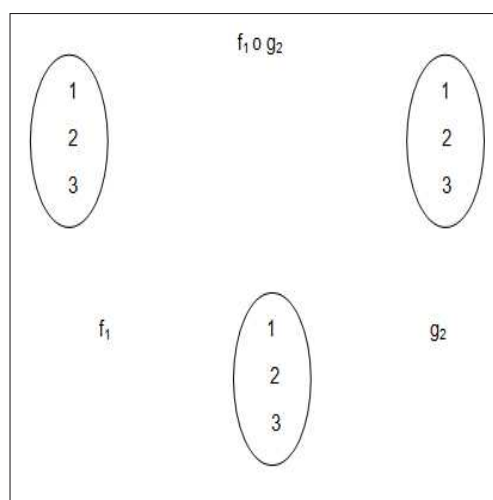
$f_0 \circ g_3: \{ (\quad , \quad), (\quad , \quad), (\quad , \quad) \}$

Domínio: $\{ \quad , \quad , \quad \}$

Imagem: $\{ \quad , \quad , \quad \}$

II) Composição entre f_1 e g_2

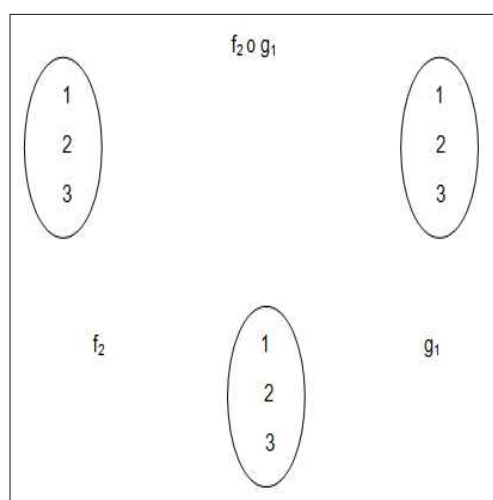
Figura 4.6 – Composição II



Fonte: Arquivo pessoal

Caixa 2 $f_1: \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ Caixa 5 $g_2: \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ $f_1 \circ g_2: \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ Domínio: $\{1, 2, 3\}$ Imagem: $\{1, 2, 3\}$ III) Composição entre f_2 e g_1

Figura 4.7 – Composição III



Fonte: Arquivo pessoal

Caixa 3 $f_2: \{(,), (,), (,)\}$

Caixa 4 $g_1: \{(,), (,), (,)\}$

$f_2 \circ g_1: \{(,), (,), (,)\}$

Domínio: $\{ , , \}$

Imagem: $\{ , , \}$

3º Momento: Fazer composições nas caixas

As equipes solicitadas designaram um representante para que possam ir até a frente e realizar as composições solicitadas, com a caixa da primeira equipe chamada sobre a caixa da segunda equipe.

Assim, por exemplo, se a composição for equipe 1 com equipe 2, a caixa 1 ficará encaixada sobre a caixa 2, onde a partida será na caixa 1 e a chegada na caixa 2. Assim, de acordo com a designação no 2 momento, teremos f_0 o f_1 . Em seguida registrará a partida e a chegada da composição e os pares ordenados obtidos.

Faça as seguintes composições, uma de cada vez, na frente da sala, para que todos possam ver e fazer os registros necessários:

I) $f_2 \circ g_3$

Partida	Chegada

Pares ordenados: $\{(,), (,), (,)\}$

II) $g_2 \circ f_0$

Partida	Chegada

Pares ordenados: $\{(,), (,), (,)\}$

III) $g_2 \circ g_3$

Partida	Chegada

Pares ordenados: $\{(,), (,), (,)\}$

IV) $g_1 \circ f_0$

Partida	Chegada

Pares ordenados: $\{(,), (,), (,)\}$

No 2º momento, definimos seis funções, com base nelas e nas composições realizadas acima, responda as questões seguintes:

a) Qual a função correspondente a cada composição?

I) II) III) IV)

b) Considerando as composições realizada em que uma das funções é f_0 , o que observamos?

c) O que justifica a observação feita no item b)?

d) Sendo a composição de uma função com a sua inversa igual a identidade, qual das composições foram realizadas com funções inversas?

e) Alguma das composições realizadas teve um “produto” como o obtido no item d)? Em caso afirmativo, escreva-os.

f) As funções que fazem parte da composição do item III são sobrejetoras, injetoras ou bijetoras? Justifique sua resposta.

4º **Momento:** Composição utilizando três funções

Agora, utilizando a caixa vamos calcular as seguintes composições e registre a função correspondente ao resultado e a partir deles responda as questões:

a) $f_0 \circ g_1 \circ g_2 = \{(,), (,), (,)\}$ b) $f_1 \circ f_2 \circ g_1 = \{(,), (,), (,)\}$ c) $g_2 \circ f_0 \circ g_1 = \{(,), (,), (,)\}$ d) $f_1 \circ f_2 \circ g_3 = \{(,), (,), (,)\}$ e) $f_0 \circ g_2 \circ g_3 = \{(,), (,), (,)\}$ f) $g_3 \circ f_0 \circ g_2 = \{(,), (,), (,)\}$

I) Qual a função correspondente a cada composição?

a) b) c) d) e) f)

II) Nas letras (a) e (c) fazem parte da composição as mesmas funções em ordem diferente o que é possível observar em relação ao resultado?

III) Nas letras (e) e (f) fazem parte da composição as mesmas funções em ordem diferente o que é possível observar em relação ao resultado?

IV) As respostas dos Itens II e III são iguais ou diferentes?

V) O que é possível observar nas funções que fazem parte dos itens II e III?

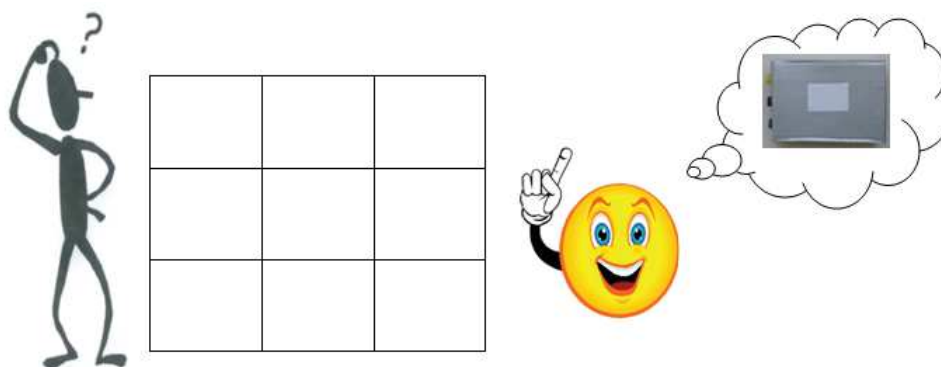
VI) A função composta é comutativa?

5º Momento: “Jogo da velha”composição com três funções f_0 , f_1 e f_2

Para resolver o jogo da velha precisaremos de duas caixas de cada funções, f_0 , f_1 e f_2 , para que possamos fazer todas as composições possíveis com as mesmas, sendo que um aluno de cada equipe ficará com uma caixa de modo que dois a dois façam as composições com a sala toda interagindo.

Com apenas as funções f_0 , f_1 e f_2 , monte o jogo da velha composição de modo que de cima para baixo, ou seja, a função da primeira linha e primeira coluna composta com a função da segunda linha e primeira coluna tenha como resultado a função da terceira linha e primeira coluna, da mesma forma na segunda e terceira coluna. Também da esquerda para direita, a função da primeira linha e primeira coluna composta com a função primeira linha e segunda coluna terá como resultado da composição a função da primeira linha e terceira coluna. Na diagonal principal só existirá uma única função.

Figura 4.8 – Tabuleiro para o jogo da velha composição

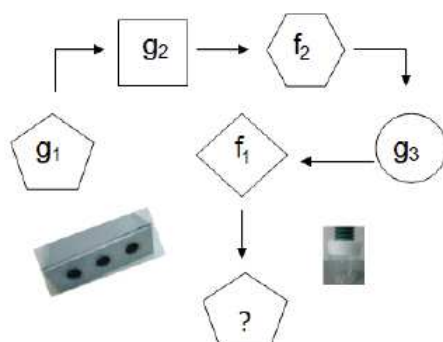


Fonte: Arquivo pessoal

6º Momento: Trilha da composição

Nesta trilha vamos fazer a composição das funções seguindo as figuras planas de um pentágono a outro, sendo que cada seta indica uma composição com excessão da última que é o resultado da última composição, escrevendo sobre cada seta a função obtida de cada função.

Figura 4.9 – Trilha da composição



Fonte: Arquivo pessoal

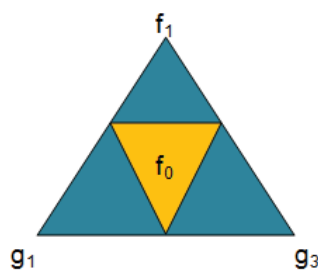
Agora de acordo com a trilha obtida, responda:

- Onde houve “roubo” de f_0 ?
- Existem funções inversas na trilha? Em caso afirmativo, quais?

7º Momento: Racha cuca

Utilizando a Caixa de Funções, descubra qual a composição realizada entre os três vértices do triângulo, em que ordem ocorreu a composição, para encontrar a função do triângulo central. Em seguida escreva a composição das três funções obtidas.

Figura 4.10 – Triângulo da composição



Fonte: Arquivo pessoal

4.4 Atividade D

Objetivos: Compreender permutação a partir do conceito de função.

Recursos: Régua lápis, borracha e 12 Caixas de Funções

Duração: 2 aulas (100 min)

METODOLOGIA

1º Momento: Definir permutação

Permutação é o termo específico usado para designar uma bijeção de um conjunto nele mesmo. Se A indica um conjunto não vazio, denotaremos por $S(A)$ o conjunto das permutações dos elementos de A . A composição de aplicações é, neste caso, uma operação sobre $S(A)$, pois se f e g são permutações de A , ou seja, se $f: A \rightarrow A$ e $g: A \rightarrow A$ são bijeções, então a composta $g \circ f: A \rightarrow A$ também é uma bijeção.

2º Momento

a) Calcule e represente na forma de conjunto dos pares ordenados o resultado da composição obtida em cada item:

I) $f_0 \circ f_0 =$

II) $f_0 \circ f_1 =$

III) $f_1 \circ f_1 =$

IV) $f_1 \circ f_0 =$

b) Represente por meio de diagrama as composições II e III.

c) Associe os pares ordenados obtidos nas composições realizadas na letra “a”, a uma função correspondente denominada em S_2 e complete a tábua no S_2 . Por exemplo, o resultado da composição foram os pares (1,2), (2,1), a função correspondente a estes pares é f_1 . Em seguida colo este resultado no ponto de encontro das minhas funções na tábua.

O	f_0	f_1
f_0		
f_1		

c) Em quais composições da letra houve “roubo” de f_0 ?

e) Tendo em vista que a composição de funções inversas obtém-se a função identidade, quais das composições indicadas na tábua são inversas?

3º Momento: Permutação S_3

No S_2 , conjunto com 2 elementos, é possíveis construir duas permutações, ou seja, duas funções distintas.

Haja vista que o número de permutações proporciona a possibilidade de composição por meio de cálculos sem muito esforço.

Entretanto, com o ensino de análise combinatória, no S_3 , teremos $3! = 6$ permutações possíveis; no S_4 , 24 permutações, enfim com $S_n = n!$ possibilidades distintas. Desta forma o cálculo manual torna-se mais demorado, complicado com o aumento do número de possibilidades de funções.

Assim, a utilização da caixa de funções proporciona agilidade para efetuar a composição, compreensão e possibilidade de transcender atividades simples como uma composição envolvendo apenas duas funções.

Ao compor duas ou mais Caixas de Funções, colocamos as bolinhas nas partida, elemento do domínio da função resultado e a chegada é a imagem da função resultado.

Utilizando a caixa de funções, dois integrantes de cada equipe se levantarão e farão a composição solicitada e socialização com os demais colegas até que a tábua esteja toda completa,

O	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_0						
f_1						
f_2						
g_1						
g_2						
g_3						

A partir dos dados das tabela acima, responda:

- Há alguma composição que não está associada nenhuma função?
- Há alguma função que não está associada a nenhuma composição?
- O que podemos concluir da composição f_0 o f_0 ? Justifique.
- Uma das propriedades da composição é que a composição da função com a sua inversa é igual a identidade. Assim, quais funções, na tabela, são inversas?
- Na coluna 1 e linha 1 da tabela de composição há um fato especial. Qual?
- O que podemos afirmar em relação a este fato supracitado?
- Há simetria na tabela total?
- Há simetria na tabela parcial?
- Na composição f_1 o f_2 obtemos que função? O que justifica esta resposta?

4º Momento: Construção de uma nova tábua com as substituições obtidas na tábua anterior.

No 2º momento concluímos que $f_1^2 = f_1 \circ f_1 = f_2$, $g_1 \circ f_1 = g_2$ e $g_1 \circ (f_1 \circ f_1) = g_3$. Assim sendo, com base nessas conclusões vamos completar a tabela abaixo.

O	f_0^0	f_1	f_1^2	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$
f_1^0						
f_1						
f_1^2						
g_1						
$g_1 \circ f_1$						
$g_1 \circ f_1^2$						

Com base na resolução, posso afirmar a possibilidade e construção da tabela utilizando apenas 3 funções correspondendo as 6 salvo suas equivalências?

5º **Momento:** Combo de composições

Utilizando a Caixa de Funções faça as seguintes composições e indique a função correspondente a função obtida desta composição:

$$f_2 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f_0 \circ f_1$$

4.5 Soluções das Atividades

4.5.1 Soluções da Atividade A

1º Momento:

CAIXA 1	PARTIDA	CHEGADA
	amarelo	amarelo
	preto	preto
	verde	verde

CAIXA 2	PARTIDA	CHEGADA
	amarelo	preto
	preto	verde
	verde	amarelo

CAIXA 3	PARTIDA	CHEGADA
	amarelo	verde
	preto	amarelo
	verde	preto

CAIXA 4	PARTIDA	CHEGADA
	amarelo	amarelo
	preto	verde
	verde	preto

CAIXA 5	PARTIDA	CHEGADA
	amarelo	verde
	preto	preto
	verde	amarelo

CAIXA 6	PARTIDA	CHEGADA
	amarelo	preto
	preto	amarelo
	verde	verde

2º Momento

- a) Não
- b) Não
- c) Não
- d) Não
- e) Na chegada preta
- f) A cor da partida foi a mesma da cor de chegada
- g) Não

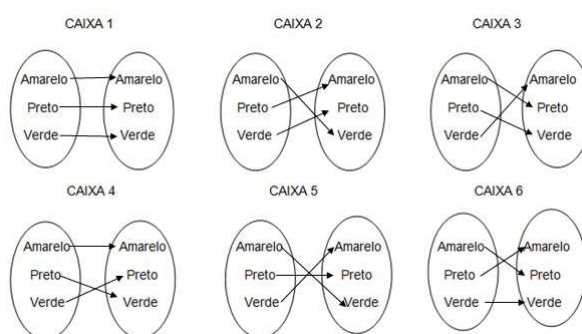
- h) Caixa 6
- i) Não
- j) Caixa 1 e Caixa 4, Caixa 2 e Caixa 6, Caixa 3 e Caixa 5
- k) Função

3º Momento

- a) Sim
- b) Sim
- c) O preto depende do amarelo, o verde depende do preto e o amarelo depende do verde.
- d) Sim. Porque todas as partidas estão associadas a uma única chegada.
- e) O verde (partida) não depende de nenhuma cor, ou seja, é independente.
- f) Amarelo, preto e verde
- g) Na caixa 2 e 6, a cor amarela é a variável independente e a caixa 6 é a variável dependente. São iguais.
- h) Nenhuma
- i) Sim. A caixa 1.
- j) O aluno pode dar várias respostas como o custo do chocolate e a quantidade de chocolates, onde o custo é a variável dependente e a quantidade de chocolates é a variável independente.

4º Momento

Figura 4.11 – Diagrama resposta



Caixa 1 $f_0: \{(A,A),(P,P),(V,V)\}$

Caixa 2 $f_1: \{(A,V),(P,A),(V,P)\}$

Caixa 3 $f_2: \{(A,P),(V,A),(P,V)\}$

Caixa 4 $g_1: \{(A,A),(P,V),(V,P)\}$

Caixa 5 $g_2: \{(A,V),(P,P),(V,A)\}$

Caixa 6 $g_3: \{(A,P),(P,A),(V,V)\}$

a) $D = \{A, P, V\}$

b) $Im = \{A, P, V\}$

c) São iguais.

d) São iguais.

e) A imagem de $x = V$ é A.

f) A imagem é P para $x = V$

g) Caixa 1 e Caixa 5, Caixa 3 e Caixa 4, Caixa 2 e Caixa 5.

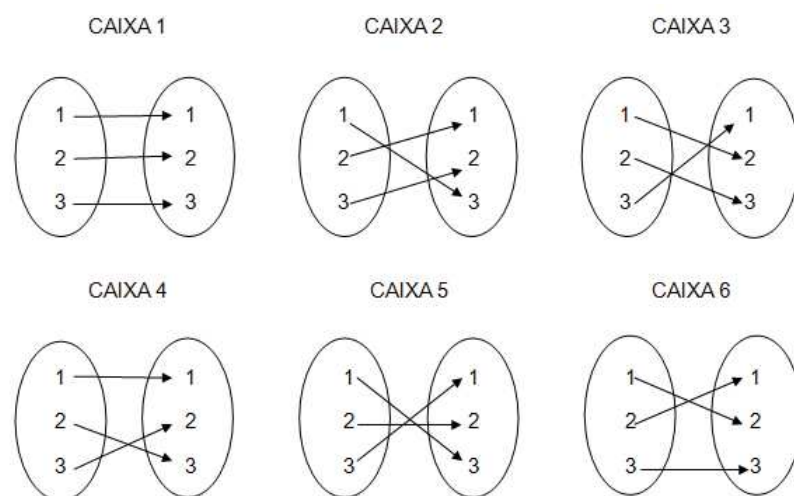
h) Os elementos do domínio são iguais as sua respectivas imagens.

i) Função identidade.

4.5.2 Soluções da Atividade B

1º Momento

Figura 4.12 – Diagrama resposta



Fonte: Arquivo pessoal

2º Momento

- a) $D = 1, 2, 3$, $Im = 1, 2, 3$ e $CD = 1, 2, 3$
- b) Os elementos são iguais
- c) A imagem é 3
- d) Elemento 3
- e) Não
- f) Caixa 1 e Caixa 5, Caixa 3 e Caixa 4, Caixa 2 e Caixa 5
- g) $\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
- h) Porque todos os elementos do domínio tem uma única imagem.
- i) Função Identidade. $f(x) = x$

3º Momento

Caixa 1 $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(3, 3)$

Caixa 2 $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ e $C(3, 2)$

Caixa 3 $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ e $C(3, 1)$

Caixa 4 $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(3, 2)$

Caixa 5 $A(1, 3)$, $B(2, 2)$ e $C(3, 1)$

Caixa 6 $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ e $C(3, 3)$

	Caixa 1		Caixa 2		Caixa 3	
b)	x	y	x	y	x	y
	1	1	1	3	1	2
	2	2	2	1	2	3
	3	3	3	2	3	1

Caixa 4		Caixa 5		Caixa 6	
x	y	x	y	x	y
1	1	1	3	1	2
2	3	2	2	2	1
3	2	3	1	3	3

c)

Figura 4.13 – Gráfico da Caixa 1

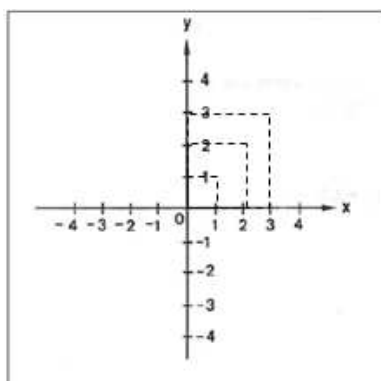
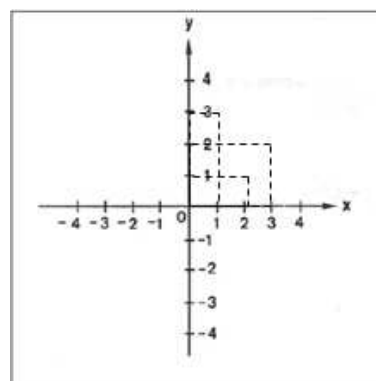


Figura 4.14 – Gráfico da Caixa 2



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 4.15 – Gráfico da Caixa 3

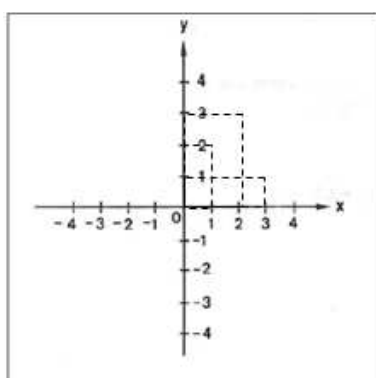
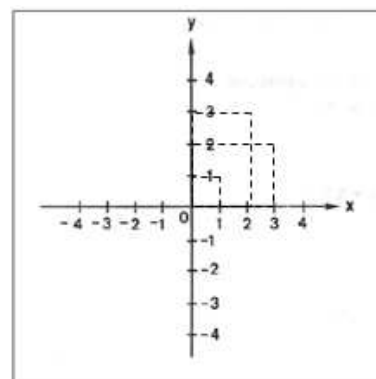


Figura 4.16 – Gráfico da Caixa 4



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 4.17 – Gráfico da Caixa 5

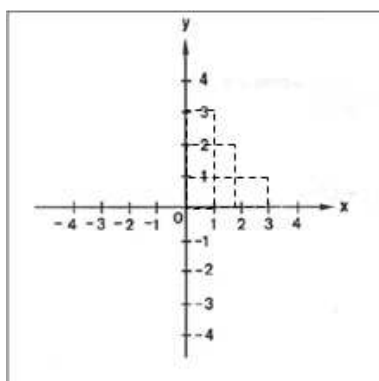
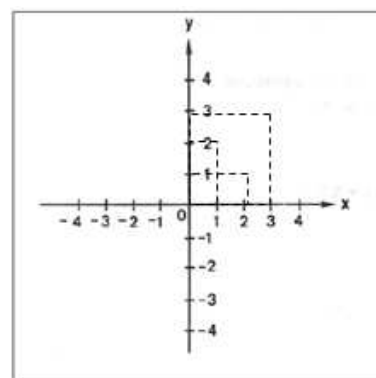


Figura 4.18 – Gráfico da Caixa 6



Fonte: Arquivo pessoal

- d) I quadrante. I quadrante.
 e) Não
 f) Não
 g) Sim. Porque ao traçar retas paralelas verticais ela interceptam o gráfico em um único ponto.

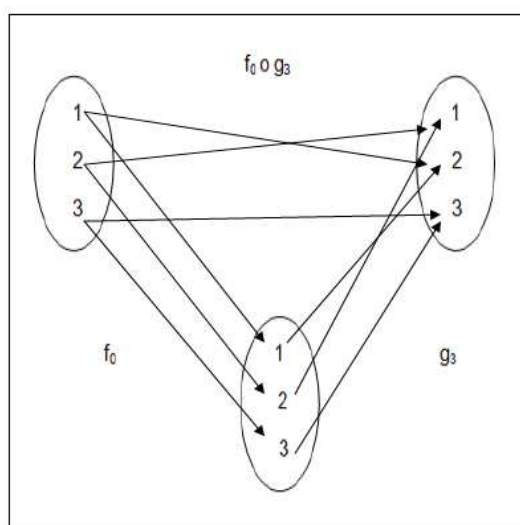
4º Momento

- a) Não
 b) Não
 c) São iguais
 d) Sim. Sim.
 e) Sim. Sim
 f) Não. Porque a imagem é igual ao contradomínio.
 g) Bijetora
 h) Não
 i) Todos

4.5.3 Soluções da Atividade C

I) Composição entre f_0 e g_3

Figura 4.19 – Composição I



Caixa 1 $f_0: \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Caixa 6 $g_3: \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

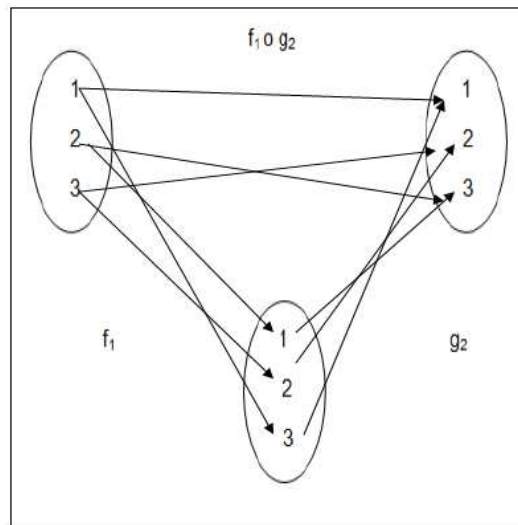
$f_0 \circ g_3: \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

$D = \{1, 2, 3\}$

$CD = \{1, 2, 3\}$

II) Composição entre f_1 e g_2

Figura 4.20 – Composição II



Fonte: Arquivo pessoal

Caixa 2 $f_1: \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$

Caixa 5 $g_2: \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$f_1 \circ g_2: \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$

$D = \{1, 2, 3\}$

$Im = \{1, 2, 3\}$

III) Composição entre f_2 e g_1

Fonte: Arquivo pessoal

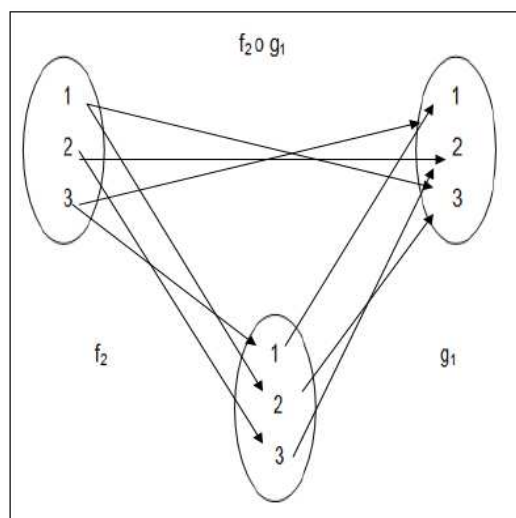
Caixa 3 $f_2: \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

Caixa 4 $g_1: \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$

$f_2 \circ g_1: \{(1,3), (2,2),(3,1)\}$

$D = \{1, 2, 3\}$

Figura 4.21 – Composição III



$$Im = \{1, 2, 3\}$$

3º Momento

I) $f_2 \circ f_1$

Partida	Chegada
1	1
2	2
3	3

Pares ordenados: $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

II) $g_2 \circ f_0$

Partida	Chegada
1	3
2	2
3	1

Pares ordenados: $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

III) $g_2 \circ g_3$

Partida	Chegada
1	3
2	1
3	2

Pares ordenados: $\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$

IV) $g_1 \circ f_0$

Partida	Chegada
1	1
2	3
3	2

Pares ordenados: $\{(1,1), (2,3), (3,2)\}$ a) I) f_0 II) g_2 III) f_1 IV) g_1 b) O resultado da composição é a função que é composta com f_0

c) A função é identidade, pois os elementos do domínio são iguais as suas respectivas imagens.

d) A função do item I

e) Não

f) Bijetora, pois cada elemento do domínio possuem uma única imagem e o contra-domínio é igual a imagem.

4º Momento

a) $\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$ b) $\{(1,1), (2,3), (3,2)\}$ c) $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ d) $\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$ e) $\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$ f) $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

I)

a) f_1 b) g_1 c) f_2 d) f_1 e) f_1 f) f_2

II) Que não tiveram o mesmo resultado

III) Que não tiveram o mesmo resultado

IV) Iguais

V) Ordens alteradas não obtiveram o mesmo resultado.

VI) Não

5º Momento: Jogo da velha

f_0	f_1	f_1
f_2	f_0	f_2
f_2	f_1	f_0

6º Momento

g_1

a) Sim, na segunda composição

Sim. f_1 e f_2

7º Momento: Racha cuca

g_1

4.5.4 Solução da Atividade D

2º momento

a)

I) $\{(1,1),(2,2)\}$

II) $\{(1,2),(2,1)\}$

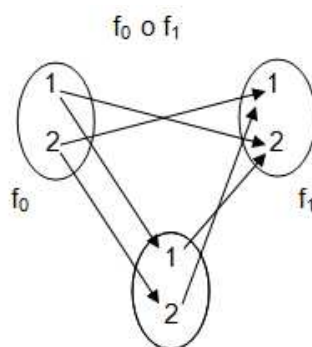
III) $\{(1,1),(2,2)\}$

IV) $\{(1,2),(2,1)\}$

b)

II)

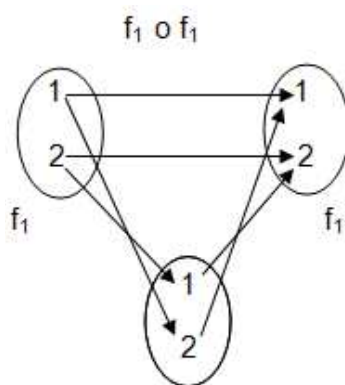
Figura 4.22 – Diagrama $f_0 \circ f_1$



Fonte:Arquivo pessoal

III)

Figura 4.23 – Diagrama $f_1 \circ f_1$



Fonte:Arquivo pessoal

c) Em todas as composições em que uma das funções é f_0 com outra função, II e IV

d)

O	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

e) $f_1 \circ f_1$

3º Momento: Permutação S_3

Tábua do S_3

O	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_0	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_1	f_1	f_2	f_0	g_3	g_1	g_2
f_2	f_2	f_0	f_1	g_2	g_3	g_1
g_1	g_1	g_2	g_3	f_0	f_1	f_2
g_2	g_2	g_3	g_1	f_2	f_0	f_1
g_3	g_3	g_1	g_2	f_1	f_2	f_0

Fonte: DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. Álgebra moderna, 2003, p.148

- a) Não
- b) Não
- c) O resultado é f_0 , pois é uma função identidade.
- d) f_1 e f_2 , g_1 e g_1
- e) O resultado é o mesmo das funções que participam da composição.
- f) São funções identidade.
- g) Não
- h) Sim
- i) f_0 . Elas são inversas.

4º **Momento:** Construção de uma nova tabela com as substituições obtidas na tabela anterior

No 2º momento concluímos que $f_1^2 = f_1 \circ f_1 = f_2$, $g_1 \circ f_1 = g_2$ e $g_1 \circ (f_1 \circ f_1) = g_3$. Assim sendo, com base nessas conclusões vamos completar a tabela abaixo.

O	f_0^0	f_1	f_1^2	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$
f_1^0	f_1^0	f_1	f_1^2	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$
f_1	f_1	f_1^2	f_1^0	$g_1 \circ f_1^2$	g_1	$g_1 \circ f_1$
f_1^2	f_1^2	f_1^0	f_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$	g_1
g_1	g_1	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$	f_1^0	f_1	f_1^2
$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1$	$g_1 \circ f_1^2$	g_1	f_1^2	f_1^0	f_1
$g_1 \circ f_1^2$	$g_1 \circ f_1^2$	g_1	$g_1 \circ f_1$	f_1	f_1^2	f_1^0

Fonte: DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. Álgebra moderna, 2003, p.148

5º Momento

g_1

5 CONCLUSÃO

As discussões realizadas durante as aulas do PROFMAT- UESB e nas AC's acerca da utilização de material concreto e manipulável no processo ensino-aprendizagem de matemática foram o ponto de partida para a escolha do tema desta dissertação. A partir de várias discussões, estudos e pesquisas, apresentamos uma proposta para o ensino de funções, utilizando material didático concreto e manipulável, denominado caixa de funções.

Ao realizarmos o trabalho, tivemos sempre a clareza de conceber a Caixa de Funções não como um instrumento exclusivo, mas como um recurso auxiliar no processo ensino-aprendizagem de um conteúdo importante e presente não apenas na área matemática, mas em todos os âmbitos do conhecimento e da vida cotidiana.

Dessa forma, sem fugir do padrão de escrita que habitualmente é exigido para os trabalhos desenvolvidos na área matemática, começamos relacionando alguns conceitos gerais de funções, partindo, em seguida, para a definição de material concreto e manipulável. Seguindo nossa trajetória de estudos, abordamos fatos históricos relacionados ao conhecimento matemático e ao uso de materiais concretos e manipuláveis como instrumentos facilitadores da aprendizagem, analisamos os prós e contras na confecção e utilização da Caixa de Funções, para, embasados no conhecimento teórico, descrevermos minuciosamente a construção da caixa de funções e apresentarmos propostas de atividades para sua utilização.

Esperamos que o uso de material concreto e manipulável seja de grande valia para o ensino da matemática, por outro lado ele proporciona o manuseio dos objetos de estudo, tendo o maior contato com o conhecimento, além de ser um processo de constante análise sobre o objeto manuseado. Dessa forma ele exige o uso constante de seus conhecimentos matemáticos sobre o material trabalhado, dando a oportunidade de refletir matematicamente a respeito do objeto estudado, estabelecendo relações, aplicando o conhecimento obtido, e adquirindo novos conhecimentos.

Assim, acreditamos que o uso do material concreto e manipulável pode proporcionar aulas mais dinâmicas, significativas e prazerosas para alunos e professores, favorecendo a discussão, a troca de ideias, o questionamento, o levantamento de hipóteses e a formulação de conceitos por parte dos alunos, pois a aula de matemática deve ser compreendida como um dos locais para preparar os indivíduos que a sociedade atual exige. Deste modo, os professores só podem dar resposta a estas novas exigências e responsabilidades através de uma inovação curricular, de uma nova concepção pedagógica e de uma correta aplicação de materiais, com aluno participando ativamente do seu processo de construção do conhecimento.

Importante ressaltar, que as riquezas visuais e manipulativas destes materiais ajudam os alunos a relacionarem as várias informações tratadas em funções. Eles auxiliam, também, na generalização de relações a partir de situações particulares, sem esquecermos que o professor é a peça fundamental para o sucesso desta proposta. Pois, o material por si só não promove a aprendizagem. As intervenções, estímulos e questionamentos feitos pelo professor motivarão as descobertas dos alunos.

Nossa experiência prática em sala de aula, permite afirmar que algumas atividades exploram apenas o conceito de função, com todos os elementos e outras dão ênfase a função composta e inversa de forma distinta sem inter-relações, mas, com o uso da Caixa de Funções, facilmente, o professor consegue adaptar atividades para trabalhar os tópicos de forma integrada e ou, se preferir, de forma separada.

Nesse contexto, o material concreto e manipulável é um instrumento para auxiliar o professor em suas aulas e nas atividades propostas pelos próprios livros didáticos, pois partindo da minha experiência ao trabalhar com funções no ensino médio, percebi, claramente, a dificuldade em aliar teoria e prática tanto por parte do professor como dos alunos. Só as discussões, problemas do cotiando e exercícios não se tornam suficientes para muitos criarem imagens mentais. Acreditamos que a partir da manipulação dos materiais, isso se tornará mais fácil, sendo, principalmente, que essa manipulação poderá ser utilizada para introduzir, aprofundar e consolidar o assunto.

Portanto, esse material é, também, fruto das nossas inquietações em relação a nossa prática no ensino de funções e da nossa procura por instrumentos que contribuam para a melhoria de nossas aulas, com o objetivo primordial de melhorar o desempenho dos nossos alunos.

Pautados nesta perspectiva, compreendemos que o professor de matemática deve ter como aliado uma série de benéficos educacionais como no caso da utilização de materiais concretos e manipuláveis. Assim, ao apresentarmos propostas de utilização da Caixa de Funções, partimos da concepção do seu uso como recurso motivacional e funcional para mediar o ensino de funções, dando ênfase a função composta e inversa por ser dois dos tópicos mais criticados pelos alunos, segundo observações de colegas em discussões nas AC's, que comumente atribuem a essa dificuldade a questão do tempo limitado para cumprir o programa bimestral, como também a confiança necessária para conduzir atividades que possuam caráter mais imprevisível.

Não podemos deixar de registrar que, acima de tudo, a caixa de função não tem apenas função lúdica, mas, principalmente, a função de mediação do conteúdo funções, onde o aluno compreenderá a importância do conteúdo e elaborará seu próprio conceito, podendo relacioná-lo a sua vida cotidiana.

Por fim, constatamos que o trabalho foi de suma importância para a nossa prática

e apresentou evolução significativa, nos levando a concluir que o material concreto e manipulável é um grande aliado na mudança da cansativa da aula tradicional de Matemática para uma aula participativa e atrativa, onde o aluno é o protagonista do processo ensino-aprendizagem. Porém, cabe refletirmos que essas são ações simples e ações mais complexas para que a matemática ocupe o lugar de destaque que merece na educação, vão exigir maior aprofundamento nos elementos que integram a educação, desde a mudanças na gestão curricular, a concepção de currículo, até a formação de professores e o investimento em infraestrutura nas escolas, como a criação de um laboratório específico para atividades matemáticas.

Alem disso, sabemos da limitação da Caixa de Funções: nas caixas todas as funções são bijetoras e têm um conjunto de partida finito. Porém o conceito de função é mais amplo que isto: o conjunto de partida pode ser infinito e as funções não têm que ser necessariamente bijetoras. Assim é preciso pensar num melhoramento do material concreto e manipulado que consiga refletir essas características.

Condições ideais a parte, esperamos que este material proporcione ao leitor- professor subsídios para mudanças significativas em sua prática pedagógica e que seja fonte de pesquisa para outros trabalhos acadêmicos que abordem a mesma temática.

REFERÊNCIAS

- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G.. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.
- DANTE, Luis Roberto. *Matemática: Contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010.
- DOMINGUES, Hygino H. *Álgebra Moderna: volume único*. 4 ed. reform - São Paulo: Atual, 2003. Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi.
- FIORENTINI, D. MIRION, M.A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática*. Boletim da sbem-SP, São Paulo, SBM/SP, ano 4, n 7, 1990.
- IEZZI G. *Matemática: ciências e aplicações*. Vol 1. São Paulo: Atual, 2004. Gelson Iezzi; Osvaldo Cruz; David Degenszajn; Roberto Périgo e Nilze de Almeida.
- IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 1: Conjuntos, Funções*. . ed. São Paulo, SP: Atual editora, 1977. Gelson Iezzi e Carlos Murakami.
- JANUARIO, G. *Materiais manipuláveis: mediadores na (re)construção de significados matemáticos*. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão, Universidade Guarulhos, Guarulhos, 2008. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_januario\(1\).pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_januario(1).pdf) > . Acesso em : 27 de junho de 2016, 15 horas.
- LINS, R. C.. *A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática*. Revista de Educação. Campinas, n. 8, p. 117-123, jun. 2005
- LORENZATO, Sérgio. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*, 3. ed. Campinas, SP: Autores Associadas, 2010. (Coleção formação de professores).
- MEDEIROS, C. F.. *Por uma educação matemática como intersubjetividade*. In: *Educação Matemática*. Org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. 2.ed. São Paulo: Centauro, 2005, pp.13-44.
- NACARATO, A. M.. *Eu trabalho primeiro no concreto* O Revista de Educação Matemática. São Paulo, SBEM, Ano 9, n 9-10 (2004-2005).

TEXTOS : SELEÇÃO VARIADA In: *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani e BORBA, Marcelo Carvalho (orgs). Campinas: Mercado de Letras, 2004.

VITTI, Catarina Maria. *Matemática com prazer: a partir da história e da geometria*. 2.ed. Piracicaba: UNIMEP, 1999.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *Matemática: ensino médio: volume 1*. Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar matemática; v1*. São Paulo: Ftd, 2010.

ZAHN, Maurício. *Teoria Elementar das Funções*. Rio de Janeiro : Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.

YOUSCHKEVITCH, A. P.. The Concept of Function. Archive for History of Exact Sciences, 1976, Página 6:9.