Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Elionôra Rodrigues de Azevedo**

# Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental

Juiz de Fora

2017

**Elionôra Rodrigues de Azevedo**

# Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Azevedo, Elionôra Rodrigues de .
Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental / Elionôra Rodrigues de Azevedo. – 2017.
55 f. : il.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

1. Problemas. 2. Contagem. 3. Ensino Fundamental. I. Miyagaki, Olímpio Hiroshi, orient. II. Título.

**Elionôra Rodrigues de Azevedo**

**Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 17 de fevereiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Nelson Dantas Louza Júnior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Mateus Balbino Guimarães
Instituto Federal - Sudeste MG - Campus JF

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, que me ensinaram a alcançar meus objetivos com dignidade e que formam minha melhor representação da palavra “educador”.

Agradeço aos meus amigos e familiares, meus empregadores, meus colegas professores e meus amados alunos pelo incentivo, apoio, paciência, respeito, compreensão com minhas ausências e a torcida pela minha vitória.

Agradeço ao meu orientador Olímpio e ao professor Sandro pela sabedoria transmitida com tanta solidariedade que fez o caminho mais leve e seguro.

Agradeço aos meus companheiros Aline, Diego, Gabriel, Iracilda, José Carlos, Marcelo, Thamara e Victor que foram pacientes, que tornaram as sextas-feiras menos dolorosas, que compartilharam angústias e vitórias, lutaram e venceram comigo. Muito, muito obrigada!

Mas acima de tudo, agradeço ao meu amigo Deus, que vem realizando todos os desejos que nascem em meu coração, que está sempre caminhando comigo, que torna meus dias mais fáceis e que sempre me concedeu mais do que eu pedi.

**RESUMO**

Este trabalho relata a experiência didática de uma professora que optou por apresentar problemas de contagem no ensino fundamental. É um trabalho investigativo cujo principal objetivo é analisar como alunos do ensino fundamental solucionam problemas simples da análise combinatória – não conhecendo suas definições, conceitos e fórmulas – e a partir desta investigação, propor novas formas de trabalhar esse tema com alunos mais novos. A pesquisa foi realizada com discentes do 9◦ ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual de ensino de Minas Gerais. Os alunos realizaram dois tipos de atividades: Atividades de Apresentação (situações problemas que apresentavam as ideias do princípio multiplicativo, permutação e combinação) e Atividades Teste (quatro questões da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – que envolviam o raciocínio combinatório estudados nas atividades de apresentação). Os alunos receberam as orientações de como realizar as atividades e os principais resultados estão descritos neste texto. Há, no final do trabalho, uma reflexão dos resultados obtidos, com o que e como podemos aperfeiçoar nossa proposta e uma sugestão de atividade final.

Palavras-chave: Problemas. Contagem. Ensino Fundamental.

## ABSTRACT

This work describes a teacher's didactic experience, who chose for presenting counting problems in elementary school. It is an investigative work, which the main objective is to analyse how elementary school students solve simple problems about combinatorial analysis - not knowing its definitions, concepts and formulas. From this investigation, the teacher proposed new ways to work this theme with younger students. The research was performed with 9th grade students in elementary school from a public school in Minas Gerais State. The students performed two types of activities: Presentation Activities (problem situations that presented multiplicative principle, permutation and combination ideas) and Test Activities (four questions from OBMEP - Brazilian Mathematical Olympiad for Public Schools - that covered combinatorial reasoning studied in the presentation activities). The students received guidance in how to perform the activities and the main results are described in this text. At the end of this work there is a reflection about the results obtained with what and how we can improve our proposal and a final activity suggestion.



Key-words: Problems. Counting. Elementary School.

**LISTA DE ILUSTRAÇÕES**

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho destina-se a propor atividades sobre problemas de contagem ainda no ensino fundamental. Para embasar a escolha de tal tema, procurou-se nos documentos oficiais sobre educação como tal conteúdo deve ser apresentado.

Foram consultados os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCNs, que são as referências básicas de orientação aos professores para o Ensino Fundamental e Médio de todo o país.

> Estar alfabetizado, neste final de século, supõe saber ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento de dados e a análise de informações. Essa característica da vida contemporânea traz ao currículo de Matemática uma demanda em abordar elementos da estatística, da combinatória e da probabilidade, desde os ciclos iniciais.

Quanto à resolução de problemas, os PCNs norteiam que "o ensino-aprendizagem de Matemática tem como ponto de partida a resolução de problemas"e que

> Resolver um problema pressupõe que o aluno:
>
> - elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
> - compare seus resultados com de outros alunos;
> - valide seus procedimentos.

Já o CBC (Conteúdo Básico Comum) de MG do Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano, elaborado pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, sugere a resolução de problemas simples de contagem utilizando listagens ou diagrama da árvore.

Nas avaliações de larga escala, consultamos a Matriz de Referência de Matemática do PROEB/2015 ( Avaliação externa e censitária que busca diagnosticar a educação pública do estado de Minas Gerais). O descritor D52, avaliando apenas o 7º ano do ensino fundamental, traz "a ultilização do princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema"; e o descritor D80, avaliando apenas o 3º ano do ensino médio, "a utilização de métodos de contagem na resolução de problemas".

Por último, recorreu-se a quatro livros didáticos utilizados no Brasil.

Matemática (BIANCHINI) e A conquista da matemática (GIOVANNI) não abordam problemas de contagem em nenhum dos quatro volumes. Matemática e Realidade (IEZZI) e Projeto Teláris: Matemática (DANTE) apresentam, no volume do 6º ano, princípio multiplicativo como um tópico da multiplicação de números naturais e, no 9º ano, abordam na unidade de estatística e probabilidade problemas do princípio multiplicativo, apresentando como métodos de solução as listagens, tabelas e diagramas de árvores.

Com base nos estudos da Análise Combinatória, dos PCNs, dos livros didáticos, das matrizes de referência e da experiência profissional, optou-se por elaborar atividades que introduzam as ideias do pensamento combinatório.

Estas atividades foram elaboradas para os alunos do 9º ano de uma escola da rede estadual de Minas Gerais, com o objetivo de que os alunos consigam resolver problemas simples de contagem sem o uso de fórmulas e/ou definições.

São atividades que irão introduzir as primeiras ideias de contagem. Problemas simples, mas com o objetivo de instigar os alunos a tais pensamentos. Para nós, pesquisadores, foi um trabalho de investigação. Investigar quais os métodos que os alunos usariam, quais conhecimentos prévios eles possuíam, como eles reagiriam diante das situações-problema.

Os alunos foram avaliados em todas as etapas das atividades: nos registros escritos, nas atitudes, nas questões feitas ao professor, nas respostas dadas oralmente ao professor e ao final foram submetidos a uma Atividade Teste.

Esta atividade consistiu em solucionar problemas propostos na OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). A principal diferença entre as Atividades de Apresentação e a Atividade Teste foi o suporte dado aos alunos. Nas primeiras, os alunos contavam com o auxílio da professora, podendo questionar, pedir ajuda, confirmar com exemplos e refazer as atividades quando jugassem necessário. Para a Atividade Teste, os alunos – que fizeram todas as atividades em duplas – tinham apenas a sua dupla e as anotações das atividades anteriores como apoio.

Todo o trabalho foi estruturado em seis capítulos. O próximo capítulo exibe a síntese teórica que guiou este trabalho. Nele são apresentadas as definições, exemplos e demonstrações da análise combinatória. O capítulo 3 traz as atividades propostas por nós, a justificativa de cada atividade, o ambiente no qual cada atividade seria aplicada e o que esperava-se dos alunos ao receberem as propostas. No capítulo 4, foi relatada a experiência: o diálogo com os alunos, o posicionamento deles ao receberem cada atividade, as soluções encontradas por eles, os questionamentos, as correções que foram necessárias, as perspectivas dos alunos e os resultados da Atividades Teste. O capítulo 6 apresenta a adaptação de um jogo conhecido mundialmente, que apesar de não ter sido aplicado como as demais atividades, pode ser muito útil no estudo de problemas de contagem. E por último, foram deixadas as últimas considerações em relação ao trabalho desenvolvido, sucessos e frustações, propostas para melhora, inquietações e reflexões sobre o trabalhar, o que trabalhar e como trabalhar.

# 2 SÍNTESE TEÓRICA

## 2.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é o ramo da matemática responsável por desenvolver técnicas que possibilitam contar os elementos de um conjunto finito que está sob condições pré - determinadas. Assim, a análise combinatória nos permite saber quantos elementos possui determinado conjunto sem que seja necessário escrever todos os elementos de tal conjunto.

## 2.2 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo) é o método utilizado para resolver problemas como no exemplo a seguir.

Exemplo 1: Ana possui duas saias de cores distintas (branca e preta) e três blusas de cores também distintas (azul, vermelha e amarela). De quantas formas Ana pode vestir uma blusa e uma saia?

Para este exemplo, podemos listar todas as possibilidades de Ana:
Saia branca e Blusa azul
Saia branca e Blusa vermelha
Saia branca e Blusa amarela
Saia preta e Blusa azul
Saia preta e Blusa vermelha
Saia preta e Blusa amarela.

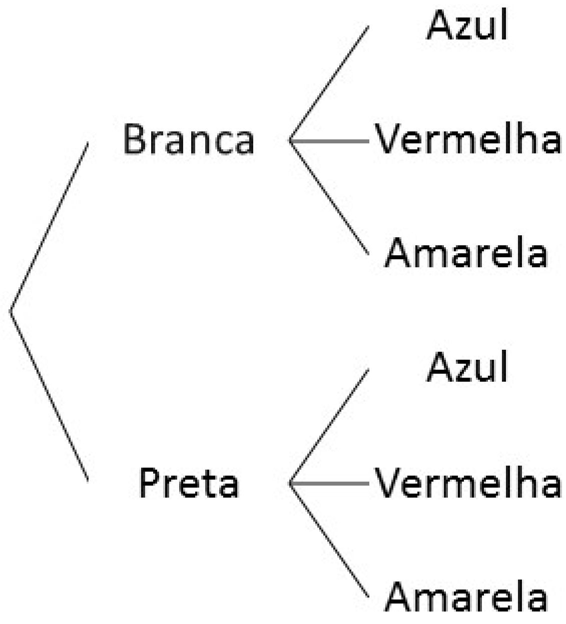
Poderíamos ter organizado os dados em uma tabela, ou no conhecido diagrama da árvore. (Figura 1)

O método escolhido para organizar os dados não interfere no resultado. Basta perceber que tomando a cor da saia há três possibilidades para a cor da blusa, totalizando 6 formas de Ana vestir uma saia e uma blusa. O mesmo resultado seria obtido se fossem escolhidas primeiramente a blusa (3 possibilidades) e depois a saia (2 possibilidades).

Para exemplos como este, com um número reduzido de opções, é pouco trabalhoso obter todos os agrupamentos desse conjunto e depois contá-los. Porém, se o número de elementos a serem contados for grande o trabalho torna-se impossível sem o uso de técnicas especiais.

*Se determinado acontecimento ocorre em $n$ etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de $k_1$ maneiras diferentes, a segunda de $k_2$ maneiras diferentes, e assim sucessivamente , então o número total $T$ de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por $T = k_1.k_2.k_3.....k_n$.*

Figura 1 – Diagrama de árvore




Fonte: Construção do autor

**Lema 1** *Consideramos os conjuntos* $A = \{\ a_1, a_2, ..., a_m\ \}$ *e* $B = \{\ b_1, b_2, ..., b_n\ \}$. *Podemos formar* $m \cdot n$ *pares ordenados* $(a_i, b_j)$ *em que* $a_i \in A$ *e* $b_j \in B$.

Demonstração:
Fixando o primeiro elemento do par e fazendo variar o segundo, temos:

$$\text{m linhas} \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_n) \rightarrow n\, pares \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_2, b_n) \rightarrow n\, pares \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), ..., (a_m, b_n) \rightarrow n\, pares \end{cases}$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + \ldots + n}_{\text{m vezes}} = mn$

**Teorema 1** *Consideramos* $r$ *conjuntos*

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_{n1}\}$$

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_{n2}\}$$

$$\vdots$$

$$Z = \{z_1, z_2, ..., z_{nr}\}$$

*sendo* $n_1, n_2, ..., n_r$ *o número de elementos de A, B, ..., Z, respectivamente.*

*O número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo* $(a_i, b_j, ..., z_p)$ *em que* $a_i \in A$*,* $b_j \in B$ *...* $z_p \in Z$ *é* $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$*.*

Demonstração:
Esta demonstração é feito pelo Princípio da Indução Finita
Se r = 2, pelo Lema já visto, a afirmativa é verdadeira.
Vamos supor a afirmativa válida para o inteiro ( r - 1) e mostrar que também é válida para o inteiro r.
Para (r - 1), vamos tomar as sequências de (r -1) elementos $(a_i, b_j, ..., w_k)$.
Por hipótese de indução, existem $n_1, n_2, ..., n_{r-1}$ sequências e $n_r$ elementos $\mathbf{Z}$. Cada sequência $(a_i, b_j, ..., w_k, z_p)$ consiste de $(a_i, b_j, ..., w_k)$ e um elemento $z_p \in \mathbf{Z}$.
Novamente pelo Lema, temos que o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, ..., w_k, z_p)$ é $(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{r-1} \cdot n_r$.
Portanto, pelo pricípio da indução finita, temos que a afirmativa é válida para todo $r \in \mathbf{N}$ e $r \geq 2$.

**Teorema 2** *Consideramos um conjunto A com m* $(m \geq 2)$ *elementos. Então o número de r - uplas ordenadas (sequências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:* $\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdot ... \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$.

A demonstração é feita por indução finita de modo análogo à feita no Teorema 1.

O princípio fundamental da contagem fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória, porém, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes ser muito trabalhosa. Para facilitar a contagem de problemas maiores é importante conhecer algumas consequências do princípio.

## 2.3 ARRANJOS

Arranjo: Subconjunto ordenado de um conjunto finito.

**Definição 1** *Seja M um conjunto com m elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$*. Chamamos de arranjo com repetição dos m elementos tomados r a r* $(1 \leq r \leq m)$ *toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.*

**Fórmula do número de arranjos com repetição**
Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Vamos indicar por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição

de $m$ elementos tomados r a r. Cada arranjo com repetição é uma sequência de r elementos, em que cada elemento pertence a M. Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Teorema 1), o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ é:

$$(AR)_{m,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{r vezes}} = m^r$$

**Definição 2** *Seja M um conjunto com m elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$*. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r* $(1 \leq r \leq m)$ *a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, todos distintos.*

**Fórmula do número de arranjos**

Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Vamos indicar por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos $m$ elementos tomados r a r. Cada arranjo é uma sequência de r elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos. Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Teorema 2), o número de arranjos $A_{m,r}$ é:

$$A_{m,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{\text{r fatores}}$$

Note que de acordo com a definição dada para arranjo tem-se necessariamente $(1 \leq r \leq m)$.

## 2.4 PERMUTAÇÃO

> Permutação:
> Ação ou efeito de permutar. Troca de uma coisa por outra; substituição. Mecanismo pelo qual um elemento de um todo se altera para formar nova combinação.

EXEMPLO 2: De quantas formas 3 atletas podem se posicionar em um pódio (com três lugares) ? Um bom método para simplificar os cálculos é organizar lugar/colocação. Para o primeiro lugar, temos 3 atletas; para o segundo lugar, 2 atletas e para o terceiro lugar, o atleta restante. Há assim, 3 x 2 x 1 = 6 formas de se organizar o pódio.

EXEMPLO 3: De quantas formas 6 pessoas podem se organizar em uma fila? Usando o mesmo método do exercício anterior, há 6 possibilidades para o primeiro lugar da fila, 5 para o segundo, 4 para o terceiro, 3 para o quarto, 2 para o quinto e 1 para o sexto lugar. Totalizando 6x5x4x3x2x1 = 720 possibilidades.

E para um número maior de possibilidades? Será necessário descrever todos os passos? Para a solução de problemas que envolvam situações de troca (que usam a ideia de embaralhar),isto é o número de opções é o mesmo número de lugares, usamos a técnica da permutação.

**Definição 3** *Seja M um conjunto com m elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$*. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que* $r = m$*.*

**Fórmula do número de permutações**

Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Vamos indicar por $P_m$ o número de permutações dos $m$ elementos de M. Temos que $P_m = A_{m,m}$, isto é,

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(m-1)] = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

A fim de simplificar o uso de fórmulas, definimos o símbolo do fatorial.

**Definição 4** *Seja m um número inteiro não negativo. Definimos fatorial de m (e indicamos por m!) por meio da relação:*
$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ *para* $m \geq 2$
$1! = 1$
$0! = 1$

Com essa definição é possível simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações.
De fato:
$P_m = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$
$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) =$
$= m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) \cdot \dfrac{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{m!}{(m-r)!}$

Assim, resumimos:
Permutação de m elementos: $P_m = m!$
Arranjo de m elementos tomados r a r: $A_{m,r} = \dfrac{m!}{(m-r)!}$

## 2.5 COMBINAÇÃO

EXEMPLO 4:Seja E um conjunto formado pelos elementos a, b,c e d.

(i) Escolhendo dois desses elementos, conseguimos formar 12 sequências distintas . São elas: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,a\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,a\}, \{c,b\}, \{c,d\}, \{d,a\}, \{d,b\}, \{d,c\}$

(ii) E conseguiu-se formar também 6 subconjuntos de dois elementos com os quatro que foram apresentados. Isso acontece porque $\{a,b\} = \{b,a\}$, e assim reduzir as possibilidades que encontramos em (i).

Para exemplos semelhantes a esse, nos quais foram formados conjuntos e não sequências - problemas cuja ordem pode ser alterada sem se alterar os resultados - usamos a técnica da combinação.

**Definição 5** *Considere um conjunto M com m elementos. Agrupamentos com r elementos* $(r \leq m)$*, onde cada elemento de M aparece uma única vez e a ordem não é importante, são subconjuntos de M chamados de combinações de m elementos tomados r a r.*

Note que o que difere Arranjos de Combinações não é a natureza dos elementos, mas sim se a ordem é importante, isto é, se ao escolhermos um grupo e alterarmos a ordem dos elementos desse grupo o resultado não for alterado teremos uma situação de combinação, porém se ao alterarmos a ordem dos elementos e produzirmos resultados diferentes teremos uma situação de arranjo.
Com isso fica fácil encontrar uma fórmula para o número de combinações.

**Fórmula do número de combinações**

Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Vamos indicar por $C_{m,r}$ o número de combinações dos $m$ elementos tomados r a r. Cada combinação é um subconjunto de r elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos. Sabemos que o número de grupos formados por r elementos, considerando diferentes grupos com ordens distintas, é igual ao número de permutações com r elementos ($r!$). Então, para obtermos $C_{m,r}$ basta dividirmos $A_{m,r}$ por $r!$.
Finalmente, $C_{m,r} = \dfrac{A_{m,r}}{r!} = \dfrac{m!}{r! \cdot (m-r)!}$

# 3 AS ATIVIDADES

## 3.1 O QUE FOI PROPOSTO

### 3.1.1 A apresentação do Princípio Fundamental da Contagem

Nesta atividade pretende-se introduzir a ideia do Princípio Fundamental da Contagem. A ideia inicial é que os alunos listem todas as possibilidades e depois, encontrem uma forma de padronizar os cálculos.

Para esta atividade, não terá sido formalizado nenhum conceito matemático sobre os métodos de contagem.

O objetivo é que os alunos tenham capacidade de listar as possibildades, seja na forma de diagrama, árvore ou mesmo uma lista, mas que considerem todas as possibilidades. Que percebam também que “branco + vermelho” é diferente (ou não) de “vermelho + branco”.

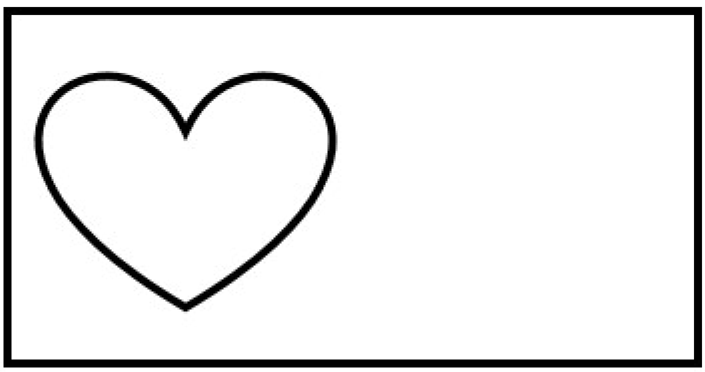
**ATIVIDADE 1: CRIAR UM CONVITE**

Maria está confeccionando convites para o casamento de sua irmã. Para isso ela tem várias ideias e precisa organizá-las. Vamos ajudá-la!

**1ª ideia:**

Maria dispõe das cores branca, rosa e vermelha e precisa escolher duas para pintar o cartão a seguir.

Figura 2 – A primeira ideia



Fonte: Construção do autor

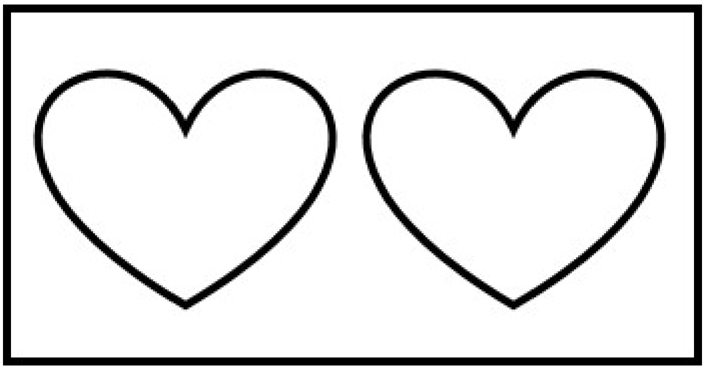
a) Quais são as possíveis escolhas de Maria? Escreva todas as possibilidades.
b) Quantos cartões ela consegue formar no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

c) E se além das três cores iniciais, Maria pudesse utilizar também a cor lilás. Quantas seriam as possibilidades para o cartão?

**2ª ideia:**

Maria irá usar as cores branca, rosa, vermelha e lilás para pintar um novo modelo de cartão. Porém, não quer repetir cores.

Figura 3 – A segunda ideia



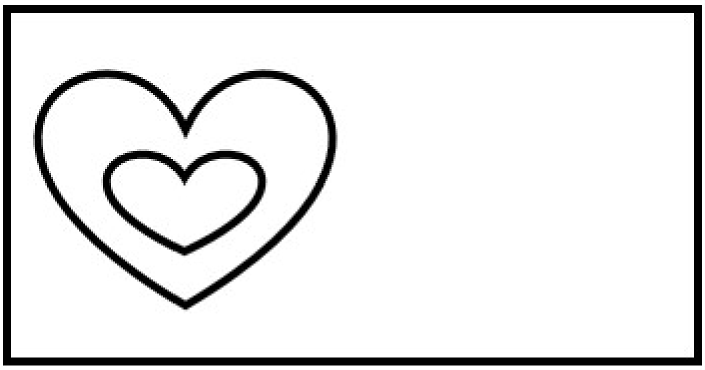
Fonte: Construção do autor

a) Quais são as possibilidades de Maria?
b) Quantas são no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

**3ª ideia:**

Maria irá usar as mesmas 4 cores (branco, rosa, vermelho e lilás) agora para um terceiro modelo. E somente as regiões adjacentes não podem ser da mesma cor.

Figura 4 – A terceira ideia



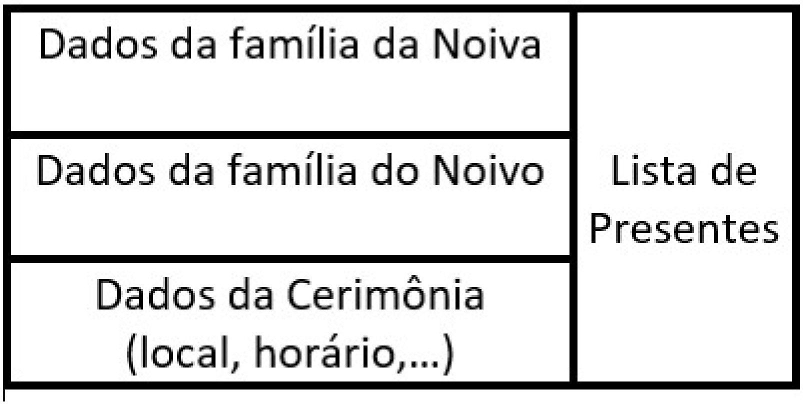
Fonte: Construção do autor

a) Quais são as possibilidades de Maria? Se for preciso, liste todas as possibilidades.
b) Que operações você(s) faria(m) para justificar tal resultado?

**QUESTÃO DESAFIO**

O interior do convite terá o seguinte modelo: E Maria possui 6 cores para pintá-lo.

Figura 5 – O interior do convite




Fonte: Construção do autor

Maria deseja que faixas adjacentes sejam pintadas com cores diferentes.
a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?
b) De quantos modos o interior do convite pode ser pintado?

### 3.1.2 A ideia da Permutação

O objetivo com esta atividade é trabalhar a ideia de permutação com e sem repetição. Primeiramente, a ideia intuitiva, descrevendo todas as possibilidades; posteriormente, pedir a eles que percebam um padrão que possibilite calcular qualquer anagrama.
Em nenhum momento serão apresentadas fórmulas, nem mesmo a definição do "fatorial".

**ATIVIDADE 2 - ANAGRAMAS**

Anagrama: Palavra formada pela alteração da ordem ou pela transposição das letras de outra.
Exemplo:Amor e Roma.

**QUESTÕES PARA O PRIMEIRO DIA**

1 – Escreva todos os anagramas da palavra AMOR.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra AMOR sem ter

que escrever todos os anagramas? Explique.

2 – Escreva todos os anagramas da palavra BRASIL.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BRASIL sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

3 – Fazer um anagrama é usar todas as letras de uma palavra para formar uma outra. Cada palavra da lista a seguir representa o nome de um animal. Mude as letras de lugar e descubra qual é o animal em cada item.
a) AME
b) GRITE
c) CAMINHO
d) MOLECA
e) PRESENTE

**QUESTÕES PARA O SEGUNDO DIA**

4 – Escreva todos os anagramas da palavra CASA.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra CASA sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

5 – Escreva todos os anagramas da palavra BANANA.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BANANA sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

6 – Quantos anagramas tem a palavra MISSISSIPPI?

7 – Cada palavra da lista a seguir representa um numeral. Mude as letras de lugar e descubra qual é o número em cada item.
a) TESE
b) ESTANTE

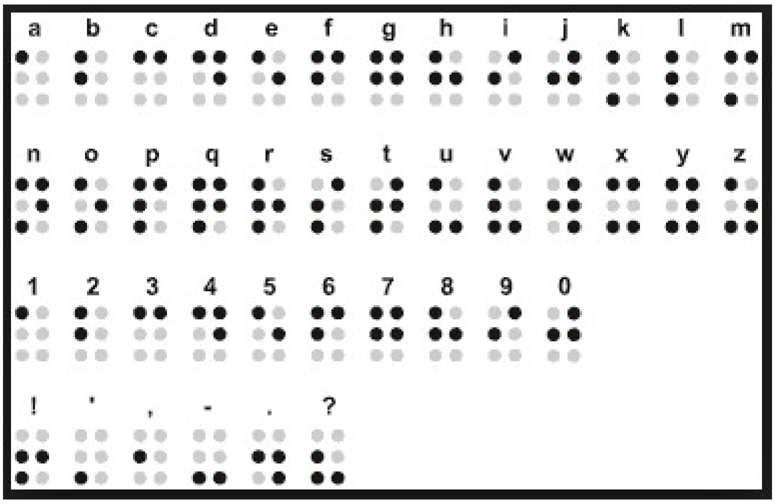
### 3.1.3 A ideia da Combinação

**ATIVIDADE 3 - O SISTEMA BRAILLE**

O sistema Braille é um método de leitura para cegos inventado pelo francês Louis Braille. O método consiste em um alfabeto de pontos em relevo, que são organizados em uma tabela com três linhas e duas colunas formando um retângulo, no qual pelo menos um dos pontos se destaca em relação aos demais. As combinações desses pontos dispostos estão relacionados a símbolos que representam letras simples e acentuadas, pontuações, símbolos, notas musicais, sinais algébricos entre outros, propiciando ao deficiente visual a leitura e escrita de qualquer texto.

Veja o alfabeto Braille:

Figura 6 – Alfabeto Braille

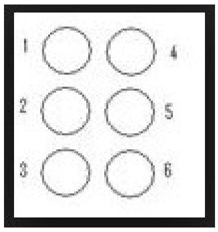



Fonte: Imagem retirada da web

Cela Braille:

Cada ponto da cela pode ser identificado por um número de cima para baixo: à esquerda, pontos 1, 2 e 3; e à direita, pontos 4, 5 e 6.

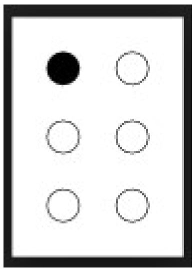
Figura 7 – Cela Braile




Fonte: Imagem retirada da web

Por exemplo, para representar a letra A, usa-se a seguinte cela:

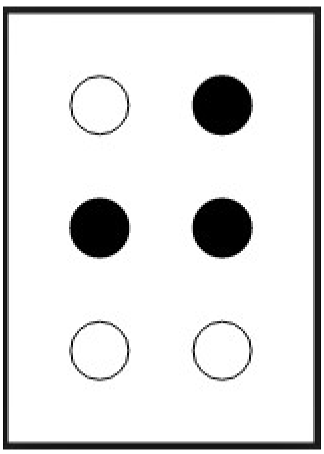
Figura 8 – Letra A no Sistema Braille



Fonte: Imagem retirada da web

Ou seja, apenas um ponto está em relevo na cela.
Para representar a letra J, destaca-se 3 pontos na cela.

Figura 9 – Letra J no Sistema Braille



Fonte: Imagem retirada da web

Devido a esse tipo de configuração da cela, o método admite um número finito de caracteres, pois os pontos em relevo são posicionados em diferentes lugares.

Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Para facilitar nossos cálculos, vamos organizar nossas possibilidades.
- Quantas celas podemos formar, destacando apenas um ponto?
- Quantas celas podemos formar, destacando dois pontos?
- Quantas celas podemos formar, destacando três pontos?
- E Quatro pontos?
- E Cinco pontos?
- E Seis pontos?

Existe alguem padrão em seus cálculos?

### 3.1.4 Uma atividade Teste

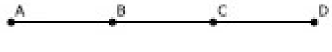
As questões que seguem foram retiradas de provas das Olimpíadas Brasileira de Matemática (OBMEP) e devem ser apresentadas para os alunos logo após as atividades de inicialização do conteúdo. Neste momento, o professor deve orientar os alunos, mas não deve ajudar na solução das questões. A discussão será feita posteriormente à entrega das atividades.

**(OBMEP/2015/N1/Q08)** NÚMERO DE SEGMENTOS

a) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta, como indica a figura a seguir, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.

b) Com 10 pontos distintos em um segmento, qual seria a nova resposta?

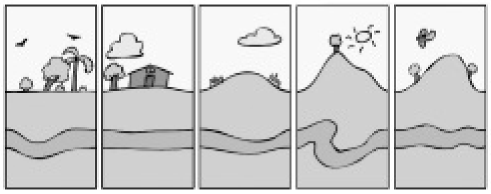
Figura 10 – (OBMEP/2015/N1/Q08)




Fonte: OBMEP

**(OBMEP/2012/N2/Q14)** Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura.

Figura 11 – (OBMEP/2012/N2/Q14)

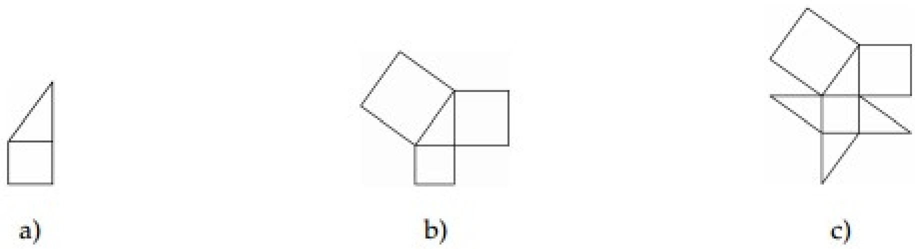


Fonte: OBMEP

Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?
a) uma semana
b) um mês
c) dois meses
d) quatro meses
e) seis meses

**(OBMEP/2012/N2/Q15)** João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarela, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Em cada um dos itens a seguir, determine de quantas maneiras João pode pintar a figura correspondente.

Figura 12 – (OBMEP/2012/N2/Q15)




Fonte: OBMEP

**(OBMEP/2013/N2/Q03)** Um hospital tem os seguintes funcionários:
Sara Dores da Costa: reumatologista
Iná Lemos: pneumologista
Ester Elisa: enfermeira
Ema Thomas: Traumatologista
Ana Lisa: psicanalista

Inácio Filho: obstetra

a) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?
b) De quantas maneiras os mesmos funcionários podem sentar numa mesa redonda? Lembre-se de que, numa mesa redonda, se todos se mudam para a cadeira da esquerda, a mesa continua igual!
c) E de quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice presidente e suplente?

# 4 RELATO DA EXPERIÊNCIA

Os alunos, antes de serem apresentados às atividades, foram informados que estavam participando de um projeto, da UFJF, consentiram e foram orientados como seriam as aulas seguintes. Explicou-se a eles que o principal objetivo das atividades desenvolvidas era analisar a forma como eles iriam tratar um assunto que até então não havia sido estudado por eles. Explicou-se que o mais importante era registrar todo o pensamento e as estratégias, que por isso os problemas poderiam ser resolvidos a lápis, para que pudessem apagar e refazer, caso julgassem necessário. Ratificou-se que o mais importante era o desenvolvimento e não o resultado e que, juntos, os resultados seriam conferidos, mas que era fundamental que ele elaborassem suas próprias técnicas de solução. Para todas as atividades os alunos foram organizados em duplas previamente determinadas algumas vezes pela professora, outras vezes escolhidas pelos próprios alunos.

## 4.1 RELATO DA ATIVIDADE 1

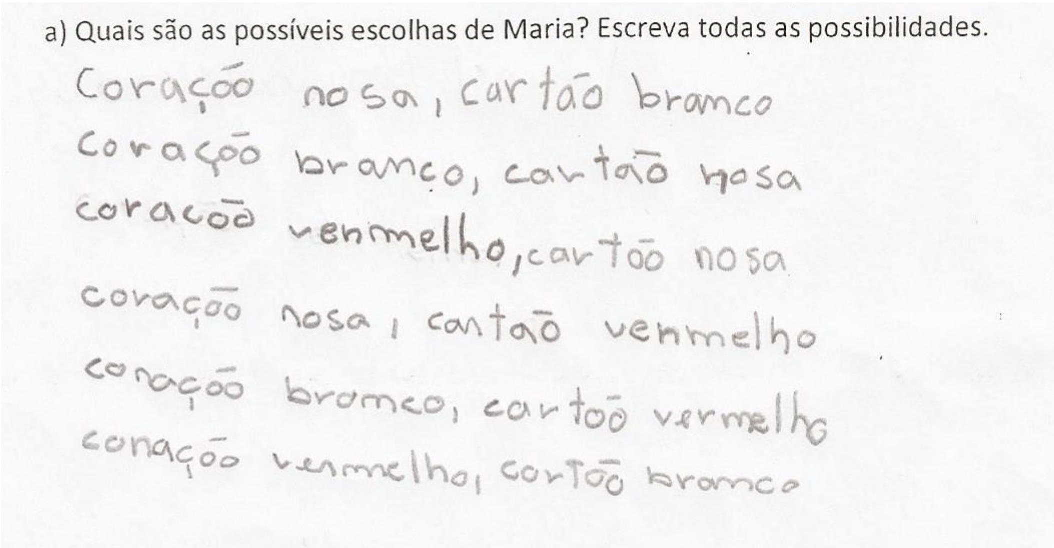
**Sobre a apresentação das atividades aos alunos:**

Para a Atividade 1, que apresenta a ideia do Princípio Fundamental da Contagem, decidiu-se apresentar uma etapa (ideia) por vez, de forma que os alunos só recebessem um problema após terem resolvido o anterior. Foram planejadas para esse tema, 6 aulas, de 50 minutos cada. Os alunos fizeram toda atividade em menos de duas aulas (100 minutos) e a julgaram "muito fácil".

Para cada folha entregue às duplas, lia-se todo o problema com os alunos. Neste momento de leitura, muitas questões surgiam dos alunos e, na maioria das vezes, os próprios colegas conseguiam responder. Ao começarem a desenvolver e principalmente registrar suas soluções, mais questionamentos surgiam.
Por exemplo, para a "1ª ideia", um questionamento no desenvolvimento do problema era se representar BRANCO – ROSA e ROSA – BRANCO teria o mesmo significado. Tentou-se responder com uma outra questão: "Quando você escreve BRANCO – ROSA, o que isto significa para você? O que é BRANCO e o que é ROSA?" A maior parte dos alunos resolveu o problema sem grandes dificuldades. Para a "2ª ideia", o principal questionamento foi sobre a possibilidade de os corações possuírem a mesma cor. A minha sugestão para essa dúvida foi que relessem o enunciado e se o consideravam suficiente para resolver o problema proposto. No último problema apresentado, a principal dúvida foi sobre o significado da palavra "adjacente". Foi solicitado aos alunos que dessem exemplos que satisfizessem (ou não) as condições do enunciado. O desenvolvimento seguiu sem muitas dificuldades.

**Análise das soluções da "1ª ideia":**

Figura 13 – Organização dos dados em listas

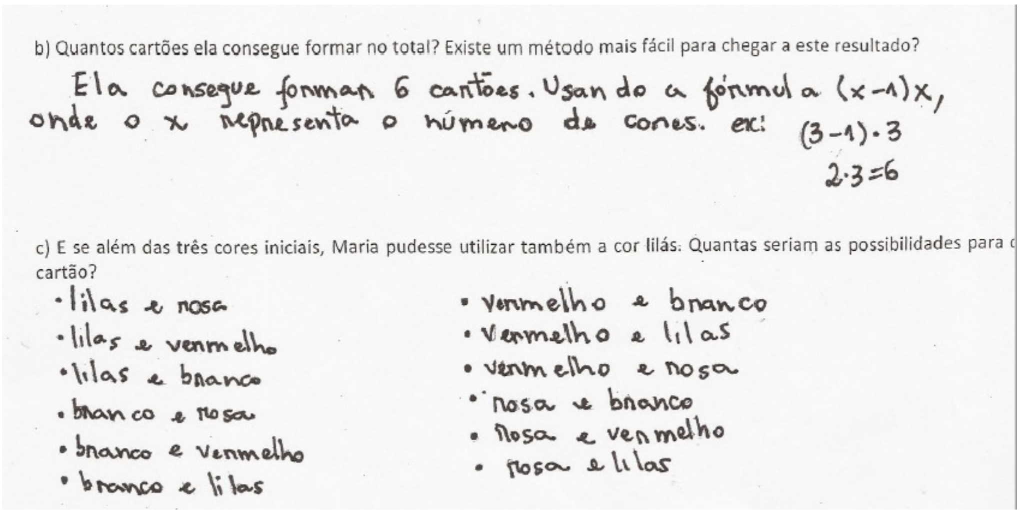


a) Quais são as possíveis escolhas de Maria? Escreva todas as possibilidades.

Coração rosa, cartão branco
Coração branco, cartão rosa
coração vermelho, cartão rosa
coração rosa, cartão vermelho
coração branco, cartão vermelho
coração vermelho, cartão branco

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 14 – Início da Generalização



b) Quantos cartões ela consegue formar no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

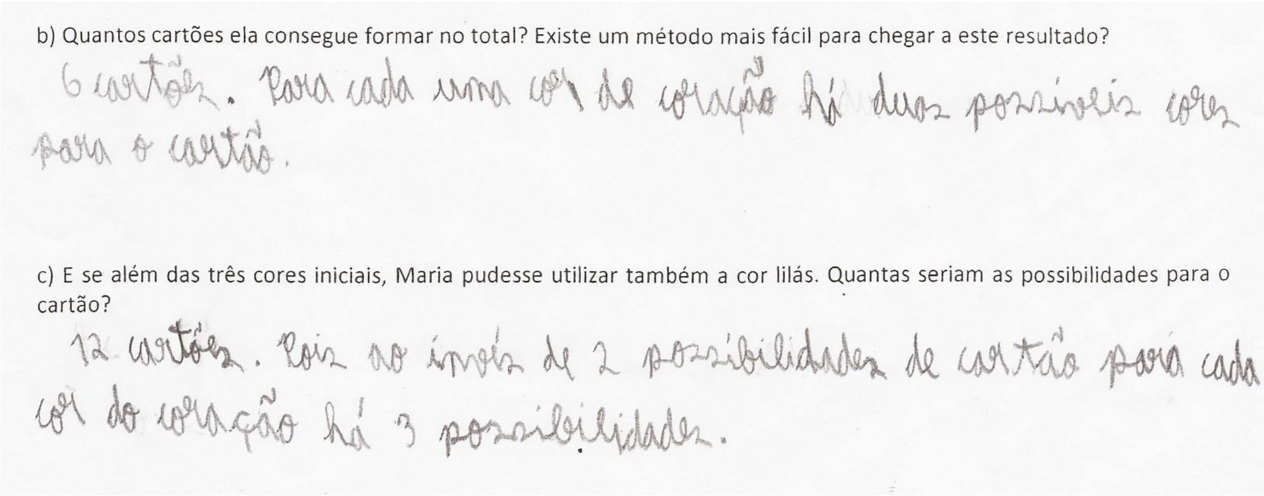
Ela consegue formar 6 cartões. Usando a fórmula $(x-1)x$, onde o x representa o número de cores. ex: $(3-1)\cdot 3$
$2\cdot 3=6$

c) E se além das três cores iniciais, Maria pudesse utilizar também a cor lilás. Quantas seriam as possibilidades para o cartão?

- lilas e rosa
- lilas e vermelho
- lilas e branco
- branco e rosa
- branco e vermelho
- branco e lilas
- vermelho e branco
- vermelho e lilas
- vermelho e rosa
- rosa e branco
- rosa e vermelho
- rosa e lilas

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 15 – O uso do Princípio Multiplicativo


b) Quantos cartões ela consegue formar no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

6 cartões. Para cada uma cor de coração há duas possiveis cores para o cartão.

c) E se além das três cores iniciais, Maria pudesse utilizar também a cor lilás. Quantas seriam as possibilidades para o cartão?

12 cartões. Pois ao invés de 2 possibilidades de cartão para cada cor do coração há 3 possibilidades.

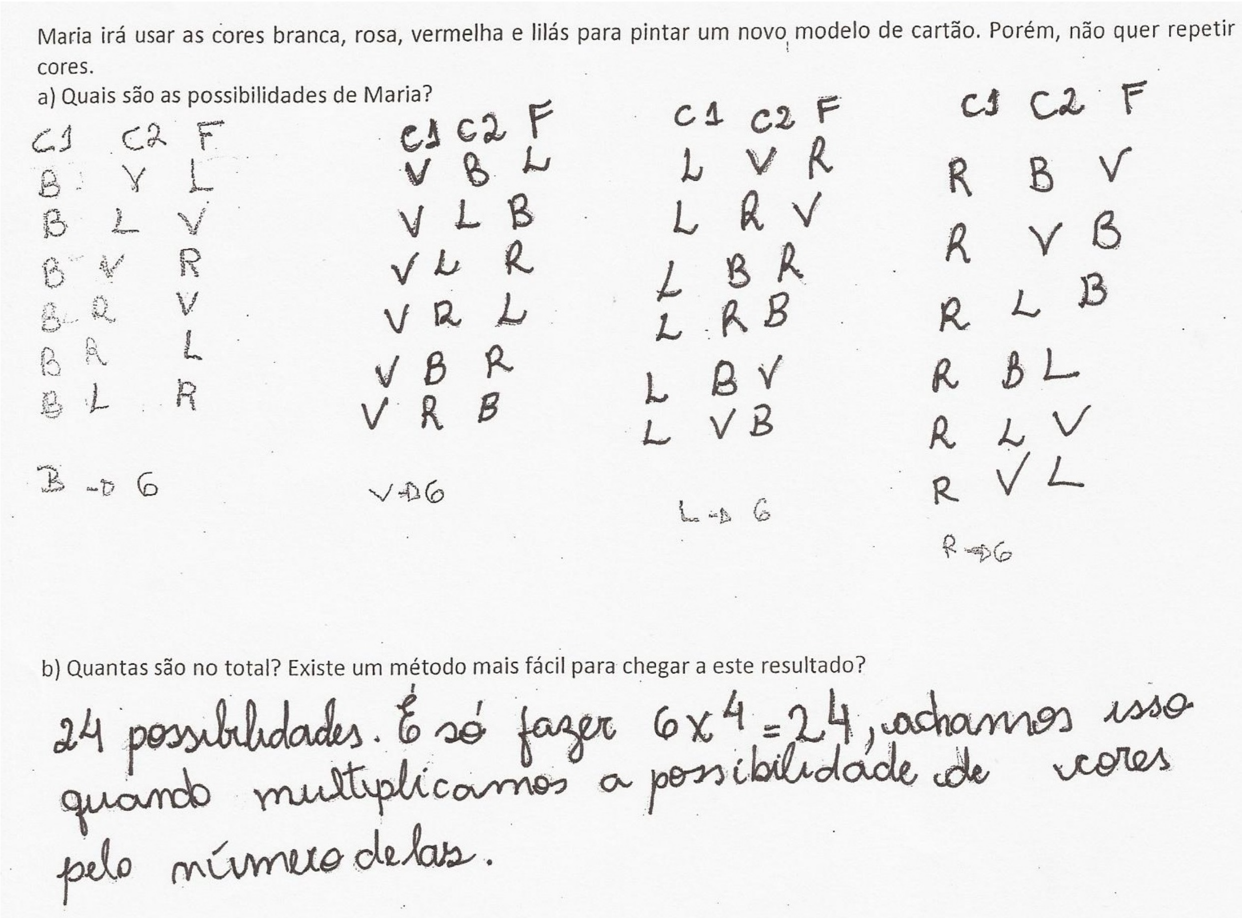
Fonte: Resolução dos alunos

Ao analisar as soluções dos alunos, foi percebido que muitos deles organizaram suas ideias de maneiras semelhantes, usando tabelas ou listas. Existia muito empenho por parte dos alunos para conseguir criar uma “fórmula” para resolver as questões propostas e questionavam o tempo todo se havia necessidade de escrever todas as combinações possíveis.Uma dupla apresentou uma fórmula como resposta do item b), mas note que eles não a usaram para responder o próximo item. Algumas duplas usaram o mesmo argumento para responder os itens b) e c).

**Análise das soluções da “2ª ideia”:**

Quando o segundo problema foi apresentado, conseguiu-se perceber que os alunos começaramm a organizar melhor as informações e as padronizações são mais comuns. Alguns alunos ainda listam todas as possibilidades, mas muitos deles conseguem perceber que não é necessário escrever todas as combinações possíveis.

Figura 16 – Organização dos dados



Maria irá usar as cores branca, rosa, vermelha e lilás para pintar um novo modelo de cartão. Porém, não quer repetir cores.

a) Quais são as possibilidades de Maria?

| C1 | C2 | F | C1 | C2 | F | C1 | C2 | F | C1 | C2 | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | V | L | V | B | L | L | V | R | R | B | V |
| B | L | V | V | L | B | L | R | V | R | V | B |
| B | V | R | V | L | R | L | B | R | R | L | B |
| B | R | V | V | R | L | L | R | B | R | B | L |
| B | R | L | V | B | R | L | B | V | R | L | V |
| B | L | R | V | R | B | L | V | B | R | V | L |

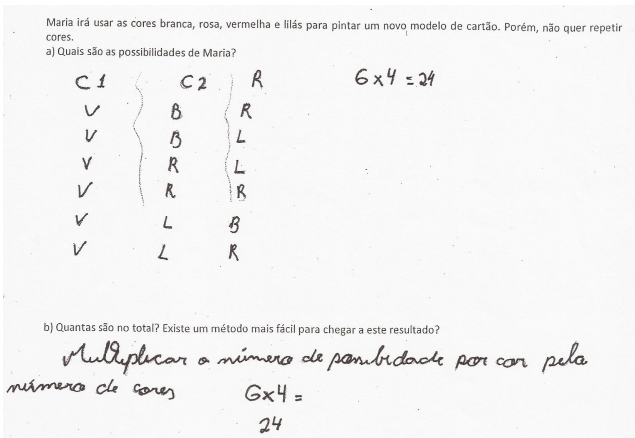
B -> 6 V -> 6 L -> 6 R -> 6

b) Quantas são no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

24 possibilidades. É só fazer 6x4 = 24, achamos isso quando multiplicamos a possibilidade de cores pelo número delas.

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 17 – Começam a padronizar



Maria irá usar as cores branca, rosa, vermelha e lilás para pintar um novo modelo de cartão. Porém, não quer repetir cores.

a) Quais são as possibilidades de Maria?

| C1 | C2 | R |
|---|---|---|
| V | B | R |
| V | B | L |
| V | R | L |
| V | R | R |
| V | L | B |
| V | L | R |

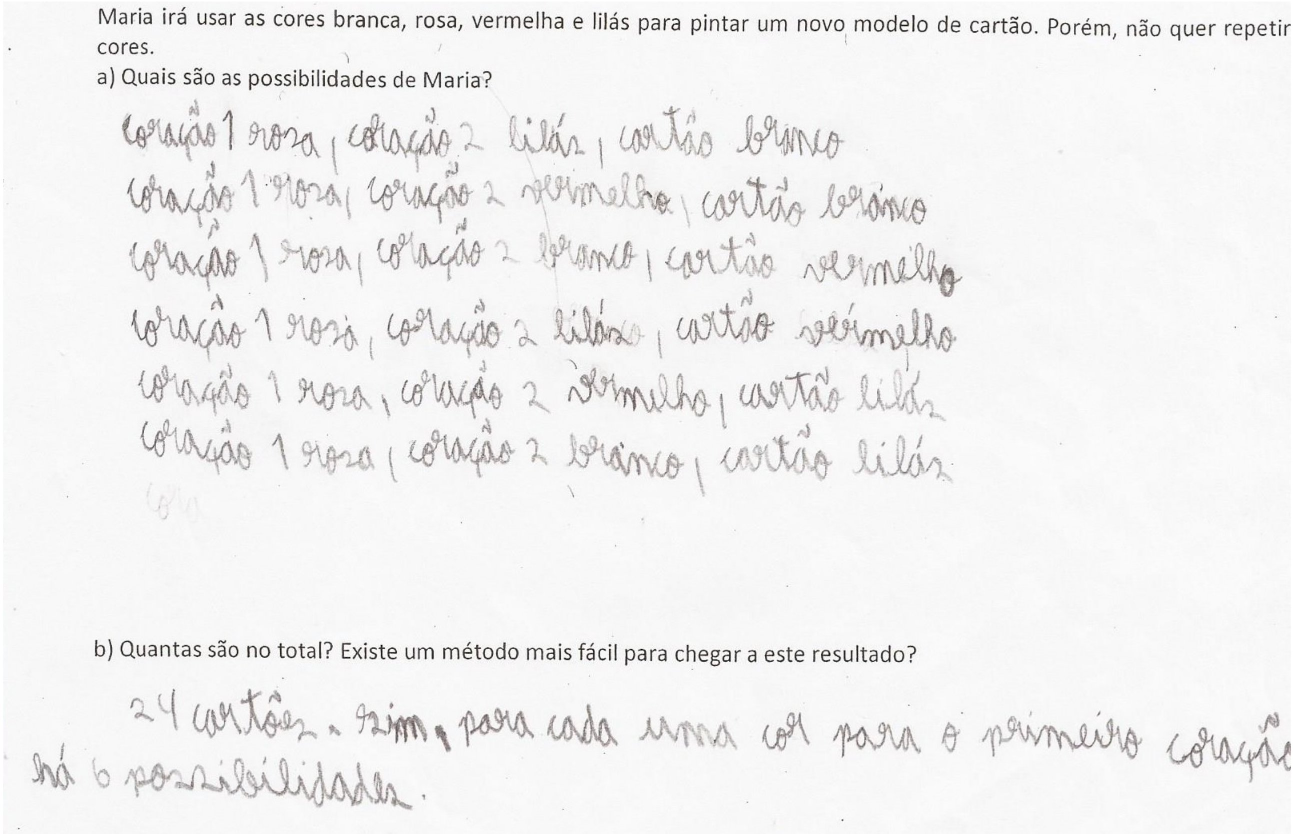
6x4 = 24

b) Quantas são no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

Multiplicar o número de possibidade por cor pelo número de cores 6x4 = 24

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 18 – Implementação da justificativa



Maria irá usar as cores branca, rosa, vermelha e lilás para pintar um novo modelo de cartão. Porém, não quer repetir cores.

a) Quais são as possibilidades de Maria?

coração 1 roza, coração 2 lilás, cartão branco
coração 1 roza, coração 2 vermelho, cartão branco
coração 1 roza, coração 2 branco, cartão vermelho
coração 1 roza, coração 2 lilás, cartão vermelho
coração 1 roza, coração 2 vermelho, cartão lilás
coração 1 roza, coração 2 branco, cartão lilás

b) Quantas são no total? Existe um método mais fácil para chegar a este resultado?

24 cartões. sim, para cada uma cor para o primeiro coração há 6 possibilidades.

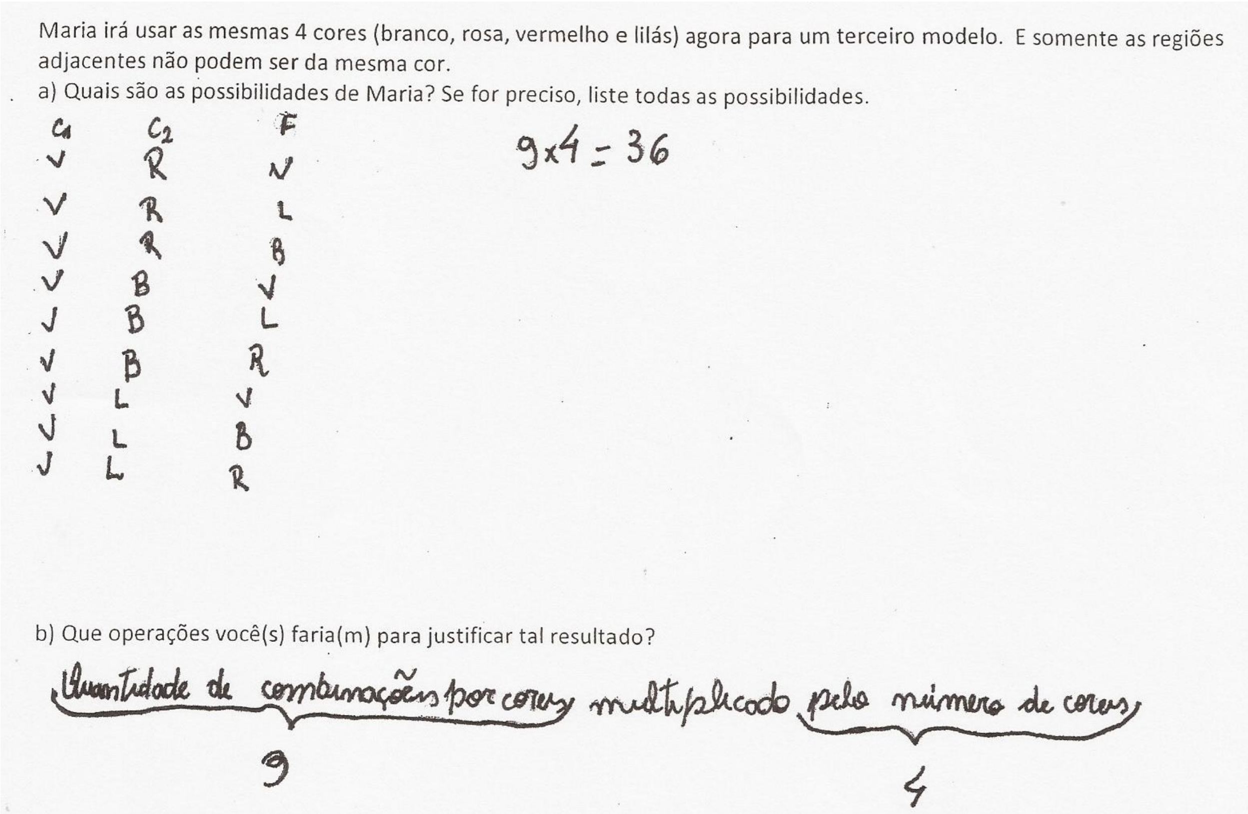
Fonte: Resolução dos alunos

**Análise das soluções da "3ª ideia":**

Ao chegar nessa situação problema, os alunos já conseguiam organizar melhor as informações fornecidas e perceberam que não era necessário escrever todos os casos.

Após uma investigação muito cuidadosa das soluções dos alunos, percebeu-se que resolver as questões em sala com eles, solidificaria algumas ideias fundamentais ao princípio multiplicativo. Decidiu-se então, fazer uma exposição no quadro de formas diferentes de organizar os dados, chamando atenção que a forma como as informações foram organizadas pode facilitar ou não o sucesso dos resultados. Para todas as situações-problemas a eles apresentadas, as informações foram organizadas em forma de listas, tabelas e diagrama de árvore (que pareceu, pelo menos para a maioria, algo inédito). Tentou-se usar soluções apresentadas aos alunos para formalizar técnicas que poderiam ajudá-los a entender. Muitos deles perceberam que "o segredo é fazer tudo muito organizado, aí fica fácil". Acredita-se que aqueles alunos que não haviam chegado à solução correta conseguiram compreender o que havia sido proposto. Para expandir o estudo, foram usadas as mesmas questões, porém com mais opções de cores e mais restrições, para uma análise oral dos resultados. As respostas foram muito satisfatórias.

Figura 19 – O Princípio Multiplicativo


Maria irá usar as mesmas 4 cores (branco, rosa, vermelho e lilás) agora para um terceiro modelo. E somente as regiões adjacentes não podem ser da mesma cor.

a) Quais são as possibilidades de Maria? Se for preciso, liste todas as possibilidades.

| $C_1$ | $C_2$ | F |
|---|---|---|
| V | R | V |
| V | R | L |
| V | R | B |
| V | B | V |
| V | B | L |
| V | B | R |
| V | L | V |
| V | L | B |
| V | L | R |

$9 \times 4 = 36$

b) Que operações você(s) faria(m) para justificar tal resultado?

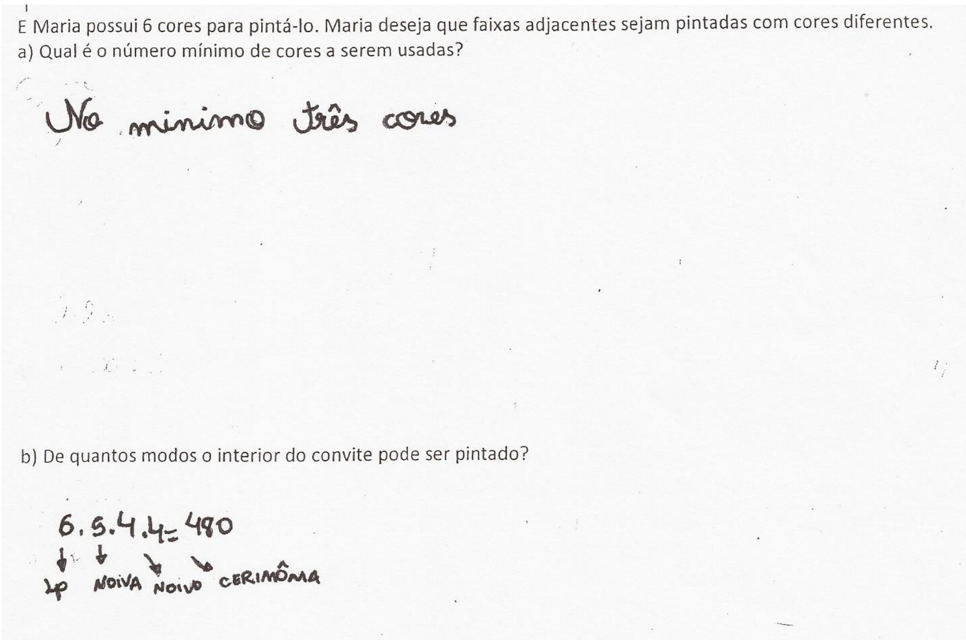
$\underbrace{\text{Quantidade de combinações por cores}}_{9}$ multiplicado $\underbrace{\text{pelo número de cores}}_{4}$

Fonte: Resolução dos alunos

**A Questão Desafio**

O Princípio Fundamental da Contagem foi apresentado aos alunos através das situações problemas descritas anteriormente. Nenhuma definição, nomenclatura, fórmula ou qualquer outro termo cientifico foi dito aos alunos, apenas os problemas, que foram considerados - por eles – "problemas de lógica". Durante a resolução foram feitas interferências mínimas para que cada aluno desenvolvesse soluções juntamente com seu colega-dupla. Nem todos os alunos chegaram a uma solução correta e por isso optou-se pela correção com todos os alunos. Concluída essa etapa, os alunos receberam a "Questão Desafio". As dificuldades foram muitas. Os alunos não conseguiram aproveitar as ideias trabalhadas nos problemas anteriores.Foram necessárias intervenções. Foi sugerido que começassem a organizar pela região que possuía mais restrições. Mesmo assim, poucos conseguiram prosseguir com a atividade. Foi necessário ajudar, dupla por dupla, para que conseguissem elaborar uma solução.

Figura 20 – Questão Desafio


E Maria possui 6 cores para pintá-lo. Maria deseja que faixas adjacentes sejam pintadas com cores diferentes.
a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?

No minimo três cores

b) De quantos modos o interior do convite pode ser pintado?

6.5.4.4=480

1p NOIVA NOIVO CERIMÔNIA

Fonte: Resolução dos alunos

Terminada a tarefa, sentiu-se necessidade de explorar mais situações-problemas, semelhantes as que já haviam sido trabalhadas. Foram selecionadas algumas questões que contribuíssem com o trabalho já desenvolvido.

## 4.2 RELATO DA ATIVIDADE 2

**Sobre a apresentação das atividades aos alunos:**

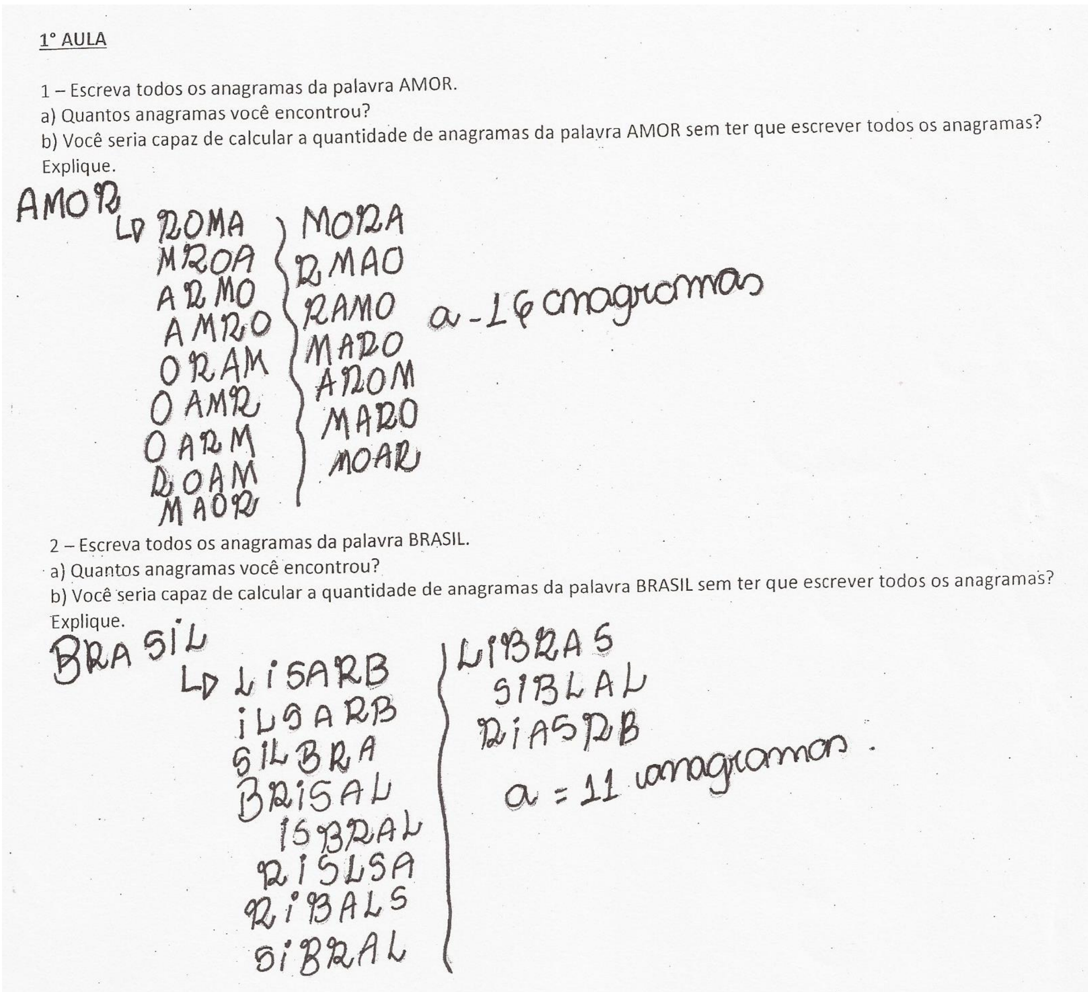
A Atividade 2, que apresentou a ideia da permutação através dos anagramas, decidiu-se dividir a aplicação em dois dias (100 minutos por dia). No primeiro dia apresentou-se a ideia de permutação sem repetição e no segundo dia, as repetições.

**Análise das soluções das Atividades do "Primeiro dia"**

As primeiras ideias foram muito semelhantes ao método que os alunos haviam usado na solução dos problemas que envolviam o princípio multiplicativo. Para a palavra AMOR, por exemplo, eles listaram todos os anagramas iniciados pela letra A e percebendo que iniciando com as demais letras teriam o mesmo número de anagramas, apenas multiplicaram as possibilidades. Tentando utilizar o mesmo método para a palavra BRASIL, os alunos começaram a perceber que o método poderia ser muito trabalhoso, e então, muitos deles me chamavam em suas mesas e pediam ajuda. Conseguiam perceber que seriam muitas possibilidades, mas não conseguiam calcular o total de anagramas. Uma dupla pediu ajuda, pois havia feito para a palavra BRASIL 6x5=30, perceberam que eram poucos anagramas mas não conseguiam concluir. Outro aluno tentou escrever todos os anagramas iniciados pela letra B, mas perguntou "Não é demais? Qual a forma mais fácil?"

Nas figuras que seguem pode-se perceber as confusões que os alunos cometem, uma vez que eles haviam aprendido a construir casos pequenos, mas que não haviam entendido realmente como generalizar. Foram dadas sugestões aos alunos. Retifiquei com eles que a ideia principal era organizar as informações, que seria interessante se eles conseguissem analisar as posssibilidades por posição, para só depois chegar ao resultado final.

Figura 21 – Os alunos não conseguem listar os anagramas


1° AULA

1 – Escreva todos os anagramas da palavra AMOR.

a) Quantos anagramas você encontrou?

b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra AMOR sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

AMOR

LD ROMA, MROA, ARMO, AMRO, ORAM, OAMR, OARM, ROAM, MAOR

MORA, RMAO, RAMO, MARO, AROM, MARO, MOAR

a - 16 anagramas

2 – Escreva todos os anagramas da palavra BRASIL.

a) Quantos anagramas você encontrou?

b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BRASIL sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

BRASIL

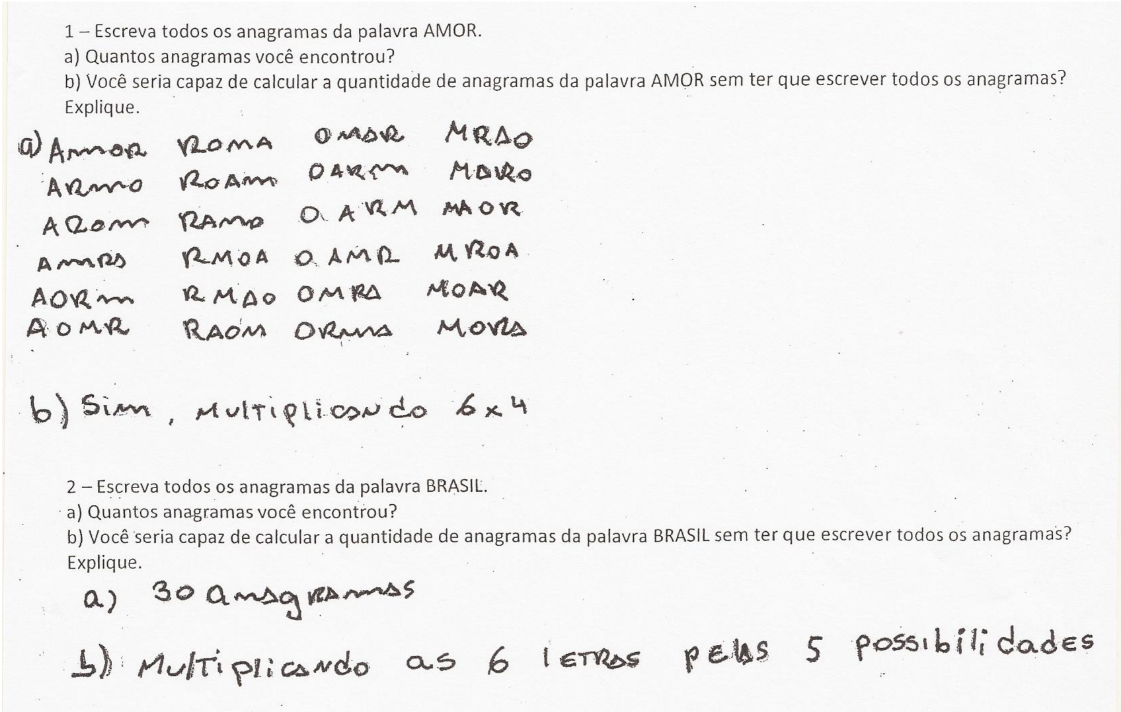
LD LISARB, ILSARB, SILBRA, BRISAL, ISBRAL, RISLSA, RIBALS, SIBRAL

LIBRAS, SIBLAL, RIASRB

a = 11 anagramas.

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 22 – Fazem corretamente a palavra AMOR, mas erram a palavra BRASIL



1 – Escreva todos os anagramas da palavra AMOR.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra AMOR sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

a) AMOR ROMA OMAR MRAO
ARMO ROAM OARM MARO
AROM RAMO OARM MAOR
AMRO RMOA OAMR MROA
AORM RMAO OMRA MOAR
AOMR RAOM ORMA MORA

b) Sim, multiplicando 6 x 4

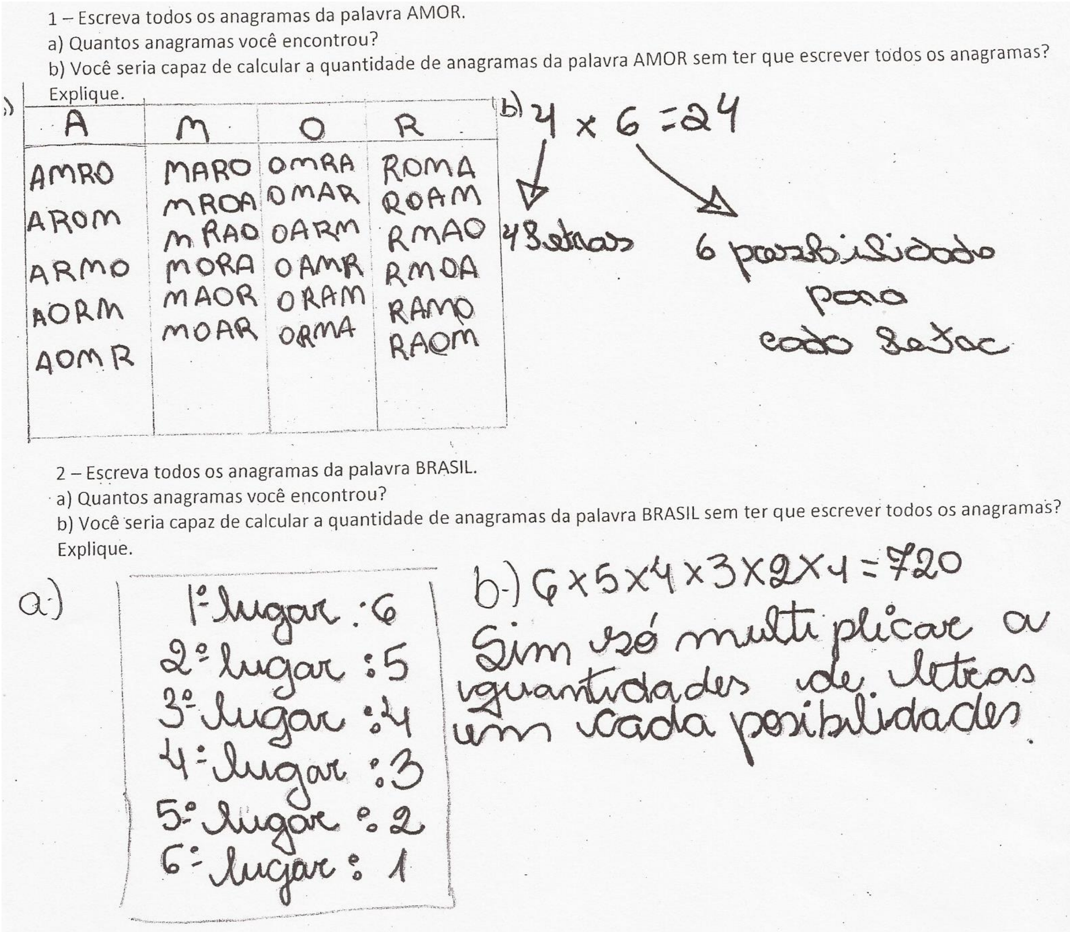
2 – Escreva todos os anagramas da palavra BRASIL.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BRASIL sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

a) 30 anagramas

b) Multiplicando as 6 letras pelas 5 possibilidades

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 23 – Organizam melhor os dados



1 – Escreva todos os anagramas da palavra AMOR.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra AMOR sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

| A | M | O | R |
|---|---|---|---|
| AMRO | MARO | OMRA | ROMA |
| AROM | MROA | OMAR | ROAM |
| ARMO | MRAO | OARM | RMAO |
| AORM | MORA | OAMR | RMOA |
| AOMR | MAOR | ORAM | RAMO |
| | MOAR | ORMA | RAOM |

b) 4 × 6 = 24
4 letras
6 possibilidado para cada letra

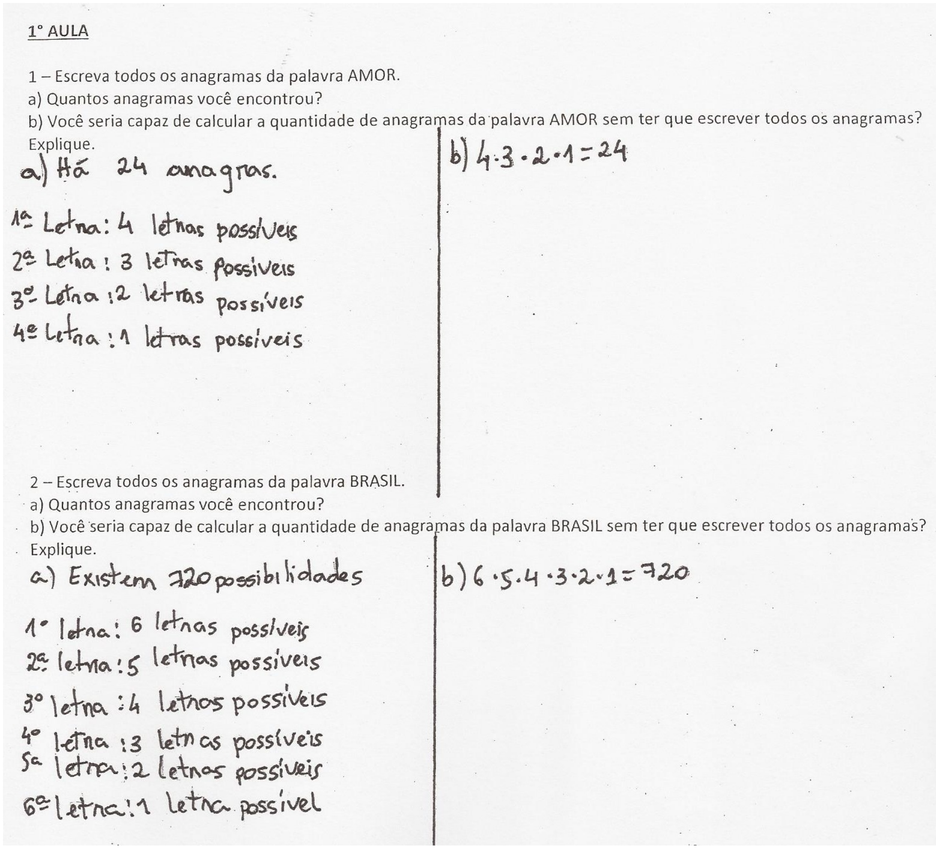
2 – Escreva todos os anagramas da palavra BRASIL.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BRASIL sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

a)
1º lugar: 6
2º lugar: 5
3º lugar: 4
4º lugar: 3
5º lugar: 2
6º lugar: 1

b) 6×5×4×3×2×1 = 720
Sim só multiplicar a quantidades de letras em cada posibilidades.

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 24 – Conseguem usar as sugestões da professora



1° AULA

1 – Escreva todos os anagramas da palavra AMOR.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra AMOR sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

a) Há 24 anagras.

1ª Letra: 4 letras possíveis
2ª Letra: 3 letras possíveis
3ª Letra: 2 letras possíveis
4ª Letra: 1 letras possíveis

b) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2 – Escreva todos os anagramas da palavra BRASIL.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BRASIL sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

a) Existem 720 possibilidades

1° letra: 6 letras possíveis
2ª letra: 5 letras possíveis
3° letra: 4 letras possíveis
4° letra: 3 letras possíveis
5ª letra: 2 letras possíveis
6ª letra: 1 letra possível

b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

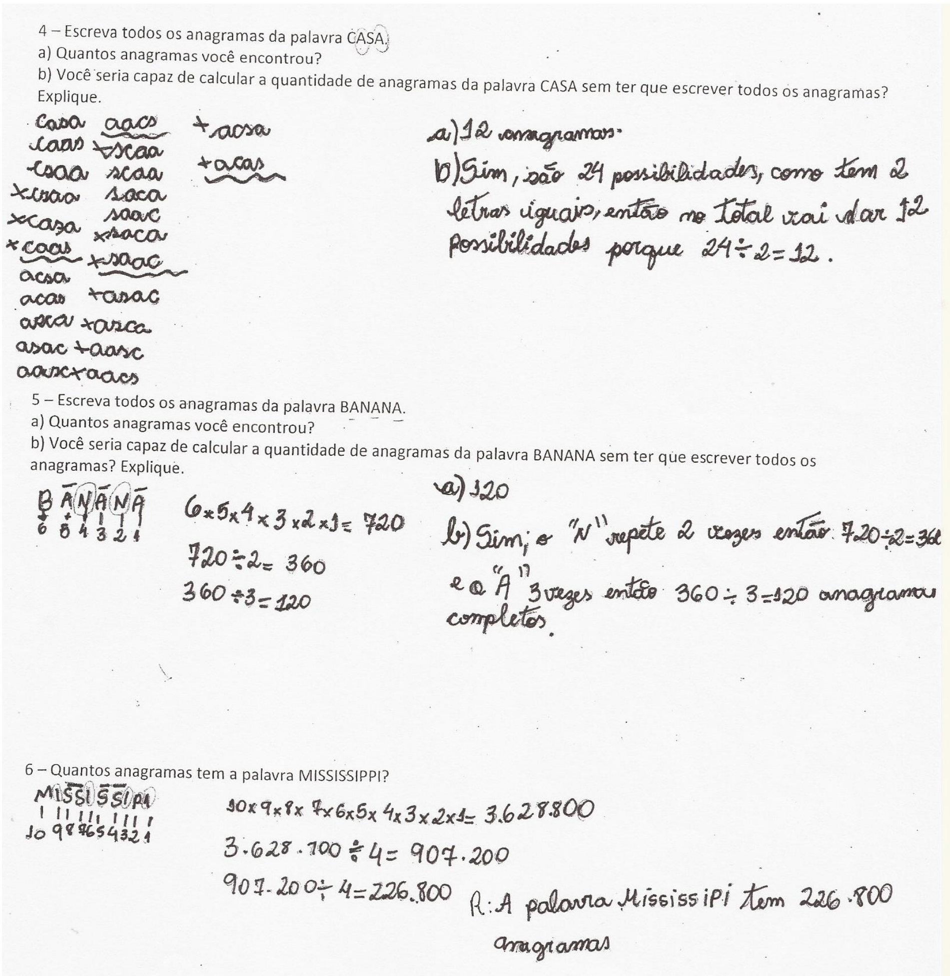
Fonte: Resolução dos alunos

Ao terminar a atividade, essa foi corrigida com bastante cuidado. Mas uma vez foi imprencidível a correção no quadro, com todos os alunos. Muitas dúvidas foram sanadas e os alunos sentiram-se preparados para a próxima atividade.

**Análise das soluções das Atividades do "Segundo dia"**

Esta atividade trouxe exemplos de anagramas com repetição. Ao apresentar a atividade, os alunos já pediram que um exemplo fosse feito. Usei as palavras CIRCO e PARANÁ para explorar a ideia da repetição. Escrevi alguns anagramas utilizando $C_1$ e $C_2$ na palavra CIRCO para que percebessem que a leitura é a mesma, mas que fosse usada a técnica anterior, os anagramas seriam contados como diferentes. Eles perceberam que era só descartar uma possibilidade e concluíram que bastava dividir o total de anagramas encontrados por dois. Para evitar confusões futuras, solicitou-se que eles ajudassem a calcular os anagramas da palavra PARANÁ. Foi renomeado $PA_1RA_2N\acute{A}_3$, e analisadas as permutações para a letra A. Os alunos entenderam que não era suficiente dividir por três e então a atividade proposta foi iniciada. Mesmo com as sugestões da professora, alguns alunos calcularam os anagramas como se não houvesse repetições de letras e dividiram pelo total de letras repetidas e não pelo resultado obtido das permutações das letras repetidas. Mais uma vez, foi necessária a correção no quadro.

Figura 25 – Anagramas com letras repetidas


4 – Escreva todos os anagramas da palavra CASA.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra CASA sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

casa aacs +acsa
caas +scaa +acas
csaa scaa
+csaa saca
+casa saac
+caas +saca
acsa +saac
acas +asac
asca +asca
asac +aasc
aasc+aacs

a) 12 anagramas.
b) Sim, são 24 possibilidades, como tem 2 letras iguais, então no total vai dar 12 possibilidades porque 24÷2=12.

5 – Escreva todos os anagramas da palavra BANANA.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BANANA sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

B A N A N A
6 5 4 3 2 1

6×5×4×3×2×1= 720
720÷2= 360
360÷3=120

a) 120
b) Sim; o "N" repete 2 vezes então 720÷2=360 e o "A" 3 vezes então 360÷3=120 anagramas completos.

6 – Quantos anagramas tem a palavra MISSISSIPPI?

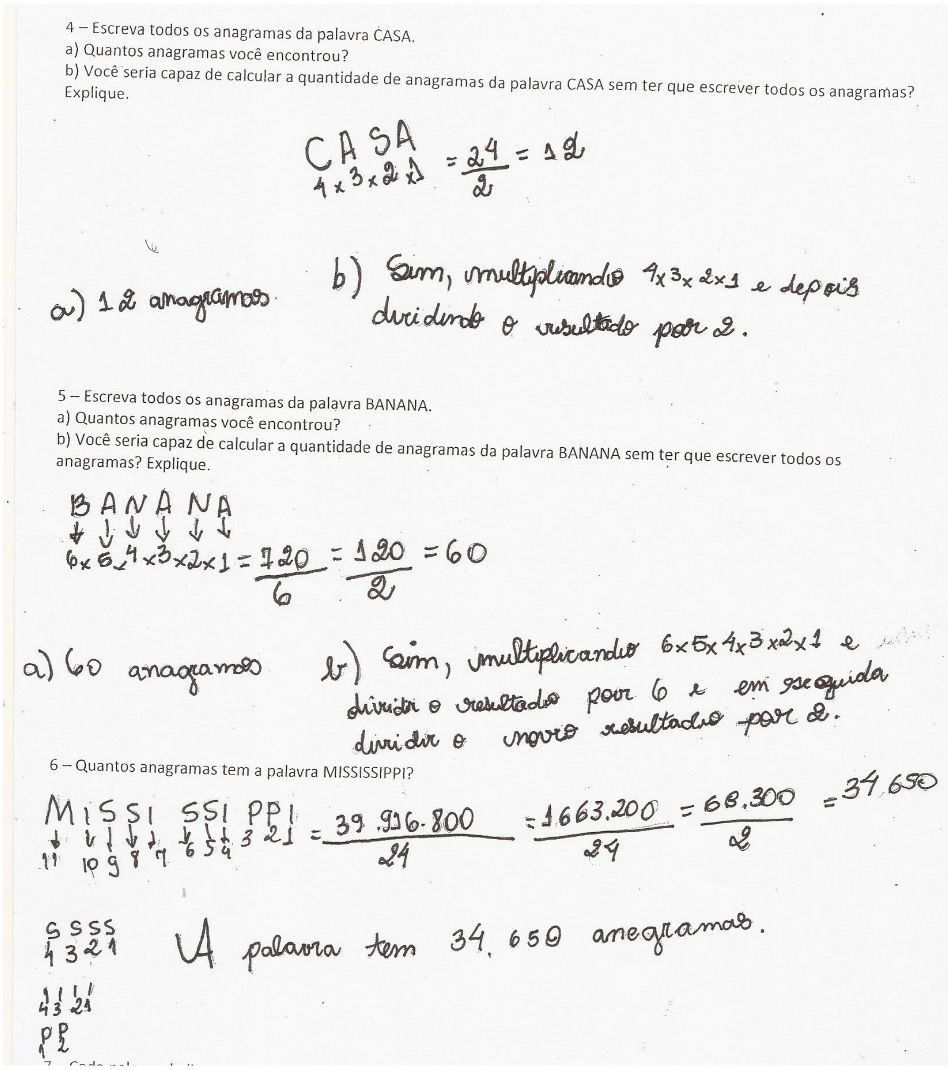
MISSISSIPPI
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

10×9×8×7×6×5×4×3×2×1= 3.628800
3.628.100÷4= 907.200
907.200÷4=226.800

R: A palavra Mississipi tem 226.800 anagramas

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 26 – Anagramas com letras repetidas



4 – Escreva todos os anagramas da palavra CASA.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra CASA sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

CASA
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{24}{2} = 12$

a) 12 anagramas

b) Sim, multiplicando $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e depois dividindo o resultado por 2.

5 – Escreva todos os anagramas da palavra BANANA.
a) Quantos anagramas você encontrou?
b) Você seria capaz de calcular a quantidade de anagramas da palavra BANANA sem ter que escrever todos os anagramas? Explique.

BANANA
$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{720}{6} = \frac{120}{2} = 60$

a) 60 anagramas

b) Sim, multiplicando $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ e dividir o resultado por 6 e em seguida dividir o novo resultado por 2.

6 – Quantos anagramas tem a palavra MISSISSIPPI?

MISSISSIPPI
$11 \; 10 \; 9 \; 8 \; 7 \; 6 \; 5 \; 4 \; 3 \; 2 \; 1 = \frac{39.916.800}{24} = \frac{1.663.200}{24} = \frac{69.300}{2} = 34.650$

S S S S
4 3 2 1

I I I I
4 3 2 1

P P
1 2

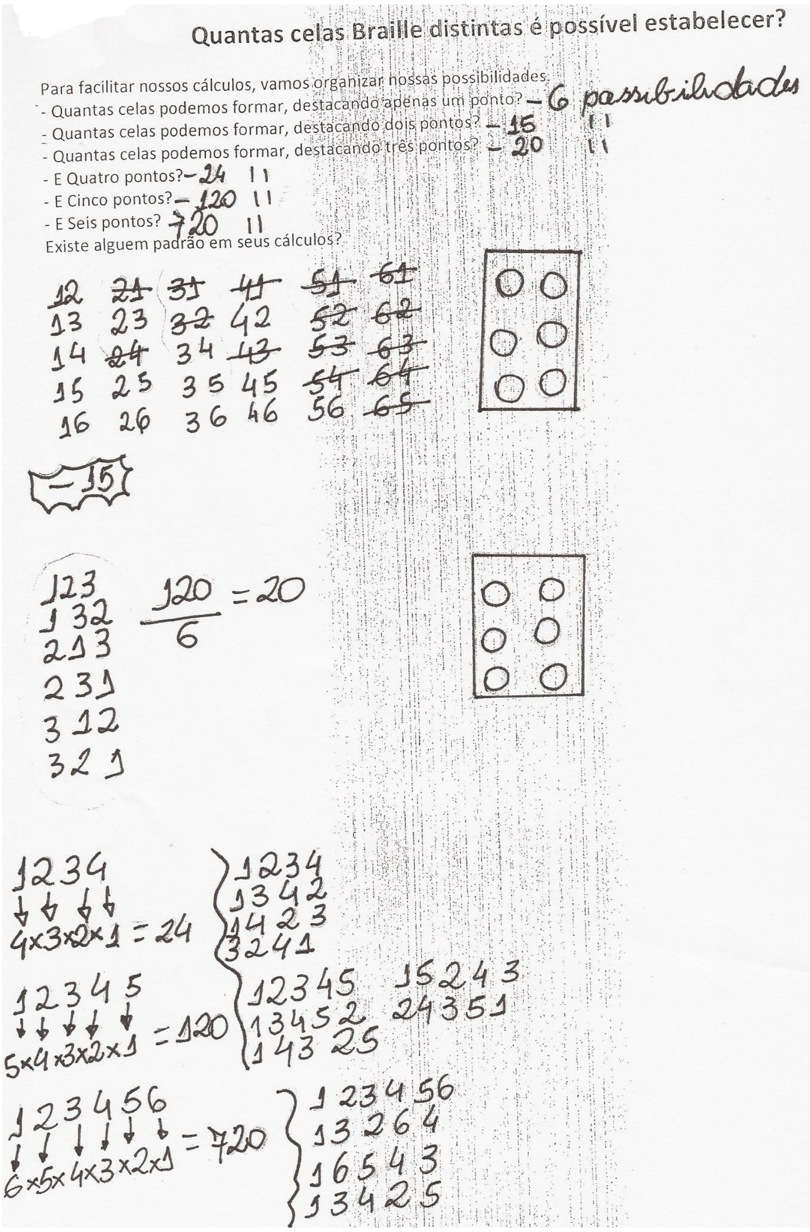
A palavra tem 34.650 anagramas.

Fonte: Resolução dos alunos

## 4.3 RELATO DA ATIVIDADE 3

A atividade 3, que apresenta a ideia de combinação, foi apresentada em duas aulas aos alunos. Como nas aulas anteriores, a situação problema foi lida para os alunos. Entendido como funcionava o sistema Braille, os alunos perguntaram se poderiam usar a ideia do princípio multiplicativo (eles não foram apresentados a nenhuma nomenclatura e por isso perguntavam se podiam fazer $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). Foi necessária intervenção, questionando sobre a ordem. Para facilitar,a professora os incentivou a enumerar cada ponto da cela Braille e analisar se escolher os pontos 1 - 2 - 3 formariam o mesmo símbolo formado pelos pontos 2 - 1- 3. Os alunos conseguiram entender o que significa "a ordem é importante", porém esta expressão também não foi utilizada com eles. Os alunos fizeram a atividade, mas mesmo com as sugestões alguns não concluíram corretamente a atividade.

Figura 27 – A ideia da combinação



Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Para facilitar nossos cálculos, vamos organizar nossas possibilidades.
- Quantas celas podemos formar, destacando apenas um ponto? – 6 possibilidades
- Quantas celas podemos formar, destacando dois pontos? – 15 "
- Quantas celas podemos formar, destacando três pontos? – 20 "
- E Quatro pontos? – 24 "
- E Cinco pontos? – 120 "
- E Seis pontos? 720 "

Existe alguem padrão em seus cálculos?

12 ~~21~~ ~~31~~ ~~41~~ ~~51~~ ~~61~~
13 23 ~~32~~ 42 ~~52~~ ~~62~~
14 ~~24~~ 34 ~~43~~ ~~53~~ ~~63~~
15 25 35 45 ~~54~~ ~~64~~
16 26 36 46 56 ~~65~~

– 15

123
132
213
231
312
321

$\frac{120}{6} = 20$

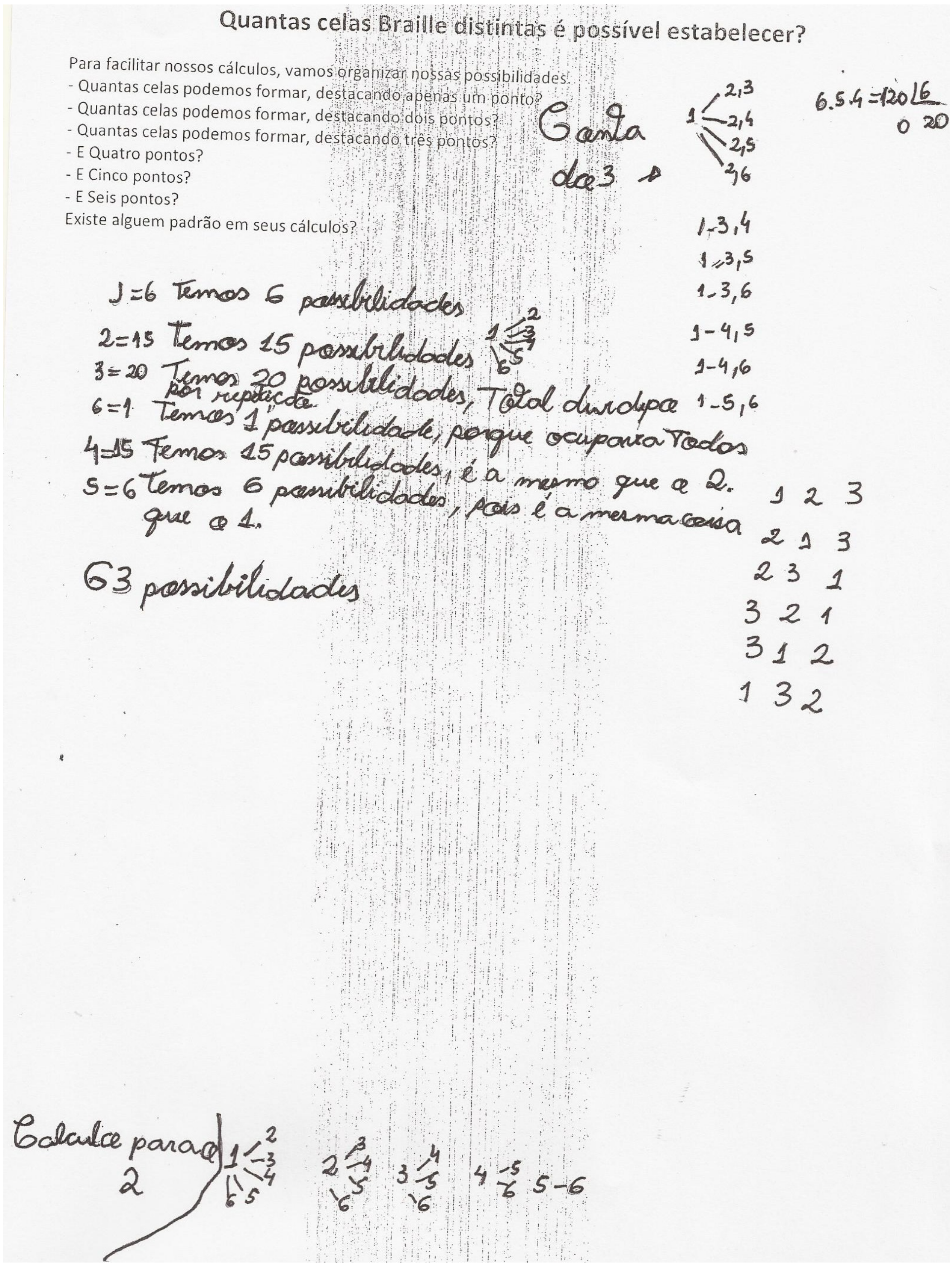
1234 → 4×3×2×1 = 24 1234, 1342, 1423, 3241

12345 → 5×4×3×2×1 = 120 12345, 13452, 14325, 15243, 24351

123456 → 6×5×4×3×2×1 = 720 123456, 13264, 16543, 13425

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 28 – A ideia da combinação



Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Para facilitar nossos cálculos, vamos organizar nossas possibilidades:
- Quantas celas podemos formar, destacando apenas um ponto?
- Quantas celas podemos formar, destacando dois pontos?
- Quantas celas podemos formar, destacando três pontos?
- E Quatro pontos?
- E Cinco pontos?
- E Seis pontos?

Existe alguem padrão em seus cálculos?

1=6 Temos 6 possibilidades

2=15 Temos 15 possibilidades

3=20 Temos 20 possibilidades, Total divide por repetida

6=1 Temos 1 possibilidade, porque ocupa os Todos

4=15 Temos 15 possibilidades, é a mesmo que a 2.

5=6 Temos 6 possibilidades, pois é a mesma coisa que a 1.

63 possibilidades

Fonte: Resolução dos alunos

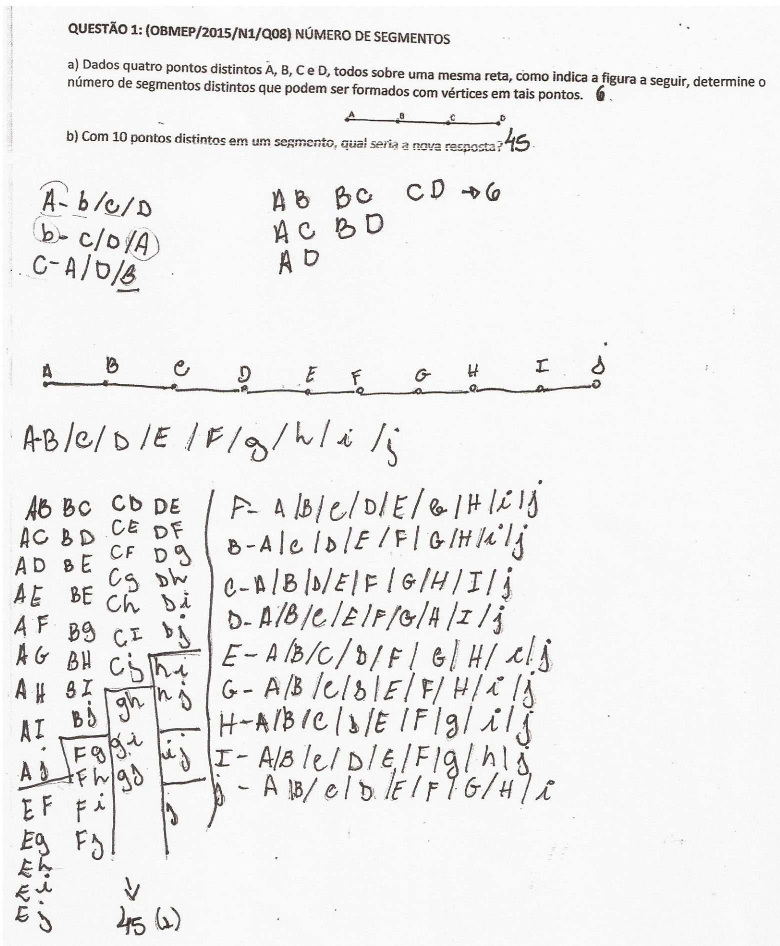
## 4.4 A ATIVIDADE TESTE

Após a apresentação das atividades, solução por parte dos alunos, análise das respostas e correção no quadro com os alunos, optou-se por realizar alguns problemas com os alunos anteriormente à Atividade Teste planejada.
Tal decisão foi tomada, pois julgou-se que as atividades apresentadas não seriam suficientes para exemplificar as situações de Análise Combinatória. Decidimos por utilizar os problemas propostos no livros didático adotado pela escola. Tais problemas encontram-se no ANEXO A.

Para esta atividade, os alunos foram orientados que a professora não iria ajudá-los com as soluções e que eles não poderiam consultar os colegas, exceto sua dupla. A atividade foi lida pela professora com todos os alunos acompanhando, porém nenhum comentário sobre as soluções da questão foi feito.

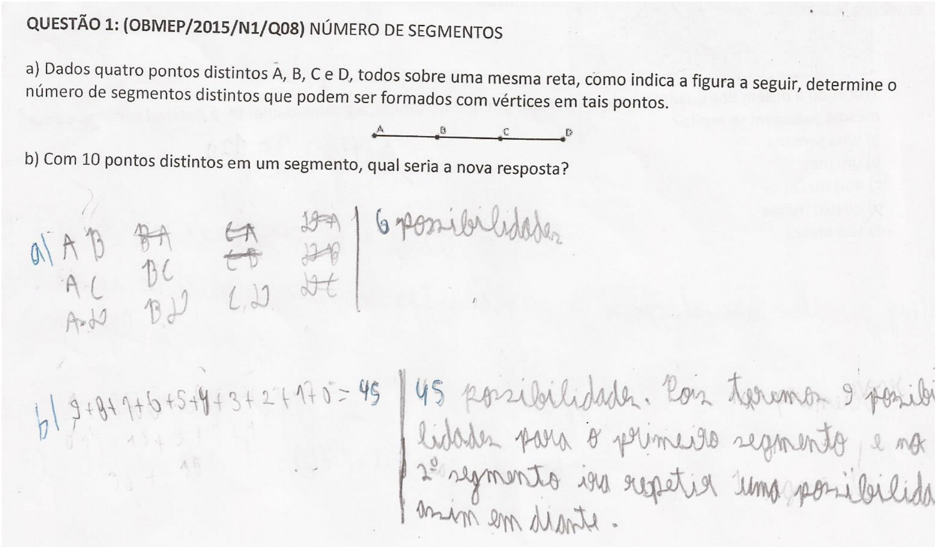
Para a primeira situação-problema proposta da Questão 1, o método mais comum utlizado pelos alunos foi escrever todas as possibilidades, considerando que a ordenação não era importante. Já para a segunda situação , os alunos tentaram generalizar, mas muitas vezes se perderam na generalização.

Figura 29 – Descrevem todas as possibilidades




Fonte: Resolução dos alunos

Figura 30 – Tentam usar os métodos estudados


QUESTÃO 1: (OBMEP/2015/N1/Q08) NÚMERO DE SEGMENTOS

a) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta, como indica a figura a seguir, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.

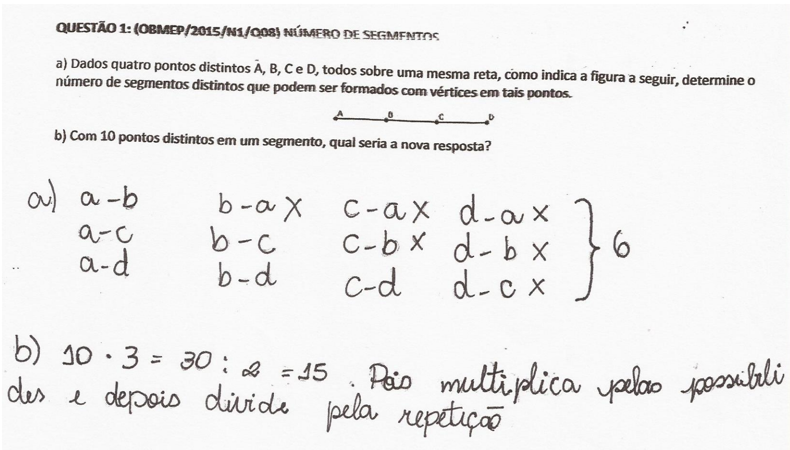
b) Com 10 pontos distintos em um segmento, qual seria a nova resposta?

a) AB ~~BA~~ ~~CA~~ ~~DA~~
AC BC ~~CB~~ ~~DB~~
AD BD CD ~~DC~~
6 possibilidades

b) 9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 45
45 possibilidades. Por termos 9 possibilidades para o primeiro segmento, e no 2º segmento irá repetir uma possibilidade assim em diante.

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 31 – Confusão ao utilizar as técnicas


QUESTÃO 1: (OBMEP/2015/N1/Q08) NÚMERO DE SEGMENTOS

a) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta, como indica a figura a seguir, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.

b) Com 10 pontos distintos em um segmento, qual seria a nova resposta?

a) a-b b-a X c-a X d-a X
a-c b-c c-b X d-b X
a-d b-d c-d d-c X
6

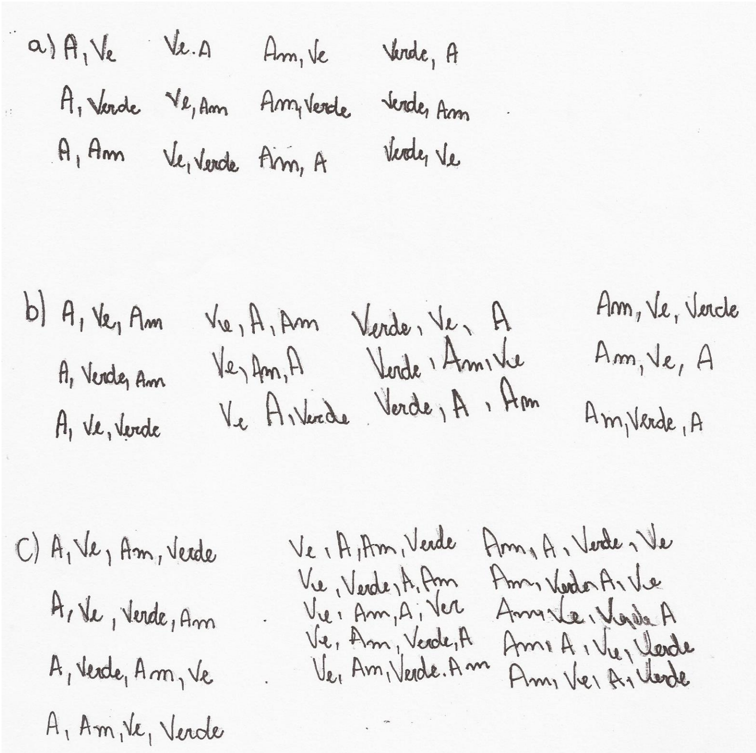
b) 10 · 3 = 30 : 2 = 15. Pois multiplica pelas possibilidades e depois divide pela repetição

Fonte: Resolução dos alunos

A solução da Questão 2 foi unânime: todos os alunos fizeram 5x4x3x2x1=120. Mas não justificaram a solução.

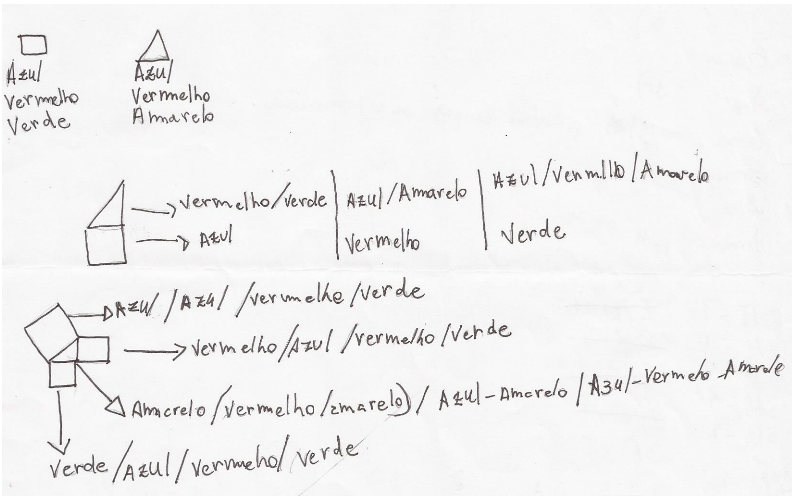
Houve muita confusão na Questão 3. Alguns alunos tentaram listar as possibilidades, mas se perderam nas soluções, até mesmo no primeiro caso. Outros tentaram padronizar, mas também não tiveram êxito. Não souberam distinguir as restrições e se perderam nas possibilidades. As justificativas não foram eficientes.

Figura 32 – Tentam escrever todas as possibilidades



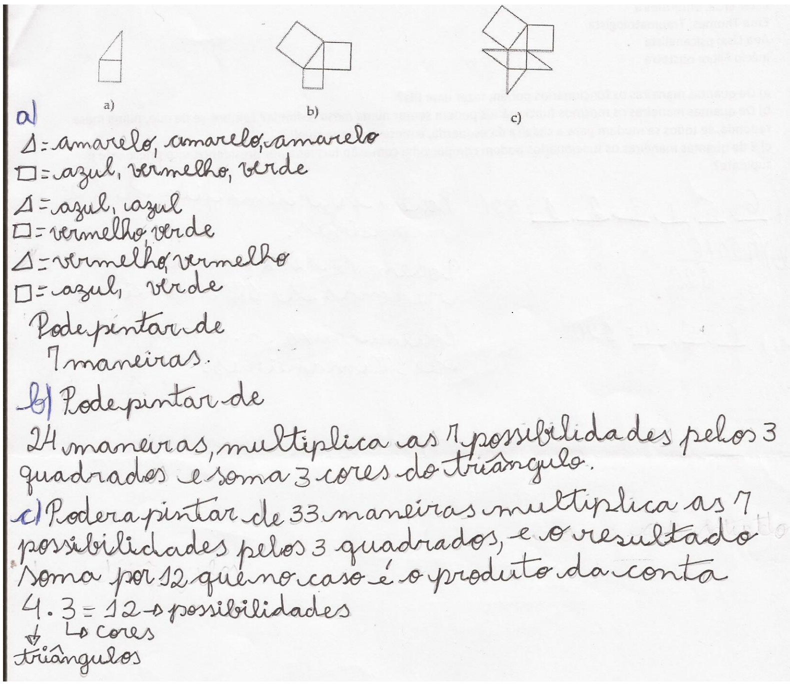

Fonte: Resolução dos alunos

Figura 33 – Não souberam usar a restrição




Fonte: Resolução dos alunos

Figura 34 – Não conseguem generalizar

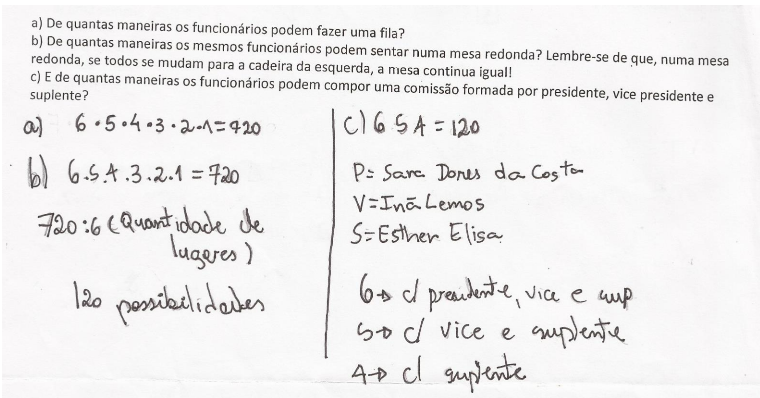

a)
b)
c)

a)
Δ= amarelo, amarelo, amarelo
□= azul, vermelho, verde
Δ= azul, azul
□= vermelho verde
Δ= vermelho, vermelho
□= azul, verde
Pode pintar de
7 maneiras.
b) Pode pintar de
24 maneiras, multiplica as 7 possibilidades pelos 3
quadrados e soma 3 cores do triângulo.
c) Podera pintar de 33 maneiras multiplica as 7
possibilidades pelos 3 quadrados, e o resultado
soma por 12 que no caso é o produto da conta
4 . 3 = 12 → possibilidades
↓ → cores
triângulos

Fonte: Resolução dos alunos

A Questão 4 foi solucionada corretamente pela maioria dos alunos, até mesmo o caso circular, que não havia sido trabalhado com eles.

Figura 35 – Solução Correta


a) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?
b) De quantas maneiras os mesmos funcionários podem sentar numa mesa redonda? Lembre-se de que, numa mesa redonda, se todos se mudam para a cadeira da esquerda, a mesa continua igual!
c) E de quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice presidente e suplente?

a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
b) $6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$
720 : 6 (Quantidade de lugares)
120 possibilidades

c) $6 \; 5 \; 4 = 120$
P= Sara Dores da Costa
V= Inã Lemos
S= Esther Elisa
6 → c/ presidente, vice e sup
5 → c/ vice e suplente
4 → c/ suplente

Fonte: Resolução dos alunos

# 5 O USO DE JOGOS COMO PROPOSTA

Para complementar o estudo adaptou-se um famoso jogo que estimula o raciocínio lógico e combinatório.

Este jogo não foi aplicado aos alunos, mas foi considerado muito adequado ao tema trabalhado. Ele pode ser utilizado antes das atividades de apresentação , como uma atividade diagnóstica, durante as atividades ou ao final delas.

**Sobre o jogo**

O Mastermind (no Brasil Senha) é um jogo de tabuleiro inventado por Mordechai Meirowitz e distribuído inicialmente pela Invicta Plastics. Publicado em 1971, o jogo vendeu mais de 50 milhões de tabuleiros em 80 países, tornando-se o mais bem sucedido novo jogo da década de 1970. Atualmente, no Brasil é vendido pela Grow com o tabuleiro preto e cinza, e os pinos do jogo em azul, amarelo, verde, rosa, roxo e laranja.

Figura 36 – Tabuleiro a senha

Fonte: Imagem retirada da web

Figura 37 – Tabuleiro Mastermind


Fonte: Imagem retirada da web

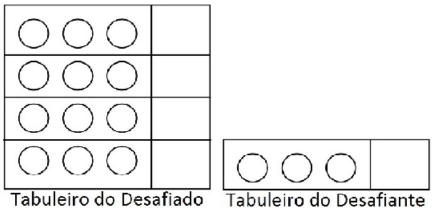
Um jogo de Mastermind tem pinos de seis cores diferentes, aleatórias, exceto preto e branco. Os pinos pretos e brancos são menores. Há quatro buracos grandes em cada fileira, em 10 fileiras, uma abaixo da outra. E ao lado delas, um quadrado menor, com quatro buracos menores, dois em cima de dois. Uma fileira, que seria a décima primeira, tem um defletor que esconde seus buracos. O desafiador faz uma combinação com quatro pinos coloridos, sem repetir as cores de cada pino, e as põe na décima primeira fileira e levanta o defletor, escondendo a senha. Então, o desafiado tenta adivinhar a senha, pondo quatro pinos que ele acha que são a senha na primeira fileira, e o desafiador põe os pinos pretos e brancos no quadrado menor ao lado. A regra dos pinos pretos e brancos são essas: o branco significa que há uma cor certa mas lugar errado, o preto significa que há uma cor certa no lugar certo, e nenhum pino significa que uma das cores não é contida na senha. O desafiado vai tentando adivinhar, se guiando pelos pinos pretos e brancos. Se o desafiado não acertar até a 10ª fileira, o desafiador fecha o defletor e revela a senha, mas se adivinhar, o desafiador põe quatro pinos pretos e revela a senha.

**Adaptações para sala de aula**

Sendo inviável a compra dos jogos, adaptamos para o papel o tabuleiro e trocamos os pinos por lápis de cor.
Para facilitar a aplicação e entendimento por parte dos alunos, elaboramos o jogo em três níveis.

PRIMEIRO NÍVEL:
Quatro cores disponíveis, a senha será composta por três cores e o desafiado terá quatro chances de acertar.

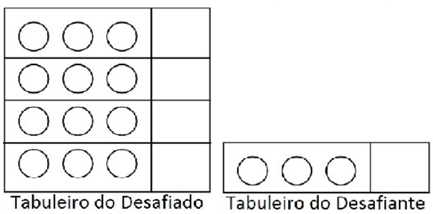
Figura 38 – Tabuleiro para NÍVEL 1




Fonte: Construção do autor

SEGUNDO NÍVEL
Cinco cores disponíveis, a senha terá três cores e o desafiado terá quatro opções para tentar acertar.

Figura 39 – Tabuleiro para NÍVEL 2



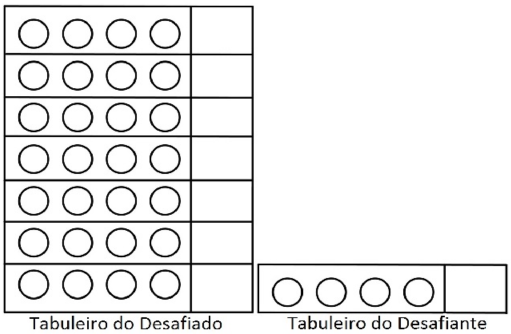

Fonte: Construção do autor

TERCEIRO NÍVEL
Cinco cores disponíveis, a senha composta por quatro cores e o desafiado terá sete chances para tentar acertar.

**As regras do Jogo**

Primeiramente, deve-se escolher quem será o desafiante (aquele que formará a senha) e quem será o desafiado (aquele que tentará descobri-la). a) O desafiante forma

Figura 40 – Tabuleiro para NÍVEL 3




Fonte: Construção do autor

uma senha e colore os espaços reservados para a senha seguindo a direção da seta. b) O desafiado, então, forma uma senha que acredita ser a formada pelo desafiante. Caso não tenha acertado a senha, o desafiante dá algumas dicas na coluna da direita do desafiado. Se o desafiado acertar alguma cor e posição, marca-se (na coluna da direita) uma bolinha preta. Se o desafiado acertar alguma cor, mas não acertar a posição, marca-se (na coluna da direita) um "X".

**UM EXEMPLO PARA O NÍVEL 1**

Estão disponíveis quatro cores e o desafiado escolherá três, ou seja, 24 possibilidades de sequências. Vamos supor as cores disponíveis Vermelha (V), Amarela (A), Laranja(L) e Rosa (R).
Vamos supor que o desafiante tenha escolhido a sequência Vermelho – Amarelo – Laranja.

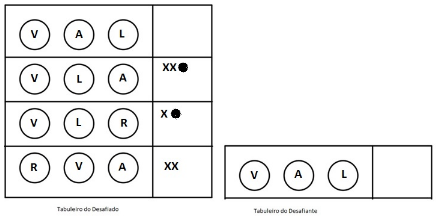
O desafiado, com certeza, acertou pelo menos duas cores. Vamos supor que o desafiado tenha escolhido a sequência Rosa – Vermelho – Amarelo.

Assim o desafiado receberá X X, pois acertou duas cores, mas não acertou a posição.

Ele então refaz sua sequência : Vermelho – Laranja – Rosa. Receberá uma bolinha e um X, pois acertou uma cor e posição e uma cor. Daí, espera-se que ele perceba que Amarelo e Laranja fazem parte da sequência, e terá de testar Vermelho e Rosa.

Se o desafiado forma a sequência Vermelho – Laranja – Amarelo, receberá uma bolinha e X X. Espera-se que ele note que na primeira posição deve estar o vermelho e então chega na sequência do desafiante Vermelho – Amarelo – Laranja.

Figura 41 – Exemplo para o Nível 1




Fonte: Construção do autor

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da proposta de atividade, este trabalho é essencialmente um trabalho de investigação. O principal objetivo é analisar o comportamento de alunos do ensino fundamental diante de situações problemas que envolvam contagem. E a partir disso, construir uma nova proposta didática para o estudo do conteúdo.

Os resultados foram considerados bastantes satisfatórios, pois muito foi desenvolvido e principalmente aprendido com os alunos. Acredita-se que inserir o estudo da análise combinatória no ensino fundamental pode colaborar muito para a solução de problemas mais complexos que serão apresentados no Ensino Médio; porém, há muito a ser aperfeiçoado.

Uma reflexão do que foi feito nos sugere que o tempo proposto (aproximadamente 40 aulas de 50 minutos cada) não é suficiente para trabalhar todo este conteúdo. Assim, propõe-se dividir/diluir as situações de contagem ao longo dos quatro anos da segunda fase do ensino fundamental acreditando que os resultados serão mais satisfatórios. Torna-se fundamental também que a dificuldade dos problemas propostos seja aumentada de forma mais lenta, porém sempre gradual.

A proposta de trabalhar com situações problema e não com definições exige que o aluno seja mais participativo nas aulas. Por isso, as atividades devem ser elaboradas com o objetivo não só de explorar o conhecimento do aluno, mas também de instigá-lo a solucionar tais problemas, evolvendo-o na solução e desenvolvendo um caminho lógico.

Pensando nisso, adaptou-se um jogo bastante conhecido no mundo todo e propomos o uso do mesmo em sala de aula, tanto como uma atividade para iniciar o tema, tanto para finalizar o estudo.

Este trabalho é finalizado com a certeza de que o espaço escolar é um espaço dinâmico e que por isso não há forma única de trabalhar algum conteúdo. Porém, há sempre o que ser explorado, proposto, investigado e aperfeiçoado. Aqui,foi registrada uma experiência vivida por nós e, espera-se que ela seja útil a outros docentes e aos alunos que se interessam por tal disciplina.

## APÊNDICE A – SOLICITAÇÃO PARA EXECUÇÃO DA PESQUISA

Senhora Fabiana Receputi
Diretora da Escola Estadual Henrique Burnier

Eu, Elionôra Rodrigues de Azevedo, servidora do Estado de Minas Gerais, matrícula MASP no 1xxxxxx2, aluna regular do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Juiz de Fora, sirvo-me do presente para solicitar a Vossa Senhoria a autorização para efetuar um procedimento experimental com alunos do 9◦ ano do ensino fundamental desta escola.
Trata-se de uma sequência de atividades envolvendo o conteúdo Análise Combinatória. Estas atividades serão desenvolvidas com todos alunos matriculados no 9◦ ano da escola. O conteúdo será trabalhado em sala de aula, sem necessidade de aulas extra turno, no período de 03/10/2016 à 01/12/2016 (período referente ao 4◦ bimestre).
Em anexo encontra-se um modelo de termo de anuência e concessão que será enviado aos pais, para que tomem ciência do projeto de pesquisa e como se dará o trabalho. Nestes termos, peço deferimento.

Juiz de Fora, 20 de setembro de 2016

Elionôra Rodrigues de Azevedo

# APÊNDICE B – AUTORIZAÇÃO DO RESPONSÁVEL

Pesquisa para Dissertação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF.
Projeto: Análise Combinatória para o Ensino Fundamental
Pesquisadora: Elionôra Rodrigues de Azevedo
Orientador: Prof Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Este projeto propõe elaborar sequências didáticas para o desenvolvimento do estudo da Análise Combinatória para os alunos matriculados no Ensino Fundamental.
Durante todo o 4o bimestre os alunos desenvolveram atividades em sala, orientados pela professora, com situações problemas que abordavam tal tema. Os registros das atividades foram feitas em folhas avulsas que NÃO contém nome ou qualquer outra forma de identificação do(a) aluno(a).
Venho por meio dessa, pedir autorização, para que tais dados sejam anexados ao trabalho final.

Este termo é para certificar que eu concordo em participar voluntariamente do projeto acima mencionado. Por meio dessa, dou permissão para utilizarem as atividades que desenvolvi com meus colegas, assegurando que não serei identificado(a).
Estou ciente de que, ao término da pesquisa, essas informações e os resultados poderão ser divulgados.

Juiz de Fora, 30 de novembro de 2016.

Aluno(a)

Responsável pelo(a) aluno(a)

Pesquisadora

# ANEXO A – PROBLEMAS PROPOSTOS POR (DANTE)

1 – Um cliente chega a um restaurante para jantar. Ele pode escolher entre 3 pratos principais (carne, peixe e frango) e uma sobremesa entre as 2 que são oferecidas (sorvete e salada de frutas). De quantas maneiras diferentes esse cliente pode escolher uma refeição com sobremesa?

2 – A professora Heloísa deseja escolher um menino e uma menina do 9○ ano A para representar a turma em um evento. Sabendo que, nessa sala, estão presentes 20 meninos e 25 meninas, de quantos modos distintos a professora Heloísa poderá escolher o casal para representar a turma?

3 – O quadro de funcionários de uma empresa apresenta 5 administradores, 3 advogados, 2 contadores e 3 economistas. Deseja-se formar uma equipe com esses funcionários para analisar um projeto, e essa equipe deve ser composta por um economista, um contador, um advogado e um administrador. De quantas maneiras diferentes essa equipe poderá ser formada?

4 – Uma escola tem 5 professores de Língua Portuguesa, 6 de Matemática e 3 de História. Há quantas possibilidades diferentes de se formar uma comissão que contenha um professor de cada disciplina?

5 – Quantos são os resultados possíveis para os 3 primeiros classificados de uma final olímpica de natação que é disputada por 8 atletas?

6 – A Copa do Mundo de Futebol de 2014, que será realizada no Brasil, contará com 32 países participantes. Quantas são as possibilidades de campeão e vice-campeão?

7 – Uma pessoa tem 3 opções de meio de transporte para ir da cidade A à cidadeB (trem, ônibus ou avião); 2 opções para ir da cidade B à cidade C (barco ou carro); e 2 opções para ir da cidade C à cidade D (bicicleta ou a cavalo). De quantas formas diferentes essa pessoa pode sair da cidade A e chegar à cidade D, passando pelas cidades B e C, nessa ordem?

OUTRAS SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM COMBINATÓRIA

8 – Descubra quantas senhas é possível criar em cada item, considerando as regras descritas. a) Senhas de 4 caracteres utilizando apenas vogais. b) Senhas de 4 caracteres distintos utilizando apenas vogais.

9 – Com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7, quantas senhas podem ser formadas: a) com 5 algarismos? b) com 5 algarismos distintos? c) com 3 algarismos pares?

10 – A foto abaixo mostra um tipo de cofre eletrônico muito comum em hotéis. Quantas senhas de 4 algarismos podem ser formadas para esse cofre usando apenas algarismos ímpares distintos?

11 – Dóris dispõe de 5 cores diferentes de lápis: azul, verde, laranja, amarelo e vermelho. Ela quer pintar o desenho de uma bandeira de 5 listras horizontais. Responda no caderno: a) De quantas maneiras Dóris poderá pintar a bandeira se as listras adjacentes não puderem ter a mesma cor? b) De quantas maneiras Dóris poderá pintar a bandeira se quiser que todas as listras tenham cores diferentes?

12 – Um turista europeu pretende viajar para o Brasil em 2016 para assistir os Jogos Olímpicos e Paralímpicos do Rio de Janeiro. Ao organizar sua viagem, faz uma relação dos pontos turísticos que deseja conhecer: Praia de Ipanema, Pão de Açúcar, Cristo Redentor, estádio do Maracanã e Jardim Botânico. Sabendo que o último ponto turístico a ser visitado será o Estádio do Maracanã, de quantas formas ele pode organizar a sequência de pontos turísticos a serem visitados?

13 – Uma escola organizou um torneio de futebol entre quatro equipes: 9ºs anos A, B, C e D. Cada equipe enfrenta as outras uma única vez. Calcule o número de jogos realizados por equipe e o total de jogos desse torneio.

14 – Seu José é dono de um pequeno restaurante que oferece, entre as opções de seu cardápio, o prato popularmente conhecido como "prato feito" ou simplesmente "PF". O cliente pode escolher entre carne ou frango e tem direito a 3 acompanhamentos distintos, que podem ser escolhidos entre arroz, macarrão, salada e omelete. Quantos tipos diferentes de "PF" são oferecidos?

15 – Três ou mais notas musicais tocadas simultaneamente em um instrumento formam um acorde. Quantos acordes diferentes de três notas simultâneamente podem ser formados utilizando as notas dó, ré, mi, fá e sol?

16 – Ana, Bia, Carol e Dani são muito amigas. Elas resolveram formar uma sigla utilizando as iniciais de seus nomes para estampar em suas camisetas. Por exemplo, ABCD e BADC são duas siglas possíveis. Qual o total de siglas distintas que podem ser formadas utilizando-se as iniciais dos nomes dessas amigas?

17 – Andressa decidiu ir à praia no final de semana. Em sua mala, entre outras roupas, ela colocou 4 biquínis, 3 pares de chinelos e 2 chapéus de praia. De quantas modos diferentes Andressa poderá se vestir colocando biquíni, chapéu e chinelos?

Respostas apresentadas no final do livro didático:

1 - 6 maneiras
2 - 500 modos
3 - 90 maneiras
4 - 90 possibilidades
5 - 336 resultados
6 - 992 possibilidades
7 - 12 formas

8 - a) 625 formas, b) 120 senhas

9 - a)16807 senhas, b)2520 senhas, c) 27 senhas

10 - 120 senhas

11 - a) 1280 maneiras, b) 120 maneiras

12 - 120 formas

13 - Jogos realizados por equipe: 3 jogos; total de jogos do torneio: 6 jogos

14 - 8 tipos

15 - 10 acordes

16 - 24 siglas

17 - 24 modos

# REFERÊNCIAS


[1] BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 6ª ed.São Paulo: Moderna, 2006

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quartos ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] MINAS GERAIS. **Conteúdos Básicos Comuns para a área de Matemática no ensino médio (CBC)**.Belo Horizonte, MG, 2006.

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2012.

[5] GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. **A conquista da Matemática**. São Paulo; FTD, 2012.

[6] HAZZAN, Samuel, 1946 – **Fundamentos da Matemática Elementar, 5: combinatória, probabilidade : exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta**. 6ª ed. São Paulo : Atual, 1993.

[7] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio **Matemática e realidade: ensino fundamental**. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

[8] http://michaelis.uol.com.br, acesso em 8 de novembro de 2016.

[9] http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/08/SIMAVE-2015-MATRIZ-REF-MT-C03.pdf, acesso em 4 de novembro de 2016.

[10] http://brasilescola.uol.com.br/matematica/a-matematica-no-metodo-braille.htm

[11] http://familiajogajunto.com.br/regras/images/regras/1102010121231.pdf