UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

FERNANDO HENRIQUE DA SILVA VIEIRA

UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO DO CONTEÚDO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Maringá-PR
2017

FERNANDO HENRIQUE DA SILVA VIEIRA

Uma proposta de aplicação do conteúdo de sequências e séries no Ensino Médio com auxílio do Geogebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria

Maringá

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

V658p

Vieira, Fernando Henrique da Silva
Uma proposta de aplicação do conteúdo de sequências e séries no Ensino Médio com auxílio do Geogebra / Fernando Henrique da Silva Vieira. -- Maringá, 2017.
68 f. : il. color.

Orientador: Prof.ª Dr.ª Josiane Cristina de Oliveira Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2017.

1. Sequências (Matemática). 2. Séries (Matemática). 3. Método da exaustão. 4. Geogebra (Software). 5. Sequences (Mathematics). 6. Series (Mathematics). 7. Method of Exhaustion. I. Faria, Josiane Cristina de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 515.24

Uma proposta de aplicação do conteúdo de sequências e séries no Ensino Médio com auxílio do Geogebra

Fernando Henrique da Silva Vieira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campo Mourão

Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 23 de Março de 2017.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

À Deus por mais esta conquista na minha vida acadêmica.

Aos meus familiares pelo apoio, em especial minha noiva Suellen pela paciência e carinho nos momentos mais importantes dessa caminhada.

À Professora Josiane pela paciência e orientação, sem os quais este trabalho não teria sido desenvolvido.

Aos meus amigos do Profmat pela amizade e companheirismo em todos os momentos que passamos juntos nessa jornada.

Aos meus colegas de trabalho da Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo apoio e compreensão nas distribuições de aula, que possibilitaram tempo para estudar e frequentar as aulas do Profmat.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

"Dai-me, Senhor, a perseverança das ondas do mar,

que fazem de cada recuo um ponto de partida

para um novo avanço."

Gabriela Mistral.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a teoria de sequências e séries numéricas sob o ponto de vista analítico. Usando esta teoria, abordamos o método da exaustão, e algumas aplicações como a quadratura da parábola, aproximação do número π e o volume da pirâmide. Além disso, fazemos sugestões de propostas didáticas com auxílio do Geogebra aos professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio.

Palavras-chave: Sequências, Séries, Método da Exaustão.

Abstract

In this work, we present the theory of sequences and numerical series from the analytical point of view. Using this theory, we present the method of exhaustion with applications such as quadrature of the parabola, approximation of the number π and the volume of the pyramid. In addition, we make suggestions of didactic proposals with the help of Geogebra to teachers of Mathematics who teach in High School.

Keywords: Sequences, Series, Method of Exhaustion.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O conceito de sequências e séries vem sendo desenvolvido ao longo da história no intuito de resolver os problemas que surgiram durante investigações científicas, ou simplesmente influenciados pela curiosidade de definir padrões matemáticos para fenômenos encontrados na natureza. Um exemplo disso pode ser encontrado com os egípcios que, há cerca de 5.000 anos, observavam os períodos de enchente no rio Nilo para poderem plantar na época certa, pois precisavam saber quando haveria uma nova inundação. Nesse momento, viu-se necessidade de se conhecer o padrão das inundações. Além disso, um papiro datado por volta de 1950 a.C., encontrado em Kahun no Egito, mencionava problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. Esse papiro faz parte de uma coleção de antigos textos egípcios que discutiam problemas administrativos, matemáticos e médicos.

Um dos primeiros personagens históricos a estudar conceitos matemáticos que influenciaram no desenvolvimento do conceito de sequências foi Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e seus discípulos. Ao perceberem que tencionando uma corda seriam capazes de reproduzir variados sons, concluíram que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda da lira (instrumento musical de cordas) resultaria em uma harmonia musical, conseguindo assim uma relação entre números e música. Desse fato, surgiram os termos de "média harmônica"e "progressão harmônica".

O desenvolvimento da ideia relacionada ao conceito de sequências também está ligada ao conceito de infinito. De fato, Zenão de Eleia, que viveu aproximadamente entre 490-425 a.C., escreveu um livro com 40 paradoxos relacionados a ideia do contínuo e do infinito. Mais tarde, Arquimedes (287 - 212 a.C.), na tentativa de encontrar uma maneira de calcular a área de um círculo, desenvolveu um método, que ficou conhecido como *"Método da Exaustão"*, o qual consistia em calcular a área do circulo por sucessivas aproximações desta área por polígonos.

A partir desse raciocínio, Arquimedes tentou explicar como somas infinitas poderiam resultar em número finito.

O italiano Leonardo de Pisa (1170-1240), também conhecido como Fibonacci, tornou-se conhecido pela descoberta da Sequência de Fibonacci. Tal sequência possui o número 1 como o primeiro e o segundo termo, e os elementos seguintes são originados pela soma de seus dois antecessores $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$. Outra característica marcante dessa sequência é que a partir do quinto termo, o número 5, temos que o quociente entre o número e seu antecessor é de aproximadamente 1,6. Vale ressaltar que 1,6 era o número que indicava a proporção ideal que os gregos procuravam para as construções e obras de arte. Esse valor também foi registrado entre as pedras utilizadas na construção das pirâmides e nas espirais do caracol e da folha da Bromélia. Outro fator que chama atenção na sequência de Fibonacci é a sua relação com fenômenos da natureza. Por exemplo, a sequência aparece no estudo de reprodução de coelhos e no crescimento dos galhos de plantas, como o da Achillea Ptarmica.

No século XIV, marcado pela Peste Negra que devastou a Europa, a produção matemática não foi relevante. Segundo Eves (2011), o maior matemático do período foi Nicole Oresme (1323 - 1382), nascido na Normandia. Ele escreveu cinco trabalhos matemáticos e, em um manuscrito não publicado, obteve a soma da série

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ...,$$

tornando-se um dos percursores da análise infinitesimal.

No fim do século XVI, segundo Lima (1991), o desenvolvimento da astronomia e da navegação exigia longos e trabalhosos cálculos aritméticos. Desta forma, encontrar um método que permitisse efetuar com certa precisão multiplicações, divisões, potenciações e extração de raízes era um problema fundamental. Este problema foi parcialmente resolvido com o surgimento dos logaritmos, os quais, como sabemos atualmente, facilitaram e possibilitaram a solução de diversos problemas Matemáticos. John Napier (1550 – 1617) é considerado um dos percursores dos logaritmos conhecidos atualmente. As primeiras publicações envolvendo os logaritmos apresentavam tábuas, que colocavam em correspondência os termos de uma progressão geométrica com os de uma progressão aritmética.

Com o avanço da formalização do cálculo, o conceito de séries infinitas tornou-se importante no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. O físico e matemático Isaac Newton (1642 - 1727) é considerado por muitos autores como um dos criadores do cálculo junto com o filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Estudando separadamente, ambos desenvolveram simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais para o cálculo. Além disso, Newton contribuiu para o estudo das séries de potências e utilizou séries para desenvolver alguns conceitos do cálculo, como área, comprimento de arco e volume. Também generalizou o teorema binomial para expoentes não inteiros e desenvolveu o método de Newton para a aproximação de zeros de uma função, entre outras contribuições importantes para a matemática.

Para discutir a prioridade na invenção do cálculo entre Newton e Leibniz, criou-se um comitê, que entre seus participantes tinha Brook Taylor (1685-1731), matemático inglês e membro da Royal Society. Juntamente com Colin Maclaurin (1698-1746), ficaram conhecidos pelas séries de Taylor e séries de Maclaurin, que são expansões de funções em séries de potências. Mas, antes deles o matemático escocês James Gregory (1638-1675) já trabalhava com a expansão em série infinita de $arctg(x)$, $tg(x)$ e $arcsec(x)$. Como ambos não conheciam o trabalho de Gregory, Taylor e Maclaurin publicaram seus trabalhos, popularizando as séries de potência. Segundo Eves (2011), o reconhecimento sobre a importância da série de Taylor deve-se ao matemático suiço Leonhard Euler (1707 - 1783) que a aplicou ao seu cálculo diferencial. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático italiano, usou a série com um resto como base de sua teoria das funções, notando sua importância no estudo do cálculo. Influenciado pelo trabalho de Lagrange, Bernard Bolzano (1781 - 1848) percebeu que o conceito de convergência era importante no estudos de séries e tentou explicá-lo associando a ideia à subconjuntos limitados.

Um dos grandes matemáticos do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o qual também foi astrônomo e físico, contribuiu em diversas áreas de estudo, dentre elas destacamos a teoria dos números, análise matemática, geometria diferencial. Gauss, desde pequeno já mostrava seu potencial quando o assunto era matemática. Considerado um garoto prodígio, segundo relatos, aos 10 anos de idade, durante uma aula seu professor passou a tarefa de somar os números de 1 a 100. Rapidamente Gauss respondeu corretamente 5050. Mentalmente, ele havia calculado a soma da progressão aritmética $1 + 2 + ... + 100$ observando que $100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, ..., 50 + 51 = 101$ e assim obteve os 50 pares, sendo a soma igual à 50 x $101 = 5050$.

Outro grande nome do século XIX, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), matemático francês, apresentou um artigo à Academia de Ciências da França, onde afirmou que qualquer função definida no intervalo $(-\pi, \pi)$ poderia ser representada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx)),$$

onde os coeficientes a_n e b_n são números reais convenientes. Chamada de série trigonométrica, esta descoberta não era um fato novo na época, pois os matemáticos já sabiam que muitas das funções poderiam ser representadas por meio dessas séries. A novidade apresentada por Fourier foi a afirmação que *toda função* poderia ser representada dessa maneira, desde que fosse definida em $(-\pi, \pi)$. Mas isso não entusiasmou Lagrange, Laplace e Legendre, que analisaram o artigo e o rejeitaram.

Mesmo não concluindo que a afirmação de Fourier era verdade, comprovou-se que as séries de Fourier poderiam representar muitas funções. Essas representações foram úteis em várias áreas de estudo como a acústica, a óptica, a eletrodinâmica, a termodinâmica, problemas sobre vigas e pontes e na solução de equações diferenciais. Segundo Eves (2011), as séries de Fourier motivaram os métodos modernos de física-matemática que envolvem a integração de equações diferenciais parciais sujeitas a condições de contorno.

Nesse período, os matemáticos já tinham notado a necessidade de formalizar conceitos mais teóricos para o cálculo. Nesse sentido, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), considerado o mais importante analista da primeira metade do século XIX, desenvolveu pesquisas sobre convergência e divergência de séries infinitas, chegando no teste da raiz e teste da razão para verificação da convergência ou divergência de uma série de termos positivos. Ainda vemos o seu nome na desigualdade de Cauchy, na fórmula integral de Cauchy, no teorema integral de Cauchy, entre outra contribuições.

Por fim, no início do século XX podemos destacar os matemáticos Carl David Tolmé Runge (1856-1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867 - 1944), que juntos, desenvolveram o

Método Runge-Kutta para resolver numericamente equações diferenciais. O método é baseado em um desenvolvimento de sequências.

A partir da revisão histórica aqui apresentada vemos como o conceito de sequências e séries sempre esteve presente na história da humanidade. Face a notoriedade deste tema, neste trabalho fazemos uma revisão bibliográfica sobre sequências e séries de números reais, bem como exploramos o método da exaustão como aplicação na quadratura da parábola, aproximação do número π e o volume da pirâmide. Finalmente, visando uma contribuição didática para as aulas de matemática no ensino médio, apresentamos duas propostas de aplicação deste riquíssimo conteúdo com auxílio do software Geogebra, como exemplos de atividades que não são abordadas pelos livros didáticos atualmente.

Capítulo 1

Sequências e Séries de Números Reais

Neste capítulo faremos um estudo sobre sequências e séries numéricas. Vamos entender a importância do conceito de limite de sequência, suas propriedades, bem como de determinar o valor de uma soma infinita de números reais, também conhecida como série numérica.

1.1 Sequências convergentes e subsequências

No que segue, denotaremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Definição 1.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, para qual denotamos o valor de x em n por x_n.

Vamos adotar a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para representar uma sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Também podemos denotar tal sequência por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, onde x_n é o seu n-ésimo termo.

Exemplo 1.2. A sequência dos números pares é dada por

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

onde $x_1 = 2, x_2 = 4, \ldots, x_n = 2n$. Dizemos que $x_n = 2n$ é a fórmula para o termo geral da sequência.

Nem sempre é possível determinar o termo geral de uma sequência, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.3. A sequência dos números primos é composta pelo números

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Mesmo não conhecendo uma fórmula para o termo geral dessa sequência, podemos determinar seus elementos.

Definição 1.4. Dizemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.5. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a Progressão Aritmética (PA) de termo inicial a e razão r. A P.A. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, pela fórmula do termo geral de uma PA, sabemos que

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r$$

Tomando $n_k = 2k - 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k - 2)r = a + (k - 1)2r = y_k$$

Antes de definirmos formalmente o conceito de sequências convergentes, vamos discutir algumas ideias intuitivas relativas a este conceito.

Intuitivamente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se seus termos se aproximam de x quando n cresce. Esta ideia pode nos levar a uma visão equivocada de convergência, mesmo não estando totalmente errada. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x quando a distância entre x_n e x diminui à medida que n cresce, é o mesmo que dizer que a função $f(n) = |x_n - x|$ é decrescente. Vamos analisar a Figura 1.1 para entender que isso não é sempre verdade.

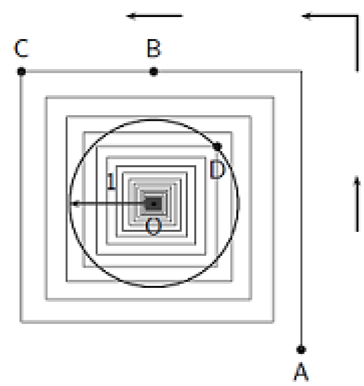


Figura 1.1: Espiral da convergência (disponível em [3])

Analisando a figura, imagine que, partindo do ponto A, percorremos no sentido anti-horário o caminho desenhado como indicado pelas setas. Note que ao longo do percurso estaremos nos aproximando do ponto O. No entanto, a ideia de que a distância ao ponto O decresce com o tempo é errada. Observe que passamos primeiro pelo ponto B antes de chegar no ponto C e que o segmento $\overline{BO}$ é menor que o $\overline{CO}$. Quando percorremos o segmento $\overline{BC}$ a distância para o ponto O está aumentando, ou seja, não existe nenhum ponto entre B e C no qual a distância a O passe a ser decrescente com o tempo. Podemos perceber que existem muitos trechos do caminho onde isso se repetirá.

Ainda analisando a Figura 1.1, podemos observar que nossa distância a O fica tão pequena quanto desejada se continuarmos andando por um tempo suficientemente longo. Note que ao passarmos pelo ponto D, nossa distância a O será menor que 1, pois estaremos dentro de uma bola centrada em O de raio 1. Da mesma forma, a partir de outro ponto entraremos em uma bola de raio $\dfrac{1}{2}$, centrada em O, e assim por diante. De modo geral, dado qualquer número positivo ε, existe um instante a partir do qual nossa distância até o ponto O será menor que ε. Isto nos leva a definição a seguir.

Definição 1.6. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita convergente se existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \text{ tal que } n \geq N \text{ implica que } |x_n - x| < \varepsilon.$$

Escrevemos que a sequência $x_n \longrightarrow x$ e que x é o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando n tende a infinito. Caso a sequência não seja convergente, dizemos que ela é divergente.

Exemplo 1.7. Vamos provar, segundo a Definição 1.6, que a sequência

$$(x_n) = \left(\frac{n}{n+12}\right) = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}, \ldots, \frac{n}{n+12} \ldots\right)$$

converge para 1.

Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $\left|\dfrac{n}{n+12} - 1\right| < \varepsilon$.

De fato, observe que, como

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+12} - 1\right| = \left|\frac{n-n-12}{n+12}\right| = \frac{12}{n+12} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon} - 12$$

então, dado $\varepsilon > 0$, considerando $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{12}{\varepsilon} - 12$, obtemos que

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - 1| < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência converge para 1.

Por exemplo, tomando experimentalmente $\varepsilon = 0,1$, então para $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \dfrac{12}{0,1} - 12 = 120 - 12 = 108$, teremos que

$$|x_n - 1| = \frac{12}{109+12} = \frac{12}{121} = 0,099 < 0,1 = \varepsilon.$$

Proposição 1.8. *(Unicidade do limite) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência e $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$. Então $x = y$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $x \neq y$. Como $x_n \longrightarrow x$, pela Definição 1.6, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N_1 \text{ implica que } |x_n - x| < \varepsilon,$$

e como $x_n \longrightarrow y$, então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N_2 \text{ implica que } |x_n - y| < \varepsilon.$$

Então, tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ temos pela desigualdade triangular

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n + y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \qquad (1)$$

Como $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$ em (1).

Logo, $|x - y| < |x - y|$, o que é uma contradição.

Portanto, $x = y$. ■

Proposição 1.9. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a* x *se, e somente se, toda subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a* x*.*

Demonstração: Temos por hipótese que $x_n \longrightarrow x$. Assim,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n \geq \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qualquer. Assim, $y_k = x_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n_k \in \mathbb{N}$.

Dessa forma,

$$\forall\varepsilon > 0, \text{se } \ n_k \geq \mathbb{N} \Longrightarrow |y_k - x| = |x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Logo, $y_k \longrightarrow x$.

A recíproca é imediata. Basta observar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência dela mesma. ■

Exemplo 1.10. A sequência $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ é divergente. De fato, pela Proposição 1.9 todas as suas subsequências devem convergir para o mesmo limite. Mas, note que as subsequências $(1, 1, 1, \ldots)$ e $(-1, -1, -1, \ldots)$ convergem para 1 e -1, respectivamente.

Teorema 1.11. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Tomando $\varepsilon > 0$ na definição de sequência convergente, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ se $n \geq \mathbb{N}$, isto é, $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Tomando

$$a = \min\{x_1, \ldots, x_N, x - \varepsilon\} \ \text{ e } \ b = \text{máx}\{x_1, \ldots, x_N, x + \varepsilon\}$$

temos que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

Pelo Exemplo 1.10, vemos que a recíproca do Teorema 1.11 é falsa, pois temos uma sequência limitada entre 1 e -1, a qual é divergente.

1.1.1 Sequências Monótonas

Definição 1.12. Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente se

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

e decrescente se

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots \ .$$

Diz -se que uma sequência é não-decrescente se $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$, e não-crescente se $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$. Dizemos que uma sequência é monótona se ela satisfaz qualquer umas dessas condições.

Teorema 1.13. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Vamos considerar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não-decrescente, ou seja,

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$$

Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente pelo elemento x_1 e, por hipótese, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Consequentemente, a sequência é limitada superiormente, ou seja, o conjunto de elementos possui um supremo S. Vamos provar que

$$(x_n) \longrightarrow \text{Sup}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = S.$$

Com efeito, como S é o supremo do conjunto em questão, dado $\varepsilon > 0$, existe um elemento da sequência, denotado por x_N, tal que $S - \varepsilon < x_N < S$. Como a sequência é não-decrescente, $x_N \leq x_n$, para todo $n \geq N$. Logo

$$n \geq N \Longrightarrow S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon,$$

isto é,

$$\Longrightarrow \mid x_n - S \mid < \varepsilon.$$

Logo, $x_n \longrightarrow S$. ■

Para o caso de uma sequência não-crescente, observe que a sequência será limitada superiormente e admitirá um ínfimo no conjunto de seus elementos. Dessa forma, os argumentos para a demonstração são análogos aos apresentados no caso não-decrescente.

Teorema 1.14. *(Bolzano - Weierstrass) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada e considere o conjunto

$$M = \{n \in \mathbb{N}; x_n > x_m, \forall m > n\},$$

denominado conjunto dos pontos destacados. Existem duas possibilidades para M: M finito ou infinito.

Caso infinito: Escrevendo $M = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ como $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ teremos que se $i < j$, então $n_i < n_j$, e como $n_i \in M$, $x_{n_i} > x_{n_j}$. Logo, a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente e, por hipótese, limitada. Portanto, pelo teorema anterior, a subsequência é convergente.

Caso finito: Como M é finito, existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que $n_p \notin M$. Assim,

$$\exists\, m_1 > n_p \Longrightarrow x_p \leq x_{m_1}.$$

Como $m_1 \notin M$, então

$$\exists\, m_2 > m_1 \Longrightarrow x_{m_1} \leq x_{m_2}.$$

Como $m_2 \notin M$, então

$$\exists\, m_3 > m_2 \Longrightarrow x_{m_2} \leq x_{m_3}.$$

Seguindo esse raciocínio, teremos que a subsequência $x_{n_p} \leq x_{m_1} \leq x_{m_2} \leq x_{m_3} \leq \ldots$ é não-decrescente e, por hipótese, limitada. Logo, pelo teorema anterior, a subsequência é convergente. ■

Definição 1.15. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita de Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Teorema 1.16. *(Sequência de Cauchy) Uma sequência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy.*

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente. Logo, $x_n \longrightarrow x$, com $x \in \mathbb{R}$. Então,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Temos que se $n, m \geq N$ então

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n, m \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Admitindo $m = N$, teremos que

$$\forall\varepsilon > 0, \forall n > N \Longrightarrow |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon.$$

Tomando $a = \min\{|x_1|, |x_2|, \ldots, x_N - \varepsilon\}$ e $b = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, x_N + \varepsilon\}$ teremos que $x_n \in [a, b]$ e portanto, é limitada.

Pelo Teorema de Bolzano - Weierstrass, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

Digamos que $(x_{n_k}) \longrightarrow x$, $x \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $x_n \longrightarrow x$.

De fato, como $(x_{n_k}) \longrightarrow x$ então,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ K \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n_k \geq K \Longrightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n, m \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $M = \text{máx}\{N, K\}$ temos que $\forall n, n_k \geq M$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $x_n \longrightarrow x$. ■

1.1.2 Limites infinitos

Definição 1.17. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a "mais infinito"quando n tende a "mais infinito", ou que "mais infinito"é limite da sequência, e escrevemos $x_n \longrightarrow +\infty$ ou $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = +\infty$ se,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Longrightarrow x_n > M.$$

Definição 1.18. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a "menos infinito" quando n tende a "mais infinito", ou que "menos infinito" é limite da sequência, e escrevemos $x_n \longrightarrow -\infty$ ou $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = -\infty$ se,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Longrightarrow x_n < M.$$

É importante ressaltar que se $x_n \longrightarrow +\infty$ ou $x_n \longrightarrow -\infty$, não podemos dizer que a sequência é convergente. Note que se $x_n \longrightarrow +\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente e, portanto, divergente. Analogamente, se $x_n \longrightarrow -\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, divergente.

1.1.3 Operações com limites

Veremos agora algumas propriedades aritméticas dos limites.

Propriedades: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências convergentes para x e y, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Temos:

(i) $x_n + y_n \longrightarrow x + y$

Demonstração: Como $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, temos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n \geq N_2 \Longrightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ e $n \geq N$ temos que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $x_n + y_n \longrightarrow x + y$. $\blacksquare$

(ii) $x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Como (x_n) é convergente, esta sequência é limitada. Logo, existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sejam $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ e $n \geq N_2 \Longrightarrow |y_n - y| < \varepsilon$.

Tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, temos

$$\begin{aligned}
|(x_n \cdot y_n) - (x \cdot y)| =& |(x_n \cdot x_n y) + (x_n y - xy)| \\
=& |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \\
\leq& \; c|y_n - y| + |y||x_n - x| \\
<& \; c\varepsilon + |y|\varepsilon = \varepsilon(c + |y|). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(iii) $c \cdot x_n \longrightarrow c \cdot x$

Demonstração: Vimos no item anterior que $x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y$. Tomando $y_n = c$, uma sequência constante, a demonstração é análoga. Logo, $c \cdot x_n \longrightarrow c \cdot x$.

(iv) Se $y \neq 0$, então $y_n^{-1} \longrightarrow y^{-1}$

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ e $N_1 \in N$ tais que se $n \geq N_1$, então $|y_n - y| < \varepsilon$. Temos ainda que $y \neq 0$, consequentemente existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > \dfrac{|y|}{2}$, pois pelas propriedades de módulo, temos

$$\begin{aligned}
|y| - |y_n| &< |y_n - y| < \varepsilon, \\
\Longrightarrow \qquad |y| &< |y_n| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Então $\dfrac{|y|}{2} < |y_n|$, ou seja, $|y_n|^{-1} < 2|y|^{-1}$, quando $n \geq N_2$. Tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, para todo $n \geq N$, temos que

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} < \frac{2}{|y|^2}\varepsilon.$$

que conclui a demonstração. $\blacksquare$

Exemplo 1.19. Considere $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma Progressão Geométrica de razão r.

Se $|r| < 1$, então multiplicando esta desigualdade dada por $|r^n| \geq 0$, teremos

$$0 \leq |r^{n+1}| \leq |r^n|.$$

Logo, $(|r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, limitada inferiormente e portanto convergirá para um número real L.

Propriedades do limite: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências e $c > 0$. Suponhamos que $x_n \longrightarrow +\infty$. Temos:

(i) Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $x_n + y_n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração: Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dado $M \in \mathbb{R}$, como $x_n \longrightarrow +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow x_n > M - c$. Segue que se $n \geq N$, então

$$x_n + y_n \geq x_n + c > M - a + a = M.$$

Logo, $x_n + y_n \longrightarrow +\infty$. ■

(ii) Se $y_n \geq c$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então $x_n \cdot y_n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração: Dado $M \in \mathbb{R}$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow x_n > \dfrac{|M|}{c}$. Dessa forma se $n \geq N$ então

$$x_n \cdot y_n \geq x_n \cdot c > \frac{|M|}{c} \cdot c = |M| \geq M.$$

Logo, $x_n \cdot y_n \longrightarrow +\infty$ ■

(iii) $c \cdot x_n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração: Pelo item anterior, basta tomar $y_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $x_n^{-1} \longrightarrow 0$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow x_n > \varepsilon^{-1}$. Segue que se $n \geq \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n^{-1} - 0| = x_n^{-1} < \varepsilon$.

Logo, $x_n^{-1} \longrightarrow 0$. ■

1.2 Séries

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades gerais das séries de números reais, bem como alguns critérios de convergência para as mesmas.

Definição 1.20. Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

A sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de somas parciais da série $\sum x_n$ e x_n é o n-ésimo termo ou termo geral da série. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n,$$

quando o limite acima existe e, neste caso, ele é dito limite da série. Dizemos que $\sum x_n$ é convergente ou divergente se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente ou divergente, respectivamente. Finalmente, dizemos que $\sum x_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum |x_n|$ é convergente.

Exemplo 1.21. Considere a Série Geométrica de termo geral $x_n = r^{n-1}$.Temos que a soma de seus n primeiros termos é dada por

$$S_n = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Se $r = 1$, então $S_n = n$. Assim,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} n = +\infty,$$

donde concluímos que S_n diverge e, consequentemente, $\sum x_n$ também diverge.
Agora, suponha $r \neq 1$. Multiplicando S_n por r, teremos que

$$\begin{array}{rrcl}
 & rS_n & = & r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{r-1} + r^n \\
\Longrightarrow & rS_n & = & 1 + r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{r-1} + r^n - 1 \\
\Longrightarrow & rS_n & = & S_n + r^n - 1 \\
\Longrightarrow & rS_n - S_n & = & r^n - 1 \\
\Longrightarrow & S_n(r-1) & = & r^n - 1 \\
\Longrightarrow & S_n & = & \dfrac{r^n - 1}{r - 1}.
\end{array}$$

Note que se $|r| > 1$, S_n diverge, e para $|r| < 1$, S_n converge. Logo, $\sum x_n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \frac{1}{1-r}.$$

Propriedades de séries: Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Temos que:

(i) $\sum(x_n + y_n)$ é convergente para $\sum x_n + \sum y_n$.

Demonstração: Considere

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = s,$$

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n = t.$$

Seja $u_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$. Então

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i + \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$= \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n + \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n = s + t.$$

Portanto, $\sum(x_n + y_n)$ é convergente, e

$$\sum_{i=1}^{n} (x_n + y_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \qquad \blacksquare$$

(ii) $\sum(c \cdot x_n)$ é convergente para $c \sum x_n$.

Demonstração: Considere

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = s.$$

Seja $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(c \cdot x_i)$. Então

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n}(c \cdot x_i) = \lim_{n \longrightarrow \infty} c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = c \cdot \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = c \cdot s.$$

Assim, $\sum(c \cdot x_n)$ é convergente, e

$$\sum c \cdot x_n = c \cdot s = c \cdot \sum x_n. \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.22.

(i) $\sum x_n$ converge se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{i=m}^{n} x_i \right| < \varepsilon.$$

Demonstração: O critério dado diz simplesmente que a sequência das somas parciais é de Cauchy. O resultado segue do Teorema 1.16.

(ii) Se $\sum x_n$ converge, então $x_n \longrightarrow 0$.

Demonstração: Como $\sum x_n$ é convergente, então $\sum x_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} = s$.
Tomando $x_n = S_n - S_{n-1}$, obtemos

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n - \lim_{n \longrightarrow \infty} S_{n-1} = s - s = 0,$$

como queríamos demonstrar.

(iii) Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração: Observamos que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left| \sum_{i=m}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=m}^{n} |x_i| = \left| \sum_{i=m}^{n} |x_i| \right|.$$

Logo, se $\sum |x_n|$ é convergente, por (i) e por iii concluímos que x_n é convergente. ■

Exemplo 1.23. Pelo item (ii), a condição $x_n \longrightarrow 0$ é necessária para a convergência da série $\sum x_n$ porém ela não é suficiente. A série Harmônica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é o contra exemplo mais famoso. De fato, agrupando os termos da soma parcial S_{2^n} de 1 em 1, 2 em 2, 4 em 4, ..., 2^k em 2^k termos e estimando por baixo, temos que

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &> 1 + 2\left(\frac{1}{4} \right) + 4\left(\frac{1}{8} \right) + \ldots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Contando o número de vezes que $\frac{1}{2}$ aparece na soma acima temos que

$$S_{2^n} \geq 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Logo, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n = +\infty$. Portanto, a série é divergente.

As principais aplicações práticas do estudo das séries harmônicas estão na música e na análise de espectros eletromagnéticos, como por exemplo ondas de rádio e sistemas de corrente alternada.

Proposição 1.24. *Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é limitada superiormente.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Por definição $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n = s$. Como S_n é convergente, ela é limitada. Em particular limitada superiormente, já que os termos de S_n são positivos.
($\Longleftarrow$) Considere uma série $\sum x_n$ de termos positivos tal que a sequência S_n é limitada superiormente. Temos que $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$, então

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1 \\
S_2 &= x_1 + x_2 \\
S_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
&\vdots \\
S_n &= x_1 + x_2 + ... + x_n.
\end{aligned}$$

Como $x_i > 0$, temos que $S_1 < S_2 < ... < S_n$ e S_n é uma sequência crescente. Sabemos que uma sequência crescente e limitada superiormente é convergente. Logo,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = s = \sum x_n.$$

Portanto, $\sum x_n$ é convergente. ■

1.2.1 Critério da Comparação

Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge.

(ii) Se $\sum x_n$ diverge, então $\sum y_n$ diverge.

Demonstração: Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sequências de somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$ respectivamente. De $x_n \leq y_n$, segue imediatamente que $S_n \leq T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente, então $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Logo, $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são divergentes. Por outro lado, se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Logo, pela proposição anterior $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são convergentes. ■

Exemplo 1.25. Vamos estudar a convergência da série série $\sum \frac{1}{n^p}$, analisando os valores de p.

• Se $p \leq 0$, então $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ e portanto, a série será divergente.

• Se $0 < p \leq 1$, temos que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teste da comparação com a série harmônica, concluímos que a série diverge.

• Se $p > 1$, vamos analisar a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais. De fato, agrupando os termos da soma em grupos de 2^k elementos, com $k = 0, 1, 2, ...$, obtemos que

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ... + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + ... + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + ... + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right) \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + ... + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (2^{1-p})^{(i-1)}.
\end{aligned}$$

Como $p > 1$ temos $2^{1-p} < 1$ e, portanto, a série geométrica de razão 2^{1-p} converge. Segue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e portanto $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente.

1.2.2 Teste da Razão

Seja $\sum x_n$ uma série de termos positivos tal que existe o limite L do quociente $\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Então, a série converge se $L < 1$ e diverge se $L > 1$, sendo o teste inconclusivo no caso em que

$L = 1$.

Demonstração: Seja c um número compreendido entre L e 1. Supondo $L < 1$, então $c < 1$. A partir de um certo índice N, teremos que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < c$, $\forall n \geq N$. Assim,

$$\frac{x_{N+1}}{x_N} < c \Longrightarrow x_{N+1} < x_N \cdot c$$
$$\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} < c \Longrightarrow x_{N+2} < x_{N+1} \cdot c < x_N \cdot c \cdot c = x_N \cdot c^2,$$

e assim, $x_{N+j} < x_N \cdot c^j$. Isso mostra que a partir do índice $N+1$ a série dada é marjorada pela série geométrica $x_N \sum c^j$, que é convergente, pois $0 < c < 1$. Então, a série original é também convergente, pelo teste da comparação.

No caso $L > 1$, a partir de um certo índice N, $x_{N+1} > x_N$, $x_{N+2} > x_{N+1} > x_N$ e em geral $x_{N+j} > x_N$, provando que o termo geral x_{N+j} não tende a zero. Logo a série é divergente.■

Exemplo 1.26. A série $\sum \frac{1}{n!}$ é convergente pelo teste da razão. De fato,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Logo, a série é convergente.

Exemplo 1.27. Veremos agora dois exemplos de que o teste da razão é inconclusivo quando $L = 1$. Considere as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$.

A primeira série é a série harmônica. Como já vimos, ela é divergente e

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Já a segunda série, é a chamada série p, convergente para $p > 1$ e

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Note que a primeira série é divergente e a segunda convergente, mas ambas têm $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$.

Definição 1.28. $e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Teorema 1.29. *O número e é irracional.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $e\in\mathbb{Q}$. Então, existem $p,q\in\mathbb{N}$ tais que $e=\dfrac{p}{q}$, ou seja, $\dfrac{p}{q}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Multiplicando por $q!$ em ambos os lados da igualdade, teremos

$$\begin{aligned}
&& \frac{p}{q}q! &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q!}{n!}\\
&\Longrightarrow & \frac{p\cdot q\cdot(q-1)!}{q} &= \sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!}+\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}\\
&\Longrightarrow & p\cdot(q-1)!-\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!} &= \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}.
\end{aligned}$$

Note que $p\cdot(q-1)!\in\mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!}\in\mathbb{N}$ pois, como $n<q$, podemos escrever $n=q-r$, com $r\in\mathbb{N}$. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!} &= \sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{(q-r)!}\\
&= \sum_{n=0}^{q}\frac{q\cdot(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-r+1)\cdot(q-r)!}{(q-r)!}\\
&= \sum_{n=0}^{q}q\cdot(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-r+1).
\end{aligned}$$

Logo, $\left(p\cdot(q-1)!-\sum_{n=0}^{q}\dfrac{q!}{n!}\right)\in\mathbb{Z}$. Mas,

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+2)(q+1)}+\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)}+\ldots\\
&< \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1.
\end{aligned}$$

Assim, $0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < 1$. Logo,

$$p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} \neq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!},$$

então $e \neq \frac{p}{q}$. Portanto, o número e é irracional. $\blacksquare$

1.2.3 Teste da Raiz

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos.

(i) Se $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.

(ii) Se $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Demonstração:

(i) Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{x_n} < c < 1$. A partir de um certo índice $N \in \mathbb{N}$, teremos que $\sqrt[n]{x_n} < c$, ou seja, $x_n < c^n$, para todo $n \geq \mathbb{N}$. Observando que $0 < c < 1$, temos que a série Geométrica $\sum c^n$ converge. Assim, pelo teste da comparação, a série $\sum x_n$ também converge.

(ii) Considere que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$. Então, a partir de um certo índice $N \in \mathbb{N}$, teremos que $\sqrt[n]{x_n} > 1$, o que implica em $x_n > 1^n$. Note que a série $\sum 1^n$ é divergente e pelo teste da comparação $\sum x_n$ também é. $\blacksquare$

Observação 1.30. Quando $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, o teste da raiz não nos permite concluir nada sobre a convergência ou divergência de uma série.

Capítulo 2

Método da Exaustão

No desenvolvimento cálculo diferencial e integral tal como conhecemos hoje, grande parte dos problemas que motivaram seu estudo foram originados a partir de, por exemplo, tentativas de determinar o cálculo de áreas, volumes e comprimento de arcos.

O método da exaustão foi um dos primeiros métodos utilizados pelo homem para calcular a área de figuras. Na Grécia antiga, já se sabia calcular área do quadrado e do triângulo, mas não sabiam como calcular a área do círculo, por exemplo. Na tentativa de resolver esse problema, surge o método da exaustão. Intuitivamente o método funciona assim:

Conhecemos a área do quadrado, e queremos encontrar a área do círculo. Digamos que se inscreva um quadrado no círculo, como mostra a Figura 2.1 abaixo.

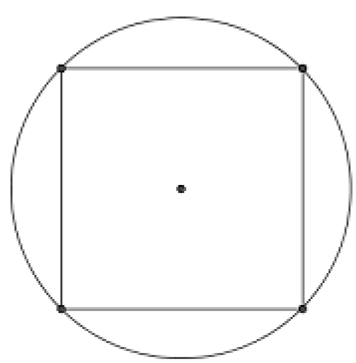


Figura 2.1: Quadrado inscrito em um círculo.

Note que há espaços entre o círculo e o quadrado, o que nos indica que a aproximação das áreas não será boa. Então, ao invés de inscrever um quadrado, vamos inscrever um pentágono no círculo.

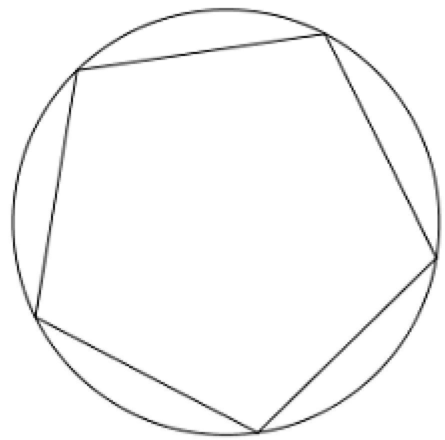


Figura 2.2: Pentágono inscrito em um círculo.

Note agora que a diferença entre as áreas do círculo e do pentágono ainda é grande, mas é menor que em relação a área do quadrado. Assim, conforme aumentarmos o número de lados do polígono, a diferença das áreas será cada vez menor. Como já era conhecido o cálculo da área de um triângulo, então usando um resultado da geometria euclidiana, onde todo polígono de n lados determina $(n-2)$ triângulos, era possível determinar a área do polígono inscrito no círculo e assim prever a área do círculo com uma margem de erro. Daí o nome de Método da Exaustão, pois aumentaríamos exaustivamente o número de lados do polígono inscrito para diminuir a diferença entre as áreas. Em uma linguagem atual, o método se resumiria em calcular o limite da área do polígono quando o número de lados tende a infinito, ou seja,

$$A_C = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_P,$$

onde A_C é a área do círculo, A_P é a área do polígono e n é o número de lados do polígono.

O método da Exaustão, como é conhecido hoje, ganhou notoriedade nos trabalhos de Arquimedes, mas os créditos do método são dados a Eudoxo (370 a.C). O método da Exaustão está presente no XII livro de Euclides, "Elementos". No entanto, é no XI livro de Euclides que encontra-se uma proposição que é a base do método.

Proposição 2.1. *Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por* *diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

Em uma linguagem matemática mais técnica, poderíamos enunciá-la da seguinte maneira:

" Sejam $\varepsilon > 0$ e $M_1, M_2, M_3, M_4, ...$ números positivos tais que $M_2 < \frac{1}{2}M_1$, $M_3 < \frac{1}{2}M_2, M_4 < \frac{1}{2}M_3$, assim por diante. Então existe um número inteiro positivo N tal que $M_N < \varepsilon$."

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e M uma grandeza qualquer. Tome uma grandeza c tal que $\frac{1}{2} \leq c < 1$. Fazendo

$$\begin{aligned}
M - Mc &= M_1 \Longrightarrow M(1-c) = M_1, \\
M_1 - M_1c &= M_2 \Longrightarrow M_1(1-c) = M_2 \Longrightarrow M(1-c)^2 = M_2, \\
M_2 - M_2c &= M_3 \Longrightarrow M_2(1-c) = M_3 \Longrightarrow M(1-c)^3 = M_2,
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente, chegaremos que $M_N = M(1-c)^N$.

Se $\frac{1}{2} \leq c < 1$ então $0 < 1 - c \leq \frac{1}{2}$. Logo, para um N suficientemente grande teremos que $(1-c)^N$ tenderá a zero. Ou seja, existe um N positivo tal que $M_N < \varepsilon$. ■

Veremos agora algumas aplicações do Método da Exaustão.

2.1 Quadratura da Parábola

Já vimos que para os gregos o cálculo de áreas era feito por comparação com áreas conhecidas, como, por exemplo, a área do quadrado e do triângulo. Arquimedes usou o método da exaustão para encontrar a área aproximada da parábola ao inscrever no segmento parabólico um triângulo de mesma base e altura. A seguir, em cada um dos segmentos parabólicos resultantes, inscreve-se novamente um triângulo e, sucessivamente, inscrevem-se triângulos nos segmentos parabólicos resultantes nas etapas anteriores. A Figura 2.3 ilustra esta construção:

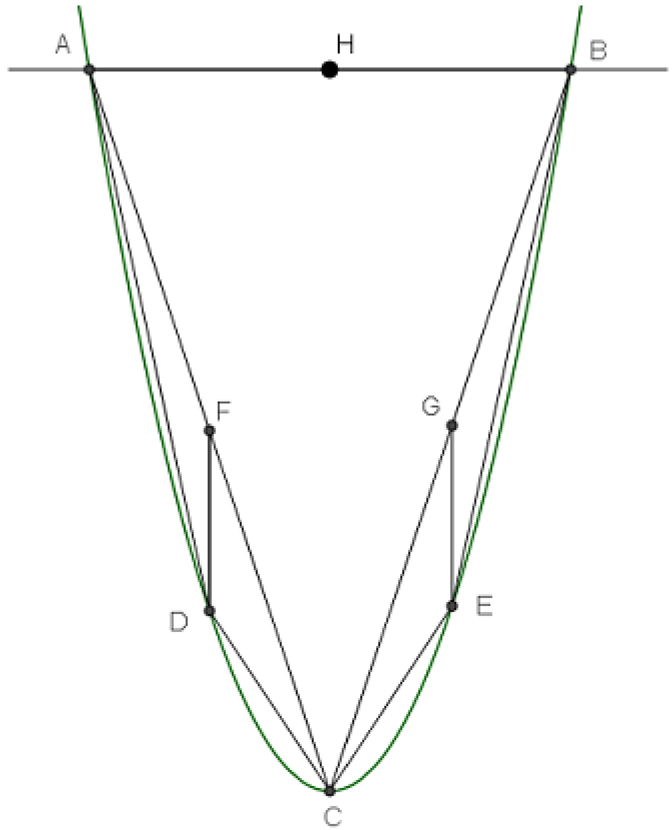


Figura 2.3: Quadratura da parábola.

Sejam C, D, E os pontos do arco de segmento parabólico, como vimos na Figura 2.2, obtidos traçando-se HC, FD, GE paralelos ao eixo da parábola pelos pontos médios H, F, G de AB, CA, CB. A partir de resultados da geometria [ver em `https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=881`, página 36] é possível mostrar que a soma das áreas dos triângulos ACD e BCE é um quarto da área do triangulo ABC, ou seja,

$$\triangle ACD + \triangle BCE = \frac{\triangle ABC}{4}.$$

Aplicando repetidamente esse processo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A_{\text{Parábola}} &= \triangle ABC + \frac{\triangle ABC}{4} + \frac{\triangle ABC}{4^2} + \frac{\triangle ABC}{4^3} + ... \\ &= \triangle ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ...\right). \end{aligned}$$

Note que $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{4}$, e como vimos no Capítulo 2, esta série convergirá para $\frac{4}{3}$.

Logo,

$$A_{\text{Parábola}} = \frac{4}{3}\triangle ABC.$$

Vale observar que, na época, Arquimedes não usou a série geométrica para fazer este cálculo, somente o método da exaustão.

2.2 Aproximação do Pi

A razão entre o comprimento de qualquer circunferência e a medida de seu diâmetro é um número contante, que ficou conhecido como π, letra grega que se lê "Pi".

Sabemos que o comprimento da circunferência de raio r é $2\pi r$ e, para obtermos o comprimento exato da circunferência, precisaremos encontrar uma aproximação para π. Faremos isso usando a ideia de estimar o comprimento da circunferência por um polígono regular inscrito na mesma.

Para tal, considere um polígono regular de n lados, cujo lado será representado por l_n. Iremos determinar um polígono de $2n$ lados de lado l_{2n} em função de l_n e do raio r da circunferência.

Para a demonstração, vamos usar como base a Figura 2.4 a seguir

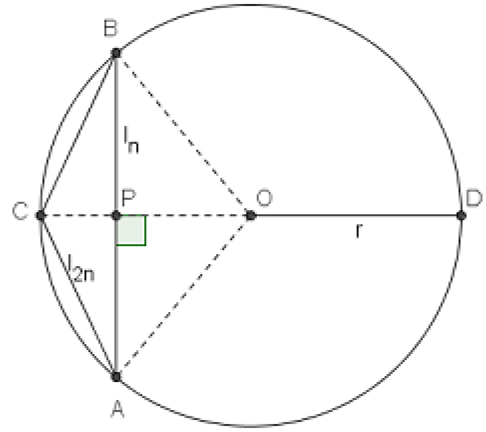


Figura 2.4: Aproximação do pi.

Por construção, os triângulo ΔABC e ΔABO são isósceles. Em uma circunferência, se o raio é perpendicular a uma corda então ele intercepta a corda no seu ponto médio. Logo, $\overline{AP} = \dfrac{l_n}{2}$.

Como CD é diâmetro da circunferência, o triângulo ACD é retângulo em A. Usando o fato que, em um triângulo retângulo, a altura é a média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, temos que $l_{2n}^2 = 2r \cdot (r - \overline{PO})$ e, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{PO}^2 = r^2 - \left(\dfrac{l_n}{2}\right)^2$. Substituindo $\overline{PO}$ da primeira igualdade na segunda igualdade obteremos que

$$\begin{aligned} l_{2n}^2 &= 2r \cdot \left(r - \frac{\sqrt{4r^2 - L_n^2}}{2}\right) \\ &= 2r \cdot \left(2r - \frac{\sqrt{4r^2 - L_n^2}}{2}\right) \\ &= r \cdot \left(2r - \sqrt{4r^2 - L_n^2}\right) \\ &= 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - L_n^2} \\ \Longrightarrow l_{2n} &= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - L_n^2}}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Iniciando o raciocínio de construção de polígonos inscritos na circunferência, vamos considerar o quadrado inscrito. Então, pelo Teorema de Pitágoras, podemos concluir que $l_4 = r\sqrt{2}$. Pelo resultado que obtivemos em (1), teremos que

$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}},$
$l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$
$l_{32} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$

e assim sucessivamente. Veja a tabela:

n	l_n	**Perímetro**
4	1,41421 · r	5,6568 · r
8	0,76537 · r	6,1229 · r
16	0,39018 · r	6,2428 ·r
32	0,19603 · r	6,2730 · r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
512	0,01227 · r	6,2831· r

Tabela 2.1: Aproximação do pi.

Observe que para um polígono de 512 lados já obtemos uma aproximação próxima ao valor conhecido de ($\pi \cong 3,1415$).

Arquimedes calculou o perímetro de polígonos com 12, 24 , 48 e 96 lados, inscritos e circunscritos a circunferência, obtendo que π era um valor entre 3,1408 e 3,1428, o que pode ser considerado uma boa aproximação.

2.3 Volume da Pirâmide

Veremos agora uma aplicação do método da exaustão para demonstrações de volumes de sólidos geométricos. Para isso, consideremos alguns axiomas da Geometria Euclidiana.

Axioma I: A todo sólido geométrico S corresponde um único número real positivo que denominamos volume.

Axioma II: Se um sólido geométrico é a união de dois ou mais sólidos geométricos tais que dois a dois não tenham pontos interiores em comum, então seu volume é a soma dos volumes daqueles.

Axioma III: O volume de um poliedro determinado por um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos S_1 e S_2, se existe um plano π_1 tal que todo plano π_2 paralelo a π_1 que intercepta S_1 e S_2 determina em S_1 e S_2 interseções de áreas iguais, então o volume de S_1 é igual ao volume de S_2.

Não iremos demonstrar esse princípio, mas como ideia intuitiva imagine uma pilha de cartões de papel. Não importa de que maneira nós empilhamos, o volume do sólido resultante será sempre igual.

Teorema 2.2. *O volume de um prisma é o produto da área de sua base pela medida de sua altura.*

Demonstração: Sejam A_b e H, respectivamente, a área da base B e a altura de um prisma dado. Consideremos um paralelepípedo retângulo, cuja base B' tem área A_b, altura H e que B' está no mesmo plano de B. Sabemos que as bases de um prisma são congruentes, e que quando o plano da seção de um prisma é paralelo aos planos das bases, a seção é congruente as bases. Ou seja, todas as seções dos dois prismas terão a mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri, os dois prismas vão ter o mesmo volume. E pelo Axioma III, o volume do paralelepípedo retângulo é $A_b \cdot H$.

Queremos mostrar que o volume da pirâmide é $V = \dfrac{A_b \cdot H}{3}$, ou seja, o volume da pirâmide é um terço do volume de um prisma de mesma base. Veja como exemplos as figuras abaixo:

Teorema 2.3. *O volume da pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

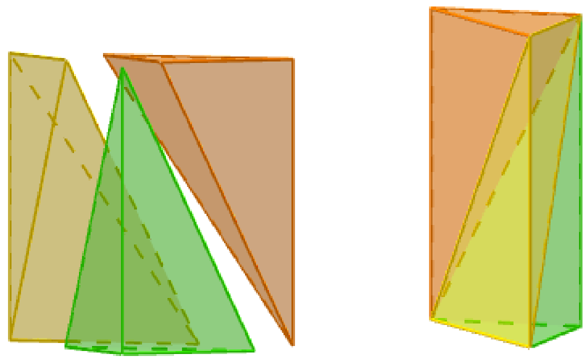


Figura 2.5: Volume da pirâmide

Demonstração: Faremos a demonstração considerando a pirâmide de base quadrada ABCDE. A ideia para essa demonstração é “fatiar”a pirâmide por inúmeros planos paralelos ao plano que contém a base da pirâmide, como ilustra a Figura 2.6:

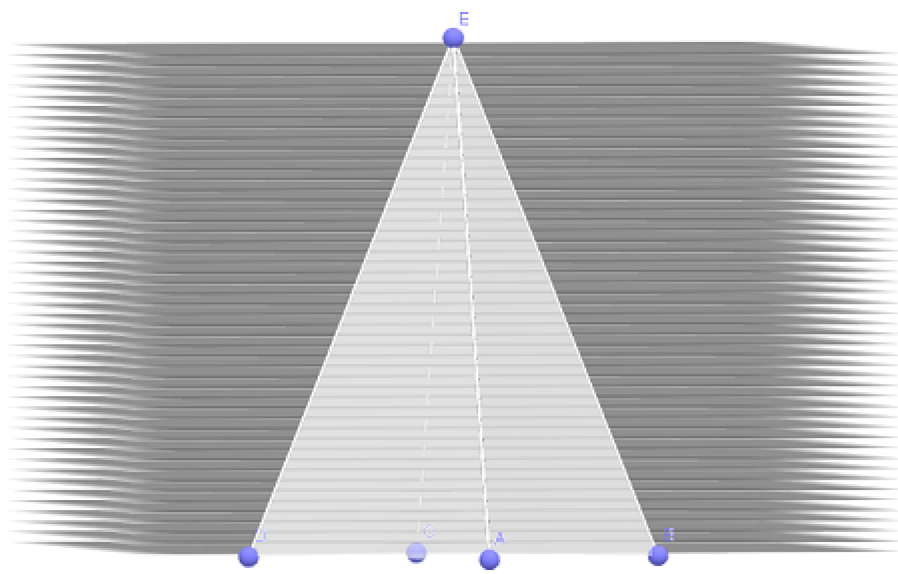


Figura 2.6: Pirâmide “fatiada”por planos.

Quando dividimos a pirâmide por n planos paralelos, teremos $n-1$ troncos de pirâmides. Note que os troncos da pirâmide não são iguais aos troncos de um prisma de mesma base e altura da pirâmide, mas para n suficientemente grande, teremos que o volume dos troncos da pirâmide tenderão ao mesmo volume dos troncos do prisma. Então, consideraremos os troncos da pirâmide como sendo prismas de mesma base.

Agora, considere a Figura 2.7:

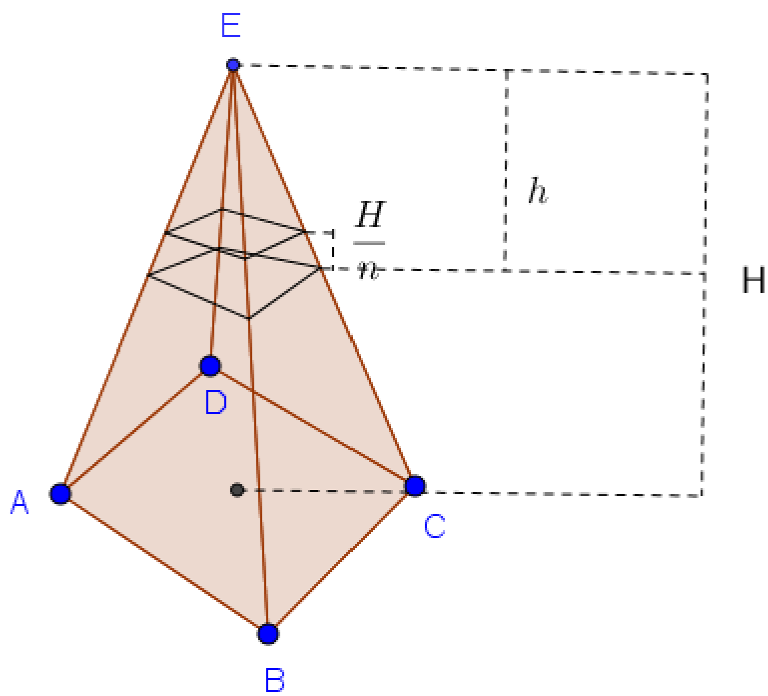


Figura 2.7: Pirâmide.

Seja k um número natural tal que k representa a quantidade de troncos acima do tronco de base A_k da pirâmide de altura h, como vemos na Figura 2.7. Sendo assim, o volume de $V_k = A_k \cdot \dfrac{H}{n}$. Considerando a pirâmide de base A_b, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{A_b} &= \frac{h^2}{H^2} = \left(\frac{k \cdot \frac{H}{n}}{H}\right)^2 \\ \Longrightarrow \quad A_k &= A_b \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Assim, o volume do k- ésimo prisma, que iremos representar por P_k, pode ser escrito como

$$V_{P_k} = A_k \cdot \frac{H}{n}.$$

De (1), teremos que

$$\begin{aligned} V_{P_k} &= A_b \cdot \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{H}{n} \\ &= A_b \cdot H \cdot \frac{k^2}{n^3}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Dessa forma, somando todos os volumes dos prismas de mesma bases A_k e altura, teremos

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_{P_k}.$$

De (2), segue que

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} A_b \cdot H \cdot \frac{k^2}{n^3} \\ &= \frac{A_b \cdot H}{n^3} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2. \end{aligned}$$

Pelo Principio da Indução Finita, podemos mostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Logo,

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_b \cdot H}{n^3} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{A_b \cdot H}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right) \\ &= A_b \cdot H \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}. \end{aligned}$$

Quando tomarmos, o limite para expressão acima, para n suficientemente grande, teremos

$$V = A_b \cdot H \cdot \frac{2}{6} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Portanto, o volume da pirâmide é dado por $V = \dfrac{A_b \cdot H}{3}$. $\blacksquare$

Podemos usar raciocínio semelhante para demonstrar o volume de outros sólido geométricos, como do cone e da esfera.

Capítulo 3

Propostas Didáticas para Sala de Aula

De acordo com as DCE - Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática [1] para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio - do Governo do Estado do Paraná, o estudo sequências e séries se encaixa no primeiro ano do ensino médio no conteúdo estruturante de funções. Basicamente, o estudo fica restrito ao ensino de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG) com o intuito de que o aluno reconheça, nas sequências numéricas, particularidades que remetam ao conceito das progressões aritméticas e geométricas e generalize cálculos para a determinação de termos de uma sequência numérica.

A seguir, temos as definições de PA e PG apresentadas nos livros didáticos. Aqui apresentamos como referência as definições do livro "Contexto e Aplicações"do autor Luiz Roberto Dante, referência [6].

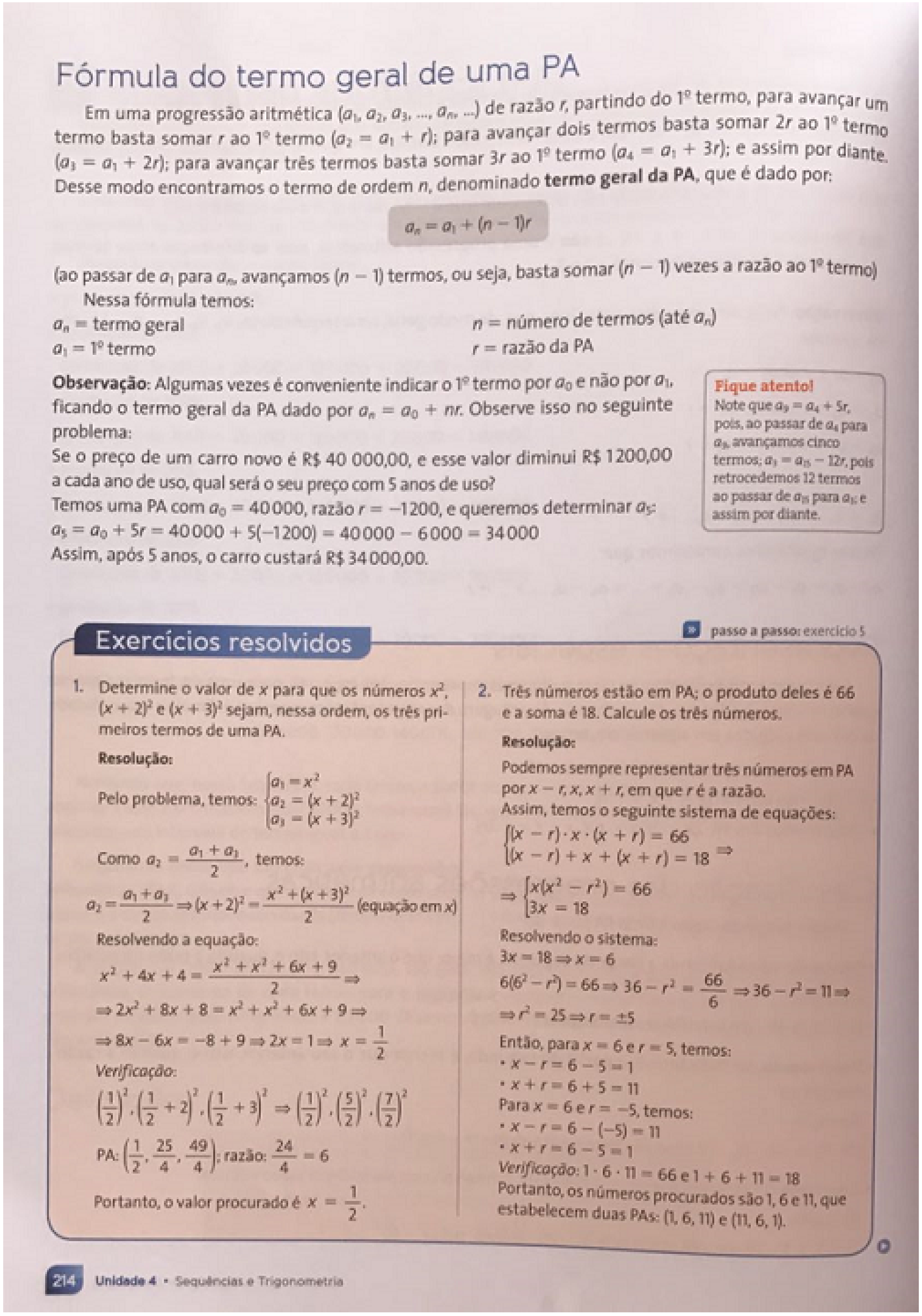
Definição 3.1. Progressão aritmética é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r.

Definição 3.2. Progressão geométrica é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q.

Atualmente, os livros de matemática abordam tal conteúdo focando na apresentação fórmulas. Em geral, os livros apresentam uma estruturação didática semelhante, sem muitas novidades. Nesse trabalho, vamos analisar os textos referentes a sequência nos livros "Contexto e Aplicações", referência [3] de Luiz Roberto Dante e "Matemática: ciência e aplicações"de Gelson Iezzi em conjunto com outros autores, referência [6].

Figura 3.1: Livros didáticos.

No livro “Contexto e Aplicações”, o autor começa o texto com uma introdução de como as sequências podem aparecer na natureza, a determinação de uma sequência por recorrência antes de definir formalmente o conceito de sequências, PA e PG. O mesmo apresenta listas de exercícios com foco principalmente na aplicação de fórmulas, como vemos nas Figura 3.2 e 3.3:



Fórmula do termo geral de uma PA

Em uma progressão aritmética ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$) de razão r, partindo do 1º termo, para avançar um termo basta somar r ao 1º termo ($a_2 = a_1 + r$); para avançar dois termos basta somar $2r$ ao 1º termo ($a_3 = a_1 + 2r$); para avançar três termos basta somar $3r$ ao 1º termo ($a_4 = a_1 + 3r$); e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado **termo geral da PA**, que é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

(ao passar de a_1 para a_n, avançamos $(n-1)$ termos, ou seja, basta somar $(n-1)$ vezes a razão ao 1º termo)

Nessa fórmula temos:

a_n = termo geral

a_1 = 1º termo

n = número de termos (até a_n)

r = razão da PA

Observação: Algumas vezes é conveniente indicar o 1º termo por a_0 e não por a_1, ficando o termo geral da PA dado por $a_n = a_0 + nr$. Observe isso no seguinte problema:

Se o preço de um carro novo é R$ 40 000,00, e esse valor diminui R$ 1200,00 a cada ano de uso, qual será o seu preço com 5 anos de uso?

Temos uma PA com $a_0 = 40000$, razão $r = -1200$, e queremos determinar a_5:

$a_5 = a_0 + 5r = 40000 + 5(-1200) = 40000 - 6000 = 34000$

Assim, após 5 anos, o carro custará R$ 34 000,00.

Fique atento!
Note que $a_9 = a_4 + 5r$, pois, ao passar de a_4 para a_9, avançamos cinco termos; $a_3 = a_{15} - 12r$, pois retrocedemos 12 termos ao passar de a_{15} para a_3; e assim por diante.

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 5

1. Determine o valor de x para que os números x^2, $(x+2)^2$ e $(x+3)^2$ sejam, nessa ordem, os três primeiros termos de uma PA.

Resolução:

Pelo problema, temos: $\begin{cases} a_1 = x^2 \\ a_2 = (x+2)^2 \\ a_3 = (x+3)^2 \end{cases}$

Como $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, temos:

$a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow (x+2)^2 = \dfrac{x^2 + (x+3)^2}{2}$ (equação em x)

Resolvendo a equação:

$x^2 + 4x + 4 = \dfrac{x^2 + x^2 + 6x + 9}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 8x + 8 = x^2 + x^2 + 6x + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x - 6x = -8 + 9 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Verificação:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2, \left(\dfrac{1}{2}+2\right)^2, \left(\dfrac{1}{2}+3\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2, \left(\dfrac{5}{2}\right)^2, \left(\dfrac{7}{2}\right)^2$

PA: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{4}, \dfrac{49}{4}\right)$; razão: $\dfrac{24}{4} = 6$

Portanto, o valor procurado é $x = \dfrac{1}{2}$.

2. Três números estão em PA; o produto deles é 66 e a soma é 18. Calcule os três números.

Resolução:

Podemos sempre representar três números em PA por $x - r, x, x + r$, em que r é a razão.

Assim, temos o seguinte sistema de equações:

$\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 66 \\ (x - r) + x + (x + r) = 18 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x(x^2 - r^2) = 66 \\ 3x = 18 \end{cases}$

Resolvendo o sistema:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

$6(6^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 36 - r^2 = \dfrac{66}{6} \Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Então, para $x = 6$ e $r = 5$, temos:

- $x - r = 6 - 5 = 1$
- $x + r = 6 + 5 = 11$

Para $x = 6$ e $r = -5$, temos:

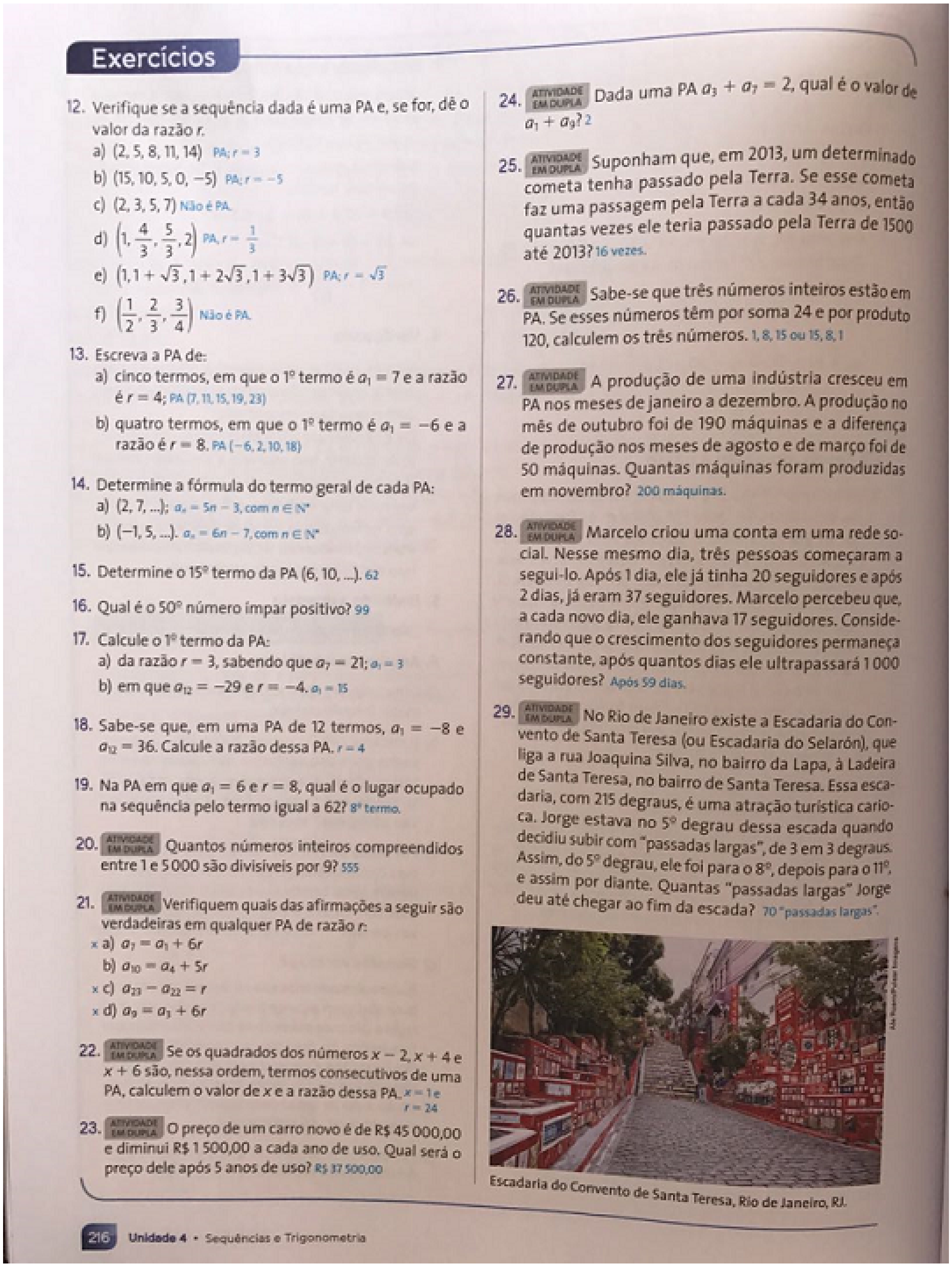
- $x - r = 6 - (-5) = 11$
- $x + r = 6 - 5 = 1$

Verificação: $1 \cdot 6 \cdot 11 = 66$ e $1 + 6 + 11 = 18$

Portanto, os números procurados são 1, 6 e 11, que estabelecem duas PAs: (1, 6, 11) e (11, 6, 1).

214 Unidade 4 • Sequências e Trigonometria

Figura 3.2: Exemplos e exercícios do livro Contexto e Aplicações.



Exercícios

12. Verifique se a sequência dada é uma PA e, se for, dê o valor da razão r.
a) (2, 5, 8, 11, 14) PA; $r = 3$
b) (15, 10, 5, 0, −5) PA; $r = -5$
c) (2, 3, 5, 7) Não é PA.
d) $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$ PA, $r = \frac{1}{3}$
e) $\left(1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}\right)$ PA; $r = \sqrt{3}$
f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ Não é PA.

13. Escreva a PA de:
a) cinco termos, em que o 1º termo é $a_1 = 7$ e a razão é $r = 4$; PA (7, 11, 15, 19, 23)
b) quatro termos, em que o 1º termo é $a_1 = -6$ e a razão é $r = 8$. PA (−6, 2, 10, 18)

14. Determine a fórmula do termo geral de cada PA:
a) (2, 7, ...); $a_n = 5n - 3$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) (−1, 5, ...). $a_n = 6n - 7$, com $n \in \mathbb{N}^*$

15. Determine o 15º termo da PA (6, 10, ...). 62

16. Qual é o 50º número ímpar positivo? 99

17. Calcule o 1º termo da PA:
a) da razão $r = 3$, sabendo que $a_7 = 21$; $a_1 = 3$
b) em que $a_{12} = -29$ e $r = -4$. $a_1 = 15$

18. Sabe-se que, em uma PA de 12 termos, $a_1 = -8$ e $a_{12} = 36$. Calcule a razão dessa PA. $r = 4$

19. Na PA em que $a_1 = 6$ e $r = 8$, qual é o lugar ocupado na sequência pelo termo igual a 62? 8º termo.

20. ATIVIDADE EM DUPLA Quantos números inteiros compreendidos entre 1 e 5 000 são divisíveis por 9? 555

21. ATIVIDADE EM DUPLA Verifiquem quais das afirmações a seguir são verdadeiras em qualquer PA de razão r:
× a) $a_7 = a_1 + 6r$
b) $a_{10} = a_4 + 5r$
× c) $a_{23} - a_{22} = r$
× d) $a_9 = a_3 + 6r$

22. ATIVIDADE EM DUPLA Se os quadrados dos números $x - 2$, $x + 4$ e $x + 6$ são, nessa ordem, termos consecutivos de uma PA, calculem o valor de x e a razão dessa PA. $x = 1$ e $r = 24$

23. ATIVIDADE EM DUPLA O preço de um carro novo é de R$ 45 000,00 e diminui R$ 1 500,00 a cada ano de uso. Qual será o preço dele após 5 anos de uso? R$ 37 500,00

24. ATIVIDADE EM DUPLA Dada uma PA $a_3 + a_7 = 2$, qual é o valor de $a_1 + a_9$? 2

25. ATIVIDADE EM DUPLA Suponham que, em 2013, um determinado cometa tenha passado pela Terra. Se esse cometa faz uma passagem pela Terra a cada 34 anos, então quantas vezes ele teria passado pela Terra de 1500 até 2013? 16 vezes.

26. ATIVIDADE EM DUPLA Sabe-se que três números inteiros estão em PA. Se esses números têm por soma 24 e por produto 120, calculem os três números. 1, 8, 15 ou 15, 8, 1

27. ATIVIDADE EM DUPLA A produção de uma indústria cresceu em PA nos meses de janeiro a dezembro. A produção no mês de outubro foi de 190 máquinas e a diferença de produção nos meses de agosto e de março foi de 50 máquinas. Quantas máquinas foram produzidas em novembro? 200 máquinas.

28. ATIVIDADE EM DUPLA Marcelo criou uma conta em uma rede social. Nesse mesmo dia, três pessoas começaram a segui-lo. Após 1 dia, ele já tinha 20 seguidores e após 2 dias, já eram 37 seguidores. Marcelo percebeu que, a cada novo dia, ele ganhava 17 seguidores. Considerando que o crescimento dos seguidores permaneça constante, após quantos dias ele ultrapassará 1 000 seguidores? Após 59 dias.

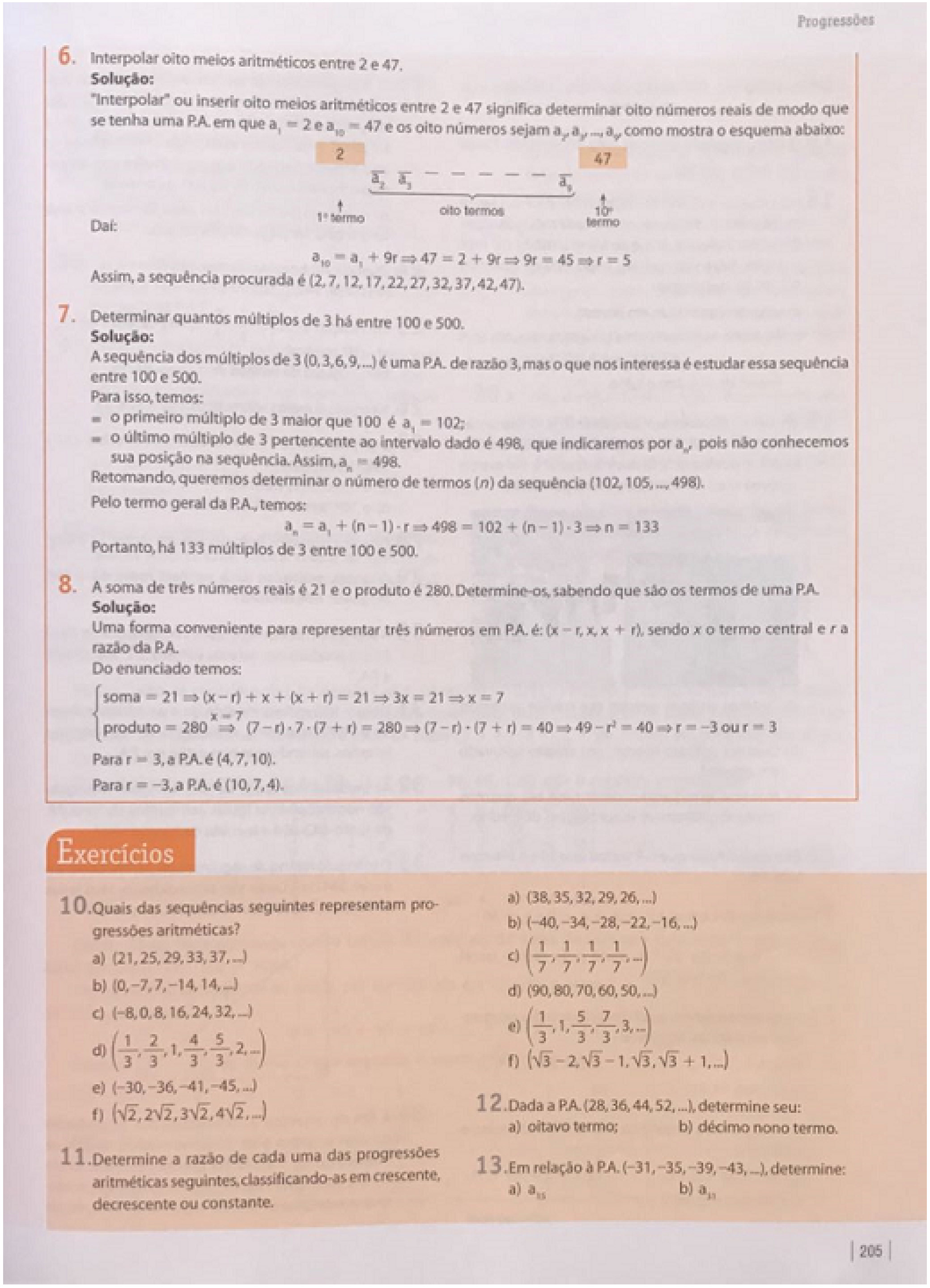
29. ATIVIDADE EM DUPLA No Rio de Janeiro existe a Escadaria do Convento de Santa Teresa (ou Escadaria do Selarón), que liga a rua Joaquina Silva, no bairro da Lapa, à Ladeira de Santa Teresa, no bairro de Santa Teresa. Essa escadaria, com 215 degraus, é uma atração turística carioca. Jorge estava no 5º degrau dessa escada quando decidiu subir com "passadas largas", de 3 em 3 degraus. Assim, do 5º degrau, ele foi para o 8º, depois para o 11º, e assim por diante. Quantas "passadas largas" Jorge deu até chegar ao fim da escada? 70 "passadas largas".

Escadaria do Convento de Santa Teresa, Rio de Janeiro, RJ.

216 Unidade 4 • Sequências e Trigonometria

Figura 3.3: Exercícios do livro Contexto e Aplicações.

A situação não é muito diferente para o livro "Matemática: ciência e aplicações". Os autores seguem a estrutura básica de teoria seguida de exercícios, resumidos basicamente a aplicação de fórmulas. Veja:



6. Interpolar oito meios aritméticos entre 2 e 47.
Solução:
"Interpolar" ou inserir oito meios aritméticos entre 2 e 47 significa determinar oito números reais de modo que se tenha uma P.A. em que $a_1 = 2$ e $a_{10} = 47$ e os oito números sejam $a_2, a_3, \dots, a_9$, como mostra o esquema abaixo:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 1^{\circ}\text{ termo}}}{\boxed{2}} \quad \underbrace{a_2 \;\; a_3 \; - \; - \; - \; - \; - \;\; a_9}_{\text{oito termos}} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 10^{\circ}\text{ termo}}}{\boxed{47}}$$

Daí:

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 47 = 2 + 9r \Rightarrow 9r = 45 \Rightarrow r = 5$$

Assim, a sequência procurada é (2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47).

7. Determinar quantos múltiplos de 3 há entre 100 e 500.
Solução:
A sequência dos múltiplos de 3 (0, 3, 6, 9, ...) é uma P.A. de razão 3, mas o que nos interessa é estudar essa sequência entre 100 e 500.
Para isso, temos:
- o primeiro múltiplo de 3 maior que 100 é $a_1 = 102$;
- o último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo dado é 498, que indicaremos por a_n, pois não conhecemos sua posição na sequência. Assim, $a_n = 498$.

Retomando, queremos determinar o número de termos (*n*) da sequência (102, 105, ..., 498).
Pelo termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow 498 = 102 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow n = 133$$

Portanto, há 133 múltiplos de 3 entre 100 e 500.

8. A soma de três números reais é 21 e o produto é 280. Determine-os, sabendo que são os termos de uma P.A.
Solução:
Uma forma conveniente para representar três números em P.A. é: $(x - r, x, x + r)$, sendo *x* o termo central e *r* a razão da P.A.
Do enunciado temos:

$$\begin{cases} \text{soma} = 21 \Rightarrow (x-r) + x + (x+r) = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7 \\ \text{produto} = 280 \overset{x=7}{\Rightarrow} (7-r)\cdot 7\cdot(7+r) = 280 \Rightarrow (7-r)\cdot(7+r) = 40 \Rightarrow 49 - r^2 = 40 \Rightarrow r = -3 \text{ ou } r = 3 \end{cases}$$

Para $r = 3$, a P.A. é (4, 7, 10).
Para $r = -3$, a P.A. é (10, 7, 4).

Exercícios

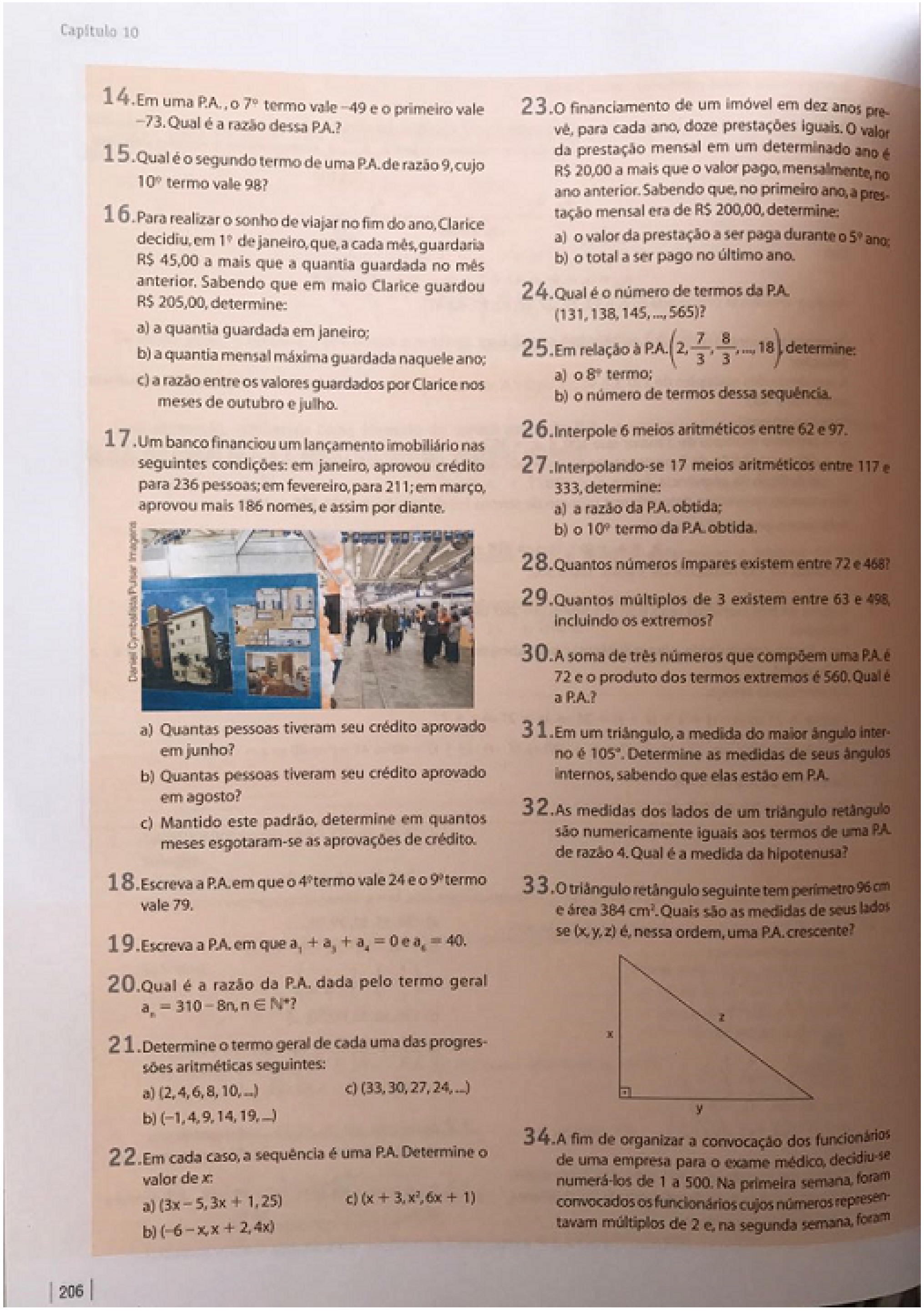
10. Quais das sequências seguintes representam progressões aritméticas?
a) (21, 25, 29, 33, 37, ...)
b) (0, −7, 7, −14, 14, ...)
c) (−8, 0, 8, 16, 24, 32, ...)
d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \dots\right)$
e) (−30, −36, −41, −45, ...)
f) $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots)$

11. Determine a razão de cada uma das progressões aritméticas seguintes, classificando-as em crescente, decrescente ou constante.
a) (38, 35, 32, 29, 26, ...)
b) (−40, −34, −28, −22, −16, ...)
c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \dots\right)$
d) (90, 80, 70, 60, 50, ...)
e) $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \dots\right)$
f) $(\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1, \dots)$

12. Dada a P.A. (28, 36, 44, 52, ...), determine seu:
a) oitavo termo; b) décimo nono termo.

13. Em relação à P.A. (−31, −35, −39, −43, ...), determine:
a) a_{15} b) a_{31}

Figura 3.4: Exemplos e exercícios do livro Matemática: ciência e aplicações.



Capítulo 10

14. Em uma P.A., o 7º termo vale −49 e o primeiro vale −73. Qual é a razão dessa P.A.?

15. Qual é o segundo termo de uma P.A. de razão 9, cujo 10º termo vale 98?

16. Para realizar o sonho de viajar no fim do ano, Clarice decidiu, em 1º de janeiro, que, a cada mês, guardaria R$ 45,00 a mais que a quantia guardada no mês anterior. Sabendo que em maio Clarice guardou R$ 205,00, determine:

a) a quantia guardada em janeiro;

b) a quantia mensal máxima guardada naquele ano;

c) a razão entre os valores guardados por Clarice nos meses de outubro e julho.

17. Um banco financiou um lançamento imobiliário nas seguintes condições: em janeiro, aprovou crédito para 236 pessoas; em fevereiro, para 211; em março, aprovou mais 186 nomes, e assim por diante.

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

a) Quantas pessoas tiveram seu crédito aprovado em junho?

b) Quantas pessoas tiveram seu crédito aprovado em agosto?

c) Mantido este padrão, determine em quantos meses esgotaram-se as aprovações de crédito.

18. Escreva a P.A. em que o 4º termo vale 24 e o 9º termo vale 79.

19. Escreva a P.A. em que $a_1 + a_3 + a_4 = 0$ e $a_6 = 40$.

20. Qual é a razão da P.A. dada pelo termo geral $a_n = 310 - 8n, n \in \mathbb{N}^*$?

21. Determine o termo geral de cada uma das progressões aritméticas seguintes:

a) (2, 4, 6, 8, 10, ...)

b) (−1, 4, 9, 14, 19, ...)

c) (33, 30, 27, 24, ...)

22. Em cada caso, a sequência é uma P.A. Determine o valor de x:

a) $(3x - 5, 3x + 1, 25)$

b) $(-6 - x, x + 2, 4x)$

c) $(x + 3, x^2, 6x + 1)$

23. O financiamento de um imóvel em dez anos prevê, para cada ano, doze prestações iguais. O valor da prestação mensal em um determinado ano é R$ 20,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Sabendo que, no primeiro ano, a prestação mensal era de R$ 200,00, determine:

a) o valor da prestação a ser paga durante o 5º ano;

b) o total a ser pago no último ano.

24. Qual é o número de termos da P.A. (131, 138, 145, ..., 565)?

25. Em relação à P.A. $\left(2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots, 18\right)$, determine:

a) o 8º termo;

b) o número de termos dessa sequência.

26. Interpole 6 meios aritméticos entre 62 e 97.

27. Interpolando-se 17 meios aritméticos entre 117 e 333, determine:

a) a razão da P.A. obtida;

b) o 10º termo da P.A. obtida.

28. Quantos números ímpares existem entre 72 e 468?

29. Quantos múltiplos de 3 existem entre 63 e 498, incluindo os extremos?

30. A soma de três números que compõem uma P.A. é 72 e o produto dos termos extremos é 560. Qual é a P.A.?

31. Em um triângulo, a medida do maior ângulo interno é 105°. Determine as medidas de seus ângulos internos, sabendo que elas estão em P.A.

32. As medidas dos lados de um triângulo retângulo são numericamente iguais aos termos de uma P.A. de razão 4. Qual é a medida da hipotenusa?

33. O triângulo retângulo seguinte tem perímetro 96 cm e área 384 cm². Quais são as medidas de seus lados se (x, y, z) é, nessa ordem, uma P.A. crescente?

x

z

y

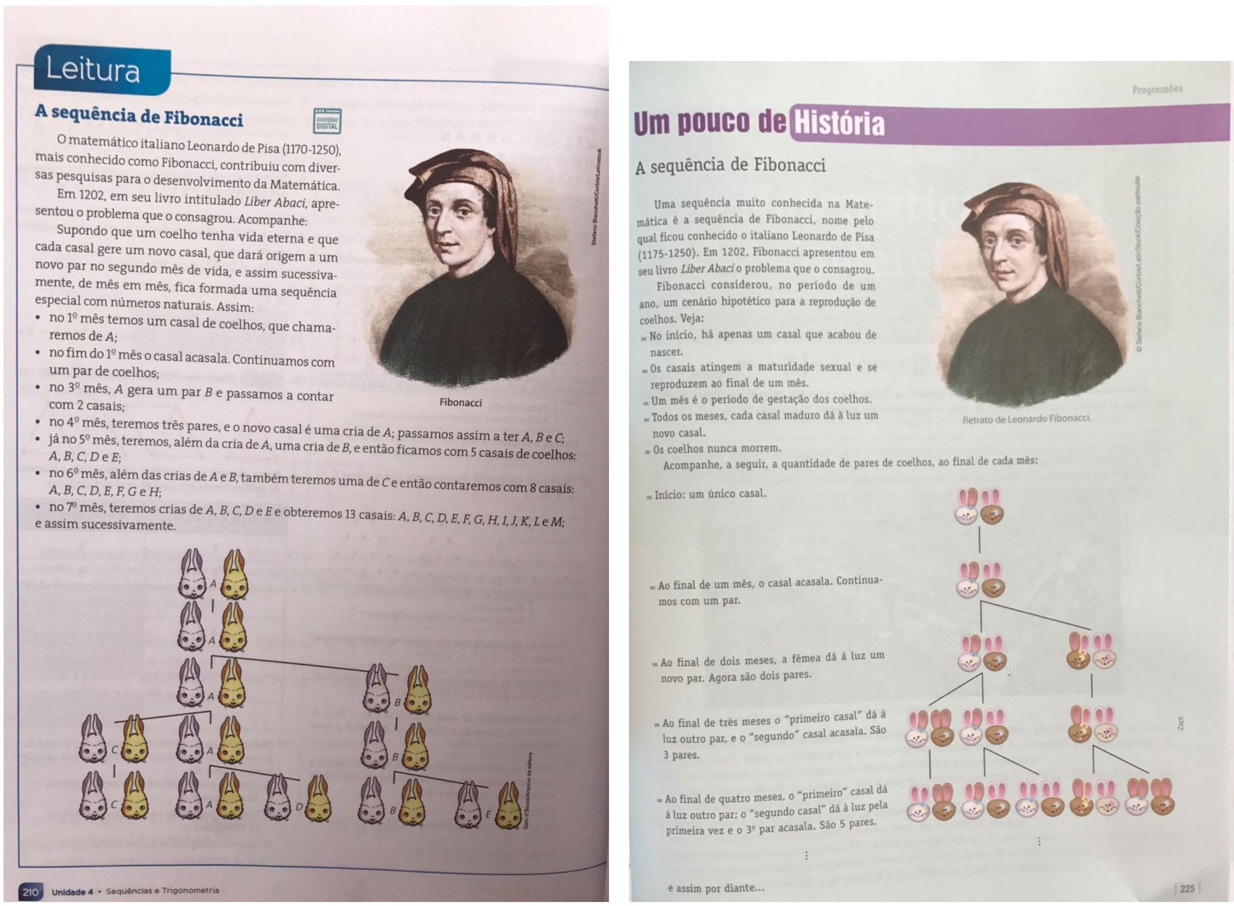
34. A fim de organizar a convocação dos funcionários de uma empresa para o exame médico, decidiu-se numerá-los de 1 a 500. Na primeira semana, foram convocados os funcionários cujos números representavam múltiplos de 2 e, na segunda semana, foram

| 206 |

Figura 3.5: Exercícios do livro Matemática: ciência e aplicações.

Note que questões com a finalidade de aplicar fórmulas explora muito pouco a criatividade e o raciocínio lógico. Essas características são muito importantes para o desenvolvimento dos alunos e dificilmente são contempladas nos livros didáticos. Acreditamos que os autores precisam acrescentar exercícios com tais abordagens.

Como abordagem histórica, ambos relatam a sequência de Fibonacci. Observe na Figura 3.6, à esquerda a foto do livro “ Contexto e Aplicações”e à direita “ Matemática: ciência e aplicações”.



Leitura

A sequência de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática.

Em 1202, em seu livro intitulado *Líber Abaci*, apresentou o problema que o consagrou. Acompanhe:

Supondo que um coelho tenha vida eterna e que cada casal gere um novo casal, que dará origem a um novo par no segundo mês de vida, e assim sucessivamente, de mês em mês, fica formada uma sequência especial com números naturais. Assim:

- no 1º mês temos um casal de coelhos, que chamaremos de *A*;
- no fim do 1º mês o casal acasala. Continuamos com um par de coelhos;
- no 3º mês, *A* gera um par *B* e passamos a contar com 2 casais;
- no 4º mês, teremos três pares, e o novo casal é uma cria de *A*; passamos assim a ter *A*, *B* e *C*;
- já no 5º mês, teremos, além da cria de *A*, uma cria de *B*, e então ficamos com 5 casais de coelhos: *A*, *B*, *C*, *D* e *E*;
- no 6º mês, além das crias de *A* e *B*, também teremos uma de *C* e então contaremos com 8 casais: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H*;
- no 7º mês, teremos crias de *A*, *B*, *C*, *D* e *E* e obteremos 13 casais: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L* e *M*;

e assim sucessivamente.

Fibonacci

210 Unidade 4 • Sequências e Trigonometria

Progressões

Um pouco de História

A sequência de Fibonacci

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (1175-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema que o consagrou.

Fibonacci considerou, no período de um ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Veja:

- No início, há apenas um casal que acabou de nascer.
- Os casais atingem a maturidade sexual e se reproduzem ao final de um mês.
- Um mês é o período de gestação dos coelhos.
- Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

Acompanhe, a seguir, a quantidade de pares de coelhos, ao final de cada mês:

- Início: um único casal.
- Ao final de um mês, o casal acasala. Continuamos com um par.
- Ao final de dois meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são dois pares.
- Ao final de três meses o “primeiro casal” dá à luz outro par, e o “segundo” casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de quatro meses, o “primeiro” casal dá à luz outro par; o “segundo casal” dá à luz pela primeira vez e o 3º par acasala. São 5 pares.

⋮

e assim por diante...

Retrato de Leonardo Fibonacci.

225

Figura 3.6: Textos sobre sequência de Fibonacci

Isso não implica que os livros aqui discutidos não tenham qualidades, mas como vimos nos capítulos anteriores, as sequências e séries de números reais podem proporcionar uma vasta gama de aplicações cujos princípios intuitivos são acessíveis para os estudantes das séries em questão. Além disso, tiveram uma importância muito grande no desenvolvimento do cálculo diferencial que conhecemos hoje, o que possibilitou o avanço em diversas áreas do conhecimento.

Nesse capítulo vamos abordar algumas propostas de aplicação do conteúdo de sequências e séries, as quais podem ser trabalhadas em sala de aula com os alunos.

3.1 Proposta Didática 1

Apresentamos agora uma proposta didática utilizando o método da exaustão estudado no Capítulo 2.

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Recursos Pedagógicos: Quadro, giz e laboratório de informática.

Objetivos : Apresentar aos alunos o método da exaustão, empregando os conhecimentos de sequências e séries.

Desenvolvimento: Em um primeiro momento, o professor deve fazer um apanhado histórico falando de Arquimedes e do método da exaustão. Para que fique claro o raciocínio utilizado no método, podemos exemplificá-lo com a ideia de aproximar a área de um círculo por polígonos regulares inscritos ou circunscritos, como mostra a Figura 3.7:

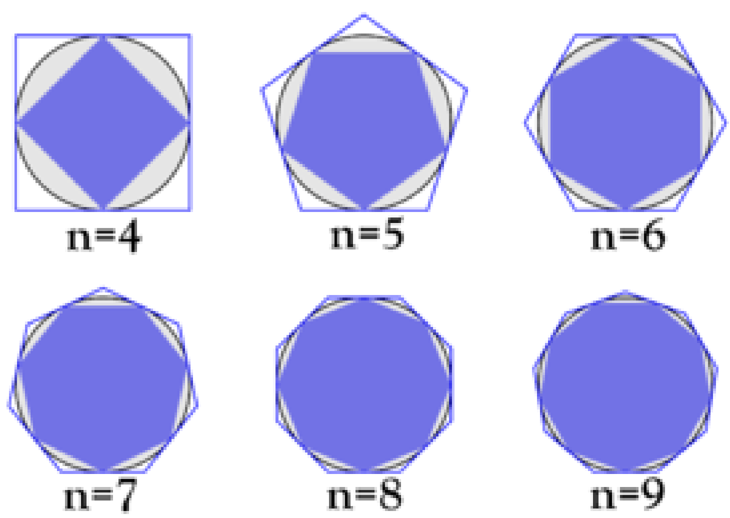


Figura 3.7: Polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência.

(Fonte: obaricentrodamente.blogspot.com.br/2008/12/breve-cronologia-de-pi.html - visitada em 03/02/2017)

Após esta etapa, o professor pode propor aos alunos a questão da quadratura da parábola, no qual os mesmos terão que calcular a área abaixo da curva delimitada por um segmento de reta.

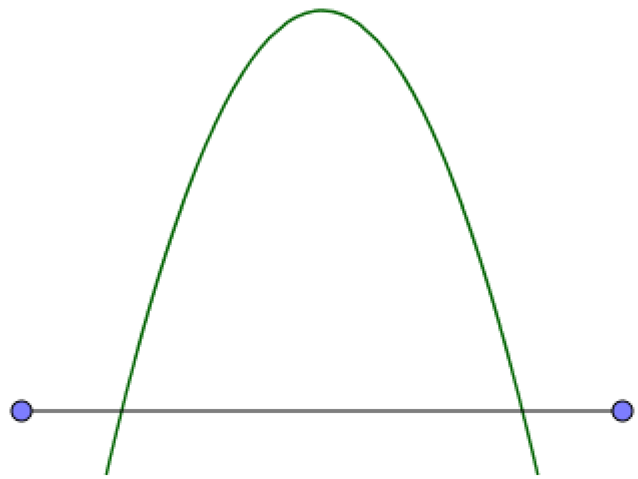


Figura 3.8: Parábola delimitada por um segmento de reta.

Essa atividade poderá ser feita em grupos, nos quais os alunos trabalharão na resolução do problema. O professor deverá supervisionar os grupos, analisando os caminhos que os grupos estão considerando para a resolução. Após esta etapa, o professor mediará um debate onde cada grupo apresentará seus raciocínios e soluções. Para finalizar essa etapa, o professor pode fazer uma explanação da solução (apresentada no Capítulo 2).

Para fechamento da atividade, sugerimos uma construção no Geogebra que facilitará a compreensão dos alunos na solução do problema. O Geogebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma único software. É gratuito e pode ser baixado no endereço eletrônico: www.geogebra.org.

Na Figura 3.9, temos a tela inicial do Geogebra e a parte destacada em preto são as ferramentas que utilizaremos na construção.

1º Passo: Vamos inserir o comando "controle deslizante". Para isso, clique na décima primeira caixa de ferramenta e aparecerá a opção. Crie o controles a, b e c. Esses serão os coeficientes da equação da nossa parábola. Com esse comando, poderemos alterar a equação

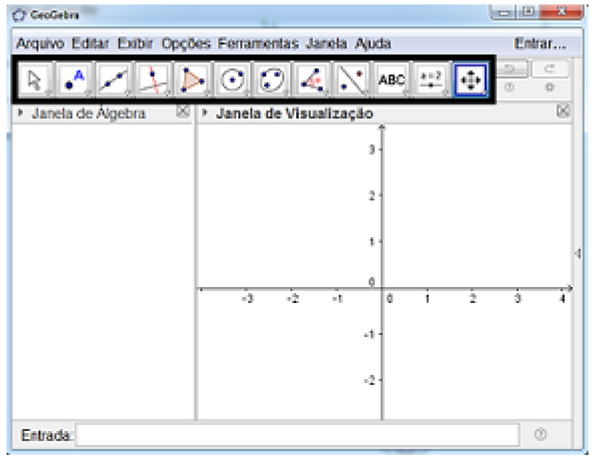


Figura 3.9: Tela inicial do Geogebra.

parábola quando desejarmos.

2º Passo: Para inserir a parábola, digite na caixa de entrada, situada na borda inferior da página inicial, a equação $a\ x^2 + b\ x + c$, com espaços entre a e x^2 e entre b e c.

Observe o resultado na Figura 3.10.

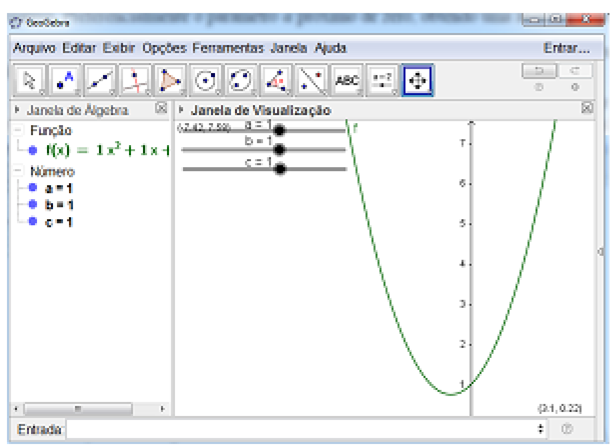


Figura 3.10: Construção da parábola no Geogebra.

3º Passo: Em nossa construção, usaremos um valor negativo para a. Assim teremos uma parábola com concavidade voltada para baixo.

4º Passo: Vamos construir um segmento que limite a área da parábola. Para isso, clique na terceira opção da caixa de ferramentas e selecione a opção "segmento". O resultado deverá ser o da Figura 3.11.

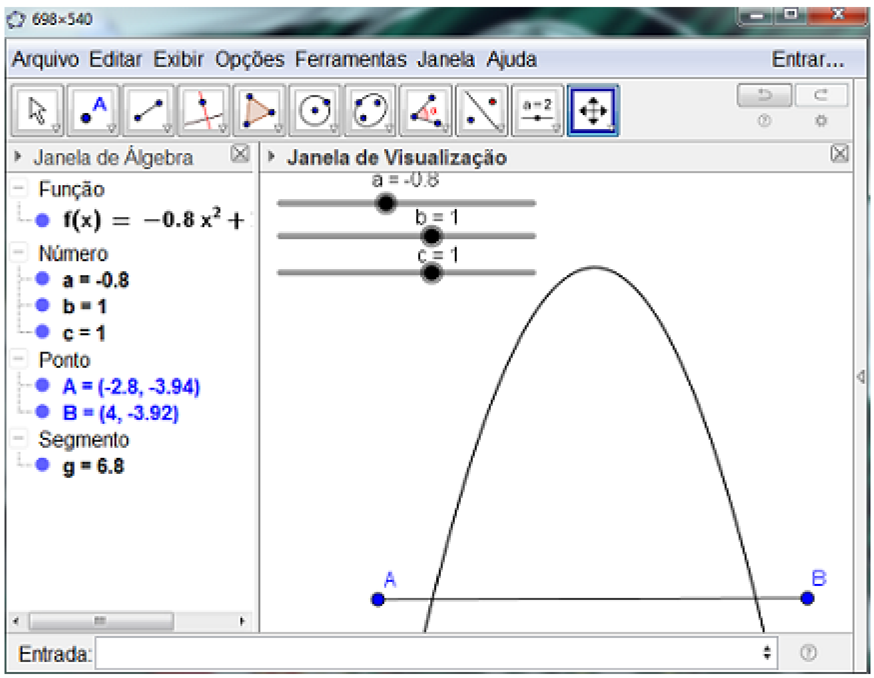


Figura 3.11: Área da parábola delimitada por um segmento de reta.

Agora, vamos calcular área da parábola limitada pelo segmento AB usando o método da exaustão, a exemplo de Arquimedes.

5º Passo Para determinar os pontos de interseção entre a parábola e o segmento AB, clique na segunda caixa de ferramentas e selecione a opção "interseção de dois objetos". Dê um clique na parábola e outro no segmento AB. Vão aparecer os pontos C e D.

6º Passo: Vamos determinar o eixo de simetria da parábola. Clique na segunda caixa de ferramenta e selecione a opção "ponto médio ou centro". Clique nos pontos C e D. Aparecerá o ponto E, que é o ponto médio do segmento CD.

7º Passo: Na quarta caixa de ferramenta, selecione a opção "reta perpendicular". Clique no ponto E e no segmento CD. Utilize novamente a ferramenta "interseção de dois objetos"e encontre a interseção da parábola com a reta perpendicular ao segmento CD. O ponto F.

8º Passo: Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", crie os segmentos CF e DF. Também podemos construir o segmento EF e desmarcar na janela de álgebra a reta perpendicular.

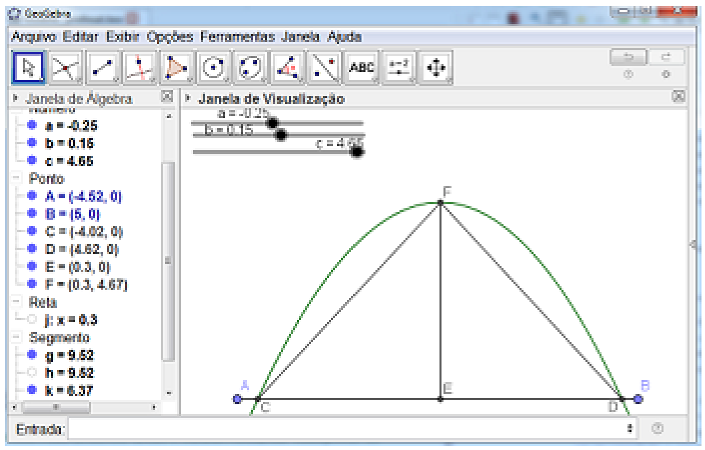


Figura 3.12: Aproximação da área da parábola por 1 triângulo.

Para apagar as letras que representam os segmentos criados, basta clicar em cima da letra com o botão esquerdo do mouse e selecionar a opção "exibir rótulo".

9º Passo: Na quinta caixa de ferramenta, selecione a opção "polígono". Clique e ligue os pontos C,F e D, criando o triângulo $\triangle CFD$.

10º Passo: Repita os passos anteriores e crie os triângulos CFH e DFJ. Use a oitava caixa de ferramenta para selecionar a opção "área"e verificar que a soma das áreas dos $\triangle CFH$ e $\triangle DFJ$ se aproximam de $\frac{1}{4}$ da área do $\triangle CFD$.

11º Passo: Esse processo pode ser feito várias vezes para diminuir o erro de aproximação da soma da área dos triângulos com a área da parábola.

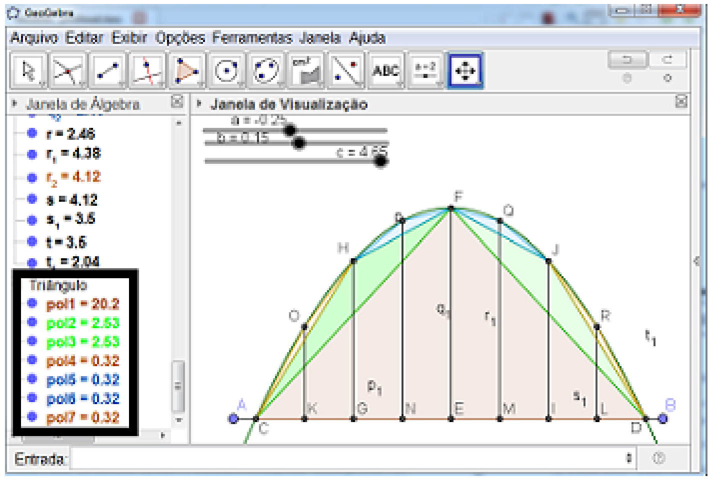


Figura 3.13: Aproximação da área da parábola por 7 triângulos.

No canto esquerdo inferior, temos as áreas de cada triângulo construído.

Como vimos anteriormente, $A_{\text{Parábola}} = \dfrac{4}{3}\triangle CFD$.
Logo, $A_{\text{Parábola}} = \dfrac{4}{3} \cdot 20,2 = 26,93$.

Em nossa construção, aproximamos a área da parábola por 7 triângulos, chegando ao seguinte valor

$$A_{\text{Parábola}} \approx 20,2 + 2 \cdot 2,53 + 4 \cdot 0,32 = 26,54.$$

3.2 Proposta Didática 2

Nessa segunda proposta didática, vamos fazer uma aproximação do valor de π com o auxílio do método da exaustão.

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Recursos Pedagógicos: Quadro, giz, TV Pen Drive e laboratório de informática.

Objetivos : Apresentar aos alunos o método da exaustão, empregando os conhecimentos de sequências e geometria.

Desenvolvimento: Caso o professor não tenha feito a primeira atividade proposta, seria interessante fazer uma retomada histórica sobre Arquimedes e o método da Exaustão. Caso o professor perceba a necessidade de uma breve revisão sobre circunferência e o número π, sugerimos a exibição de um vídeo chamado “Roda do sonho”, que aborda a relação entre os mesmos. Este vídeo pode ser encontrado no site `http://m3.ime.unicamp.br`, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp para o Ensino Médio de Matemática no Brasil. O vídeo também pode ser encontrado no endereço eletrônico `https://www.youtube.com/watch?v=zzm1ALkPKjA`.(visitado em 11/01/2017).

A questão a ser estudada nessa atividade é de como podemos encontrar um aproximação para o valor de π estimando o comprimento da circunferência.

O professor deve propor aos alunos, em grupos ou individualmente, que pensem em alternativas para responder essa questão. Depois do tempo estipulado pelo professor, os alunos devem apresentar suas conclusões. Em seguida o professor deverá apresentar uma solução para a pergunta. Já vimos na Atividade 1 que podemos aproximar a área do círculo por polígonos regulares inscritos. Vamos usar a mesma ideia para estimar o comprimento da circunferência (ver o Capítulo 2).

Para finalizar a atividade, vamos propor uma construção no Geogebra para mostrar que, quanto maior for o número de lados do polígono regular inscrito no círculo, melhor será a aproximação do comprimento e do valor de π.

Vamos à construção:

1º Passo: Vamos inserir o comando “controle deslizante”. Para isso, clique na décima primeira caixa de ferramenta e aparecerá esta opção. Crie controles r com mínimo igual a 1, e n com mínimo igual a 3, máximo igual a 1024 e incremento 1. Aqui, r representará o raio da circunferência, e n o número de lados do polígono inscrito.

2º Passo: Em “opções”, selecione “rotular”e em seguida “menos para objetos novos”. Tal procedimento é necessário para que, quando desenharmos os polígonos, seus vértices não sejam nomeados.

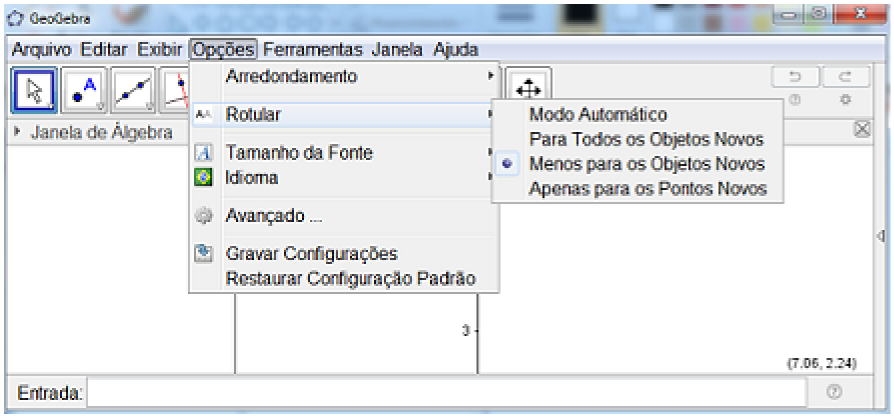


Figura 3.14: Opção de não rotular objetos.

3º Passo: Vamos criar a circunferência. Na sexta caixa de ferramentas, selecione "círculo dado centro e raio". Clique com o botão direito do mouse na origem do sistema cartesiano. Irá aparecer a seguinte caixa:

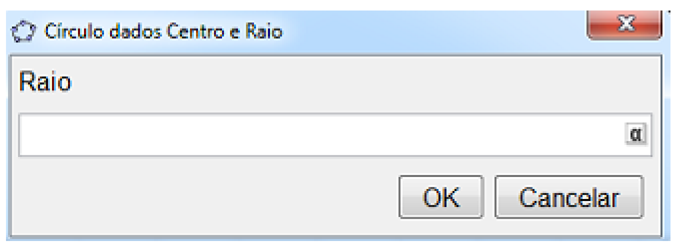


Figura 3.15: Caixa de ferramenta Círculo dados centro e raio.

Digite r como raio e clique em "ok". Assim podemos alterar o raio da circunferência com o comando do controle deslizante que criamos no 1º passo.

4º Passo: Na segunda caixa de ferramentas, selecione "interseção de dois objetos". Clique na circunferência e no eixo Y. Teremos dois pontos de interseção. Apague um dos pontos. Para isto, clique sobre o ponto com o botão esquerdo do mouse e selecione a opção "exibir objeto".

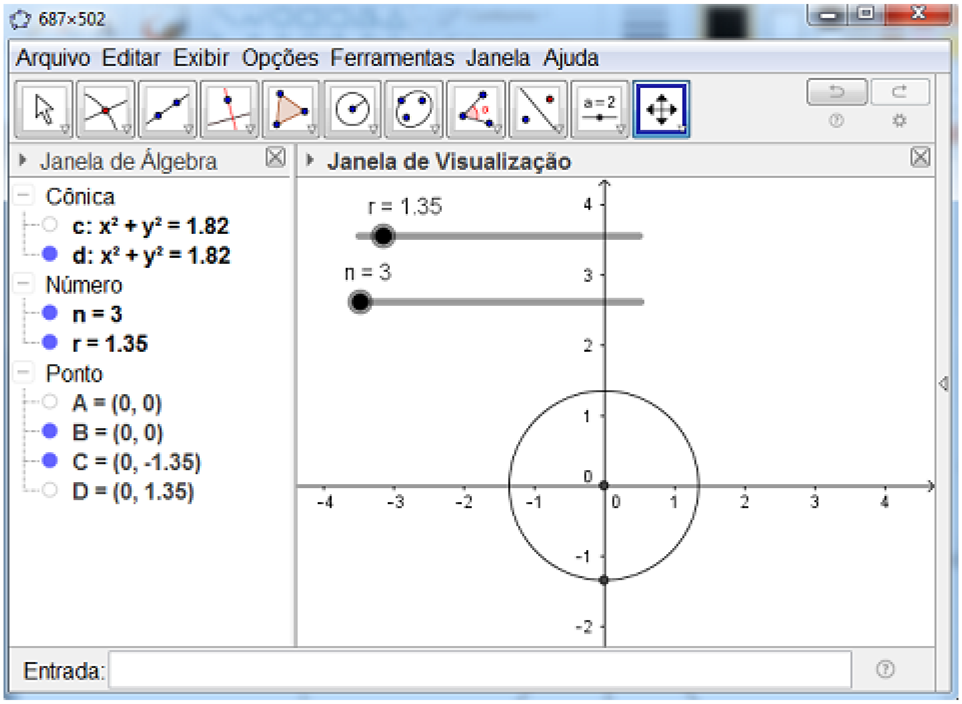


Figura 3.16: Construção da circunferência.

5º Passo: Para inscrever polígonos regulares na circunferência, precisaremos definir o ângulo central. Na oitava caixa de ferramenta, selecione "ângulo com amplitude fixa". Clique no ponto de interseção da circunferência com o eixo Y e no raio da circunferência. Vai aparecer a seguinte caixa:

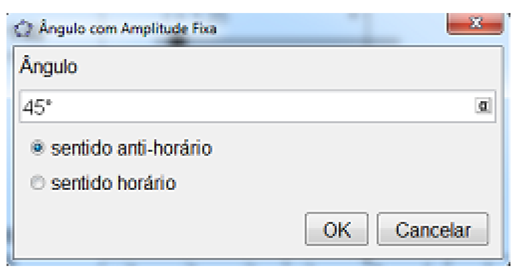


Figura 3.17: Caixa de ferramenta Ângulo com amplitude fixa.

Apague 45° e digite $360°/(2^*n)$ (o símbolo (*) significa multiplicação no Geogebra). Assim, estaremos calculando o ângulo central do polígono dependendo da quantidade de lados do mesmo. A Figura 3.18 retrata o resultado que obteremos nesse passo.

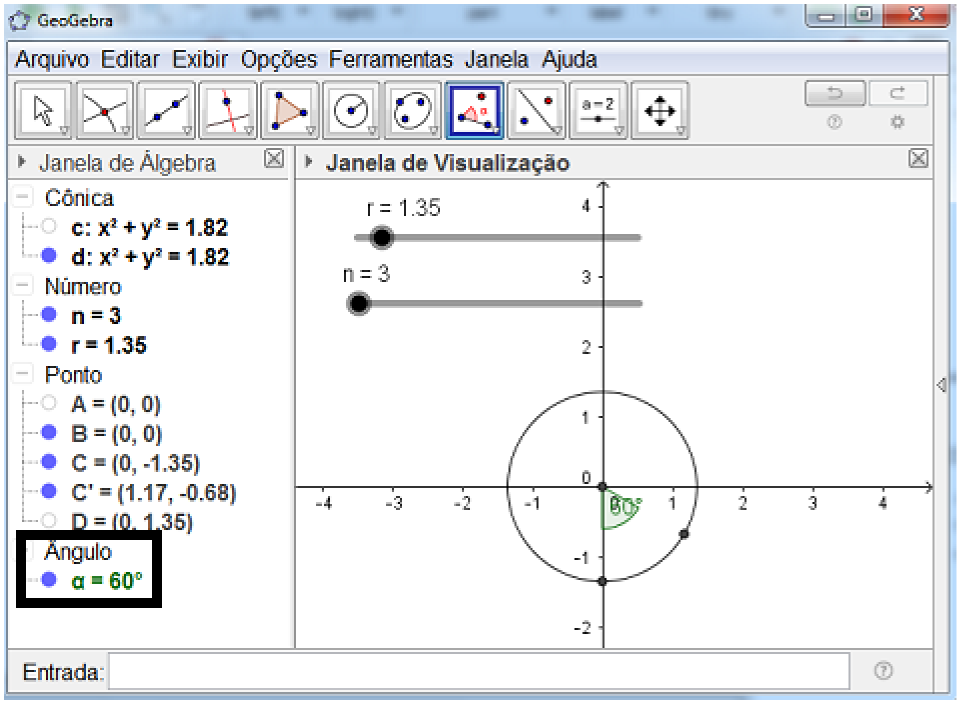


Figura 3.18: Circunferência com ângulo central.

Apague o ângulo marcado na circunferência clicando sobre o ponto azul circulado de preto na Figura 3.18.

6º Passo: Na nona caixa de ferramenta, selecione "reflexão em relação a uma reta". Clique no ponto obtido no passo anterior e no eixo Y, criando um ponto de reflexão em relação ao eixo Y.

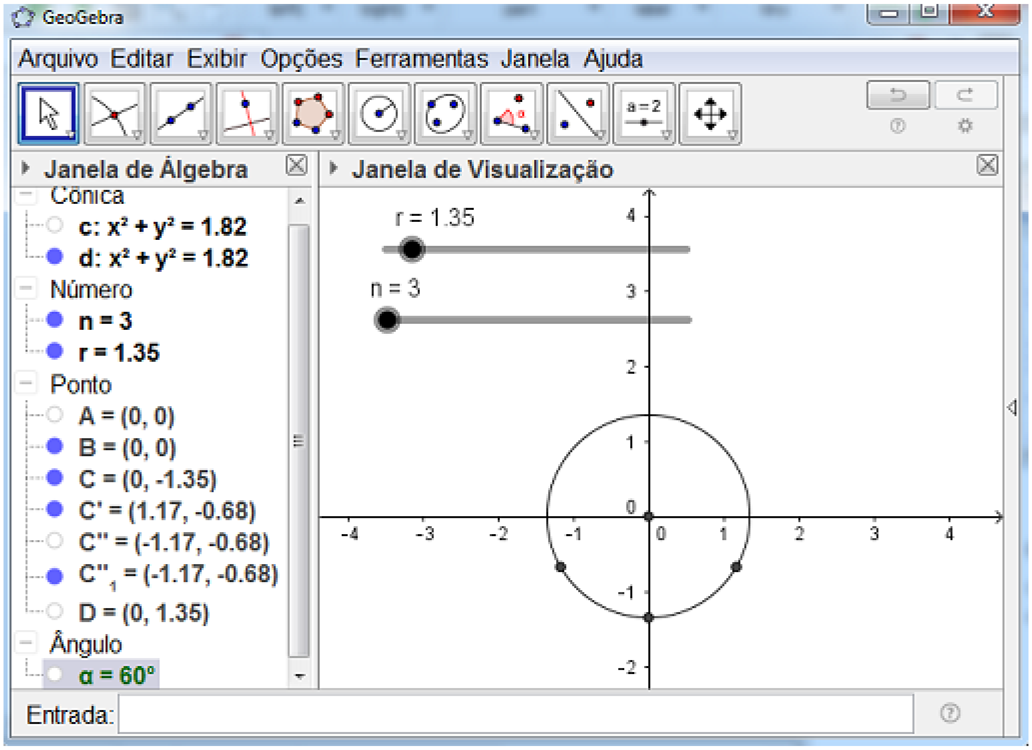


Figura 3.19: Reflexão de pontos.

7º Passo: Na quinta caixa de ferramenta, selecione a opção "polígono regular". Clique no ponto obtido no passo anterior e em seguida no ponto encontrado no passo 4. Irá aparecer a seguinte caixa:

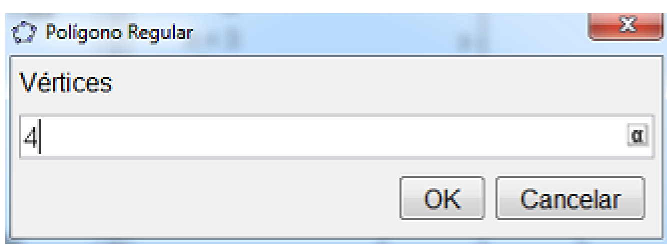


Figura 3.20: Caixa de ferramentas Polígono Regular.

Apague o número 4 e digite n. Assim, alteramos o número de lados do polígono pelo controle deslizante construído no primeiro passo.

8º Passo: Na décima caixa de ferramenta, selecione a opção "texto"e clique sobre a tela. Vai aparecer a caixa de texto e então digite o texto mostrado na Figura 3.21.

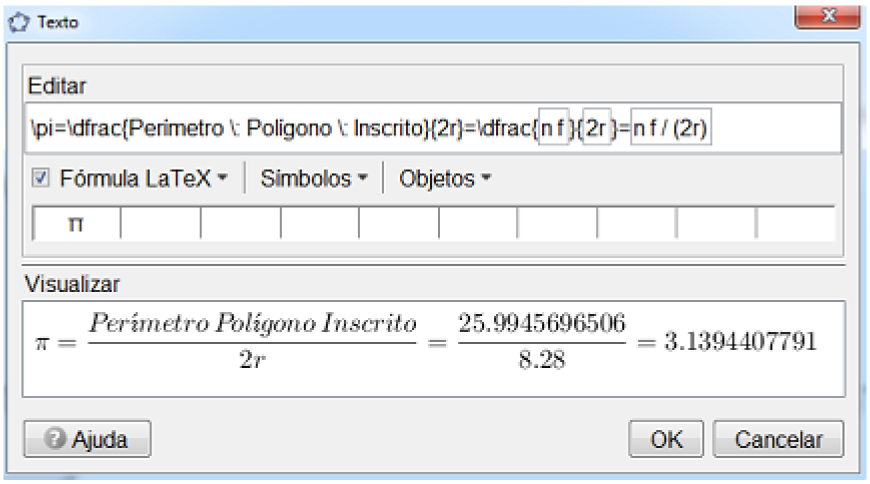


Figura 3.21: Caixa de ferramenta Texto.

Marque a opção "Fórmula LaTeX"caso a mesma não esteja selecionada.

Para inserir a letra f da fórmula, vá em "Objetos"e procure a mesma. Ela representa a medida do lado do polígono regular que criamos. Faça o mesmo procedimento para r. Assim, quando alterarmos os controles deslizantes, a fórmula é atualizada automaticamente.

Esse será o resultado final:

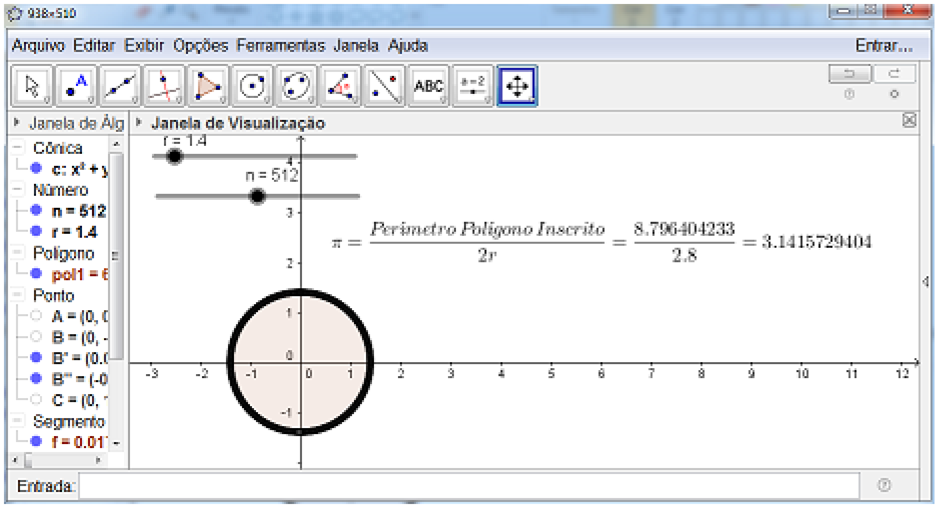


Figura 3.22: Aproximação do número π

Conforme aumentamos o valor de n, teremos uma aproximação melhor para π.

Historicamente, no século XVI Ludolph van Ceulen (1540-1610), matemático alemão, passou mais de trinta anos da sua vida aperfeiçoando o método de cálculo do número irracional π, o qual em 1596 calculou um valor de π com 35 casas decimais. Para isto, ele começou com um polígono de 15 lados, e seguindo o aumento da quantidade de lados obteve o resultado de 3,14159265358979323846264338327950288.

Hoje, com a ajuda de super computadores, o número de casas decimais conhecidas de π já está na marca dos quadrilhões.

Observações:

A duração das atividades ficam a critério do professor, pois cada turma tem seu ritmo de aprendizado, e é importante que o mesmo seja respeitado para que a atividade tenha valor pedagógico significativo.

Em relação a avaliação, entendemos que a mesma é um processo contínuo. Assim, indicamos que desde a primeira aula, seja avaliado a participação, o interesse e envolvimento do aluno com todas as etapas aqui propostas.

É importante ressaltar que, embora estas propostas ainda não tenham sido aplicadas na prática, acredita-se que as mesmas são acessíveis para sala de aula com um resultado pedagógico satisfatório.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho estudamos a teoria de sequências e séries de números reais sob o ponto de vista analítico.

No tocante às aplicações, e principalmente ao foco principal do PROFMAT de propiciar à professores um domínio aprofundado de conteúdos matemáticos relevantes para sua docência, demos ênfase ao método da exaustão, a fim de que o mesmo possa ser explorado em sala de aula, com o propósito de complementar as atividades dos livros didáticos, desenvolver o raciocínio lógico dos alunos e proporcionar uma experiência com o software Geogebra.

Acreditamos que este texto possa ajudar o professor na preparação de suas aulas e que novos roteiros possam ser sugeridos pelos professores com base nos seus conhecimentos e nas ideias aqui apresentadas.

Bibliografia

[1] DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA MATEMÁTICA - Secretária de Educação do Estado do Paraná, 2008.

[2] ÁVILA, G.S.S. - *Análise matemática para licenciatura* - 3ª ed. rev. e ampl. - São Paulo: Blucher, 2006.

[3] DANTE, L. R. - *Contexto e Aplicações* - Volume 1 - 2 Ed. Editora Ática -São Paulo, 2013.

[4] EVES, H. - *Introdução à história da matemática* - Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2011.

[5] GERONIMO, J. R.; FRANCO, V. S. - *Geometria Plana e Espacial* - 1 ed - Editora Massoni - Maringá, 2005.

[6] IEZZI, G. et al. - *Matemática: ciências e aplicações* - Volume 1: Ensino Médio - 7 Ed. Editora Saraiva - São Paulo, 2013.

[7] LIMA, E.L., *Logaritmos* , IMPA- Editora SBM, 1991.

[8] MOREIRA, C.S.; CABRAL, M.A.P. - *Curso de Análise Real* - 1 ed - Rio de Janeiro.

[9] SANTOS, J. M. Quadratura da Parábola: Uma Abordagem Possível para o Estudo de Somas Infinitas. Disponível em $< https://sca.profmat-sbm.org.br/scav2/gettcc3.php?id=881 >$. Acesso em: Março de 2017.