
Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Desvendando a Matemática do GPS

por

Davi Dantas Lima

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

Abril de 2013

Davi Dantas Lima

Desvendando a Matemática do GPS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito final para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

**São Cristóvão
2013**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

L732d Lima, Davi Dantas
Desvendando a matemática do GPS / Davi Dantas Lima;
orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2013.
49 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Geometria. 2. Sistema de posicionamento global. 3.
Matemática aplicada. I. Santos, Almir Rogério Silva, orient. II. Título

CDU 514.15



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

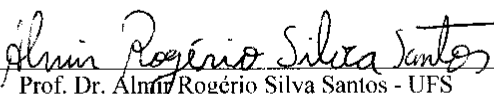
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

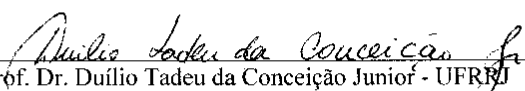
Desvendando a Matemática do GPS

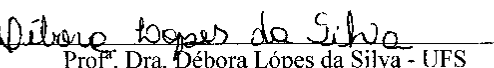
por

Davi Dantas Lima

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador


Prof. Dr. Duílio Tadeu da Conceição Junior - UFRB
Primeiro Examinador


Prof.ª Dra. Débora Lopes da Silva - UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 12 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	viii
1 Histórico	1
2 A Geometria do Globo Terrestre	6
2.1 Coordenadas Geográficas	6
2.2 Geometria Plana	8
2.3 Geometria Espacial	9
2.3.1 Planos e Superfícies Esféricas	10
2.3.2 Superfície Esférica em Coordenadas Cartesianas	12
2.3.3 Relação entre Coordenadas Geográficas e Coordenadas Cartesianas	17
2.4 Como é Medida a Altitude	20
2.5 Distância entre Dois Pontos em uma Superfície Esférica	21
3 Como Funciona o GPS	26
4 Análise de erros do sistema	29
4.1 Desvios dos Sinais na Atmosfera	29
4.2 Erros de Órbita	29
4.3 Erros do Relógio do Receptor	30
4.4 Erros de Multitrajetória	31
4.5 Erros Devido à Geometria dos Satélites	31
5 Sugestões de Atividades	33
5.1 Distância entre Duas Localidades no Planeta	33
5.2 Trilateração em Mapas	35
5.3 Geometria do GPS	37

Agradecimentos

Chego ao final de mais uma etapa e é impossível ir adiante sem agradecer ao grande responsável por todos os sucessos que obtive em minha vida. A ti, ó Deus! Toda honra, toda glória e todo o louvor.

À minha esposa Nealda, a quem amo muito, pela paciência e perseverança, pois segurou as cordas, em casa, nas minhas “ausências”, enquanto eu trabalhava de dia e estudava até tarde da noite e à minha filha Sofia, presente que Deus me deu, que na sua inocência não entendia por que o papai não podia mais colocá-la para dormir.

Ao meu pai Roosevelt, um “devorador de livros” com quem aprendi o gosto pela leitura e pelo estudo e à minha mãe Eulina, que dedicou longos anos de sua vida para me dar sempre do melhor e em quem tenho um grande exemplo de força.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos, amigo de longa data, que foi peça fundamental desde a escolha do tema até a conclusão do trabalho, de quem me orgulho muito por ter sido colega de turma na Universidade Federal de Sergipe e por ter acompanhado cada passo de sua caminhada de sucesso profissional.

Aos professores, que compartilharam conosco este bem tão precioso: “Conhecimento”, cobrando de nós um preço justo: “Dedicação”, nessa contabilidade saímos todos lucrando. Estes ainda nos fizeram lembrar que avaliar é muito mais do que uma mera prova, só nos lembramos disso quando estamos do outro lado do *birot*, na condição de alunos.

Aos colegas mestrados, que lutaram junto comigo durante esses dois anos, pelo espírito de grupo que nos uniu e por termos conseguido nos manter firmes, apesar das grandes diferenças que nos distinguiam, sendo que poucos ficaram para trás.

Aos amigos: Hélio e Welington, pelo grande apoio que me deram durante o curso e na preparação para o exame de qualificação e também a Elisabete, Sérgio, Anselmo, Lúcia, Márcio, César e André pelos momentos que passamos juntos no grupo de estudo onde, em meio ao desespero e ao cansaço, ainda encontrávamos forças para rir muito. Já sinto saudades!

À SBM pela iniciativa em implementar no nosso país um programa tão ousado objetivando a formação continuada de professores e, por conseguinte, uma elevação do nível da educação básica.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos que foi de fundamental importância para o desenvolvimento acadêmico.

Aos membros da Banca Examinadora que aceitaram prontamente o convite e nos honraram com suas presenças e contribuições.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este sonho pudesse ser concretizado, dedico meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

A presente monografia tem como objetivo evidenciar os princípios matemáticos por trás do funcionamento do Sistema de Posicionamento Global conhecido por GPS. Após uma abordagem geral da evolução ocorrida até chegarmos a essa tecnologia, demonstraremos alguns teoremas das geometrias: plana, espacial e analítica que, aplicados juntamente com alguns princípios da Física (velocidade média, velocidade da luz, efeito Doppler,...), nortearam os criadores desta poderosa ferramenta que determina com notáveis precisão e exatidão, em qualquer parte do globo terrestre incluindo a atmosfera, a hora e a posição (latitude, longitude e altitude) de um transmissor. E, a partir daí, sugerir atividades interdisciplinares, a serem desenvolvidas em nível de educação básica, que estimulem a curiosidade dos alunos pelos conhecimentos científicos nelas contidos.

Palavras Chaves: Sistema de posicionamento global, GPS, geometria, latitude, longitude, altitude, trilateração, superfície esférica, interdisciplinar.

Abstract

The purpose of this monograph is to study the mathematical principles behind the Global Positioning System, the so-called GPS. We start with a historical approach of the evolution of this technology. Then we show some theorems in geometry: plane, spatial and analytic, which together with some physical principles (average speed, speed of light, the Doppler effect,...) guided the creators of this powerful tool that determines with remarkable accuracy the position (latitude, longitude and altitude) of a transmitter. Finally, we suggest activities to be performed at the level of basic education, to stimulate students' curiosity by scientific knowledge contained therein.

Keywords: Global Positioning System, GPS, satellites, latitude, longitude, altitude, trilateration, spherical surface, interdisciplinary.

Introdução

“**Onde estamos?**” esta é uma pergunta comum, mas sua resposta pode não ser tão simples. Desde a antiguidade o homem necessita se localizar em seu mundo de modo que sabendo onde está ele pode pensar em uma forma prática e segura de “como ir e voltar”.

O avanço da ciência humana resolveu esse problema quando, dentre outras engenhocas, foi criado o GPS. Porém muitas criações maravilhosas não sairiam do papel se os seus criadores não detivessem conhecimentos (muitos deles básicos) da “boa” e “velha” Matemática.

O GPS, em sua essência, está repleto de aplicações de geometria básica e avançada, envolvendo em seu funcionamento elementos como: distâncias, ângulos, circunferências, esferas, planos, vetores, equações, dentre outros.

E ainda nos permite relacionar a Matemática, a Física e a Geografia gerando uma rica fonte de pesquisa e fornecendo bagagem suficiente para um excelente projeto interdisciplinar.

Ao começarmos a explorá-lo, perceberemos o quão vasto é o conhecimento contido no projeto do GPS, mas aqui nos deteremos quase sempre nos aspectos matemáticos e funcionais do mesmo.

Construímos o trabalho em cinco capítulos sendo o primeiro deles o “Histórico” onde relatamos como os sistemas de localização foram aprimorados até chegarmos ao GPS. Em seguida, vem o Capítulo “A Geometria do Globo Terrestre” que traz os princípios matemáticos envolvidos no funcionamento do GPS como embasamento teórico para que no capítulo seguinte, “Como Funciona o GPS”, pudéssemos entendê-lo. No Capítulo “Análise de Erros” mostramos quais e como são contornados os principais erros contidos no processo de localização e concluímos com “Sugestões de Atividades” a serem desenvolvidas com alunos do ensino básico.

Capítulo 1

Histórico

O grande desafio do processo de localização sempre foi determinar um referencial seguro. Elementos da natureza como árvores, montanhas, rios etc., serviram por algum tempo em pequenos deslocamentos mas, devido a sua mutabilidade, nunca foram eficientes. O céu passa então a ser o foco das atenções pois o homem encontra nas estrelas um referencial perdurável que o levou a criar e utilizar instrumentos para medir o ângulo de elevação dos astros acima do horizonte e assim, determinar a latitude. São alguns desses instrumentos:

O Kamal - Pequena tábua quadrada ou retangular, presa a uma corda com nós, que era erguida a altura dos olhos e suas bordas opostas eram alinhadas com o horizonte e a estrela polar, respectivamente. A corda era presa aos dentes e esticada de modo que os nós determinavam o ângulo de elevação - ver Figura 1.1;

A balestilha - conjunto de duas varas graduadas perpendiculares entre si, devia-se olhar por uma extremidade da maior vara e mover a menor de modo a visualizar simultaneamente, por suas extremidades, a linha do horizonte e o astro - ver Figura 1.2;

O astrolábio - roda graduada que tinha, presa ao seu centro, uma seta móvel que, quando alinhada com o astro, indicava na roda a altura do mesmo - ver Figura 1.3;

O quadrante - Quarto de círculo graduado em sua borda, feito em madeira ou latão e com duas miras em um dos lados retos, mirando no astro determinava-se, por um fio de prumo preso ao centro do arco, o ângulo de elevação do astro - ver Figura 1.4.

A estrela polar, por ser fixa sobre o polo norte, torna-se um elemento fundamental no processo de localização humana.

Outra descoberta importante foi o magnetismo terrestre, possibilitando a invenção da bússola (agulha metálica, magnetizada, suspensa pelo seu centro de gravidade de modo a girar livremente e apontando sempre para o polo sul magnético da terra que equivale

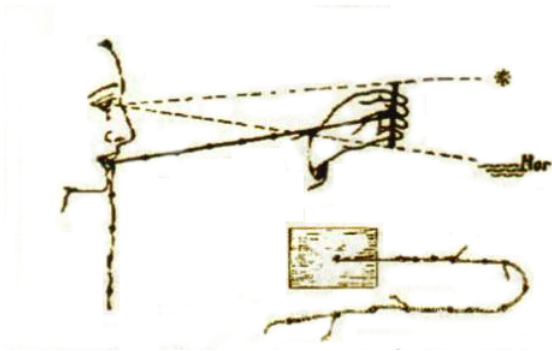


Figura 1.1: Utilização do Kamal.

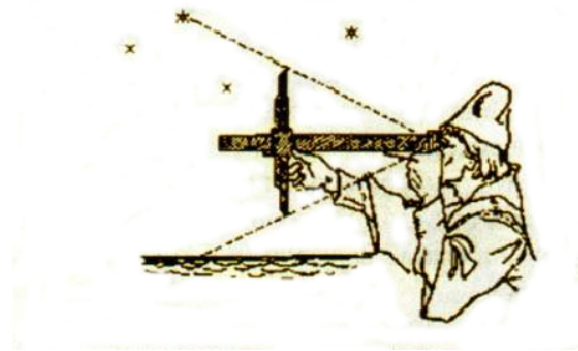


Figura 1.2: Utilização da Balestilha.



Figura 1.3: Astrolábio.



Figura 1.4: Quadrante Marinho.

a um ponto próximo do polo norte geográfico - ver Figura 1.5) que durante o período das grandes navegações (a partir do séc. XV), foi largamente utilizada juntamente com instrumentos a pouco citados. Estes foram satisfatórios por muito tempo, apesar de apresentarem limitações como: não poderem ser usados durante o dia ou numa noite nublada (com exceção da bússola) e, principalmente, por não fornecerem a posição da embarcação, mas apenas a direção a ser seguida.

Quando tomou conhecimento da forma da terra, o homem criou os conceitos de latitude e longitude, sendo que a primeira já era facilmente determinada através da observação da estrela polar, porém a longitude exigia a determinação da diferença entre a hora local e a hora de Greenwich (cada hora equivale a 15° , já que $360^\circ \div 24 = 15^\circ$), o problema é que os relógios de então não eram confiáveis pois não suportavam as intempéries de viagens marítimas (como: umidade, variação de temperatura e balanço do navio) até que, em 1761, o inglês John Harrison desenvolveu o cronômetro marinho que tinha compensadores de dilatação térmica e peças resistentes a desgastes.



Figura 1.5: Bússola.

Durante a Segunda Guerra Mundial, ocorreu um grande avanço no que se refere a navegação, quando passou-se a usar ondas de rádio para localizar veículos fazendo uso do efeito Doppler, esta propriedade da Física relaciona a velocidade do móvel com a diferença entre a frequência com que as ondas de rádio incidem e a frequência com que são refletidas e assim determinava-se as distâncias entre o veículo e as emissoras. Com essas três distâncias e a localização das emissoras era possível determinar, pelo processo de trilateração, três circunferências cuja intersecção (representada por um ponto único como veremos no próximo capítulo) determinava a localização do veículo. “LORAN” (*long range navigation - navegação de longo alcance em inglês*), “Decca” e “Omega” são exemplos de sistemas desenvolvidos com essa tecnologia. Tais sistemas apresentavam limitações como o pequeno alcance dos sinais de rádio e da disponibilidade de um número pequeno de estações.

Na década de 50, tem início a “Corrida Espacial” com o lançamento do satélite Sputnik 1, pela antiga União Soviética em 1957 e a contrapartida americana: o satélite Explorer 1 em 1958. Dois anos mais tarde os Estados Unidos lançam o satélite Transit 1B, implementando o primeiro sistema de navegação por satélite baseado no efeito Doppler. Por ser um sistema bidimensional, por só calcular a posição de móveis em velocidades baixas e por existir muita interferência nos satélites, seu uso ficou restrito basicamente a navegação marítima.

Todo conhecimento sobre localização e posicionamento, acumulado até então, contribuiu para que finalmente fosse desenvolvido um sistema eficiente. Assim, em 1973, começava a ser desenvolvido um projeto revolucionário que só viria entrar em pleno funcionamento a partir de 1991: O NAVSTAR/GPS (*Navigation Satellite with Time and Ranging / Global Positioning System*). Há uma controvérsia quanto à autoria do projeto sendo que a pelo menos três americanos é atribuída a autoria: O astrofísico Ivan Getting (1912 - 2003), o engenheiro Bradford Parkinson (1935 -) e o físico Roger L. Easton (1921 -) os quais foram premiados pelo feito por diferentes instituições científicas (Ver Figuras 1.6; 1.7; 1.8).



Figura 1.6: Parkinson.



Figura 1.7: Easton.



Figura 1.8: Ivan.

O GPS, como é mais conhecido, foi em princípio de uso exclusivamente militar até que, em 1983, um avião comercial invadiu inadvertidamente o espaço aéreo soviético sendo abatido por mísseis. O ocorrido levou o Exército Americano a liberar o uso civil e assim, novas fatalidades seriam evitadas. Mas, temendo que o sistema fosse usado contra eles, o sinal era distorcido propositalmente, o que ocasionava uma baixa precisão na localização. Só em 2000 acabou a distorção do sinal, permitindo que uma pessoa munida de um receptor, possa determinar, em tempo real, informações ao seu respeito como: latitude, longitude, altitude, rumo e velocidade com uma exatidão de alguns metros (até de centímetros, no caso de receptores geodésicos, como veremos no Capítulo 3 - p. 26).



Figura 1.9: Distribuição das estações de controle no planeta.

Em sua composição o sistema é dividido em três partes chamadas de segmentos. O primeiro deles é o segmento espacial, composto por vinte e quatro satélites que giram ao redor da terra, a uma altitude de aproximadamente 20.200 Km, em um período de 11 horas e 58 minutos e em seis diferentes órbitas (cada uma com 4 satélites e espaçadas 60 graus uma da outra e inclinadas em 55 graus em relação ao plano que contém a linha do

Equador) de modo que, observando de qualquer lugar do planeta, há sempre um mínimo de quatro satélites acima da linha do horizonte. Cada satélite dispõe de quatro relógios de alta precisão (dois de césio e dois de rubídio).

O segundo é o segmento de controle (ver Figura 1.9), formado por 5 estações localizadas estrategicamente nas proximidades da linha do Equador em: Colorado Springs (EUA), Havái (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshall, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul), Ilha de Diego Garcia (no Índico). Estas tem a função de monitorar os satélites corrigindo, quando necessário, suas órbitas. A de Colorado Springs é a estação principal e controla todo o sistema.

O terceiro e último é o segmento de usuários representado por todos os receptores espalhados por todo o mundo. Cada receptor, ao captar o sinal de no mínimo quatro satélites, pode calcular sua posição. Alguns aparelhos dispõem de mapas que permitem fazer roteiros de viagens, sugerir rotas alternativas mais rápidas e que evitam engarrafamentos. Também são aplicados na navegação marítima e aérea, na geodésia, na topografia, na agricultura de precisão, na cartografia e na logística, rastreamento de veículos e cargas, dentre outras aplicações.

Capítulo 2

A Geometria do Globo Terrestre

Agora vamos nos aprofundar um pouco mais, desvendando a matemática que há por trás do sistema GPS. Baseado em [1] e [2], vamos expor alguns conceitos ligados a localização geográfica como: latitude, longitude, meridianos e paralelos, também apresentaremos teoremas das geometrias: plana, espacial e analítica, envolvendo o importante processo de trilateração e as superfícies esféricas. Todo este conhecimento norteou os inventores na execução deste ousado projeto.

2.1 Coordenadas Geográficas

Já havíamos mencionado a latitude e a longitude como contribuições importantes do homem para a sua localização global. Para melhor compreensão desses conceitos, vamos identificar pelos nomes alguns elementos já conhecidos. Supondo que a terra é uma esfera, chamamos de **eixo polar** a reta que contém o centro da terra e ao redor da qual a mesma desenvolve o movimento de rotação. Chamamos respectivamente de **polo Norte** e **polo Sul** os pontos N e S , intersecções do eixo polar com a superfície da terra (ver Figura 2.1).

O plano perpendicular ao eixo polar e que passa pelo centro da terra chamamos de **plano do Equador** este divide a terra em duas partes chamadas de **Hemisfério Norte** e **Hemisfério Sul** e cada uma contém os respectivos polos (ver Figura 2.2).

A circunferência determinada pelo plano do Equador e a superfície da Terra chamamos de **linha do Equador**(ver Figura 2.1). Os Paralelos são circunferências determinadas na superfície da terra por planos paralelos ao plano do Equador sendo que a linha do Equador também é um paralelo.

Os **meridianos** são semicircunferências com extremidades nos polos, dos quais destacamos o meridiano de **Greenwich** onde, por definição a longitude é 0° (ver Figura 2.1). Ele se chama assim porque passa pelo famoso Observatório Real na localidade de Greenwich, a sudeste de Londres. O plano que o contém divide a terra em duas partes: **Hemisfério oeste** e **Hemisfério leste** (ver Figura 2.3).

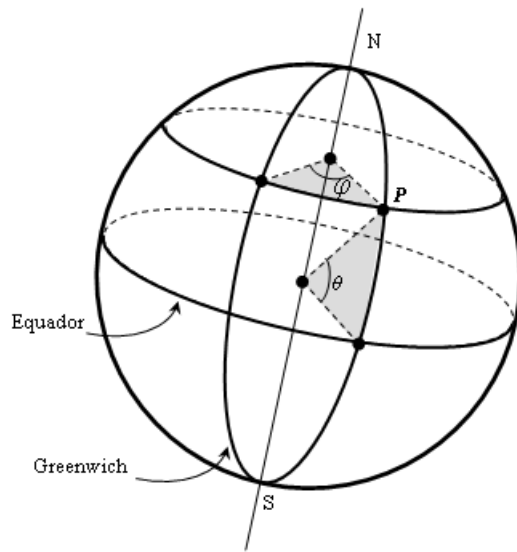


Figura 2.1: O Ponto P de latitude θ° N e longitude φ° E.

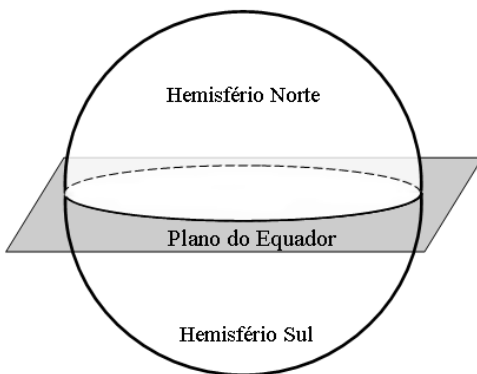


Figura 2.2: Plano do Equador.

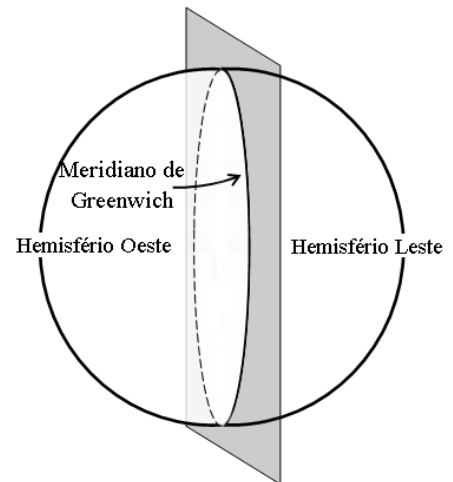


Figura 2.3: Plano de Greenwich.

Definição 2.1 Dado um ponto P na superfície terrestre a **Latitude** de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Equador e que está contido em um meridiano. A latitude se mede de 0° a 90° e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificada em N (north - norte em inglês) ou S (south - sul em inglês).

Definição 2.2 Dado um ponto P na superfície terrestre a **Longitude** de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Meridiano de Greenwich e que está contido em um paralelo. A longitude mede de 0° a 180° e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificada em E (east - leste em inglês) ou W (west - oeste em inglês).

2.2 Geometria Plana

No Capítulo 1 mencionamos o processo de trilateração pelo qual era determinada a posição fazendo uso de três circunferências cuja intersecção era formada por um único ponto, para ilustrá-la vamos imaginar a seguinte situação inspirada em [2]:

Exemplo 2.1 *É perto do meio-dia e Sofia está perdida no interior de Sergipe entre Malhador e Divina Pastora. Ela dispõe de um mapa (ver Figura 2.4) e material de desenho geométrico e sabe que em Divina Pastora, Riachuelo e Santa Rosa de Lima (cidades próximas) existem igrejas onde os sinos soam precisamente a cada hora sendo ouvidos a grandes distâncias.*

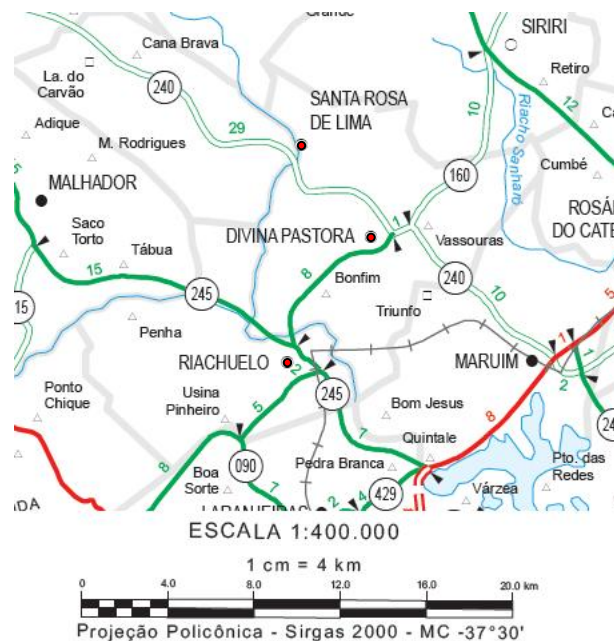


Figura 2.4: Mapa da região.

Digamos que o relógio de Sofia e das igrejas estão sincronizados e que cada sino tem um timbre diferente o que permite identificá-los. 12,5 segundos após o meio-dia Sofia ouve o sino de Riachuelo, o de Divina Pastora é ouvido 17,3 segundos após o meio-dia e por fim o de Santa Rosa de Lima em 19,8 segundos.

Sabendo que o som se propaga a uma velocidade de 340 metros por segundo, Sofia pode então calcular as distâncias r_1 , r_2 e r_3 em relação a Riachuelo, Divina Pastora e Santa Rosa de Lima, respectivamente.

$$r_1 = 12,5 \times 340 = 4.250 \text{ m};$$

$$r_2 = 17,3 \times 340 = 5.882 \text{ m};$$

$$r_3 = 19,8 \times 340 = 6.732 \text{ m}.$$

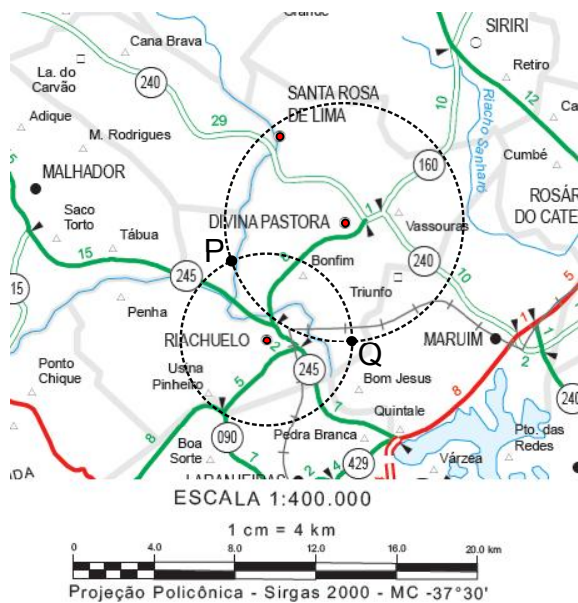


Figura 2.5: Sofia está em P ou Q .

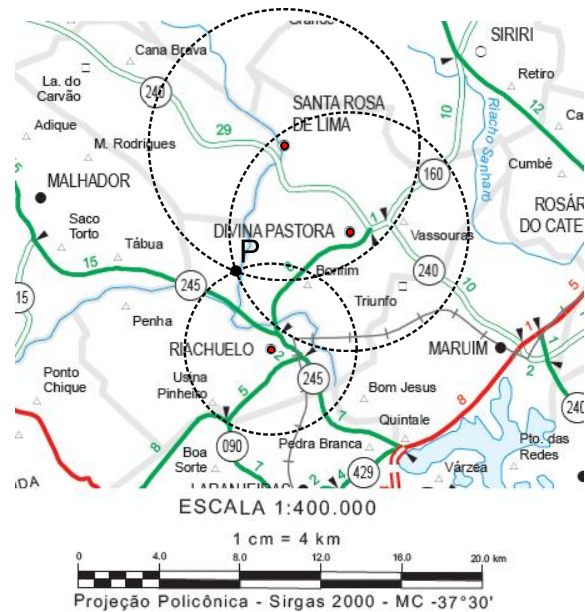


Figura 2.6: Sofia está em P .

Assim Sofia traça no mapa uma circunferência centrada em Riachuelo e de raio r_1 e outra centrada em Divina Pastora e de raio r_2 . As circunferências se intersectam em dois pontos P e Q (ver Figura 2.5). Se Sofia souber que está próxima do Rio Sergipe, eliminará o ponto Q caso contrário, ela traça uma terceira circunferência centrada em Santa Rosa de Lima e de raio r_3 determinando assim que sua localização é o ponto P (ver Figura 2.6).

É importante considerar que, no exemplo 2.1, o som não sofre interferências do vento, relevo,... e que Sofia tem conhecimento de desenho geométrico, proporção, velocidade, escalas. O exemplo considera a região como um plano, logo admitiu-se uma altitude constante.

De modo geral, conhecendo as distâncias de onde estamos até três pontos bem localizados em um sistema de coordenadas, a nossa localização é dada por um único ponto.

2.3 Geometria Espacial

Como a terra tem um formato aproximadamente esférico (na verdade se aproxima mais de um elipsóide), é importante conhecer as características deste elemento geométrico, a esfera, que contribuiu para o desenvolvimento do GPS. Baseado em [1] apresentamos as seguintes definições e teoremas.

2.3.1 Planos e Superfícies Esféricas

Definição 2.3 Dado um ponto O e um número real r , chamamos de **superfície esférica de raio r e centro O** , indicada por S , o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que

$$d(P, O) = r,$$

onde $d(P, O)$ denota a distância entre P e O .

Definição 2.4 Dado um ponto O e um número real r , chamamos de **esfera de raio r e centro O** , indicada por F , o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que

$$d(P, O) \leq r.$$

Os pontos que pertencem à esfera e não pertencem à superfície esférica a ela correspondente são chamados de **pontos interiores à superfície esférica**.

Um plano E é **tangente** a uma superfície esférica S se a intersecção entre ambos é um único ponto que é chamado de **ponto de tangência**. Se a intersecção contiver mais de um ponto, o plano então é dito secante à S e, neste caso, a intersecção é uma circunferência.

No teorema a seguir chamaremos também de raio o segmento de reta com extremidades no centro e na superfície esférica.

Teorema 1 *Um plano perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica é tangente à mesma. Reciprocamente, todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio no ponto de tangência.*

Demonstração: Se E é um plano perpendicular ao raio em T , O é o centro da superfície esférica S e \overline{OT} é um raio de medida denotada por OT , então basta mostrar que nenhum outro ponto de E está na superfície esférica S .

Seja P um ponto qualquer de E , diferente de T . Como E é perpendicular a \overline{OT} temos que o triângulo OPT é retângulo em \hat{T} , assim, $OP > OT = r$ o que nos leva a concluir que P não está na superfície esférica.

Para a recíproca, seja E um plano tangente à superfície esférica no ponto T . Supondo por absurdo, que E não seja perpendicular a \overline{OT} mostraremos que tal hipótese nos leva a uma contradição.

Se F é um ponto de E tal que \overline{OF} é perpendicular a E então, $F \neq T$. Tomemos um ponto R pertencente à reta suporte de \overline{FT} tal que F é ponto médio de \overline{TR} . Então, $\triangle OFR \cong \triangle OFT$, assim, $OR = OT = r$ donde concluímos que R também pertence a S o que é absurdo pois E é tangente a superfície esférica S (ver Figura 2.7).

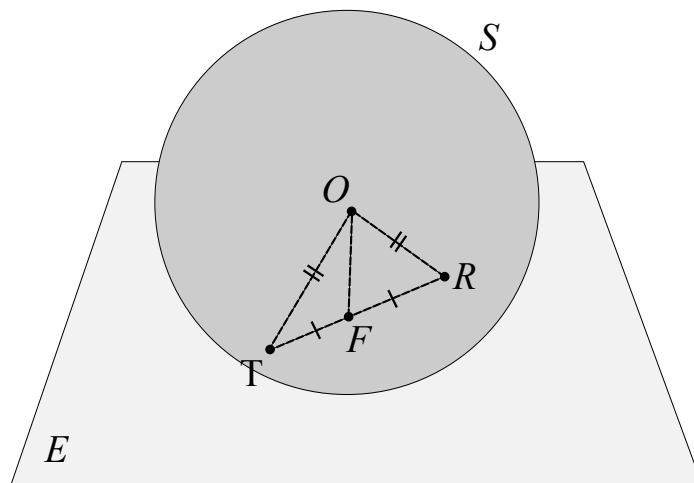


Figura 2.7:

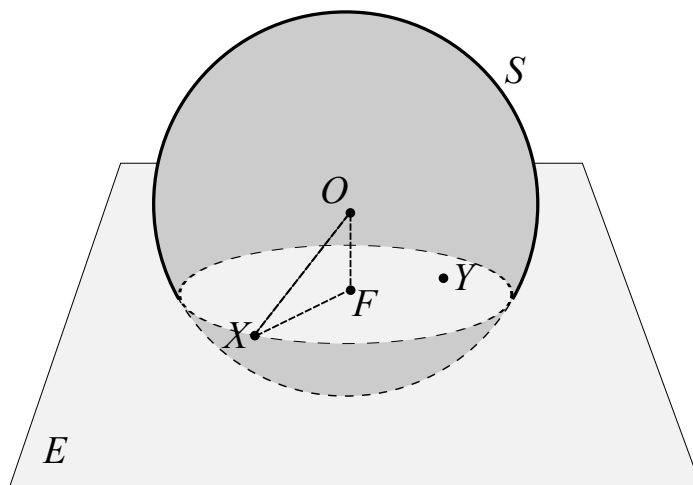
□

Teorema 2 *A interseção de uma superfície esférica com um plano que passa pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.*

Demonstração: Dada a superfície esférica S com centro O e raio r e plano E que passa por O , tem-se que $E \cap S$ é o conjunto formado por todos os pontos de E cuja distância até O é igual a r , ou seja, uma circunferência de centro O e raio r .

□

Teorema 3 *Se um plano contém um ponto interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. Se esse plano não contém o centro da superfície esférica, então o centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.*



Demonstração: Seja E um plano que não passa pelo centro O da superfície esférica S de raio r e que contém o ponto Y em seu interior. Seja F um ponto de E tal que \overline{OF} é perpendicular a E . Devemos mostrar que $E \cap S$ é uma circunferência de centro F .

Note que $OY < r$ (já que Y está no interior de S) e, em $\triangle OFY$, temos que a hipotenusa \overline{OY} e o cateto \overline{OF} são tais que $OF < OY < r$, o que nos leva a concluir que F também está no interior de S . Dado um ponto $X \in E \cap S$ temos que em $\triangle OFX$ é retângulo em F daí, pelo Teorema de Pitágoras,

$$OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2,$$

o que implica que

$$FX = \sqrt{r^2 - OF^2} > 0.$$

Assim, $E \cap S$ está contida na circunferência λ de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Falta agora mostrar que se $X \in \lambda$, então $X \in E \cap S$. De fato, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} X \in \lambda &\Rightarrow OX^2 = OF^2 + FX^2 \\ &= OF^2 + r^2 - OF^2 \\ &= r^2 \\ &\Rightarrow OX = r \text{ e } X \in S \\ &\Rightarrow X \in E \cap S, (\forall X \in \lambda). \end{aligned}$$

□

Chamamos de **circunferência máxima** a intersecção de uma superfície esférica com qualquer plano que passe pelo seu centro.

2.3.2 Superfície Esférica em Coordenadas Cartesianas

Lema 1 Os pontos A, B, C e D em \mathbb{R}^3 são coplanares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0,$$

onde cada linha é dada pelas entradas dos vetores $\overrightarrow{AB} = B - A$, $\overrightarrow{AC} = C - A$, $\overrightarrow{AD} = D - A$.

Demonstração: Se quatro pontos distintos A, B, C e D do \mathbb{R}^3 são coplanares, então $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ também são coplanares logo, algum desses vetores é combinação linear dos outros dois. Suponhamos, sem perda de generalidade, que \overrightarrow{AB} seja combinação linear de \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $B - A = \alpha \cdot (C - A) + \beta \cdot (D - A)$ e daí:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha \cdot (C - A) + \beta \cdot (D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot (C - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta \cdot (D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \\ &= \alpha \cdot \begin{vmatrix} C - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} D - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Para a recíproca, se

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0,$$

então temos duas possibilidades: Um dos vetores linha do determinante é nulo. Suponhamos que seja $B - A$. Isso implica que $A = B$, que é um absurdo, pois os pontos são distintos. Resta a possibilidade de um dos vetores linha, $B - A$ por exemplo, ser combinação linear dos outros dois. Assim, $B - A = \alpha \cdot (C - A) + \beta \cdot (D - A)$ o que implica que os vetores $B - A$, $C - A$ e $D - A$ são coplanares, logo A , B , C e D do \mathbb{R}^3 são coplanares.

□

Definição 1 (Sistema Ortogonal de Coordenadas Cartesianas) *Sistema formado por três retas mutuamente perpendiculares que se intersectam em um único ponto chamado de origem, e onde:*

- *Essas retas são ditas **eixos ordenados** chamamos de **eixo Ox**, **eixo Oy** e **eixo Oz**;*
- *Cada dois eixos formam um plano que é ortogonal ao eixo remanescente;*
- *Esses planos, ditos **planos ordenados**, são chamamos de **plano xy**, **plano xz** e **plano yz**;*
- *Os planos ordenados dividem o espaço em oito partes chamadas de **octantes**;*
- *Cada ponto P do espaço corresponde, de forma biunívoca, a um terno ordenado de números reais (a, b, c) ;*
- *A coordenada “a” corresponde a distância de P até o plano yz , a coordenada “b” corresponde a distância de P até o plano xz e a coordenada “c” corresponde a distância de P até o plano xy ;*

- A origem corresponde ao terno $(0, 0, 0)$.

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O (ver Figura 2.8), se aplicarmos o Teorema de Pitágoras, primeiramente no triângulo $\triangle QOR$, determinamos a distância $d(O, Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e depois, no triângulo $\triangle OPQ$, concluímos que a distância de P até O é dada por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

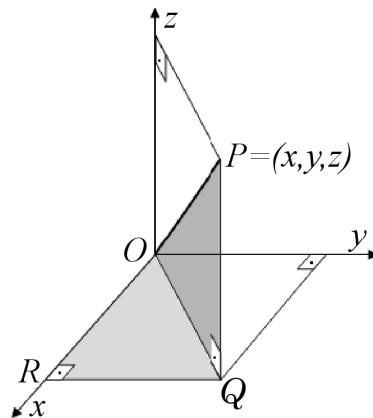


Figura 2.8: Sistema Ortogonal.

De modo geral, a distância entre os pontos $P = (x, y, z)$ e $C = (q, r, s)$ é dada por

$$d(P, C) = \sqrt{(x - q)^2 + (y - r)^2 + (z - s)^2}. \quad (2.1)$$

Assim, dado $R \in \mathbb{R}$, ($R > 0$) representamos uma superfície esférica S de centro $C = (q, r, s)$ e raio R pelo conjunto de todos os pontos P tais que

$$(x - q)^2 + (y - r)^2 + (z - s)^2 = R^2. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) é chamada de equação reduzida da superfície esférica S que, quando desenvolvida, fica da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad (2.3)$$

onde a, b, c, d são números reais tais que $a = -2q, b = -2r, c = -2s$ e $d = q^2 + r^2 + s^2 - R^2$.

A equação (2.3) é chamada de equação geral da superfície esférica S e é importante ressaltar que nem toda equação da forma (2.3) representa uma superfície esférica pois é necessário que, quando escrita na forma da equação (2.2), R seja positivo e como

$$R = \sqrt{q^2 + r^2 + s^2 - d} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d},$$

então

$$R > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 4d.$$

Uma forma prática de verificar pode ser vista no Exemplo 2.2 a seguir.

Exemplo 2.2 Verificar se $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 17 = 0$ representa uma superfície esférica.

Verificação:

Basta completar os quadrados

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z = -17$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 2z + 1) = -17 + 4 + 9 + 1$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = -3 \leq 0.$$

Assim, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 17 = 0$ representa o conjunto vazio e, por conseguinte, não representa uma superfície esférica, visto que não existem x , y e z tais que a soma de seus quadrados seja negativa.

Agora enunciaremos um importante teorema que garante a unicidade da localização determinada pelo GPS. Trata-se da aplicação do processo de trilateração no espaço, ou seja, assim como a intersecção das três circunferências determinaram a localização de Sofia no mapa (ver Exemplo 2.1, p. 8) temos que, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, se conhecidas as distâncias σ_i de um ponto P a quatro outros pontos C_i bem escolhidos no espaço, então a intersecção de quatro superfícies esféricas de centros C_i e raio σ_i irá determinar a localização do ponto P no espaço (ver Figura 2.9).

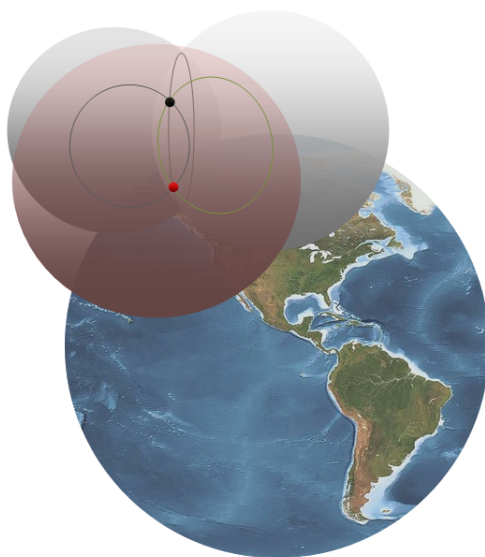


Figura 2.9: Só a quarta superfície esférica determinará qual dos dois pontos é P .

Teorema 4 *Se quatro superfícies esféricas de centros não coplanares se intersectam, então essa interseção é um único ponto.*

Demonstração: Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas cujos centros são, respectivamente, $C_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $C_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $C_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $C_4 = (x_4, y_4, z_4)$.

Se (E_1) , (E_2) , (E_3) e (E_4) , abaixo, são equações das superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 , então precisamos mostrar que (2.4) tem solução única.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (E_1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (E_2) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 & (E_3) \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 & (E_4) \end{cases} \quad (2.4)$$

Por hipótese, a interseção das superfícies S_i para $i = 1, 2, 3, 4$ é um conjunto não-vazio e solução de (2.4).

Fazendo $(E_1) - (E_2)$, $(E_1) - (E_3)$ e $(E_1) - (E_4)$ eliminamos os termos quadráticos e obteremos o sistema linear (2.5) cujas equações representam, respectivamente, os planos que contêm as intersecções $S_j \cap S_1$ (para $j = 2, 3, 4$) e cuja solução é também solução do sistema (2.4).

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Tal sistema terá solução única se:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

De fato, com base na comparação das equações (2.2) e (2.3), temos que $a_i = -2x_i$, $b_i = -2y_i$ e $c_i = -2z_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e assim:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 & -2z_1 + 2z_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 & -2z_1 + 2z_3 \\ -2x_1 + 2x_4 & -2y_1 + 2y_4 & -2z_1 + 2z_4 \end{vmatrix} \\ &= 8 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \\ &= 8 \cdot \begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 1, se os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 não são coplanares segue que $D \neq 0$.

□

É importante ressaltar que a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é essencial ao teorema pois, se omitida, não poderíamos garantir que a solução de (2.5) é a mesma solução de (2.4).

Um **exemplo** que ilustra bem isso, é o das superfícies esféricas

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$S_2 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$S_3 : x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 2$$

$$S_4 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$$

cujos centros $C_1 = (0, 0, 0)$, $C_2 = (2, 0, 0)$, $C_3 = (0, 2, 0)$ e $C_4 = (0, 0, 2)$ não são coplanares (com base no Lema 1) e cujo respectivo sistema (2.5) é dado por

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \\ 4y - 5 = 0 \\ 4z - 5 = 0, \end{cases}$$

o que nos leva a uma única solução $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{4}$ e $z = \frac{5}{4}$, mas que não representa o ponto de intersecção das superfícies S_1, S_2, S_3 e S_4 , como se verifica facilmente. Tal situação decorre do simples fato que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \emptyset$. O ponto $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4})$ representa a intersecção dos planos que contêm as intersecções $S_j \cap S_1$ (para $j = 2, 3, 4$) e não a intersecção $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$.

2.3.3 Relação entre Coordenadas Geográficas e Coordenadas Cartesianas

Vamos considerar um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de centro O e eixos positivos Ox, Oy e Oz tais que:

- O é o centro da terra;
- O eixo Oz positivo aponta na direção norte;
- O plano Oxy é o plano do Equador;
- O plano Oxz contém o meridiano de Greenwich;
- O eixo Oy é cortado pelo meridiano de longitude 90°E .

Seja P um ponto sobre a superfície terrestre (ver Figura 2.10) temos que sua latitude e sua longitude são representadas respectivamente por θ e φ conforme foi definido na Seção 2.1. Já a **altitude** de P , que indicaremos por h , é dada por

$$h = OP - r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r, \quad (2.6)$$

onde OP é a elevação do ponto P e r é o raio da terra cuja medida, para efeitos didáticos, será aproximada para 6.400 km . Sendo assim, a altitude também terá sua medida aproximada. Sobre a altitude, nos aprofundaremos mais na Seção 2.4.

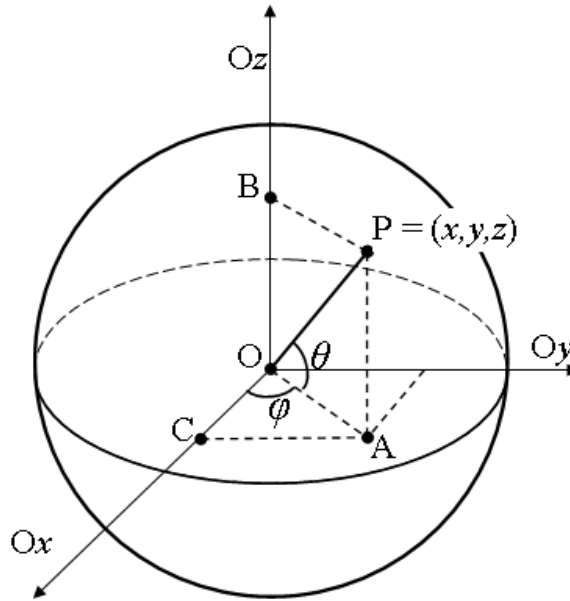


Figura 2.10: Latitude $\theta = m(\angle AOP)$ e longitude $\varphi = m(\angle COA)$.

Do triângulo retângulo $\triangle OPB$ da Figura 2.10 temos que

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Como $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ temos que

$$\sin \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.7)$$

Ressaltamos que, quando $z > 0$, θ assume um único valor entre 0° e 90° e quando $z < 0$, θ assume um único valor entre -90° e 0° . Assim, se $z > 0$, então diremos que o ponto P tem latitude θ N e se $z < 0$, então diremos que o ponto P tem latitude $-\theta$ S. No Exemplo 2.3, logo a seguir na página 19, veremos que $z = 6 \times 10^6 > 0$ e que $\theta = 45^\circ > 0$, o que corresponde a latitude 45° N, se $z = -6 \times 10^6 < 0$, então $\theta = -45^\circ < 0$, o que corresponde a latitude $-(-45)^\circ$ S ou seja 45° S.

Analizando agora o triângulo retângulo $\triangle OAC$ da Figura 2.10 temos que

$$\sin \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.8)$$

$$\cos \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.9)$$

E também ressaltamos que, quando $y > 0$, φ assume um único valor entre 0° e 180° e, quando $y < 0$, φ assume um único valor entre -180° e 0° . Assim, se $y > 0$, então diremos que o ponto P tem longitude φ E e se $y < 0$, então diremos que o ponto P tem longitude $-\varphi$ W. A explicação para o sinal negativo de φ é análoga à que foi dada para θ na latitude.

Podemos ainda determinar as coordenadas cartesianas (x, y, z) em função das coordenadas geográficas θ , φ e da sua elevação $\rho = OP$ aplicada na equação (2.6).

Como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ temos que $\sin \theta = \frac{z}{\rho}$ portanto, $z = \rho \sin \theta$. Da Figura 2.10 temos que $\cos \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho}$ portanto $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cos \theta$ que, substituído nas equações: (2.8) e (2.9), nos dá $x = \rho \cos \theta \cos \varphi$ e $y = \rho \cos \theta \sin \varphi$. Assim,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (2.10)$$

Exemplo 2.3 Dado o ponto $P = (-3 \times 10^6, 3\sqrt{3} \times 10^6, 6 \times 10^6)$ determine suas coordenadas geográficas e a altitude, tendo o metro como unidade de medida adotada.

Solução:

Aplicando diretamente as equações (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) temos:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(-3 \times 10^6)^2 + (3\sqrt{3} \times 10^6)^2 + (6 \times 10^6)^2} - 6,4 \times 10^6 \\ &= 6 \times 10^6 \sqrt{2} - 6,4 \times 10^6 \simeq 2,1 \times 10^6 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{6 \times 10^6}{\sqrt{(-3 \times 10^6)^2 + (3\sqrt{3} \times 10^6)^2 + (6 \times 10^6)^2}} = \frac{6 \times 10^6}{\sqrt{72 \times 10^{12}}} \\ &= \frac{6 \times 10^6}{6 \times 10^6 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{3\sqrt{3} \times 10^6}{\sqrt{(-3 \times 10^6)^2 + (3\sqrt{3} \times 10^6)^2}} = \frac{3\sqrt{3} \times 10^6}{\sqrt{36 \times 10^{12}}} \\ &= \frac{3\sqrt{3} \times 10^6}{6 \times 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{-3 \times 10^6}{\sqrt{(-3 \times 10^6)^2 + (3\sqrt{3} \times 10^6)^2}} = \frac{-3 \times 10^6}{\sqrt{36 \times 10^{12}}} \\ &= \frac{-3 \times 10^6}{6 \times 10^6} = \frac{-1}{2}.\end{aligned}$$

Assim, as coordenadas geográficas de P são $\theta = 45^\circ N$ e $\varphi = 120^\circ E$ e a altitude é aproximadamente $2,1 \times 10^6 m$.

□

2.4 Como é Medida a Altitude

Para entendermos como o GPS determina a altitude em um planeta que não é perfeitamente esférico precisamos considerar alguns detalhes.

A altitude é a distância entre um ponto na superfície do planeta até a curva que determina o nível do mar.

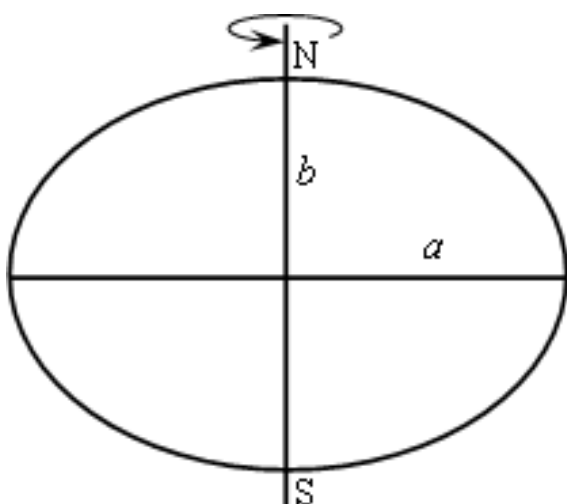


Figura 2.11: Elipse e .

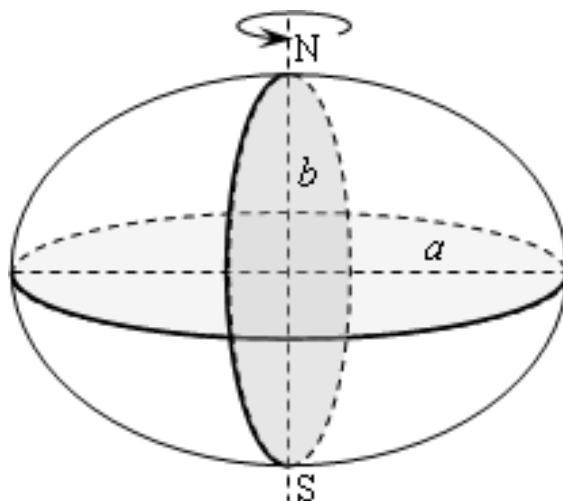


Figura 2.12: elipsóide E .

Por ser levemente achatada nos polos a forma da terra pode ser modelada matematicamente por um elipsóide, que é um sólido geométrico formado quando giramos uma elipse em torno de um de seus eixos (ver Figuras 2.11 e 2.12).

Temos uma elipse e de eixo maior medindo $2a$ e eixo menor medindo $2b$. ao girar e em torno do eixo menor geramos o elipsóide E . No caso da terra chamamos de “*elipsóide de referência*” àquele em que os eixos $2a$ e $2b$ são respectivamente o diâmetro equatorial e a distância entre os polos.

Atualmente o elipsóide de referência mais usado num contexto de Sistema de Posicionamento Global é o “World Geodetic System” (do inglês - Sistema Geodésico Mundial), criado em 1984 e conhecido pela sigla WGS-84.

Assim, pode-se determinar a altitude, chamada de elipsoidal, pela diferença entre as distâncias do centro da terra ao receptor e ao elipsóide, respectivamente.

Outro modelo utilizado é o geóide que é um modelo físico da forma da terra. Ele simula o planeta Terra como uma superfície inteiramente coberta pelos oceanos e sob a ação das forças centrípeta (gerada pela rotação da terra) e de atração de massas (gravidade). Como essas forças interferem no nível do mar, o geóide apresenta-se como uma superfície irregular.

O geóide é baseado no potencial gravitacional constante. Comparando com o elipsóide de referência, o geóide é consideravelmente mais suave (varia em $\pm 100\text{ m}$) que a superfície terrestre (varia de -11530 m a 8844 m).

Para modelá-lo matematicamente utiliza-se uma função com aproximadamente 65.000 diferentes coeficientes e cujas variáveis: θ , φ e ρ correspondem respectivamente à latitude, à longitude e ao raio geocêntrico. Para efeitos didáticos, evitaremos cálculos excessivos considerando que a terra é uma esfera de raio $\rho = 6.400\text{ km}$ como já havíamos estabelecido na página 20.

2.5 Distância entre Dois Pontos em uma Superfície Esférica

Uma função interessante do GPS é a determinação de distâncias entre pontos localizados na superfície terrestre, sejam no mesmo bairro onde estamos ou até mesmo em países diferentes. É óbvio que o GPS não utiliza a fórmula 2.1 (ver p. 14), pois se o fizesse teríamos, por exemplo, que a distância entre Macapá (capital do Amapá) e Halmahera (na Indonésia) seria algo próximo do diâmetro da terra (cerca de 12.800 km) já que essas localidades praticamente estão sobre a linha do Equador e são quase que diametralmente opostas (fato facilmente verificável no Google Maps¹), porém para viajarmos de uma dessas localidades até a outra percorrendo os 12.800 km teríamos que cavar um túnel, que passaria pelo centro a terra, o que tornaria a viagem bem calorenta!

O fato é que a terra é esférica (lembramos que a consideramos assim anteriormente) porém vivemos em sua superfície sem percebê-lo e, por conta de sua imensidão, achamos que vivemos num plano. Se observarmos várias circunferências (Figura 2.13) com raio de diferentes comprimentos perceberemos que, quanto maior for raio, mais próximo de uma reta estará um arco de comprimento constante nela contido.

Sendo assim, numa superfície esférica, o arco \widehat{AB} que se aproxima mais de uma reta é o menor dentre os dois arcos contidos em uma circunferência máxima, o que nos leva a crer que este represente a menor trajetória entre dois pontos A e B (ver Figura 2.14). Podemos encontrar a demonstração dessa afirmação em [1] (Capítulo 6 - pp. 74-76).

¹<http://maps.google.com.br>

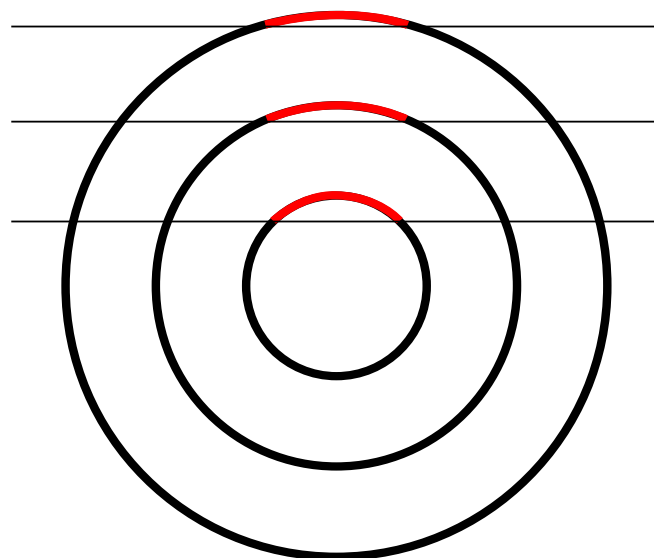


Figura 2.13: Os arcos se aproximam da reta com o aumento do raio.

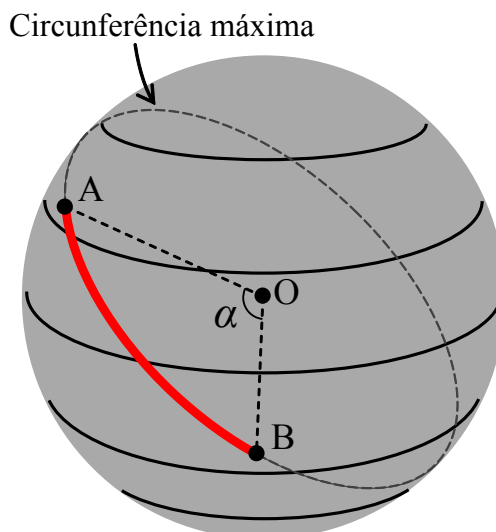


Figura 2.14: O arco \widehat{AB} é a menor trajetória entre A e B .

Como o comprimento de um arco \widehat{AB} é diretamente proporcional ao ângulo central $\angle AOB$ de medida α (em graus) a ele correspondente e considerando que ρ e O são respectivamente o raio e o centro da terra, temos

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi\rho}{d(A, B)},$$

e assim,

$$d(A, B) = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12.800. \quad (2.11)$$

Basta agora determinar a medida α . Para tanto faremos uso de uma relação estabelecida entre as normas dos vetores, seu produto interno usual e o ângulo α . Antes porém, definiremos **produto interno usual** e **norma**.

Definição 2 Dados dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ do \mathbb{R}^3 chamamos de **produto interno usual** e denotamos por $\langle u, v \rangle$ ao número real

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Definição 3 Chamamos de **norma (ou módulo)** de um vetor $u = (x_1, y_1, z_1)$ e denotamos por $\|u\|$ ao número real

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Teorema 5 Se α for a medida do ângulo entre dois vetores não-nulos u e v , então

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Demonstração:

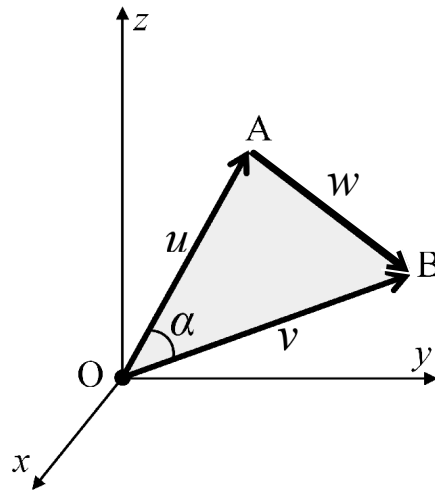


Figura 2.15: Triângulo $\triangle OAB$ no \mathbb{R}^3 .

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, sabemos $m(\angle AOB) = \alpha$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\triangle OAB$ (ver Figura 2.15) temos,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|w\|^2}{2 \|u\| \|v\|} \\ &= \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}{2 \|u\| \|v\|} \\ &= \frac{2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2}{2 \|u\| \|v\|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}. \quad (2.12)$$

□

Aproveitando o exemplo no início desta seção (página 21), calculamos a distância entre Macapá e Halmahera, que chamaremos de A e B respectivamente. Precisamos de suas coordenadas geográficas, as quais encontramos no Google Maps², observe que as medidas estão em graus decimais e que os sinais negativos representam latitude sul e longitude oeste:

- Macapá $\rightarrow (0,109863^\circ, -51,064453^\circ)$
- Halmaera $\rightarrow (-0,131836^\circ, 127,792969^\circ)$

Utilizando as fórmulas (2.10) determinamos as coordenadas cartesianas que representam os pontos A e B e analogamente os vetores u e v :

$$\begin{aligned}u &= 6.400(0,628445, -0,777852, 0,001917) \\v &= 6.400(-0,612808, 0,790228, -0,002301).\end{aligned}$$

Agora aplicando na fórmula (2.12), temos

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{6.400^2 \times (-0,385116 - 0,614680 - 0,000004)}{6.400 \times 6.400} \\ \cos \alpha &= -0,9998 \\ \alpha &= \arccos(-0,9998) = 178,854165^\circ.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (2.11), a distância entre Macapá e Halmahera é dada por

$$d(A, B) = \frac{178,854165^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12.800 \simeq 19.978,2 \text{ km},$$

bem maior que os 12.800 km do túnel intra-planetário.

Com base em [4], que fornece a distância entre cidades do mundo de forma interativa, verificamos que a distância entre Macapá e Halmahera Indonésia (é necessário escrever o país para localizá-la), é 19.899 km valor próximo do encontrado por nós.

Apesar de termos dado um exemplo envolvendo localidades próximos à linha do Equador, ressaltamos que o processo é aplicável a quaisquer dois pontos sobre a superfície terrestre desde que sejam conhecidas suas coordenadas geográficas, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4 *Determinar a distância entre Aracaju $(-10,919618^\circ, -37,089844^\circ)$ e Porto Alegre $(-30,034259^\circ, -51,228020^\circ)$.*

Resolução:

Sejam A o ponto que representa Aracaju e B o ponto que representa Porto Alegre. Os vetores u e v são tais que:

$$\begin{aligned}u &= 6.400(0,783248, -0,592147, -0,189432) \\v &= 6.400(0,542137, -0,674959, -0,500518).\end{aligned}$$

²<http://maps.google.com.br/>

Agora aplicando na fórmula (2.12), temos:

$$\cos \alpha = \frac{6.400^2 \times (0,424628 + 0,399675 + 0,094814)}{6.400 \times 6.400}$$

$$\cos \alpha = 0,919117$$

$$\alpha = \arccos(0,919117) = 23,202667^\circ.$$

Assim, aplicando a fórmula (2.11), a distância entre Aracaju e Porto Alegre é dada por

$$d(A, B) = \frac{23,202367^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12.800 \simeq 2.592 \text{ km},$$

que, se comparada com a distância obtida em [4] que é 2.582 km, verificamos uma diferença de 10 km.

Capítulo 3

Como Funciona o GPS

Tentaremos descrever de forma simples como funciona o sistema GPS, detalhes técnicos não serão aprofundados ou até serão deixados de lado e nos ateremos à matemática, aos princípios da Física como tempo, distância e velocidade e aos aspectos funcionais de cada segmento envolvido no processo.

Devemos dispor de um receptor GPS que nada mais é do que um rastreador de satélites. Ele desempenha essa tarefa graças aos dados de almanaque, que são informações contidas no receptor que dizem onde procurar cada satélite a qualquer momento do dia.

De acordo com a precisão podemos classificar os receptores GPS em três categorias:

- Receptores de navegação: com erro em torno de 15 *m*;
- Receptores topográficos: com erro em torno de 1 *m*;
- Receptores Geodésicos: com erro em torno de 1 *cm*.

Para obter erros inferiores a 15 *m* os modelos topográficos e geodésicos necessitam de uma correção diferencial que consiste na utilização de um sinal terrestre emitido por uma estação de referência (geralmente Rádio-farol) além dos sinais de satélite. O GPS diferencial (ou DGPS) é utilizado na navegação em águas restritas como também em levantamentos hidrográficos, oceanográficos e geofísicos, agricultura de precisão, dentre outras aplicações. No Capítulo 4 trataremos sobre erros mais especificamente.

Cada satélite foi programado para descrever órbitas ligeiramente elípticas de modo que sua localização seja perfeitamente conhecida dentro de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas definido anteriormente (ver Definição 1, p. 13), a essa localização chamamos de efeméride. Como os satélites dão aproximadamente duas voltas por dia ao redor da terra, qualquer desvio na órbita é detectado e corrigido pelas estações de controle na terra.

De acordo com [1] (Resolução da atividade 9 - p. 30, pp. 65 e 66) a fração da superfície terrestre que fica visível para um satélite é cerca de 37,9%, o que o leva afirmar que um receptor em qualquer ponto da terra dispõe de, pelo menos, quatro satélites visíveis (acima

da linha do horizonte). Já [3] afirma que a chance de ocorrer tal visibilidade é de 95%. Mas é notório que uma constelação de vinte e quatro satélites fará uma boa cobertura do planeta.

Devemos então determinar as distâncias entre nós e os satélites. Isso é feito por meio de sinais de rádio codificados por um padrão chamado de “*Pseudo-Random Code*” (código pseudo-aleatório) que é emitido pelo satélite e captado pelo receptor (ver Figura 3.1). Cada satélite emite um sinal com modulação específica e em duas frequências, designadas de L1 e L2, que permite identificá-lo.

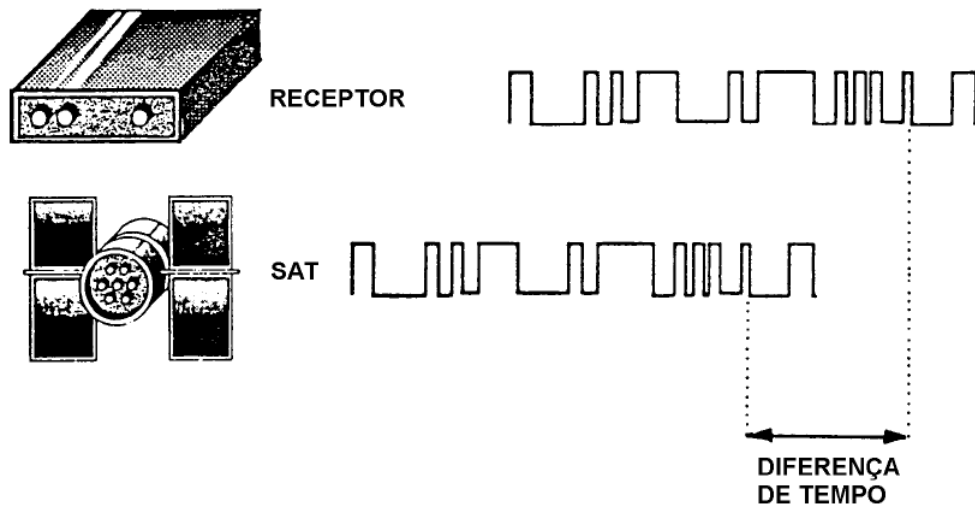


Figura 3.1: O código que vem do satélite é comparado ao do receptor.

Para tanto utilizam-se dois códigos:

- O código C/A (*coarse/acquisition code*) para aquisição e navegação;
- O Código P (*precision code*), para medições de precisão, após a aquisição e sincronização do sinal pelo receptor e está disponível apenas para os usuários militares norte-americanos e os aliados da OTAN, além de outras agências governamentais dos EUA.

O sinal L1 é modulado pelos Códigos P e C/A enquanto L2 apenas pelo Código P.

O satélite e receptor estão programados para emitir o mesmo código no mesmo instante, por meio de relógios atômicos altamente precisos (da ordem 1 nanosegundo = $1 \eta s = 10^{-9} s$). Tal precisão é necessária porque, se o sinal leva menos que 0,1 s para chegar ao receptor, uma mínima diferença interferiria drasticamente na medição. Para se ter uma ideia: uma pequena variação de 1 microsegundo ($0,000001 s$) ocasiona um erro de aproximadamente 300 m na medição da distância.

O sinal, que viaja à velocidade da luz (aproximadamente $2,99792458 \times 10^8 m/s$), chega com uma defasagem ao receptor que calcula o lapso de tempo pela diferença entre

os instantes em que recebeu e em que gerou o mesmo código (ver Figura 3.1). A distância é determinada multiplicando-se o lapso de tempo pela velocidade da luz. Conhecidos os pontos de localização e as distâncias a pelo menos quatro satélites, são geradas equações de no mínimo quatro superfícies esféricas imaginárias cuja intersecção é o ponto onde estamos em coordenadas cartesianas (Teorema 4).

A partir daí, utilizamos as equações (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) para determinarmos nossas coordenadas geográficas e nossa altitude, e a partir delas o instante atual (hora) com altíssima precisão.

Capítulo 4

Análise de erros do sistema

Assim como em toda atividade humana, o sistema GPS está sujeito a erros. Minimizá-los é uma tarefa que muitas vezes envolve mais investimentos em tecnologia e busca de técnicas de medição mais precisas. Explanaremos agora alguns tipos de erros e como são confrontados.

4.1 Desvios dos Sinais na Atmosfera

Os sinais de rádio percorrem a atmosfera na velocidade da luz que somente é constante no vácuo. Além disso, ao mudar de meio (do vácuo para a atmosfera) os sinais sofrem desvios (ver Figura 4.1). O primeiro, ao atingir a ionosfera devido à presença de partículas ionizadas ocasionando um erro de, aproximadamente, 5 m. O segundo, ao chegar a troposfera pela presença de grande quantidade de vapor d'água, desta vez o erro é da ordem de 0,5 m.

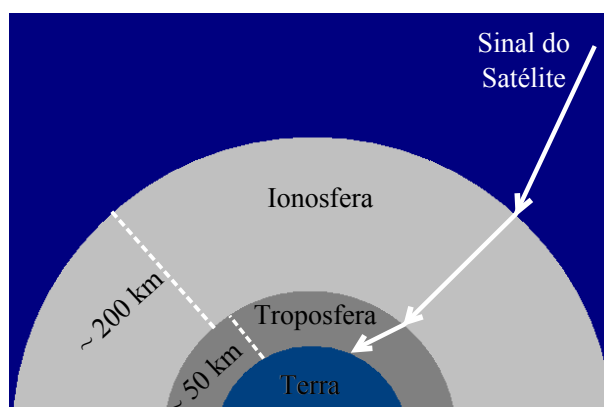


Figura 4.1: Difração Atmosférica.

4.2 Erros de Órbita

São pequenas variações detectadas nas órbitas e que são causadas por atração gravitacional da Lua, ou do Sol, e pela pressão da radiação solar sobre o satélite. Estas variações orbitais são transmitidas para os satélites, que passam a considerá-las nas suas emissões. Como as órbitas são pré-definidas para cada satélite, as estações de controle em terra mo-

nitoram a cada passagem do satélite informando ao mesmo quando é necessário corrigir sua órbita.

4.3 Erros do Relógio do Receptor

Já havíamos comentado sobre a grande precisão dos relógios contidos nos satélites, no entanto é financeiramente inviável que cada receptor tenha um relógio atômico. Dispondo de um relógio comum de cristal de quartzo as medições de tempo e, conseqüentemente, das distâncias aos satélites terão erros que levariam a uma situação semelhante a do exemplo dado na página 17 onde as superfícies esféricas não se intersectam em nenhum ponto, essas distâncias são chamadas de pseudo-ranges ou pseudodistâncias. Como sabemos que o ponto existe, minimizar esse erro consiste em reduzir a região onde possivelmente esse ponto está.

Para resolver esse problema foi utilizado um artifício simples: o processador do receptor, por meio de tentativas, simula o valor desse erro e o atribui a cada medição de lapso de tempo feita, de modo que as superfícies esféricas se aproximem ou intersectem em algum ponto. Além disso a presença de um quarto satélite minimiza esse tipo de erro.

Digamos que o relógio do meu receptor esteja atrasando $0,0000005\text{ s}$, erro que levaria a uma diminuição de 150 m na distância do satélite o que levaria a uma situação como a ilustrada no plano pela figura 4.2. Porém o processador detecta esse erro verificando que se for acrescentado $0,0000005\text{ s}$ aos lapsos de tempo medidos para cada sinal de satélite então ocorrerá a intersecção como vemos na figura 4.3.

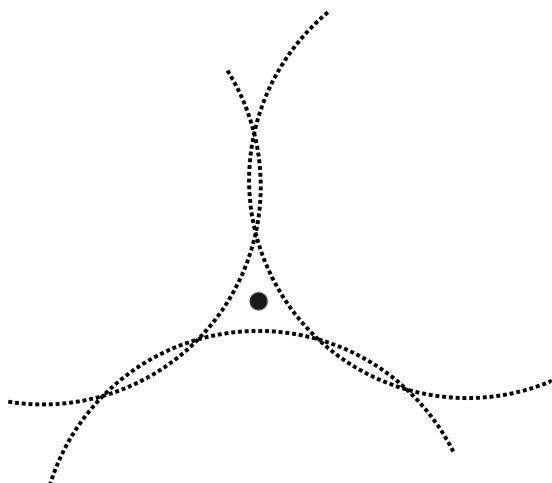


Figura 4.2: Antes da correção.

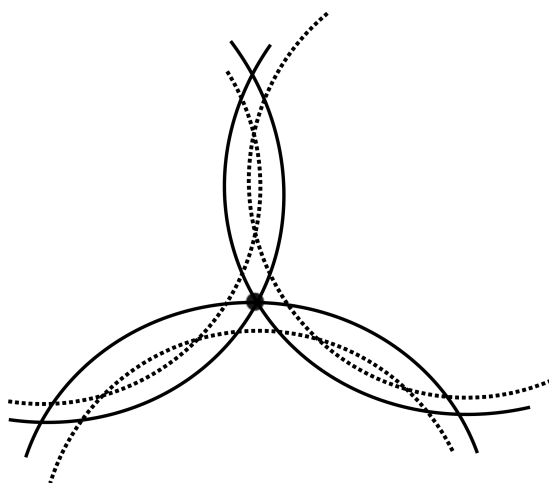


Figura 4.3: Depois da correção.

4.4 Erros de Multitrajetória

Também chamados **erros de multicaminho** ou **erros de multipercurso**, são erros da ordem de $0,6m$ e ocorrem devido à recepção de mais de um sinal proveniente da mesma fonte. São provocados por obstáculos próximos a antena do receptor (ver Figura 4.4), estes refletem na direção do receptor um sinal que não seria captado por ele. Esse tipo de erro não pode ser facilmente identificado, pois depende de onde é feita a recepção dos sinais (se em campo aberto se em área urbana).

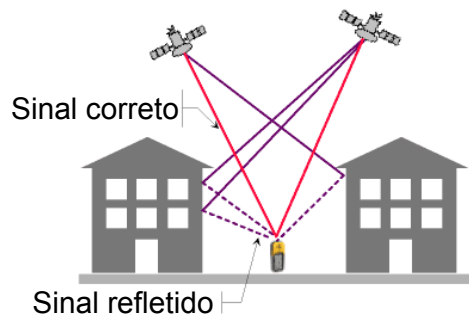


Figura 4.4: Multitrajetória provocada por edifícios.

4.5 Erros Devido à Geometria dos Satélites

Esse tipo de erro ocorre quando os satélites estão posicionados muito próximos uns dos outros, sob o ponto de vista do receptor. O fato é que quanto mais espalhados no céu estiverem os satélites (o que se chama de geometria boa), maior será a precisão na determinação da posição do receptor.

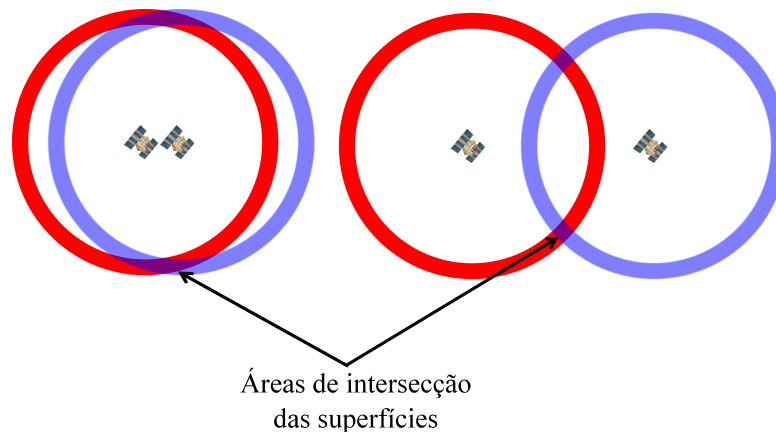


Figura 4.5: Quanto menor a área menor será o erro.

O erro ocorre porque, ao ficarem próximos, os satélites determinam superfícies esféricas quase que coincidentes o que implicaria em uma área de intersecção muito grande (ver

figura 4.5). Para quantificar esse erro foi criado o fator de diluição da precisão da posição ou PDOP (“*positional dilution of precision*”) que é inversamente proporcional ao volume da pirâmide que tem os quatro satélites e o receptor em seus vértices (ver Figura 4.6).

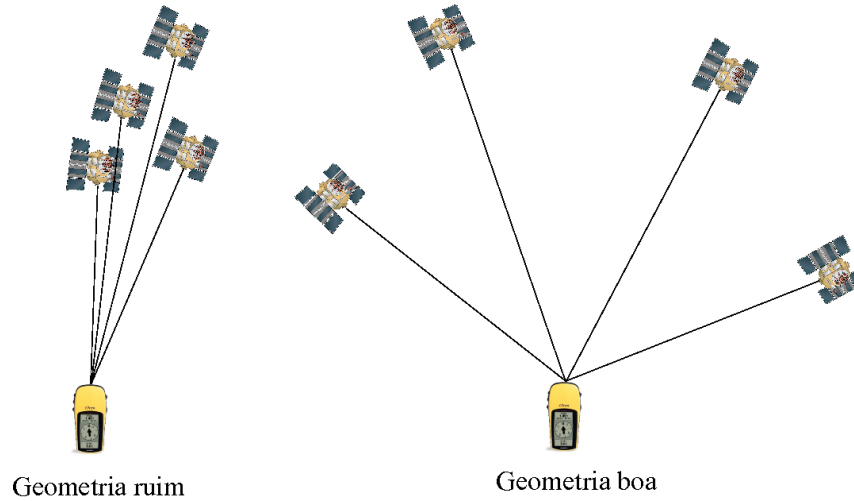


Figura 4.6: Quanto maior o volume da pirâmide menor é o erro.

A tabela a seguir mostra os valores da PDOP e suas classificações:

Valor da PDOP	Condição
$PDOP < 4$	Ótimo
$4 < PDOP < 6$	Aceitável
$6 < PDOP < 8$	ruim
$PDOP > 8$	Inaceitável

Capítulo 5

Sugestões de Atividades

No funcionamento do sistema GPS, é notória a presença de alguns elementos matemáticos avançados para estudantes dos ensinos: fundamental e médio. Deste modo, seria inviável a apresentação completa deste trabalho se os alunos desconhecem produto interno, superfície esférica e elipsóide, por exemplo. Porém, com as ferramentas certas, é possível desenvolver projetos envolvendo atividades que despertem o interesse dos alunos pela matemática do GPS e outras áreas correlacionadas. Se necessário, as propostas que seguem podem e devem ser adaptadas, já que sabemos que cada turma (ou escola, ou professor) vive uma realidade geralmente diferente. Os materiais também podem ser substituídos.

5.1 Distância entre Duas Localidades no Planeta

Objetivos

- Associar meridianos e paralelos aos seus respectivos modelos matemáticos;
- Informar o aluno da existência das geometrias não-euclidianas;
- Definir com o aluno o que é circunferência máxima e dar exemplos;
- Construir e aplicar uma fórmula para o cálculo de comprimento de arcos.

Público alvo

Alunos a partir do 8º ano que tenham conhecimento prévio de comprimento de circunferência e proporção.

Materiais

- globo terrestre;

- bolas de isopor de tamanhos diversos;
- barbante colorido;
- palitos de churrasco;
- pincel atômico;
- palitos de dente;
- lápis;
- borracha;
- caderno.

Descrição

Iniciaremos a atividade perguntando sobre o que os alunos sabem sobre meridianos, paralelos, polos, eixo de rotação etc. e apresentaremos o globo terrestre. Depois que todos estiverem cientes do que sejam estes elementos, pediremos que um aluno tente espetar um palito de churrasco em uma bola de isopor exatamente em seus “polos”. Depois, pediremos que outro aluno marque alguns pontos com o pincel sobre a superfície da bola. Lançaremos os questionamentos abaixo gradativamente, e de acordo com as respostas iremos direcionando a discussão para os objetivos.

Podemos usar os palitos para marcar os pontos e o barbante, amarrado aos mesmos, para demarcar a trajetória entre os pontos. Levaremos a discussão para a necessidade de criar uma relação entre o comprimento de uma circunferência máxima e a distância entre dois pontos na superfície esfera. Será necessário falar sobre o ângulo central e então poderemos propor que calculem distâncias entre pontos sobre as bolas dados o raio e a medida do ângulo central. Daremos um tempo para que discutam em grupos de 3 ou 4 componentes e depois apresentem os resultados.

1. Que tipo de trajetória liga dois pontos marcados na bola?
2. Que trajetória representa a menor distância entre dois pontos marcados na bola?
3. Como poderíamos calcular essa distância?
4. Como poderíamos calcular o comprimento da linha do Equador?
5. Como poderíamos calcular a distância entre os polos?
6. Que relação têm as distâncias calculadas nas questões 3 e 4?

5.2 Trilateração em Mapas

Objetivos

- Associar equações de circunferências ao princípio que norteia o GPS;
- Dar ao aluno uma visão inicial da geometria analítica espacial;
- Aplicar os conhecimentos sobre velocidade;
- Aplicar proporção na interpretação de escalas;
- Aplicar sistemas de equações no processo de localização.

Público alvo

Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham conhecimento prévio de distância entre dois pontos, das equações da circunferência, escalas em mapas e sistemas de equações quadráticas.

Materiais

- mapas impressos em papel A4;
- compasso;
- receptor GPS;
- lápis;
- borracha;
- régua;
- caderno.

Descrição

Parte 1 Iniciaremos perguntando aos alunos sobre o que eles entendem a respeito de localização global, depois de ouvir algumas respostas mostraremos um receptor GPS e perguntaremos se eles sabem o que é. Após mostrar as funções do receptor, direcionaremos o debate para a unicidade da localização, ou seja, cada lugar na superfícies terrestre tem coordenadas geográficas e altitude únicas, determinadas pelo receptor. Entraremos na discussão do processo de trilateração comentando que é possível calcular distância de um transmissor de rádio até uma estação fixa e perguntaremos se os alunos têm conhecimento sobre as velocidades da luz e do som. Perguntaremos qual a relação entre a velocidade e

as variações do tempo e da distância. Após dirimir as dúvidas dos alunos, simularemos a situação proposta no Exemplo 2.1 (p. 8). Para tanto, forneceremos os mapas da referida região e os tempos de propagação dos sons dos sinos. Pediremos que tentem calcular as distâncias. Assim que forem encontrando as distâncias devemos orientá-los na conversão das medidas de acordo com a escala. Pediremos que tracem as circunferências e determinem a localização de Sofia. Alguns alunos podem não conseguir encontrar (provavelmente por terem errado alguma medida ou desenho) então pediremos que discutam entre si onde o processo falhou.

Parte 2 Após essa etapa pediremos que os alunos construam um plano cartesiano sobre o mapa colocando os eixos onde acharem conveniente e, com o auxílio de uma régua, determinem as coordenadas das cidades envolvidas no problema (centros). Depois escrevam as equações reduzida e geral de cada uma das três circunferências e resolvam o sistema formado por elas verificando se a solução do Sistema coincide com o ponto encontrado na primeira parte da atividade. Pediremos também que comparem entre si os resultados deixando que eles percebam que a posição dos eixos não interfere na solução. Concluiremos a atividade comentando que o processo aplicado na atividade é similar ao aplicado no GPS.

Sugestão: Esta atividade também pode ser desenvolvida utilizando um software educacional e livre de geometria dinâmica chamado GeoGebra¹, basta dispor de computadores com o GeoGebra instalado e um arquivo de imagem do mapa com a escala. Os alunos devem ter conhecimento básico do programa. A seguir, listamos os passos da atividade:

Passo 1 Inserir o mapa: Menu Ferramentas → Objetos especiais → Inserir imagens;

Passo 2 Ajustar a escala: posicione a figura em lugar conveniente e depois, girando o rolete do mouse, ajuste as unidades de medição dos eixos à escala do mapa isso ajudará nas conversões;

Passo 3 Enviar a figura para trás do plano: Menu Editar → Propriedades. Marcar a opção “Imagem de fundo” do objeto “fig1”;

Passo 4 Determinar os raios das circunferências utilizando a escala (regra de três);

Passo 5 Construir as circunferências: Menu Ferramentas → Círculos e Arcos → Círculo dado Centro e Raio. Clicar sobre o ponto que representa a cidade e digitar na caixa de diálogo o valor do raio, utilizando “.” (ponto) ao invés de “,” (vírgula)

¹Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/>

Passo 6 Determinar o ponto de intersecção: Menu Ferramentas → pontos → intersecção de dois Objetos. Depois coloca o ponteiro sobre o possível ponto (as circunferências ficarão destacadas) e clicar;

Passo 7 Com o rolete do mouse dar um “*zoom*” no ponto de intersecção e verificar se realmente as três circunferências se intersectam (provavelmente não), falar então sobre a imprecisão do programa.

5.3 Geometria do GPS

Objetivos

- Explicar o funcionamento do GPS;
- Apresentar ao aluno a matemática envolvida na programação do GPS;
- Mostrar na prática como se dá a intersecção entre esferas;
- Incentivar o trabalho de equipe e a cooperação;

Público alvo

Alunos do 2º ano do ensino médio com conhecimento prévio de esferas e superfícies esféricas.

Materiais

- esferas ocas de plástico (aquelas de piscina de bolinhas infantil);
- tesouras;
- estiletes;
- compassos;
- pistolas de cola quente;
- quadro negro;
- giz;
- Kit audiovisual para exibição de vídeo.

Descrição

Parte 1 Iniciaremos exibindo o vídeo “As Aventuras do Geodetive - GPS”, disponível em [12], após a apresentação perguntaremos aos alunos:

1. Vocês entenderam como funciona o GPS?
2. Que elementos da geometria vocês identificaram no vídeo?
3. Vocês seriam capazes de reproduzir as ilustrações das intersecções apresentadas no vídeo, utilizando o quadro negro?

Após as tentativas de dois ou três voluntários, perguntaremos sobre a compreensão dos desenhos por parte dos outros alunos e da dificuldade em construí-los e pediremos sugestões para facilitar a visualização induzindo a construção de modelos em três dimensões. A partir daí, dividiremos a turma em equipes, cada uma com: quatro esferas de plástico, um compasso, uma tesoura, um estilete e uma pistola de cola quente, então pediremos que, em um determinado tempo, tentem reproduzir as intersecções através de maquetes (caso seja necessário forneça mais esferas para novas tentativas). Depois de construídas as maquetes, pediremos que cada equipe apresente seu projeto, explicando o funcionamento do GPS e comente suas dificuldades na construção e as estratégias para superá-las. Podemos fazer uma exposição dos melhores trabalhos para toda a escola.

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, S., *A Geometria do Globo Terrestre*, Programa de Iniciação Científica - OBMEP.
- [2] Crato, N. P., *A Matemática das Coisas*, Editora Gradiva, 10ª edição, pp. 71 - 74, 2010.
- [3] <http://paginas.fe.up.pt/~hmiranda/st2/galileu.pdf> (19/03/2013).
- [4] <http://www.howmanyhours.com/> (19/03/2013).
- [5] <http://www.nrl.navy.mil/media/news-releases/2005/president-announces-roger-eastonrecipient-of-national-medal-of-technology> (19/03/2013).
- [6] <http://erstopografia.blogspot.com.br/2011/04/equipamentos-topograficos.html> (19/03/2013).
- [7] <https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap-37.pdf> (19/03/2013).
- [8] http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/oquee_geoide.shtm (19/03/2013).
- [9] http://minx.com.br/manual_GPS.pdf (19/03/2013).
- [10] http://www.popa.com.br/_2008/cronicas/gps/funcionamento_do_gps.htm (19/03/2013).
- [11] <http://www.lps.usp.br/lps/arquivos/conteudo/grad/dwnld/ApostilaGPS.pdf> (19/03/2013).
- [12] <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107> (19/03/2013)