UFRR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Luizalba Santos e Souza Pinheiro

A HEURÍSTICA DE PÓLYA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Boa Vista
2017

Luizalba Santos e Souza Pinheiro

A HEURÍSTICA DE PÓLYA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castaneda

Boa Vista
2017

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)

Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

P654h Pinheiro, Luizalba Santos e Souza.
A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria / Luizalba Santos e Souza Pinheiro. – Boa Vista, 2017.
170 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castaneda

Dissertação(mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. 2017.

1 - Pólya. 2 - Ensino da trigonometria. 3 - Resolução de problemas. 4 - Heurística de resolução de problemas trigonométricos. I - Título. II - Martinez, Alberto Martin (orientador).

CDU - 541.11.6

Luizalba Santos e Souza Pinheiro

A HEURÍSTICA DE PÓLYA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 27 de abril de 2017, e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castaneda
Orientador

Prof. Dr. Héctor José García Mendoza
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências - PPGEC - UERR

Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino
UFRR

Boa Vista

2017

Para Luiza e Victor.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela minha vida.

Ao meu pai, Luiz Carlos, in memoriam, e a minha mãe, Albanisa, meus primeiros professores, a quem devo tudo e com quem aprendi os verdadeiros valores da vida.

Aos meus filhos, Victor e Luiza, por terem sido minha maior motivação nessa caminhada.

Ao Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castaneda, pela enorme contribuição durante o curso e na orientação dessa dissertação e, principalmente, por ter aceitado ser meu orientador.

Aos meus irmãos, Monaliza, Luiz Carlos, Gioconda e Shirley, pelo carinho e companheirismo sempre presentes.

À Universidade Federal de Roraima - UFRR e à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM/PROFMAT, por terem me concedido a oportunidade de cursar este mestrado.

Aos professores do PROFMAT, Alberto Martin Martinez Castaneda, Gilson de Souza Costa, Joselito de Oliveira, Lindeval Fernandes de Lima, Luciano Ferreira Silva, Patrício Antonio Perez Flores e Raimundo Nonato Araújo Pedro, que muito contribuíram para essa conquista.

Ao colega do PROFMAT, Samuel Macedo da Silva, pela companhia nos estudos, principalmente na reta final dessa jornada, e em nome de quem agradeço a todos os outros colegas da turma.

Aos colegas professores do Departamento de Engenharia Elétrica da UFRR, pelo apoio e incentivo.

"Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos,
e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que tine.
E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios
e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal
que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria. "
(1 Coríntios 13:1-2)

Resumo

Em nossa dissertação estudamos e interpretamos as ideias de George Pólya sobre a resolução de problemas, baseando-nos fundamentalmente na sua obra paradigmática, intitulada em português, *A Arte de Resolver Problemas*. Também tomamos como fontes, alguns trabalhos resultantes de pesquisas sobre a aplicação do método heurístico na resolução de problemas matemáticos. Essas ideias foram aplicadas na resolução de um conjunto de problemas de trigonometria, a maioria dos quais com dificuldade superior à média. Incluímos problemas sobre prova de identidades, resolução de equações, transformação de expressões trigonométricas e cálculo de máximos e mínimos. Em um número suficiente desses problemas, incluímos indicações sobre a utilização do método heurístico na sala de aula. O trabalho está destinado a professores do Ensino Médio e a alunos motivados pela resolução de problemas trigonométricos.

Palavras-chave: Pólya. Ensino da trigonometria. Resolução de problemas. Heurística de resolução de problemas trigonométricos.

Abstract

In our dissertation, we study and interpret George Pólya's ideas on solving problems, basing, fundamentally, on his paradigmatic opus entitled *How to solve it*. We also take as sources some works resulting from researches on the application of the heuristic method in solving mathematical problems. We applied these ideas to solve a set of trigonometric problems, most of them whit above-average difficulty. We have included problems in proving identities, solving equations, transforming trigonometric expressions and calculating extremes. In a sufficient number of these problems, we include indications for using the heuristic method in the classroom. The work is aimed at high school teachers and students motivated by the resolution of trigonometric problems.

Keywords: Pólya. Teaching trigonometry. Solving problems. Heuristic of solving trigonometric problems.

Lista de ilustrações

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Os problemas com o ensino-aprendizagem da Matemática são antigos e atuais. Tão antigos que na Idade Média alguns teoremas de Geometria eram chamados como *"pons asinorum"*, que em latim significa ponte dos asnos (jumentos). Na época, era assim chamada uma espécie de ponte rústica, construída com troncos cilíndricos de madeira, adjacentes e de pequeno diâmetro, sobre os quais uma pessoa podia passar facilmente, mas os burros tinham muita dificuldade devido à anatomia das patas, que ficavam presas entre os troncos. A analogia fica evidente, assim como registrado o *bullying* contra os estudantes que tinham dificuldades para apreender Geometria.

No ensino médio, infelizmente, não é desenvolvido o raciocínio lógico e matemático. Os alunos não são capacitados para resolver problemas matemáticos. Não sabem o que significa demonstrar uma proposição matemática, logo não são capacitados minimamente na habilidade de prová-las nem em resolver problemas que não sejam meramente rotineiros, mecânicos. Isso está em flagrante contradição com a essência do método científico da Matemática. Fraleigh (1989), no capítulo preliminar de *A First Course in Abstract Algebra*, onde introduz noções sobre métodos de demonstração, destaca a frase *"The main business of mathematics is proving theorems"* que, de forma muito gráfica e norte-americana, destaca a principal dimensão epistemológica da Matemática.

Nós, professores de Matemática, devemos colocar, em primeiro lugar, na nossa prática pedagógica no ensino da disciplina, o objetivo de ensinar a resolver problemas e a demonstrar proposições. Como dito, esta problemática é antiga, e é também mais ou menos universal. George Pólya escreveu, se referindo a uma edição de seu famoso livro A Arte de Resolver Problemas (PóLYA, 1977):

> Quando esta edição estava sendo preparada para impressão, apareceu um estudo (Educational Testing Service, Princeton, N. J. cf. Time, l8 de junho de 1956) que parece ter formulado algumas observações muito pertinentes - elas não constituem novidade para as pessoas que sabem das coisas, mas já era tempo de apresentá-las ao grande público: "... a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso... Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática... Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la".

O autor destaca o papel do professor na condução do processo:

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.
>
> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com

> auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.
>
> Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar na vista.
>
> O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante.

Ainda falando sobre o papel do professor, é inegável que existem professores de Matemática que ignoram nas suas aulas a etimologia da palavra Matemática, que deriva do vocábulo grego $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$, transcrito como mathema, que significa aprendizagem, portanto, etimologicamente podemos dizer que Matemática é aquilo *"que se pode aprender"*. Embora resolvam problemas de certa complexidade, adotam uma didática que poderíamos chamar de mágica, onde as ideias, recursos e artifícios para a resolução pulam como coelhos do chapéu do mágico num show. Alimentam assim o mito da Matemática como ciência reservada para os inteligentes. O saber matemático estaria reservado a mentes *"privilegiadas"*; mentes *"inferiores"* não estariam aptas para entendê-la.

Em nosso trabalho estudaremos a *"heurística de Pólya"* na resolução de problemas e a exemplificaremos numa coletânea de problemas resolvidos de Trigonometria, a maioria dos quais possuem dificuldade acima da média.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Estudar e interpretar as ideias de George Pólya sobre a resolução de problemas, contidas na sua paradigmática obra intitulada na sua tradução ao português *A Arte de Resolver Problemas*, e aplicá-las na resolução de problemas de Trigonometria, no Ensino Médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Estudar a compreensão intelectual de Pólya sobre a utilização do método heurístico na resolução de problemas matemáticos;

2. Perquirir as ideias de Pólya sobre a utilização da heurística na prática docente no ensino da Matemática;

3. Analisar as contribuições da resolução de problemas através do método heurístico de Pólya para o ensino da trigonometria.

1.2 Método de pesquisa

O método de pesquisa utilizado inicialmente foi, basicamente, a *pesquisa analítica de revisão*, que envolveu análise, avaliação e integração da literatura publicada sobre o assunto objeto do trabalho [1].

Realizamos uma busca bibliográfica em diversas fontes (livros, artigos, trabalhos científicos), impressas ou na Internet, sobre o tema da heurística na resolução de problemas matemáticos, em especial em relação às ideias de George Pólya a esse respeito.

Dados os objetivos da pesquisa, evidentemente, o livro A Arte de Resolver Problemas de George Pólya foi a principal fonte bibliográfica tomada, junto a vários livros de Trigonometria, com um mínimo de rigor teórico, e também com marcada ênfase na resolução de problemas trigonométricos de maior dificuldade.

A partir das fontes bibliográficas que seriam efetivamente utilizadas como fundamento teórico da pesquisa, conseguimos nos aprofundar na compreensão do problema e determinar a fundamentação teórica prévia. Como principal produto desta fase, foi redigido o capítulo 3 da dissertação e selecionados os problemas que seriam resolvidos, comentados e apresentados.

Numa segunda fase resolvemos os problemas trigonométricos selecionados, utilizando métodos analíticos próprios da Matemática (lógicos e heurísticos) e técnicas específicas da Trigonometria, e integramos os resultados, gerando como produto o capítulo 5 da dissertação.

O produto final da pesquisa é a nossa dissertação, que constitui o trabalho de conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Salientamos que este trabalho foi escrito utilizando o editor de texto TeXstudio do pacote LaTeX.

Consideramos também a possibilidade de escrever um artigo com os resultados do trabalho de pesquisa.

[1] Acesse (http://www.ergonomia.ufpr.br/TiposdePesquisa.pdf)

2 QUEM FOI GEORGE PÓLYA?

Neste capítulo apresentamos uma breve biografia de George Pólya, dados da sua vida pessoal e acadêmica e seu interesse pelo ensino-aprendizagem da Matemática. Incluímos uma descrição do tipo de problemas que interessaram a Pólya na sua obra *A Arte de Resolver Problemas*.

2.1 Dados Biográficos de George Pólya

George Pólya (em húngaro, Pólya György) nasceu em Budapeste, Hungria, em 13 de dezembro de 1887. Seus pais, Anna Deutsch e Jakab Pólya eram judeus asquenazes [1] que, posteriormente, se converteram ao catolicismo romano, um ano antes de George nascer. Pólya foi batizado na Igreja Católica, pouco tempo depois de nascer, mas quando adulto virou agnóstico. O verdadeiro sobrenome do seu pai era Pollák, mas quando a Hungria se libertou em 1867 do Império Austro-Húngaro, ele trocou por Pólya, para que soasse mais húngaro que judeu, e aumentasse suas oportunidades de obter uma cátedra universitária no ambiente nacionalista do país. Seus interesses científicos estavam focados na Economia e na Estatística. Teve êxito e, obteve uma nomeação como a Privatdozent [2] na Universidade de Budapest. Jakab Pólya faleceu com cinquenta e poucos anos, em 1897, quando George tinha dez anos e sua esposa Anna, quarenta e quatro. Além de George, Jakab deixou outros quatro filhos.

George cursou o ensino básico em Budapest. Em 1894, ao conclui-lo, recebeu o reconhecimento pela sua *diligência e bom comportamento*. A seguir ingressou no ginásio Dániel Berzsenyi. Paradoxalmente, suas disciplinas preferidas eram biologia e literatura. Suas notas em matemática eram, em geral, inferiores às dessas disciplinas. A razão dessa contradição pode ser atribuída à didática de pouca qualidade dos seus professores de Matemática. Mais tarde, ele se referiu a dois dos seus três professores de Matemática como *abomináveis*.

Pólya ingressou em 1905 na Universidade de Budapest, graças à ajuda financeira de seu irmão Jenö, um médico cirurgião bem estabelecido. Inicialmente, a Matemática não foi seu interesse e começou a estudar Direito, mas o achou muito entediante e desistiu da área depois de apenas um semestre. Passou a estudar línguas e literatura, obtendo o

[1] Uma das duas grandes divisões do povo judeu (asquenazes e sefardis), provenientes da Europa Central e Europa Oriental.

[2] Privatdozent é um título universitário próprio das universidades de língua alemã na Europa. Serve para designar professores habilitados para lecionar, mas que não receberam a cátedra de ensino ou de pesquisa. Por esta razão, o Privatdozent não recebe nenhuma remuneração por parte do governo. Porém, esta era uma passagem obrigatória antes de obter a cátedra.

certificado que o qualificava para lecionar Latim e Húngaro no ginásio, mas não chegou a exercer tal função. Logo após se interessou por Filosofia. Seu professor, Bernát Alexander, lhe recomendou estudar Física e Matemática para aprimorar sua formação filosófica. Posteriormente, quando já era um matemático reconhecido e era questionado sobre como tinha chegado a ser um matemático, respondia, com humor: *Não era o suficientemente inteligente para ser físico, mas era demais para ser filósofo, assim escolhi Matemática, que é uma coisa intermediaria.*

Nessa fase, foi aluno do reconhecido físico húngaro Loránd Eötvös e do eminente matemático, também húngaro, Lipót Fejér, conhecido pelos seus aportes à Análise Harmônica, em especial às Séries de Fourier. As aulas de Fejér foram especialmente influentes para determinar a preferência acentuada de Pólya pela Matemática. Entre seus companheiros de estudos estavam jovens matemáticos, alguns dos quais chegariam a ser estrelas, como Marcel Riesz, Otto Szás, Mihaly Fekete, Gábor Szegö, Tibor Radó, Paul Erdös e Paul Turán. Fejér costumava se reunir com eles, num café de Budapest, para resolver problemas e lhes contar histórias e anedotas da vida de matemáticos famosos que conhecia pessoalmente.

No curso acadêmico 1910-11, Pólya estudou na Universidade de Viena, onde frequentou palestras dos matemáticos Wirtinger e Mertens, mas continuou tendo acentuado interesse na Física e frequentou palestras em teoria da relatividade e ótica, entre outras áreas da Física. No ano seguinte, regressou a Budapest e obteve um doutorado em Matemática, praticamente sem orientação, resolvendo um problema na teoria das probabilidades geométricas. Durante 1912 e 1913, em Göttingen, se relacionou com um grupo de matemáticos de primeiríssima linha, como Klein, Carathéodory, Hilbert, Runge, Edmund Landau, Weyl, Hecke, Courant and Toeplitz.

Recebeu uma oferta para uma nomeação em Frankfurt, mas antes foi a Paris, em 1914, para uma visita breve, encontrando-se com Émile Picard e Jacques Hadamard, mas não desfrutou o bastante do encontro, devido principalmente, à acomodação terrível.

Dentre todos os matemáticos com os quais Pólya interagiu, a influência mais significativa foi exercida por Adolf Hurwitz. Estando em Paris, Hurwitz conseguiu para ele uma vaga de Privatdozent no Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH Zurique), onde o próprio Hurwitz era o chefe da Cátedra de Matemática. Pólya aceitou o convite de Hurwitz, por quem nutria uma profunda admiração. Ali, Pólya teve como colegas de cátedra Geiser, Bernays, Zermelo e Weyl. Sua chegada a Zurique coincidiu com o início da Primeira Guerra Mundial, o que não lhe causou nenhum problema significativo, já que, na sua época de estudante, sofreu uma lesão jogando soccer que o invalidou para servir no exército húngaro, o que lhe foi muito favorável, já que nessa época ele mantinha firmes convicções pacifistas. Sua situação se complicou à medida que a guerra progredia, pois o exército húngaro precisava muito de soldados e exigiu que Pólya voltasse para a

Hungria para servir militarmente. O mesmo se recusou, o que fez com que tivesse que permanecer muitos anos sem regressar a seu país, para não ser preso e processado.

Em Zurique, sua produção matemática foi muito extensa e abrangente. Em 1918, publicou artigos sobre séries, teoria dos números e combinatória. Nos anos seguintes, além de novos artigos nessas áreas, publicou em astronomia e probabilidades. Neste período de vasta produção, provou também alguns de seus resultados mais importantes na teoria das funções integráveis.

Ele adotou a cidadania suíça, embora isso não o protegesse das autoridades húngaras, e em 1918 se casou com uma suíça, Stella Vera Weber, que era filha de um professor de física da Universidade de Neuchâtel. Pólya não voltou à Hungria até o ano de 1967.

Pólya conheceu o matemático Gábor Szegő em 1913 em Budapest. Na época, Szegő era um estudante de Matemática e Pólya discutiu com ele uma conjectura sua sobre coeficientes de Fourier. Szegő provou a conjectura e escreveu seu primeiro artigo científico sobre essa proposição. Vários anos depois, Pólya decidiu escrever um livro de problemas de Análise e solicitou a cooperação de Szegő. Numa parceria de vários anos, os dois reuniram uma bela coleção de problemas. A ideia genial de Pólya foi classificar os problemas não pelo assunto do qual tratavam, mas pelo método de solução. Em 1925, foi publicado o livro *Problems and Theorems in Analysis*, em dois volumes, pela editora Springer (PóLYA; SZEGö, 1925). Foi uma obra-prima matemática que alavancou sua reputação.

Pólya recebeu em 1924 uma bolsa de estudos Rockefeller, o que lhe permitiu estudar com Godfrey Harold Hardy, na Inglaterra. Parte desse ano, ele esteve em Oxford, parte em Cambridge, trabalhando com Hardy e John Littlewood. Começou uma colaboração com Littlewood na redação do livro intitulado Desigualdades, publicado em 1934. Enquanto trabalhava no livro, Pólya continuou uma série notável de publicações, com um total de 31 trabalhos produzidos durante os anos de 1926 a 1928. Neste período, consolidou notavelmente seu prestígio e foi promovido a Professor Ordinário na ETH Zürich, em 1928.

Numa avaliação do livro *George Pólya: Master of Discovery* (Palo Alto, CA, 1993) da autoria de H. Taylor e L.Taylor, Duren escreveu:

> Pólya was arguably the most influential mathematician of the 20th century. His basic research contributions span complex analysis, mathematical physics, probability theory, geometry, and combinatorics. He was a teacher par excellence who maintained a strong interest in pedagogical matters throughout his long career.[3]

No ano de 1933, foi concedido a Pólya um segundo prémio *Rockefeller Fellowship*,

[3] Tradução livre: Pólya foi indiscutivelmente o matemático mais influente do século XX. Suas principais contribuições na pesquisa abrangem análise complexa, física matemática, teoria de probabilidade, geometria e combinatória. Ele foi um professor por excelência que manteve um forte interesse em questões pedagógicas ao longo de sua longa carreira.

que permitiu que ele visitasse Princeton. Enquanto estava nos Estados Unidos, Hans Frederick Blichfeldt o convidou para visitar Stanford, o que lhe agradou muito. Trabalhou na Brown University por dois anos e no Smith College por um curto período. Após essa temporada, ele voltou a Zurique, mas em 1940, fugindo de Hitler, emigrou junto com sua esposa para os Estados Unidos.

Antes de ir para os Estados Unidos, Pólya tinha um rascunho de seu livro *A Arte de Resolver Problemas* escrito em alemão. Ele tentou quatro editores antes de encontrar um nos Estados Unidos que aceitou publicar a versão em inglês, intitulada *How to solve it*! O livro virou um best-seller e vendeu mais de um milhão de cópias ao longo dos anos, tendo sido traduzido em 17 idiomas. A. H. Schoenfeld descreveu sua importância no artigo: *Pólya, problem solving, and education*, Math. Mag. 60 (5) (1987), 283-291:

> For mathematics education and the world of problem solving it marked a line of demarcation between two eras, problem solving before and after Pólya. Pólya explained in How to solve it that to solve problems required the study of heuristic: The aim of heuristic is to study the methods and rules of discovery and invention .... Heuristic, as an adjective, means 'serving to discover'. ... its purpose is to discover the solution of the present problem. ... What is good education? Systematically giving opportunity to the student to discover things by himself.[4]

Foi Pólya quem popularizou a heurística. Como ele próprio escreveu no prólogo do livro em 1944: *"Este tipo de estudo, chamado Heurística por alguns autores, não está em moda nos dias que correm, mas tem um longo passado e, talvez, algum futuro"*. O futuro, a genialidade de Pólya o garantiu, muito se há pesquisado e escrito sobre suas teses, o que continua se fazendo.

Pólya publicou posteriormente outros livros sobre a arte de resolver problemas matemáticos. Dentre eles, Mathematics and plausible reasoning (1954) e Mathematical discovery publicado em dois volumes, em 1962 e 1965.

Muitas pessoas consideram os aportes de Polya ao ensino como sua maior contribuição à Matemática. A seguir apresentamos duas citações de Pólya neste tópico. A primeira é sobre o ensino da Matemática na escola primária, proferida numa das suas palestras:

> Mathematics in the primary schools has a good and narrow aim and that is pretty clear in the primary schools. ... However, we have a higher aim. We wish to develop all the resources of the growing child. And the part that mathematics plays is mostly about thinking. Mathematics is a good school of thinking. But what is thinking? The thinking that

[4] Tradução livre: Para a educação matemática e o mundo da resolução de problemas, marcou uma linha de demarcação entre duas épocas, a resolução de problemas antes e depois de Pólya. Pólya explicou em A Arte de Resolver Problemas que resolver problemas requeria o estudo de heurística: O objetivo da heurística é estudar os métodos e regras de descoberta e invenção .... Heurística, como um adjetivo, significa "servir para descobrir". ... seu objetivo é descobrir a solução do problema presente. ... O que é uma boa educação? Sistematicamente dar oportunidade ao aluno para descobrir as coisas por si mesmo.

> you can learn in mathematics is, for instance, to handle abstractions. Mathematics is about numbers. Numbers are an abstraction. When we solve a practical problem, then from this practical problem we must first make an abstract problem. ... But I think there is one point which is even more important. Mathematics, you see, is not a spectator sport. To understand mathematics means to be able to do mathematics. And what does it mean doing mathematics? In the first place it means to be able to solve mathematical problems.[5]

A segunda trata sobre o ensino em geral.

> Teaching is not a science; it is an art. If teaching were a science there would be a best way of teaching and everyone would have to teach like that. Since teaching is not a science, there is great latitude and much possibility for personal differences. ... let me tell you what my idea of teaching is. Perhaps the first point, which is widely accepted, is that teaching must be active, or rather active learning. ... the main point in mathematics teaching is to develop the tactics of problem solving.[6]

A obra matemática de Pólya é prolífera e extensa. Segundo (R. P. BOAS, 1990), suas publicações sobre pesquisas em diversas áreas da Matemática se estendem de 1912 a 1976, e desde 1919, e durante toda sua vida, publicou sobre ensino da Matemática. Por várias décadas, regularmente, iniciou novos tópicos matemáticos e fez contribuições decisivas em muitos outros tópicos já estabelecidos. Ainda que seu principal interesse matemático fosse a Análise, no cume da sua carreira ele contribuiu não somente para a Análise real e complexa, mas também às probabilidades, combinatória e ocasionalmente à teoria dos números, à teoria da representação proporcional e votação. Boas considera que o trabalho de Polya combina uma grande capacidade e lucidez de exposição. Connor and Robertson (2002) avaliam o conjunto da obra de Polya como uma amostra de resultados concretos e explícitos, elegantes e engenhosos.

Embora muitos dos seus resultados sejam tão técnicos que podem ser plenamente apreciados unicamente por especialistas, um número substancial de seus teoremas podem

[5] Tradução livre: A Matemática na escola primária tem um objetivo bom e estreito e que é bem claro .... No entanto, nós temos um objetivo ainda mais elevado. Queremos desenvolver todas as capacidades da criança em crescimento. E a parte que corresponde à Matemática é principalmente sobre como raciocinar. A Matemática é uma boa escola de pensamento racional. Mas o que é pensar racionalmente? O pensamento racional que você pode aprender em Matemática é, em primeira instância, para lidar com abstrações. A Matemática trata com números. Os números são uma abstração. Quando resolvemos um problema prático, então a partir deste problema prático devemos primeiro construir um problema abstrato. .... Mas considero que há um ponto que é ainda mais importante. A Matemática não é um esporte para espectadores. Compreender a Matemática significa ser capaz de fazer Matemática. E o que significa fazer Matemática? Em primeiro lugar, significa ser capaz de resolver problemas matemáticos.

[6] Tradução livre: Ensinar não é uma ciência; é uma arte. Se o ensino fosse uma ciência, haveria uma melhor maneira de ensinar e todos teriam que ensinar assim. Como o ensino não é uma ciência, há grande espaço e muitas possibilidades para diferenças pessoais. ... deixe-me dizer-lhe qual é a minha ideia do que é ensinar. Talvez o primeiro ponto, que é amplamente aceito, é que o ensino deve ser ativo, ou melhor, um aprendizado ativo. ... o ponto principal no ensino de Matemática é desenvolver as táticas de resolução de problemas.

ser enunciados de forma suficientemente simples para serem compreendidos por pessoas com conhecimentos matemáticos razoáveis. No seu conjunto, a obra de Polya é fecunda. A maior parte de suas contribuições foram objeto de pesquisa de outros matemáticos e constituíram-se em fundamentos de importantes ramos da Matemática.

Além de suas contribuições mais substanciais, Polya fez muitas comunicações breves, que vão desde os muitos problemas que ele propôs a breves observações. Um número considerável delas se tornou o germe de teorias substanciais nas mãos de outros matemáticos. Um estudante que precisa de um tópico para pesquisa poderia dar uma olhada nos artigos curtos de Polya.

Os artigos de Polya foram publicados em quatro volumes: os dois primeiros dedicados à análise complexa, o terceiro a outros ramos da Análise, incluindo a física-matemática e o quarto à probabilidade, combinatória e ensino da Matemática.

Em 1953, Polya aposentou-se de Stanford, mas continuou com uma vida matemática extremamente ativa, interessando-se particularmente por educação matemática. Ele continuou sua relação com Stanford como Professor Emérito e, em 13 de dezembro de 1977, um jantar foi oferecido lá para marcar seu 90º aniversário, no qual muitos amigos e colegas fizeram homenagens brilhantes. Sua carreira de professor, no entanto, ainda não havia terminado. Em 1978, ele ministrou um curso de combinatória no Departamento de Ciência da Computação em Stanford. Recebeu muitas honras por suas destacadas contribuições, das quais mencionamos algumas. Foi eleito membro honorário da Academia Húngara, Sociedade Matemática de Londres, Associação Matemática da Grã-Bretanha e Sociedade Matemática Suíça. Também foi eleito para a Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos, a Academia Americana de Artes e Ciências, a Academia Internacional de Filosofia das Ciências de Bruxelas e o Conselho de Matemática da Califórnia. Era membro correspondente da Academia de Ciências de Paris.

Para concluir, reproduzimos a seguir o elogio de Frank Harary a Polya, em Homage to George Pólya, J. Graph. Theory 1 (4) (1977), 289-290, tomado de O'Connor e Robertson (2002).

> With no hesitation, George Pólya is my personal hero as a mathematician. ... [he] is not only a distinguished gentleman but a most kind and gentle man: his ebullient enthusiasm, the twinkle in his eye, his tremendous curiosity, his generosity with his time, his spry energetic walk, his warm genuine friendliness, his welcoming visitors into his home and showing them his pictures of great mathematicians he has known - these are all components of his happy personality. As a mathematician, his depth, speed, brilliance, versatility, power and universality are all inspiring. Would that there were a way of teaching and learning these traits.[7]

[7] Tradução livre: Sem hesitação, George Pólya é meu herói pessoal como matemático. (...) ele não é apenas um distinto cavalheiro, mas um homem muito bondoso e gentil: o seu ardente entusiasmo, o brilho nos seus olhos, a sua enorme curiosidade, a sua generosidade com o seu tempo, a sua

As informações históricas apresentadas neste tópico foram tomadas, principalmente, de *livro de Boas* (BOAS, 1990) e *livro de Connor* (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002).

2.2 Os Problemas que interessaram a Pólya

No prefácio de seu famoso livro A Arte de Resolver Problemas, Pólya conta que no seu tempo de estudante,

> ... assistia às aulas, lia livros, tentava assimilar as resoluções e os fatos que lhe eram apresentados, mas havia uma questão que o perturbava repetidamente: 'Sim, a resolução parece que funciona, que está certa, mas como seria possível inventar, eu próprio, essas coisas?

A dificuldade encontrada por Pólya, em sua época de estudante e que motivou seu interesse pela resolução de problemas, é a mesma que atualmente confrontam muitos alunos de Matemática no Ensino Fundamental e nos cursos universitários. A inabilidade para resolver problemas ou para demonstrar uma proposição matemática constitui um obstáculo significativo para o satisfatório desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Durante muito tempo, os professores da área têm debatido e pesquisado sobre este complexo assunto, mas não encontraram uma solução definitiva, se é que existe.

É um contrassenso ensinar Matemática sem desenvolver nos estudantes a habilidade de resolver problemas matemáticos e elaborar demonstrações de proposições. A carência, ou a atrofia, dessa necessária capacidade, gera desmotivação e rejeição pela disciplina e cria barreiras psicológicas difíceis de superar no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A Neurociência provou que o cérebro está em formação, desde a infância até a adolescência, e deve ser convenientemente estimulado para desenvolver o pensamento. Portanto, deve-se aproveitar essas fases da vida para desenvolver o raciocínio lógico, matemático e o pensamento abstrato. Caso contrário, na vida adulta pode ser muito difícil superar insuficiências nesses quesitos. Quem já lecionou Matemática para turmas com alunos que ultrapassaram a juventude deve ter constatado empiricamente esse fato.

Como ensinar e aprender a resolver um problema? foi uma pergunta que estimulou a reflexão de George Pólya durante toda a sua vida. É claro que não há uma única resposta que funcione para todos os casos, menos ainda uma receita para o êxito, como alguns estudantes pedem angustiados, quando conseguem apreender razoavelmente a teoria, mas, perante os problemas propostos para serem resolvidos, ficam sem ação.

caminhada vigorosa e enérgica, sua cálida e genuína amizade, seu acolhimento aos visitantes no seu lar, mostrando-lhes suas fotografias de grandes matemáticos que tinha conhecido - estes são todos os componentes de sua feliz personalidade. Como matemático, sua profundidade, presteza, brilho, versatilidade, capacidade e universalidade são todos inspiradores. Tomara que houvesse uma forma de ensinar e apreender essas qualidades.

A palavra problema, no dia a dia do ensino da Matemática, às vezes é utilizada no sentido de qualquer exercício para ser resolvido pelo aluno. Muitas vezes a resolução é feita sem necessidade de muito raciocínio, mas simplesmente seguindo um algoritmo conhecido. Um exemplo típico é a aplicação mecânica da fórmula de Bhaskara para resolver uma equação de segundo grau.

Os problemas que interessavam didaticamente a Pólya eram aqueles cuja resolução não fosse imediata, aplicando um algoritmo mais ou menos explícito, mas que necessitasse de um raciocínio lógico, uma certa inspiração para encontrar o *"caminho das pedras"* que conduzisse à solução. Esta ideia fica clara no Prefácio à Primeira Tiragem da Arte de Resolver Problemas, em agosto de 1944:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Observamos no texto acima o apreço de Pólya pela ação formativa que o estudo da Matemática (o bom estudo) exerce sobre o caráter, o pensamento e o raciocínio lógico dos alunos. É clara sua observação que essa forma de ensinar é produtiva *"numa idade susceptível"*.

Em Cálculo, temos um claro exemplo na comparação entre a derivação e a integração de funções, que mostra a diferença entre os problemas cuja resolução utiliza procedimentos de tipo algorítmico e aqueles que demandam o método heurístico. O aluno apreende e memoriza as regras de derivação e, com um certo treinamento, pode ser capaz de calcular a derivada de qualquer função. Mas, para calcular a integral indefinida de uma função, ou melhor, uma primitiva dela, precisa-se de uma criatividade que pode ir além do simples domínio mecânico de certas fórmulas de integração, quando a função em questão apresenta alguma complexidade, fazendo com que não se encaixe, de forma quase imediata, em alguma fórmula de integração. Então será preciso lançar mão de algum artifício.

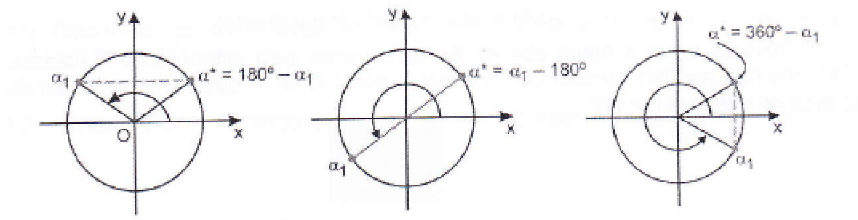
A seguir, apresentamos dois exercícios de trigonometria que mostram com maior detalhe a categoria de problemas pelos quais Pólya se interessava.

Ao trabalhar a denominada redução ao primeiro quadrante, pode ser enunciada uma regra para resolver qualquer exercício a esse respeito. Por exemplo, na obra de Aref Antar Neto et al. (2009), *Noções de Matemática*, pág. 94, é enunciada uma denominada Regra Geral:

Dado um arco de medida α (de qualquer quadrante) podemos sempre determinar um arco de medida α^* entre $0°$ *e* $90°$ ***que tem as mesmas razões trigonométricas do arco dado, em valor absoluto****(isto é, com exceção do sinal, que pode não ser o mesmo). Se α_1 indica a primeira determinação positiva correspondente à medida dada, então o valor de α^* pode ser encontrado conforme a tabela seguinte, ilustrada claramente através das figuras.*

Se α_1 está no	**α^* vale**
2º quadrante	$180° - \alpha_1$
3º quadrante	$\alpha_1 - 180°$
4º quadrante	$360° - \alpha_1$

Figura 1 – Ilustração gráfica das fórmulas de redução ao 1º quadrante



Fonte: Neto, pág.94

Previamente, o autor indica que se a medida do ângulo α é maior que $360°$, deve-se dividir por $360°$ e tomar a medida do ângulo côngruo (resto da divisão). No texto está disponibilizada uma tabela com os valores das razões trigonométricas dos ângulos entre $0°$ e $90°$. A seguir, o autor apresenta o seguinte exercício resolvido (Neto, pág.94):

Exercício 1: Determine, com o auxílio da tabela, as razões trigonométricas de $\alpha = -1218°$:

SOLUÇÃO: Primeiramente reduzimos a medida $-1218 = 3(360) - 138$

A primeira determinação negativa correspondente a $\alpha = -1218°$ é $-138°$. Somando $360°$, obtemos a primeira determinação positiva: $\alpha_1 = 222°$. Trata-se de um arco do 3º quadrante, logo $\alpha^* = 222° - 180° = 42°$.

Na tabela encontramos:

$\text{sen}42° = 0,6691,$

$\cos 42° = 0,7431,$

$\text{tg}42° = 0,9004$ e

$\text{cotg}42° = 1,111$,

e calculamos

$\sec 42° = 1,346$ e $\text{cosec}42° = 1,495$.

Finalmente, lembrando que no 3º quadrante a tangente e a cotangente são positivas, escrevemos:

$\text{sen}(-1218°) = -0,6691$,

$\cos(-1218°) = -0,7431$,

$\text{tg}(-1218°) = +0,9004$,

$\text{cotg}(-1218°) = +1,111$,

$\text{sec}(-1218°) = -1,346$ e

$\text{cosec}(-1218°) = -1,495$.

Para resolver este exercício o aluno não precisa realizar nenhuma descoberta, não necessita "inventar" nenhum artificio. Basta ter compreendido e estudado o algoritmo de solução descrito no livro e aplicá-lo passo a passo. Portanto, não está presente a necessidade de algum processo heurístico na sua resolução.

Pelo contrário, no problema seguinte, tomado de Lidski et al. (1972), pág. 80, a situação é outra.

Exercício 2: Demonstrar a identidade $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\text{sen}^2 2x$.

SOLUÇÃO:

Sabe-se que $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$.

Tomando $a = \text{sen}^2 x$ e $b = \cos^2 x$ e substituindo acima obtemos

$$\text{sen}^6 x + \cos^6 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)[(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\,\text{sen}^2 x \cos^2 x] = 1 - 3\,\text{sen}^2 x \cos^2 x.$$

Como $\text{sen}2x = 2\,\text{sen}x \cos x$, vem que $\text{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\text{sen}^2 2x$. Substituindo, resulta que

$$\text{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\left(\frac{1}{4}\text{sen}^2 2x\right) = 1 - \frac{3}{4}\text{sen}^2 2x$$

.

Obviamente, o segundo exercício é um verdadeiro problema para os alunos e é um "prato cheio" para aplicar o método de Pólya.

Para Pólya, existe uma estreita relação entre epistemologia, resolução de problemas e didática da Matemática. No seu livro intitulado *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction an Analogy in Mathematics* (PóLYA, 1954) escreve:

> Mathematical facts are first guessed and then proved, and almost every passage in this book endeavors to show that such is the normal procedure. If the learning of mathematics has anything to do with the discovery of mathematics, the student must be given some opportunity to do problems in which he first guesses and then proves some mathematical fact on an appropriate level. [8] (G. Pólya, 1954, pp. 158-160)

No Prefácio à Primeira Tiragem de A Arte de Resolver Problemas expressou:

> Pelo estudo dos métodos de resolução de problemas, percebemos um novo aspecto da Matemática. Sim, porque ela tem dois aspectos: é a rigorosa ciência de Euclides, mas é também uma outra coisa. A Matemática, apresentada da maneira euclidiana, revela-se uma ciência dedutiva, sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência. Mas o segundo aspecto é novo sob um certo ponto de vista: a Matemática in *statu nascendi*, no processo de ser inventada, jamais foi apresentada exatamente desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público.

Pólya considerava a epistemologia da Matemática e a pedagogia do ensino da Matemática profundamente entrelaçadas. Ele acreditava que, para que os estudantes percebam o método da construção do conhecimento matemático, sua experiência como aluno de Matemática deve ser condizente com a forma como a Matemática é feita. E como é feita? Resolvendo problemas.

O eminente matemático Paul Richard Halmos (1916-2006), também húngaro naturalizado estadunidense, tinha a mesma opinião. No seu artigo intitulado *The heart of mathematics* (O coração da Matemática), publicado na prestigiosa revista da American Mathematical Monthly, em 1980, escreveu:

> What does mathematics really consist of? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)? Proofs (such as Gödel's proof of undecidability)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)? Theories (such as category theory)? Formulas (such as Cauchy's integral formula)? Methods (such as the method of successive approximations)? Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics really consists of is problems and solutions.[9](HALMOS, 1980) (pág.519)

---

[8] Tradução livre: Os fatos matemáticos são primeiro conjecturados e depois provados, e quase todas as passagens deste livro se empenham em mostrar que tal é o procedimento normal. Se a aprendizagem da matemática tem algo a ver com a descoberta na matemática, ao aluno deve ser dada alguma oportunidade de resolver problemas em que ele primeiro conjecture e, em seguida, prove alguns fatos matemáticos num nível apropriado.

[9] Tradução livre: Em que consiste realmente a matemática? Axiomas (como o postulado das paralelas)? Teoremas (como o teorema fundamental da álgebra)? Provas (como a prova da indecidibilidade de Gödel)? Definições (como a definição de Menger de dimensão)? Teorias (como a teoria das categorias)? Fórmulas (como a fórmula integral de Cauchy)? Métodos (como o método de aproximações sucessivas)? A Matemática certamente não poderia existir sem estes ingredientes; eles são todos essenciais. Não obstante, é um ponto de vista defensável que nenhum deles está no cerne do assunto, que a principal

Existem problemas matemáticos de diferentes características e graus de complexidade. Por exemplo, dentre os famosos, temos a conjectura das quatro cores, que uma vez provada se converteu no teorema das quatro cores; o chamado Último Teorema de Fermat, que foi enunciado em 1637 e desafiou as mentes mais brilhantes da Matemática por mais de 350 anos, até ser provado por Andrew Wiles, professor de Princeton. A conjectura de Christian Goldbach, matemático prussiano, que diz que todo número par maior do que dois é a soma de dois números primos. Foi escrita numa carta dele endereçada a Leonhard Euler em 7 de junho de 1742. Até hoje não foi provada nem refutada e se especula se é uma das proposições indecidíveis de Gödell. Mas, existem também outros problemas no dia a dia dos matemáticos (puros ou aplicados) que não têm essa enorme dificuldade. Halmos argumenta, que as experiências matemáticas dos alunos devem prepará-los para resolver os futuros desafios profissionais. Ou seja, os alunos devem envolver-se na resolução de problemas "reais"durante seu aprendizado acadêmico para, uma fez formados, possuir a capacidade de trabalhar problemas de elevada complexidade.

> Acredito que esses problemas são o coração da matemática, e espero que, como professores, na sala de aula, nos seminários e nos livros e artigos que escrevamos, os enfatizemos mais e mais, e vamos treinar nossos alunos para serem melhores formuladores e solucionadores de problemas do que nós. (HALMOS, 1980) (pág.52)

Além do entendimento de Pólya sobre o conceito de *problema* e da interpretação usual e um pouco estreita do vocábulo *problema*[10], como um enunciado que descreve uma situação que deve ser modelada matematicamente e, mediante o uso de métodos matemáticos, calculados os valores de certas variáveis, o conceito de problema na Didática da Matemática tem um significado muito mais profundo no contexto do denominado *ensino problematizador*.

Segundo Mendoza (2015):

> O problema docente, como conceito independente, reflete uma esfera específica da realidade, uma etapa plenamente determinada do processo escolar. É uma categoria psicológica - didática, cuja utilização na pesquisa de ensino pode contribuir na revelação das regularidades novas ou na precisão das que já se conhecem. Ou seja, o problema docente porta em si um conhecimento novo para assimilar dito conhecimento (o processo e resultado), e determina a estrutura do processo cognoscitivo (mental).
>
> O problema docente é um reflexo da contradição psicológica - lógica do processo de assimilação, o que determina a busca mental, desperta o interesse pela pesquisa (explicação) da essência do desconhecido, e conduze a assimilação de um conceito novo ou de um método novo da ação. A contradição lógica está dada pela relação do conhecido, desconhecido e a busca pela solução.

Segundo o mesmo autor (MENDOZA, 2016):

razão da existência do matemático é resolver problemas, portanto, a matemática realmente consiste em problemas e suas soluções.

[10] Segundo Houaiss, na sétima acepção como rubrica matemática, significa: Tarefa de calcular uma ou várias quantidades desconhecidas (incógnitas) relacionadas a outras conhecidas (dados).

> A regra didática para a formulação do problema docente é:
>
> a) Separação do conhecido e o desconhecido.
>
> b) Localização do desconhecido.
>
> c) Determinação das condições possíveis para a solução independente do problema.
>
> d) A existência de indeterminação no problema.
>
> De acordo com o nível de dificuldade os problemas docentes podem dividir-se em algorítmicos e **heurísticos**. No problema algorítmico a situação de uma tarefa requer a aplicação de um algoritmo já preparado, indicando exatamente a realização de determinadas operações. Um tipo mais complexo de problema algorítmico é nos casos quando se cambia a situação e condiciona modificar o algoritmo. [Negrito da autora]

Ainda segundo (MENDOZA, 2016), o **problema heurístico** surge na situação que, pelo conteúdo dos dados e o objetivo, não indica o algoritmo de solução, ou seja, há que achar o procedimento de solução, exigindo a conjectura, intuição e suposições, cuja demonstração pode realizar-se analiticamente. **Geralmente o processo de solução do problema docente é uma combinação do método analítico - lógico e heurístico, no qual um problema docente que começa analítico - lógico pode se transformar em heurístico.** [Negrito da autora]

No mesmo documento (MENDOZA, 2016), estão indicadas as etapas a cumprir na Atividade de Situações Problema:

Formular o problema docente

- Analisar a situação problema para determinar os elementos conhecidos e desconhecidos;
- Estudar os dados e as condições da situação problema;
- Determinar o buscado a partir de problema fechado (objetivo definido) ou aberto (objetivo não preciso).

Construir o núcleo conceitual

- Determinar o nível de partida dos estudantes, relacionado com os conhecimentos sobre o elemento conhecido e sua atualização, se for necessário;
- Encontrar nexos entre os conhecidos e desconhecidos, desde os pontos de vista conceitual e procedimental, através de novas tarefas mais simples, como realização de experimentos, analogia, intuição e suposição de hipóteses.

Solucionar o problema docente

- Aplicar o método lógico - analítico ou heurístico ou combinação de ambos para determinar os nexos entre o conhecido e desconhecido;
- Determinar o buscado.

Interpretar a solução

- Verificar se a solução corresponde com o buscado e as condições do problema;
- Analisar os resultados obtidos para encontrar possíveis novas relações conceitual e/ou procedimental com elementos anteriormente conhecidos.

Como se infere das colocações do referido autor, o método heurístico no ensino está naturalmente relacionado com o método didático do ensino problematizador. O domínio de ambos os métodos, que se complementam, proporcionaria ao professor uma poderosa ferramenta didática. Essa "colaboração"está aberta ao aprofundamento.

2.3 Majmutov e Tao comentam Pólya

Pólya é citado na obra *La Enseñanza Problémica* de M. I. Majmutov (1983), membro correspondente da Academia de Ciências Pedagógicas da URSS, que apresenta entre outros tópicos, os fundamentos didáticos de la enseñanza problémica.

Majmutov considera a obra de Pólya uma pesquisa interessante das formas e princípios de resolver problemas e de apresentar os procedimentos característicos da resolução de problemas matemáticos. Ele cita que Pólya, através de pesquisa na literatura existente e na experiência de trabalho de professores, tenta *"mostrar esquematicamente as regularidades mais gerais do processo de solução de problemas"*.

Segundo Majmutov, a atividade heurística dos alunos em relação à solução de problemas tem sua parcela de importância na organização do ensino. Salienta que é interessante o método pelo qual Pólya apresenta os procedimentos heurísticos dos estudantes quando estão resolvendo um problema, pois revelam, entre outras coisas, a estrutura do processo mental criativo.

Majmutov enfatiza que, para Pólya, a partir da experiência pessoal que se obtém quando se resolve um problema, aliada à observação de como outros resolvem esse mesmo problema, consegue-se elaborar um determinado método, levando a que, em geral, se descubra a base da solução de qualquer problema, seja qual for seu conteúdo.

Quando analisa o esquema constituído pelas quatro etapas, apresentado por Pólya para a solução de tarefas matemáticas (ver seção 3.3), Majmutov avalia que, tal esquema destaca essencialmente um princípio da atividade heurística, qual seja a utilização de experiência adquirida, anteriormente, pelos estudantes ao realizar a atividade de resolver um problema. Este princípio tem fundamental importância para criar nos estudantes uma rotina de hábitos na solução de problemas, de forma independente, ou seja, cada um encontrará sua própria metodologia, baseada no conhecimento já alcançado.

Majmutov considera que utilizar esse princípio baseado na experiência anterior não é suficiente. Deve ser levada em consideração, principalmente, a atividade mental do estudante, sua criatividade para resolver problemas. Os especialistas em lógica e psicologia apresentam outros princípios, também importantes para se conseguir um método para resolução de problemas.

Deve ser utilizado um sistema rígido no processo apenas como uma abordagem inicial, na tentativa de se encontrar um procedimento para solução do problema, sem deixar de lado mas, principalmente, utilizar a busca criativa, incentivando os estudantes a saírem, cada um, à procura de sua própria solução, que seja a mais inovadora possível.

Em *Heurística - A Ciência do Pensamento Criador*, Puchkin (1976), outro autor citado por Majmutov, identifica três tipos de solução para alguém resolver uma determinada tarefa, dependendo da sua experiência.

No primeiro tipo estão os casos de resolução de problemas por pessoas que não têm nenhuma experiência anterior. Para essas pessoas, a solução é encontrada através de tentativas e erros, finalizando quando, após várias tentativas, se chegar a uma solução, o que vai ocorrer de maneira mais ou menos aleatória.

No segundo tipo de solução, estão os problemas para os quais quem vai resolvê-los já conhece algumas fórmulas ou esquemas, ou seja, o caminho para a solução do problema não é totalmente desconhecido. Assim, basta relacionar o novo problema com algum esquema ou fórmula existente.

No terceiro tipo estão problemas dos quais a pessoa já tem algum conhecimento, mas que não é suficiente para solucioná-los. Será necessário construir, com base na análise dos fatos do problema, um roteiro que complemente as lacunas existentes.

O brilhante matemático australiano Terence Chi-Shen Tao (2013) também cita Pólya em sua obra *"Como Resolver Problemas Matemáticos – Uma Perspectiva Pessoal"*. Discute as estratégias sugeridas por Pólya, com o seguinte enfoque: ao tentar resolver um problema a primeira coisa a ser feita é conhecê-lo. A partir do conhecimento do problema é que se determina a abordagem que será utilizada no seu processo de resolução. Para conhecer o problema, Tao sugere identificar a que tipo ele pertence, citando três tipos: questões do tipo *"mostre que..."* ou *"calcule..."*; do tipo *"encontre..."* ou *"encontre todos..."* e do tipo *"existe ou não..."*.

A diferença entre estes tipos de problemas apresentados por Tao é que nas questões do tipo *"mostre que..."* ou *"calcule..."*, a partir dos dados informados, torna-se possível deduzir alguma afirmação ou calcular um valor solicitado. Considera que um problema assim é, na maioria das vezes, mais fácil de resolver do que um problema de algum dos outros dois tipos.

Já para as questões do tipo *"encontre..."*, ele acha válida a abordagem através da tentativa e erro; partindo de um palpite inicial e que seja bem embasado, vai-se efetuando ajustes para que se aproxime mais do resultado correto.

E finalmente, os problemas do tipo *"existe ou não..."*, considerados os mais difíceis, pois quem vai resolver um problema desse modelo tem que decidir, antes de tudo, se um determinado objeto existe ou não, para então demonstrá-lo, através de uma prova ou de um contraexemplo.

Quanto à Geometria, Tao considera que é *"desenvolvida de um modo muito lógico e coeso"*. Utilizando alguns resultados básicos, pode-se resolver, de modo sistemático, problemas geométricos. Salienta que: *"a verdadeira beleza da geometria está em podermos mostrar, pela aplicação repetida de fatos óbvios, como um fato à primeira vista nada óbvio é indiscutivelmente verdadeiro."*

3 O QUE É A HEURÍSTICA?

Não existe uma definição formal do que é a Heurística. Neste capítulo damos algumas ideias para entender o significado desse substantivo.

3.1 Heurística

A palavra *heurística* provém do vocábulo grego antigo *heuriskein* e do latim *heuristicus* e significa "achar", "descobrir".

Segundo o dicionário eletrônico Houaiss, entre outras acepções, heurística, como substantivo, significa: (1) Arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta dos fatos. (2) [Rubrica: pedagogia]. Método educacional que consiste em fazer descobrir pelo estudante o que se lhe quer ensinar. Como adjetivo, heurístico significa: (1) relativo a ou próprio da heurística. (2) que serve para a descoberta ou para a investigação de fatos. (3) diz-se de hipótese de trabalho que, a despeito de ser verdadeira ou falsa, é adotada a título provisório como ideia diretriz na investigação dos fatos.

Segundo o dicionário Aurélio (5ª edição revista e ampliada, Rio de Janeiro, 2001, Editora Nova Fronteira), heurística é o *"conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou à resolução de problemas."* E, no mesmo dicionário, o adjetivo heurístico significa *"que serve para descobrir"*.

Em Llera (2000) lemos, na introdução:

> La palabra heurística, como muchas otras ricas en contenido, aparece en más de una categoría gramatical. Cuando se encuentra como sustantivo se identifica con el arte o la ciencia del descubrimiento. Cuando aparece como adjetivo se refiere a cosas más concretas como estrategias heurísticas, reglas heurísticas o incluso silogismos y conclusiones heurísticas. Claro está que estos dos usos están íntimamente relacionados ya que la heurística usualmente propone estrategias heurísticas que guían el descubrimiento. En matemáticas, la heurística existe desde la Grecia antigua. Sin embargo, la formalización y el alto grado de rigor en matemáticas le han restado importancia al estudio del descubrimiento, considerándolo en todo caso de interés para a psicología.[1]

No último parágrafo, da citação acima, está colocada uma situação generalizada no ensino da Matemática no nível superior. A Matemática é lecionada no seu aspecto formal. Ao estudante lhe são apresentados axiomas, definições e teoremas demonstrados formalmente. Mas, não é trabalhado como gerar as ideias para elaborar uma demonstração

[1] Por ser o espanhol de fácil entendimento para os leitores cuja linguagem natural é o português, não incluímos tradução livre das citações nessa língua.

ou resolver um problema de certa complexidade. É algo que se considera que faz parte da aptidão do estudante para a Matemática e que se desenvolve espontaneamente durante os estudos.

Como Pólya compreendia a heurística? Ele, no seu livro a Arte de Resolver Problemas comenta que a heurística era um certo ramo de estudo que não estava bem demarcado, ora considerado uma parte da lógica, ora da filosofia ou da psicologia, raramente apresentado em detalhe e que na época em que escreveu o livro estava praticamente esquecido. Em Pólya (1977), página 86, lê-se: *"O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção"*. Na página 87:

> Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta, tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática.

Pólya não tinha como objetivo fazer da resolução de problemas uma ciência nem uma teoria formalizada. Ele escreveu *"O presente livro é uma tentativa de reviver este estudo, de forma **moderna e modesta*** (pág. 87), se referindo a antecedentes de sistematização da heurística que aparecem nos comentários ao *Os Elementos* de Euclides e em trabalhos de Pappus, Descartes, Leinitz e Bernard Bolzan. (negrito da autora).

Ele era um professor de reconhecida experiência e maestria pedagógica, um matemático de primeira linha que abraçou a causa do bom ensino. Seu livro A Arte de Resolver Problemas é basicamente uma coleção de princípios e conselhos que abrangem um conjunto de operações mentais características e de grande utilidade no processo de resolução de problemas, fruto de uma profunda reflexão sobre a base da sua experiência como pesquisador e professor. Seu livro é descomplicado, ameno e útil. Não teve por objetivo formalizar uma teoria sobre a heurística.

A heurística não é aplicada exclusivamente na didática, mas em diversas áreas do conhecimento, por exemplo, amplamente na Inteligência Artificial. Em princípio, em qualquer área poderiam ser aplicados os métodos heurísticos, pois em todo trabalho científico ou técnico é preciso fazer descobertas, inventar. A heurística está estreitamente vinculada à Lógica e alguns a incluem na Filosofia. É difícil encontrar uma definição de heurística com o rigor e exatidão que um matemático gostaria, possivelmente não exista. Em diferentes áreas se dão algumas ideias a respeito. Em *What is a heuristic?* (ROMANYCIA; PELLETIER, 1985) são citadas definições de diferentes autores, catalogadas na bibliografia desse artigo. A seguir apresentamos algumas delas:

> ... heuristic methods, i.e., features that improve the systems problem-solving efficiency or range of capability. These range from *ad hoc* tricks for particular of problems to very general principles of efficient administration and resource allocation. [2] (MINSKY, 1963), pág.81.

> A heuristic is a rule of thumb, strategy, method, or trick useed to improve the efficiency of a system which tries to discover the solutions of complex problems. [3] (SLAGLE, 1963), pág.31.

> (Heuristic) is a set of informal reasoning rules (sometimes called heuristics) which were derived by an empirical, experimental method. ... Although the resultin programs might not be explainable in terms of some deep underlying theory, they perform adequately in most situations and therefore in a very practical sense they solve the problem. [4] (RAPHAEL, 1976), págs.237,238.

> A heuristic is a method that directs thinking along the paths most likel to lead to the goal, less promising avenues being left unexplored. [5] (BODEN, 1977), pág.347.

> Heuristic are criteria, methods, or principles for deciding which among several alternative courses of action promises to be the most effective in order to achieve some goal. They represent compromises between two requirements: the need to make such criteria simple and, at the same time, the desire to see them discriminate correctly between good and bac choices. [6] (PEARL, 1984), pág.31.

Na edição original em russo, em 1967, V. N. Puchkin profetizou:

> Foram tratados neste livro apenas alguns problemas da Heurística que, neste momento do desenvolvimento científico, são os mais atuais. Em face

[2] Tradução livre: ... métodos heurísticos, isto é, componentes essenciais que melhoram a eficiência da resolução de problemas ou a extensão de suas habilidades. Esta extensão de artifícios *ad hoc* vai de tipos particulares de problemas até princípios de administração eficiente e alocação de recursos.

[3] Tradução livre: Uma heurística é uma regra prática, estratégia, método ou artifício usado para melhorar a eficiência de um sistema que tenta descobrir as soluções de problemas complexos.

[4] Tradução livre: [Heurística] é um conjunto de regras de raciocínio informal (às vezes chamadas de heurísticas) que foram derivadas por um método empírico experimental. ... Embora os programas resultantes possam não ser explicáveis em termos de alguma teoria profunda subjacente, eles funcionam adequadamente na maioria das situações e, portanto, em um sentido muito prático, eles resolvem o problema

[5] Tradução livre: Uma heurística é um método que direciona o pensamento ao longo dos caminhos mais propensos a levar ao objetivo, avenidas menos promissoras que estavam sendo inexploradas.

[6] Tradução livre: Heurística são critérios, métodos ou princípios para decidir qual entre vários cursos alternativos de ação promete ser o mais eficaz para alcançar algum objetivo. Eles representam compromissos entre dois requisitos: a necessidade de tornar esses critérios simples e, ao mesmo tempo, o desejo de vê-los discriminar corretamente entre boas e más escolhas.

> disso, foi dada maior importância à correlação da Heurística e da Cibernética, bem como ao problema da automatização do intelecto. Não obstante, trata-se apenas de um dos aspectos da importância da Heurística para o futuro da humanidade. Na medida do futuro desenvolvimento de outros problemas técnico-científicos, crescerá também a importância de outros problemas da ciência do raciocínio, os quais ainda estão aguardando ser pesquisados. Nos dias que correm, somente se podem delinear os traços mais gerais de seus contornos e os ramos da sua elaboração. (PUCHKIN, 1976), pág.176.

3.2 O Método Heurístico na Solução de Problemas

Para darmos uma ideia sobre em que consiste a utilização do método heurístico na resolução de problemas no ensino da Matemática, retomaremos a identidade cuja prova foi proposta no exercício 2, página 24, $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$.

Frequentemente, os professores começam a explicar as transformações que conduzem à prova da identidade sem analisar o domínio das funções que nela aparecem. Em alguns textos, o conjunto interseção dos domínios das funções presentes numa expressão trigonométrica é denominado conjunto dos valores admissíveis das variáveis. Isto é importante, pois durante o processo de resolução poder-se-ia utilizar alguma transformação que não fosse válida para alguns dos valores admissíveis, ou outra que fizesse com que fosse eventualmente perdida alguma solução.

Desenvolveremos o processo de resolução do problema proposto seguindo o diálogo abaixo, onde **P** indica a pergunta ou comentário formulado pelo professor e **R** a resposta esperada dos alunos.

O diálogo está redigido em forma esquemática para transmitir as ideias. Na sala de aula são vários os fatores que determinam o conteúdo desse diálogo, como por exemplo, o nível dos conhecimentos dos alunos e seu real interesse em aprender, a experiência e maestria pedagógica do professor, o tempo disponível. Também é evidente na redação das respostas que é muito difícil que algum aluno responda com essa exatidão, pelo que, em boa medida, são uma dica para o professor tentar "extrair"o maior número de conclusões dos alunos e desenvolver neles a linguagem técnica. Persistência e criatividade são qualidades necessárias para ensinar utilizando o método heurístico.

P: Quais as funções trigonométricas que aparecem na identidade que devemos provar?

R:As funções seno e cosseno.

P: Qual o domínio dessas funções?

R: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

P: Existe alguma operação realizada com essas funções, como por exemplo, radiciação com índice par, ou aparece alguma fração em algum dos argumentos, etc. que implique na necessidade de restringir o domínio?

R: Não.

P: Então, qual é o conjunto dos valores admissíveis para a identidade?

R: $\mathbb{R}$.

A seguir, se recapitula o conceito de identidade, que já deve ser conhecido dos alunos neste momento do processo docente.

P: O que é uma identidade trigonométrica?

R: É uma igualdade entre duas expressões trigonométricas que é válida para todos os valores admissíveis das variáveis.

Para reforçar o entendimento da ideia, o professor pode recorrer a exemplos tomados da Álgebra elementar, que são mais simples. Por exemplo, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ é uma identidade, pois todo par de números $a, b \in \mathbb{R}$ cumpre a igualdade. Entretanto, $a + b = 0$ é uma equação, pois se cumpre somente para aqueles $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a = -b$, por exemplo, $a = 5$, $b = -5$. Outros pares, como $a = 1$, $b = 2$ não são raízes da equação.

É importante que o aluno identifique as estratégias básicas para resolver a categoria de problemas que se está trabalhando, no caso, a prova de identidades. Evidentemente, existem problemas atípicos, de maior complexidade, onde não é possível essa identificação preliminarmente.

P: Como é possível provar uma identidade?

R: Tomando um dos membros (esquerdo ou direito) e, mediante sucessivas operações, transformá-lo no outro membro.

P: Mas se não conseguirmos fazer isto, tem como aplicar um "plano B"?

R: Sim, poder-se-ia transformar ambos os membros, separadamente um do outro, até chegar à mesma expressão e aplicar a transitividade. Alguns acham isto menos elegante, mas é uma demonstração.

P: Qual dos membros tomamos para transformar no outro?

R: Uma ideia, não uma receita, é tomar o mais complexo. Assim, partimos de $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$.

Quando o aluno observa os expoentes 6 no seno e no cosseno geralmente fica sem ação. Não conhece nenhuma fórmula ou regra para abordar essa situação.

P: Qual a identidade trigonométrica mais conhecida e utilizada?

R: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

P: Então vamos tentar que apareça. A Álgebra elementar pode nos ajudar. Lembram como se decompõe em fatores a soma de cubos?

R: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

P: Vamos tentar substituir a e b por expressões trigonométricas convenientes, de modo que tenhamos o binômio $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$, como uma soma de cubos. Para isso nos perguntamos: quem deveriam ser a e b para que $a^3 = \operatorname{sen}^6 x$ e $b^3 = \cos^6 x$. Observem que $(a^2)^3 = a^6$!

R: Se $a = \operatorname{sen}^2 x$ e $b = \cos^2 x$, então $a^3 = \operatorname{sen}^6 x$ e $b^3 = \cos^6 x$.

P: E como ficaria o lado da direita $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ com essa substituição?

R: $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x)$.

P: Ótimo! Apareceu $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$, logo $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x) = \operatorname{sen}^4 x - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x$. Vejam que conseguimos reduzir os “expoentes incômodos” de 6 para 4. Podemos pensar em pedir ajuda a Álgebra de novo. Lembremos a fórmula $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. Com a experiência da transformação anterior e a observação da parcela $(a + b)^2$, qual seria a substituição para a e b?

R: Também $a = \operatorname{sen}^2 x$ e $b = \cos^2 x$.

P: Substituam e calculem.

R: $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. Então, $\operatorname{sen}^4 x - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$.

P: Já conseguimos eliminar os expoentes 4 e estamos perto do fim. Uma boa sugestão é examinar a expressão final à qual queremos chegar, $1 - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 2x$, e tentar extrair dela alguma dica. O que se destaca nela?

R: O seno do ângulo duplo e o seno elevado ao quadrado.

P: Foquemos primeiro a atenção no ângulo duplo. Qual a sua fórmula?

R: $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

P: Vejam que “apareceu” o produto $\operatorname{sen} x \cos x$. Como introduzir os quadrados?

R: À primeira vista, elevando ao quadrado na fórmula do seno do ângulo duplo: $\operatorname{sen}^2 2x = 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$.

P: Como continuar as transformações? Uma dica de caráter geral é ir detrás para a frente. Tomamos a expressão final e a desenvolvemos até chegar a $1 - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. Tentem!

R: $1 - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x) = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. Feito!

P: Observem que o “truque” de multiplicar $3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ por $\dfrac{4}{4} = 1$ (não altera) e associar convenientemente $3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x = \dfrac{3}{4}(4\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x)$, "deixando fora" $\dfrac{3}{4}$ e incorporando o fator 4 ao produto $\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x$, para termos o $\mathrm{sen}^2 2x$ pode ser algo difícil de perceber trabalhando diretamente. Agora reescrevam em "marcha ré", a partir de $1 - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x$ para chegar a $1 - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}^2 2x$.

R: $1 - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{4}{4}\cdot 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}(4\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}^2 2x.$

P: Isto que fizemos foi uma espécie de rascunho da demonstração da identidade. Para concluir, escrevam tudo em sequência, com as justificativas.

R:

$$\mathrm{sen}^6 x + \cos^6 x = (\,\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x)(\,\mathrm{sen}^4 x - \cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x + \cos^4 x) \tag{3.1}$$

$$= \,\mathrm{sen}^4 x - \cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x + \cos^4 x \tag{3.2}$$

$$= (\,\mathrm{sen}^4 x + \cos^4 x) - \cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x \tag{3.3}$$

$$= (1 - 2\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x) - \cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x \tag{3.4}$$

$$= 1 - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x \tag{3.5}$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(4\,\mathrm{sen} 2x\cos 2x) \tag{3.6}$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}^2 2x \tag{3.7}$$

Como $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, tem-se $\mathrm{sen}^6 x + \cos^6 x = \,\mathrm{sen}^4 x - \cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x + cos^4 x$.

Justificativas:

Igualdade 3.1: utilizando a identidade algébrica $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$, com a substituição $a = \,\mathrm{sen}^2 x$ e $b = \cos^2 x$.

Igualdade 3.2: $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Igualdade 3.3: agrupando convenientemente, graças às propriedades comutativa e associativa da soma.

Igualdade 3.4: utilizando a identidade algébrica $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, com a substituição $a = \,\mathrm{sen}^2 x$ e $b = \cos^2 x$.

Igualdade 3.5: reduzindo expressões semelhantes.

Igualdade 3.6: multiplicando a parcela $3\,\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x$ por $\frac{4}{4} = 1$ e agrupando convenientemente.

Igualdade 3.7: de $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x \cos x$, segue-se, elevando ao quadrado,

$$4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 2x.$$

Nas conclusões do exercício, o professor deve destacar o recurso da utilização de identidades algébricas elementares com substituições trigonométricas apropriadas, em particular as duas empregadas, e recomendar seu estudo para incorporar esse padrão de raciocínio. Utilizar a mesma observação, com o recurso de multiplicar e dividir por um mesmo número, o que não altera a expressão e permite agrupamentos convenientes.

Na sequência das aulas deverão ser resolvidos outros problemas onde se apliquem recursos similares. O professor deve também comentar que poderia ter sido utilizada, de início, a identidade algébrica $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$, com a mesma substituição $a = \operatorname{sen}^2 x$ e $b = \cos^2 x$. Mas, no caminho da descoberta da solução em elaboração conjunta, consideramos melhor como apresentado acima.

A seguir, mais um exemplo sobre a utilização do método heurístico na resolução de problemas, retirado do livro *Matemáticas Elementares de Elevada Dificuldade* (SHAJNO, 1965).

Exercício 3.2.1: Transforme a expressão

$$\operatorname{tg}30° + \operatorname{tg}40° + \operatorname{tg}50° + \operatorname{tg}60°$$

de forma que o resultado seja conveniente para tomar seu logaritmo.

(Fonte: Shajno, pág.47)

SOLUÇÃO:

P: O primeiro passo é entender o enunciado do problema (conforme pág.43, primeiro parágrafo do item 3.3.1.).

P: O que significa "ser conveniente para tomar seu logaritmo?"

P: Para entender a frase devemos lembrar as propriedades algébricas da função logarítmica.

R: Como $\log(\alpha \cdot \beta) = \log \alpha + \log \beta$, $\log\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \log \alpha - \log \beta$ e $\log \alpha^n = n \log \alpha$, podemos entender que ser conveniente para tomar seu logaritmo é transformar a expressão dada (soma de tangentes) para a forma de um produto, quociente ou potência, cujo logaritmo se insere nas fórmulas anteriores

P: Como transformar essa soma de tangentes num produto?

R: Existem fórmulas que transformam a soma ou diferença de duas parcelas de senos ou de cossenos num produto. Uma primeira ideia é transformar as tangentes no quociente seno/cosseno.

P: Mas, temos quatro parcelas, o que fazer?

R: Agrupar convenientemente em parcelas com dois somandos cada.

P: Qual seria o critério para efetuar o agrupamento?

P: $30° + 60° = 90°$ e $40° + 50° = 90°$. Os valores do seno e do cosseno do ângulo de $90°$ são notáveis. Então agrupamos:

$$(\operatorname{tg}30° + \operatorname{tg}60°) + (\operatorname{tg}40° + \operatorname{tg}50°),$$

transformamos em senos e cossenos e efetuamos as somas das frações em cada parêntese:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}30°}{\cos 30°} + \frac{\operatorname{sen}60°}{\cos 60°}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}40°}{\cos 40°} + \frac{\operatorname{sen}50°}{\cos 50°}\right) =$$
$$= \left(\frac{\operatorname{sen}30° \cos 60° + \cos 30° \operatorname{sen}60°}{\cos 30° \cdot \cos 60°}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}40° \cos 50° + \cos 40° \operatorname{sen}50°}{\cos 40° \cdot \cos 50°}\right).$$

P: Como simplificar as frações?

R: Utilizando a fórmula $\operatorname{sen}A \cos B + \cos A \operatorname{sen}B = \operatorname{sen}(A + B)$.

$$\frac{\operatorname{sen}90°}{\cos 30° \cdot \cos 60°} + \frac{\operatorname{sen}90°}{\cos 40° \cdot \cos 50°} = \frac{1}{\cos 30° \cdot \cos 60°} + \frac{1}{\cos 40° \cdot \cos 50°}.$$

P: Qual o próximo passo? Vamos dar a dica.

Como $60° = 90° - 30°$ e $\cos(90° - A) = \operatorname{sen}A$, tem-se que $\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \operatorname{sen}30°$. Então, o denominador da primeira fração fica $\cos 30° \cdot \operatorname{sen}30°$. Para o denominador da segunda fração, $\cos 50° = \cos(90° - 40°) = \operatorname{sen}40°$. Então, $\cos 40° \cdot \cos 50° = \cos 40° \cdot \operatorname{sen}40°$. Logo, continuando as transformações:

$$\frac{1}{\cos 30° \cdot \cos 60°} + \frac{1}{\cos 40° \cdot \cos 50°} = \frac{1}{\cos 30° \cdot \operatorname{sen}30°} + \frac{1}{\cos 40° \cdot \operatorname{sen}40°}$$

P: Como transformar cada denominador numa única função trigonométrica?

R: Como $30 = \dfrac{60}{2}$ e $40 = \dfrac{80}{2}$, lembramos a fórmula do seno do ângulo duplo, $\operatorname{sen}2A = 2\operatorname{sen}A \cos A$. Então, $\cos 30° \operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}\operatorname{sen}60°$, $\dfrac{1}{\cos 30° \cdot \operatorname{sen}30°} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}60°}$. $\cos 40° \operatorname{sen}40° = \frac{1}{2}\operatorname{sen}80°$ e $\dfrac{1}{\cos 40° \cdot \operatorname{sen}40°} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}80°}$. Portanto,

$$\frac{1}{\cos 30° \cdot \operatorname{sen}30°} + \frac{1}{\cos 40° \cdot \operatorname{sen}40°} = \frac{2}{\operatorname{sen}60°} + \frac{2}{\operatorname{sen}80°} = \frac{2(\operatorname{sen}60° + \operatorname{sen}80°)}{\operatorname{sen}60° \cdot \operatorname{sen}80°}$$

P: Agora tentaremos transformar o numerador e o denominador, respectivamente, de modo a conter uma única função trigonométrica. No numerador aplicaremos a fórmula $\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\dfrac{(A+B)}{2} \cdot \cos\dfrac{(A-B)}{2}$, com $A = 80°$ e $B = 60°$. Assim o numerador fica $\operatorname{sen}(60° + 80°) = 4\operatorname{sen}70° \cdot \cos 10°$.

Vamos ao denominador: $\text{sen}60°.\text{sen}80°$. É possível transformar de modo que tenhamos o fator $\cos 10°$, aplicando a fórmula de redução $\text{sen}(90° - A) = \cos A$. Assim, $\text{sen}60° = \text{sen}(90° - 30°) = \cos 30°$ e $\text{sen}80° = \text{sen}(90° - 10°) = \cos 10°$. Então, $\text{sen}60° \cdot \text{sen}80° = \cos 30° \cdot \cos 10°$. Substituindo, obtemos

$$\frac{2(\text{sen}60° + \text{sen}80°)}{\text{sen}60° \cdot \text{sen}80°} = \frac{4\,\text{sen}70° \cdot \cos 10°}{\cos 30° \cdot \cos 10°} = \frac{4\,\text{sen}70°}{\cos 30°}$$

Assim, a soma das tangentes foi transformada numa divisão entre seno e cosseno. E ainda, se desejarmos que fique "mais bonito", só em cossenos,

$$\text{sen}70° = \text{sen}(90° - 20°) = \cos 20°.$$

Logo, $\dfrac{4\,\text{sen}70°}{\cos 30°} = \dfrac{4\cos 20°}{\cos 30°}$.

Esta expressão cumpre a propriedade de ser muito conveniente para tomar seu logaritmo, já que

$$\log\frac{4\cos 20°}{\cos 30°} = \log(4\cos 20°) - \log(\cos 30°) = \log 4 + \log(\cos 20°) - \log(\cos 30°).$$

É importante observar que, como os ângulos estão no primeiro quadrante, não há problema de termos logaritmos de números negativos.

Neste exercício foram trabalhadas:

1. A interpretação do enunciado do problema, que não expressa diretamente o que deve ser feito, como por exemplo, em "prove a identidade" ou "resolva a equação". O que significa que uma expressão seja conveniente para tomar seu logaritmo?

2. A análise de como agrupar convenientemente os termos de uma soma para procurar uma transformação conveniente.

3. A conveniência de transformar $\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

4. Aplicação da fórmula $\text{sen}A\cos B + \cos A\,\text{sen}B = \text{sen}(A + B)$.

5. Aplicação das fórmulas de redução ao primeiro quadrante, $\cos(90° - A) = \text{sen}A$ e $\text{sen}(90° - A) = \cos A$.

Exercício 3.2.2: Transforme a expressão de forma que o resultado seja conveniente para tomar seu logaritmo (SHAJNO, 1965), pág.47:

$\text{sen}^2(\alpha + \beta) - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$

P: Qual é o conjunto dos valores admissíveis da expressão?

R: $\mathbb{R}^2$ já que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

P: Observando que em todas as parcelas aparece a função seno elevada ao quadrado, lembramos as fórmulas das potências das funções trigonométricas e selecionamos

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Apliquemo-la às parcelas $\text{sen}^2\alpha$ e $\text{sen}^2\beta$. A primeira parcela, $\text{sen}^2(\alpha + \beta)$, pode ser transformada numa expressão também em cosseno, aplicando a identidade fundamental. Então, $\text{sen}^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta)$. Calculemos.

R: $\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ e $\text{sen}^2\beta = \dfrac{1 - \cos 2\beta}{2}$. Substituindo, obtemos

$$\text{sen}^2(\alpha + \beta) - sin^2\alpha - \text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2(\alpha + \beta) - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}.$$

P: Observem que para simplificar essa expressão, se agruparmos

$$1 - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}$$

e efetuarmos a soma, conseguiremos eliminar os números 1 nos numeradores. Efetuem e substituam:

R:

$$1 - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \frac{2 - 1 + \cos 2\alpha - 1 + \cos 2\beta}{2} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2},$$

logo, $\text{sen}^2(\alpha + \beta) - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta = -\cos^2(\alpha + \beta) + \dfrac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}$.

P: Lembrem que estamos procurando transformações para produtos. O numerador da fração é uma soma que poderia ser transformada em produto. Como?

R: Aplicando a fórmula $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2} \cdot \cos\dfrac{A-B}{2}$, tomando $A = 2\alpha$ e $B = 2\beta$.

P: Efetuem!

R: $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2\cos\dfrac{2\alpha + 2\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{2\alpha - 2\beta}{2} = 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$. Então,

$$-\cos^2(\alpha + \beta) + \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = -\cos^2(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

P: O próximo passo rumo à fatoração é evidente. Qual é?

R: Destacar $\cos(\alpha + \beta)$, que é fator comum.

$$-\cos^2(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

P: O próximo passo para a decomposição fatorial é evidente. Qual é?

R: Transformar $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ em produto, aplicando a fórmula

$$\cos A - \cos B = 2\,\text{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\text{sen}\frac{B-A}{2}.$$

Tomando $A=\alpha-\beta$ e $B=\alpha+\beta$, tem-se $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$. Logo,

$$-\cos^2(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=2\cos(\alpha+\beta)\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta.$$

Observação: Neste exercício foram trabalhadas:

1. A identidade fundamental: $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
2. A fórmula do quadrado do seno: $\text{sen}^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.
3. As fórmulas $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$ e $\cos A-\cos B=2\,\text{sen}\dfrac{A+B}{2}\cdot\text{sen}\dfrac{B-A}{2}$
4. A fórmula $\text{sen}A\cos B+\cos A\,\text{sen}B=\text{sen}(A+B)$.
5. Decomposição fatorial, destacando um fator comum.

3.3 As quatro etapas de Pólya na Resolução de Problemas

No nosso trabalho vamos apresentar algumas técnicas e métodos de solução de problemas de trigonometria. Para tanto, vamos inicialmente verificar alguns conceitos e tópicos que Pólya apresenta para tentar desenvolver nos estudantes a capacidade de conseguir, por meios próprios, atingir seu objetivo que é o de solucionar um problema matemático.

Pólya apresenta uma sequência de quatro fases que devem ser trabalhadas na abordagem de um problema a ser resolvido, quais sejam: 1. Compreensão do problema; 2. Estabelecimento de um plano; 3. Execução do plano; 4. Retrospecto.

O objetivo de Pólya quando escreveu a obra "A Arte de Resolver Problemas" foi o de discutir, além de como se resolve um problema, também a metodologia utilizada em cada forma de resolução, pois certamente para cada tipo de problema há mais de uma forma de se resolvê-lo. Ele pondera que não existem regras infalíveis, que levem à resolução de qualquer tipo de problemas, mas é possível que, através do estudo de alguns processos mentais envolvidos na resolução de problemas, como operações, passos específicos, se consiga formular, de um modo claro e bem ordenado, um roteiro que auxilie aos interessados em Matemática, de qualquer esfera acadêmica, a resolver os temidos problemas matemáticos.

Ele argumenta que uma das principais funções do professor é auxiliar seus alunos na medida certa. Sem exagero, pois se sua ajuda for excessiva restará pouco ou quase nada para os alunos fazerem. Por outro lado, se não oferecer nenhuma ajuda ou se esta for insuficiente, alguns provavelmente não serão capazes de alcançar êxito, outros conseguirão um pequeno progresso, o que poderá acarretar desânimo ou desinteresse. Afinal, uma das missões do professor é exatamente o contrário, estimular os alunos a gostarem de Matemática.

3.3.1 Compreensão do Problema

Entender o que o problema pede é essencial para que se encontre sua solução. Portanto, é fundamental que, para se resolver um problema, antes de tudo, se identifique suas partes principais, qual ou quais suas incógnitas, quais os dados que ele informa, e qual ou quais são as suas condicionantes.

É possível que, ao se deparar com um problema, desde que o mesmo tenha sido compreendido, surja logo uma suposição. Tal suposição, estando correta, deve ser utilizada. E mesmo que esteja errada, ajudará na busca de outra suposição, mais adequada. Portanto, não se deve abrir mão de todas as interpretações possíveis, pois mesmo que algumas estejam formuladas de forma incorreta, algum tipo de ajuda elas trarão ao estudo.

Nessa fase de compreensão do problema, quanto mais o estudante estiver familiarizado, quanto mais informações ele conseguir absorver do problema, mais facilidade, mais opções de resolução ele vai ter em mãos para resolvê-lo.

O estudante deverá ser incentivado a utilizar sua criatividade para formalizar o problema, traçando figuras que vão auxiliar na resolução. E mais, quando se tratar de problema geométrico, mesmo que não apareça uma figura logo no seu enunciado, certamente será de grande utilidade para auxiliar no desenvolvimento da solução. E mesmo quando não se tratar de problemas de Geometria, uma figura, um gráfico, um diagrama podem auxiliar na busca pela solução desses problemas.

A escolha da notação, que não provoque hesitação ou confusão, também é de suma importância para facilitar a resolução de um problema. A notação deve ser fácil de lembrar e, nunca, um mesmo símbolo deve denotar dois objetos distintos.

A condicionante, que pode ser considerada como a resultante de condições que devem ser observadas na resolução de um problema, pode ser entendida como uma limitadora, responsável por alguma restrição que se imputa ao problema. Ao se deparar com um problema, o estudante deve verificar se a condicionante apresentada no seu enunciado é suficiente para determinar a incógnita. Há casos em que a condicionante é redundante, ou seja, apresenta partes repetidas desnecessárias. Mais graves são os casos em que a condicionante é considerada contraditória, ou seja, existe incompatibilidade entre as partes que a formam, impedindo que a mesma seja satisfeita, não podendo ser utilizada na resolução do problema. Portanto, é imprescindível que o estudante entenda o enunciado do problema e verifique sua possibilidade de ser ou não resolvido.

Nos problemas de determinação, aqueles que têm por objetivo encontrar a incógnita, a condicionante relaciona essa tal incógnita aos respectivos dados do problema.

Dependendo da complexidade do problema, será necessário separar a condicionante em diversas partes, para que sejam estudadas, uma a uma, separadamente.

É essencial compreender o problema como um todo e, a partir daí, separar os dados ou informações que são primordiais para sua resolução. Assim, gradualmente vai se decompondo o problema em partes, algumas das quais poderão ser deixadas de lado por serem desnecessárias. Dependendo da complexidade do problema, o mesmo será decomposto em mais ou menos partes. Após sua decomposição, o problema poderá ser novamente consolidado, recombinando-se os elementos considerados essenciais.

O professor deve ter cuidado ao elaborar um novo problema ou escolher um problema já conhecido, pois o mesmo deve ser apresentado numa linguagem clara, seu enunciado deve ser bem entendido. Além disso, o problema deve apresentar certo grau de dificuldade, compatível com o nível de conhecimento dos alunos, pois se muito fácil causará desinteresse e se muito difícil poderá provocar desânimo.

3.3.2 Estabelecimento de um Plano

Nessa segunda etapa, deverá ser verificada a possibilidade de se elaborar um plano para a resolução do problema. Um primeiro passo pode ser, ao se deparar com um problema, buscar na memória se o mesmo, ou algum outro semelhante, já não foi resolvido anteriormente.

O estudante deverá verificar se, ele próprio, já o conhece ou se já resolveu algum outro problema correlato. Não existe um problema totalmente inédito, que não guarde nenhuma semelhança com outro que já tenha sido resolvido. Alguns apenas são mais bem elaborados que outros, ao inter-relacionarem conceitos, exigindo maior compreensão e raciocínio dos estudantes. Se o problema apresentado tem correlação com um problema que já se sabe como resolvê-lo, pode-se utilizar o método antes utilizado, ou até mesmo o resultado encontrado, para resolver o novo problema.

O objetivo fundamental da resolução de um problema é identificar e encontrar sua(s) incógnita(s). A partir da identificação da incógnita deve se buscar problemas já resolvidos que tenham a mesma incógnita ou outra semelhante, que auxiliarão no caminho a ser tomado para a resolução do problema, ou pelo menos, indicarão que direção tomar na busca da solução.

A introdução de elementos auxiliares pode facilitar na resolução de um problema. Quer seja uma incógnita auxiliar quando se tratar de um problema algébrico; uma linha auxiliar, para resolver um problema geométrico ou um teorema auxiliar para servir de embasamento na demonstração de um outro teorema.

Para se resolver um problema, é comum utilizar algum conceito que serviu para algum outro problema já resolvido, e a resolução será executada por analogia, generalização ou particularização.

Quando nos deparamos com um problema mais complexo, podemos tentar resolvê-lo a partir do método utilizado para a resolução de um problema análogo, de menor complexidade, que já tenha sido resolvido.

Por exemplo, ao compararmos um paralelogramo retângulo e um paralelepípedo retângulo, verificamos que há várias relações entre eles: os lados do paralelogramo retângulo são paralelos, dois a dois, e perpendiculares aos demais. Por outro lado, as faces do paralelepípedo retângulo são paralelas, duas a duas, e perpendiculares às demais.

Concluímos que existem as mesmas relações que os lados de um paralelogramo retângulo e as faces de um paralelepípedo retângulo guardam entre si.

Essa ideia pode ser utilizada na resolução de um problema de geometria espacial, partindo do mesmo raciocínio utilizado na resolução de um problema de geometria plana.

A analogia entre os dois problemas vai auxiliar na compreensão do seguinte problema: Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo, sendo conhecidas suas três dimensões, comprimento, largura e altura. Partindo do princípio de que os estudantes já conhecem o teorema de Pitágoras, aplicado à Geometria Plana, basta apresentar para eles a analogia entre um paralelogramo retângulo e um paralelepípedo retângulo, mostrando que a diagonal do paralelepípedo retângulo coincide com a diagonal do paralelogramo retângulo definido pelos lados opostos do paralelepípedo.

Outra ferramenta que pode ser utilizada é a reformulação do problema. Deve-se verificar se o problema pode ser reformulado, se há outra maneira mais clara, mais fácil de se entender o problema para então tentar solucioná-lo.

Em alguns casos, será mais viável procurar se há alguma ligação entre os dados informados e a incógnita. Encontrada essa ligação, pode-se optar por iniciar a busca da solução a partir da incógnita ou dos dados.

Um fator a ser considerado na elaboração de um plano para a resolução de um problema é verificar se a condicionante poderá ser satisfeita. Para os casos em que não houver essa possibilidade, deve-se verificar primeiro se será possível satisfazer uma parte da condicionante e, a partir dessa parte, tentar atender ao restante da condicionante. Às vezes um problema não oferece um caminho para se chegar à sua solução de forma imediata, então um problema auxiliar pode ser utilizado para se atingir o objetivo, que é o de solucionar o problema original. Para a escolha desse problema auxiliar é necessário um exercício mental que exige uma inteligência apurada.

Quando se estiver elaborando um plano para se resolver um problema, é conveniente identificar a posição final desejada. A partir dessa visualização, deve se retroceder para uma posição anterior, como se estivesse andando para trás, mas na realidade se aproximando mais da meta desejada que é a solução, pois a partir dessa identificação se consegue uma visão privilegiada do problema, facilitando a elaboração do plano.

Deve-se estimular o estudante a transformar a linguagem adotada na apresentação do problema em uma linguagem matemática, expressa através de fórmulas. Para problemas mais simples, o enunciado pode ser dividido em partes expressas em símbolos matemáticos diretamente. Para os casos mais complexos, pode ser que os dados, a incógnita e a condicionante não possam ser expressos em símbolos matemáticos de uma forma direta, sendo necessário reformulá-los de modo que se encontre a notação matemática cabível.

Um teste dimensional pode ser realizado para verificar fórmulas geométricas ou físicas, utilizadas na resolução do problema. Em uma fórmula, aplicando-se as dimensões a cada fator, verifica-se se o resultado implica na dimensão correspondente à grandeza expressa pela fórmula. Esse teste é um indicativo de que a fórmula utilizada está correta, mas não permite concluir se o resultado está certo ou errado.

Finalmente, se surgir alguma dificuldade para chegar à solução de um problema, deve-se voltar ao início e verificar se todos os dados foram utilizados, pois algum pode ter passado despercebido e, certamente, sua não utilização dificultou a tentativa de solucioná-lo.

3.3.3 Execução do Plano

Após ter compreendido o problema e ter sido elaborado um plano para sua resolução, chega-se à etapa de execução desse plano, que deverá ser colocado em prática verificando se cada passo está sendo executado corretamente, à medida que se avança, pois se algum erro for cometido em algum dos passos, é preferível que seja detectado logo, para que não se desperdice tempo nem esforço, evitando, também, que surja desinteresse ou apatia, o que não é desejável.

Quando se vai executar o plano estabelecido, ou seja, quando se vai resolver tentar o problema, quanto mais complexo ele for, mais persistência será necessária para se obter sucesso na sua resolução. Também será necessário que se tenha esperança, para não desistir aos obstáculos existentes no caminho das tentativas de solução.

É interessante a observação de Pólya de que há a possibilidade de ser mais fácil resolver um problema mais complexo, que exija a resposta a muitas perguntas, do que um problema mais simples a que se deva responder uma única pergunta. Ele argumenta que é possível que haja mais probabilidade de sucesso quanto mais ambicioso for o plano elaborado para a resolução do problema.

E mais, se alguém não conseguir resolver o problema proposto, se se deparar com um problema que pareça não ter solução, pode-se lançar mão de um problema auxiliar ou procurar lembrar-se de um problema correlato que já tinha sido resolvido, o que pode facilitar a nova tentativa de solução.

Quando se está tentando resolver um problema, pode acontecer que não surja nenhuma ideia de imediato, e, após várias tentativas sem sucesso, será melhor deixá-lo de lado. Após algum tempo, volta-se ao problema e, quase sempre, o mesmo será visto com maior clareza, conseguindo-se chegar à solução.

Para se chegar à solução de um problema é necessário seguir passo a passo na sua busca. Isto se faz através do raciocínio heurístico, onde em cada etapa é avaliado o progresso e os resultados que vão sendo encontrados, na busca da solução final.

3.3.4 Retrospecto

Encontrada a solução do problema, algumas questões devem ser verificadas. Quando se tratar de problemas que apresentem resultados numéricos, a verificação pode ser efetuada por comparação ou por estimativa, pois, no mínimo, tem-se uma noção da ordem de grandeza de cada resultado. Para problemas literais, uma verificação bem simples é a dimensão do valor resultante. Se um problema pede para se calcular o volume de algo e o resultado apresenta um valor na unidade de área ou superfície, com certeza o resultado encontrado está errado.

Outra verificação que deve ser feita é se, após chegar à solução de um problema, haveria outro caminho que pudesse ter sido escolhido, que representasse maior facilidade para atingir o objetivo. Tal questionamento é interessante, pois se pode descobrir que existe uma maneira melhor de se resolver aquele problema. O professor deve incentivar os estudantes para descobrirem, eles próprios, modos diversos de solucionar um problema.

Finalmente, após resolver um problema, principalmente um de maior complexidade, deve-se verificar se o resultado, ou o método utilizado na solução poderá ser aproveitado em algum outro problema.

Vale salientar que, quando se chega à solução de um problema, ele passa a ser visto de uma forma mais completa e assim, pode ser visualizado de uma outra maneira. Havendo várias maneiras de conceber o problema, o mesmo pode ser reescrito e, após isso, ser resolvido de outra forma, utilizando melhor os elementos que compõem tal problema.

Há alguns termos utilizados quando se está envolvido na resolução de problemas que podem causar confusão. Um exemplo é o termo análise, que pode estar relacionado à concepção do plano para a resolução de um problema, mas que não pode ser confundido com o sentido utilizado nas expressões: análise química, análise matemática, análise lógica.

Em alguns problemas, a condicionante é decomposta em partes que, também serão chamadas de condicionante, mas não podem ser confundidas com a original. Idêntico raciocínio pode ser aplicado à hipótese, que também pode ser constituída por várias hipóteses.

Mais claro ainda ficam as expressões problema de determinação e problema de demonstração, que foram criadas para identificar melhor antigos termos (problema de determinação era chamado apenas de problema e problema de determinação, teorema). Um problema de determinação tem como objetivo encontrar sua incógnita, conhecidos seus dados e sua condicionante. Encontrar a solução de um problema de determinação equivale a identificar o elemento que satisfaça à condicionante deste problema. Mas costuma-se usar, indevidamente, como "trabalho dispendido em resolver o problema"e outras afirmações semelhantes.

Um problema de demonstração tem como objetivo mostrar que uma afirmativa é verdadeira. Em outros casos mostrar que uma determinada afirmativa é falsa. As principais partes de um problema de demonstração são a hipótese, o conjunto das premissas, das proposições assumidas como verdadeiras, e a conclusão do teorema que está sendo demonstrado, sua tese.

Alguns autores utilizam o termo raciocínio progressivo, no lugar de síntese, mas que não é utillizado na obra de Pólya. Raciocínio regressivo, antes utilizado no sentido de análise. Síntese, apesar de ter sido bem definido por PAPPUS, a obra de Pólya não utiliza pelo mesmo motivo de análise.

Alguns provérbios expressam perfeitamente os procedimentos adotados na resolução de problemas, ilustrando com inteligência tais procedimentos. Retiramos alguns apresentados em Pólya, dos quais tecemos alguns comentários:

Quem entende mal, mal responde: é essencial que o problema tenha sido bem entendido antes de qualquer coisa, pois ou não será resolvido ou será resolvido de forma incorreta.

Pense no fim antes de começar: ter em mente a meta a ser alcançada deve vir antes de tudo, pois se não houver clareza sobre o objetivo do problema, haverá certamente especulação, confusão e perda de tempo.

Querer é poder: quanto maior o desejo que se tem de resolver um problema, maior a chance de consegui-lo. E quanto maior a complexidade do problema maior deve ser a vontade de encará-lo, pois o ânimo facilita no processo de resolução, na medida em que aumenta o desafio de obter sucesso ao alcançar o objetivo final, chegar à solução do problema.

O sábio muda de opinião, o tolo nunca: Quando se elabora um plano de ação, para se alcançar um determinado objetivo, como é o caso de solucionar um problema matemático, deve-se estar preparado para um eventual fracasso e, portanto, sempre é recomendável ter um segundo plano, de reserva.

Não pensa bem quem não repensa. Alcançada a solução, a mesma deverá ser reexaminada, para que se consiga outra verificação do resultado, o que será de grande importância, pois sempre é preferível ter duas confirmações que uma única.

Pólya enfatiza que os provérbios relativos à solução de problemas são inúmeros, embora a maioria sejam apenas variações dos por ele citados, mas ilustram, de forma significativa e interessante as etapas percorridas na resolução de um problema.

4 ALGUNS TÓPICOS DE TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentamos alguns conteúdos essenciais de trigonometria, que é conveniente lembrar para facilitar ao leitor o entendimento da resolução dos problemas que serão mostrados. Para isso, incluimos um resumo, a título de revisão, com as regras fundamentais da trigonometria.

4.1 Sinais das funções trigonométricas notáveis

Para facilitar a resolução das equações trigonométricas é conveniente dispor das expressões que exprimem o conjunto de todas as soluções das equações que denominaremos notáveis, isto é, das equações do tipo: $\text{sen} x = \alpha$ ou $\cos x = \alpha$, com $\alpha = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg} x = \alpha$, com $\alpha = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \sqrt{3}$. Poderiam ser incluídas algumas outras, mas o conjunto considerado é suficiente para resolver a maior parte das equações que aparecem propostas nos livros.

Para compreender essas expressões gerais, que escreveremos na seção 4.1.2, é necessário conhecer as funções trigonométricas inversas, seu domínio e imagem e ter familiaridade com seu esboço gráfico. No próximo item, resumimos o domínio e imagem das funções trigonométricas inversas e apresentamos seu esboço gráfico (SPIEGEL, 1973). Nos gráficos mostrados os valores de y estão dados em radianos e a parte do gráfico em linha contínua corresponde ao valor principal da função.

4.1.1 Funções trigonométricas inversas

4.1.1.1 Função arco seno

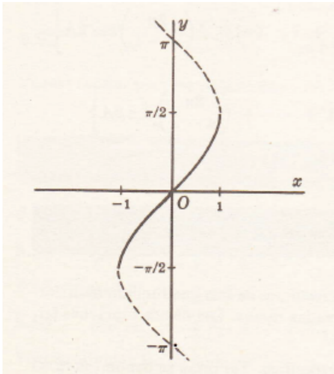
$$\text{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Para todo número real $x \in [-1, 1]$, existe um único $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $x = \text{sen} y$, que denota-se por $y = \text{arcsen} x$.

4.1.1.2 Função arco cosseno

$$\text{arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

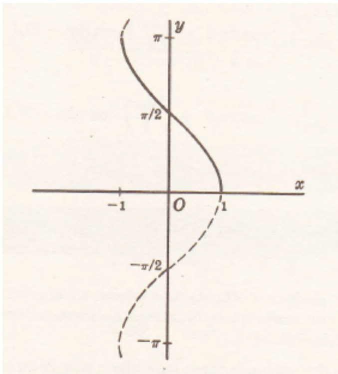
Figura 2 – Gráfico da função arco seno



Fonte: SPIEGEL, 1973.

Para todo número real $x \in [-1, 1]$, existe um único $y \in [0, \pi]$ tal que $x = \cos y$, que denota-se por $y = \arccos x$.

Figura 3 – Gráfico da função arco cosseno



Fonte: SPIEGEL, 1973.

4.1.1.3 Função arco tangente

$$\arccos : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

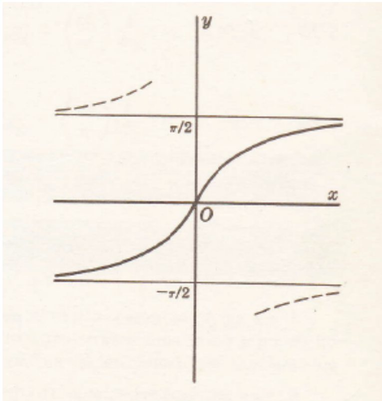
Para todo número real $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $x = \text{tg}y$, que denota-se por $y = \arctan x$.

4.1.1.4 Função arco cotangente

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$

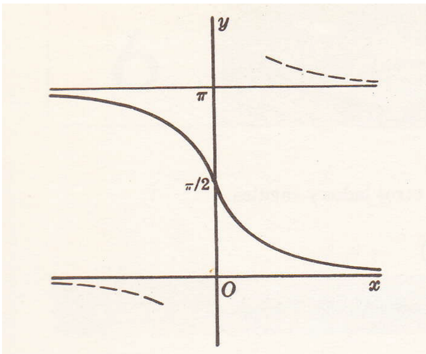
Para todo número real $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in (0, \pi)$ tal que $x = \text{cotg}y$, que denota-se por $y = \text{arccot}x$.

Figura 4 – Gráfico da função arco tangente



Fonte: SPIEGEL, 1973.

Figura 5 – Gráfico da função arco cotangente



Fonte: SPIEGEL, 1973.

4.1.1.5 Função arco secante

$$\text{arcsec} : (-\infty, -1) + (1, +\infty) \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Para todo número real $x \in (-\infty, -1) + (1, +\infty)$, existe um único $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $x = \sec y$, que denota-se por $y = \text{arcsec} x$.

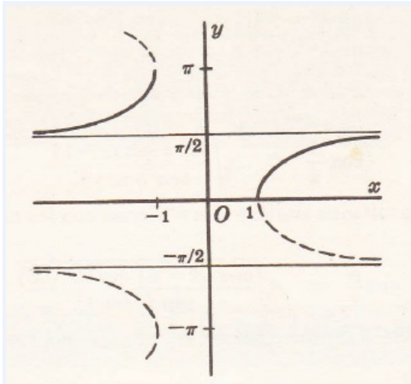
4.1.1.6 Função arco cosecante

$$\text{arccosec} : (-\infty, -1) + (1, +\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Para todo número real $x \in (-\infty, -1) + (1, +\infty)$, existe um único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $x =$ cosec$y$, que denota-se $y = \text{arccosec}(x)$.

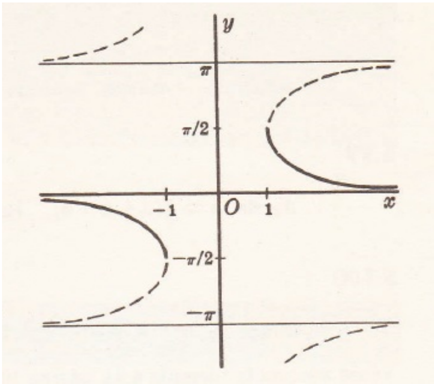
Observação: Em alguns textos se utiliza a notação sen^{-1} no lugar de arcsen; $\cos^{-1}$ no lugar de arccos; tg^{-1} por arctan, etc., para evitar eventuais confusões com a função

Figura 6 – Gráfico da função arco secante



Fonte: SPIEGEL, 1973.

Figura 7 – Gráfico da função arco cosecante



Fonte: SPIEGEL, 1973.

recíproca.

4.1.2 Expressões gerais das soluções das equações trigonométricas notáveis

Lidski et al. (1972), a partir da equação $\text{sen}y = x$, $-1 \leq x \leq 1$, denota por $\text{arcsen}x$ a expressão que representa a família de todos os ângulos y, medidos em radianos, tais que $\text{sen}y = x$, ou seja, $\text{arcsen}x = y \in \mathbb{R}|\,\text{sen}y = x$. Sentido análogo é dado a $\arccos x$, $\arctan x$ e arccot x. O autor resume as expressões gerais nas seguintes relações:

$$\text{arcsen}x = (-1)^k \,\text{arcsen}x + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\arccos x = \pm \arccos x - 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\arctan x = \arctan x + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{arccot}x = \text{arccot}x + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Estas fórmulas são facilmente compreensíveis a partir dos gráficos das funções trigonométricas inversas. Para facilitar sua aplicação, abaixo, resumimos sua instrumentação para as equações notáveis consideradas.

1. $\text{sen} x = 0 \Longrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z};$
2. $\text{sen} x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
3. $\text{sen} x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
4. $\text{sen} x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
5. $\text{sen} x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
6. $\text{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
7. $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
8. $\text{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
9. $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
10. $\text{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
11. $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = (-1)^k \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
12. $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
13. $\cos x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
14. $\cos x = -1 \Longrightarrow x = \pm\pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
15. $\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
16. $\cos x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z};$
17. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z};$
18. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z};$
19. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z};$

20. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z};$
21. $\text{tg}x = 0 \Longrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z};$
22. $\text{tg}x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
23. $\text{tg}x = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
24. $\text{tg}x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
25. $\text{tg}x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
26. $\text{tg}x = \sqrt{3} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
27. $\text{tg}x = -\sqrt{3} \Longrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.2 Alguns resultados gerais sobre funções periódicas

Como sabemos, as funções trigonométricas são periódicas, aspecto que as distingue das funções algébricas elementares. A periodicidade não é exclusiva das funções trigonométricas e tem importância capital no estudo de fenômenos onde ocorre repetição ou periodicidade, presentes em diversas áreas como, por exemplo, Matemática pura e aplicada, Física, Economia, Biologia, Engenharias e Química. Os movimentos periódicos, como a vibração de uma corda e de uma membrana, a transmissão de tensões e correntes alternadas, podem ser facilmente modelados por meio de funções periódicas.

A seguir apresentamos alguns resultados sobre funções periódicas tomados fundamentalmente de *Elementos de Trigonometria Plana* (SHARP, 1976).

Definição 1: Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função; $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tais que para todo $x \in D$, tem-se $x \pm k \in D$. A função f é periódica, com período k, se $f(x) = f(x+k)$, para todo $x \in D$. O número k é denominado o período da função f.

Teorema 1: Se a função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica com período k, então qualquer múltiplo de k também é período de f.

Demonstração:

Suponha que

$$f(x) = f(x+nk). \tag{4.1}$$

Por ser, por hipótese, f periódica, vale que:

$$f(x+nk) = f((x+nk)+k). \tag{4.2}$$

Então, segue de (4.2) que:

$$\begin{aligned} f(x+(n+1)k) &= f(x+nk+k) \\ &= f(x+nk) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

A última igualdade segue da hipótese de indução (4.1), como queríamos demonstrar.

Corolário: Toda função periódica possui um período positivo.

Demonstração: Basta tomar um múltiplo positivo de k.

O teorema anterior induz a formular a seguinte definição:

Definição 2: Chama-se período primário ou fundamental de uma função periódica ao menor período positivo, se existir. Se uma função periódica não possuir menor período positivo é chamada de caótica.

O seguinte teorema expressa o que acontece se multiplicarmos o argumento de uma função períodica por uma constante.

Teorema 2: Seja a função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $k \in \mathbb{R}$. Então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, tal que $cx \in D$, para todo $x \in D$, a função cx também é periódica com período $\frac{k}{c}$.

Demonstração:

Seja $x \in D$ qualquer. $f(cx) = f(cx+k) = f\left(c\left(x+\frac{k}{c}\right)\right)$. A primeira igualdade se justifica pela periodicidade de f. Fixando nossa atenção na igualdade $f(cx) = f\left(c\left(x+\frac{k}{c}\right)\right)$, vemos que ao substituir x por $x+\frac{k}{c}$, a imagem não muda. Isto significa que a função é periódica de período $\frac{k}{c}$.

Observação:

Aplicando o teorema acima podemos afirmar que $\operatorname{sen}(ax)$ e $\operatorname{sen}(bx)$ são períodicas de período $\frac{2\pi}{a}$ e $\frac{2\pi}{b}$, respectivamente.

Teorema 3: Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções periódicas com o mesmo período k. Então:

1. A função soma $(f \pm g) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período k;

2. A função produto $(f \cdot g) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período k;

3. A função quociente $\dfrac{f}{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$ é periódica de período k.

A demonstração é imediata:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = f(x+k) \pm g(x+k) = (f \pm g)(x+k)$;

2. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x+k) \cdot g(x+k) = (f \cdot g)(x+k)$;

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x+k)}{g(x+k)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x+k)$.

Observe que o teorema anterior nada afirma em relação aos períodos primários. Embora fosse $k \in \mathbb{R}$ período primário de ambas as funções, f e g, isso não significa necessariamente que k seja período primário de qualquer uma das funções dos incisos (1), (2) ou (3).

O teorema a seguir dá uma condição suficiente para que a soma de funções periódicas com períodos diferentes seja periódica.

Teorema 4: Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções periódicas com períodos T_1 e T_2, respectivamente. Se a razão entre esses períodos é um número racional, isto é, $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, então existe um período comum a ambas e a função soma $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica.

Demonstração:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica com período $T_1 \Longrightarrow f(x) = f(x + T_1)$, $\forall x \in D \subset \mathbb{R}$.

$g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica com período $T_2 \Longrightarrow f(x) = f(x + T_2)$, $\forall x \in D \subset \mathbb{R}$.

Somando membro a membro ambas as igualdades acima, obtemos:

$$f(x) + g(x) = f(x + T_1) + g(x + T_2).$$

Pelo teorema 1 sabemos que, se uma função tem período T, qualquer múltiplo kT, $k \in \mathbb{Z}^*$, também é um período da função. Portanto, se encontrarmos $p, q \in \mathbb{Z}^*$, tais que $pT_1 = qT_2$, estaria provado que $f + g$ é periódica, com período $T = pT_1 = qT_2$.
$\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}^*$, logo exite uma fração $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ que a representa, isto é, tal que $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q}$. Daí $qT_2 = pT_1$. Chamando $T = pT_1 = qT_2$ temos:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f\,(x+ = pT_1) + g\,(x+ = pT_2) = f(x + T) + g(x + T) = (f + g)(x + T)$.

Logo, está provado que $(f + g)$ é periódica.

Observação:

O resultado do teorema 4 vale para as funções $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$. As demonstrações seguem a mesma ideia.

No exemplo a seguir mostramos que a hipótese que exige que a razão entre os períodos seja um número racional não pode ser eliminada.

Proposição: Sejam as funções f e g de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinadas por $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $g(x) = \cos \pi x$. Prove que $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é periódica.

Se $(f + g)(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos \pi x$ fosse periódica, existiria $T \in \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(x) = (f + g)(x + T)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é, $\operatorname{sen} 2x + \cos \pi x = \operatorname{sen} 2(x + T) + \cos \pi(x + T) = \operatorname{sen}(2x + 2T) + \cos(\pi x + \pi T)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como a função seno é periódica com período 2π, para termos $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(2x + 2T)$ deve existir um $k_1 \in \mathbb{Z}^*$ tal que $2T = 2k_1\pi$.

Como a função cosseno é periódica com período 2π, para termos $\cos \pi x = \cos \pi(x + T)$ deve existir um $k_2 \in \mathbb{Z}^*$ tal que $\pi T = 2k_2\pi$.

De $2T = 2k_1\pi$ e $\pi T = 2k_2\pi$ segue-se que $\dfrac{2k_1\pi}{2} = \dfrac{2k_2\pi}{\pi}$, ou, $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{2}{\pi}$. Esta última igualdade é um absurdo, pois o lado da esquerda é um número racional e o da direita é um número irracional. Portanto, $(f + g)$ não é periódica.

5 COLETÂNEA DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentamos um conjunto de problemas de trigonometria resolvidos, de dificuldade acima da média, mostrando a aplicação do método heurístico no seu ensino. Os mesmos foram distribuídos de acordo com as seguintes classes:

- prova de identidades trigonométricas;
- resolução de equações trigonométricas;
- procura de máximos e mínimos de funções trigomométricas;
- resolução de desigualdades trigonométricas;
- funções trigonométricas inversas.

Em alguns problemas, detalhamos o diálogo sugerido entre o professor e os alunos. Em outros, a resolução é apresentada de forma mais resumida.

5.1 Identidades Trigonométricas

Apresentamos a seguir os problemas retirados dos livros *I I T Mathematics* (KHANNA; SHARMA, 2012) e *Prácticas para Resolver Problemas Matemáticos* (LITVINENKO; MORDKóVICH, 1989), abrangendo as identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Problema I.1. Provar a identidade

$$2(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) - 3(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

Antes de começar a prova da identidade deve ser determinado o conjunto dos valores admissíveis da variável x. Como o domínio das funções seno e cosseno é $\mathbb{R}$ e não aparece nenhuma operação que gere problemas, como por exemplo, uma divisão por zero ou alguma raiz par de um número negativo, concluímos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é o conjunto dos valores admissíveis da variável. Doravante, na redação das soluções dos exercícios, se o conjunto admissível for $\mathbb{R}$ não nos referiremos ao fato, mas recomendamos ao professor mencionar sempre a necessidade dessa análise.

Uma vez identificada a identidade fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, o próximo passo é induzir aos alunos uma forma de vinculá-la às expressões $(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x)$ e $(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)$. Declara-se a estratégia de transformar cada uma dessas duas expressões em termos com expoentes menores, encontrar para ambas as parcelas equivalentes que sejam passíveis de simplificação e, consequentemente, aparecer $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.

Como os próximos passos são de natureza algébrica convidamos os alunos a pensar sob essa ótica. Para isso, fazemos $\operatorname{sen}^2 x = a$ e $\cos^2 x = b$, o que vai facilitar o entendimento da operação algébrica. Assim, $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = a^2$, $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = b^2$. Para continuar, voltamos o foco para a álgebra elementar, lembrando que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e daí $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

Voltando às funções trigonométricas

$$(\operatorname{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

isto é,

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x. \tag{5.1}$$

Com uma ideia similar, transformamos a expressão $(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x)$.

Assim, $\operatorname{sen}^6 x = (\operatorname{sen}^2 x)^3 = a^3$ e $\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = b^3$. O surgimento das potências cúbicas nos convida a considerar o cubo da soma $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Então, $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3$.

Aplicando nas funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x$$

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1^3 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$$

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x. \tag{5.2}$$

Substituindo (5.1) e (5.2) no membro esquerdo da identidade que devemos demonstrar:

$$2(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) - 3(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) + 1 = 2(1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x) - 3(1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x) + 1$$

$$= 2 - 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 3 + 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 1 = 0.$$

Problema I.2. Provar que o valor da expressão abaixo não depende de α.

$$3\left[\operatorname{sen}^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{sen}^4(3\pi-\alpha)\right]-2\left[\operatorname{sen}^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}^6(5\pi-\alpha)\right]$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}$. Incentivamos os alunos a compreender que, para provar que o valor de uma expressão não depende de suas variáveis significa mostrar que a expressão simplificada é igual a uma constante. Portanto, o problema consiste em simplificar a expressão.

Uma das "dicas" conhecidas para resolver problemas é identificar analogias com problema conhecido já resolvido. Convidamos os estudantes a procurar a analogia entre este problema e o anterior. Deverá surgir a resposta de que ambos contêm duas parcelas parecidas: um colchete com a soma de duas potências do seno com expoente 4 e outro colchete com a soma de duas potências do seno com expoente 6.

Qual a dificuldade adicional em relação ao exercício anterior? Resposta: Os argumentos das funções trigonométricas são diferentes e com maior grau de complexidade.

Como poderíamos tentar eliminar essa complexidade nos argumentos? Resposta: Uma primeira observação é que as funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π, portanto, vamos utilizar as fórmulas de periodicidade: $\operatorname{sen}4(3\pi+\alpha)=\operatorname{sen}^4(2\pi+\pi+\alpha)=\operatorname{sen}^4(\pi+\alpha)$ e $sen^6(5\pi-\alpha)=\operatorname{sen}^6(4\pi+\pi-\alpha)=\operatorname{sen}^6(\pi-\alpha)$.

Aplicando estas transformações a expressão inicial fica igual a:

$$3\left[\operatorname{sen}^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{sen}^4(\pi-\alpha)\right]-2\left[\operatorname{sen}^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}^6(\pi-\alpha)\right]$$

Essa expressão pode ser simplificada mais uma vez, utilizando as fórmulas de redução ao primeiro quadrante. Observando a forma dos argumentos, determinamos que as fórmulas de redução convenientes são:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=-\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(\pi+\alpha)&=-\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(\pi-\alpha)&=\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$

Então a expressão se reduz a

$$3(\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha)-2(\cos^6\alpha+\operatorname{sen}^6\alpha).$$

Aplicando os resultados do exercício anterior:

$$\begin{aligned} 3(\cos^4\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha) - 2(\cos^6\alpha + \operatorname{sen}^6\alpha) &= 3(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha) - 2(1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha) \\ &= 3 - 6\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha - 2 + 6\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 1. \end{aligned}$$

Problema I.3. Provar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = 3(\operatorname{sen}x - \cos x)^4 + 6(\operatorname{sen}x + \cos x)^2 + 4(\operatorname{sen}^6 x - \cos^6 x)$$

é uma função constante.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O domínio de f é $\mathbb{R}$. Os alunos devem identificar o "velho amigo" $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$ com o qual já sabem como lidar. Aproveitando (5.2) no Problema I.1, sabemos que

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x. \tag{5.3}$$

Convidamos os alunos a compararem as expressões $(\operatorname{sen}x - \cos x)^4$ e $(\operatorname{sen}x + \cos x)^2$. A segunda, mais simples, é abordada primeiro. Pensando na identidade fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se induz a ideia de desenvolver o quadrado do binômio:

$$(\operatorname{sen}x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\operatorname{sen}x\cos x.$$

O resultado foi bom, pois apareceu a parcela $2\operatorname{sen}x\cos x$ e o quadrado de $\operatorname{sen}x\cos x$ é $\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$ que está na transformação de $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$ em 5.3.

A seguir, debatemos o que fazer com $(\operatorname{sen}x - \cos x)^4$. Uma primeira ideia pode ser expandir $(\operatorname{sen}x - \cos x)^4$, mas ficaria uma expressão complicada que não contribuiria com a simplificação pretendida. O que fazer? Se fosse $(\operatorname{sen}x - \cos x)^2$ seria fácil. Como trabalhar com esse expoente 4? Uma ajuda é raciocinar algebricamente sem as funções trigonométricas: qual a relação entre α^4 e α^2? $(\alpha^2)^2 = \alpha^4$! Assim,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}x - \cos x)^4 &= [(\operatorname{sen}x - \cos x)^2]^2 = [\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x]^2 \\ &= [1 - 2\operatorname{sen}x\cos x]^2 \\ &= 1 - 4\operatorname{sen}x\cos x + 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x. \end{aligned}$$

Substituindo em $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(\operatorname{sen}x - \cos x)^4 + 6(\operatorname{sen}x + \cos x)^2 + 4(\operatorname{sen}^6 x - \cos^6 x) \\ &= 3(1 - 4\operatorname{sen}x\cos x + 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x) + 6(1 + 2\operatorname{sen}x\cos x) + 4(1 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x) \\ &= 3 - 12\operatorname{sen}x\cos x + 12\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + 6 + 12\operatorname{sen}x\cos x + 4 - 12\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = 13 \end{aligned}$$

portanto, $f(x) = 13$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema I.4. Provar $\operatorname{sen}^8 x - \cos^8 x = (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}$. A dificuldade maior é, à primeira vista, o binômio $\operatorname{sen}^8 x - \cos^8 x$. Continuando a linha de raciocínio de trabalhar a parte algébrica da expressão, se analisa com os alunos a identificação de uma diferença de quadrados, já que $\operatorname{sen}^8 x = (\operatorname{sen}^4 x)^2$ e $\cos^8 x = (\cos^4 x)^2$. Então, podemos decompor em fatores $\operatorname{sen}^8 x - \cos^8 x = (\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x)(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)$. Qual a utilidade da fatoração? Observamos que $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x$ pode ser decomposto em fatores como uma diferença de quadrados e um dos fatores é a conhecida expressão $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. O outro fator $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ aparece no membro da direita e seria passível de simplificação. Também observar com os alunos que nos exercícios anteriores transformamos a expressão $(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)$ em $1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. Escrevendo essas ideias, de forma a dar corpo à demonstração:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^8 x - \cos^8 x &= \left(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x\right)\left(\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x\right) \\
&= \left(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right)\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) \\
&= \left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right).
\end{aligned}$$

O fator $(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)$ não deve ser cortado mecanicamente. Para realizar essa simplificação deve ser $(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) \neq 0$, pois estamos dividindo ambos os lados da igualdade por essa expressão. Então, resolvamos a equação $(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0$.

$$(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0 \Longleftrightarrow (\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$$

Logo $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$ ou $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$.

a) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, as soluções dessa equação são $x = \dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{5\pi}{4}$;

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, as soluções dessa equação são $x = \dfrac{3\pi}{4}$ e $x = \dfrac{7\pi}{4}$.

Pela periodicidade das funções seno e cosseno se estendem as soluções aos ângulos coterminais. Precisa-se conferir se os valores de x, que anulam o fator a ser cortado, satisfazem a identidade original.

Para $x = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen}^8 \frac{\pi}{4} - \cos^8 \frac{\pi}{4} = (\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4})(1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4}) \Longleftrightarrow$$

$$\iff 0 = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \iff 0 = 0 \cdot \frac{3}{4} \iff 0 = 0$$

Para $x = \dfrac{5\pi}{4}$, também fica satisfeita a identidade, sendo nulos ambos os membros. Agora podemos "cortar" com a consciência tranquila o termo $(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)$, resultando $(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = (1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$. Como já está provado no exercício 1 que $(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = (1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$, está provada a identidade.

Problema I.5. Provar a identidade $(3 + \cos 4\theta)\cos 2\theta = 4(cos^8\theta - \operatorname{sen}^8\theta)$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O fator $(\cos^8\theta - \operatorname{sen}^8\theta)$ nos remete à transformação realizada no Problema I.4. Isto nos sugere iniciarmos a prova a partir do lado direito da igualdade. Repetindo as transformações em 4, obtém-se

$$\begin{aligned}(\cos^8\theta - \operatorname{sen}^8\theta) &= (\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta)(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)\\ &= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)\\ &= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta).\end{aligned}$$

O binômio $\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta$ foi transformado, no exercício I.1, na expressão $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$. É conveniente repetir as transformações com os alunos para, mediante a repetição, consolidar a ideia desse recurso. Assim,

$$4(\cos^8\theta - \operatorname{sen}^8\theta) = 4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta).$$

Continuemos o trabalho, procurando transformar $4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$ no membro esquerdo $(3 + \cos\theta)\cos 2\theta$.

Analisar em diálogo com os alunos que, no membro esquerdo da identidade proposta, identificamos as funções do ângulo duplo $\cos 2\theta$ e $\cos 4\theta = \cos 2(2\theta)$. Temos à disposição as conhecidas identidades $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

Aparentemente, a mais indicada é $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$. Então, $4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta) = 4\cos 2\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$ Apareceu o fator $\cos 2\theta$!.

Resta transformar $(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$. Uma ideia é aplicar a fórmula $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Então, $2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{2}$. Substituindo fica

$$4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta) = 4\cos 2\theta\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{2}\right).$$

O que fazer com $\operatorname{sen}^2 2\theta$? Como nosso interesse é chegar a $(3 + \cos 4\theta)$, uma boa ideia é experimentar com a identidade $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$. Se no lugar de θ escrevemos 2θ, fica

$\cos 4\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2 2\theta$, ou $\text{sen}^2 2\theta = \dfrac{1-\cos 4\theta}{2}$. Substituindo, obtemos

$$4\cos 2\theta\left(1 - \frac{\text{sen}^2 2\theta}{2}\right) = 4\cos 2\theta\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right).$$

Continuamos executando as operações indicadas. Temos que

$$4\cos 2\theta\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) = \cos 2\theta[4-(1-\cos 4\theta)] = \cos 2\theta(3+\cos 4\theta),$$

que é o membro da esquerda da identidade a ser provada.

Resumindo os passos operados no membro da direita da identidade proposta, obtemos

$$4(\cos^8\theta - \text{sen}^8\theta) = 4(\cos^4\theta - \text{sen}^4\theta)(\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta)$$

$$= 4(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)(\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta) = 4(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta)$$

$$= 4(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(1 - 2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta) = 4\cos 2\theta\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) = \cos 2\theta(3+\cos 4\theta).$$

Problema I.6. Provar a identidade $(\,\text{tg}A + \text{cotg}A)^2 = \sec^2 A + \text{cosec}^2 A = \sec^2 A \cdot \text{cosec}^2 A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dado que o produto de funções trigonométricas recíprocas é 1 e que conhecemos as identidades notáveis $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$ e $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$, a ideia primária é desenvolver o quadrado do lado esquerdo da identidade.

$$(\,\text{tg}A + \text{cotg}A)^2 = \text{tg}^2 A + 2\,\text{tg}A\,\text{cotg}A + \text{cotg}^2 A = \text{tg}^2 A + 2 + \text{cotg}^2 A.$$

Para utilizar as identidades notáveis, decompomos:

$$(\,\text{tg}A + \text{cotg}A)^2 = \text{tg}^2 A + 1 + 1 + \text{cotg}^2 A = \sec^2 A + \text{cosec}^2 A$$

e fica provada a primeira identidade.

Resta provar a segunda igualdade. Uma sugestão é substituir $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ e $\text{cosec}A = \dfrac{1}{\text{sen}A}$. Assim,

$$\sec^2 A + \text{cosec}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\text{sen}^2 A} = \frac{\text{sen}^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A\cdot\text{sen}^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A\cdot\text{sen}^2 A} = \sec^2 A\cdot\text{cosec}^2 A,$$

como queríamos mostrar.

Problema I.7. Provar a identidade $(1 + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta)^2 + (\,\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)^2 = \sec^2\alpha\sec^2\beta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. A ideia inicial é expandir os quadrados dos binômios do membro esquerdo, que é aparentemente o mais complicado. Além disso, alguns alunos já vislumbrarão que as parcelas $2\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ e $-2\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ se "cortarão".

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)^2 + (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta)^2 &= 1 + 2\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha - 2\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\beta \\ &= 1 + \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta.\end{aligned}$$

Nesta etapa observamos que agrupando o termo $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)$, o mesmo poderá ser substituído pela identidade $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$. Então:

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)^2 + (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta)^2 &= (1+\mathrm{tg}^2\alpha) + \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta \\ &= \sec^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta.\end{aligned}$$

Um recurso muito utilizado é transformar as funções tangente, secante, etc. para expressões em senos e cossenos e fazer o trabalho algébrico de redução e simplificação. Assim,

$$\begin{aligned}\sec^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta &= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} + \frac{\mathrm{sen}^2\beta}{\cos^2\beta} \\ &= \frac{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} \\ &= \frac{\cos^2\beta + (\mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} \\ &= \frac{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta\,(\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} \\ &= \frac{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} \\ &= \sec^2\alpha\sec^2\beta.\end{aligned}$$

Problema I.8. Provar a identidade $\dfrac{\sec A - \mathrm{tg}A}{\sec A + \mathrm{tg}A} = 1 - 2\sec A\,\mathrm{tg}A + 2\,\mathrm{tg}^2A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Uma ideia razoável é utilizar a expressão da secante e da tangente em termos do seno e do cosseno e simplificar a expressão no lado esquerdo. Assim,

$$\frac{\sec A - \operatorname{tg} A}{\sec A + \operatorname{tg} A} = \frac{\dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}} = \frac{\dfrac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A}}{\dfrac{1 + \operatorname{sen} A}{\cos A}} = \frac{1 - \operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{sen} A}. \tag{5.4}$$

O que fazer com a fração $\dfrac{1 - \operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{sen} A}$, aparentemente tão diferente do membro da direita da identidade proposta, $1 - 2\sec A \operatorname{tg} A + 2\operatorname{tg}^2 A$?

Uma ação possível é multiplicar numerador e denominador por $1 - \operatorname{sen} A$, parecido com o processo algébrico de multiplicar pela expressão conjugada do denominador. No denominador ficaria $1 - \operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A$. Isso parece conveniente, pois no lado direito da identidade a provar há as funções secante e tangente, que ao transformá-las em senos e cossenos apresentam a função cosseno no seu denominador. Executemos:

$$\frac{1 - \operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{sen} A} = \frac{(1 - \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} A)}{(1 + \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} A)} = \frac{(1 - \operatorname{sen} A)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 A} = \frac{1 - 2\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}.$$

Agora, para retomar as funções $\sec A$, $\operatorname{tg} A$ e $\operatorname{tg}^2 A$, decompomos a fração acima numa soma de três frações:

$$\frac{1 - 2\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} - 2 \cdot \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} = \sec^2 A - 2\sec A \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}^2 A.$$

A última expressão ficou muito próxima da procurada $1 - 2\sec A \operatorname{tg} A + 2\operatorname{tg}^2 A$! O que falta? Encontrar o 1 e o coeficiente 2 da $\operatorname{tg} A$. Como conseguir isso? No nosso auxílio vem a identidade $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$. Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 A - 2\sec A \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}^2 A &= (1 + \operatorname{tg}^2 A) - 2\sec A \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}^2 A \\ &= 1 - 2\sec A \operatorname{tg} A + 2\operatorname{tg}^2 A. \end{aligned}$$

Está provada a identidade proposta.

Talvez alguns alunos se perguntem o que fazer se não aparecer a ideia de multiplicar e dividir por $1 - \operatorname{sen} A$? Um recurso é tentar transformar o membro da direita da identidade a ser provada na expressão 5.4 e, por transitividade, estaria provada a identidade proposta. Talvez, alguns considerem essa solução menos elegante. Mas, é uma solução!

$$\sec^2 A - 2\sec A \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} - 2 \cdot \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - 2\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen} A)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 A} = \frac{(1 - \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} A)}{(1 + \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} A)} = \frac{1 - \operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{sen} A}. \tag{5.5}$$

A identidade segue imediatamente de (5.4) e (5.5).

Problema I.9. Provar a identidade

$$\frac{1}{\sec x - \operatorname{tg} x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x}.$$

.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Reescrevendo a expressão a ser provada, devemos mostrar que:

$$\frac{1}{\sec x - \operatorname{tg} x} + \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \frac{2}{\cos x}.$$

Como os denominadores do lado esquerdo são a soma e a diferença de dois fatores, ao efetuar a soma dessas duas frações, aparecerá no denominador a diferença entre os quadrados dos dois termos, o que vai poder ser simplificado. Deste modo,

$$\frac{1}{\sec x - \operatorname{tg} x} + \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \frac{\sec x + \operatorname{tg} x + \sec x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\sec x}{1} = \frac{2}{\cos x}.$$

Assim, está provada a identidade.

Problema I.10. Provar a identidade

$$(\sec A + \operatorname{tg} A - 1)(\sec A - \operatorname{tg} A + 1) - 2\operatorname{tg} A = 0.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Mostramos aos alunos que no lado esquerdo da identidade temos o produto de dois termos, que pode ser transformado no produto da soma pela diferença:

$$\begin{aligned}
[\sec A + (\operatorname{tg} A - 1)] \cdot [\sec A - (\operatorname{tg} A - 1)] - 2\operatorname{tg} A &= \sec^2 A - (\operatorname{tg} A - 1)^2 - 2\operatorname{tg} A \\
&= \sec^2 A - \operatorname{tg} A + 2\operatorname{tg} A - 1 - 2\operatorname{tg} A \\
&= \sec^2 A - \operatorname{tg} A - 1 \\
&= \sec^2 A - (\operatorname{tg}^2 A + 1) \\
&= \sec^2 A - \sec^2 A = 0.
\end{aligned}$$

Assim, está provada a identidade.

Problema I.11. Se

$$(\sec A + \operatorname{tg} A) \cdot (\sec B + \operatorname{tg} B) \cdot (\sec C + \operatorname{tg} C) = (\sec A - \operatorname{tg} A) \cdot (\sec B - \operatorname{tg} B) \cdot (\sec C - \operatorname{tg} C)$$

mostre que cada lado da igualdade é igual a ± 1.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Mostramos aos alunos que de um lado temos o produto de três somas e do outro o produto de três diferenças, de parcelas iguais, se conseguirmos multiplicar um lado pelo outro da igualdade conseguimos o quadrado da diferença. Para facilitar os cálculos, sugerimos aos alunos chamar cada lado de x e y, e assim temos que $x = y$. Multiplicando por x ambos os lados, ficamos com $x^2 = xy$, então:

$$x^2 = [(\sec A + \operatorname{tg} A) \cdot (\sec B + \operatorname{tg} B) \cdot (\sec C + \operatorname{tg} C)]^2$$

$$xy = (\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A) \cdot (\sec^2 B - \operatorname{tg}^2 B) \cdot (\sec^2 C - \operatorname{tg}^2 C).$$

Como $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$,

$$x^2 = xy \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Assim,

$$x = (\sec A + \operatorname{tg} A) \cdot (\sec B + \operatorname{tg} B) \cdot (\sec C + \operatorname{tg} C) = \pm 1$$

e

$$y = (\sec A - \operatorname{tg} A) \cdot (\sec B - \operatorname{tg} B) \cdot (\sec C - \operatorname{tg} C) = \pm 1$$

.

Problema I.12. Se

$$(1 + \operatorname{sen} A) \cdot (1 + \operatorname{sen} B) \cdot (1 + \operatorname{sen} C) = (1 - \operatorname{sen} A) \cdot (1 - \operatorname{sen} B) \cdot (1 - \operatorname{sen} C)$$

mostre que cada lado é igual a $\pm \cos A \cos B \cos C$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

Analogamente ao caso anterior, $x = y \Rightarrow x^2 = xy$. Segue que

$$\begin{aligned} x^2 = xy &= (1 + \operatorname{sen} A) \cdot (1 - \operatorname{sen} A) \cdot (1 + \operatorname{sen} B) \cdot (1 - \operatorname{sen} B) \cdot (1 + \operatorname{sen} C) \cdot (1 - \operatorname{sen} C) \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 A) \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 B) \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 C) \\ &= \cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C. \end{aligned}$$

Logo,

$$x = \pm\sqrt{\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C} = \pm \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = y.$$

Problema I.13. Seja $f(\theta) = \text{sen}(\theta)(\text{sen}\theta + \text{sen}3\theta)$. Então $f(\theta)$

a) ≥ 0 só quando $\theta \geq 0$

b) $\leq 0 \; \forall \; \theta \in \Re$

c) $\geq 0 \; \forall \; \theta \in \Re$

d) ≤ 0 só quando $\theta \leq 0$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O domínio de $f(\theta)$ é $\mathbb{R}$. Lembramos aos alunos que o produto $\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$ aparece na expressão do cosseno de $\alpha \pm \beta$ e que da relação que liga funções de um argumento a funções de argumento duplo $\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, então vamos calcular $\cos(3\theta + \theta)$ e $\cos(3\theta + \theta)$:

$$\cos(3\theta + \theta) = \cos 4\theta = \cos 3\theta \cos \theta - \text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta \tag{5.6}$$

$$\cos(3\theta - \theta) = \cos 2\theta = \cos 3\theta \cos \theta + \text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta \tag{5.7}$$

Multiplicando (5.6) por (-1) e somando com (5.7), obtemos

$$\cos 2\theta - \cos 4\theta = \cos 3\theta \cos \theta + \text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta - \cos 3\theta \cos \theta + \text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta$$

$$\cos 2\theta - \cos 4\theta = 2\,\text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta$$

$$\text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 4\theta)$$

Substituindo na expressão de $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta\,\text{sen}3\theta \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 4\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left[(1 - \cos 2\theta) + \cos 2\theta - \cos 4\theta\right] \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta) \\ &= \frac{1}{2}\text{sen}^2 2\theta. \end{aligned}$$

A função $f(\theta)$ só vai assumir valores $\geq 0 \; \forall \; \theta \in \Re$. Assim, a resposta correta é a letra “c”.

Problema I.14. Se $t_n = \text{sen}^n\theta + \cos^n\theta$, então $\dfrac{t_3 - t_5}{t_1} = \dfrac{t_5 - t_7}{t_3}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para facilitar, vamos desenvolver os termos $\frac{t_3 - t_5}{t_1}$ e $\frac{t_5 - t_7}{t_3}$, separadamente, e provar que são iguais. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{t_3 - t_5}{t_1} &= \frac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta - (\operatorname{sen}^5\theta + \cos^5\theta)}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \cos^3\theta(1 - \cos^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta + \cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}.
\end{aligned}$$

Como o termo $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta \neq 0$, pode ser efetuada a simplificação, resultando em:

$$\frac{t_3 - t_5}{t_1} = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta.$$

$$\begin{aligned}
\frac{t_5 - t_7}{t_3} &= \frac{\operatorname{sen}^5\theta + \cos^5\theta - (\operatorname{sen}^7\theta + \cos^7\theta)}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^5\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \cos^5\theta(1 - \cos^2\theta)}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^5\theta\cos^2\theta + \cos^5\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta(\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta)}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}.
\end{aligned}$$

Também poderemos simplificar $\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta$, pois sempre será $\neq 0$, logo:

$$\frac{t_5 - t_7}{t_3} = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Chegamos aos resultados $\frac{t_3 - t_5}{t_1} = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ e $\frac{t_5 - t_7}{t_3} = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$. Logo, por transitividade, $\frac{t_3 - t_5}{t_1} = \frac{t_5 - t_7}{t_3}$.

Problema I.15. Comprovar a identidade $\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}A}{1 + \operatorname{sen}A}} = \sec A - \operatorname{tg}A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Primeiramente, devemos chamar a atenção dos alunos para o fato de que a identidade a ser comprovada só será válida quando $1 + \operatorname{sen} A \neq 0$, ou seja, $\operatorname{sen} A \neq -1$. Mas isso já foi determinado pela restrição definida para o domínio.

Os termos do radicando precisam ser transformados, para que se possa eliminar a raiz quadrada:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}A}{1+\operatorname{sen}A}} &= \sqrt{\frac{(1-\operatorname{sen}A)(1-\operatorname{sen}A)}{(1+\operatorname{sen}A)(1-\operatorname{sen}A)}} = \sqrt{\frac{(1-\operatorname{sen}A)^2}{1-\operatorname{sen}^2 A}} = \sqrt{\frac{(1-\operatorname{sen}A)^2}{\cos^2 A}} \\ &= \frac{1-\operatorname{sen}A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} = \sec A - \operatorname{tg}A,\end{aligned}$$

ficando comprovada a identidade para $\operatorname{sen}A \neq -1$.

Problema I.16. Comprovar a identidade $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec}A + \operatorname{cotg}A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Analogamente ao problema anterior, será necessário que $\cos A \neq 1$, já determinado na restrição do domínio. Transformando os termos do radicando para que se possa eliminar a raiz quadrada, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} &= \sqrt{\frac{(1+\cos A)(1+\cos A)}{(1-\cos A)(1+\cos A)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\operatorname{sen}^2 A}} \\ &= \frac{1+\cos A}{\operatorname{sen}A} = \frac{1}{\operatorname{sen}A} - \frac{\cos A}{\operatorname{sen}A} = \operatorname{cosec}A + \operatorname{cotg}A,\end{aligned}$$

ficando comprovada a identidade para $\cos A \neq 1$.

Problema I.17. Se $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, então prove que

$$\cos^{12}\theta + 3\cos^{10}\theta + 3\cos^8\theta + \cos^6\theta - 1 = 0.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O dado do problema equivale a $\operatorname{sen}\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = \cos^2\theta. \tag{5.8}$$

Reescrevendo a expressão que devemos provar, obtemos

$$\cos^6\theta(\cos^6\theta + 3\cos^4\theta + 3\cos^2\theta + 1) - 1 = 0.$$

Devemos lembrar aos alunos que a expressão entre parênteses é o cubo da soma entre $\cos^2\theta$ e 1, logo

$$\cos^6\theta(\cos^2\theta + 1)^3 - 1 = 0.$$

Substituindo (5.8), resulta,

$$\operatorname{sen}^3\theta(\operatorname{sen}\theta + 1)^3 - 1 = [\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + 1)]^3 - 1 = (\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^3 - 1 = 1^3 - 1 = 0,$$

ficando comprovada a identidade.

Problema I.18. Comprovar a identidade $\sec^4 A(1 - \operatorname{sen}^4 A) - 2\operatorname{tg}^2 A = 1.$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo a secante e a tangente pelas relações equivalentes com seno e cosseno:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^4 A}(1 - \operatorname{sen}^2 A)(1 + \operatorname{sen}^2 A) - 2\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} &= \frac{1}{\cos^4 A}\cos^2 A(1 + \operatorname{sen}^2 A) - 2\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}\\ &= \frac{1 + \operatorname{sen}^2 A - 2\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}\\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1,\end{aligned}$$

ficando comprovada a identidade, para $\cos A \neq 0$.

Problema I.19. Comprovar as igualdades $\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^4 A \sec^2 A = \operatorname{tg}^2 A \operatorname{sen}^2 A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Neste problema temos duas igualdades a serem demonstradas. Novamente, substituindo a secante e a tangente pelas relações equivalentes com seno e cosseno. Desse modo,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} - \operatorname{sen}^2 A &= \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A\cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\operatorname{sen}^2 A(1 - \cos^2 A)}{\cos^2 A}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 A\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\operatorname{sen}^4 A}{\cos^2 A} = \operatorname{sen}^4 A\sec^2 A,\end{aligned}$$

ficando comprovada a primeira igualdade, para $\cos A \neq 0$.

Por outro lado,

$$\operatorname{sen}^4 A \sec^2 A = \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 A \frac{1}{\cos^2 A} = \operatorname{sen}^2 A \operatorname{tg}^2 A,$$

ficando comprovada a segunda igualdade, para $\cos A \neq 0$.

Problema I.20. Comprovar a identidade $\dfrac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{tg} A} = \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} B$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $A, B \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Mais uma vez, substituindo a secante e a tangente pelas relações equivalentes com seno e cosseno, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{tg} A} &= \frac{\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} + \dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}}{\dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B} + \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}} = \frac{\dfrac{\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} B \cos A}} \\
&= \frac{\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A \cos B} \frac{\operatorname{sen} B \cos A}{\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} B \cos A}{\operatorname{sen} A \cos B} \\
&= \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} B,
\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen} A, \operatorname{sen} B, \cos A, \cos B \neq 0$.

Problema I.21. Comprovar a identidade $(\operatorname{sen} A + \cos A)(\operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno, temos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} A + \cos A)(\operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A) &= (\operatorname{sen} A + \cos A) \left(\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \right) \\
&= (\operatorname{sen} A + \cos A) \left(\frac{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A}{\cos A \operatorname{sen} A} \right) \\
&= (\operatorname{sen} A + \cos A) \cdot \frac{1}{\cos A \operatorname{sen} A} \\
&= \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A \operatorname{sen} A} + \frac{\cos A}{\cos A \operatorname{sen} A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\operatorname{sen} A} \\
&= \sec A + \operatorname{cosec} A,
\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen} A, \cos A \neq 0$.

Problema I.22. Comprovar a identidade $\dfrac{\cos A \operatorname{cosec} A - \operatorname{sen} A \sec A}{\cos A + \operatorname{sen} A} = \operatorname{cosec} A - \sec A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$. Substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos A \operatorname{cosec} A - \operatorname{sen} A \sec A}{\cos A + \operatorname{sen} A} &= \frac{\cos A \dfrac{1}{\operatorname{sen} A} - \operatorname{sen} A \dfrac{1}{\cos A}}{\cos A + \operatorname{sen} A} = \frac{\dfrac{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} A \cos A}}{\cos A + \operatorname{sen} A} \\
&= \frac{(\cos A - \operatorname{sen} A)(\cos A + \operatorname{sen} A)}{\operatorname{sen} A \cos A} \frac{1}{\cos A + \operatorname{sen} A} \\
&= \frac{\cos A - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A \cos A} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A \cos A} - \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A \cos A} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} A} - \frac{1}{\cos A} = \operatorname{cosec} A - \sec A,
\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen} A, \cos A \neq 0$ e $\operatorname{sen} A \neq -\cos A$.

Problema I.23. Comprovar a identidade $(1 + \operatorname{cotg} A - \operatorname{cosec} A)(1 + \operatorname{tg} A - \sec A) = 2$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno, temos

$$\begin{aligned}
(1 + \operatorname{cotg} A - \operatorname{cosec} A)(1 + \operatorname{tg} A - \sec A) &= \left(1 + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} - \frac{1}{\operatorname{sen} A}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A}\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen} A + \cos A - 1}{\operatorname{sen} A}\right)\left(\frac{\cos A + \operatorname{sen} A + 1}{\cos A}\right) \\
&= \frac{(\operatorname{sen} A + \cos A)^2 - 1}{\operatorname{sen} A \cos A} \\
&\frac{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A + 2 \operatorname{sen} A \cos A - 1}{\operatorname{sen} A \cos A} \\
&= \frac{1 + 2 \operatorname{sen} A \cos A - 1}{\operatorname{sen} A \cos A} = \frac{2 \operatorname{sen} A \cos A}{\operatorname{sen} A \cos A} = 2,
\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen} A, \cos A \neq 0$.

Problema I.24. Comprovar a identidade $(\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{sen}\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{cotg}\theta) = 1$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Reescrevendo a expressão, substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno, resulta que

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) =$$

$$= \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} = 1,$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta \neq 0$.

Problema I.25. Comprovar a identidade $\dfrac{\operatorname{tg}A + \sec A - 1}{\operatorname{tg}A - \sec A + 1} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}A}{\cos A}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando a identidade notável $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}A + \sec A - 1}{\operatorname{tg}A - \sec A + 1} &= \frac{\operatorname{tg}A + \sec A - (\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A)}{\operatorname{tg}A - \sec A + 1} \\
&= \frac{\operatorname{tg}A + \sec A - (\sec A + \operatorname{tg}A)(\sec A - \operatorname{tg}A)}{\operatorname{tg}A - \sec A + 1} \\
&= \frac{(\operatorname{tg}A - \sec A)(1 - \sec A + \operatorname{tg}A)}{\operatorname{tg}A - \sec A + 1} = \operatorname{tg}A + \sec A \\
&= \frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = \frac{1 + \operatorname{sen}A}{\cos A},
\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\cos A \neq 0$.

Problema I.26. Comprovar a identidade $\dfrac{\operatorname{cotg}^2\theta(\sec\theta - 1)}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \sec^2\theta\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \sec\theta}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para este problema sugerimos utilizar uma identidade notável, já que temos um termo elevado ao quadrado. Então, vamos multiplicar e dividir o lado esquerdo da igualdade por $\sec\theta + 1$, para surgir o termo secante ao quadrado. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{cotg}^2\theta(\sec\theta - 1)}{1+\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta+1} &= \frac{\operatorname{cotg}^2\theta(\sec^2\theta - 1)}{(1+\operatorname{sen}\theta)(\sec\theta+1)}\\ &= \frac{\operatorname{cotg}^2\theta\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\sec\theta)}.\end{aligned}$$

Lembrando que o produto de duas funções trigonométricas recíprocas é igual a 1, temos

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{cotg}^2\theta(\sec\theta - 1)}{1+\operatorname{sen}\theta} &= \frac{1}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\sec\theta)}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{1+\sec\theta}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}\\ &= \frac{1}{1+\sec\theta}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\sec\theta} = \sec^2\theta\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\sec\theta},\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen}\theta \neq \pm 1$, $\cos\theta \neq -1$ e $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta \neq 0$.

Problema I.27. Comprovar a identidade $\dfrac{\sec x + 1 - \operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x - \sec x + 1} = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando o mesmo raciocínio do problema anterior, multiplicamos e dividimos o lado esquerdo da identidade pelo termo conjugado do numerador, para obtermos a diferença dos quadrados. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\sec x + 1 - \operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x - \sec x + 1}\cdot\frac{\sec x + 1 + \operatorname{tg}x}{\sec x + 1 + \operatorname{tg}x} &= \frac{(\sec x + 1)^2 - \operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}x + 1)^2 - \sec^2 x}\\ &= \frac{\sec^2 x + 2\sec x + 1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg}x + 1 - \sec^2 x}\\ &= \frac{(\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x) + 2\sec x + 1}{(\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x) + 2\operatorname{tg}x + 1} = \frac{1 + 2\sec x + 1}{-1 + 2\operatorname{tg}x + 1}\\ &= \frac{2\sec x + 2}{2\operatorname{tg}x} = \frac{\sec x + 1}{\operatorname{tg}x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}\\ &= \frac{\dfrac{1+\cos x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} = \frac{1+\cos x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x},\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen}x, \cos x \neq 0$.

Problema I.28. Comprovar a identidade $\dfrac{\cos A}{1 - \operatorname{tg}A} + \dfrac{\operatorname{sen}A}{1 - \operatorname{cotg}A} = \operatorname{sen}A + \cos A$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}-\left\{\left\{\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\right\}$. Substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\cos A}{1-\operatorname{tg}A}+\frac{\operatorname{sen}A}{1-\operatorname{cotg}A} &= \frac{\cos A}{1-\dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A}}+\frac{\operatorname{sen}A}{1-\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen}A}} = \frac{\cos A}{\dfrac{\cos A-\operatorname{sen}A}{\cos A}}+\frac{\operatorname{sen}A}{\dfrac{\operatorname{sen}A-\cos A}{\operatorname{sen}A}}\\
&= \frac{\cos A}{\dfrac{\cos A-\operatorname{sen}A}{\cos A}}-\frac{\operatorname{sen}A}{\dfrac{\cos A-\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}A}} = \frac{\cos^2 A}{\cos A-\operatorname{sen}A}-\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos A-\operatorname{sen}A}\\
&= \frac{\cos^2 A-\operatorname{sen}^2 A}{\cos A-\operatorname{sen}A} = \frac{(\cos A-\operatorname{sen}A)(\cos A+\operatorname{sen}A)}{\cos A-\operatorname{sen}A} = \cos A+\operatorname{sen}A,
\end{aligned}$$

ficando comprovada a igualdade, para $\operatorname{sen}A,\cos A\neq 0$ e $\operatorname{sen}A\neq\cos A$.

Problema I.29. Comprovar a identidade $\dfrac{\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{cotg}A}+\dfrac{\operatorname{cotg}A}{1-\operatorname{tg}A}=\sec A\operatorname{cosec}A+1$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}-\left\{\left\{\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\right\}$. Substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{cotg}A}+\frac{\operatorname{cotg}A}{1-\operatorname{tg}A} &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A}}{1-\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen}A}}+\frac{\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen}A}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A}}{\dfrac{\operatorname{sen}A-\cos A}{\operatorname{sen}A}}+\frac{\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen}A}}{\dfrac{\cos A-\operatorname{sen}A}{\cos A}}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos A(\operatorname{sen}A-\cos A)}-\frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}A(\operatorname{sen}A-\cos A)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 A-\cos^3 A}{\operatorname{sen}A\cos A(\operatorname{sen}A-\cos A)}.
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão algébrica para a diferença entre os cubos

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2=(a-b)^3+3ab(a-b),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{cotg}A}+\frac{\operatorname{cotg}A}{1-\operatorname{tg}A} &= \frac{\operatorname{sen}^3 A-\cos^3 A}{\operatorname{sen}A\cos A(\operatorname{sen}A-\cos A)}\\
&= \frac{(\operatorname{sen}A-\cos A)^3+3\operatorname{sen}A\cos A(\operatorname{sen}A-\cos A)}{\operatorname{sen}A\cos A(\operatorname{sen}A-\cos A)}\\
&= \frac{(\operatorname{sen}A-\cos A)^2}{\operatorname{sen}A\cos A}+3 = \frac{\operatorname{sen}^2 A+\cos^2 A-2\operatorname{sen}A\cos A}{\operatorname{sen}A\cos A}+3\\
&= \frac{1-2\operatorname{sen}A\cos A+3\operatorname{sen}A\cos A}{\operatorname{sen}A\cos A} = \frac{1+\operatorname{sen}A\cos A}{\operatorname{sen}A\cos A}\\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}A\cos A}+1 = \operatorname{cosec}A\sec A+1,
\end{aligned}$$

comprovando a identidade, para $\operatorname{sen} A, \cos A \neq 0$ e $\operatorname{sen} A \neq \cos A$.

Problema I.30. Comprovar a identidade

$$(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha + 7.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Desenvolvendo os quadrados da soma e utilizando as relações entre as funções trigonométricas e seno e cosseno, obtemos

$$(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sec\alpha + \sec^2\alpha$$

$$= (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\operatorname{sen}\alpha\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + 2\cos\alpha\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{cosec}^2\alpha + \sec^2\alpha$$

$$= 1 + 2 + 2 + (1 + \operatorname{cotg}^2\alpha) + (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 7,$$

comprovando a identidade, para $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha \neq 0$.

Problema I.31. Comprovar a identidade

$$(1 + \operatorname{cotg} A + \operatorname{tg} A)(\operatorname{sen} A - \cos A) = \frac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \frac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Reescrevendo o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade, em termos de seno e cosseno, obtemos

$$(1 + \operatorname{cotg} A + \operatorname{tg} A)(\operatorname{sen} A - \cos A) = \left(\frac{\operatorname{sen} A\cos A + \cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} A\cos A}\right)(\operatorname{sen} A - \cos A)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 A\cos A + \cos^2 A\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^3 A - \cos^2 A\operatorname{sen} A - \cos^3 A - \operatorname{sen}^2 A\cos A}{\operatorname{sen} A\cos A}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 A - \cos^3 A}{\operatorname{sen} A\cos A} = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos A} - \frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{\cos A}\operatorname{sen}^2 A - \frac{1}{\operatorname{sen} A}\cos^2 A = \frac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \frac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A},$$

comprovando a identidade, desde que $\operatorname{sen} A, \cos A \neq 0$.

Problema I.32. Comprovar a identidade

$$(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A) = \operatorname{tg} A\sec A - \operatorname{cotg} A\operatorname{cosec} A.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno, resulta que

$$\begin{aligned}(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A) &= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\operatorname{sen} A}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\right)\\ &= \frac{(\operatorname{sen} A - \cos A)(\operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A)}{\operatorname{sen} A \cos A}.\end{aligned}$$

Utilizando a relação encontrada no problema anterior, temos que

$$(\operatorname{sen} A - \cos A)(\operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) = \operatorname{sen}^3 A - \cos^3 A.$$

A identidade fica,

$$\begin{aligned}(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A) &= \frac{\operatorname{sen}^3 A - \cos^3 A}{\operatorname{sen} A \cos A} = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos A} - \frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen} A}\\ &= \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\operatorname{sen} A - \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\cos A\\ &= \operatorname{tg} A \operatorname{cosec} A - \operatorname{cotg} A \sec A,\end{aligned}$$

comprovando a identidade, para $\operatorname{sen} A, \cos A \neq 0$.

Problema I.33. Comprovar a identidade

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\theta(1 - \operatorname{tg}\theta) + 2\operatorname{sen}\theta\sec^2\theta}{(1 + \operatorname{tg}\theta)^2} = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta}.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$. Destacando no lado esquerdo da identidade $2\operatorname{sen}\theta$ as funções trigonométricas pelas relações com seno e cosseno:

$$\begin{aligned}\frac{2\operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\theta(1 - \operatorname{tg}\theta) + 2\operatorname{sen}\theta\sec^2\theta}{(1 + \operatorname{tg}\theta)^2} &= \frac{2\operatorname{sen}\theta\left[\operatorname{tg}\theta(1 - \operatorname{tg}\theta) + \sec^2\theta\right]}{(1 + \operatorname{tg}\theta)^2}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^2\theta + \sec^2\theta)}{(1 + \operatorname{tg}\theta)^2}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}\theta(1 + \operatorname{tg}\theta)}{(1 + \operatorname{tg}\theta)^2} = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta},\end{aligned}$$

comprovando a identidade, para $\cos A \neq 0$ e $\operatorname{sen} A \neq -\cos A$.

Problema I.34. Comprovar a identidade

$$(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cosec}\phi)^2 - (\operatorname{cotg}\phi + \sec\theta)^2 = 2\operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\phi(\operatorname{cosec}\theta + \sec\phi).$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\theta, \phi \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Desenvolvendo os quadrados da soma, e depois utilizando as identidades notáveis, obtemos:

$$(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cosec}\phi)^2 - (\operatorname{cotg}\phi + \sec\theta)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tg}^2\theta + 2\operatorname{cosec}\phi\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cosec}^2\phi - (\operatorname{cotg}^2\phi - 2\operatorname{cotg}\phi\sec\theta + \sec^2\theta)\\
&= (\operatorname{cosec}^2\phi - \operatorname{cotg}^2\phi) - (\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta) + 2\operatorname{cosec}\phi\operatorname{tg}\theta + 2\operatorname{cotg}\phi\sec\theta\\
&= 1 - 1 + 2\operatorname{cosec}\phi\operatorname{tg}\theta + 2\operatorname{cotg}\phi\sec\theta = 2\operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\phi\left(\frac{\operatorname{cosec}\phi}{\operatorname{cotg}\phi} + \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta}\right)\\
&= 2\operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\phi\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} + \frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = 2\operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\phi\left(\frac{1}{\cos\phi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\right)\\
&= 2\operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\phi(\operatorname{cosec}\theta + \sec\phi),
\end{aligned}$$

comprovando a identidade, desde que $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\phi$, $\operatorname{sen}\phi \neq 0$.

Problema I.35. Comprovar a identidade

$$\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}\right)^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

Os valores admissíveis são todos os números reais, menos aqueles que anulam $1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ e $1 + \cos\theta$. Desenvolvendo os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}\right)^2 &= \frac{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 - 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}\\
&= \frac{1 + \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{1 + \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}\\
&= \frac{2 + 2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}{2 + 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} = \frac{2(1 + \operatorname{sen}\theta) - 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}{2(1 + \operatorname{sen}\theta) + 2\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}\\
&= \frac{2(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - \cos\theta)}{2(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 + \cos\theta)} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta},
\end{aligned}$$

comprovando a identidade, para $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta \neq -1$.

Problema I.36. Se $\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = y$, então $\dfrac{1 - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$ também é y.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

Rearrumando a expressão que devemos provar, e multiplicando e dividindo pelo termo necessário para resultar numa diferença de quadrados no numerador, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} &= \frac{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta} = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2-\cos^2\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}\\ &= \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2-(1-\operatorname{sen}\theta)^2}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)} = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2-(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}\\ &= \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)[1+\operatorname{sen}\theta-(1-\operatorname{sen}\theta)]}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)} = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta} = y,\end{aligned}$$

desde que $\operatorname{sen}\theta \neq -1$ e $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta \neq -1$.

Problema I.37. Comprovar a identidade

$$\left(\frac{1}{\sec^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\right)\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{2+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

Os valores admissíveis são todos os números reais, menos aqueles que anulam $\sec^2\alpha-\cos^2\alpha$, $\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$ e $2+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$. Desenvolvendo o lado esquerdo E da identidade, obtemos:

$$E = \left(\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha}+\frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha}\right)\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{\dfrac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{1}{\dfrac{1-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}\right)\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = \left(\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^4\alpha}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^4\alpha}\right)\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= \left[\frac{\cos^2\alpha}{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{(1-\operatorname{sen}^2\alpha)(1+\operatorname{sen}^2\alpha)}\right]\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= \left[\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha(1+\cos^2\alpha)}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha(1+\operatorname{sen}^2\alpha)}\right]\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= \frac{\cos^4\alpha}{1+\cos^2\alpha}+\frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{1+\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^4\alpha(1+\operatorname{sen}^2\alpha)+\operatorname{sen}^4\alpha(1+\cos^2\alpha)}{(1+\cos^2\alpha)(1+\operatorname{sen}^2\alpha)}\\ &= \frac{\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}\\ &= \frac{(\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha)+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)}{2+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}\end{aligned}$$

$$= \frac{(\cos^4\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha) + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{2 + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)^2 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{2 + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$
$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{2 + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha},$$

comprovando a identidade.

Problema I.38. Comprovar a identidade

$$(\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta)(\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg}\theta) = (\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta)(\sec\theta\operatorname{cosec}\theta - 2).$$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\theta, \phi \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Efetuando o produto, com as funções trigonométricas substituídas pelas relações com seno e cosseno:

$$(\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta)(\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg}\theta) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cdot \frac{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)$$
$$= \frac{1 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cdot (\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} - 2\right)(\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta)$$
$$= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} - 2\right)(\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta) = (\operatorname{cosec}\theta\sec\theta - 2)(\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta),$$

ficando comprovada a identidade, para $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta \neq 0$.

Problema I.39. Se $\operatorname{tg}A + \operatorname{sen}A = m$ e $\operatorname{tg}A - \operatorname{sen}A = n$,

então mostre que $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando a diferença dos quadrados:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = (\operatorname{tg}A + \operatorname{sen}A + \operatorname{tg}A - \operatorname{sen}A)(\operatorname{tg}A + \operatorname{sen}A - \operatorname{tg}A + \operatorname{sen}A)$$
$$= 2\operatorname{tg}A \cdot 2\operatorname{sen}A = 4\operatorname{tg}A\operatorname{sen}A.$$

Calculando $4\sqrt{mn}$:

$$\begin{aligned}4\sqrt{mn} &= 4\sqrt{(\,\mathrm{tg}A+\,\mathrm{sen}A)(\,\mathrm{tg}A-\,\mathrm{sen}A)} = 4\sqrt{\,\mathrm{tg}^2A-\,\mathrm{sen}^2A} = 4\sqrt{\frac{\mathrm{sen}^2A}{\cos^2 A}-\,\mathrm{sen}^2A}\\ &= 4\,\mathrm{sen}A\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A}-1} = 4\,\mathrm{sen}A\sqrt{\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}} = 4\,\mathrm{sen}A\sqrt{\frac{\mathrm{sen}^2A}{\cos^2 A}}\\ &= 4\,\mathrm{sen}A\sqrt{\,\mathrm{tg}^2A} = 4\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{tg}A,\end{aligned}$$

comprovando a igualdade, desde que $\cos A \neq 0$.

Problema I.40. Se $\cos x+\,\mathrm{sen}x = \sqrt{2}\cos x$, prove que $\cos x-\,\mathrm{sen}x = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}x$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $x \in \mathbb{R} \mid x \in [0,\pi]$. Segue da hipótese as seguintes equivalências:

$$(\cos x+\,\mathrm{sen}x)^2 = (\sqrt{2}\cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}x\cos x+\,\mathrm{sen}^2x = 2\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1+2\,\mathrm{sen}x\cos x = 2(1-\,\mathrm{sen}^2x)$$

$$\Leftrightarrow 1+2\,\mathrm{sen}x\cos x = 2-2\,\mathrm{sen}^2x$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}^2x = 1-2\,\mathrm{sen}x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}^2x = 1-2\,\mathrm{sen}x\cos x+cos^2x+\,\mathrm{sen}^2x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}^2x = (\cos x-\,\mathrm{sen}x)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,\mathrm{sen}x = \cos x-\,\mathrm{sen}x,$$

provando a identidade, para $x \in \mathbb{R} \mid x \in [0,\pi]$.

Problema I.41. Se $3\,\mathrm{sen}\theta+5\cos\theta = 5$, mostre que $5\,\mathrm{sen}\theta-3\cos\theta = \pm 3$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO: Usando a hipótese, temos:

$$(3\,\mathrm{sen}\theta+5\cos\theta)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 9\,\mathrm{sen}^2\theta+30\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta+25\cos^2\theta = 25$$

$$\Leftrightarrow 9(1-\cos^2\theta)+30\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta+25(1-\,\mathrm{sen}^2\theta) = 25$$

$$\Leftrightarrow 9 - 9\cos^2\theta + 30\,\text{sen}\theta\cos\theta + 25 - 25\,\text{sen}^2\theta = 25$$
$$\Leftrightarrow 9 = 9\cos^2\theta + 25\,\text{sen}^2\theta - 30\,\text{sen}\theta\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow (5\,\text{sen}\theta - 3\cos\theta)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 5\,\text{sen}\theta - 3\cos\theta = \pm 3,$$

provando a identidade.

Problema I.42. Se $a\cos\theta + b\,\text{sen}\theta = p$, $a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta = q$ mostre que $a^2 + b^2 = p^2 + q^2$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO: Calculando os valores de p^2 e q^2, temos:

$$p^2 = (a\cos\theta + b\,\text{sen}\theta)^2 = a^2\cos^2\theta + 2ab\,\text{sen}\theta\cos\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta$$
$$q^2 = (a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta)^2 = a^2\,\text{sen}^2\theta - 2ab\,\text{sen}\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta.$$

Então

$$p^2 + q^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta + a^2\,\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta$$
$$= a^2(\cos^2\theta + \,\text{sen}^2\theta) + b^2(\cos^2\theta + \,\text{sen}^2\theta) = a^2 + b^2,$$

provando a identidade.

Problema I.43. Se $a\cos\theta - b\,\text{sen}\theta = c$, mostre que $a\,\text{sen}\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO: Como $a\cos\theta - b\,\text{sen}\theta = c$, então:

$$(a\cos\theta - b\,\text{sen}\theta)^2 = c^2$$
$$a^2\cos^2\theta - 2ab\,\text{sen}\theta\cos\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta = c^2$$
$$a^2(1 - \,\text{sen}^2\theta) + b^2(1 - \cos^2\theta) - 2ab\,\text{sen}\theta\cos\theta = c^2$$
$$a^2 - a^2\,\text{sen}^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta - 2ab\,\text{sen}\theta\cos\theta = c^2$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = a^2\,\text{sen}^2\theta + 2ab\,\text{sen}\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = (a\,\text{sen}\theta + b\cos\theta)^2$$
$$\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = (a\,\text{sen}\theta + b\cos^2\theta),$$

provando a identidade.

Problema I.44. Se $\text{tg}^2\theta = (1 - e^2)$, prove que $\sec\theta + \,\text{tg}^3\theta\,\text{cosec}\theta = (2 - e^2)^{3/2}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando a hipótese:

$$\begin{aligned}
1 - e^2 &= \operatorname{tg}^2\theta \Longrightarrow \\
1 + 1 - e^2 &= 1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta \Longrightarrow \\
\left(2 - e^2\right)^{3/2} &= \left(\sec^2\theta\right)^{3/2} = \sec^3\theta \Longrightarrow \\
\left(2 - e^2\right)^{3/2} &= \sec\theta\sec^2\theta = \sec\theta\left(1 + \operatorname{tg}^2\theta\right) \Longrightarrow \\
\left(2 - e^2\right)^{3/2} &= \sec\theta + \sec\theta\operatorname{tg}^2\theta = \sec\theta + \frac{1}{\cos\theta}.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \sec\theta + \frac{1}{\cos\theta}.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}.\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} \Longrightarrow \\
\left(2 - e^2\right)^{3/2} &= \sec\theta + \operatorname{tg}^3\theta\operatorname{cosec}\theta,
\end{aligned}$$

provando a identidade, desde que $\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta \neq 0$.

Problema I.45. Se $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, determine os valores de $\operatorname{tg}\theta$, $\sec\theta$ e $\operatorname{cosec}\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando as relações trigonométricas, obtemos:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}} &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)^2}} \\
&= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2}{(m^2 + n^2)^2}}} \\
&= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cdot \frac{m^2 + n^2}{\sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4 - m^4 + 2m^2n^2 - n^4}} = \frac{m^2 - n^2}{\sqrt{4m^2n^2}} = \frac{m^2 - n^2}{2mn},
\end{aligned}$$

e

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{m^2 - n^2}{2mn} \cdot \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{m^2 + n^2}{2mn}.$$

Problema I.46. Se $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{2x(x + 1)}{2x + 1}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

Construindo um triângulo ABC, reto em B, então as medidas dos catetos serão: $AB = 2x+1$ e $BC = 2x(x+1)$. Calculando a hipotenusa AC:

$$AC = \sqrt{(2x+1)^2 + [2x(x+1)]^2} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1 + 4x^4 + 8x^3 + 4x^2}$$

$$= \sqrt{4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x^2 + 2x + 1)^2} = 2x^2 + 2x + 1.$$

Assim,

$$\text{sen}\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{2x(x+1)}{2x^2 + 2x + 1}$$

e

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{2x+1}{2x^2 + 2x + 1},$$

provando a identidade.

Problema I.47. Se $\cos\theta = \dfrac{2x}{1+x^2}$, encontre os valores de $\text{tg}\theta$ e $\text{cosec}\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Primeiro calculamos o valor de $\text{sen}\theta$, que vai ser necessário para o cálculo dos outros valores:

$$\text{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (2x)^2}{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2x^2 + x^4 - 4x^2}{1+x^2}} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{2x} = \frac{1-x^2}{2x}$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta} = \frac{1+x^2}{1-x^2},$$

desde que $x \neq \pm 1$ e $x \neq 0$.

Problema I.48. Se $\sec x = p + \dfrac{1}{4p}$, então $\sec x + \text{tg}x = 2p$ ou $\dfrac{1}{2p}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo o valor de $\sec x$ na identidade:

$$\begin{aligned}\sec x + \operatorname{tg} x = \sec x + \sqrt{\sec^2 x - 1} &= p + \frac{1}{4p} + \sqrt{\left(p + \frac{1}{4p}\right)^2 - 1}\\ &= p + \frac{1}{4p} + \sqrt{\left(\frac{4p^2+1}{4p}\right)^2 - 1} = p + \frac{1}{4p} + \sqrt{\frac{16p^4 + 8p^2 + 1 - 16p^2}{(4p)^2}}\\ &= p + \frac{1}{4p} + \frac{1}{4p}\sqrt{(4p^2-1)^2} = p + \frac{1}{4p} \pm \frac{1}{4p}(4p^2 - 1).\end{aligned}$$

Então,

$$\sec x + \operatorname{tg} x = p + \frac{1}{4p} + p - \frac{1}{4p} = 2p$$

ou,

$$\sec x + \operatorname{tg} x = p + \frac{1}{4p} - p + \frac{1}{4p} = \frac{2}{4p} = \frac{1}{2p}$$

Problema I.49. Se $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta = p$, obtenha os valores de $\sec\theta$, $\operatorname{tg}\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, em termos de p.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Partindo da identidade $\sec^2\theta + \operatorname{tg}^2\theta = 1$, obtemos:

$$(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)(\sec\theta - \operatorname{tg}\theta) = 1,$$

$$p(\sec\theta - \operatorname{tg}\theta) = 1,$$

e

$$\sec\theta - \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{p}.$$

Somando as expressões $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta$ e $\sec\theta - \operatorname{tg}\theta$, obtemos:

$$\sec\theta + \operatorname{tg}\theta + \sec\theta - \operatorname{tg}\theta = p + \frac{1}{p}$$

$$2\sec\theta = p + \frac{1}{p}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)$$

Subtraindo as expressões $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta$ e $\sec\theta - \operatorname{tg}\theta$, obtemos:

$$\sec\theta + \operatorname{tg}\theta - \sec\theta + \operatorname{tg}\theta = p - \frac{1}{p}$$

$$2\operatorname{tg}\theta = p - \frac{1}{p}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

Para calcular $\operatorname{sen}\theta$, a partir dos valores de $\operatorname{tg}\theta$ e $\sec\theta$:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$$

e, portanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)}{\frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)} = \frac{\frac{p^2-1}{p}}{\frac{p^2+1}{p}} = \frac{p^2-1}{p^2+1}.$$

Problema I.50. Se $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{p}{q}$, mostre que $\dfrac{p\operatorname{sen}\theta - q\cos\theta}{p\operatorname{sen}\theta + q\cos\theta} = \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dividindo o numerador e o denominador do lado esquerdo da igualdade por $\cos\theta$, o que é possível já que $\cos\theta \neq 0$, e utilizando o valor $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{p}{q}$, temos:

$$\frac{\frac{p\operatorname{sen}\theta - q\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{p\operatorname{sen}\theta + q\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{p\operatorname{tg}\theta - q}{p\operatorname{tg}\theta + q} = \frac{p\left(\frac{p}{q}\right) - q}{p\left(\frac{p}{q}\right) + q} = \frac{\frac{p^2}{q} - q}{\frac{p^2}{q} + q} = \frac{\frac{p^2-q^2}{q}}{\frac{p^2+q^2}{q}} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}.$$

Problema I.51. A equação $\sec^2\theta = \dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ é possível para quaisquer valores de $x, y \in \mathbb{R}$? Se não, encontre uma relação entre x e y para fazer que essa equação seja possível.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

A priori, $x \neq -y$ para que $x + y \neq 0$. Sabemos que $\sec^2\theta \geq 1$, então $\dfrac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1$. Mas,

$$\frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1 \Longrightarrow (x+y)^2 \leq 4xy \Longrightarrow (x+y)^2 - 4xy \leq 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + 2xy + u^2 - 4xy \leq 0 \Longrightarrow x^2 - 2xy + u^2 \leq 0 \Longrightarrow (x-y)^2 \leq 0.$$

Como o lado esquerdo da desigualdade $(x-y)^2 \leq 0$ é um quadrado, então não pode ser menor que zero, logo $(x-y)^2 = 0$. Ora,

$$(x-y)^2 = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y$$

Assim, a equação acima é válida $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x = y$, desde que $x, y \neq 0$.

Problema I.52. Se $m^2 + m'^2 + 2mm'\cos\theta = 1$, $n^2 + n'^2 + 2nn'\cos\theta = 1$ e

$mn + m'n' + (mn' + m'n)\cos\theta = 0$, prove que $m^2 + n^2 = \operatorname{cosec}^2\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO: Reescrevendo as duas primeiras equações,temos as seguintes igualdades:

$$m^2 + m'^2 + 2mm'\cos\theta + m^2\cos^2\theta - m^2\cos^2\theta = 1,$$

$$(m' + m\cos\theta)^2 + m^2 - m^2\cos^2\theta = 1,$$

$$(m' + m\cos\theta)^2 + m^2(1 - \cos^2\theta) = 1,$$

$$(m' + m\cos\theta)^2 + m^2\,\mathrm{sen}^2\theta = 1,$$

e

$$(m' + m\cos\theta)^2 = 1 - m^2\,\mathrm{sen}^2\theta. \tag{5.9}$$

Analogamente,

$$(n' + n\cos\theta)^2 = 1 - n^2\,\mathrm{sen}^2\theta. \tag{5.10}$$

Agora, calculando o produto:

$$(m' + m\cos\theta)(n' + n\cos\theta) = m'n' + mn'\cos\theta + m'n\cos\theta + mn\cos^2\theta.$$

Então,

$$(m' + m\cos\theta)(n' + n\cos\theta) = m'n' + (mn' + m'n)\cos\theta + mn\cos^2\theta. \tag{5.11}$$

Reescrevendo a terceira equação do problema:

$$(mn' + m'n)\cos\theta = -mn - m'n'. \tag{5.12}$$

Substituindo (5.12) em (5.11), obtemos:

$$(m' + m\cos\theta)(n' + n\cos\theta) = m'n' - mn - m'n' + mn\cos^2\theta = -mn + mn\cos^2\theta.$$

Entao,

$$(m' + m\cos\theta)(n' + n\cos\theta) - mn(1 - \cos^2\theta) = -mn\,\mathrm{sen}^2\theta. \tag{5.13}$$

Segue de (5.13) que:

$$(m' + m\cos\theta)^2(n' + n\cos\theta)^2 = (-mn\,\mathrm{sen}^2\theta)^2 \tag{5.14}$$

Substituindo (5.9) e (5.10) em (5.14):

$$(1 - m^2\,\mathrm{sen}^2\theta)(1 - n^2\,\mathrm{sen}^2\theta) = m^2n^2\,\mathrm{sen}^4\theta,$$

$$1 - m^2\,\mathrm{sen}^2\theta - n^2\,\mathrm{sen}^2\theta + m^2n^2\,\mathrm{sen}^4\theta = m^2n^2\,\mathrm{sen}^4\theta,$$

$$1 - (m^2 + n^2)\,\mathrm{sen}^2\theta = 0 \Longrightarrow (m^2 + n^2)\,\mathrm{sen}^2\theta = 1,$$

e

$$(m^2 + n^2) = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta} \Longrightarrow (m^2 + n^2) = \mathrm{cosec}^2\theta,$$

provando a identidade.

Problema I.53. Se $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{p}{q}$ e $\theta = 3\phi$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, prove que $\dfrac{p}{\mathrm{sen}\phi} - \dfrac{q}{\cos\phi} = 2\sqrt{p^2 + q^2}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 317)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\left\{\theta \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\} \bigcup \left\{\phi \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

Como $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{p}{q}$, então $\dfrac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{p}{q}$, ou seja, $\dfrac{\mathrm{sen}\theta}{p} = \dfrac{\cos\theta}{q}$.

Das relações do triângulo retângulo:

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \text{ e } \cos\theta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Então,

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{p} = \frac{\cos\theta}{q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sqrt{\frac{cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}{p^2 + q^2}}.$$

Assim, $p = \sqrt{p^2 + q^2}\,\mathrm{sen}\theta$ e $q = \sqrt{p^2 + q^2}\cos\theta$.

Substituindo na equação que devemos provar, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\mathrm{sen}\phi} - \frac{q}{\cos\phi} &= \sqrt{p^2 + q^2}\frac{\mathrm{sen}\theta}{\mathrm{sen}\phi} - \sqrt{p^2 + q^2}\frac{\cos\theta}{\cos\phi} = \sqrt{p^2 + q^2}\left(\frac{\mathrm{sen}\theta}{\mathrm{sen}\phi} - \frac{\cos\theta}{\cos\phi}\right) \\
&= \sqrt{p^2 + q^2}\left(\frac{\mathrm{sen}\theta\cos\phi - \cos\theta\,\mathrm{sen}\phi}{\mathrm{sen}\phi\cos\phi}\right) = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\theta - \phi)}{\mathrm{sen}\phi\cos\phi} \\
&= \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \frac{\mathrm{sen}(3\phi - \phi)}{\mathrm{sen}\phi\cos\phi}.
\end{aligned}$$

Mas, $\text{sen}\phi \cos\phi = \frac{1}{2}\,\text{sen}2\phi$,

$$\frac{p}{\text{sen}\phi} - \frac{q}{\cos\phi} = \sqrt{p^2+q^2}\cdot 2\frac{\text{sen}(2\phi)}{\text{sen}2\phi} = 2\sqrt{p^2+q^2},$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.54. Se $\dfrac{\text{sen}^4 x}{2} + \dfrac{\cos^4 x}{3} = \dfrac{1}{5}$, então:

a) $\text{tg}^2 x = \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{\text{sen}^8 x}{8} + \dfrac{\cos^8 x}{27} = \dfrac{1}{125}$

c) $\text{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{\text{sen}^8 x}{8} + \dfrac{\cos^8 x}{27} = \dfrac{2}{125}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 317)

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo a equação e utilizando a identidade fundamental $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$:

$$\frac{\text{sen}^4 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{3} = \frac{1}{5} \Longrightarrow \frac{3\,\text{sen}^4 x + 2\cos^4 x}{6} = \frac{1}{5} \Longrightarrow 3\,\text{sen}^4 x + 2\cos^4 x = \frac{6}{5}$$

$$\Longrightarrow 3\,\text{sen}^4 x + 2(\cos^2 x)^2 = \frac{6}{5} \Longrightarrow 3\,\text{sen}^4 x + 2(1-\text{sen}^2 x)^2 = \frac{6}{5}$$

$$\Longrightarrow 3\,\text{sen}^4 x + 2 - 4\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}^4 x = \frac{6}{5} \Longrightarrow 25\,\text{sen}^4 x - 20\,\text{sen}^2 x + 4 = 0 \Longrightarrow (5\,\text{sen}^2 x - 2)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 5\,\text{sen}^2 x - 2 = 0 \Longrightarrow 5\,\text{sen}^2 x = 2 \Longrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow (1-\cos^2 x) = \frac{2}{5} \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{5}$$

$$\Longrightarrow \text{tg}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a resposta correta é a letra "a".

Problema I.55. Prove que $\text{tg}1^\circ \cdot \text{tg}2^\circ \cdot \text{tg}3^\circ \cdots \text{tg}89^\circ = 1$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Aplicando a fórmula de redução $\text{tg}\theta = \text{cotg}\frac{\pi}{2} - \theta$, temos que:

$\text{tg}89° = \text{cotg}1°$, $\text{tg}88° = \text{cotg}2°$ ... $\text{tg}46° = \text{cotg}44°$, então o produto P fica:

$P = \text{tg}1°\,\text{tg}2° \cdots \text{tg}44°\,\text{tg}45°\,\text{cotg}44°\,\text{cotg}43° \cdots \text{cotg}2°\,\text{cotg}1°$, ou seja,

$P = (\text{tg}1°\,\text{cotg}1°)(\text{tg}2°\,\text{cotg}2°) \cdots (\text{tg}44°\,\text{cotg}44°)\,\text{tg}45° = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \text{tg}45° = 1$, ficando provada a igualdade.

Problema I.56. Prove que $\text{sen}^2 5° + \text{sen}^2 10° + \text{sen}^2 15° + \cdots + \text{sen}^2 85° + \text{sen}^2 90° = 9\frac{1}{2}$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Esta soma tem 18 parcelas, sendo 16 delas entre duplas de ângulos complementares e as parcelas $\text{sen}^2 45°$ e $\text{sen}^2 90°$.

Como $\text{sen}90° - \alpha = \cos\alpha$, $\text{sen}^2 5° + \text{sen}^2 85° = \text{sen}^2 5° + \cos^2 5° = 1$, temos na soma S acima 8 somas iguais a 1 mais $\text{sen}^2 45°$ e $\text{sen}^2 90°$, conforme mostrado abaixo:

$$S = (\text{sen}^2 5° + \text{sen}^2 85°) + (\text{sen}^2 10° + \text{sen}^2 80°) + \cdots (\text{sen}^2 40° + \text{sen}^2 50°) + \text{sen}^2 45° + \text{sen}^2 90°$$
$$= 8 \cdot 1 + \text{sen}^2 45° + \text{sen}^2 90° = 8 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 9 + \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2},$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.57. Prove que $\text{cotg}\theta - \text{cotg}2\theta = \text{cosec}2\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo cotangente e cossecante pelas relações com seno e cosseno:

$$\text{cotg}\theta - \text{cotg}2\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta\,\text{sen}2\theta - \cos 2\theta\,\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta\,\text{sen}2\theta} = \frac{\text{sen}(2\theta - \theta)}{\text{sen}\theta\,\text{sen}2\theta} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta\,\text{sen}2\theta}$$
$$= \frac{1}{\text{sen}2\theta} = \text{cosec}2\theta,$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.58. Prove que $\text{tg}70° - \text{tg}20° = 2\,\text{tg}50°$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Aplicando a tangente da soma, temos:

$$\text{tg}70^\circ = \text{tg}(50^\circ + 20^\circ) = \frac{\text{tg}50^\circ + \text{tg}20^\circ}{1 - \text{tg}50^\circ\,\text{tg}20^\circ}.$$

Segue que,

$$\text{tg}70^\circ(1 - \text{tg}50^\circ\,\text{tg}20^\circ) = \text{tg}50^\circ + \text{tg}20^\circ,$$

ou seja,

$$\text{tg}70^\circ - \text{tg}70^\circ\,\text{tg}50^\circ\,\text{tg}20^\circ = \text{tg}50^\circ + \text{tg}20^\circ.$$

Como $\text{tg}70^\circ = \text{cotg}20^\circ$, temos as igualdades,

$$\text{tg}70^\circ - \text{tg}50^\circ\,\text{tg}20^\circ\,\text{cotg}20^\circ = \text{tg}50^\circ + \text{tg}20^\circ,$$

$$\text{tg}70^\circ - \text{tg}50^\circ = \text{tg}50^\circ + \text{tg}20^\circ,$$

$$\text{tg}70^\circ - \text{tg}20^\circ = 2\,\text{tg}50^\circ,$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.59. Prove que $\dfrac{\text{sen}(A-B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B} + \dfrac{\text{sen}(B-C)}{\text{sen}B\,\text{sen}C} + \dfrac{\text{sen}(C-A)}{\text{sen}C\,\text{sen}A} = 0.$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $A, B, C, D \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Reescrevendo a expressão inicial, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}(A-B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B} &= -\left(\frac{\text{sen}(B-C)}{\text{sen}B\,\text{sen}C} + \frac{\text{sen}(C-A)}{\text{sen}C\,\text{sen}A}\right)\\
&= -\left(\frac{\text{sen}B\cos C - \cos B\,\text{sen}C}{\text{sen}B\,\text{sen}C} + \frac{\text{sen}C\cos A - \cos C\,\text{sen}A}{\text{sen}C\,\text{sen}A}\right)\\
&= \frac{-\text{sen}A\,\text{sen}B\cos C + \text{sen}A\cos B\,\text{sen}C - \cos A\,\text{sen}B\,\text{sen}C + \text{sen}A\,\text{sen}B\cos C}{\text{sen}A\,\text{sen}B\,\text{sen}C}\\
&= \frac{\text{sen}C(\text{sen}A\cos B - \cos A\,\text{sen}B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B\,\text{sen}C} = \frac{\text{sen}A\cos B}{\text{sen}A\,\text{sen}B} - \frac{\cos A\,\text{sen}B}{\text{sen}A\,\text{sen}B}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\text{sen}(A-B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B} = \frac{\cos B}{\text{sen}B} - \frac{\cos A}{\text{sen}A} = \text{cotg}B - \text{cotg}A.$$

Verificamos que cada parcela do lado esquerdo da igualdade pode ser escrita como da forma encontrada para a primeira, ou seja, como a diferença entre as cotangentes. Assim,

$$\frac{\text{sen}(A-B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B} + \frac{\text{sen}(B-C)}{\text{sen}B\,\text{sen}C} + \frac{\text{sen}(C-A)}{\text{sen}C\,\text{sen}A} = \text{cotg}B - \text{cotg}A + \text{cotg}C - \text{cotg}B + \text{cotg}A - \text{cotg}C = 0,$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.60. Prove que $\dfrac{\text{sen}(A-B)}{\cos A\cos B} + \dfrac{\text{sen}(B-C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\text{sen}(C-A)}{\cos C\cos A} = 0.$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $A, B, C, D \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Analogamente ao exercício anterior:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos A\cos B} &= -\left(\frac{\operatorname{sen}(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\operatorname{sen}(C-A)}{\cos C\cos A}\right)\\ &= -\left(\frac{\operatorname{sen}B\cos C - \cos B\operatorname{sen}C}{\cos B\cos C} + \frac{\operatorname{sen}C\cos A - \cos C\operatorname{sen}A}{\cos C\cos A}\right)\\ &= \frac{-\cos A\operatorname{sen}B\cos C + \cos A\cos B\operatorname{sen}C - \cos A\cos B\operatorname{sen}C + \operatorname{sen}A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}\\ &= -\frac{\operatorname{sen}B}{\cos B} + \frac{\operatorname{sen}C}{\cos C} - \frac{\operatorname{sen}C}{\cos C} + \frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} = -\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}C - \operatorname{tg}C + \operatorname{tg}B.\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos A\cos B} = \operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B.$$

Aplicando na igualdade inicial

$$\frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos A\cos B} + \frac{\operatorname{sen}(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\operatorname{sen}(C-A)}{\cos C\cos A} = \operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C + \operatorname{tg}C - \operatorname{tg}A = 0,$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.61. Prove que $\dfrac{\operatorname{sen}(B+A)\cos(B-A)}{\operatorname{sen}(B-A)\cos(B+A)} = \dfrac{\cos A + \operatorname{sen}A}{\cos A - \operatorname{sen}A}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Os valores admissíveis são todos os números reais, exceto aqueles valores de A e B que anulam os termos $\operatorname{sen}(B-A)$, $\cos(B+A)$ e $(\cos A - \operatorname{sen}A)$, que podem ser expressos por $A, B \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Desenvolvendo os senos e cossenos das somas e das diferenças:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(B+A)\cos(B-A)}{\operatorname{sen}(B-A)\cos(B+A)} &= \frac{\operatorname{sen}B\cos A + \operatorname{sen}A\cos B + \cos A\cos B + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B\cos A - \operatorname{sen}A\cos B + \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}\\ &= \frac{\cos A(\operatorname{sen}B + \cos B) + \operatorname{sen}A(\operatorname{sen}B + \cos B)}{\cos A(\operatorname{sen}B + \cos B) - \operatorname{sen}A(\operatorname{sen}B + \cos B)}\\ &= \frac{(\cos A + \operatorname{sen}A)(\operatorname{sen}B + \cos B)}{(\cos A - \operatorname{sen}A)(\operatorname{sen}B + \cos B)} = \frac{\cos A + \operatorname{sen}A}{\cos A - \operatorname{sen}A},\end{aligned}$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.62. Prove que $\dfrac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{cotg}(A-B)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Os valores admissíveis são todos os números reais, exceto aqueles valores de A e B que anulam os termos $\operatorname{cotg}(A-B)$ e $(\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B)$, que podem ser expressos por $A, B \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $B \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + A$ e seus côngruos. Substituindo tangente e cotangente pelas relações com seno e cosseno:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{cotg}(A-B)} &= \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A+B)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos(A-B)} \\
&= \frac{(\operatorname{sen}A\cos B + \operatorname{sen}B\cos A)(\operatorname{sen}A\cos B - \operatorname{sen}B\cos A)}{(\cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)(\cos A\cos B + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)} \\
&= \frac{(\operatorname{sen}A\cos B)^2 - (\operatorname{sen}B\cos A)^2}{(\cos A\cos B)^2 - (\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 A(1-\operatorname{sen}^2 B) - \operatorname{sen}^2 B(1-\operatorname{sen}^2 A)}{\cos^2 A\cos^2 B - (1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A\operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 A\operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B - 1 + \cos^2 A - \cos^2 A\cos^2 B + \cos^2 B} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 A - 1 + \cos^2 B} = \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 A - (1-\cos^2 B)} = \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B},
\end{aligned}$$

ficando provada a igualdade.

Problema I.63. Comprovar a igualdade:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 220)

SOLUÇÃO:

Utilizando a relação $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha$:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{12} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ficando comprovada a igualdade.

Problema I.64. Comprovar a igualdade:

$$\operatorname{tg}55^\circ - \operatorname{tg}35^\circ = 2\operatorname{tg}20^\circ$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 220)

SOLUÇÃO:

Utilizando a relação $\text{tg}35° = \text{cotg}(90° - 35°) = \text{cotg}55°$, e a fórmula da tangente da diferença, obtemos:

$$\text{tg}(55° - 35°) = \frac{\text{tg}55° - \text{tg}35°}{1 + \text{tg}55°\,\text{tg}35°},$$

$$\text{tg}20° = \frac{\text{tg}55° - \text{tg}35°}{1 + \text{tg}55°\,\text{cotg}55°} = \frac{\text{tg}55° - \text{tg}35°}{1 + 1}.$$

lLogo,

$$\text{tg}55° - \text{tg}35° = 2\,\text{tg}20°,$$

ficando comprovada a igualdade.

Problema I.65. Comprovar a igualdade:

$$8\cos 10° \cos 20° \cos 40° = \text{cotg}10°$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 220)

SOLUÇÃO:

Lembramos aos alunos que, como temos que provar a relação entre o produto dos cossenos e uma cotangente, precisamos que no lado esquerdo E apareça um seno no denominador, então multiplicando e dividindo o lado esquerdo da expressão inicial por $\text{sen}10°$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\,\text{sen}10° \cos 10° \cos 20° \cos 40°}{\text{sen}10°} = \frac{4(2\,\text{sen}10° \cos 10°) \cos 20° \cos 40°}{\text{sen}10°} \\ &= \frac{4\,\text{sen}20° \cos 20° \cos 40°}{\text{sen}10°} = \frac{2(2\,\text{sen}20° \cos 20°) \cos 40°}{\text{sen}10°} = \frac{2\,\text{sen}40° \cos 40°}{\text{sen}10°} = \frac{\text{sen}80°}{\text{sen}10°}. \end{aligned}$$

Como $\text{sen}80° = \text{sen}(90° - 10°) = \cos 10°$,

$$E = \frac{\cos 10°}{\text{sen}10°} = \text{cotg}10°,$$

ficando comprovada a igualdade.

Problema I.66. Comprovar a igualdade:

$$\text{sen}70° + 8\cos 20° \cos 40° \cos 80° = 2\cos^2 10°.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 220)

SOLUÇÃO:

Mostramos para os alunos que no lado esquerdo da expressão inicial há um produto de cossenos, em que cada argumento é o dobro do anterior. Uma boa ideia é utilizar a propriedade $2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha = \text{ sen}2\alpha$ e, para isso, multiplicamos e dividimos por $\text{sen}20°$:

$$\begin{aligned} E &= \text{ sen}70° + \frac{4(\text{ sen}20°\cos 20°)\cos 40°\cos 80°}{\text{sen}20°} \\ &= \text{ sen}70° + \frac{2(2\,\text{sen}40°\cos 40°)\cos 80°}{\text{sen}20°} = \text{ sen}70° + \frac{2(2\,\text{sen}80°\cos 80°)}{\text{sen}20°} \\ &= \text{ sen}70° + \frac{\text{sen}160°}{\text{sen}20°}. \end{aligned}$$

Como $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{ sen}\alpha$ então $\text{sen}(180° - 20°) = \text{ sen}20°$ e assim,

$$E = \text{ sen}70° + \frac{\text{sen}20°}{\text{sen}20°} = \text{ sen}70° + 1.$$

Mas $\text{sen}70° = \cos(90° - 70°) = \cos 20°$ e $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. Portanto,

$$E = 1 + \cos 20° = 2\cos^2 10°,$$

comprovando a igualdade.

Problema I.67. Comprovar a igualdade:

$$\frac{1 - 4\,\text{sen}10°\,\text{sen}70°}{2\,\text{sen}10°} = 1.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 220)

SOLUÇÃO:

Como há na expressão ângulos de 10° e 70°, e o ângulo complementar de 70° é 20°, precisamos introduzir o ângulo de 20°. Para isso, utilizaremos a propriedade $2\,\text{sen}\alpha cos\alpha = \text{sen}2\alpha$, multiplicando e dividindo o lado esquerdo E da igualdade por $\cos 10°$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\cos 10° - 2\cdot 2\,\text{sen}10°\cos 10°\,\text{sen}70°}{2\,\text{sen}10°\cos 10°} = \frac{\cos 10° - 2\,\text{sen}20°\,\text{sen}70°}{\text{sen}20°} \\ &= \frac{\cos 10° - 2\,\text{sen}20°\cos 20°}{\text{sen}20°} = \frac{\cos 10° - \text{ sen}40°}{\text{sen}20°} = \frac{\text{sen}80° - \text{ sen}40°}{\text{sen}20°} \end{aligned}$$

e, substituindo a diferença dos senos pelo produto seno cosseno:

$$\text{sen}\alpha - \text{ sen}\beta = 2\,\text{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$E = \frac{2\,\text{sen}\frac{80°-40°}{2}\cos\frac{80°+40°}{2}}{\text{sen}20°} = \frac{2\,\text{sen}20°\cos 60°}{\text{sen}20°} = 2\cos 60° = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

comprovando a identidade.

Problema I.68. Demonstrar a identidade:

$$\frac{\text{sen}(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\text{sen}(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} + \frac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 220)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Desenvolvendo o seno da diferença:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\operatorname{sen}\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma} + \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = 0, \end{aligned}$$

comprovando a igualdade.

Problema I.69. Demonstrar a identidade:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha) = 0.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\frac{3\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$. Substituindo os termos tangente e cotangente pelas relações com seno e cosseno, e chamando o lado esquerdo da identidade de E, obtemos:

$$E = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)}\cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha).$$

Substituindo as funções seno e cosseno pelas fórmulas de redução, obtemos:

$$E = \frac{(-\operatorname{sen}\alpha)}{(-\cos\alpha)}(-\cos\alpha)\operatorname{sen}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right].$$

E mais, como a função seno é ímpar, $\operatorname{sen}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$,

$$E = (-\operatorname{sen}\alpha \cdot -\cos\alpha) - \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = sin\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0,$$

comprovando a identidade.

Problema I.70. Demonstrar a identidade:

$$\operatorname{sen}(\alpha - 270^\circ)\cos(\alpha + 90^\circ)\operatorname{tg}(3\alpha - 180^\circ) = \cos(180^\circ - \alpha)\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)\operatorname{cotg}(90^\circ - 3\alpha).$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\dfrac{2k+3}{6}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2k-1}{6}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.
Substituindo cada parcela dos produtos pelas respectivas fórmulas de redução:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha - 270°) &= \cos\alpha \\
\cos(\alpha + 90°) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{tg}(3\alpha - 180°) &= \operatorname{tg}3\alpha \\
\cos(180° - \alpha) &= -\cos\alpha \\
\operatorname{sen}(180° - \alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{cotg}(90° - 3\alpha) &= \operatorname{tg}3\alpha
\end{aligned}$$

resulta em:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha - 270°)\cos(\alpha + 90°)\operatorname{tg}(3\alpha - 180°) &= -\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}3\alpha \\
\cos(180° - \alpha)\operatorname{sen}(180° - \alpha)\operatorname{cotg}(90° - 3\alpha) &= -\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}3\alpha.
\end{aligned}$$

Assim, por transitividade, fica comprovada a identidade.

Problema I.71. Demonstrar a identidade:

$$\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 3.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando as propriedades dos arcos triplos:

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \\
\operatorname{sen}3\alpha &= 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha,
\end{aligned}$$

e chamando E a identidade a ser demonstrada:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\cos 3\alpha - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \\
&= \frac{3\cos\alpha - 3\cos^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\operatorname{sen}\alpha - 3\operatorname{sen}^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{3\operatorname{sen}\alpha(1 - \operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} \\
&= 3\operatorname{sen}^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 3(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3,
\end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.72. Demonstrar a identidade:

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \operatorname{sen}2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$. Desenvolvendo o lado esquerdo E da igualdade e utilizando as propriedades que relacionam argumentos simples com argumentos duplos:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ e $\text{sen}2\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$ e substituindo no denominador a identidade fundamental $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$:

$$E = \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1 + 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)}{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)}{(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)^2}$$
$$= \frac{\cos\alpha - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}.$$

Para obtermos a tangente, dividimos o numerador e o denominador por cosα:

$$E = \frac{\dfrac{\cos\alpha - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}n} = \frac{1 - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}\alpha},$$

comprovando a identidade.

Problema I.73. Demonstrar a identidade:

$$1 - \text{sen}8\alpha = 2\cos^2(45^\circ + 4\alpha).$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Verificamos no lado direito da identidade o termo cosseno elevado ao quadrado. Vamos substituí-lo pela relação $2\cos^2\beta = 1 + \cos 2\beta$:

$$2\cos^2(45^\circ + 4\alpha) = 1 + \cos 2(45^\circ + 4\alpha) = 1 + \cos(90^\circ + 8\alpha),$$

e, utilizando a fórmula de redução $\cos(90^\circ + \beta) = -\,\text{sen}\beta$

$$2\cos^2(45^\circ + 4\alpha) = 1 + \cos(90^\circ + 8\alpha) = 1 - \text{sen}8\alpha,$$

comprovando a identidade.

Problema I.74. Demonstrar a identidade:

$$\frac{\text{cotg}\alpha + \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}}{\text{sen}\alpha + \text{tg}\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo a tangente e a cotangente do lado esquerdo da igualdade$E$, pelas relações com seno e cosseno:

$$E = \frac{\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} + \frac{1}{\text{sen}\alpha}}{\text{sen}\alpha + \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}}{\frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha},$$

mas, $\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ e então $\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \dfrac{2}{1-\cos 2\alpha}$, logo,

$$E = \cos\alpha \cdot \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

comprovando a identidade.

Problema I.75. Demonstrar a identidade:

$$\text{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sec\alpha + \text{tg}\alpha}{\sec\alpha - \text{tg}\alpha}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$. Desenvolvendo o lado esquerdo E da igualdade:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\text{sen}^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \left(\frac{\text{sen}45^\circ\cos\frac{\alpha}{2} + \cos 45^\circ\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos 45^\circ\cos\frac{\alpha}{2} - \text{sen}45^\circ\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\alpha}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\frac{\alpha}{2})}\right]^2 = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} + 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} - 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 + \text{sen}\alpha}{1 - \text{sen}\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, para provarmos a igualdade, vamos dividir o numerador e o denominador por cos α:

$$E = \frac{\frac{1+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sec\alpha + \text{tg}\alpha}{\sec\alpha - \text{tg}\alpha},$$

comprovando a identidade.

Problema I.76. Demonstrar a identidade:

$$(\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)^2 = 4\cos^2\left(45^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo o lado esquerdo E da igualdade:

$$\begin{aligned}
E &= \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos^2\beta \\
&= (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) + 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\
&= 2 + 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = 2(1 + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) = 2[1 + \operatorname{sen}(\beta-\alpha)].
\end{aligned}$$

E, desenvolvendo o lado direito D da igualdade:

$$\begin{aligned}
D &= 4\left(\cos 45^\circ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \operatorname{sen}45^\circ \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \\
&= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]^2 \\
&= 2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 2\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= 2\left(1 - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Como $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}2\theta$,

$$D = 2[1 - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$

e, pela imparidade da função seno

$$D = 2[1 - (-\operatorname{sen}(\beta-\alpha))] = 2[1 + \operatorname{sen}(\beta-\alpha)] = E,$$

comprovando a identidade.

Problema I.77. Demonstrar a identidade:

$$2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha} + \operatorname{cotg}2\alpha\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right\}$. Desenvolvendo o lado esquerdo E da igualdade:

$$E = 2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}\right) = 2\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}\right).$$

Aplicando as relações de seno e cosseno com ângulos duplos $\text{sen}2\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$ e $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$:

$$E = 2\cdot\frac{2\cos^2\alpha}{2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}.$$

Como no lado direito da igualdade há termos com argumentos $\frac{\alpha}{2}$, vamos novamente substituir α por $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} - \frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \text{cotg}\frac{\alpha}{2} - \text{tg}\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.78. Demonstrar a identidade:

$$\frac{1-2\cos^2\phi}{\text{sen}\phi\cos\phi} = \text{tg}\phi - \text{cotg}\phi.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Vamos partir do lado direito D da igualdade:

$$D = \frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi} - \frac{\cos\phi}{\text{sen}\phi} = \frac{\text{sen}^2\phi - \cos^2\phi}{\text{sen}\phi\cos\phi} = \frac{1-\cos^2\phi-\cos^2\phi}{\text{sen}\phi\cos\phi} = \frac{1-2\cos^2\phi}{\text{sen}\phi\cos\phi}$$

, comprovando a identidade.

Problema I.79. Demonstrar a identidade:

$$\sqrt{1+\text{sen}\alpha} - \sqrt{1-\text{sen}\alpha} = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Como no lado esquerdo há raízes quadradas, vamos elevar ambos os lados ao quadrado:

$$\left(\sqrt{1+\text{sen}\alpha} - \sqrt{1-\text{sen}\alpha}\right)^2 = \left(2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Agora, desenvolvemos o lado esquerdo E da igualdade:

$$\begin{aligned} E &= \left(\sqrt{1+\text{sen}\alpha}\right)^2 - 2\sqrt{(1+\text{sen}\alpha)(1-\text{sen}\alpha)} + \left(\sqrt{1+\text{sen}\alpha}\right)^2 \\ &= 1+\text{sen}\alpha - 2\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} + 1 - \text{sen}\alpha = 2 - 2\sqrt{\cos^2\alpha} = 2(1-\cos\alpha) = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,, \end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.80. Demonstrar a identidade:

$$4\,\mathrm{sen}\left(\phi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\,\mathrm{sen}\left(\phi-\frac{\pi}{3}\right)=4\,\mathrm{sen}^2\phi-3.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Inicialmente, vamos aplicar a fórmula que relaciona o produto de funções trigonométricas com a soma, $\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$.

Considerando $\alpha=\phi+\frac{\pi}{3}$ e $\beta=\phi-\frac{\pi}{3}$, então $\alpha-\beta=\phi-\frac{2\pi}{3}$ e $\alpha+\beta=2\alpha$

Aplicando no lado esquerdo E da igualdade:

$$E=4\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 2\phi}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-\cos 2\phi\right)=-1-2\cos 2\phi=-1-\cos 2\alpha-\cos 2\phi$$
$$=-1(1+\cos 2\phi)-\cos 2\phi.$$

Mas, $1+\cos 2\phi=2\cos^2\phi$ e $-\cos 2\phi=2\,\mathrm{sen}^2\phi-1$, então:

$$E=-2\cos^2\phi+2\,\mathrm{sen}^2\phi-1=2\,\mathrm{sen}^2\phi-2(1-\,\mathrm{sen}^2\phi)-1=2\,\mathrm{sen}^2\phi+2\,\mathrm{sen}^2\phi-2-1$$
$$=4\,\mathrm{sen}^2\phi-3,$$

comprovando a identidade.

Problema I.81. Demonstrar a identidade:

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\,\mathrm{sen}^2(\alpha+\beta)$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo o lado direito D da igualdade:

$$\begin{aligned}
D&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-(\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta+\,\mathrm{sen}\beta\cos\alpha)^2\\
&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\,\mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha-2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}\beta\cos\alpha\\
&=\cos^2\alpha(1-\,\mathrm{sen}^2\beta)+\cos^2\beta(1-\,\mathrm{sen}^2\alpha)2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}\beta\cos\alpha\\
&=\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\beta\cos^2\alpha-2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}\beta\cos\alpha\\
&=2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta\,\mathrm{sen}\beta\cos\alpha\\
&=2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta-\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta),
\end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.82. Demonstrar a identidade:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Para desenvolver o lado direito D da igualdade, vamos utilizar a fórmula

$$\cos\theta\cos\phi = \frac{\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)}{2}:$$

$$\begin{aligned}
D &= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\right]\\
&= 4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\beta}{2}+\cos\frac{2\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos(-\gamma)+\cos\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2}\right)\right]\\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\beta}{2}+\cos\frac{2\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{(-2\gamma)}{2}+\cos\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2}\right)\right]\\
&= \cos\alpha+\cos\beta+\cos(-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma),
\end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.83. Demonstrar a identidade:

$$\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos 3\alpha - \frac{1}{2}\cos 5\alpha = 8\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos^3\alpha.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Vamos desenvolver o lado esquerdo E da igualdade e utilizando a mesma propriedade que relaciona o produto de cossenos com a soma:

$$\begin{aligned}
E &= \cos\alpha - \frac{1}{2}(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha) = \cos\alpha - \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2}\right)\\
&= \cos\alpha - \cos 4\alpha\cos\alpha = \cos\alpha(1-\cos 4\alpha) = \cos\alpha(2\,\mathrm{sen}^2 2\alpha) = 2\cos\alpha(2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha)^2\\
&= 2\cos\alpha(4\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha) = 8\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos^3\alpha,
\end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.84. Demonstrar a identidade:

$$\frac{2\,\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha + \text{sen}5\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Os valores admissíveis são todos os números reais, exceto aqueles valores de α que anulam o termo $\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ e $\cos\frac{\alpha}{2}$. Substituindo no lado esquerdo E da igualdade a soma de funções trigonométricas pelo seu produto:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2\,\text{sen}\alpha + (\,\text{sen}5\alpha - \text{sen}3\alpha)}{(-2\cos 2\alpha) + (\cos 3\alpha + \cos\alpha)} = \frac{2\,\text{sen}\alpha + 2\left(\text{sen}\frac{5\alpha-3\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\right)}{(-2\cos 2\alpha) + 2\left(\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\alpha\cos 4\alpha}{(-\cos 2\alpha) + \cos 2\alpha\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha(1+\cos 4\alpha)}{\cos 2\alpha(\cos\alpha - 1)} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot 2\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha[-(1-\cos\alpha)]} \\
&= -\frac{2\,\text{sen}\alpha\cos 2\alpha}{2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = -\frac{\text{sen}\alpha\cos 2\alpha}{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Mas, $\text{sen}\alpha = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, então

$$E = -\frac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha}{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = -\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

comprovando a identidade.

Problema I.85. Demonstrar a identidade:

$$\cos\alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 221)

SOLUÇÃO:

Utilizando no lado esquerdo E da igualdade as fórmulas dos cossenos da soma e da diferença:

$$\begin{aligned}
E &= \cos\alpha + \cos 120^\circ\cos\alpha + \text{sen}120^\circ\,\text{sen}\alpha + \cos 120^\circ\cos\alpha - \text{sen}120^\circ\,\text{sen}\alpha \\
&= \cos\alpha + 2\cos 120^\circ\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Mas, $\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\,\text{sen}30^\circ = -\frac{1}{2}$, então:

$$E = \cos\alpha + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\alpha = \cos\alpha - \cos\alpha = 0,$$

comprovando a identidade.

Problema I.86. Calcular $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, se $\text{cotg}\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 222)

SOLUÇÃO:

O valor de $\text{tg}\alpha$ sai direto da fórmula $\text{tg}\alpha\,\text{cotg}\alpha = 1$,

então $\text{tg}\alpha = \dfrac{1}{\text{cotg}\alpha} = -\dfrac{1}{2}$.

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, então $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}$,

logo $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

Assim, $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}\alpha = \text{tg}\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema I.87. Calcular $\text{sen}\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$, se $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ e $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 222)

SOLUÇÃO:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\text{sen}\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Problema I.88. Demonstrar que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$, se $\text{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 222)

SOLUÇÃO:

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2\beta = 1 - \text{sen}^2\beta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Como α e β estão no primeiro quadrante, $\cos\alpha > 0$ e $\cos\beta > 0$,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3+2}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Então

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}.$$

Problema I.89. Demonstre que $\operatorname{sen} x = \dfrac{2a}{1+a^2}$, $\cos x = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{2a}{1-a^2}$, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1-a^2}{2a}$, se $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = a$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 222)

SOLUÇÃO:

Primeiramente, expressando a tangente em função de seno e cosseno:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = a \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = a \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{x}{2} = a\cos\frac{x}{2}$$

Utilizando a identidade fundamental $\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2} = 1$, e substituindo o valor de $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = a\cos\dfrac{x}{2}$:

$$a^2\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 \Longrightarrow \cos^2\frac{x}{2}(a^2+1) = 1 \Longrightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{a^2+1}.$$

Da relação $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$:

$$1+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow 1+\cos x = 2\frac{1}{a^2+1} \Longrightarrow \cos x = \frac{2}{a^2+1} - 1,$$

$$\cos x = \frac{2-(1+a^2)}{a^2+1} = \frac{1-a^2}{1+a^2},$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x = 1 - \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 = \frac{(1+a^2)^2-(1-a^2)^2}{(1+a^2)^2} = \frac{4a^2}{(1+a^2)^2},$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}} = \frac{2a}{1+a^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{2a}{1+a^2}}{\frac{1-a^2}{1+a^2}} = \frac{2a}{1-a^2},$$

$$\text{cotg} x = \frac{1-a^2}{2a},$$
comprovando as igualdades.

Problema I.90. Demonstrar a identidade: $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha = \dfrac{\text{sen}32\alpha}{32\,\text{sen}\alpha}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 223)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Como $2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha = \text{sen}2\alpha$, multiplicaremos e dividiremos o lado esquerdo E da expressão por $2\,\text{sen}\alpha$:

$$E = \frac{2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{2\,\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{2\,\text{sen}\alpha}$$

Agora, multiplicando e dividindo por 2:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\,\text{sen}2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{4\,\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{4\,\text{sen}\alpha} \\ &= \frac{2\,\text{sen}4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{8\,\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}8\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{8\,\text{sen}\alpha} \\ &= \frac{2\,\text{sen}8\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{16\,\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}16\alpha\cos 16\alpha}{16\,\text{sen}\alpha} = \frac{2\,\text{sen}16\alpha\cos 16\alpha}{32\,\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}32\alpha}{32\,\text{sen}\alpha}, \end{aligned}$$

comprovando a identidade.

Problema I.91. Demonstrar a identidade:

$$9\cos 15\alpha + 3\cos 7\alpha + 3\cos 19\alpha + 9\cos 11\alpha = 24\cos^3 2\alpha\cos 13\alpha.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 223)

SOLUÇÃO:

Rearrumando os termos do lado esquerdo E da expressão:

$$E = 9(\cos 15\alpha + \cos 11\alpha) + 3(\cos 19\alpha + \cos 7\alpha).$$

Utilizando a fórmula de transformação da adição de cossenos em produto:

$$\begin{aligned} E &= 9(2\cos 13\alpha\cos 2\alpha) + 3(2\cos 13\alpha\cos 6\alpha) = 18\cos 13\alpha\cos 2\alpha + 6\cos 13\alpha\cos 6\alpha \\ &= 6\cos 13\alpha(3\cos 2\alpha + \cos 6\alpha). \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula do ângulo triplo $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$E = 6\cos 13\alpha(3\cos 2\alpha + 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = 6\cos 13\alpha(4\cos^3\alpha) = 24\cos^3 2\alpha\cos 13\alpha,$$

comprovando a identidade.

Problema I.92. Demonstrar a identidade:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}\,\text{sen}\alpha=\sqrt{2},\text{ se } 0<\alpha<\pi.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 223)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}-\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Elevando o lado esquerdo E da igualdade ao quadrado:

$$\begin{aligned}E^2&=\left(\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}\,\text{sen}\alpha\right)^2=\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)\text{sen}^2\alpha\\&=\frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\text{sen}^2\alpha=\frac{2}{\text{sen}^2\alpha}\,\text{sen}^2\alpha.\end{aligned}$$

Chegando ao resultado $E^2=\dfrac{2}{\text{sen}^2\alpha}\,\text{sen}^2\alpha$, então $E=\sqrt{\dfrac{2}{\text{sen}^2\alpha}\,\text{sen}^2\alpha}$. Como $0<\alpha<\pi$, então $\text{sen}\alpha>0$. Assim, $E=\sqrt{2}$, comprovando a identidade.

Problema I.93. - Demonstrar a identidade $\sqrt{\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=-\dfrac{2}{\text{sen}2\alpha}$, se $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 223)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Elevando o lado esquerdo E da igualdade ao quadrado:

$$\begin{aligned}E^2&=\left(\sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}}\right)^2=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}\\&=\frac{1}{(\text{sen}\alpha\cos\alpha)(\text{sen}\alpha\cos\alpha)}=\frac{2\cdot2}{(2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha)(2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha)}=\frac{4}{\text{sen}2\alpha\,\text{sen}2\alpha}\\&=\frac{4}{\text{sen}^2 2\alpha}.\end{aligned}$$

Assim,

$$E=\pm\sqrt{\frac{4}{\text{sen}^2 2\alpha}}=\pm\frac{2}{\text{sen}^2\alpha}.$$

E como $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, $E=-\dfrac{2}{\text{sen}2\alpha}$, ficando comprovada a igualdade.

Problema I.94. - Demonstrar a identidade:

$$\sqrt{\text{cotg}\alpha + \cos\alpha} + \sqrt{\text{cotg}\alpha - \cos\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\text{cotg}\alpha}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 223)

SOLUÇÃO:

Os valores admissíveis são todos os números reais, exceto aqueles valores de α que anulam o termo $\text{sen}\alpha$ e que resultam em $\text{cotg}\alpha < 0$, $\text{cotg}\alpha + \cos\alpha < 0$ e $\text{cotg}\alpha - \cos\alpha < 0$. Elevando o lado esquerdo E da igualdade ao quadrado:

$$\begin{aligned}
E^2 &= \left(\sqrt{\text{cotg}\alpha + \cos\alpha} + \sqrt{\text{cotg}\alpha - \cos\alpha}\right)^2 = \text{cotg}\alpha + \cos\alpha + \text{cotg}\alpha - \cos\alpha + 2\sqrt{\text{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha} \\
&= 2\,\text{cotg}\alpha + \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} - \cos^2\alpha} = 2\,\text{cotg}\alpha + \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}} \\
&= 2\,\text{cotg}\alpha + \sqrt{\frac{\cos^2\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha)}{\text{sen}^2\alpha}} = 2\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} + 2\sqrt{\frac{\cos^4\alpha}{\text{sen}^2\alpha}} = 2\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha}\right) \\
&= 2\frac{\cos^2\alpha + \cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\text{sen}\alpha} = 2\,\text{cotg}\alpha(1+\cos\alpha) = 2\,\text{cotg}\alpha \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$E = \sqrt{4\,\text{cotg}\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\text{cotg}\alpha},$$

comprovando a identidade.

5.2 Equações Trigonométricas

Problema E.1. Se $\text{sen}\theta + \cos\theta = \alpha$, calcule os valores de $|\,\text{sen}\theta - \cos\theta|$ e $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

a) Quando trabalhamos num problema onde aparece o valor absoluto de uma expressão, temos duas opções básicas. A primeira é tirar o valor absoluto, analisando o sinal da expressão. Para os valores das variáveis que façam a expressão f não negativa, tem-se $|f| = f$. Para os valores das variáveis onde f seja negativa tem-se $|f| = -f$. A segunda alternativa é utilizar a relação $|f| = \sqrt{f^2}$. No caso, qual dos dois caminhos tomar?

Analisamos com os alunos, que a primeira variante parece ser mais complicada. Se adotássemos a segunda variante, ter-se-ia que $|\,\text{sen}\theta - \cos\theta| = \sqrt{(\,\text{sen}\theta - \cos\theta)^2}$. À primeira vista a raiz parece complicar, mas desenvolvendo o quadrado da diferença $\text{sen}\theta - \cos\theta$, resulta $(\,\text{sen}\theta - \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta$. Aplicando a identidade fundamental $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, tem-se $(\,\text{sen}\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$. Esta última expressão "pede" a aplicação da fórmula do ângulo duplo $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Então, $(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = 1 - \operatorname{sen}2\theta$ e $|\operatorname{sen}\theta - \cos\theta| = \sqrt{1 - \operatorname{sen}2\theta}$.

Qual a utilidade desse resultado? É dado inicial do problema que $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \alpha$, assim podemos aplicar o conhecido recurso de elevar ao quadrado e chegar a conhecer os valores das expressões pedidas em função do dado $\alpha \in \Re$. Como $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \alpha^2$, então $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + \operatorname{sen}2\theta$. Logo, $1 + \operatorname{sen}2\theta = \alpha^2$ e $\operatorname{sen}2\theta = \alpha^2 - 1$. Finalmente,

$$|\operatorname{sen}\theta - \cos\theta| = \sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}2\theta} = \sqrt{1 - (\alpha^2 - 1)} = \sqrt{2 - \alpha^2}.$$

b) $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta$ é nosso velho conhecido. Sabemos que $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ (exercício 1). A parcela $2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ pode ser transformada a partir da fórmula do seno do ângulo duplo, $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Elevando ao quadrado, $\operatorname{sen}^2 2\theta = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$. Então, $\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta$ e

$$\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta = 1 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 1\right)^2$$

.

Problema E.2.

a) Sabendo que $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$, calcule o valor de $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$.

b) Ache o valor mínimo da expressão $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

a) Uma primeira observação é que, como a função cossecante tem como domínio $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, este conjunto é o conjunto dos valores admissíveis da variável θ.

O problema apresenta um único dado, $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$. Portanto, essa informação certamente terá que ser usada.

Qual a relação entre as expressões $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$ e $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cosec}\theta$? Cada parcela da expressão cujo valor queremos calcular é o quadrado das respectivas parcelas da expressão cujo valor conhecemos. Isso sugere elevá-la ao quadrado: $(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 4$. Então $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{cosec}\theta = 4$. Daí, $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 4 - 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{cosec}\theta$.

Qual a relação entre as funções $\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{cosec}\theta$? $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, portanto, $\operatorname{cosec}\theta\operatorname{sen}\theta = 1$. Substituindo: $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

b) O domínio da função $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x$ é $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

A ideia de elevar ao quadrado a expressão $\cos x - \sec x$ é sugerida pelo método de solução do exercício do item (a) pois, analogamente ao produto $\operatorname{sen}\theta \operatorname{cosec}\theta$, ocorre que $\cos x \sec x = 1$. Vejamos:

$$(\cos x - \sec x)^2 = \cos^2 x + \sec^2 x - 2\cos x \sec x = \cos^2 x + \sec^2 x - 2.$$

Então, $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x = (\cos x - \sec x)^2 + 2$.

A parcela $(\cos x - \sec x)^2$, por ser um quadrado, é sempre maior ou igual a zero. Portanto, $f(x) = \cos^2 x + \sec^2 x \geq 0 + 2 = 2$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Até aqui provamos que a função f está limitada inferiormente por 2. Para provar que 2 é o valor mínimo da função precisamos encontrar algum valor x do domínio onde $f(x) = 2$. Isso ocorre quando $(\cos x - \sec x)^2 = 0$, ou seja, quando $\cos x = \sec x$, o que se cumpre em $x = 0$, $x = 2\pi$ e seus coterminais.

Problema E.3. Indique a melhor resposta. Seja $A(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^4\theta$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Tem-se:

a) $1 \leq A \leq 2$

b) $\frac{3}{4} \leq A \leq 1$

c) $\frac{13}{16} \leq A \leq 1$

d) $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{13}{16}$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

Para analisar o intervalo de valores de $A(\theta)$ devemos lembrar o gráfico das funções seno e cosseno, especialmente que, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$ e $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Também devemos lembrar que se $-1 \leq \alpha \leq 1$, tem-se que $0 \leq \alpha^2 \leq 1$. Como $\alpha^4 = (\alpha^2)^2$ também ocorre que $0 \leq \alpha^4 \leq 1$. Portanto, $0 \leq \operatorname{sen}^2\theta \leq 1$ e $0 \leq \cos^4\theta \leq 1$. Somando ambas as desigualdades, membro a membro, obtém-se $0 \leq \operatorname{sen}^2\theta + \cos^4\theta \leq 2$. É uma resposta possível, mas não é nenhum dos itens oferecidos para a resposta. Então devemos refinar o cálculo das cotas.

A identidade fundamental $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pode nos ajudar a refinar a cota superior. Dado que $\cos^4\theta = \cos^2\theta\cos^2\theta$, podemos escrever $A(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\cos^2\theta$. Como $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, $\cos^2\theta\cos^2\theta \leq \cos^2\theta \cdot 1 = \cos^2\theta$. Assim, $A(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^4\theta \leq \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Procuremos uma cota inferior. Para isso acharemos um $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $A(\theta) \geq \beta$. Uma ideia pode ser transformar $A(\theta)$ numa expressão só com a função cosseno. Para isso, usamos a identidade fundamental na forma $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Substituindo: $A(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^4\theta = 1 - \cos^2\theta + \cos^4\theta = 1 + \cos^4\theta - \cos^2\theta$.

Completemos o quadrado em $1 + \cos^4\theta - \cos^2\theta$:

$$\begin{aligned} 1 + \left(\cos^4\theta - \cos^2\theta\right) &= 1 + \left(\cos^4\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 1 + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Então,

$$A(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^4\theta = \frac{3}{4}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2$$

Como $\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se que $A(\theta) = \frac{3}{4}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{4} + 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Logo, a resposta correta é o item (b), $\frac{3}{4} \leq A \leq 1$.

Problema E.4. Resolver a equação $\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}2x \cdot \operatorname{sen}3x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x \cdot \cos 2x$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

Um recurso básico utilizado na resolução de equações é transformar a equação dada numa equação equivalente da forma $P_1.P_2...P_k = 0$. Para que o produto $P_1.P_2...P_k$ se anule é suficiente que ao menos um dos fatores $P_j, j = 1, 2, ..., k$ se anule. Portanto, a equação $P_1.P_2...P_k = 0$ equivale à conjunção das k equações $P_j = 0, j = 1, 2, ..., k$. Espera-se que cada uma das k equações seja suficientemente simples para ser facilmente resolvida. O conjunto solução da equação $P_1.P_2...P_k = 0$ é igual à união dos conjuntos solução das k equações $P_j = 0, j = 1, 2, ..., k$.

Na resolução desta equação aplicaremos essa estratégia de fatorização.

$$\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}2x \cdot \operatorname{sen}3x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x \cdot \cos 2x \iff \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}2x \cdot \operatorname{sen}3x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x \cdot \cos 2x = 0.$$

Destacamos o fator comum $\operatorname{sen}2x$:

$$\operatorname{sen}2x\left(\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}3x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 0.$$

É conveniente eliminar o coeficiente $\frac{1}{2}$; para isso o retiramos para fora do parêntese:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\left(2\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}3x - \cos 2x\right) = 0.$$

Então

$$\operatorname{sen}2x\left(2\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}3x - \cos 2x\right) = 0. \tag{5.15}$$

Observe que todos os passos nas transformações efetuadas conservam a equivalência com a equação original. Portanto, a equação 5.15 equivale à equação proposta no exercício. Em linha com a estratégia de decompor em fatores, procuraremos transformar o parêntese acima num produto. Para isso, tentaremos transformar a parcela $2\,\text{sen}x.\,\text{sen}3x$ numa soma ou diferença, de modo que ocorra uma simplificação da expressão do parêntese e tome a forma de um produto. Apresentamos aos alunos a lista das fórmulas da soma, diferença e produto das funções trigonométricas e dialogando com eles se escolhe a fórmula:

$$\text{sen}A.\,\text{sen}B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

Em $\text{sen}x.\,\text{sen}3x$ tomamos, por conveniência, para evitar um sinal negativo, $A = 3$ e $B = 1$. Então,

$$\text{sen}x.\,\text{sen}3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

Substituindo em 5.15:

$$\text{sen}2x\left[2\left(\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\right) - \cos 2x\right] = 0$$

$$\text{sen}2x\left[(\cos 2x - \cos 4x) - \cos 2x\right] = 0$$

$$\text{sen}2x.\cos 4x = 0$$

Daí, $\text{sen}2x = 0$ ou $\cos 4x = 0$.

De $\text{sen}2x = 0 \Longrightarrow 2x = k\pi \Longrightarrow x_1 = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

De $\cos 4x = 0 \Longrightarrow 4x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \Longrightarrow x_2 = \dfrac{(2k+1)\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

Problema E.5. Resolver a equação $3(1 - \text{sen}x) = 1 + \cos 2x$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

Uma primeira ideia é transformar o $\cos 2x$ utilizando uma das fórmulas conhecidas: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$. A última parece a mais conveniente, pois 1 e -1 se cortariam. Assim: $1 + \cos 2x = 1 + (2\cos^2 x - 1) = 2\cos^2 x$. A equação proposta é equivalente a $3(1 - \text{sen}x) = 2\cos^2 x$.

Sabemos que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$. Esta última expressão é uma diferença de quadrados e se decompõe no produto $(1 + \text{sen}x)(1 - \text{sen}x)$, o que é conveniente pois poderíamos destacar o fator comum $(1 - \text{sen}x)$ e obter a decomposição fatorial. Façamos:

$$3(1 - \text{sen}x) = 2\cos^2 x \Longleftrightarrow 3(1 - \text{sen}x) = 2(1 - \text{sen}^2 x)$$

$$3(1 - \text{sen}x) = 2(1 + \text{sen}x)(1 - \text{sen}x) \Longleftrightarrow$$

$$3(1-\operatorname{sen} x)-2(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)=0 \Longleftrightarrow$$
$$(1-\operatorname{sen} x)[3-2(1+\operatorname{sen} x)]=0 \Longleftrightarrow$$
$$(1-\operatorname{sen} x)(3-2-2\operatorname{sen} x)=0 \Longleftrightarrow$$
$$(1-\operatorname{sen} x)(1-2\operatorname{sen} x)=0.$$

Daí, $1-\operatorname{sen} x=0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x=1 \Longrightarrow x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi=\dfrac{(4k+1)\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

E, $(1-2\operatorname{sen} x)=0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2} \Longrightarrow x_2=k\pi+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$.

Problema E.6. Resolver a equação $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{cotg}\frac{5}{3}x=1-\sec\frac{3}{5}x\operatorname{cosec}\frac{5}{3}x$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

À primeira vista, a equação parece muito complicada, mas considerando que em cada membro temos o produto de duas funções recíprocas, tangente e cotangente, secante e cossecante, uma boa ideia parece ser transformar tudo em seno e cosseno:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{5}x\cdot\cos\frac{5}{3}x}{\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{3}x}=1-\frac{1}{\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{3}{5}x}$$

O número 1 é um valor notável do seno e do cosseno, pelo que permanecerá no membro direito e todas as expressões trigonométricas ficarão no membro esquerdo:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{5}x\cdot\cos\frac{5}{3}x}{\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{3}x}+\frac{1}{\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{3}{5}x}=1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3}{5}x\cdot\cos\frac{5}{3}x+1}{\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{3}x}=1$$

A ideia de deixar o 1 no membro direito foi pensada achando que na esquerda poderíamos chegar a uma expressão na forma do seno ou cosseno de um ângulo, mas parece difícil fazer essa redução. Para simplificando, vamos eliminar a fração:

$$\operatorname{sen}\frac{3}{5}x\cdot\cos\frac{5}{3}x+1=\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{3}x$$

$$\operatorname{sen}\frac{3}{5}x\cdot\cos\frac{5}{3}x+1-\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{3}x=0 \tag{5.16}$$

O termo $\operatorname{sen}\frac{3}{5}x\cdot\cos\frac{5}{3}x-\cos\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{3}x$ lembra a fórmula do seno da soma e da diferença $\operatorname{sen}(A\pm B)=\operatorname{sen}A.\cos B\pm\cos A.\operatorname{sen}B$.

Façamos arranjos simples na equação (5.16) para usá-la de forma mais clara, considerando a paridade das funções seno e cosseno:

$$\text{sen}\frac{5}{3}x \cdot \cos\frac{3}{5}x - \cos\frac{5}{3}x \cdot \text{sen}\frac{3}{5}x = 1$$

Então, $\text{sen}\left(\frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x\right) = 1 \Longrightarrow \text{sen}\frac{16}{15}x = 1.$

De $\text{sen}\frac{16}{15}x = 1$, tem-se $\frac{16}{15}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow \frac{16}{15}x = \frac{(4k+1)\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{15}{32}(4k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Problema E.7. Resolver a equação $\text{sen}(x+25°) \cdot \text{sen}(x-20°) = \text{sen}(70°+x) \cdot \text{sen}(65°-x)$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

Tentaremos transformar a equação acima para uma do tipo $\text{sen}\alpha = \beta$, com β um valor notável. Para isso transpomos todas as parcelas para o membro esquerdo:

$$\text{sen}(x+25°) \cdot \text{sen}(x-20°) - \text{sen}(70°+x) \cdot \text{sen}(65°-x) = 0 \tag{5.17}$$

Tentaremos aplicar a fórmula $\text{sen}A.\cos B - \cos A.\text{sen}B = \text{sen}(A-B)$. Para isso transformaremos $\text{sen}(x+25°)$ e $\text{sen}(70°+x)$ para a função cosseno, mediante as fórmulas de redução ao primeiro quadrante $\cos(90° \pm A) = \mp\text{sen}A$. Assim,

$$\text{sen}(x+25°) = \cos[90° - (x+25°)] = \cos(65° - x)$$

e

$$\text{sen}(70°+x) = \cos[90° - (70°+x)] = \cos(20° - x)$$

Como $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(20° - x) = \cos(x - 20°)$

Fazemos isso, para os argumentos ficarem iguais em $\text{sen}(x-20°)$ e $\cos(x-20°)$.

Substituindo em (5.17) e organizando convenientemente:

$$\text{sen}(x-20°).\cos(65°-x) - \cos(x-20°).\text{sen}(65°-x) = 0.$$

Aplicando a fórmula do seno da diferença, lembrada acima, com $A = x - 20°$ e $B = 65° - x$, tem-se:

$$\text{sen}(x-20°).\cos(65°-x) - \cos(x-20°).\text{sen}(65°-x) = \text{sen}[(x-20°) - (65°-x)] =$$

$$= \text{sen}(2x - 85°) = 0.$$

Dessa última equação, resulta que:

$$2x - 85° = 180°k \Longrightarrow 2x = 85° + 180°k \Longrightarrow x = 42,5° + 180°k, k \in \mathbb{Z}.$$

Problema E.8. Resolver a equação $\operatorname{tg}(x+30°)\cdot \operatorname{tg}(x-60°)=1$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

Temos o produto de dois fatores com a função tangente e se observa que os valores 30° e 60° são complementares ($30°+60°=90°$). Uma ideia interessante é transformar um dos fatores na função cotangente, recíproca da função tangente. Utilizaremos a fórmula $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90°-\alpha)$. Então,

$$\operatorname{tg}(x+30°)\cdot \operatorname{tg}(x-60°) = \operatorname{cotg}[90°-(x+30°)]\cdot \operatorname{tg}(x-60°) = \operatorname{cotg}(60°-x)\operatorname{tg}(x-60°)=1$$

Como $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, tem-se que $\operatorname{tg}(x-60°)=-\operatorname{tg}(60°-x)$. Então,

$$\operatorname{cotg}(60°-x).\operatorname{tg}(x-60°) = \operatorname{cotg}(60°-x).[-\operatorname{tg}(60°-x)] = -\operatorname{cotg}(60°-x).\operatorname{tg}(60°-x)=1$$

Como $\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha=1$, chegamos à contradição $-1=1$. Portanto, a equação proposta não tem solução.

Problema E.9. Resolver a equação $\operatorname{sen}2x+\cos 2x+\operatorname{sen}x+\cos x+1=0$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

O lado esquerdo da equação contém as funções seno e cosseno com os argumentos x e $2x$, pelo que uma ideia inicial é aplicar as fórmulas do ângulo duplo $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$ e $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$. Esta última é indicada para que se "cortem" as parcelas 1 e -1.

$$\operatorname{sen}2x+\cos 2x+\operatorname{sen}x+\cos x+1 = 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x+2\cos^2 x-1+\operatorname{sen}x+\cos x+1=0$$

$$2\operatorname{sen}x\cdot\cos x+2\cos^2 x+\operatorname{sen}x+\cos x=0$$

Agrupando convenientemente para decompor em fatores:

$$(2\operatorname{sen}x\cdot\cos x+\operatorname{sen}x)+\left(2\cos^2 x+\cos x\right)=0$$

$$\operatorname{sen}x(2\cos x+1)+\cos x(2\cos x+1)=0$$

$$(2\cos x+1)(\operatorname{sen}x+\cos x)=0.$$

Logo, $2\cos x+1=0$ ou $\operatorname{sen}x+\cos x=0$.

$$2\cos x+1=0 \Longrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x_1=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\text{sen}x + \cos x = 0 \Longrightarrow \text{sen}x = -\cos x$$

Dividindo por $\cos x$, com $\cos x \neq 0$:

$$\frac{\text{sen}x}{\cos x} = \text{tg}x = -1 \Longrightarrow x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Para não perder raízes observemos que $\cos x = 0$ tem no intervalo $[0, 2\pi]$ as soluções $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Deve-se verificar se estes números são soluções da equação proposta.

Para $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\text{sen}2\frac{\pi}{2} + \cos 2\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} + 1 &= \text{sen}\pi + \cos\pi + \text{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} + 1 \\ &= 0 - 1 + 1 + 0 + 1 = 1 \neq 0\end{aligned}$$

Portanto, $x = \frac{\pi}{2}$ não é solução.

Para $x = \frac{3\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\text{sen}2\frac{3\pi}{2} + \cos 2\frac{3\pi}{2} + \text{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} + 1 &= \text{sen}3\pi + \cos 3\pi + \text{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} + 1 \\ &= 0 - 1 - 1 + 0 + 1 = -1 \neq 0\end{aligned}$$

Portanto, $x = \frac{3\pi}{2}$ também não é solução.

Problema E.10. Resolver a equação $\text{sen}x + \text{sen}2x + \text{sen}3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

Poderia se pensar em substituir as funções de ângulo duplo e ângulo triplo, mas complicaria muito por causa do $\text{sen}^3 x$ da fórmula $\text{sen}3x = 3\,\text{sen}x - 4\,\text{sen}^3 x$. Então procuraremos uma decomposição fatorial por outra via. Uma ideia é, dado que $\frac{3x+x}{2} = 2x$ e $\frac{3x-x}{2} = x$, agrupar $(\text{sen}3x + \text{sen}x)$ e transformar em produto.

Assim, $\text{sen}3x + \text{sen}x = 2\,\text{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\,\text{sen}2x\cos x$, e no lado direito, substituímos $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$$(\text{sen}x + \text{sen}3x) + \text{sen}2x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

$$2\,\text{sen}2x\cos x + \text{sen}2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1$$

$$2\,\text{sen}2x\cos x + \text{sen}2x = \cos x + 2\cos^2 x \tag{5.18}$$

Existe a "tentação"de substituir, no membro esquerdo, a parcela $\operatorname{sen}2x$ por $2\operatorname{sen}x\cos x$, mas não seria conveniente porque $\operatorname{sen}2x$ é fator comum, então:

$$2\operatorname{sen}2x\cos x + \operatorname{sen}2x = \operatorname{sen}2x(2\cos x + 1)$$

Entretanto, o que há com o membro direito? $\cos x + 2\cos^2 x = \cos x(2\cos x + 1)$. Para a nossa alegria, apareceu o fator $(2\cos x + 1)$ que permite completar a decomposição em fatores.

Substituindo em (5.18):

$$2\operatorname{sen}2x\cos x + \operatorname{sen}2x = \cos x + 2\cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$$

$$\operatorname{sen}2x(2\cos x + 1) - \cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\operatorname{sen}2x - \cos x) = 0.$$

Para completar a decomposição fatorial, substituímos $\operatorname{sen}2x$ por $2\operatorname{sen}x\cos x$ e destacamos o fator comum $\cos x$:

$$(2\cos x + 1)(2\operatorname{sen}x\cos x - \cos x) = 0$$

$$(2\cos x + 1)\cos x(2\operatorname{sen}x - 1) = 0$$

Daí, $2\cos x + 1 = 0$, $\cos x = 0$ e $2\operatorname{sen}x - 1 = 0$.

$$2\cos x + 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x_1 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2\operatorname{sen}x - 1 = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_3 = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

Problema E.11. Resolver a equação $\operatorname{sen}3x = \cos x - \operatorname{sen}x$.

Fonte: Shajno (1985, pág.55)

SOLUÇÃO:

Tendo sido visto no exercício anterior o resultado $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}2x.\cos x$, fica claro aplicá-lo nesta equação. Transpomos todas as parcelas para o membro esquerdo:

$$\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x - \cos x = 0$$

$$2\operatorname{sen}2x.\cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2\,\text{sen}2x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2\,\text{sen}2x - 1 = 0 \Longrightarrow \text{sen}2x = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6} \Longrightarrow x_2 = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}.$$

Problema E.12. Resolver a equação $\cos 7x + \text{sen}^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.

Fonte: Shajno (1985, pág.56)

SOLUÇÃO:

Procuremos a decomposição fatorial para resolver a equação proposta. Transpomos todas as parcelas para o membro esquerdo:

$$\cos 7x + \text{sen}^2 2x - \cos^2 2x + \cos x = 0.$$

Agrupamos $(\cos 7x + \cos x)$ para aplicar a fórmula

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

tomando $A = 7x$ e $B = x$. Então, $\cos 7x + \cos x = 2\cos 4x \cos 3x$. A equação se transforma em:

$$2\cos 4x.\cos 3x + \text{sen}^2 2x - \cos^2 2x = 0.$$

O que fazer com o binômio $\text{sen}^2 2x - \cos^2 2x$, que aparentemente destoa de $2\cos 4x\cos 3x$? A diferença dos quadrados do seno e cosseno lembra a fórmula $\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$. Aplicando-a, tem-se $\text{sen}^2 2x - \cos^2 2x = -\cos 4x$. A decomposição fatorial está pronta:

$$2\cos 4x.\cos 3x - \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x(2\cos 3x - 1) = 0$$

$$\cos 4x = 0 \Longrightarrow 4x = \frac{2k+1}{2}\pi \Longrightarrow x_1 = \frac{2k+1}{8}\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2\cos 3x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Longrightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x_2 = \frac{2}{3}k\pi \pm \frac{\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}.$$

Problema E.13. Resolver a equação $\text{sen}^3 x.\cos x - \cos^3 x.\text{sen}x = \dfrac{1}{4}$.

Fonte: Shajno (1985, pág.56)

SOLUÇÃO:

A ideia inicial é reduzir a expressão do membro esquerdo da equação. Observa-se que se destacamos $\operatorname{sen} x.\cos x$ como fator comum, fica uma diferença de quadrados que lembra a fórmula do cosseno do ângulo duplo. Efetuemos estas transformações:

$$\operatorname{sen} x.\cos x\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen} x.\cos x(-\cos 2x)=\frac{1}{4}$$

O fator $\operatorname{sen} x.\cos x$ lembra a fórmula do seno do ângulo duplo $\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x.\cos x$. Para utilizá-la deve-se completar o fator 2:

$$\frac{1}{2}(2\operatorname{sen} x.\cos x)(-\cos 2x)=\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.\cos 2x=\frac{1}{4}$$

De novo, a fórmula do seno do ângulo duplo salva a resolução, $\operatorname{sen} 2x.\cos 2x=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$. Substituindo:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x\right)=\frac{1}{4}\Longrightarrow-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x=\frac{1}{4}\Longrightarrow\operatorname{sen} 4x=-1$$

$$4x=2k\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{4k-1}{2}\pi\Longrightarrow x=\frac{4k-1}{8}\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Problema E.14. Resolver a equação $\cos 5x+\cos 3x+\operatorname{sen} 5x+\operatorname{sen} 3x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$.

Fonte: Shajno (1985, pág.56)

SOLUÇÃO:

De novo podemos aplicar no membro esquerdo as fórmulas de transformação da soma de senos e cossenos em produto. No membro direito, aplicamos a fórmula do cosseno da diferença $\cos(A-B)=\cos A.\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$. Fica imediata a fatorização:

$$(\cos 5x+\cos 3x)+(\operatorname{sen} 5x+\operatorname{sen} 3x)=\cos\frac{\pi}{4}.\cos 4x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen} 4x$$

$$2\cos 4x.\cos x+2\operatorname{sen} 4x.\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x$$

$$2\cos x(\cos 4x+\operatorname{sen} 4x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x+\operatorname{sen} 4x)$$

$$2\cos x(\cos 4x+\operatorname{sen} 4x)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x+\operatorname{sen} 4x)=0$$

$$(\cos 4x + \text{sen}4x)\left(2\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Daí, $\cos 4x + \text{sen}4x = 0$ ou $2\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

$$2\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow x_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \pm 2k\pi$$

$\cos 4x + \text{sen}4x = 0 \Longrightarrow 1 + \text{tg}4x = 0$, se $\cos 4x \neq 0$, $\Longrightarrow$ $\text{tg}4x = -1 \Longrightarrow 4x = k\pi - \dfrac{\pi}{4}$
$\Longrightarrow x_2 = \dfrac{4k-1}{16}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Deve-se conferir se os valores de x que anulam a função $\cos 4x$ são soluções da equação proposta. Basta checar para as soluções positivas, nos quatro primeiros quadrantes. Vejamos:

$\cos 4x = 0 \Longrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $4x = \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{8}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{8}$.

Para $x = \dfrac{\pi}{8} : \cos\dfrac{5\pi}{8} + \cos\dfrac{3\pi}{8} + \text{sen}\dfrac{5\pi}{8} + \text{sen}\dfrac{3\pi}{8} = 1,8477$

E, $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{4\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi-4\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1,8477$

Logo, $x = \dfrac{\pi}{8}$ não é solução da equação.

Para $x = \dfrac{3\pi}{8} : \cos\dfrac{15\pi}{8} + \cos\dfrac{9\pi}{8} + \text{sen}\dfrac{15\pi}{8} + \text{sen}\dfrac{9\pi}{8} = -0,7654$

E, $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{12\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi-6\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right) = 2\dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq -0,7654$

Logo, $x = \dfrac{3\pi}{8}$ também não é solução da equação.

Problema E.15. Se $\text{cosec}\theta - \text{sen}\theta = m$, $\sec\theta - \cos\theta = n$, eliminar θ.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág.316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$m = \frac{1}{\text{sen}\theta} - \text{sen}\theta = \frac{1 - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\theta} \tag{5.19}$$

$$n = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} \tag{5.20}$$

$$mn = \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta\,\text{sen}\theta$$

De (5.19): $\cos^2\theta = m\,\mathrm{sen}\theta$

$$\cos^3\theta = m\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta = m(mn) = m^2n$$

De (5.20): $\mathrm{sen}^2\theta = n\cos\theta$

$$\mathrm{sen}^3\theta = n\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta = n(mn) = mn^2$$

Como $\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$$(\mathrm{sen}^3\theta)^{2/3} + (\cos^3\theta)^{2/3} = 1$$

$$(mn^2)^{2/3} + (m^2n)^{2/3} = 1.$$

Problema E.16. Resolver a equação $\mathrm{sen}5x + \mathrm{sen}x + 2\,\mathrm{sen}^2x = 1$.

Fonte: Litvinenko e Morkóvich (1989, pág. 244)

SOLUÇÃO:

Utilizando a fórmula de transformação da adição de senos em produto de seno por cosseno:

$$\mathrm{sen}5x + \mathrm{sen}x = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) = 2\,\mathrm{sen}3x\cos 2x$$

e a fórmula que liga função de um argumento a função de argumento duplo:

$$2\,\mathrm{sen}^2x = 1 - \cos 2x$$

a equação acima se transforma em:

$$2\,\mathrm{sen}3x\cos 2x + 1 - \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x(2\,\mathrm{sen}3x - 1) = 0$$

Assim, temos como resultado duas equações: $\cos 2x = 0$, e $2\,\mathrm{sen}3x - 1 = 0$ ou seja,

$$\cos 2x = 0 \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

e

$$2\,\mathrm{sen}3x - 1 = 0 \Longrightarrow \mathrm{sen}3x = \frac{1}{2} \Longrightarrow 3x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \Longrightarrow x = (-1)^k\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Problema E.17. Resolver a equação $\cos 15x = \mathrm{sen}5x$.

Fonte: Litvinenko e Morkóvich (1989, pág. 245)

SOLUÇÃO:

Como $\cos 15x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right)$, vamos substituir na equação acima, ficando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right) = 0$$

Utilizando a relação que transforma a diferença de senos em produto seno cosseno:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 15x - 5x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 15x + 5x}{2}\right) = 0$$

$$2\operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(10x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Resultaram duas equações: $\operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ e $\cos\left(10x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

$$\operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Longrightarrow 5x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5}$$

e

$$\cos\left(10x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Longrightarrow 10x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{40} + k\frac{\pi}{10}.$$

Problema E.18. Resolver a equação $\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$.

Fonte: Litvinenko e Morkóvich (1989, pág. 245)

SOLUÇÃO:

Primeiramente, vamos transformar os produtos de cossenos em somas:

$$\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = \frac{1}{2}\left[\cos(8x - 4x) + \cos(8x + 4x)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\cos(9x - 5x) + \cos(9x + 5x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 12x - \cos 4x - \cos 14x\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 12x - \cos 14x\right] = 0$$

Agora, transformando a diferença de cossenos em produto:

$$\frac{1}{2}\left[\cos 12x - \cos 14x\right] = 2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{12x + 14x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{14x - 12x}{2}\right)\right] = 0$$

$$2\operatorname{sen}13x\operatorname{sen}x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}13x\operatorname{sen}x = 0$$

Temos duas equações: $\text{sen}13x = 0$ e $\text{sen}x = 0$, e assim, duas famílias de soluções para a equação inicial:

$$\text{sen}13x = 0 \Longrightarrow 13x = k\pi \Longrightarrow x = k\frac{\pi}{13}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{sen}x = 0 \Longrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Problema E.19. Se $\text{cotg}\theta + \text{tg}\theta = x$, $\sec\theta - \cos\theta = y$, eliminar θ.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Desenvolvendo o valor de x:

$$x = \text{cotg}\theta + \text{tg}\theta = \frac{1}{\text{tg}\theta} + \text{tg}\theta = \frac{1 + \text{tg}^2\theta}{\text{tg}\theta} = \frac{\sec^2\theta}{\text{tg}\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

$$x = \text{cotg}\theta + \text{tg}\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta} \tag{5.21}$$

Desenvolvendo o valor de y:

$$y = \sec\theta + \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{1\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} \tag{5.22}$$

Utilizando (5.21) e (5.22):

$$x^2y = \left(\frac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta}\right)^2 \cdot \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^3\theta} = \sec^3\theta$$

$$xy^2 = \frac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta} \cdot \left(\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta} \cdot \frac{\text{sen}^4\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^3\theta} = \text{tg}^3\theta$$

Como $\sec^2\theta - \text{tg}^2\theta = 1$,

$$(\sec^3\theta)^{2/3} - (\text{tg}^3\theta)^{2/3} = 1$$
$$(x^2y)^{2/3} + (xy^2)^{2/3} = 1$$

Problema E.20. Se $c\cos^3\theta + 3c\cos\theta\,\text{sen}^2\theta = m$ e $c\,\text{sen}^3\theta + 3c\cos^2\theta\,\text{sen}\theta = n$, então prove que $(m+n)^{2/3} + (m-n)^{2/3} = 2c^{2/3}$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 316)

SOLUÇÃO: Somando as expressões de m e n:

$$\begin{aligned} m + n &= c\cos^3\theta + 3c\cos\theta\,\text{sen}^2\theta + c\,\text{sen}^3\theta + 3c\cos^2\theta\,\text{sen}\theta \\ &= c(\cos^3\theta + 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^3\theta + 3\cos^2\theta\,\text{sen}\theta) \\ &= c(\cos\theta + \text{sen}\theta)^3 \end{aligned}$$

$$(m+n)^{2/3} = c^{2/3}(\cos\theta + \text{sen}\theta)^2 \tag{5.23}$$

Subtraindo as expressões de m e n:

$$\begin{aligned} m-n =& c\cos^3\theta + 3c\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - c\,\text{sen}^3\theta - 3c\cos^2\theta\,\text{sen}\theta \\ &= c(\cos^3\theta - 3\cos^2\theta\,\text{sen}\theta\theta + 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}^3) \\ &= c(\cos\theta - \text{sen}\theta)^3 \end{aligned}$$

$$(m-n)^{2/3} = c^{2/3}(\cos\theta - \text{sen}\theta)^2 \tag{5.24}$$

Somando (5.23) e (5.24):

$$\begin{aligned} (m+n)^{2/3} + (m+n)^{2/3} &= c^{2/3}(\cos\theta + \text{sen}\theta)^2 + c^{2/3}(\cos\theta - \text{sen}\theta)^2 \\ &= c^{2/3}(\cos^2\theta + 2\,\text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 2\,\text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}^2\theta) \\ &= c^{2/3}(\cos^2\theta + \text{sen}^2 + \cos^2\theta + \text{sen}^2) = 2c^{2/3}, \end{aligned}$$

provando a identidade.

Problema E.21. Simplificar a expressão:

$$\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,\text{tg}(\pi-\alpha)}{\text{cotg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,\text{sen}(\pi-\alpha)}$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

Nos problemas que envolvam relações entre funções trigonométricas de arcos que pertençam a quadrantes diferentes, é interessante observar as seguintes propriedades: quando um arco é definido a partir do diâmetro horizontal, a função original se conserva e quando é definido a partir do diâmetro vertical, as funções seno, cosseno, tangente e cotangente mudam para cosseno, seno, cotangente e tangente, respectivamente. Assim, substituindo as funções da expressão acima, por suas equivalentes reduzidas,

$$\cos(\pi/2-\alpha) = \text{sen}\alpha,$$

$$\text{sen}(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\text{cotg}(\pi/2+\alpha) = \text{tg}\alpha,$$

$$\text{tg}(\pi-\alpha) = -\text{tg}\alpha,$$

$$\text{sen}(\pi-\alpha) = \text{sen}\alpha,$$

a expressão inicial fica:

$$\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,\text{tg}(\pi-\alpha)}{\text{cotg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,\text{sen}(\pi-\alpha)}=\frac{2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha(-\,\text{tg}\alpha)}{(-\,\text{tg}\alpha)\,\text{sen}\alpha}=2\cos\alpha$$

Problema E.22. Simplificar a expressão:

$$\frac{\text{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\,\text{tg}(\frac{3\pi}{2}+\beta)}{\cos(\pi-\alpha)\,\text{cotg}(\frac{3\pi}{2}-\beta)}-\frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2}-\beta)\,\text{cotg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(2\pi-\beta)\,\text{tg}(\pi-\alpha)}$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

Utilizando as mesmas relações do problema anterior, e chamando de E a expressão a ser simplificada:

$$\begin{aligned}E&=\frac{(-\cos\alpha)(-\,\text{cotg}\beta)}{(-\cos\alpha)(\,\text{tg}\beta)}-\frac{(-\cos\beta)(-\,\text{tg}\alpha)}{(\cos\beta)(-\,\text{tg}\alpha)}=(-\,\text{cotg}\beta)\frac{1}{\text{tg}\beta}-(-1)\\&=(-\,\text{cotg}\beta)\,\text{cotg}\beta+1=1-\,\text{cotg}^2\beta.\end{aligned}$$

O problema está resolvido, mas o resultado pode ser apresentado de outra forma:

$$E=1-\,\text{cotg}^2\beta=1-\frac{\cos^2\beta}{\text{sen}^2\beta}=\frac{\text{sen}^2\beta-\cos^2\beta}{\text{sen}^2\beta}=\frac{-(\cos^2\beta-\,\text{sen}^2\beta)}{\text{sen}^2\beta}=-\frac{\cos 2\beta}{\text{sen}^2\beta}$$

Problema E.23. Simplificar a expressão $\dfrac{\text{cotg}\frac{\alpha}{2}+\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{\text{cotg}\frac{\alpha}{2}-\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R}-\{(k+1)\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Para resolver este problema, vamos simplesmente substituir as tangentes e cotangentes pelas relações com senos e cossenos:

$$\frac{\text{cotg}\frac{\alpha}{2}+\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{\text{cotg}\frac{\alpha}{2}-\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}+\frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}-\frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Problema E.24. Simplificar a expressão $\dfrac{2}{\text{sen}4\alpha}-\,\text{cotg}2\alpha$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para resolver este problema, inicialmente temos que eliminar o argumento 4α:

$$\frac{2}{\text{sen}4\alpha} - \text{cotg}2\alpha = \frac{2}{\text{sen}(2\alpha + 2\alpha)} - \frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}2\alpha} = \frac{2}{2\,\text{sen}2\alpha \cos\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}2\alpha} = \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{\text{sen}2\alpha \cos 2\alpha}$$
$$= \frac{\text{sen}^2(2\alpha)}{\text{sen}2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\text{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = \text{tg}2\alpha.$$

Problema E.25. Simplificar a expressão:

$$\frac{\text{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\text{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1}$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\frac{2k+1}{4}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para resolver este problema, primeiro calculamos o valor de $\text{tg}^2(45^\circ + \alpha)$:

$$\frac{\text{tg}^2(45^\circ + \alpha)}{\text{tg}^2(45^\circ + \alpha)} = \frac{\text{tg}45^\circ + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}45^\circ\,\text{tg}\alpha} = \frac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha}.$$

Substituindo na expressão inicial:

$$\frac{\text{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\text{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1} = \frac{\left(\dfrac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{(1 + \text{tg}\alpha)^2 - (1 - \text{tg}\alpha)^2}{(1 + \text{tg}\alpha)^2 + (1 - \text{tg}\alpha)^2}$$
$$= \frac{1 + 2\,\text{tg}\alpha + \text{tg}^2\alpha - 1 + 2\,\text{tg}\alpha - \text{tg}^2\alpha}{1 + 2\,\text{tg}\alpha + \text{tg}^2\alpha + 1 - 2\,\text{tg}\alpha + \text{tg}^2\alpha} = \frac{4\,\text{tg}\alpha}{2 + 2\,\text{tg}^2\alpha} = \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$$
$$= 2\,\text{tg}\alpha \cos^2\alpha = 2\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha = \text{sen}2\alpha.$$

Problema E.26. Simplificar a expressão $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1 - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para resolver este problema, vamos utilizar o resultado encontrado no problema anterior:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Substituindo na expressão a ser simplificada:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Como $1-\operatorname{sen}\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2$,

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Mas, $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$,

então

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1.$$

Problema E.27. Simplificar a expressão $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.219)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{4k-1}{4}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{-2k-1}{4}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para facilitar, vamos determinar os termos do denominador separadamente:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha} \tag{5.25}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\right]^2=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)^2 \tag{5.26}$$

substituindo (5.25) e (5.26) na expressão $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$:

$$\begin{aligned}\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)} &= \frac{2\cos^2\alpha-1}{2\left(\dfrac{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}\right)\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)^2}\\ &= \frac{\cos 2\alpha}{(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.\end{aligned}$$

Problema E.28. Simplificar a expressão $\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})-\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.220)

SOLUÇÃO:

Transformando a expressão através da propriedade que relaciona funções de um argumento com funções de argumento duplo:

$$\operatorname{sen}^2\beta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)$$

e substituindo na expressão inicial:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})-\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}) &= \frac{1}{2}\left[1-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[1-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2n}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]-\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}[1-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha]-\frac{1}{2}[1-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha]\\ &= \frac{1}{2}[1-\frac{\sqrt{2}}{2}cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha]\\ &= \frac{1}{2}(\frac{2\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha.\end{aligned}$$

Problema E.29. Simplificar a expressão $\dfrac{\operatorname{sen}(60^\circ+\alpha)}{4\operatorname{sen}\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{sen}\left(75^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (2012, pág.220)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3k+11}{3}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{3k-7}{3}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Utilizando a fórmula de redução $\operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = \cos\beta$ e, se $\beta = 15^\circ + \dfrac{\alpha}{4}$, então $90^\circ - \beta = 75^\circ - \dfrac{\alpha}{4}$. Logo, $\operatorname{sen}\left(75^\circ - \dfrac{\alpha}{4}\right) = \cos 15^\circ + \dfrac{\alpha}{4}$. Aplicando na expressão:

$$\frac{\operatorname{sen}(60^\circ + \alpha)}{4\operatorname{sen}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{sen}\left(75^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(60^\circ + \alpha)}{4\operatorname{sen}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(60^\circ + \alpha\right)}{2\operatorname{sen}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4} + 15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{\operatorname{sen}2\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)},$$

então,

$$\frac{\operatorname{sen}(60^\circ + \alpha)}{4\operatorname{sen}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{sen}\left(75^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)} = \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Problema E.30. Calcular o valor de $\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta(\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta)$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Substituindo os valores de secante e cossecante pelas respectivas relações com cosseno e seno:

$$\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta(\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta) = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) = \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}\right) = 1$$

Problema E.31. Se $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$, calcular o valor de $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321)

SOLUÇÃO:

O conjunto dos valores admissíveis é $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Como foi informado o valor de uma expressão e solicitado o valor de outra expressão, equivalente à soma dos termos da primeira elevados ao quadrado, vamos elevar a primeira expressão ao quadrado:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 4 &\Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 4 \\
&\Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{cosec}^2\theta = 4 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta + 2 + \operatorname{cosec}^2\theta = 4 \\
&\Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 2
\end{aligned}
$$

Problema E.32. Para quantos valores de x, entre 0 e 2π, a equação $2\operatorname{cosec}2x\operatorname{cotg}x - \operatorname{cotg}^2x = 1$ é válida?

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321)

SOLUÇÃO:

Reescrevendo a equação:

$$2\frac{1}{\operatorname{sen}2x}\operatorname{cotg}x - \operatorname{cotg}^2x = 1.$$

Dividindo ambos os lados por $\operatorname{cotg}x$ e substituindo $\operatorname{sen}2x$ por $2\operatorname{sen}x\cos x$:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{2\operatorname{sen}x\cos x} - \operatorname{cotg}x &= \frac{1}{\operatorname{cotg}x} \\
\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x} &= \operatorname{cotg}x + \frac{1}{\operatorname{cotg}x} \\
\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x} &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}x\cos x} \\
\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x\cos x} &= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2x \Longrightarrow \cos^2 x + \operatorname{sen}^2x = 1.
\end{aligned}
$$

Assim, a identidade acima é verdadeira para todos os valores de x, tais que $\operatorname{sen}x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

Problema E.33. A equação $\cos 2x + a\operatorname{sen}x = 2a - 7$ tem uma solução se

a) $a < 2$

b) $x = y$, $x \neq 0$

c)$x = y$

d)$x \neq 0$, $y \neq 0$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321)

SOLUÇÃO:

Substituindo o valor de $\cos 2x$ por $1 - 2\,\text{sen}^2 x$:

$$1 - 2\,\text{sen}^2 x + a\,\text{sen}x = 2a - 7$$

$$2\,\text{sen}^2 x - a\,\text{sen}x = 8 - 2a$$

$$2\,\text{sen}^2 x - a\,\text{sen}x + 2(a-4) = 0$$

$$\text{sen}x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16(a-4)}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16a + 64}}{4} =$$
$$= \frac{a \pm \sqrt{(a-8)^2}}{4} = \frac{a \pm (a-8)}{4}$$

Então, os dois valores para *sinx* seriam $sinx = \dfrac{a-4}{2}$ ou $sinx = 2$. Mas, sabemos que $-1 \le \text{sen}x \le 1$, então só é válido o valor $sinx = \dfrac{a-4}{2}$, e, calculando os valores de a:

$$-1 \le \frac{a-4}{2} \le 1 \Longrightarrow a - 4 \ge -2 \Longrightarrow a \ge 2$$

$$a - 4 \le -2 \Longrightarrow a \le 6$$

Ou seja, $2 \le a \le 6$.

Problema E.34. Indicar se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

Se $x = a\cos^2\theta\,\text{sen}\theta$ e $y = a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$, então $\dfrac{(x^2+y^2)^3}{x^2y^2}$ é independente de θ.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321)

SOLUÇÃO:

Substituindo os valores de x e y na equação:

$$\frac{(x^2+y^2)^3}{x^2y^2} = \frac{[(a\cos^2\theta\,\text{sen}\theta)^2 + (a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta)^2]^3}{(a\cos^2\theta\,\text{sen}\theta)^2(a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta)^2} = \frac{[(a^2\cos^4\theta\,\text{sen}^2\theta) + (a^2\,\text{sen}^4\theta\cos^2\theta)^2]^3}{(a^2\cos^4\theta\,\text{sen}^2\theta)(a^2\,\text{sen}^4\theta\cos^2\theta)}$$
$$= \frac{[a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta(\cos^2\theta) + a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta(\,\text{sen}^2\theta)]^3}{a^4\cos^6\theta\,\text{sen}^6\theta}$$
$$= \frac{[a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta(\cos^2\theta + \,\text{sen}^2\theta)]^3}{a^4\cos^6\theta\,\text{sen}^6\theta} = \frac{[a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta]^3}{a^4\cos^6\theta\,\text{sen}^6\theta} = \frac{a^6\cos^6\theta\,\text{sen}^6\theta}{a^4\cos^6\theta\,\text{sen}^6\theta} = a^2.$$

Logo, $\dfrac{(x^2+y^2)^3}{x^2y^2} = a^2$, independe de θ, confirmando que a afirmação é verdadeira.

Problema E.35. A equação $\text{sen}\theta = x + \dfrac{1}{x}$ é verdadeira para todo $\theta \in \mathbb{R}$?

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321)

SOLUÇÃO:

Vamos utilizar nessa questão a desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica. Lembrando que $MA \geq MG$, vamos calcular as médias entre as duas parcelas que compõem a soma da expressão do seno:

$$MA = \frac{x + \dfrac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$MG = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

Como $MA \geq MG$, $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \geq 1$, logo $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ e assim, $\operatorname{sen}\theta \geq 2$. Mas $\operatorname{sen}\theta \leq 1$, $\forall \theta \in \Re$, então a equação inicial é falsa.

Problema E.36. Qual o valor de $\operatorname{sen}\theta \cos\theta(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta)$?

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 322)

SOLUÇÃO:

$$\operatorname{sen}\theta \cos\theta(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta = \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}\right) = 1$$

Problema E.37. Se para x real, a equação $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta$ é válida, calcular o $\cos\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 322)

SOLUÇÃO:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta \Longrightarrow x^2 + 1 = 2x\cos\theta \Longrightarrow x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$$

para x real, $\triangle \geq 0 \Longrightarrow 4\cos^2\theta - 4 \geq 0 \Longrightarrow \cos^2\theta \geq 1$. Mas, $\cos^2\theta > 1$ é impossível. Então $\cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \cos\theta = \pm 1$.

Problema E.38. Se $\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotg}\theta = q$, calcular o valor de $\operatorname{cosec}\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 322)

SOLUÇÃO:

Partindo da identidade $\operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cotg}^2\theta = 1$:

$$(\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotg}\theta) = 1 \Longrightarrow (\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta) \cdot q = 1 \Longrightarrow (\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta) = \frac{1}{q}$$

Somando com a hipótese:

$$(\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta) + (\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotg}\theta) = q + \frac{1}{q} \Longrightarrow 2\operatorname{cosec}\theta = q + \frac{1}{q} \Longrightarrow \operatorname{cosec}\theta = 2\left(q + \frac{1}{q}\right)$$

Problema E.39. Uma das raízes da equação $8x^3 - 6x + 1 = 0$ é:

a) $\cos 10°$

b) $\cos 30°$

c) $\operatorname{sen}30°$

d) $\cos 80°$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Resolvendo a equação:

$$8x^3 - 6x = -1 \Longrightarrow 4x^3 - 3x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 3x - 4x^3 = \frac{1}{2} \tag{5.27}$$

Como o problema apresenta como opção de resposta para as raízes da equação, senos ou cossenos, vamos utilizar a relação entre os ângulos triplos $\operatorname{sen}3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$. Fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, temos em (5.27) que $3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta = \frac{1}{2}$. Então, $\operatorname{sen}3\theta = \frac{1}{2}$. Assim deduzimos que $3\theta = 30°$ e $\theta = 10°$. Ou seja, uma raiz da equação acima é $x = \operatorname{sen}10° = \cos 10°$. A resposta correta é a letra "d".

Problema E.40. Em um triângulo PQR, $\angle R = \frac{\pi}{2}$. Se $\operatorname{tg}\frac{P}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{Q}{2}$ são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, então:

a) $b = c$

b) $b = a + c$

c) $a = b + c$

d) $c = a + b$

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Como foi informado um dos ângulos do triângulo, então os outros dois serão tais que:

$$P + Q = \pi - R \Longrightarrow P + Q = \pi - \frac{\pi}{2} \Longrightarrow P + Q = \frac{\pi}{2}$$

e assim $\frac{1}{2}(P+Q) = \frac{\pi}{4}$, donde podemos afirmar que $\text{tg}\left(\frac{P}{2}+\frac{Q}{2}\right) = 1$

Sendo $\text{tg}\frac{P}{2}$ e $\text{tg}\frac{Q}{2}$ as raízes da equação do segundo grau acima, então $S = \text{tg}\frac{P}{2} + \text{tg}\frac{Q}{2}$ e $P = \text{tg}\frac{P}{2} \cdot \text{tg}\frac{P}{2}$. Aplicando na fórmula da tangente da soma:

$$\text{tg}\left(\frac{P}{2}+\frac{Q}{2}\right) = \frac{S}{1-P} = 1 \Longrightarrow S = 1-P \tag{5.28}$$

Por outro lado, utilizando as fórmulas da soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau: $S = \frac{-b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, e aplicando em (5.28):

$$\frac{-b}{a} = 1 - \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{a} - 1 = dfracca \Longrightarrow b = c - a \Longrightarrow c = a + b$$

A resposta correta é a letra "d".

Problema E.41. Se em um triângulo ABC, $\cos A = \frac{\text{sen}B}{2\,\text{sen}C}$, prove que ele é um triângulo isósceles.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 326)

SOLUÇÃO:

Como $\cos A = \frac{\text{sen}B}{2\,\text{sen}C}$, então $2\cos A\,\text{sen}C = \text{sen}B$

5.3 Máximos e Mínimos Trigonométricos

Problema M.1. Determine os valores máximo e mínimo que assume a função

$$f(x) = -1 + \text{sen}3x.$$

Fonte: Neto (2009, pág. 258)

SOLUÇÃO:

P: Qual é a única função trigonométrica que aparece na expressão de f(x)?

R: $y = \text{sen}3x$.

P: Qual é o domínio e a imagem da função seno?

R: O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

P: Qual o máximo domínio possível da função dada pela expressão

$$f(x) = -1 + \text{sen}3x?$$

Comentário: No enunciado do problema o autor chama $f(x) = -1 + \text{sen}3x$ de função. Na realidade, essa é a expressão que determina a lei de correspondência entre a variável independente x e sua imagem $f(x)$. Uma função está determinada pelo domínio, contradomínio e a lei de correspondência. Assumimos que a intenção do autor é calcular os valores máximo e mínimo sobre o máximo domínio possível para a expressão $f(x) = -1 + \text{sen}3x$, que é $\mathbb{R}$.

P: A partir da resposta à segunda pergunta, qual é o valor máximo e mínimo da função seno?

R: O valor máximo é 1 e o mínimo -1, $-1 \leq \text{ sen}3x \leq 1$. Como $\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$ e $\text{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1$, temos a certeza de que as cotas -1 e 1 são valores mínimo e máximo e não meras cotas.

P: Então, a partir da desigualdade $-1 \leq \text{ sen}3x \leq 1$, passo a passo iremos a majorar e minorar a expressão $f(x) = -1 + \text{sen}3x$.

Comentário: Induzir, em diálogo com os alunos, os passos seguintes, colocando as propriedades que os justificam:

$$-1 \leq \text{ sen}3x \leq 1 \Longrightarrow -1-1 \leq -1 + \text{sen}3x \leq 1-1 \Longrightarrow -2 \leq -1 + 3\,\text{sen}x \leq 0$$

$$\Longrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$$

P: O que nos diz a desigualdade $-2 \leq f(x) \leq 0$?

R: -2 é uma cota inferior da expressão e 0 uma cota superior.

P: Como garantir que esses números são o valor mínimo e máximo, respectivamente?

R: Achando um elemento do domínio cuja imagem seja o valor mínimo e outro cuja imagem seja o valor máximo. Por exemplo,

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + 3\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 + 3 \cdot (-1) = -4$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 3\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = -1 + 3 \cdot 1 = 2.$$

Está provado que o valor mínimo é -2 e o máximo é 0.

Problema M.2. Determine os valores máximo e mínimo que assume a função

$$f(x) = |-1 + \text{ sen}3x|.$$

Fonte: Neto (2009, pág. 258)

SOLUÇÃO:

P: Como resolver este problema a partir da solução do problema anterior?

R: Seria tomar só os valores não negativos. Assim,

$$-4 \leq -1 + 3\,\text{sen}x \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq |-1 + \text{ sen}3x| \leq 2.$$

Logo, o valor máximo é 2 e o mínimo é 0.

Comentário: O professor deve lembrar a definição de valor absoluto. Novamente surge a questão: se existe um $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$. Para responder isso, resolve-se a equação $-1 + 3\,\text{sen}x = 0$.

$$-1 + 3\,\text{sen}x = 0 \Longrightarrow \text{sen}x = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \text{ arcsen}\frac{1}{3}.$$

Não é necessário utilizar uma calculadora para saber qual é o valor de x, basta saber que existe ao menos um ângulo no primeiro quadrante tal que $\text{sen}x = \dfrac{1}{3}$. Uma outra possibilidade é, em forma intuitiva e acessível aos alunos do ensino médio, explicar que, por ser $f(x) = -1+ \text{ sen}3x$ contínua em $\mathbb{R}$, toma todos os valores intermediários entre 0 e 2.

Problema M.3. Determine o valor mínimo assumido pela função $f(x) = 4^{\,\text{sen}x \cos x}$.

Fonte: Neto (2009, pág. 258)

SOLUÇÃO:

P: Identifique a estrutura da função $f(x)$ e seu domínio máximo.

R: Trata-se da função exponencial de base 4, $4^{g(x)}$, com $g(x) = \text{ sen}x \cos x$. Então o máximo domínio possível é $\mathbb{R}$. A função exponencial é crescente em todo seu domínio.

P: Qual seria a estratégia para resolver o problema?

R: Encontrar a imagem da função do expoente, $g(x) = \text{ sen}x \cos x$.

P: Como fazer essa análise? Observem que facilitaria muito reduzir $\text{sen}x \cos x$ a uma única função trigonométrica. O que lembra esse produto?

R: A fórmula do seno do arco duplo, $\text{sen}2x = 2\,\text{sen}x \cos x$.

P: Como transformar?

R: $\text{sen}x \cos x = \dfrac{1}{2}(2\,\text{sen}x \cos x) = \dfrac{1}{2} \cdot \text{ sen}2x$.

P: Desenvolvam os passos para achar os valores máximo e mínimo.

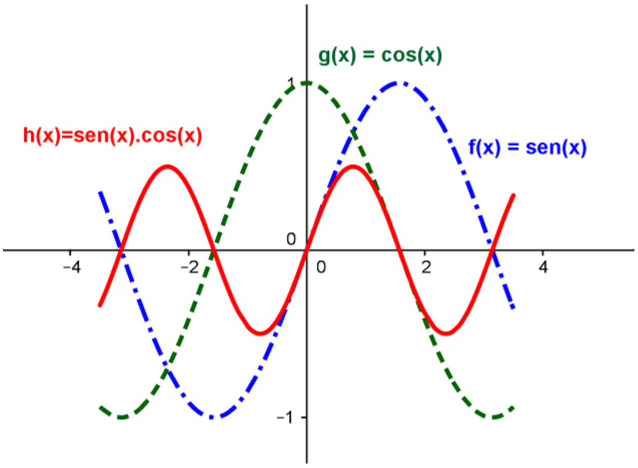
R: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \text{ sen}2x \leq 1$.

Daí, multiplicando por $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\text{sen}2x}{2} \leq \dfrac{1}{2}$.

P: Concluindo, por ser estritamente crescente a função exponencial determinada por $y = 4^x$, tem-se que o valor mínimo é $4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{2}$.

Comentário: No exercício não é perguntado o valor máximo, mas com raciocínio análogo se vê que o valor máximo é $4^{1/2} = 2$. Como informação complementar, mostramos abaixo o gráfico das funções $g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ e $f(x) = 4^{\operatorname{sen} x \cos x}$, obtidos no software Maple.

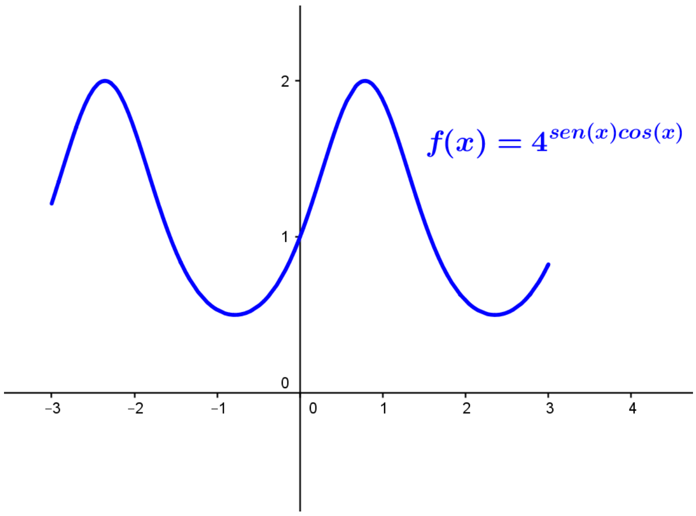
Figura 8 – Gráfico da função produto seno x cosseno



Fonte: Autora

.

Figura 9 – Gráfico da função $4^{\operatorname{sen} x \cos x}$



Fonte: Autora

.

Problema M.4. Determine o valor mínimo assumido pela função $f(x) = (0,1)^{\cos x}$.

Fonte: Neto (2009, pág. 258)

SOLUÇÃO:

P: Identifique a estrutura da função $f(x)$ e compare-a com a função f do exercício anterior.

R: Trata-se também de uma função exponencial, cuja base é $0,1 = \dfrac{1}{10}$. Seu domínio máximo possível é também $\mathbb{R}$.

P: Qual a diferença fundamental em relação ao problema anterior?

R: A base 0,1 é um número compreendido estritamente entre 0 e 1, pelo que esta exponencial é decrescente, ao contrário da função do exercício anterior, que é crescente.

P: Como começaríamos a resolver o problema?

R: Seguindo a estratégia do exercício anterior, é muito fácil, já que o expoente é a função cosseno e sabemos que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

P: Qual seria a "casca de banana" em relação ao exercício anterior?

R: A função deste problema é decrescente, ou seja, seu valor mínimo é alcançado no valor máximo do expoente.

P: Desenvolvam!

R: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow (0,1)^1 \leq (0,1)^{\cos x} \leq (0,1)^{-1} \Longleftrightarrow (0,1) \leq (0,1)^{\cos x} \leq 10$. Portanto, o valor máximo procurado é 10.

Problema M.5. Ache os valores máximo e mínimo da função $\varphi(x) = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$.

Fonte: Lidski e outros (1972, pág. 91)

SOLUÇÃO:

P: A forma da função nos lembra um recurso já utilizado para transformar $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$. Qual é esse recurso?

R: Utilizar a identidade algébrica

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - 2ab + b^2\right) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right].$$

Tomando $b = \cos^2 x$ e $a = \operatorname{sen}^2 x$, obtém-se a identidade

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x.$$

P: Para procurar o máximo e o mínimo de $\varphi(x) = 1 - \dfrac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x$ é melhor escrevê-la como uma fração,

$$\varphi(x) = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x = \frac{4 - 3\operatorname{sen}^2 x}{4}.$$

Por quê?

R:A fração $\dfrac{4 - 3\operatorname{sen}^2 x}{4}$ tem o denominador constante e positivo, logo seu valor máximo (mínimo) é alcançado para o valor da variável x que faz máximo (mínimo) o numerador.

P: Comecem as operações com o numerador.

R:

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \ &\operatorname{sen} x \leq 1 \Longrightarrow \\
0 \leq \ &\operatorname{sen}^2 x \leq 1 \Longrightarrow \\
-1 \leq \ &-\operatorname{sen}^2 x \leq 0 \Longrightarrow \\
-3 \leq \ &-3\operatorname{sen}^2 x \leq 0 \Longrightarrow \\
4-3 \leq \ &4-3\operatorname{sen}^2 x \leq 4 \Longrightarrow \\
\frac{4-3}{4} \leq \ &\frac{4-3\operatorname{sen}^2 x}{4} \leq \frac{4}{4} \Longrightarrow \\
\frac{1}{4} \leq \ &\frac{4-3\operatorname{sen}^2 x}{4} \leq 1 \\
\frac{1}{4} \leq \ &\varphi \leq 1(x).
\end{aligned}
$$

Logo, o valor mínimo de $\varphi(x)$ é $\frac{1}{4}$ e o máximo é 1.

Problema M.6. Ache os valores máximo e mínimo da função

$$y = 2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x + 6\operatorname{sen} x \cos x.$$

Fonte: Lidski e outros (1972, pág. 92)

SOLUÇÃO:

Aplicaremos as fórmulas do seno e cosseno do ângulo duplo: $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$ e $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. Da última fórmula tem-se

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \tag{5.29}$$

$$4\cos^2 x = 2\left(\cos^2 x\right) = 2(1+\cos 2x) \tag{5.30}$$

$$6\operatorname{sen} x \cos x = 3(2\operatorname{sen} x \cos x) = 3\operatorname{sen} 2x \tag{5.31}$$

Substituindo (5.29), (5.30) e (5.31) em y:

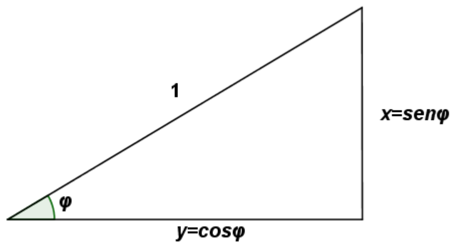
$$y = (1-\cos 2x) + 2(1+\cos 2x) + 3\operatorname{sen} 2x$$

Simplificando:

$$y = 3 + \cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x$$

Agora vamos introduzir um recurso que é muito difícil de induzir nos alunos, mas que a partir de sua utilização neste problema pode, talvez, ser lembrado e aplicado em futuros problemas. O recurso consiste em introduzir o ângulo auxiliar $\varphi = \arctan\frac{1}{3}$, o que significa que φ é o ângulo do primeiro quadrante cuja tangente igual a $\frac{1}{3}$. Nos interessa saber os valores de $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$. Para isso, construímos um triângulo retângulo com hipotenusa unidade e um ângulo agudo igual a φ, conforme a figura abaixo, para entender melhor.

Figura 10 – Triângulo retângulo auxiliar



Fonte: Autora.

Cumpre-se: $\operatorname{tg} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{1}{3}$ e $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Resolvendo o sistema das duas equações em $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$, obtém-se $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ e $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Aplicando a fórmula do seno da soma:

$$\operatorname{sen}(2x+\varphi) = \operatorname{sen}2x \cdot \cos\varphi + \cos 2x \cdot \operatorname{sen}\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x.$$

Agora vamos transformar y aplicando o resultado acima, de modo a termos uma única expressão trigonométrica em y para, com facilidade, determinar suas cotas superior e inferior.

$$y = 3 + 3\operatorname{sen}2x + \cos 2x = 3 + \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x\right) = 3 + \sqrt{10}\operatorname{sen}(2x+\varphi).$$

Então:

$$-1 \le \operatorname{sen}(2x+\varphi) \le 1 \Longrightarrow -\sqrt{10} \le \operatorname{sen}(2x+\varphi) \le \sqrt{10} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 3 - \sqrt{10} \le 3 + \operatorname{sen}(2x+\varphi) \le 3 + \sqrt{10},$$

assim, o valor mínimo de y é $3-\sqrt{10}$ e o valor máximo é $3+\sqrt{10}$.

Problema M.7. Ache a imagem da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\operatorname{sen}x + 1)(\cos x + 1)$.

Fonte: Gelca e Andreescu (2007) pág.234.

SOLUÇÃO:

Embora no enunciado não se fala em calcular o valor máximo e o valor mínimo da função f, de fato, ao determinar o conjunto imagem da função está-se determinando seus valores máximo e mínimo.

Para começar, vamos transformar a expressão de $f(x)$. A conveniência dessas transformações será percebida no final da resolução.

Efetuemos o produto dos parênteses:

$$f(x) = (\operatorname{sen} x + 1)(\cos x + 1) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x + 1.$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{2}$:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x + 1 = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x \cos x - \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x + \cos x + 1.$$

Agrupando e escrevendo o coeficiente 1 de $\operatorname{sen} x \cos x$ como $\frac{1}{2} \cdot 2$:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x\right) - \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x + \cos x + 1.$$

Destacando $\frac{1}{2}$ e substituindo 1 por $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + (1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x) - \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x + \cos x + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x\right) - \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x + \cos x + 1 \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x + \cos x + 1. \end{aligned}$$

Agora, vamos desenvolver a expressão para procurar uma função cuja variável independente seja $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. Reescrevendo $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2(\operatorname{sen} x + \cos x) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(\operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 2(\operatorname{sen} x + \cos x) + 1\right]. \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{sen} x + \cos x) + 1\right]^2$. Considerando $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, f pode ser expressa como uma função h de y, da forma: $h(y) = \frac{1}{2}(y+1)^2$.

Agora efetuaremos mais algumas transformações aplicando a fórmula do cosseno da diferença:

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x = (0 \cdot \cos x + 1 \cdot \operatorname{sen} x) + \cos x = \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x\right) + \cos x$$

Logo, $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x$.

A seguir, utilizamos a fórmula $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$, com $A = \dfrac{\pi}{2} - x$ e $B = x$:

$$\begin{aligned} y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x &= 2\cos\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - x}{2}\right]\cdot\cos\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + x}{2}\right] \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-1 \leq \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$, e daí,

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

Como $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$, resulta que $-\sqrt{2} - 1 \leq y + 1 \leq \sqrt{2} + 1$;

Assim, $0 \leq (y+1)^2 \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^2$ e então, $0 \leq \dfrac{1}{2}(y+1)^2 \leq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2$, ou seja, $0 \leq h(y) \leq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2$.

Portanto, a imagem da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\operatorname{sen} x + 1)(\cos x + 1)$, que foi expressa como $h(y)$ é o intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]$.

Comentário: A complexidade da resolução do problema dificulta uma elaboração conjunta em diálogo com os alunos. Deve-se recomendar estudar a demonstração em detalhe para incorporar as ideias a fim de aplicar em futuros problemas.

Problema M.8. O valor máximo de $(\cos\alpha_1)\cdot(\cos\alpha_2)\cdots(\cos\alpha_n)$, sob a restrição $\theta \leq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \leq \dfrac{\pi}{2}$ e $(\operatorname{cotg}\alpha_1)\cdot(\operatorname{cotg}\alpha_2)\cdots(\operatorname{cotg}\alpha_n) = 1$ é:

a) $\dfrac{1}{2^{n/2}}$

b) $\dfrac{1}{2^n}$

c) $\dfrac{1}{2n}$

d) 1

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 315)

SOLUÇÃO:

Mostramos aos alunos que, se transformarmos o produto das cotangentes em termos de senos e cossenos, aparecerá a expressão da qual devemos mostrar o seu valor máximo:

$$\frac{\cos\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_1}\cdot\frac{\cos\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_2}\cdots\frac{\cos\alpha_n}{\operatorname{sen}\alpha_n} = 1$$

$$(\cos\alpha_1)(\cos\alpha_2)\cdots(\cos\alpha_n) = (\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)\cdots(\operatorname{sen}\alpha_n).$$

Como temos produtos de cossenos e produtos de senos será mais fácil resolver o problema se tivermos apenas uma das funções seno ou cosseno. Então, para eliminar um dos dois, podemos multiplicar cada lado por $\cos\alpha_i$ $i = 1, 2, ..., n$. Assim,

$$(\cos^2\alpha_1)(\cos^2\alpha_2)\cdots(\cos^2\alpha_n) = (\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_2)\cdots(\operatorname{sen}\alpha_n\cos\alpha_n).$$

Mas $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$,

então

$$\prod\cos^2\alpha_i = \prod\frac{\operatorname{sen}^2\alpha_i}{2}.$$

Outro dado do problema é que $0 \leq \alpha_i \leq \dfrac{\pi}{2}$, ou seja $0 \leq 2\alpha_i \leq \pi$. Como $0 \leq \operatorname{sen}2\alpha_i \leq 1$, para esse intervalo, o valor máximo do produto $\prod$ será:

$$\prod\cos^2\alpha_i = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n},$$

e assim

$$\prod\cos^2\alpha_i = \frac{1}{2^{1/2}}\cdot\frac{1}{2^{1/2}}\cdots\frac{1}{2^{n/2}}.$$

Logo, a resposta correta é a letra "a".

Problema M.9. Calcular o menor valor de $2\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321.)

SOLUÇÃO:

Reescrevendo a equação:

$$2\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta = 2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + \cos^2\theta = 2 + \cos^2\theta$$

Como $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, o menor valor da expressão será obtido quando $\cos^2\theta = 0$, ou seja, o menor valor de $2\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta$ é 2, atingido quando $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Problema M.10. Calcular o maior valor de $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 321.)

SOLUÇÃO:

Reescrevendo a equação:

$$\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Mas a expressão

$$1 - 2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta \leq 1,$$

pois o produto

$$\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta \geq 0.$$

Logo, o maior valor de $\mathrm{sen}^4\theta + \cos^4\theta$ será 1, quando $\mathrm{sen}\theta = 0$ ou $\cos\theta = 0$.

Problema M.11. Calcular o menor valor de $\mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{cotg}^2\theta$.

Fonte: Khanna e Sharma (2012, pág. 322.)

SOLUÇÃO:

Vamos utilizar a desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica de dois números positivos, $\mathrm{tg}^2\theta$ e $\mathrm{cotg}^2\theta$:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{cotg}^2\theta}{2} \geq \sqrt{\mathrm{tg}^2\theta\,\mathrm{cotg}^2\theta} \Longrightarrow \mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{cotg}^2\theta \geq 2\sqrt{\mathrm{tg}^2\theta\frac{1}{\mathrm{tg}^2\theta}}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{cotg}^2\theta \geq 2$$

Logo, o menor valor de $\mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{cotg}^2\theta$ é 2.

5.4 Desigualdades Trigonométricas

Problema D.1. Demonstrar a desigualdade

$$a\,\mathrm{sen}^2\alpha + \frac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab}$$

sabendo que $a > 0$, $b > 0$ e $\alpha \neq n\pi$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 231)

Vamos utilizar a desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica de dois números positivos, $a\,\mathrm{sen}^2\alpha$ e $\dfrac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha}$, salientando que tal desigualdade pode ser utilizada pois temos a e $b > 0$ e $\mathrm{sen}^2\alpha > 0$.

$$MA = \frac{a\,\mathrm{sen}^2\alpha + \dfrac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha}}{2}$$

$$MG = \sqrt{a\,\mathrm{sen}^2\alpha} \cdot \frac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

Como $MA \geq MG$, temos que:

$$\frac{a\,\mathrm{sen}^2\alpha + \dfrac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha}}{2} \geq \sqrt{a\,\mathrm{sen}^2\alpha} \cdot \frac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha},$$

isto é,

$$a\,\mathrm{sen}^2\alpha + \frac{b}{\mathrm{sen}^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab},$$

ficando provada a desigualdade.

Problema D.2. Demonstrar que se A, B e C são os ângulos de um triângulo,

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 231)

SOLUÇÃO:

Sabemos que $A + B + C = 180°$.

Então $A + B = 180° - C$, e, portanto, $\dfrac{A+B}{2} = 90° - \dfrac{C}{2}$.

Por outro lado, $\cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\left(90° - \dfrac{C}{2}\right) = \mathrm{sen}\dfrac{C}{2}$.

Sabendo que $0 \leq \cos\dfrac{A-B}{2} \leq 1$ e $\cos\dfrac{A+B}{2} = \mathrm{sen}\dfrac{C}{2}$, então:

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq \mathrm{sen}\frac{C}{2}$$

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}$$

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C \leq 2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2} + \cos C. \tag{5.32}$$

Substituindo a propriedade da soma dos cossenos: $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ em (5.32), fica:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2} + \cos C. \tag{5.33}$$

Assim, devemos provar que

$$2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2} + \cos C \leq \frac{3}{2}. \tag{5.34}$$

Utilizando a relação entre cosseno de ângulo simples e cosseno de ângulo duplo $\cos C = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\dfrac{C}{2}$ e, substituindo em (5.34), resta-nos provar que:

$$2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2} + 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Assim,

$$-2\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2}+2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}+1\leq\frac{3}{2}$$
$$-2\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2}+2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}+1-\frac{3}{2}\leq 0$$
$$-2\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2}+2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\leq 0$$
$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2}-2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\geq 0$$
$$4\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2}-4\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}+1\geq 0$$
$$\left(2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}-1\right)^2\geq 0$$

Essa desigualdade é verdadeira para todo $\mathrm{sen}\frac{C}{2}$, e assim, $-2\,\mathrm{sen}^2\frac{C}{2}+2\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}+1\leq\frac{3}{2}$ também é verdade.

Portanto, de (5.33), fica provada a desigualdade $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$.

Problema D.3. Demonstrar a desigualdade $\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}2\alpha\,\mathrm{sen}3\alpha<\frac{3}{4}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 232)

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade:

$$\begin{aligned}(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}2\alpha)\,\mathrm{sen}3\alpha &= \frac{\cos(2\alpha-\alpha)+\cos(2\alpha+\alpha)}{2}\cdot\mathrm{sen}3\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{2}\cdot\mathrm{sen}3\alpha\\ &=\frac{\mathrm{sen}3\alpha\cos\alpha-\mathrm{sen}3\alpha\cos 3\alpha}{2}\end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por 2:

$$(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}2\alpha)\,\mathrm{sen}3\alpha=\frac{2\,\mathrm{sen}3\alpha\cos\alpha-2\,\mathrm{sen}3\alpha\cos 3\alpha}{4}=\frac{2\,\mathrm{sen}3\alpha\cos\alpha-\mathrm{sen}6\alpha}{4}$$

Agora, substituindo $\mathrm{sen}3\alpha\cos\alpha$ por $\frac{\mathrm{sen}(3\alpha-\alpha)+\mathrm{sen}(3\alpha+\alpha)}{2}=\frac{\mathrm{sen}2\alpha+\mathrm{sen}4\alpha}{2}$, fica:

$$(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}2\alpha)\,\mathrm{sen}3\alpha=\frac{2\frac{\mathrm{sen}2\alpha+\mathrm{sen}4\alpha}{2}-\mathrm{sen}6\alpha}{4}=\frac{\mathrm{sen}2\alpha+\mathrm{sen}4\alpha-\mathrm{sen}6\alpha}{4}\tag{5.35}$$

Como $\mathrm{sen}2\alpha\leq 1$, $\mathrm{sen}4\alpha\leq 1$ e $-\mathrm{sen}6\alpha\leq 1$, então:

$$\mathrm{sen}2\alpha+\mathrm{sen}4\alpha-\mathrm{sen}6\alpha\leq 3.$$

Analisando o sinal de igualdade, o mesmo só será válido para os valores de α que satisfaçam: $\text{sen}2\alpha = 1$, $\text{sen}4\alpha = 1$ e $\text{sen}6\alpha = -1$. Tomando $\text{sen}2\alpha = 1$, então $\cos 2\alpha = 0$ e assim, $\text{sen}4\alpha = 2\,\text{sen}2\alpha \cos 2\alpha = 0$, contradizendo a segunda condição $\text{sen}4\alpha = 1$.

Logo,

$$\text{sen}2\alpha + \text{sen}4\alpha - \text{sen}6\alpha < 3$$

$$\frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}4\alpha - \text{sen}6\alpha}{4} < \frac{3}{4} \tag{5.36}$$

De (5.35) e de (5.36):

$$\text{sen}\alpha\,\text{sen}2\alpha\,\text{sen}3\alpha = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}4\alpha - \text{sen}6\alpha}{4} < \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\alpha\,\text{sen}2\alpha\,\text{sen}3\alpha < \frac{3}{4}$$

comprovando a desigualdade.

Problema D.4. Demonstrar que

$$\text{tg}\alpha_1 < \frac{\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + \cdots + \text{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < \text{tg}\alpha_n$$

se $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 233)

SOLUÇÃO:

Para o intervalo aberto $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, a função $\text{sen}x$ é crescente e a função $\cos x$ é decrescente, ou seja,

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n \Longrightarrow 0 < \text{sen}\alpha_1 < \text{sen}\alpha_2 < \cdots < \text{sen}\alpha_n$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n \Longrightarrow \cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \cdots > \cos\alpha_n > 0$$

Como temos no numerador uma soma de n parcelas, em que a menor é $\text{sen}\alpha_1$, e a maior é $\text{sen}\alpha_n$, então essa soma é maior que $n\,\text{sen}\alpha_1$ e é menor que $n\,\text{sen}\alpha_n$, ou seja:

$$n\,\text{sen}\alpha_1 < \text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + \cdots + \text{sen}\alpha_n < n\,\text{sen}\alpha_n. \tag{5.37}$$

Analogamente para a soma dos cossenos:

$$n\cos\alpha_1 > \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n > n\cos\alpha_n. \tag{5.38}$$

Dividindo a desigualdade (5.37) pela desigualdade (5.38):

$$\frac{n\,\text{sen}\alpha_1}{n\cos\alpha_1} < \frac{\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + \cdots + \text{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < \frac{n\,\text{sen}\alpha_n}{n\cos\alpha_n},$$

e então,

$$\text{tg}\alpha_1 < \frac{\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + \cdots + \text{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < \text{tg}\alpha_n.$$

Problema D.5. Demonstrar a desigualdade

$$\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\beta\,\text{tg}\gamma + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\gamma < 1$$

se $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\gamma > 0$ e $\alpha + \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 233)

SOLUÇÃO:

Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade $\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\beta\,\text{tg}\gamma + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\gamma < 1$:

$$\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\beta\,\text{tg}\gamma + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\gamma(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta). \tag{5.39}$$

Temos que $\gamma < \dfrac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$, então substituindo em (5.39):

$$\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\beta\,\text{tg}\gamma + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\gamma < \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta).$$

Como $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \text{cotg}(\alpha + \beta)$,

$$\begin{aligned}
\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{tg}\beta\,\text{tg}\gamma + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\gamma &< \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \text{cotg}(\alpha + \beta)(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) \\
&= \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \frac{1}{\text{tg}(\alpha + \beta)}(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) \\
&= \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + \frac{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) \\
&= \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta + 1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta < 1,
\end{aligned}$$

provando a desigualdade.

Problema D.6. Mostrar que se α, β, γ são os valores dos ângulos de um triângulo, então:

$$(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma)^2 > 9\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + \text{sen}\gamma.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 234)

Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então podemos afirmar que $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, ou seja,

$\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}\gamma > 0$ e assim, podemos usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica de três números positivos.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma} \tag{5.40}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade (5.40) ao quadrado:

$$(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)^2 \geq 9\sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma)^2}.$$

Mas, $\sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma)^2} > \sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma)^3}$, pois $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}\gamma < 1$. Então,

$$(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)^2 \geq 9\sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma)^3} = 9 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma,$$

provando a desigualdade.

Problema D.7. Demonstrar a desigualdade $\operatorname{tg}\alpha - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \beta$, se $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 235)

SOLUÇÃO:

Temos que $\operatorname{tg}x > x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Como $\beta > \alpha$, $\exists x$ tal que $x = \beta - \alpha$. Assim, podemos afirmar que $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) > \beta - \alpha$. Se demonstrarmos que $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$, teremos provado que $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha$. Logo, devemos provar que

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}(\beta - \alpha).$$

Para isso, vamos calcular a diferença $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$, cujo resultado deve ser positivo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\beta - \alpha) &= \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} \\
&= \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha + (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} \\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha).
\end{aligned}$$

Os termos $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ são positivos, pois α e β pertencem ao intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e como $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$, o produto $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$ também é positivo.

Logo do resultado obtido acima $\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha - \text{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\beta\,\text{tg}\alpha}(\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha)$, podemos afirmar que:

$$\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha - \text{tg}(\beta - \alpha) > 0$$

$$\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha > \text{tg}(\beta - \alpha).$$

Mas $\text{tg}(\beta - \alpha) > \beta - \alpha$,

então $\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha > \beta - \alpha$ e assim, $\text{tg}\beta - \beta > \text{tg}\alpha - \alpha$.

Problema D.8. Demonstrar a desigualdade $\cos 36° > \text{tg}36°$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 236)

SOLUÇÃO:

Supondo que o contrário da desigualdade seja verdade, isto é:

$$\cos 36° \leq \text{tg}36°, \tag{5.41}$$

$$\cos 36° \leq \frac{\text{sen}36°}{\cos 36°},$$

$$\cos^2 36° \leq \text{sen}36°.$$

Usando a relação $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$, e substituindo $\cos^2 36° = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 72°)$ na desigualdade $\cos^2 36° \leq \text{sen}36°$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1 + \cos 72°) &\leq \text{sen}36° \\
1 + \cos 72° &\leq 2\,\text{sen}36° \\
1 + \cos(90° - 18°) &\leq 2\,\text{sen}36° \\
1 + \text{sen}18° &\leq 2\,\text{sen}(30° + 6°) \\
1 + 2\,\text{sen}9° \cos 9° &\leq 2\,\text{sen}30° \cos 6° + 2\cos 30°\,\text{sen}6° \\
1 + 2\,\text{sen}9° \cos 9° &\leq \cos 6° + 2\cos 30°\,\text{sen}6°
\end{aligned}$$

Como $1 > \cos 6°$, $\text{sen}9° > \text{sen}6°$ e $\cos 6° > \cos 30°$, verificamos que a desigualdade $1 + 2\,\text{sen}9° \cos 9° \leq \cos 6° + 2\cos 30°\,\text{sen}6°$ é uma contradição. Logo, a desigualdade (5.41) é falsa.

Problema D.9. Mostrar que se A, B, C são os ângulos de um triângulo,

$$\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 236)

SOLUÇÃO:

Vamos supor que a desigualdade $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ seja falsa, isto é,

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} > \frac{1}{8}. \tag{5.42}$$

Utilizando a propriedade que transforma o produto dos senos na diferença dos cossenos, obtemos:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

Substituindo em (5.42):

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2} > \frac{1}{8}$$
$$\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2} > \frac{1}{4}$$
$$\cos\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} > \frac{1}{4}.$$

Por outro lado, do produto de seno por cosseno, transformado em soma de senos:

$$\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{-A+B+C}{2} + \operatorname{sen}\frac{A-B+C}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{-A-B+C}{2} + \operatorname{sen}\frac{A+B+C}{2}\right)\right] > \frac{1}{4}$$
$$\operatorname{sen}\frac{-A+B+C}{2} + \operatorname{sen}\frac{A-B+C}{2} - \operatorname{sen}\frac{-A+B+C}{2} - \operatorname{sen}\frac{A+B+C}{2} > \frac{1}{2}.$$

Pela imparidade da função seno:

$$\operatorname{sen}\frac{-A+B+C}{2} + \operatorname{sen}\frac{A-B+C}{2} + \operatorname{sen}\frac{A-B-C}{2} - \operatorname{sen}\frac{A+B+C}{2} > \frac{1}{2}. \tag{5.43}$$

Mas, como $A+B+C = 180°$, $A-B+C = 180° - 2B$, $-A+B+C = 180° - 2A$ e $A+B-C = 180° - 2C$, vamos substituir estas relações nas parcelas de (5.43), obtendo:

$$\operatorname{sen}\frac{-A+B+C}{2} = \operatorname{sen}\frac{(180° - 2A)}{2} = \operatorname{sen}(90° - A) = \cos A,$$
$$\operatorname{sen}\frac{A-B+C}{2} = \operatorname{sen}\frac{(180° - 2B)}{2} = \operatorname{sen}(90° - B) = \cos B,$$
$$\operatorname{sen}\frac{A+B-C}{2} = \operatorname{sen}\frac{(180° - 2C)}{2} = \operatorname{sen}(90° - C) = \cos C,$$
$$\operatorname{sen}\frac{A+B+C}{2} = \operatorname{sen}\frac{(180°)}{2} = \operatorname{sen}90° = 1.$$

Finalmente, substituindo em (5.43), obtemos:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 > \frac{1}{2}$$

e

$$\cos A + \cos B + \cos C > \frac{3}{2}$$

Mas, foi provado no Problema D.2 que $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ e, portanto, o resultado $\cos A + \cos B + \cos C > \frac{3}{2}$ é uma contradição. Assim, (5.42) é falso e, portanto, a desigualdade $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ é verdadeira.

5.5 Funções Trigonométricas Inversas

Problema F.1. Simplificar a expressão $\cos(\operatorname{arcsen} x)$, $-1 \leq x \leq 1$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 226)

SOLUÇÃO:

Chamamos $\operatorname{arcsen} x = y$. Então $\operatorname{sen} y = x$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Devemos calcular o $\cos y$. Sabemos que $\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 - x^2$. Como $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, então $\cos y \geq 0$. Assim $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, ou seja, $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Problema F.2. Simplificar a expressão $\cos(2 \operatorname{arcsen} x)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. ex 226)

SOLUÇÃO:

Utilizando a relação $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$, temos que

$$\cos(2 \operatorname{arcsen} x) = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x).$$

Tomando os valores do problema anterior:

$$\cos(2 \operatorname{arcsen} x) = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 - x^2 = 1 - x^2 - x^2,$$

e assim, $\cos(2 \operatorname{arcsen} x) = 1 - 2x^2$.

Problema F.3. Simplificar a expressão $\operatorname{sen}(\arctan x)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 226)

SOLUÇÃO:

Fazemos $y = \arctan x$, então $\operatorname{tg} y = x$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Através da igualdade $\cos^2 y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$, vamos encontrar $\cos y$.

Sabemos que, no intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $\cos y > 0$. Assim,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} \Longrightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Finalmente, $\operatorname{sen} y = \operatorname{tg} y \cos y = x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

ou seja, $\operatorname{sen}(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Problema F.4. Calcular $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{17}{5}\pi\right)\right)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 227)

SOLUÇÃO:

Se chamamos $y = \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{17}{5}\pi\right)\right)$, então $\cos y = \cos\left(-\dfrac{17}{5}\pi\right)$, $0 \leq y \leq \pi$.

Utilizando a periodicidade da função cosseno:

$$\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right) = \cos\left(-4\pi + \frac{3}{5}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = \cos y$$

Logo, $y = \dfrac{3}{5}\pi$, ou seja, $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{17}{5}\pi\right)\right) = \dfrac{3}{5}\pi$.

Problema F.5. Mostrar que $\arccos\dfrac{1}{2} + \arccos\left(-\dfrac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\dfrac{13}{14}\right)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 227)

SOLUÇÃO:

Chamando $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2}$, $\beta = \arccos\left(-\dfrac{1}{7}\right)$ e $\gamma = \arccos\left(-\dfrac{13}{14}\right)$, temos que: $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ e $\cos\gamma = -\dfrac{13}{14}$, $\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \pi$.

Precisamos mostrar que $\alpha + \beta = \gamma$. Para isso, vamos utilizar uma certa função trigonométrica $A(x)$. Devemos ter o cuidado de observar que $A(\alpha+\beta) = A(\gamma)$ só é válido se $\alpha+\beta$ e γ pertencerem ao mesmo quadrante. Sabemos que $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ e $\cos\gamma = -\dfrac{13}{14}$, $\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \pi$. Então, podemos concluir que $(\alpha+\beta)$ e γ pertencem ao intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Uma função trigonométrica que é monótona nesse intervalo é a função seno, pois é decrescente entre $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$. Assim, faremos $A(x) = \operatorname{sen} x$.

Agora devemos mostrar que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\gamma)$.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\frac{\pi}{3}. \tag{5.44}$$

Precisamos calcular o valor de $\operatorname{sen}\beta$. Pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Substituindo o valor de $\operatorname{sen}\beta$ em (5.44), obtemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Agora, vamos calcular $\operatorname{sen}\gamma$:

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\left(-\frac{13}{14}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{169}{196}} = \frac{\sqrt{27}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Logo, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\gamma$. Agora podemos afirmar que $\alpha+\beta=\gamma$, pois vimos que $\alpha+\beta$ e γ pertencem ao mesmo quadrante.

Problema F.6. Simplificar a expressão: $\cos(\arccos x + \arccos y)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 229)

SOLUÇÃO:

Se fizermos $\arccos x = a$ e $\arccos y = b$, então $\cos a = x$ e $\cos b = y$. Assim,

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = \cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b.$$

Como $\cos a = x$, $\operatorname{sen}a = \sqrt{1-x^2}$ e $\cos b = y$, $\operatorname{sen}b = \sqrt{1-y^2}$, resulta que

$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

Problema F.7. Simplificar a expressão: $\operatorname{sen}(\arccos x + \operatorname{arcsen}y)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 229)

SOLUÇÃO:

Fazendo $\arccos x = a$, então $\cos a = x$ e $\operatorname{sen}a = \sqrt{1-x^2}$. Do mesmo modo, $\operatorname{arcsen}y = b$, então $\operatorname{sen}b = y$ e $\cos b = \sqrt{1-y^2}$. Substituindo na expressão que devemos simplificar, obtemos:

$$\operatorname{sen}(\arccos x + \operatorname{arcsen}y) = \operatorname{sen}a\cos b + \operatorname{sen}b\cos a = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy.$$

Problema F.8. Simplificar a expressão: $\operatorname{tg}(\arctan x + \arctan y)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 229)

SOLUÇÃO:

Fazendo $\arctan x = a$, então $\operatorname{tg}a = x$. Do mesmo modo, $\arctan y = b$, então $\operatorname{tg}b = y$. Substituindo na expressão que devemos simplificar:

$$\operatorname{tg}(\arctan x + \arctan y) = \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Problema F.9. Simplificar a expressão: $\text{tg}(\text{ arcsen}x + \text{ arcsen}y)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 229)

SOLUÇÃO:

Fazendo $\text{arcsen}x = a$, então $\text{sen}a = x$ e $\cos a = \sqrt{1-x^2}$. Do mesmo modo, $\text{arcsen}y = b$, então $\text{sen}b = y$ e $\cos b = \sqrt{1-y^2}$. Agora, precisamos calcular $\text{tg}a$ e $\text{tg}b$. Temos

$$\text{tg}a = \frac{\text{sen}a}{\cos a} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{tg}b = \frac{\text{sen}b}{\cos b} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Substituindo na expressão que devemos simplificar, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{tg}(\arctan x + \arctan y) = \text{ tg}(a+b) &= \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}}{1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}} \\
&= \frac{\dfrac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}}{\dfrac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}} = \frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}.
\end{aligned}$$

Problema F.10. Simplificar a expressão: $\cos(2\arctan x)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 229)

SOLUÇÃO:

Fazendo $\arctan x = a$, então $\text{tg}a = x$, ou seja, $\dfrac{\text{sen}a}{\cos a} = x$, e mais $\text{sen}a = x\cos a$. Substituindo na expressão que devemos simplificar:

$$\cos(2\arctan x) = \cos 2a = \cos^2 a - \text{ sen}^2 a = \cos^2 a - x^2\cos^2 a =$$

Problema F.11. Simplificar a expressão: $\cos(\dfrac{1}{2}\arccos x)$.

Fonte: Litvinenko e Mordkóvich (1989, pág. 229)

SOLUÇÃO:

Fazendo $\arccos x = a$, então $\cos a = x$. E, como vamos calcular $\cos \frac{a}{2}$, precisamos da relação entre o cosseno de um arco e o cosseno do dobro desse arco. Assim,

$$2\cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a \Longrightarrow \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2} \Longrightarrow \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Substituindo

$$\cos\left(\frac{\arccos x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}.$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho estudamos as ideias de George Pólya sobre a utilização do método heurístico na resolução de problemas e sua aplicação na prática docente do ensino da Matemática, em particular na resolução de problemas de trigonometria, tais como a prova de identidades, a resolução de equações, a transformação de expressões e o cálculo de máximos e mínimos de funções trigonométricas.

Os problemas selecionados para serem resolvidos são de dificuldade superior aos utilizados comumente em sala de aula no Ensino Médio. Isso responde, em primeiro lugar, à intenção de abordar problemas próximos do tipo que interessava a Pólya, aqueles cuja solução necessita de uma certa dose de descoberta e criatividade. Em segundo lugar, tem como objetivo fornecer aos professores do Ensino Médio uma coletânea de exercícios já resolvidos, tomados de livros que não são facilmente acessíveis. Esses exercícios poderiam ser utilizados para trabalhar em forma diferenciada com alunos interessados e para a preparação para as olimpíadas de Matemática.

Consideramos que o tema abordado no trabalho é importante, interessante e motivador. Importante, porque os alunos que estudam as disciplinas de Matemática, tanto na escola como nas instituições de ensino superior, apresentam significativas deficiências e insuficiências nas habilidades lógicas e técnicas para resolver problemas matemáticos. Interessante, porque mostra um método pouco utilizado, ao menos explicitamente, na didática da Matemática.

Destacamos no trabalho o item 4.2, intitulado *Alguns resultados gerais sobre funções periódicas*, onde foram enunciadas e provadas algumas proposições gerais que não encontramos na literatura em português que revisamos. Também consideramos que merecem destaque as expressões gerais apresentadas no subitem 4.1.2, pois apresentam resultados interessantes que poderão auxiliar aos estudantes, na resolução de problemas de trigonometria.

O método heurístico, em conjunção com o método de ensino mediante problemas, constitui-se em poderosa ferramenta, o que abre um rico campo para a pesquisa e a prática docente. Motivador, porque para o professor enamorado do seu trabalho docente, é um convite ao aprofundamento no estudo das aplicações do método heurístico no ensino da Matemática e ao seu próprio aperfeiçoamento na "arte de resolver problemas". Para nós, foi muito motivador "descobrir"o Pólya humano, pesquisador matemático de alto nível e professor apaixonado pelo ensino.

Finalmente, esperamos que este trabalho sirva como material de apoio para os professores de Matemática do Ensino Médio, assim como os incentive a se aprofundar no método heurístico para utilizá-lo em sala de aula, resultando numa melhora do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, tão importante para a melhoria da Educação como um todo, e para a melhora dos indicadores do ensino no Brasil.

Referências

BOAS, R. P. *George Pólya: A Biographical Memoir*. Washington, D.C.: National Academy of Sciences, 1990. Disponível em: <https://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/polya-george>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 165.

BODEN, M. A. *Artificial intelligence and natural man*. New York: Basic Books, Inc., 1977. Citado na página 33.

FRALEIGH, J. *A First Course in Abstract Algebra*. New York: Addison Wesley, 1989. Citado na página 12.

GELCA, R.; ANDREESCU, T. *Putnam and Beyond*. Texas: Springer, 2007. Citado na página 144.

HALMOS, X. The heart of mathematics. 1980. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

KHANNA, M.; SHARMA, Y. *I I T Mathematics*. Nova Déli: Jai Prakash Nath Co, 2012. Citado na página 59.

LIDSKI, V. B. et al. *Problemas de Matematicas Elementales*. URSS: Editorial Mir, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 53.

LITVINENKO, V.; MORDKóVICH, A. *Prácticas para resolver Problemas Matemáticos*. Moscou: Editorial Mir, 1989. Citado na página 59.

MAJMUTOV, M. I. *La Enseñanza Problémica*. Havana, Cuba: Editorial Pueblo Y Educación, 1983. Citado na página 28.

MENDOZA, H. G. *Resolução de Problema no Ensino de Ciências - Tipos de problema docente e de situações problema*. 2015. Disponível em: <https://w3.dmat.ufrr.br/hector>. Citado na página 26.

MENDOZA, H. G. *A contribuição do ensino problematizador de Majmutov na formação por etapas das ações mentais de Galperin*. 2016. Disponível em: <https://w3.dmat.ufrr.br/hector>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

MINSKY, M. L. *Steps toward artificial intelligence*. [S.l.]: Feigenbaum and Feldman, 1963. Citado na página 33.

NETO, A. et al. *Noções de Matemática*. Fortaleza, Ceará: Vestseller, 2009. v. 3. Citado na página 23.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *George Pólya*. Scotland: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 2002. Disponível em: <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

PEARL, J. *Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving*. London: Addison Wesley Publ Co, 1984. Citado na página 33.

PóLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction an Analogy in Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press, 1954. Citado na página 24.

PóLYA, G. *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda., 1977. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 32.

PóLYA, G.; SZEGö, G. *Problems and Theorems in Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1925. Citado na página 17.

PUCHKIN, V. N. *HEURÍSTICA - A Ciência do Pensamento Criador*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.

RAPHAEL, B. *The thinking computer*. San Francisco, Califórnia: W. H. Freeman Co., 1976. Citado na página 33.

ROMANYCIA, M. H. J.; PELLETIER, F. J. What is a heuristic? Alberta, Canadá, 1985. Citado na página 33.

SHAJNO, K. U. *Coleção de Problemas de Matemática Elementar de Elevada Dificuldade*. Minsk, URSS: Escola Superior, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.

SHARP, H. *Elementos de Trigonometria Plana*. Havana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación, 1976. Citado na página 55.

SLAGLE, J. R. *A heuristic program that solves symbolic integration problems in freshman calculus*. New York: McGraw-Hill Inc., 1963. Citado na página 33.

SPIEGEL, M. R. *Manual de Formulas y Tablas Matematicas*. México: McGraw-Hill, 1973. Citado na página 50.

TAO, T. *Como Resolver Problemas Matemáticos - Uma Perspectiva Pessoal*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 29.

ANEXO A – George Pólya - Bibliografia Selecionada

A seguir, bibliografia de George Pólya, tomada de *George Pólya - A Bibliographical Memoir* (BOAS, 1990).

1913

Uber eine Peanosche Kurve. Bull. Acad. Sci. Cracovie, A, 305-13.

Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque. C. R. Acad. Sci. (Paris), 1957:840-43.

Uber Annaherung durch Polynome mit lauter reelen Wurzeln. Rend. Circ. Mat. Palermo, 36:279-95.

Uber Annaherung durch Polynome deren samtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1913:326-30.

1914

With G. Lindwart. Uber einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln. Rend. Circ. Mat. Palermo, 37:297-304.

Uber das Graeffesche Verfahren. Z. Mat. Phys., 63:275-90.

With I. Schur. Uber zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen. J. Reine Angew. Math., 144:89-113.

Sur une question concernant les fonctions entieres. C. R. Acad. Sci. (Paris), 158:330-33.

1915

Algebraische Untersuchungen uber ganze Functionen vom Geschlechte Null und Eins. J. Reine Angew. Math., 145:224-49.

Uber ganzwertige ganze Funktionen. Rend. Circ. Mat. Palermo, 40:1-16.

1916

With A. Hurwitz. Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta Math., 40:179-83.

Uber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grossten Gliede der zugehorigen Taylorschen Reihe. Acta Math., 40:311-19.

Uber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Ann., 77:497-513.

1917

Uber geometrische Wahrscheinlichkeiten. S.-B. Akad. Wiss. Denksch. Philos. Hist. Kl., 126:319-28.

Uber die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natiirliche Grenze ist. Acta Math., 41:99-118.

1918

Uber Potenzreihen mit endlich vielen verscheidenen Koeffizienten. Math. Ann., 78:286-93.

Uber die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1918:21-29.

Uber die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen. Math. Z., 2:352- 83.

1919

Uber das Gauss'sche Fehlergesetz. Astronom. Nachr., 208:186-91; 209:111.

Proportionalwahl und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z. Gesamte Staatswiss., 74:297-322.

1920

Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen. J. Reine Angew. Math., 151:1—31.

Uber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. Math. Z., 8:171-81.

Uber ganze ganzwertige Funktionen. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1920:1-10.

1921

Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen. Mat. Tidsskr. B.:16-21.

Ein Mittelwertsatz fur Funktionen mehrerer Veranderlichen. T6hoku Math. J., 19:1-3.

Uber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz. Math. Ann., 84:149-60.

1922

Uber die Nullstellen sukzessiver Derivierten. Math. Z., 12:36-60.

1923

Sur les series entieres a coefficients entiers. Proc. London Math. Soc, 21:22-38.

Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. Math. Z., 18:96-108.

Bemerkungen iiber unendliche Folgen und ganze Funktionen. Math. Ann., 88:169-83.

Uber die Existenz unendlich vieler singularer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser

Dirichletscher Reihen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl. Abh. Folge 3., 1923:45- 50.

With F. Eggenberger. Uber die Statistik verketteter Vorgange. Z. Angew. Math. Mech., 3:279-89.

On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral. Mess. Math., 52:185-88.

1924

Uber die Analogie der Krystallsymmetrie in der Ebene. Z. Kristall., 60:278-82.

On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. Trans. Am. Math. Soc, 24:312-24.

1925

With G. Szego. *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis.* 2 vols. Berlin: Springer- Verlag.

1926

On an integral function of an integral function. J. London Math. Soc, 1:12-15.

On the minimum modulus of integral functions of order less than unity. J. London Math. Soc, 1:78-86.

1927

With G. H. Hardy and A. E. Ingham. Theorems concerning mean values of analytic functions. Proc. R. Soc. A., 113:542-69.

Uber trigonometrische Integrale mit nur reelen Nullstellen. J. Reine Angew. Math., 158:6-18.

Uber die algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen von J. L. W. V. Jensen. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-Fys. Medd., 7(17).

Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Liickensatzes. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1927:187-95.

1928

Uber gewisse notwendige Determinantenkriterien fur die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe. Math. Ann., 99:687-706.

Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhangende Gebiete. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl. Abh. Folge 3., 1928:228-32, 280- 82; 1929:55-62.

1929

Untersuchungen uber Liicken und Singularitaten von Potenzreihen. Math. Z., 29:549-640.

1931

With G. Szego. Uber den transfiniten Durchmesser (Kapazitatskonstante) von ebenen und raumlichen Punktmengen. J. Reine Angew. Math., 165:4-49.

1932

With A. Bloch. On the roots of certain algebraic equations. Proc. London Math. Soc, 33:102-14.

1933

Uber die Konvergenz von Quadraturverfahren. Math. Z., 37:264- 86.

Qualitatives uber Warmeausgleich. Z. Angew. Math. Mech., 13:125-28.

Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen. II. Ann. of Math. (2), 34:731-77.

1934

Uber die Potenzreihenentwicklung gewisser mehrdeutiger Funktionen. Comment. Math. Helv., 7:201-21.

With G. H. Hardy and J. E. Littlewood. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

1936

Algebraische Berechnung der Anzahl der Isomeren einiger organischer Verbindungen. Z. Kristall. (A), 93:315-43.

1937

With M. Plancherel. Fonctions entieres et integrates de Fourier multiples. Comment. Math. Helv., 9:224-48; 10:110-63.

Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math., 68:145-254.

Uber die Realitat der NuUstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzer Funktionen. Math. Ann., 114:622-34.

1938

Sur la promenade au hasard dans un reseau de rues. Actual. Sci. Ind., 734:25-44.

1942

On converse gap theorems. Trans. Am. Math. Soc, 52:65-71.

With R. P. Boas. Influence of the signs of the derivatives of a function on its analytic character. Duke Math. J., 9:406-24.

1943

On the zeros of the derivatives of a function and its analytic character. Bull. Am. Math. Soc, 49:178-91.

1945

With G. Szego. Inequalities for the capacity of a condenser. Am. J. Math., 67:1-32.

How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press.

1948

Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization. Q. Appl. Math., 6:276-77.

1949

With H. Davenport. On the product of two power series. Can. J. Math., 1:1-5.

1950 With A. Weinstein. On the torsional rigidity of multiply connected cross sections. Ann. Math., 52:154-63.

1951

With G. Szego. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.* Princeton: Princeton University Press.

1952

Sur une interpretation de la methode des differences finies qui peut fournir des bornes superieures ou inferieures. C. R. Acad. Sci. (Paris), 235:1079-81.

1954

With M. Schiffer. Convexity of functional by transplantation. J. Analyse Math., 3:245-345.

Estimates for eigenvalues. In: *Studies in Mathematics and Mechanics Presented to Richard von Mises*, New York: Academic Press, pp. 200-7.

Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1, *Induction and Analogy in Mathematics.* Vol. 2, *Patterns of Plausible Inference.* Princeton: Princeton University Press.

1956

With L. E. Payne and H. F. Weinberger. On the ratio of consecutive eigenvalues. J. Math. Phys., 35:289-98.

1958

With I. J. Schoenberg. Remarks on de la Vallee-Poussin means and convex conformal maps of the circle. Pacific J. Math., 8:295- 334.

1959

With M. Schiffer. Sur la representation conforme de l'ext£rieur d'une courbe ferm6e convexe. C.R. Acad. Sci. (Paris), 248:2837-39.

1961

On the eigenvalues of vibrating membranes, In memoriam Hermann Weyl. Proc. London Math. Soc, 11:419-33.

1962

Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

1968

GraefFe's method for eigenvalues. Numer. Math., 11:315-19.

1972

With G. Szego. *Problems and Theorems in Analysis*, Vol. 1. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag. Revised and enlarged English language version of 1925,1. (See 1976,1, for Vol. 2).

1974

Collected Papers. Vol. 1, *Singularities of Analytic Functions.* Vol. 2, Location of Zeros, ed. R. P. Boas. Cambridge: MIT Press.

1976

With G. Szego. *Problems and Theorems in Analysis*, vol. 2. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag. Revised and enlarged English language version of 1925,1. (See 1972,1, for Vol. 1).

1984 *Collected Papers*, Vol. 3, Analysis, eds. J. Hersch and G. C. Rota. Vol. 4, *Probability, Combinatorics, Teaching and Learning Mathematics*, ed. G. C. Rota. Cambridge: MIT Press.