



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ADMILSON RODRIGUES DE CARVALHO

**MÉTODO MONTE CARLO E SUAS APLICAÇÕES**

Boa Vista, RR

2017

ADMILSON RODRIGUES DE CARVALHO

**MÉTODO MONTE CARLO E SUAS APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. LINDEVAL F. DE LIMA

Boa Vista, RR

2017

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

C331m Carvalho, Admilson Rodrigues de.  
Método Monte Carlo e suas aplicações / Admilson Rodrigues de  
Carvalho. – Boa Vista, 2017.  
122 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Lindeval F. de Lima.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima,  
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional.

1 – Probabilidade. 2 – Variáveis aleatórias. 3 – Método Monte Carlo.  
I – Título. II – Lima, Lindeval F. de (orientador).

CDU – 519.245

*A Deus, que iluminou durante toda  
esta caminhada os meus passos  
e a minha esposa: NILVA SILVA LOPES DE CARVALHO  
e aos meus filhos: HIGOR LOPES DE CARVALHO  
e GIOVANNI LOPES DE CARVALHO pela paciência e pelo  
apoio durante toda minha vida.*

ADMILSON RODRIGUES DE CARVALHO

## MÉTODO MONTE CARLO E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 26 de abril de 2017 e avaliada pela seguinte banca examinadora.



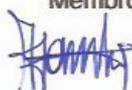
---

Prof. Dr. LINDEVAL F. DE LIMA  
Orientador - UFRR



---

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente  
Membro-UECE



---

Prof. Dr. Ijanilio Gabriel de Araújo  
Membro-UFRR

Boa Vista, RR  
2017

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente à vida e à saúde, que foram presenteadas por Deus, o qual sempre foi e será o autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia.

Aos meus pais, Maria Rodrigues de Carvalho e Ataíde Rodrigues de Carvalho, pelo amor, carinho e por sempre ter cuidado de mim, ajudando-me nos momentos que mais precisei.

Aos meus irmãos: Hamilton Rodrigues de Carvalho, Airton Rodrigues de Carvalho e Rosilene Rodrigues de Carvalho, mesmo marcados pela distância, sempre me incentivaram, deram apoio e pela admiração.

Ao professor Dr. Lindeval Fernandes de Lima por ter me orientado e auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação à profissão por ele escolhida.

Aos professores presenciais do PROFMAT: Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda, Me. Raimundo Nonato Araújo Pedro, Me. Silvestre da Cruz Monteiro, Me. Aldo Vieira Pinto, Dr. Lindeval Fernandes de Lima e Dr. Luciano Ferreira Silva, pela contribuição com seu bem mais precioso, o conhecimento.

Aos colegas de profissão do Instituto Federal de Roraima-IFRR, em especial ao colega Admilson Alves dos Santos pela sua ajuda nas horas que foram solicitadas, e amigos que fiz na turma PROFMAT 2013: Eduardo, Clarissa, Joerk, Ornélio, Franciel, Luiz Anderson e Osmilcy, pelos estudos em grupo; trocas de conhecimento; experiências e em especial, aprendizado.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM/PROFMAT e à Universidade Federal de Roraima - UFRR, por me darem a oportunidade de cursar este mestrado.

Ao diretor Geral do *Campus* Novo Paraíso: Eliezer Nunes da Silva, pela compreensão e liberação com redução da carga horária em sala de aula, para que as atividades do Mestrado não fossem prejudicadas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para que eu chegasse até aqui e alcançasse esse objetivo.

*"A Humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não-casuais."*

*Maurice George Kendall*

## RESUMO

Desde os tempos antigos, a Matemática vem se desenvolvendo como uma importante ferramenta utilizada pela humanidade. A partir dos primeiros problemas de contagem simples de objetos, até o desenvolvimento de teorias refinadas e de grande avanço tecnológico. A Matemática se tornou indispensável para o nosso desenvolvimento, principalmente para fazer previsões de fenômenos de natureza aleatória, probabilísticas ou intuitiva, das quais são presentes no universo. No Ensino Básico Técnico e Tecnológico, espera-se que os alunos tenham técnicas da Matemática de forma lógica para resolver problemas do dia-a-dia. Diante disso, o objetivo principal deste trabalho é mostrar uma abordagem da técnica do Método Monte Carlo, dar e apresentar várias aplicações, em especial, cálculos de área sem o conhecimento prévio de Integral em diversas áreas da Ciência. Primeiramente, foi feita abordagem da probabilidade e variável aleatória com as principais definições, teoremas e propriedades. E por último, fez-se uma abordagem teórica do Método Monte Carlo e várias aplicações, que poderá servir de referencial para que seja explorado de forma rica na Matemática pelos professores e alunos.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Variáveis aleatórias. Método Monte Carlo.

## **ABSTRACT**

The Mathematics has been an important tool used by the humankind since the ancient times. From the first problems involving simple counting of objects to the development of refined and advanced technology theories. The Mathematics has become indispensable to our own development, mainly to predict random-nature, probabilistic or intuitive phenomena, which are present in the universe. In Basic, Technical and Technological Education, teachers hope that students use Mathematics in a logical way to solve everyday problems. Thus, the main aim of this paper is to present through an approach of the Monte Carlo Method that this Method has many applications in several areas of Science, especially in the area calculation with no need of previous knowledge of integral calculation. Firstly, the theories of probability and random variables were reviewed together with their main definitions, theorems and properties. Then, I approached the Monte Carlo Method and its applications, which may be the reference to be exploited in Mathematics Education by teachers and learners.

**Key-words:** Probability. Random variables. Monte Carlo Method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Exemplo: Princípio Fundamental da Contagem.....	20
2	Diagrama da Árvore: Princípio Fundamental da Contagem.....	21
3	Permutação Simples: Diagrama da Árvore. ....	22
4	Pontos no plano: $A, B, C, D, E, F$ e $G$ .....	25
5	Conjunto do experimento $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$ .....	31
6	Evento $A_1 = \{(x, y) \in \Omega \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2\}$ do experimento $\Omega$ .....	31
7	Evento $A_3 = \{(x, y) \in \Omega x > y\}$ do experimento $\Omega$ .....	32
8	Diagrama de Venn: Complementar de um conjunto .....	35
9	Diagrama de Venn: Relação de Inclusão .....	35
10	Diagrama de Venn: União de conjuntos.....	36
11	Diagrama de Venn: Probabilidade Condicional.....	37
12	Variável aleatória.....	41
13	Função de probabilidade para variável aleatória discreta.....	48
14	Função distribuição de probabilidade uniforme para variável aleatória contínua .....	48
15	Função distribuição acumulada uniforme para variável aleatória con- tínua. ....	49
16	Função Densidade de Probabilidade de números aleatórios.....	57
17	Lançamento de agulhas num plano. ....	65
18	Agulha de Buffon de comprimento $L$ num plano. ....	66
19	Lançamento de 300 agulhas no plano.....	68
20	Lançamento de 1000 agulhas no plano. ....	69
21	Lançamento de 12000 agulhas no plano. ....	69
22	Lançamento de 100000 agulhas no plano. ....	70
23	Método do círculo. ....	71
24	200 dardos lançados no alvo.....	72
25	1000 dardos lançado no alvo. ....	73
26	8000 dardos lançados no alvo.....	73
27	12000 dardos lançados no alvo. ....	73
28	100000 dardos lançados no alvo. ....	74
29	Comportamento dos pontos em torno do valor de $\pi$ com 200 lança- mentos. ....	74
30	Comportamento dos pontos em torno do valor de $\pi$ com 100000 lançamentos. ....	74
31	Área definida por uma curva. ....	76
32	Divisão do intervalo $[a, b]$ em $N$ faixas. ....	77

33	divisão em retângulos de alturas $f(x_i)$ de extremidades esquerda. ....	78
34	divisão em retângulos de alturas $f(x_i)$ de extremidades direita. ....	78
35	divisão do intervalo em $N$ subintervalos. ....	80
36	Área de um triângulo do $i$ -ésimo subintervalo. ....	81
37	Área sob a curva $f(x) = x^2$ . ....	82
38	Divisão em 4 faixas: retângulos menores. ....	83
39	Divisão em 4 faixas: retângulos maiores. ....	83
40	Modelo usado no Excel para as simulações. ....	84
41	Método da geração de pontos dentro do retângulo. ....	85
42	Modelo usado no Excel para geração de pontos aleatórios. ....	86
43	Imagem de satélite: mapa do Estado de Roraima. ....	89
44	Mapa do Estado de Roraima. ....	90
45	Mapa quadriculado em quadrado de $12cm \times 12cm$ : quadrículos de $2cm \times 2cm$ . ....	92
46	Mapa quadriculado em quadrado de $12cm \times 12cm$ : quadrículos de $1cm \times 1cm$ . ....	92
47	Mapa quadriculado em quadrado de $12cm \times 12cm$ : quadrículos de $0,5cm \times 0,5cm$ . ....	93
48	Modelo para geração de pontos no Excel da malha dividida em quadrados de $2cm \times 2cm$ . ....	94
49	Representação de demanda e oferta. ....	97
50	Quadro demonstrativo com o uso do <i>Excel</i> . ....	99
51	Análise do prejuízo no lançamento do produto $X$ no mercado com um cenário de 20 interações. ....	100
52	Comportamento dos pontos $(t_i, f(t_i))$ . ....	104
53	Curva da análise de regressão: geração da função $V(t)$ . ....	105
54	Quadro demonstrativo: Opções de Linha de Tendência. ....	105
55	Geração da função: curva da análise de regressão. ....	106
56	Gráfico da função $V(m/s) \times t(s)$ . ....	106
57	Quadro demonstrativo para o uso do cálculo da área da curva. ....	107
58	Método da geração de pontos na curva. ....	108
59	Quadro demonstrativo para a geração de pontos aleatórios. ....	109
60	Sistema cardiovascular humano. ....	112
61	Curva de modelagem da concentração de contraste. ....	114

## LISTA DE TABELAS

1	Lançamento de um dado e uma moeda. ....	30
2	Esperança matemática de uma variável aleatória .....	45
3	Método: agulha de Buffon. ....	70
4	Método: Círculo .....	75
5	Estimativa da área pelo Método Monte Carlo .....	85
6	Número de pontos dentro da região ( $R$ ), para 100, 2000, 10000 e 65000 interações.....	87
7	Conversão de $1m$ em múltiplos e submúltiplos.....	89
8	Conversão de $1(m)^2$ em múltiplos e submúltiplos. ....	89
9	Conversão de $1(m)^3$ em múltiplos e submúltiplos. ....	89
10	Número de pontos dentro do mapa do Estado de Roraima. ....	95
11	Custo da mão de obra de 4 empresas. ....	98
12	Dados da geração do cenário com 20 interações. ....	100
13	Dados da geração do cenário com 50 interações. ....	100
14	Dados da geração do cenário com 10000 interações.....	101
15	Quadro resumo dos dados da geração de 20, 50 e 10000 interações com valores médios em cada cenário. ....	101
16	Dados do lançamento do ônibus espacial. ....	103
17	Estimativa da altura do foguete após 62s do lançamento.....	107
18	Número de pontos dentro da região ( $R$ ), para 2000, 10000 e 62000 interações. ....	110
19	Estimativa da concentração de contraste injetada. ....	114

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>14</b>
0.1	OBJETIVOS.....	17
<b>0.1.1</b>	<b>Objetivo Geral</b> .....	<b>17</b>
<b>0.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b> .....	<b>17</b>
0.2	JUSTIFICATIVA.....	17
<b>1</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b> .....	<b>18</b>
1.1	ABORDAGEM HISTÓRICA DO SURGIMENTO DA PROBABILIDADE	18
1.2	ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	19
<b>1.2.1</b>	<b>Princípio fundamental da contagem</b> .....	<b>19</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Permutação simples e fatorial de um número</b> .....	<b>21</b>
1.2.2.1	Permutação simples .....	21
1.2.2.2	Fatorial de um Número.....	23
1.3	ARRANJOS SIMPLES E COMBINAÇÕES .....	23
<b>1.3.1</b>	<b>Arranjos Simples</b> .....	<b>23</b>
<b>1.3.2</b>	<b>Combinações simples</b> .....	<b>24</b>
<b>1.3.3</b>	<b>Caracterização de arranjos e combinações</b> .....	<b>24</b>
<b>1.3.4</b>	<b>Binômio de Newton</b> .....	<b>26</b>
1.4	NOÇÕES INTUITIVAS DE PROBABILIDADE .....	28
<b>1.4.1</b>	<b>Experimentos aleatórios</b> .....	<b>28</b>
<b>1.4.2</b>	<b>Espaço amostral (<math>\Omega</math>)</b> .....	<b>29</b>
<b>1.4.3</b>	<b>Eventos <math>A_i</math></b> .....	<b>30</b>
<b>1.4.4</b>	<b>Conceito de probabilidade</b> .....	<b>32</b>
<b>1.4.5</b>	<b>Principais teoremas</b> .....	<b>34</b>
<b>1.4.6</b>	<b>Probabilidade Condicional</b> .....	<b>37</b>
1.4.6.1	Eventos independentes .....	38
<b>1.4.7</b>	<b>Teorema ou Regra de Bayes</b> .....	<b>39</b>
<b>2</b>	<b>VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE</b>	<b>40</b>
2.1	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....	40
2.2	DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES.....	41
<b>2.2.1</b>	<b>Distribuição Discreta de probabilidades</b> .....	<b>42</b>
2.2.1.1	Distribuição de probabilidade acumulada .....	42
2.3	DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES PARA VARIÁVEL CONTÍNUA	43
2.4	MEDIDAS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES PARA VARIÁ- VEL ALEATÓRIA .....	44
<b>2.4.1</b>	<b>Média ou esperança matemática</b> .....	<b>45</b>
2.4.1.1	Propriedades da Média ou esperança matemática .....	45

2.4.2	<b>Variância e desvio padrão</b> .....	47
2.5	MODELOS PROBABILÍSTICOS DE DISTRIBUIÇÕES PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	47
2.5.1	<b>Distribuição uniforme</b> .....	47
2.5.2	<b>Distribuição de BERNOULLI</b> .....	49
2.5.3	<b>Distribuição binomial</b> .....	50
2.5.4	<b>Distribuição de POISSON</b> .....	50
3	<b>MÉTODO MONTE CARLO E SUAS APLICAÇÕES</b> .....	53
3.1	MÉTODO MONTE CARLO .....	53
3.1.1	<b>Caracterização do Método Monte Carlo</b> .....	54
3.2	GERAÇÃO DE NÚMEROS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS PARA AS APLICAÇÕES EM SIMULAÇÕES.....	55
3.2.0.1	Propriedades dos números aleatórios .....	56
3.2.1	<b>Geradores de números aleatórios</b> .....	58
3.2.1.1	Método do gerador meio-de-quadrado .....	59
3.2.1.2	Método gerador: congruência linear.....	60
3.2.2	<b>Geradores para geração de variáveis aleatórias</b> .....	60
3.2.2.1	Distribuição discreta: distribuição de Poisson .....	61
3.2.2.2	Geração de distribuição contínua : Distribuição uniforme.....	62
3.2.3	<b>Software para geração de números aleatórios</b> .....	62
3.3	APLICAÇÕES DO MÉTODO MONTE CARLO-MMC .....	64
3.3.1	<b>Matemática</b> .....	64
3.3.1.1	Aproximação do valor de $\pi$ .....	64
3.3.1.2	A ideia para a aproximação do cálculo de áreas de figuras.....	75
3.3.2	<b>Ciências Econômicas</b> .....	96
3.3.3	<b>Física</b> .....	101
3.3.4	<b>Ciências médicas</b> .....	111
3.3.4.1	Capacidade cardíaca .....	111
4	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	115
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	117
	<b>ANEXOS</b> .....	119
	<b>ANEXO A – CÓDIGOS DOS PROGRAMAS PARA SIMULAÇÃO</b> .....	120

## INTRODUÇÃO

Desde os tempos antigos, a Matemática vem se desenvolvendo como uma importante ferramenta utilizada pela humanidade. A partir dos primeiros problemas de contagem simples de objetos até o desenvolvimento de teorias refinadas e de grande avanço tecnológico, a Matemática se tornou indispensável para o nosso desenvolvimento.

A palavra **Probabilidade** vem do Latim *probare*: testar ou confirmar, é o estudo da Matemática responsável pela relação de previsões para eventos "incertos" ou "desconhecidos", dependendo do contexto a ser trabalhado.

Como a Probabilidade teve seu início como uma ciência empírica, fica difícil buscar suas origens. Tempos depois que foi associada à Matemática, todavia não se tem como determinar o período dessa transição. Mesmo assim, quando se falam dos "criadores" da probabilidade, todos os autores de livros concordam que foram Pascal e Fermat. Podemos ver em (LEONARDO, 2013), que para responder questões ligadas aos jogos de azar no século XVII era utilizada a teoria de probabilidades para dar previsões de ocorrência dos eventos.

Um estudo sistêmico das propriedades das probabilidades, em qualquer conjunto (experimento) aleatório, teremos sempre uma incerteza se um determinado evento ocorrerá ou não, e nem sempre será fácil de ser definido, como, por exemplo: "Ao jogar um dado *honesto* (equilibrado) e observar a face superior". Neste caso, no estudo de probabilidade é bem simples verificar que o conjunto do espaço amostral ( $\Omega$ ) é formado por:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , pois são as únicas possibilidades de ocorrer. "Número ímpar", por exemplo, não é um resultado elementar, pois consiste de três resultados "1, 3, 5" (JAMES, 2015).

Pode-se ver em (LEONARDO, 2013), que as investigações das chances de ocorrência de um determinado evento são chamadas de **Teoria das Probabilidades** e por sua vez teve como origem no século XVII, para tentar responder questões ligadas aos jogos de azar. Atualmente, as aplicações da teoria das probabilidades são encontradas em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa, por exemplo: nos jogos de partida de futebol, para garantir que as equipes tenham a mesma chance de escolha de um dos lados, pois nesse caso poderemos garantir que cada equipe tenha  $\frac{1}{2}$  de escolha, e em seguida, o juiz pede aos capitães de cada equipe que escolha um dos lados (cara ou coroa) e, em seguida, lança para cima a moeda. Neste caso, o vencedor pode escolher de qual lado começar o jogo. Para (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 161),

Pela teoria das Probabilidades, um acontecimento isolado constitui um acaso, mas a análise de grande número de ocorrências desse acontecimento permite prever as chances de ele ocorrer de novo.

De acordo com (BRASIL, 2006, p. 69), além de outras competências, ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, e saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Dessa forma, o objetivo inicial da probabilidade era o tradicional problema da resolução de cálculos tradicionais pelas técnicas de amostragem, e, posteriormente, com experimentos que caracterizem conjuntos com infinitos pontos. Com o surgimento de números aleatórios, houve a necessidade de analisarmos esses problemas por meio de um método que garanta um resultado aproximado do real, que neste caso, o método Monte Carlo mostrará, e dará, uma solução bem aproximada.

De acordo com (COSTA et al., 2002), o matemático Stanislaw Ulan em 1946 tentou calcular, pelo tradicional método da análise combinatória, as probabilidades de sucesso de uma determinada jogada de um jogo de paciência. Depois de muitos cálculos, Ulan percebeu que a alternativa mais correta seria realizar "n jogadas", por exemplo, 200 ou cinco mil, e verificar a quantidade de cada resultado ocorrido. Nessa mesma época, o método de técnicas de amostragem não era usado, pelo fato de os cálculos serem demorados, e sujeitos a erros. Com isso, hoje os matemáticos são classificados em dois grupos: aplicados ou puros, sendo que essas classificações não são as únicas. Assim, o ramo da matemática experimental ou aplicada que possui ligação aos experimentos envolvendo números aleatórios, é conhecido como método Monte Carlo. E as suas aplicações estendem às diversas áreas do conhecimento, por exemplo, Matemática, Física, Ciências Sociais, Ciências Médicas e outras.

Segundo (ALLEN C.R., 1995), foi durante a Segunda Guerra Mundial, por meio do projeto Manhattan que Stanislaw Ulan cunhou a aplicação do método (Monte Carlo), para a difusão aleatória de Nêutrons num determinado material radioativo. Isso devido à similaridade das grandes simulações estatísticas através dos jogos de azar, sendo os quais eram praticados em Monte Carlo (capital do Principado de Mônaco), onde havia grande concentração de cassinos, apostas e jogos de azar.

Rotineiramente, hoje em dia, o método Monte Carlo é utilizado em diversos campos, com simulações de fenômenos físicos complexos, através do estudo dos modelos nucleares, até uma simples simulação realizada em um jogo de bingo.

Conforme o experimento, a Matemática pura ou teórica tem pontos fortes que são a sua abstração e generalidade; a modelagem do problema pode ser feita rigorosamente; a compreensão do funcionamento completo é feita a partir de uma análise teórica. Contudo, a mesma matemática que carrega pontos fortes também carrega fraqueza, pois problemas de grande complexidade em termos teóricos determinísticos à modelagem do problema será mais difícil. Nesse sentido, o método Monte Carlo tem uma ideia principal na abordagem dos problemas que é:

aproveitar ao máximo a força da análise teórica, e ao mesmo tempo evitar suas fraquezas, substituindo a teoria por experimento, onde quer que a primeira falhe (COSTA et al., 2002, p. 1).

Dessa forma, o estudo da probabilidade terá sua concentração em aplicações com a utilização do Método Monte Carlo de forma elementar como, por exemplo, conseguir aproximações do valor de  $\pi$ .

Diante do exposto, a escolha deste tema foi devido a sua grande importância dentro da Probabilidade na vida da sociedade, desde os primórdios e, principalmente, para os dias atuais.

Além disso, devido, muitas vezes, à falta de conexão da teoria com a aplicação do dia a dia, podemos notar falta de motivação por parte de alguns estudantes ao estudar Probabilidade, já que sabemos que, na atualidade, o Método Monte Carlo poderá ser utilizado em várias situações práticas e teóricas envolvendo não somente problemas internos da matemática, mas também de outras disciplinas científicas e tecnológicas que envolvem fenômenos aleatórios, dentro de um conjunto de finitas e infinitas possibilidades de ocorrências, entre outros.

Primeiramente, no capítulo um, foi feita uma abordagem dos conhecimentos básicos da Probabilidade, com uma revisão de algumas definições importantes para o desenvolvimento deste estudo e apresentação de alguns exemplos.

No segundo capítulo, faremos uma abordagem da Probabilidade, por meio do princípio básico da contagem, e especificamente, em Variáveis Aleatórias discretas ou contínuas. Neste caso, conforme (BRASIL, 2006), o estudo do princípio da Contagem no Ensino Médio, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações, para poder contar os casos possíveis, não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação, deve dar ênfase principalmente a esses três tipos de funções.

No capítulo três, será apresentado o Método Monte Carlo como uma maneira de solucionar problemas para casos em que envolvam conjuntos infinitos em sua amostra, abordando as ideias de variáveis aleatórias e funções de distribuição. Nesse mesmo capítulo, apresentaremos as possíveis aplicações desse estudo, como, por exemplo, na Engenharia. Além disso, estudaremos a Probabilidade para encontrar o valor de  $\pi$  através da equação do comprimento da circunferência, e também os princípios da AGULHA DE BUFFON, focando algumas definições e aplicações.

## 0.1 OBJETIVOS

### 0.1.1 Objetivo Geral

Apresentar o Método Monte Carlo através do estudo da probabilidade, com suas definições, teoremas e propriedades, porém com um foco de aplicabilidade dos conceitos adquiridos nas diversas áreas do conhecimento.

### 0.1.2 Objetivos Específicos

- a) Fazer um estudo da probabilidade por meio das definições, teoremas e propriedades, enfatizando suas aplicações;
- b) Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados;
- c) Interligar a teoria da probabilidade apresentada ao contexto da aplicação do método Monte Carlo;
- d) Fazer um breve levantamento histórico sobre o Método Monte Carlo;
- e) Fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico;
- f) Construir um acervo de aplicações do Método Monte Carlo nas diversas áreas do conhecimento.

## 0.2 JUSTIFICATIVA

Este trabalho foi desenvolvido buscando atender as necessidades de professores e alunos do Ensino Médio ou do ensino Básico, Técnico e Tecnológico em conhecer o Método Monte Carlo como uma ferramenta para resolver problemas práticos do dia a dia da Matemática e de outras Ciências.

## 1 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos e fundamentais de Probabilidade necessários para o entendimento do MÉTODO MONTE CARLO E SUAS APLICAÇÕES. Além de uma breve abordagem histórica sobre o surgimento da Probabilidade, faz-se um breve estudo sobre conceitos Básicos da Análise Combinatória e da Probabilidade, como: princípio fundamental da contagem, arranjos, combinações, definições, principais teoremas da probabilidade, variáveis aleatórias e o Método Monte Carlo e suas aplicações.

### 1.1 ABORDAGEM HISTÓRICA DO SURGIMENTO DA PROBABILIDADE

O jogo foi o motor de arranque e o primeiro beneficiado com as probabilidades. De fato, por volta de 1200 a.C. existiam dados com forma cúbica feitos a partir de ossos. No entanto, o jogo atingiu uma grande popularidade com os gregos e os romanos. Na Idade Média, a igreja católica era contra o jogo dos dados, não pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões que o acompanhavam. Os jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas mágicas para garantir ganhos substanciais nas bancas de jogo. O ponto decisivo para o início da teoria das probabilidades foi dado pela correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal e seu amigo Pierre de Fermat, em que ambos, por diferentes caminhos, chegaram à solução correta do célebre problema da divisão das apostas, em 1654.

A Probabilidade é um dos ramos da Matemática presente nos jogos desde os primórdios da humanidade, e, aos poucos, foram aprimorando suas técnicas com as previsões para possíveis ganhos em apostas. Sabe-se que probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Na sociedade atual e no cotidiano, usa-se o cálculo de probabilidades de uma forma intuitiva; ao levantarmos olhamos como o tempo está, pela TV ou internet analisa-se a previsão do tempo, em determinado período, e a partir daí, podemos decidir o modo de sair ou não, e estamos condicionados muitas vezes a previsões: no nosso trabalho, a probabilidade do time preferido ganhar um jogo ou até mesmo o campeonato; a probabilidade de passarmos numa prova objetiva ou ENEM “chutando” todas as questões; a probabilidade de ganhar na Loteria fazendo uma única aposta; a probabilidade de jogarmos um dardo e este acertar o alvo, e a probabilidade de contaminação por radiação quando ficamos expostos.

Segundo (MORGADO; CARVALHO; FERNADEZ, 2006), a Teoria da Probabilidade é o ramo da Matemática que cria, desenvolve, e em geral, pesquisa *modelos* que

podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Portanto, vê-se que a utilização e o desenvolvimento da Probabilidade no decorrer da história, até os dias atuais, na sua grande maioria, foram impulsionados pela sua aplicação no dia a dia da sociedade.

Pode-se ver em (BRASIL, 2006), que a Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de metodologias de estudo para quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente.

Cabe à probabilidade, por exemplo, dar a previsão do candidato A ou B ter êxito em uma eleição, ou o possível êxito do lançamento de um produto no mercado, respectivamente antes da eleição em si, e da fabricação do produto. Para que essas previsões ocorram, temos que ter uma população ou amostra, levantamento de dados e análise das informações obtidas.

Assim, entende-se que uma das alternativas para despertar o interesse do aluno, ao estudar a probabilidade, é abordar conteúdo que tenha o foco, em especial, as aplicações que lhes serão úteis.

## 1.2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

### 1.2.1 Princípio fundamental da contagem

**Definição 1.2.1.** *Dado, um evento, composto por  $k_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , com  $N$  etapas sucessivas e independentes, e de tal maneira que o número de possibilidades de cada etapa ocorra de  $k_i$  maneiras, então o número total de possibilidades do evento ocorrer é dado por  $\prod_{i=1}^n k_i = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ .*

**Exemplo 1.2.1.** *Uma moça foi convidada a ir a uma festa, e ela tem como opção (ver 1), 3 blusas, 4 calças jeans e dois pares de sapatos para montar seu look. Nessas condições, de quantas maneiras ela pode combinar esse look (blusas, calças e um par de sapatos) para ir a essa festa?*

**Observação 1.2.1.** *O produto  $\prod_{i=1}^n k_i = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  dos números das possibilidades em qualquer etapa independente será válida.*

Figura 1: Exemplo: Princípio Fundamental da Contagem.

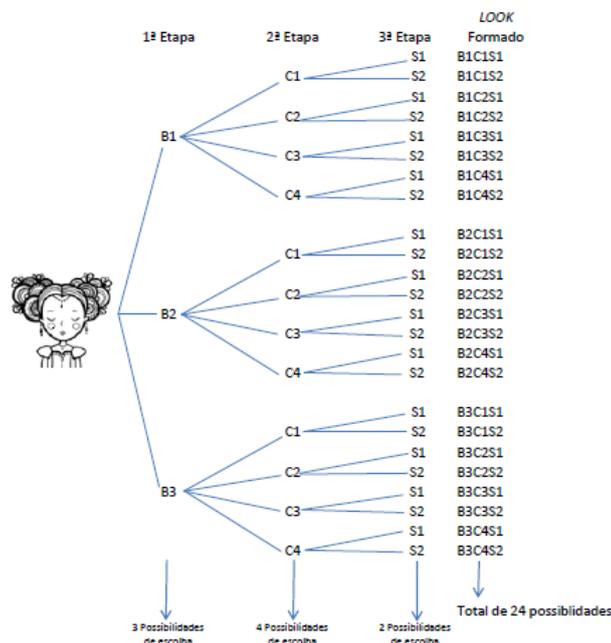


Fonte: Autor, 2016.

Neste caso, verifica-se que o evento é dividido em três etapas: escolher uma blusa, um calça e um par de sapatos. Como o princípio fundamental da contagem tem-se a ideia de apenas quantificar o número de possibilidades, podemos notar que pela definição (1.2.1), tem-se que o total de possibilidades do evento é dado pelo produto das escolhas de cada etapa. Assim o total é de  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$  possibilidades de uma combinação do *look*. Esse problema traz um resultado "trivial", mas nem sempre essa visualização poderá ser vista de maneira simples. Para isso, antes de dar esse resultado, poderemos utilizar um método conhecido como "Diagrama da Árvore" para que a visualização se torne mais clara.

O método é construir as etapas em forma de ramificações, mostrando as possíveis maneiras de um elemento de uma etapa ramificar com outro da próxima etapa e assim por diante. No exemplo (1) pode-se verificar que, para resolver o problema, o evento será dividido em três etapas, as quais representaremos por B1, B2 e B3 as três blusas; por C1, C2, C3 e C4 as quatro calças; e por S1 e S2 os dois pares de sapatos, conforme diagrama da Figura (2). Com isso, temos:

Figura 2: Diagrama da Árvore: Princípio Fundamental da Contagem.



Fonte: Autor, 2016.

Portanto, o número total de possibilidades é  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ .

## 1.2.2 Permutação simples e fatorial de um número

### 1.2.2.1 Permutação simples

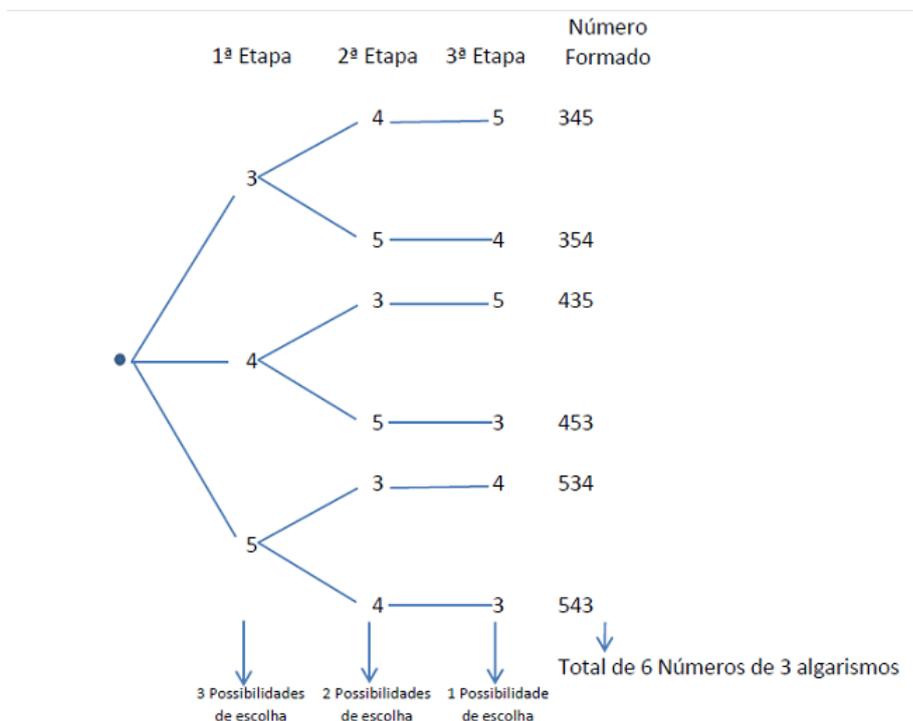
A palavra permutar tem como sinônimo "trocar". De maneira intuitiva, quando surge em problemas de contagem, no caso da permutação, deveremos ter a noção de embaralhar ou misturar. Considere um conjunto com  $n$  elementos, e todos serão usados nos agrupamentos. Por exemplo: quantos números de 3 algarismos distintos (sem repetição) podemos formar com os algarismos 3, 4 e 5?

Neste caso, por se tratar de um conjunto com apenas 3 elementos, podemos resolver pelo método da tentativa. Ao final, encontraremos 6 números de 3 algarismos distintos que são: 345, 354, 435, 453, 534 e 543.

Também pode-se resolver e encontrar todas as possibilidades construindo uma "árvore de possibilidades ou diagrama da árvore", assim se pode verificar que para resolver o problema, o evento será dividido em três etapas, em que a escolha do algarismo para compor as casas decimais não altera o número de possibilidades.

Assim para compor a casa das centenas, temos 3 possibilidades de escolha; para a casa das dezenas temos 2 possibilidades; e para as da unidade sobra apenas 1 possibilidade. Com isso, temos:

Figura 3: Permutação Simples: Diagrama da Árvore.



Fonte: Autor, 2016.

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  possibilidades de formar números de 3 algarismos distintos. Podemos notar que todos os números possuem os mesmos algarismos. Neste caso os números diferem entre si pela ordem dos algarismos.

Considerando o exemplo acima, de um modo geral, se temos  $n$  elementos distintos, a escolha do primeiro elemento é feita de  $n$  maneiras. Sendo que a partir do segundo elemento teremos sempre uma possibilidade a menos de escolha. Assim fica claro que o número de agrupamentos ordenados total que poderemos formar com todos do conjunto com  $n$  elementos é dada por:  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Esses agrupamentos que são ordenados e diferem pela ordem são chamados de permutação simples e podem ser denotados por  $P_n$  que é o número total de permutações do conjunto com  $n$  elementos:  $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

### 1.2.2.2 Fatorial de um Número

**Definição 1.2.2.** *Fatorial de um número natural  $n$  é um agrupamento ordenado de elementos de um determinado conjunto obtido através da permutação  $P_n$  do número natural  $n$  e podemos indicar por  $n!$  (onde lê-se  $n$  fatorial ou fatorial de  $n$ ).*

Considerando que o fatorial de um número natural  $n$  é dado pela permutação  $P_n$ , então temos que:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } n \geq 1. \quad (1.1)$$

## 1.3 ARRANJOS SIMPLES E COMBINAÇÕES

### 1.3.1 Arranjos Simples

**Definição 1.3.1.** *São os agrupamentos ordenados de maneiras distintas que são formadas com  $p$  dos  $n$  elementos de um conjunto não vazio com  $n$  elementos tomados de  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ .*

Neste caso podemos indicar por  $A_{n,p}$  ou  $A_n^p$  e para calcular o total de agrupamentos, consideremos as seguinte situações:

- Para  $n = p$  temos que o cálculo do arranjo é o mesmo da permutação dos elementos, ou seja,  $A_{n,p} = P_n = n!$ ;
- Para  $p < n$ , temos que os  $n$  elementos serão agrupados de  $p$  a  $p$ .

Sendo assim, o total das possibilidades do agrupamento através de uma análise pelo princípio fundamental da contagem, temos para a primeira posição  $n$  possibilidades de escolhas; para a segunda posição, **(n-1)** possibilidades de escolhas, sendo que os elementos são distintos; para a terceira posição, **(n-2)** possibilidades de escolhas; e já para a **p-ésima** posição, **[n-(p-1)]** possibilidades de escolhas. Nesse sentido, pelo princípio fundamental da contagem, temos que o número total de possibilidades é o produto de todas as possibilidades, assim:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots [n - (p - 1)]}_{p\text{-fatores}}. \quad (1.2)$$

Como  $[n - (p - 1)] = (n - p + 1)$ , assim podemos representar  $A_{n,p}$  ou  $A_n^p$  por meio de fatoriais, neste caso:

multiplicando  $A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots [n - (p - 1)]}_{p\text{-fatores}}$  por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ , temos:

$$\begin{aligned}
 A_{n,p} &= \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots [n-(p-1)]}_{p\text{-fatores}} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots [n-(p-1)] \cdot (n-p)!}{(n-p)!}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

como temos que  $n(n-1)(n-2)(n-3)\dots[n-(p-1)](n-p)!$  que é o desenvolvimento de  $n!$ , logo a equação fica:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.4}$$

**Observação 1.3.1.** Quando multiplicamos a equação do arranjo por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$  tem a mesma ideia de multiplicar por qualquer número real diferente de zero (0), o valor não se altera, pois  $n > p$ .

### 1.3.2 Combinações simples

**Definição 1.3.2.** São todos os subconjuntos com  $p$  elementos agrupados que podem formar com os elementos dados de um conjunto com  $n$  elementos tomados de  $p$  a  $p$  ( $p \leq n$ ) denotados por  $C_n^p$  ou  $C_{n,p}$  ou  $\binom{n}{p}$

Neste caso, temos que os  $n$  elementos agrupados tomados  $p$  a  $p$ , significa que a cada combinação tem a correspondência de  $p!$  arranjos, e que se obtém permutando-se cada elemento da combinação. Assim, temos que o número total de agrupamentos são definidos por:

$$\begin{aligned}
 C_{n,p} &= \frac{A_{n,p}}{p!} \\
 &= \frac{n!}{(n-p)! p!} \\
 &= \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

**Observação 1.3.2.** Dentro das combinações, temos como conceito nos problemas de contagem uma associação intuitiva de apenas fazer escolha de subconjuntos

Em combinação simples, temos a validade da propriedade :

$$\boxed{C_{n,p} = C_{n,n-p}}$$

### 1.3.3 Caracterização de arranjos e combinações

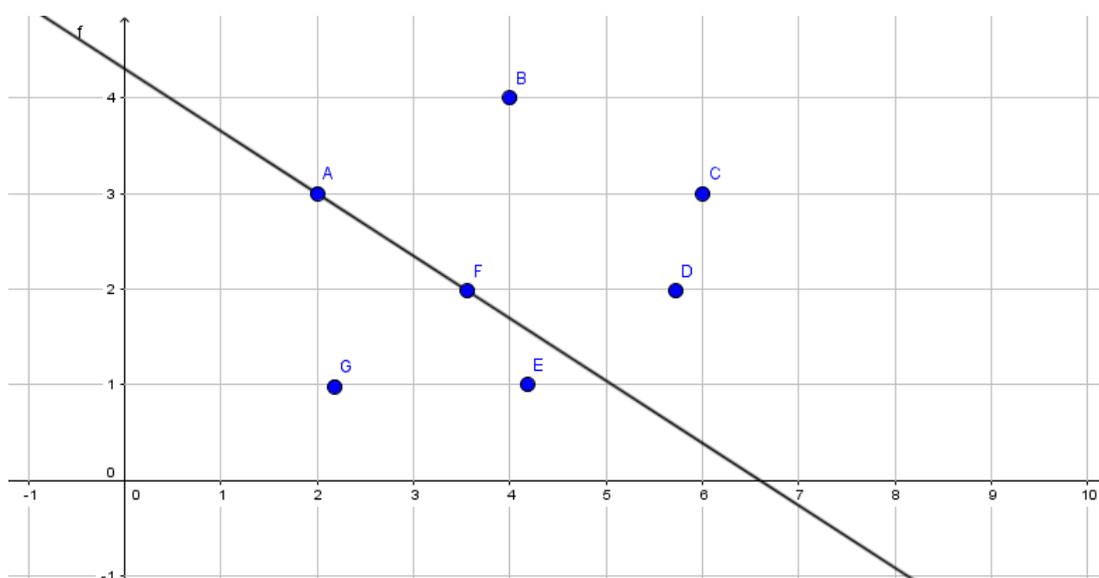
Os problemas de análise combinatória podem ser resolvidos por arranjo ou combinação, porém iremos encontrar vários agrupamentos, de acordo com o uso de

arranjo ou combinação. Neste caso, para identificar se o agrupamento do problema envolvido tem referência a um *arranjo* ou a uma combinação, basta montar pelo menos um deles e modificar a ordem dos elementos desse agrupamento.

Se, após a mudança, tiver formado um agrupamento diferente, ou seja, diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos ou pelo menos um elemento, esse problema será de arranjo. E, se após a troca de ordem dos elementos, formar o mesmo agrupamento, esse problema será de combinação. Para melhor compreensão dos critérios, veja o exemplo:

**Exemplo 1.3.1.** *Considere 7 pontos num plano cartesiano, onde não existem 3 pontos alinhados (colineares)<sup>1</sup>, quantas retas ficam determinadas por estes pontos?*

Figura 4: Pontos no plano: A, B, C, D, E, F e G



Fonte: O autor, 2016.

Neste caso, monta-se pelo menos um dos agrupamentos (reta) e se descobre se o problema (Figura 4) é arranjo ou combinação. Sabe-se também que 2 pontos distintos determinam uma e única reta. Como os pontos não são colineares, podemos unir quaisquer 2 pontos, assim podemos dizer que a reta que tem o segmento  $\overline{AF}$  é a mesma reta, se trocarmos a ordem dos elementos do segmento para  $\overline{FA}$ . Neste caso, a reta (agrupamento) continua sendo a mesma, portanto, temos um caso de combinação.

Assim, temos um agrupamento de 7 elementos sendo agrupados de 2 em 2, pela definição de Combinação simples, como  $n = 7$  e  $p = 2$ , temos que o número

<sup>1</sup> Colineares: três ou mais pontos pertencentes a uma mesma reta

de retas determinadas por 7 pontos sendo agrupadas de 2 em 2, é definida por :  
 $C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$ . Portanto, podemos determinar 21 retas.

### 1.3.4 Binômio de Newton

Nos estudos dos produtos notáveis, sabemos que a soma de dois termos ao quadrado, ou seja,  $(x + y)^2$  é igual ao primeiro elevado ao quadrado mais duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo, assim:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad (1.6)$$

Nesse mesmo sentido, para calcular  $(x + y)^3$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)^2 \cdot (x + y) \\ &= (x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2) \cdot (x + y) \\ &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

De maneira análoga, calcular as quartas, quintas e sextas potências e, de modo geral, podemos obter esse resultado no desenvolvimento da potência  $(x + y)^n$  a partir da anterior, ou seja, de  $(x + y)^{n-1}$ . Analisando o desenvolvimento, podemos notar que quando o valor de  $n$  aumenta de maneira grandiosa, o cálculo da potência fica muito trabalhoso. Neste caso, existe um método para desenvolver a  $n$ ésima potência de um binômio, conhecido como binômio de Newton<sup>2</sup> e para entender esse método é necessário saber o que são coeficientes binomiais, algumas de suas propriedades e o triângulo de Pascal.

**Definição 1.3.3 (Número Binomial).** *Dados dois números naturais  $n$  e  $p$ , com  $n \geq p$ , denominamos número ou coeficiente binomial  $n$  sobre  $p$ , o número  $\frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$ , que podem ser denotados por  $C_n^p$  ou  $C_{n,p}$  ou  $\binom{n}{p}$ , onde (lê-se:  $n$  sobre  $p$ ). Assim, podemos escrever:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \quad (1.8)$$

**Observação 1.3.3.** *O número binomial  $\binom{n}{p}$  por analogia com as frações, podemos dizer que o seu numerador é  $n$  e, o denominador é  $p$ .*

**Observação 1.3.4.** *Para todo  $n$  natural, é sempre verdadeiro que:  $\binom{n}{n} = 1$ ;  $\binom{n}{1} = n$  e  $\binom{n}{0} = 1$ .*

**Definição 1.3.4. (Triângulo de Pascal)** *É a disposição dos números binomiais de forma ordenada entre linhas e colunas, de forma que os números binomiais de mesmo*

<sup>2</sup> Isaac Newton, matemático e físico inglês, (1642 - 1727)

numerador  $n$  fiquem dispostos numa mesma linha, e os de mesmo denominador  $p$  fiquem dispostos numa mesma coluna, conforme disposição abaixo:

$$\begin{array}{l}
 \text{linha 0} \quad \binom{0}{0} \\
 \text{linha 1} \quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \text{linha 2} \quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \text{linha 3} \quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \text{linha 4} \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
 \text{linha 5} \quad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
 \text{linha 6} \quad \binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
 \dots\dots\dots \\
 \text{linha } n \quad \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \binom{n}{5} \quad \binom{n}{6} \quad \dots \binom{n}{n} \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Dos números binomiais do triângulo 1.3.4 e calculando seus valores, podemos ter uma outra representação desse triângulo com os termos do binômio de Newton.

$$\begin{array}{l}
 \text{linha 0} \quad 1 \Rightarrow (x + y)^0 = 1 \\
 \text{linha 1} \quad 1 \quad 1 \Rightarrow (x + y)^1 = x + y \\
 \text{linha 2} \quad 1 \quad 2 \quad 1 \Rightarrow (x + y)^2 = 1x^2 + 2x.y + 1.y^2 \\
 \text{linha 3} \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \Rightarrow (x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2.y + 3x.y^2 + 1.y^3 \\
 \text{linha 4} \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \Rightarrow (x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3.y + 6x^2.y^2 + 4x.y^3 + 1y^4 \\
 \text{linha 5} \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \Rightarrow (x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4.y + 10x^3.y^2 + 10x^2.y^3 + 5x.y^4 + 1y^5 \\
 \text{linha 6} \quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \Rightarrow (x + y)^6 = 1x^6 + 6x^5.y + 15x^4.y^2 + 20x^3.y^3 + 15x^2.y^4 + 6x.y^5 + 1y^6 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

**Observação 1.3.5.** Da disposição dos números binomiais das linhas formadas pelo triângulo de Pascal, esses números são os coeficientes do desenvolvimento binomial  $(x + y)^n$ .

**Definição 1.3.5 (Binômio de Newton).** Toda potência do tipo  $(x + y)^n$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , é denominada de binômio de Newton, e o seu desenvolvimento é feito de maneira simples, assim:

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) \cdots (x + y)}_{n\text{-vezes}} \tag{1.9}$$

**Observação 1.3.6.** Se observarmos o triângulo de Pascal, podemos notar que o termo genérico do produto, será obtido se tomarmos  $p$  dos fatores (com  $0 \leq p \leq n$ ) na segunda parcela e para os demais restantes tomamos " $n - p$ " fatores a primeira parcela. Neste caso, temos que os agrupamentos podem ser feitos de  $\binom{n}{p}$  modos distintos, logo o termo genérico do produto é:  $\binom{n}{p} \cdot y^p \cdot x^{n-p}$ .

Conforme 1.9 e 1.3.6, podemos afirmar para um número natural  $n$ , o desenvolvimento  $(x + y)^n$  fica:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot y^3 + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-2} \cdot x^2 \cdot y^{n-2} + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot y^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

## 1.4 NOÇÕES INTUITIVAS DE PROBABILIDADE

Nesta seção, serão vistas as noções básicas de probabilidades, que serão apresentadas sob um ponto de vista informal, na sua maioria por meio de definições, propriedades e principais teoremas. Para isso, define-se espaço amostral, eventos e probabilidade.

### 1.4.1 Experimentos aleatórios

Dentro do estudo das probabilidades, podem-se considerar dois tipos de experimentos: os não aleatórios (experimentos determinísticos) caracterizados *a priori*, neste caso nada temos a fazer, pois o resultado já é sabido antes mesmo de ele ocorrer; e os aleatórios (casuais, mas com possibilidades de uma previsão de ocorrer), que neste caso é o objeto de estudo, pois são acontecimentos que não sabemos o resultado *a priori*, mas podemos fazer uma previsão em seus resultados (que pode ocorrer ou não), conforme definição a seguir:

**Definição 1.4.1.** *São todos os experimentos que, com  $n$  repetições sob as mesmas condições, apresenta, entre suas possibilidades, resultados imprevisíveis, porém, essas possibilidades poderão ter uma previsão de ocorrência.*

**Exemplo 1.4.1.** *No lançamento de uma moeda, os resultados possíveis são: "cara" ou "coroa", simbolizado por  $C = \text{"cara"}$  e  $k = \text{"coroa"}$ , temos os elementos do conjunto  $\{C, K\}$ .*

**Exemplo 1.4.2.** *No lançamento de um dado e uma moeda, como o dado possui 6 possibilidades e a moeda 2 e pelo princípio fundamental da contagem, o número total de resultados (agrupamentos) é 12. Para o dado, temos o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e conforme 1.4.1, temos o conjunto  $\{C, K\}$ . Neste caso, o conjunto de todas as possibilidades do experimento é o conjunto dos pares  $\{(1, C), (1, K), (2, C), (2, K), (3, C), (3, K), (4, C), (4, K), (5, C), (5, K), (6, C), (6, K)\}$*

### 1.4.2 Espaço amostral ( $\Omega$ )

**Definição 1.4.2.** *É o conjunto de todas as possibilidades (resultados possíveis) de um determinado experimento aleatório ocorrer, e denotado por  $\Omega$ .*

**Observação 1.4.1.** *Segundo (JAMES, 2015), quando um experimento é realizado sob certas condições fixas, teremos um conjunto de "resultados possíveis" com resultado elementar e indivisível do experimento, e esse conjunto é chamado de espaço amostral. No lançamento de um dado, é fácil determinar o conjunto dos possíveis resultados da face superior, mas, às vezes, esse conjunto não é tão fácil de ser definido, por exemplo (JAMES, 2015)(adaptado) Selecionar ao acaso um habitante da Cidade de Boa Vista-RR e medir sua massa em quilogramas (Kg). Quais os resultados possíveis deste experimento? Números Reais entre 0 e ?. Supondo que não exista massa máxima, talvez seja coerente termos um espaço amostral  $\Omega = (0, \infty)$ . Mas esse conjunto terá resultados impossíveis de ocorrer, tais como cinco mil ou cem mil quilos de massa de um indivíduo. Neste caso, poderíamos selecionar outros conjuntos para  $\Omega$ , por exemplo, os intervalos limitados  $(0, 500)$  e  $[\frac{1}{2}, 500]$ . Assim nos dois intervalos, aparentemente, toda a população teria um resultado possível para o experimento. Esses intervalos têm todas as propriedades para o estudo dos propósitos, e ainda poderemos escolher qualquer intervalo (incluindo  $(0, \infty)$ ) para o espaço amostral, embora tenhamos vários resultados impossíveis na própria reta real  $\mathbb{R}$ . Porém, pode ser uma escolha muito conveniente para o espaço amostral, pois nesse caso desejamos atribuir uma distribuição normal ao resultado através de um conjunto de variáveis aleatórias, já que o importante, então, é que todos os resultados possíveis estejam dentro do espaço amostral  $\Omega$ ; com as suposições:*

- a) *a todo resultado possível corresponde um, e somente um ponto  $w \in \Omega$ ; e*
- b) *resultados distintos têm pontos distintos, isto significa que não se pode representar mais de um resultado.*

**Exemplo 1.4.3.** *Considere o experimento do lançamento de um dado, como o dado possui 6 possibilidades, então seu espaço amostral fica definido por:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .*

**Exemplo 1.4.4.** *No lançamento de uma moeda e um dado, este possui 6 possibilidades e a moeda 2, e pelo princípio fundamental da contagem, o número total de resultados (agrupamentos) são 12, conforme tabela (1).*

Para o dado, temos o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e conforme (1.4.1) temos o conjunto  $\{C, K\}$ . Neste caso, o espaço amostral  $\Omega$  é o conjunto de todas as possibilidades deste experimento, e fica determinado pelo conjunto dos pares  $\Omega = \{(1, C), (1, K), (2, C), (2, K), (3, C), (3, K), (4, C), (4, K), (5, C), (5, K), (6, C), (6, K)\}$ .

Tabela 1: Lançamento de um dado e uma moeda.

Espaço Amostral: Lançamento de um dado e uma moeda						
Dado-Moeda	1	2	3	4	5	6
"cara"=c	(c,1)	(c,2)	(c,3)	(c,4)	(c,5)	(c,6)
"coroa"=k	(k,1)	(k,2)	(k,3)	(k,4)	(k,5)	(k,6)

Fonte: Autor, 2016.

### 1.4.3 Eventos $A_i$

**Definição 1.4.3.** São todos os subconjuntos  $A_i$  do espaço amostral  $\Omega$ , ou seja, são conjuntos com resultados possíveis.

Neste sentido, quando, da realização de um determinado experimento, há certeza de certos eventos ocorrerem ou não. No lançamento de um dado, por exemplo, há possibilidade ou não de alguns eventos:

$A_1 =$  a face ser um número ímpar;

$A_2 =$  a face ser o número 5 e

$A_3 =$  a face ser um número  $> 6$

Neste caso, podemos notar que cada um desses eventos podem ser facilmente identificados como um subconjunto de  $\Omega$ , tais como:  $A_1 = \{1, 3, 5\}$ ;  $A_2 = \{5\}$  e  $A_3 = \{\}$ . Estas enumerações de cada evento e subconjuntos poderão ser realizadas em qualquer experimento. Assim, seja  $\Omega$  o espaço amostral e  $A_i$  com  $1 < i < n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Considere-se um círculo de raio unitário (ver figura 5), e escolhe-se ao acaso, um ponto. Neste caso, temos que o espaço amostral  $\Omega$  é um círculo de raio  $r = 1$  com as seguintes características:  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Diante do experimento, podemos enumerar alguns eventos, como:

$A_1 =$  a distância da origem ao ponto escolhido é  $\leq \frac{1}{2}$ ;

$A_2 =$  entre o ponto escolhido e a origem ter uma distância  $\geq 2$ ;

$A_3 =$  ter a 1ª coordenada maior que a 2ª.

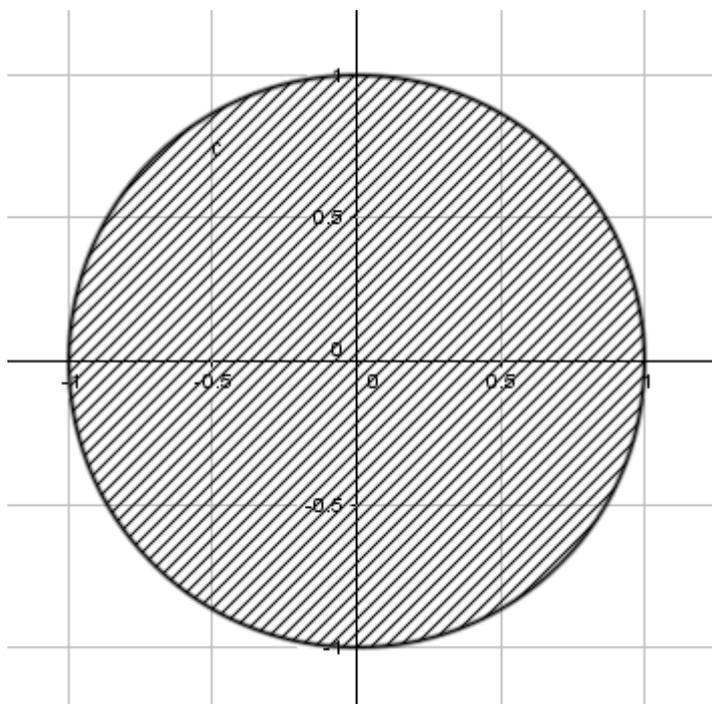
Considerando o ponto  $\omega = (x, y)$  como resultado do ponto escolhido aleatório dentro do experimento, assim, o evento  $A_1$  terá como ponto definido, se, e somente se,  $x^2 + y^2 \leq 1/4$ ,  $\Omega$  será favorável a  $A_3$ , se, e somente se,  $x > y$ , e o evento  $A_2$  não terá nenhum ponto definido dentro do experimento. Logo temos:

$A_1 = \{(x, y) \in \Omega | \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2\}$  (ver Figura 6);

$A_2 = \emptyset =$  conjunto vazio;

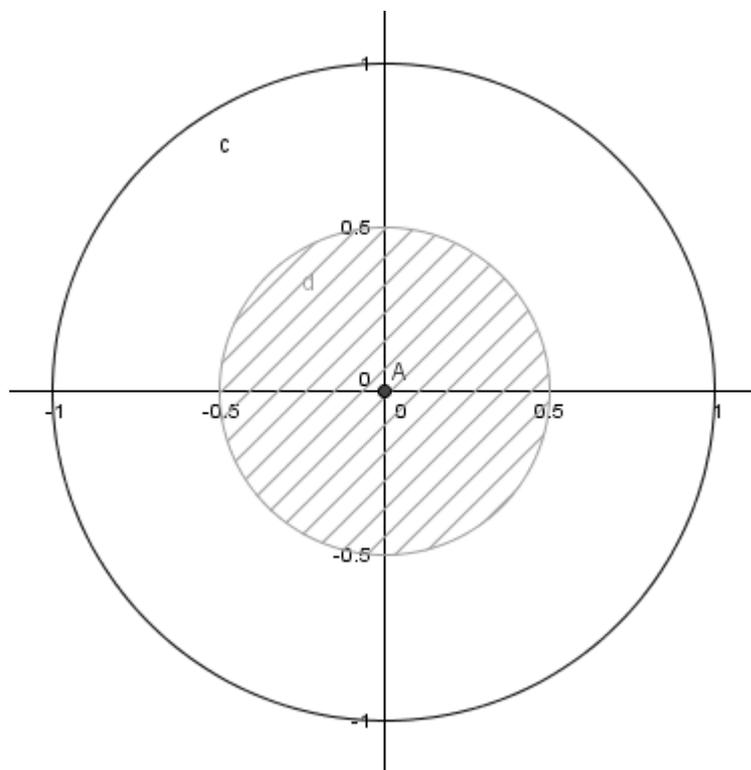
$A_3 = \{(x, y) \in \Omega | x > y\}$  (ver Figura 7).

Figura 5: Conjunto do experimento  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

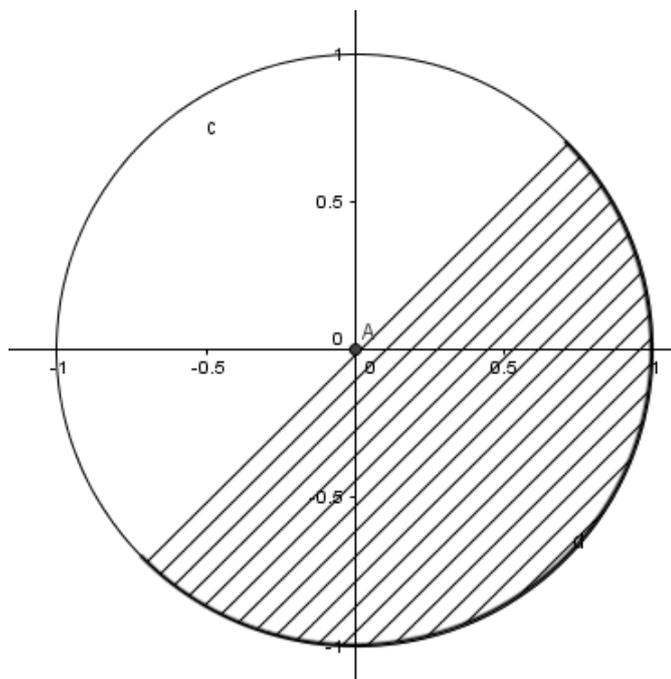


Fonte: (JAMES, 2015, p. 3), (adaptado)

Figura 6: Evento  $A_1 = \{(x, y) \in \Omega / \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2\}$  do experimento  $\Omega$



Fonte: (JAMES, 2015, p. 3), (adaptado)

Figura 7: Evento  $A_3 = \{(x, y) \in \Omega | x > y\}$  do experimento  $\Omega$ 

Fonte: (JAMES, 2015, p. 3), (adaptado)

Neste caso, temos que todo evento associado ao experimento  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$  pode ser chamado de subconjunto do espaço amostral  $\Omega$ . Assim, dado um determinado experimento aleatório e definido o seu espaço amostral  $\Omega$ , temos as seguintes afirmações:

- a) será chamado de evento todo subconjunto  $A_i \subset \Omega$ ; com  $1 \leq i \leq n$  e  $n$  natural;
- b) se  $A_i = \Omega$ , será chamado de evento certo;
- c) se  $A_i = \phi$ , será chamado de evento impossível ou incerto.

#### 1.4.4 Conceito de probabilidade

**Definição 1.4.4.** Para todos os eventos aleatórios equiprováveis<sup>3</sup>, podemos atribuir uma possibilidade de um evento  $A_i$  ocorrer num determinado espaço amostral  $\Omega$ . Assim, dado um determinado experimento aleatório definido no seu espaço amostral  $\Omega$  e um evento  $A_i \subset \Omega$ , definimos probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis do evento  $A_i$  ocorrer e o número de resultados favoráveis do espaço amostral  $\Omega$ , ou seja:  $P(A_i) = \frac{n(A_i)}{n(\Omega)}$ , desde que seja, satisfeitas as seguintes propriedades:

<sup>3</sup> Dado um determinado experimento com um espaço amostral  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ , com finito número de elementos, neste caso, podemos afirmar que os eventos  $(\omega_i)$  são equiprováveis, pois tem a mesma chance de ocorrer, isto é, tem a mesma probabilidade, assim:  $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$

**Propriedade 1.4.1.** Para todo evento  $A_i$ , temos sempre  $0 \leq P(A_i) \leq 1$  ou  $0 \leq P(A_i) \leq 100\%$ , para todo  $A_i \subset \Omega$ .

De fato, como temos sempre que  $\emptyset$ ,  $A_i$  e  $\Omega$  tem a correspondência com:  $\emptyset \subset A_i \subset \Omega$ . Assim, se relacionarmos o número de elementos dos conjuntos, temos também a desigualdade:  $n(\emptyset) \leq n(A_i) \leq n(\Omega)$ . Se dividirmos as desigualdades por  $n(\Omega) > 0$ , logo:  $\frac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A_i)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$ . Como  $n(\emptyset) = 0$ ;  $\frac{n(A_i)}{n(\Omega)} = P(A_i)$  e  $\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$ , podemos concluir que:

$$0 \leq P(A_i) \leq 1.$$

**Observação 1.4.2.** Para qualquer evento  $A_i$ , temos sempre uma probabilidade com valores de 0 a 1, e:

Para eventos  $A_i = \phi$ , temos um evento impossível. Isso significa que não há nenhuma possibilidade desse evento ocorrer num espaço amostral  $\Omega$ , assim  $P(A_i) = 0$ ;

Para eventos  $A_i = \Omega$ , temos um evento certo. Isso significa que há 100% de certeza de que o evento ocorrerá num determinado espaço amostral  $\Omega$ , assim  $P(A_i) = 1$ ;

**Propriedade 1.4.2.** Para todo evento certo  $A_i = \Omega$ , temos sempre  $P(A_i) = P(\Omega) = 1$

**Propriedade 1.4.3.** Para um número qualquer de eventos independentes  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , temos sempre  $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$  e em particular, quando temos apenas dois eventos excludentes  $A_1$  e  $A_2$ , tem-se sempre  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Com essa definição clássica de probabilidade, por exemplo, no lançamento de um dado, podemos atribuir probabilidade a qualquer evento  $A_i$  contido no espaço amostral  $\Omega$ , pois nesse caso temos que todos os resultados do experimento são equiprováveis, ou seja, diante dos resultados  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ , pode-se definir que  $P(i) = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ . Neste caso todo evento terá uma possibilidade de ocorrência. Já no caso do experimento de escolher um ponto ao acaso no círculo ( $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ ), o acaso poderá ter a interpretação como: a probabilidade será a mesma dos dois eventos se, e somente se, os dois eventos tiverem a mesma área (probabilidade geométrica). Assim, temos que:  $P(A_i) = \frac{\text{área}(A_i)}{\text{área}(\Omega)}$ , para todo  $A_i \subset \Omega$  e se a área de  $A_i$  estiver bem definida. Considerando o evento  $A_1$  citado acima, e se lançarmos um *dardo* em um alvo com o espaço amostral definido em  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , neste caso, a probabilidade do *dardo* acertar em um ponto com a distância  $\leq \frac{1}{2}$  entre o ponto escolhido e a origem é:

Dados:

Espaço amostral  $\Rightarrow \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , com  $R = 1$ ;

Evento  $\Rightarrow A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ , com  $r = 1/2$ ;

Área de  $\Omega = \pi R^2 \Rightarrow$  Área de  $\Omega = \pi 1^2 = 4\pi$  u.a.;

Área de  $A_1 = \pi r^2 \Rightarrow$  Área de  $A_1 = \pi (1/2)^2 = (\pi/4)$  u.a.;

Como a probabilidade é definida por  $P(A_1) = \frac{\text{área}(A_1)}{\text{área}(\Omega)}$ , assim temos que:

$$P(A_1) = \frac{(\pi/4)}{(\pi)} \Rightarrow P(A_1) = \frac{\pi}{4\pi} \Rightarrow P(A_1) = \frac{1}{4}.$$

### 1.4.5 Principais teoremas

**Teorema 1.4.1.** *Se um evento B é um conjunto vazio, então  $P(B) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja A um evento qualquer do espaço amostral  $\Omega$  e B um evento vazio. Neste caso temos a relação de  $B \subset A \subset \Omega$ . Como por hipótese  $B = \phi$ , assim temos que  $B \cap A = \phi$ , logo A e B são disjuntos (excludentes), então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como A e B são eventos mutuamente exclusivos, e  $(A \cup B) = A$ , pois B é vazio, pela propriedade (1.4.3) tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = P(A) - P(A) = 0, \text{ Portanto } P(B) = P(\phi) = 0$$

□

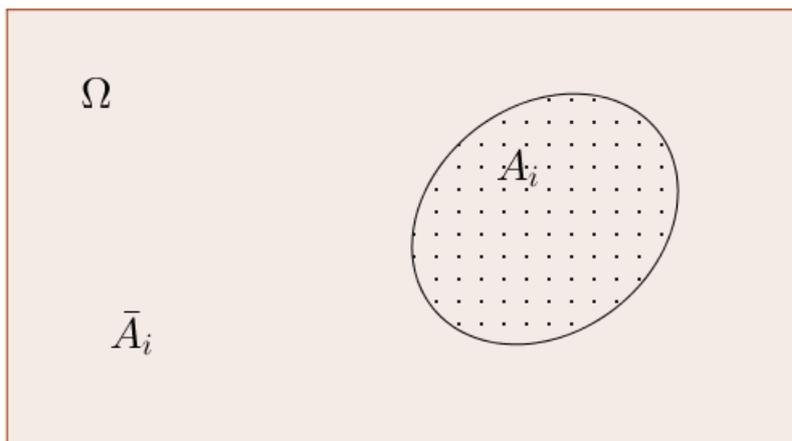
**Teorema 1.4.2 (Probabilidade complementar).** *Se  $\overline{A_i}$  é o complemento de um evento  $A_i$ , então  $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$ .*

*Demonstração.* Considere o diagrama da Figura (8):

Pode-se notar que o complementar de  $A_i$  é dado pela diferença de  $(A_i - \overline{A_i})$ , que são formados pelos elementos  $x \in A_i$  que não pertencem a  $\overline{A_i}$ , ou seja,  $A_i - \overline{A_i} = \{x | x \in A_i \text{ e } x \notin \overline{A_i}\}$ . Pelo diagrama da figura(8) tem-se  $A_i \cup \overline{A_i} = \Omega$  e como  $A_i \cap \overline{A_i} = \emptyset$ , logo os eventos  $A_i$  e  $\overline{A_i}$  são mutuamente exclusivos. Pela propriedade (1.4.3) temos:  $P(A_i \cup \overline{A_i}) = P(A_i) + P(\overline{A_i})$ , como  $A_i \cup \overline{A_i} = \Omega$ , assim  $P(A_i \cup \overline{A_i}) = P(\Omega)$ , logo temos que:

$P(A_i \cup \overline{A_i}) = P(\Omega) = P(A_i) + P(\overline{A_i})$ , como temos que a  $P(A_i \cup \overline{A_i}) = P(\Omega) = 1$  pela propriedade (1.4.2), assim:  $P(A_i) + P(\overline{A_i}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$ . Portanto  $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$ . □

Figura 8: Diagrama de Venn: Complementar de um conjunto

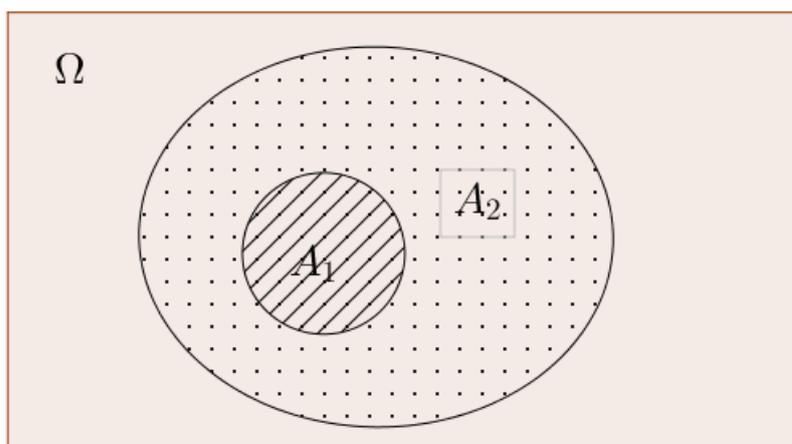


Fonte: Autor, 2016.

**Teorema 1.4.3.** Se  $A_1 \subset A_2 \subset \Omega$ , então  $P(A_1) \subset P(A_2) \subset P(\Omega)$  e  $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$ .

*Demonstração.* Tem-se pelo diagrama da (figura 9) que  $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ , com  $A_1$  e  $(A_2 - A_1)$  mutuamente excludentes (ver diagrama da figura(9)). Assim temos:  $P(A_2) = P[A_1 \cup (A_2 - A_1)] = P(A_1) + P(A_2 - A_1) - P[A_1 \cap (A_2 - A_1)]$ . Como  $A_1$  e  $(A_2 - A_1)$  são mutuamente exclusivos isso significa que  $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \phi$ , assim temos  $P[A_1 \cap (A_2 - A_1)] = 0$ , logo pela propriedade (1.4.3), temos:  $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) \Rightarrow P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$ . Neste caso, pela propriedade (1.4.1) temos também que  $P(A_2 - A_1) \geq 0$ , daí decorre que  $P(A_2) \geq P(A_1)$ .  $\square$

Figura 9: Diagrama de Venn: Relação de Inclusão



Fonte: Autor, 2016.

**Teorema 1.4.4 (Teorema da soma).** Se  $A_1$  e  $A_2$  são dois eventos quaisquer, então:  
 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ .

*Demonstração.* i) Para  $A_1$  e  $A_2$  mutuamente exclusivos:

Considere o diagrama da Figura (10):

Figura 10: Diagrama de Venn: União de conjuntos



Fonte: O autor, 2016.

Como  $A_1$  e  $A_2$  são disjuntos, logo  $A_1 \cap A_2 = \phi \rightarrow P(A_1 \cap A_2) = 0$ . Assim pela propriedade (1.4.3) logo temos:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (1.10)$$

ii) Para  $A_1 \cap A_2 \neq \phi$

Considere os eventos  $A_1$  e  $(A_1 \cap A_2)$  mutuamente exclusivos.

Como  $A_1 \cap (\overline{A_1} \cap A_2) = \phi$ , logo pela propriedade (1.4.3), temos:

$$P[A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)] = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2).$$

Como  $A_2$  é a união dos eventos mutuamente excludentes  $(A_1 \cap A_2)$  e  $(A_2 \cap \overline{A_1})$ , logo:

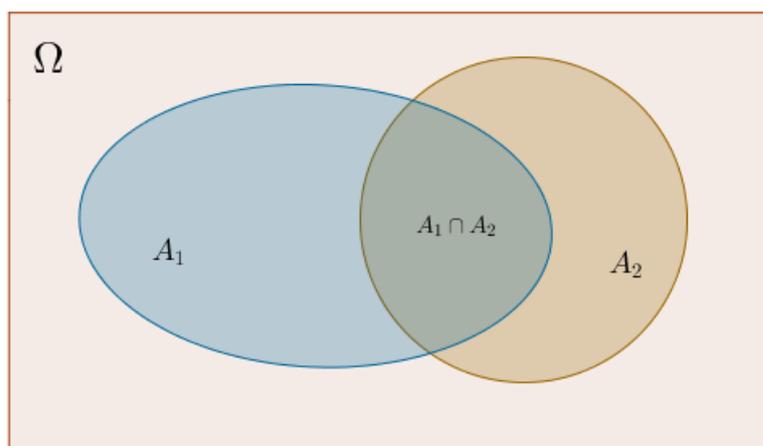
$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A_1}) \rightarrow P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \quad (1.11)$$

Substituindo (1.11) em (1.10), temos:  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$   $\square$

### 1.4.6 Probabilidade Condicional

**Definição 1.4.5.** *Sejam dois eventos  $A_1$  e  $A_2$  do espaço amostral  $\Omega$ , com  $(P(A_1) > 0)$  (ver diagrama da Figura (11)). Temos que a probabilidade condicional do segundo evento  $A_2$  ocorrer, tem como hipótese do evento  $A_1$  já ter ocorrido, assim, como  $A_1$  já ocorreu, logo temos um novo espaço amostral (que será o próprio  $A_1$ ) e os elementos do evento  $A_2$  pertencem a  $A_1 \cap A_2$ .*

Figura 11: Diagrama de Venn: Probabilidade Condicional



Fonte: O autor, 2016.

Assim a probabilidade condicional de  $A_2$  ocorrer quando  $A_1$  já tenha ocorrido (denotado por  $P(A_2|A_1)$ ) é dado por:

$$P(A_2|A_1) = \frac{n(A_1 \cap A_2)}{n(A_1)} = \frac{\frac{n(A_1 \cap A_2)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A_1)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \text{ com } P(A_1) \neq 0, \text{ pois } A_1 \text{ já ocorreu.} \quad (1.12)$$

$$\text{Como } P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$$

**Exemplo 1.4.5.** *No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair um número menor que 4, sabendo-se que o resultado foi um número primo. Note que, conforme a definição (1.4.2), temos o espaço amostral inicial  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , mas como foi dada a informação de que o número da face que saiu é um número primo, logo temos uma redução do espaço amostral, assim o novo espaço amostral  $\Omega^* = A_1 = \{2, 3, 5\}$ , e é neste novo espaço-amostra reduzido que se avalia a probabilidade desse evento. Neste caso, temos os seguintes conjuntos:*

$$A_1 = \{x \in \Omega | x \text{ é primo}\} \rightarrow A_1 = \{2, 3, 5\};$$

$$A_2 = \{x \in \Omega | x \text{ é um número menor que } 4\} \rightarrow A_2 = \{1, 2, 3\}, \text{ e};$$

$$A_1 \cap A_2 = \{2, 3\}.$$

*Resolução:*

*Neste caso, tem-se:*

$$A_1 \cap A_2 = \{2, 3\} \rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{6} \text{ e};$$

$$P(A_1) = \frac{3}{6}.$$

*Pela equação (1.12), tem-se que:*

$$P(A_2|A_1) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

*Logo, a probabilidade de sair um número menor que 4, dado que o resultado foi um número primo, é de  $\frac{2}{3}$*

#### 1.4.6.1 Eventos independentes

**Definição 1.4.6.** *Dois eventos  $A_1$  e  $A_2$  de um espaço amostral  $\Omega$  são independentes, se, e somente se,  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ , desde que  $P(A_1) \neq 0$  e  $P(A_2) \neq 0$ .*

**Proposição 1.4.1.** *Um evento  $A_i$  é independente de si próprio se, e somente se,  $P(A_i) = 0$  ou  $P(A_i) = 1$*

*Demonstração.* Suponha que  $P(A_i) = x$ , com  $0 < x < 1$ . Como  $P(A_i) = P(A_i \cap A_i) = x \neq x^2$ , para todo  $x \in$  ao intervalo  $]0, 1[$ , entretanto  $P(A_i \cap A_i) = P(A_i) = x = x^2$ , se  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Agora se  $P(A_i) = 0$  ou  $P(A_i) = 1$ , então o evento é independente de si mesmo. Pelo contrário, não será independente de si próprio. Agora suponha que  $A_i$  seja independente de si mesmo, logo:

$x^2 = P(A_i) \cdot P(A_i) = P(A_i \cap A_i) = P(A_i) = x$ , ou seja,  $x^2 = x \rightarrow x^2 - x = 0$ , mas será verdadeiro, se e somente se,  $x = 0$  ou  $x = 1$ .  $\square$

**Proposição 1.4.2.** *Se  $A_1$  e  $A_2$  são eventos independentes, então  $A_1$  e  $A_2^C$  também são independentes (e também  $A_1^C$  e  $A_2$ , e ainda  $A_1^C$  e  $A_2^C$ ). Ver (JAMES, 2015, p. 20)*

**Observação 1.4.3.** *Se  $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \cdot P(A_2)$  os eventos  $A_1$  e  $A_2$  são dependentes, desde que  $P(A_1) \neq 0$  e  $P(A_2) \neq 0$ .*

**Teorema 1.4.5 (Produto da Probabilidade composta).** *Se  $A_i$  são subconjuntos do espaço amostral  $\Omega$ , com  $P(A_i) > 0$ , então:*

$$i) P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1|A_2), \forall A_1 \text{ e } A_2 \in A_i.$$

$$ii) P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}), \forall A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in A_i \subset \Omega; \forall n = 2, 3, 4, \dots$$

*Demonstração.* ii) Como em:

$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(\bigcap_{i=1}^n A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}$ . Pela definição (11), tem-se que:

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \quad \square$$

### 1.4.7 Teorema ou Regra de Bayes

**Teorema 1.4.6 (Probabilidade total).** *Se um conjunto  $A = A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  dois a dois disjuntos na qual formam uma partição do espaço amostral  $\Omega$ , ou seja:*

$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  e assumamos que  $P(A_i) > 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ , então, para qualquer evento  $B$ , temos que:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i) \end{aligned} \quad (1.13)$$

*Demonstração.* Por hipótese, temos que a sequência  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  forma uma partição para qualquer  $B \subset \Omega$ , então temos que  $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$ . Como  $A_i$  são disjuntos dois a dois, então tem-se que  $A_i \cap B$  também serão disjuntos, como  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subset \Omega$ , então  $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset \Omega$ , e pelo teorema (1.4.5) temos:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

□

**Definição 1.4.7 (Regra de Bayes).** *Sejam  $A_i, i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$  eventos mutuamente exclusivos, tal que  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ , com  $P(A_i) > 0$  para todo evento  $B \subset \Omega$  de tal forma que são conhecidas as probabilidades condicionais  $P(B|A_i)$ , temos sempre que:*

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

## 2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

No capítulo anterior, foram revisadas algumas definições da Análise Combinatória e introduzidos vários tipos de modelos de Probabilidade através do meio dos espaços amostrais de forma simples e que serão necessários para o desenvolvimento do Método Monte Carlo. De forma geral, é necessária a ampliação dos conceitos para que tenhamos todos os modelos de probabilidade para a representação de todos os tipos de variáveis. Assim, neste capítulo, serão apresentadas as variáveis aleatórias com as distribuições de probabilidade que são de suma importância para a utilização nas aplicações. Inicia-se com a abordagem sobre os tipos de variáveis: discretas ou contínuas, funções de distribuição e posteriormente as distribuições de probabilidade. Antes de definir as funções e distribuição, serão vistos e definidos os tipos de variáveis.

### 2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

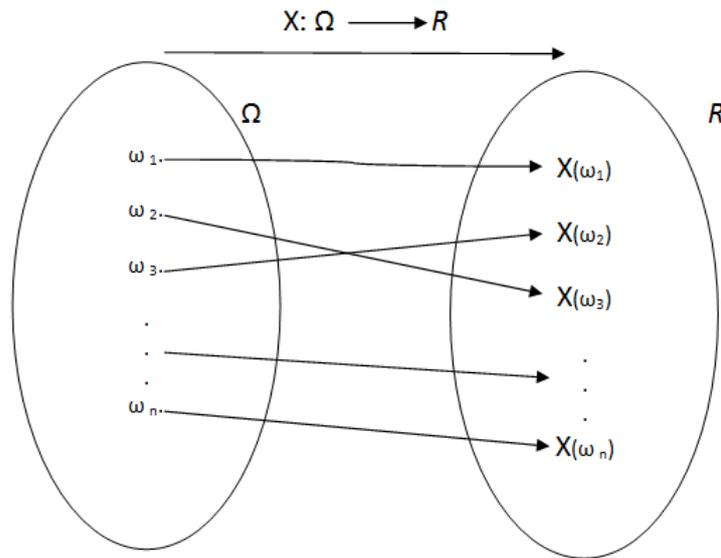
De um modo geral, quando temos um determinado espaço amostral  $\Omega$  e um fenômeno aleatório qualquer contido nesse espaço, para as variáveis qualitativas, todas as descrições de probabilidades associadas a eventos são fáceis de determinação. Por outro lado, temos na descrição de dados, que os recursos disponíveis para as análises são mais ricos nas variáveis quantitativas. Neste caso, desejamos estudar a estrutura probabilística de quantidades associadas a esse fenômeno. Por isso, nesta seção, apresenta-se a definição e os tipos de variáveis, onde será definida a variável discreta e a contínua. Além disso, também serão apresentadas algumas propriedades importantes para este estudo.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $E$  um experimento aleatório e  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$  um espaço amostral associado a  $E$ . Neste caso, chama-se de variável aleatória, qualquer função  $X$ , que associa cada valor  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  a um número real  $X(\omega_i)$ .*

**Definição 2.1.2 (Variável aleatória discreta).** *É toda função  $X$ , definida dentro de um espaço amostral  $\Omega$  que assume valores em um conjunto (finito ou infinito) de infinitos pontos (enumeráveis) dentro dos reais.*

**Definição 2.1.3 (Variável aleatória contínua).** *É toda função  $X$ , definida dentro de um espaço amostral  $\Omega$  que toma um conjunto de números infinitos (não enumerável) de valores reais.*

Figura 12: Variável aleatória



Fonte: Autor, 2016.

**Observação 2.1.1.** Apesar da terminologia "variável aleatória", teremos que  $X$  é uma função com domínio em  $\Omega$  e contradomínio em  $R$ .

## 2.2 DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

A função  $X$ , definida em um espaço amostral  $\Omega$ , cujo domínio tem como valores os da variável e cuja imagem são números reais, assim, esses números são as probabilidades que cada variável assuma nessa distribuição. Neste caso o conjunto imagem dessa função estará sempre restrito ao intervalo  $[0, 1]$ . Assim teremos que uma distribuição de probabilidade tornará um modelo matemático que terá relação do valor de uma variável aleatória com a sua probabilidade de ocorrer dentro do espaço amostral  $\Omega$ .

**Observação 2.2.1.** Toda variável da função  $X$  definida em um espaço amostral  $\Omega$  que assumir valores num conjunto de pontos da reta (enumerável) terá distribuição de probabilidades discretas e se a variável assumir valor em um intervalo de números reais terá sua distribuição de forma contínua.

### 2.2.1 Distribuição Discreta de probabilidades

Dado uma variável aleatória  $X$  associada a um espaço amostral  $\Omega$ , e o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , de valores que podem assumir, e se para cada valor  $x_i$  atribuir-se uma probabilidade, tem-se uma probabilidade definida por:

$$P(X = x_i) = f(x_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$$

Assim, a equação (2.1) é definida como uma *função de probabilidade*, e pode ser dada como:

$$P(X = x) = f(x) \quad (2.2)$$

Neste caso, se consideramos  $x = x_i$ , a equação (2.2) reduz a (2.1), já para os demais valores de  $x$ , teremos sempre  $f(x) = 0$ . Nessas condições, temos que  $f(x)$  é uma função de probabilidade se:

- a)  $P(X = x) = f(x) \geq 0$  e;
- b)  $\sum_x P(X = x) = f(x) = 1$ .

A distribuição ou função de probabilidade definida pela equação (2.2) é uma distribuição de frequências relativas dos resultados do espaço amostral  $\Omega$ , pois indica de forma proporcional o valor que cada variável aleatória está assumindo dentro desse espaço.

#### 2.2.1.1 Distribuição de probabilidade acumulada

Como tem-se uma distribuição de probabilidades relativas para uma determinada variável aleatória  $X$ , a partir desses dados pode-se construir uma nova distribuição a partir da distribuição relativa como sendo uma distribuição acumulada.

**Definição 2.2.1.** Dada uma variável aleatória  $X$ , define-se uma função de distribuição acumulada da variável  $X$ , num ponto  $x$ , como  $P(X \leq x) = F(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , e  $-\infty < x < \infty$ .

Tem-se, neste caso, que uma função acumulada pode ser gerada através da função de probabilidade, sempre verificando que;  $P(X \leq x) = F(x) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k)$ , com  $x_k \leq x$ . No caso em que a variável aleatória  $X$  assumir valores reais finitos  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ , a função de distribuição  $F(X)$  fica definida por:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\infty < x < x_1, \\ f(x_1), & \text{se } x_1 \leq x < x_2, \\ f(x_1) + f(x_2), & \text{se } x_2 \leq x < x_3, \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3), & \text{se } x_3 \leq x < x_4, \\ \vdots, & \text{se } \vdots, \\ \vdots, & \text{se } \vdots, \\ \vdots, & \text{se } \vdots, \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \dots + f(x_n), & \text{se } x_n \leq x < \infty. \end{cases}$$

**Observação 2.2.2.** A função  $P(X \leq x) = f(x)$  pode ter sua representação por fórmulas (equações), tabela ou gráfico.

A distribuição de probabilidade acumulada atende as seguintes propriedades:

- i)  $\sum_{x_i \leq x} P(x_i) = F(X)$ ;
- ii)  $F(-\infty) = 0$  para todo  $x \leq 0$  e  $F(\infty) = 1$  para todo  $x \geq x_n$ ;
- iii)  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ ;
- iv)  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$ ;
- v)  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ ;
- vi)  $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = a)$ ;
- vii) Se  $F(X)$  é contínua à direita, então  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(X) = F(X_0)$ .
- viii) Se  $F(X)$  é descontínua à esquerda, nos pontos em que a probabilidade é sempre diferente de zero, então  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(X) \neq F(X_0)$  para toda  $P(X = x_0) \neq 0$ ;
- ix) A função  $F(X)$  é não decrescente, isso significa que para um  $b > a$ , tem-se sempre  $P(b) \geq F(a)$ .

### 2.3 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES PARA VARIÁVEL CONTÍNUA

Nesta seção, apresenta-se a variável aleatória  $X$ , apresenta um contradomínio num conjunto de números reais contínuos dentro do intervalo  $[a, b]$ . No caso em que definiu para a variável aleatória  $X$  discreta, a probabilidade  $P(X)$  como sendo a função  $f(x) = P(X = x)$  que associa cada elemento do domínio a um número não negativo, com  $\sum_{x_i=1}^n P(X) = 1$ . Neste caso, tem-se para a variável aleatória contínua, que tal

definição não pode ser aplicada, uma vez que não tem como definir a probabilidade do  $i$ -ésimo valor da variável aleatória  $X$ , pois esses não são numeráveis, assim  $P(X_i)$  não terá nenhum sentido.

**Definição 2.3.1.** *Seja  $X$  uma variável aleatória contínua, associada a um experimento aleatório dentro do espaço amostral  $\Omega$ . Assim uma distribuição ou função (densidade) de probabilidade  $f(x)$  é toda função que satisfaz as seguintes condições:*

- 1)  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x$  pertencente ao domínio da função:
- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} P(X = x) = f(x)dx = 1$ .

Na condição (2) da definição (2.3.1), nota-se que uma variável aleatória  $X \in \mathbb{R}$  está compreendida num intervalo de  $-\infty$  e  $\infty$ , assim,  $\forall a < b$  dentro do contradomínio  $(R_x)$ , tem-se então a probabilidade da variável  $X$  estar entre  $a$  e  $b$  dada por:

$$P(a < X < b) = \int_a^b P(X = x) = f(x)dx \quad (2.3)$$

**Observação 2.3.1.** *Se  $X$  for uma variável aleatória contínua de um intervalo  $[a, b]$ , então pela equação (2.3) todas as probabilidades serão iguais:*

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

**Observação 2.3.2.** *Na equação (2.3), a função distribuição ou função (densidade) de probabilidade  $f(x)$  não é definida como uma probabilidade. Assim, a função  $f(x)$  só terá uma probabilidade quando for integrada entre os dois limites, que neste caso, a probabilidade será a área definida pela curva da função definida no intervalo  $[a, b]$ , com  $a < b$ .*

## 2.4 MEDIDAS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES PARA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Os estudos das distribuições de frequências (relativas ou acumuladas) têm como principais medidas sobre essas distribuições as medidas de posição e as separatrizes. Nesse estudo, tem-se como necessidade apenas das definições das medidas: Média ou Esperança Matemática (valor esperado de uma variável), Variância e Desvio-Padrão. Assim, a aplicação dessas medidas será utilizada para estabelecer modelos teóricos de probabilidades da variável aleatória  $X$  (discreta ou contínua), com a única finalidade de descrever populações. Neste caso, as medidas aqui utilizadas representarão os parâmetros destas populações.

### 2.4.1 Média ou esperança matemática

Dada uma variável aleatória  $X$ , definida em um espaço amostral  $\Omega$ , e definida sua probabilidade  $P(X = x)$  por:

Tabela 2: Esperança matemática de uma variável aleatória

Distribuição de probabilidade da variável aleatória						
Variável aleatória $X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\dots$	$x_n$
$P(x_i)$ , com $1 \leq i \leq n$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	$P(x_4)$	$\dots$	$P(x_n)$
$x_i \cdot P(x_i)$ , com $1 \leq i \leq n$	$x_1 \cdot P(x_1)$	$x_2 \cdot P(x_2)$	$x_3 \cdot P(x_3)$	$x_4 \cdot P(x_4)$	$\dots$	$x_n \cdot P(x_n)$

Fonte: Autor, 2016.

assim o valor médio ou esperança matemática (denotada por  $E(X)$ ) da variável aleatória discreta  $X$ , será o valor numérico definido como:

$$E(X) = \mu_{x_i} = \mu = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + x_3 \cdot P(x_3) + x_4 \cdot P(x_4) + \dots + x_n \cdot P(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) \quad (2.4)$$

e para uma variável aleatória  $X$  com sua função de distribuição  $F(X)$ , a  $E(X)$  fica definida por

$$E(X) = \mu_{x_i} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) d(x) \quad (2.5)$$

quando a integral imprópria de Riemann-Stieltjes<sup>1</sup> estiver definida em um intervalo  $[a, b]$ .

**Observação 2.4.1.** *Pode-se notar que o valor de  $E(X)$  definido pela equação (2.5) fica definido de maneira clara, quando a soma não tem dependência na ordem dos termos. Assim, em termos bem particulares, tem-se uma série totalmente convergente<sup>2</sup>, pois,  $\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot P(x_i) < \infty$ . Assim, nesse mesmo sentido, pode-se dizer que a esperança matemática  $E(X)$  é uma média desses valores da variável aleatória  $X$  de forma ponderada, pois os pesos dessas variáveis são as probabilidades de cada  $P(x_i)$  de acordo com a distribuição da variável  $X$ .*

#### 2.4.1.1 Propriedades da Média ou esperança matemática

**Propriedade 2.4.1.** *Se uma variável aleatória  $X$  assume um único valor constante  $k \in \mathbb{R}$ , então sua média fica definida como a própria constante  $k$ .*

<sup>1</sup> caso o leitor não tenha conhecimento do cálculo de integral, sugere-se que o mesmo faça uma leitura (estudo) sobre integral de Riemann-Stieltjes que se encontra em qualquer livro de cálculo

<sup>2</sup> Dada uma sequência  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ , com a  $n$ -ésima soma parcial.  $S_n$  é a soma dos primeiros  $n$  termos da sequência, isto é,  $\sum_{i=1}^n a_i$ . Uma série é convergente se a sequência de suas somas parciais  $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n\}$  converge. Nesse sentido, de forma mais simples e formal, a série converge se existe um limite  $L$  tal que para qualquer número positivo ( $\epsilon > 0$ ), existe um  $K$  positivo inteiro tal que para todo  $k \geq K$ , sempre  $|S_n - L| \leq \epsilon$

**Propriedade 2.4.2.** Se multiplicar constante  $k \in \mathbb{R}$  pela variável aleatória  $X$ , o valor esperado  $E(X)$  fica multiplicado por  $k$ , então  $k \cdot x$  é dado por:

$$E(X) = (k \cdot x) = k \cdot E(X)$$

**Propriedade 2.4.3.** Dados dois números  $a$  e  $b$  reais e uma variável aleatória  $Y$  dada por  $Y = a \cdot x + b$ , com  $X$  também uma variável aleatória, então:

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b$$

*Demonstração.* Neste caso, basta utilizar a definição do valor esperado  $E(X)$  e as propriedades conhecidas do somatório. Assim, pela definição dada pela equação (2.4), tem-se:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot (y_i) \quad (2.6)$$

como

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \mathbf{e}P(y_i) = p(ax_i + b) \quad (2.7)$$

substituindo (2.7) em (2.6), tem-se:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \cdot p(ax_i + b) \quad (2.8)$$

por definição, obtém-se que:

$$p(ax_i + b) = p(x_i) \quad (2.9)$$

assim, substituindo (2.9) em (2.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \cdot p(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [(ax_i \cdot p(x_i) + b \cdot p(x_i))] \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i \cdot p(x_i) + \sum_{i=1}^n b \cdot p(x_i) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^n p(x_i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pela definição do valor esperado e pela propriedade da probabilidade, postula-se que:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n (x_i) \cdot p(x_i) \text{ e } \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1, \text{ conclui-se que: } E(Y) = a \cdot E(X) + b. \quad \square$$

**Propriedade 2.4.4.** A soma ou diferença de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é igual à soma ou diferença das médias (valor esperado) dessas variáveis, isto é:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

### 2.4.2 Variância e desvio padrão

Seja  $X$  uma variável aleatória, definida em um determinado espaço amostral  $\Omega$ , a variância (denotada por  $Var(X)$  ou  $\sigma^2(X)$ ) é definida por:

$\sigma^2(X) = Var(X) = E[X - E(X)]^2$ , isto é, o valor esperado do quadrado do desvio da variável aleatória  $X$  em relação a sua própria média. De maneira simples, como temos uma dispersão de cada variável  $X_i$  em torno de sua média, a variância pode ser uma média do quadrado da diferença dos desvios médios.

**Observação 2.4.2.** Para a variável  $X$  discreta, tem-se que a variância fica definida como:  $\sigma^2(X) = Var(X) = \sum (X_i - E(X))^2 \cdot P(x_i)$

**Observação 2.4.3.** Para a variável  $X$  contínua, tem-se que a variância está definida por:  $\sigma^2(X) = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - E(X))^2 \cdot P(x_i) \cdot f(x) dx$ .

Como a variância será sempre um número real não negativo, então, o desvio padrão define-se como a raiz quadrada da variância, assim:  $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{Var(X)}$ , neste caso, o desvio padrão mostra como os valores de cada elemento do conjunto  $x_i$  variam ou mantêm uma certa distância ou "dispersão" em torno da média ou valor esperado. Isso significa que, quanto mais próximo de zero for o desvio padrão, indica que os dados estão em torno da média; por outro lado, se o desvio padrão apresentar um valor alto, indica que os dados estão muito dispersos, ou seja, distante da média.

## 2.5 MODELOS PROBABILÍSTICOS DE DISTRIBUIÇÕES PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

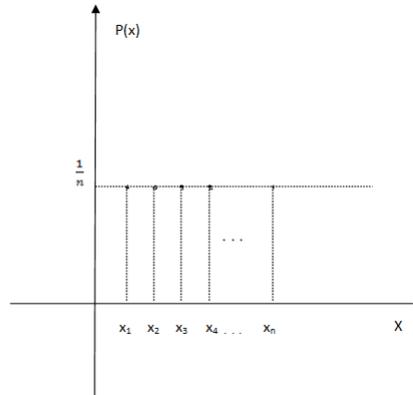
Dentro das aplicações, algumas variáveis aleatórias são adaptadas de maneira fácil, por apresentarem características determinísticas. Sendo assim, o estudo detalhado das variáveis tem importância, pois, a partir delas, serão construídos modelos probabilísticos para situações reais e a consequente distribuição com estimação de parâmetros já existentes em tabelas para facilitar o cálculo de probabilidades. Nesta seção, serão apresentados alguns modelos para utilização neste trabalho, de maneira a enfatizar as condições em que eles são utilizados para o auxílio do cálculo de probabilidade de ocorrência de cada evento num determinado espaço amostral  $\Omega$ .

### 2.5.1 Distribuição uniforme

Seja uma variável aleatória  $X$ , associada a um espaço amostral  $\Omega$ , e se  $X$  possuir valores inteiros de 1 a  $n$  dentro de um intervalo  $[a, b]$ , equiprováveis, ou seja,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , todos os valores têm igual probabilidade  $P(x_i)$  de ocorrência, ou seja,

$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{n}$ , com  $1 \leq i \leq n$ , desde que  $\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$ , neste caso, tem-se uma distribuição uniforme de uma variável aleatória discreta.

Figura 13: Função de probabilidade para variável aleatória discreta.

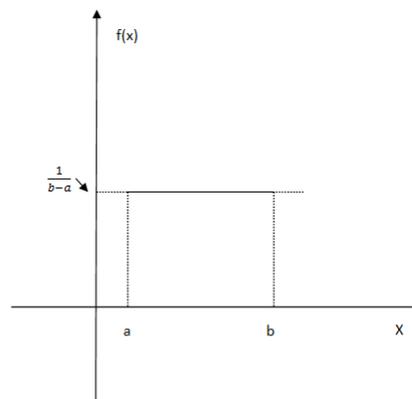


Fonte: O autor, 2016.

Para todo caso em que a variável aleatória  $X$  assume um valor contínuo no intervalo  $[a, b]$ ,  $X$  tem sua distribuição uniforme definida pela função densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para todo } x \notin [a,b], \\ \frac{1}{b-a}, & \text{para todo } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Figura 14: Função distribuição de probabilidade uniforme para variável aleatória contínua

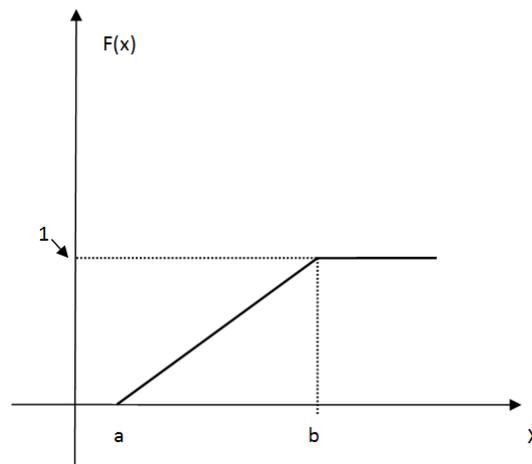


Fonte: O autor, 2016.

Pode-se notar que, para o caso da variável aleatória  $X$ , tem uma distribuição uniforme na distribuição acumulada definida pela função:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{para todo } x < a, \\ \frac{x-a}{x-b}, & \text{para todo } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{para todo } x > b. \end{cases}$$

Figura 15: Função distribuição acumulada uniforme para variável aleatória contínua.



Fonte: O autor, 2016.

### 2.5.2 Distribuição de BERNOULLI

Dado um espaço amostral  $\Omega$ , e um evento desse espaço, se uma determinada variável aleatória  $X$  tiver apenas as possibilidades de assumir sucesso (S) ou fracasso (F), a variável vai assumir apenas dois valores 0 para fracasso e 1 para sucesso. Pela definição de probabilidade, tem-se que a probabilidade do sucesso ocorrer é dada por:  $P(S \text{ ou } 1) = \frac{n(S)}{n(\Omega)}$ , que nesse caso denota-se por  $p$  com  $0 \leq p \leq 1$ , a probabilidade do sucesso dessa variável ocorrer, e, como consequência, tem-se que a probabilidade do fracasso (F) é a probabilidade complementar do sucesso (S), assim  $S + F = 1 \Rightarrow F = 1 - S$ . Então, a distribuição de Bernoulli<sup>3</sup> é definida por uma função de probabilidade dada por  $(x_i, p(x_i))$ , tal que:

$$f(x_i, p(x_i)) = \begin{cases} p, & \text{para todo } x = 1, \\ 1 - p, & \text{para todo } x = 0. \end{cases}$$

<sup>3</sup> **Daniel Bernoulli**, foi um matemático suíço, membro de uma família de talentosos matemáticos, físicos e filósofos. É particularmente lembrado por suas aplicações da matemática à mecânica, especialmente a mecânica de fluidos, e pelo seu trabalho pioneiro em probabilidade e estatística, e o primeiro a entender a pressão atmosférica em termos moleculares.

**Observação 2.5.1.** Postula-se em (BUSSAB; MORETTIN, 2003) que, para todos os experimentos, associados a um espaço amostral  $\Omega$ , que chegaram numa variável aleatória  $X$  de Bernoulli, são denominados como ensaios de Bernoulli e são denotados por  $X \sim Ber(p)$ , com parâmetro  $p$ .

**Observação 2.5.2.** Para (JAMES, 2015), quando em um determinado evento ocorrer probabilidade de sucesso ( $P(S = p)$ ) será a mesma para todo ensaio, e por isso os ensaios binomiais são frequentemente denominados ensaios de Bernoulli.

### 2.5.3 Distribuição binomial

Para um determinado experimento aleatório  $E$ , em que as possibilidades de ocorrências são apenas duas, ou seja, apresentam apenas como resultado: sucesso (S) e fracasso (F), com probabilidades  $p$  e  $q$  respectivamente, desde que  $p + q = 1$ . Assim, se o experimento  $E$  ocorrer de  $n$  maneiras independentes com  $k$  realizações, e que em cada repetição do experimento, a probabilidade tanto do sucesso (S) quanto do fracasso (F) for sempre a mesma para cada repetição, tem-se uma distribuição de probabilidade pelo método binomial.

**Definição 2.5.1.** Seja um experimento aleatório  $E$ , em que seja realizado  $n$  vezes de maneiras independentes, com probabilidades de sucessos ( $P(S = p)$ ) em cada repetição, e seja  $X = k$  o número de sucessos, então a probabilidade de ter  $k$  sucessos é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ como } p+q = 1 \Rightarrow q = 1-p, \text{ logo } P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

$$\text{com } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 2.5.4 Distribuição de POISSON

Em muitos casos, em um determinado experimento aleatório  $E$ , tem-se a facilidade de conhecer a probabilidade de sucessos, porém em muitos casos, essas probabilidades de sucessos não é tão fácil de ter sentido de valor de sucessos, bem como o número total. Como, por exemplo, em uma central telefônica, em um determinado intervalo de tempo  $t$  pode-se anotar e quantificar o número de telefonemas que a central recebe nesse intervalo de tempo, porém, não se pode determinar o número de telefonemas que a central deixou de receber. Neste caso, verifica-se que uma variável tempo  $t$  é de suma importância, pois faz sentido que, quanto maior o tempo, ou seja, quando ( $t \rightarrow \infty$ ) a probabilidade tende a aumentar. Assim uma aplicação de Poisson<sup>4</sup> vai ocorrer quando uma variável aleatória  $X$  tem uma distribuição binomial com pro-

<sup>4</sup> **Siméon Denis Poisson:** Engenheiro e matemático francês, nascido em Pithiviers, considerado o sucessor de Laplace no estudo da mecânica celeste e da atração de esferóides

habilidades de  $k$  sucessos num intervalo de tempo  $t$  a um número real  $\lambda$  esperado de ocorrências nesse intervalo de tempo, com as seguintes hipóteses:

$$H_1. P(X = 1, \Delta t) = \lambda \cdot \Delta t;$$

$$H_2. P(X = 0, \Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t;$$

$$H_3. \text{ para dado intervalo de tempo } \Delta t \text{ com } X > 1, \text{ tem-se } P(X > 1, \Delta t) = 0;$$

$H_4.$  para dado intervalo  $[a, b]$ , tem-se que todas as ocorrências de sucesso são independentes.

Neste caso, se um evento ocorre de  $n$  maneiras em um dado intervalo de tempo  $\Delta$ , logo seu tempo total  $t$  é dado por:

$t = n \cdot \Delta \Rightarrow \Delta = \frac{t}{n}$  e logo a hipótese ( $H_1$ ) fica:  $P(X = 1, \Delta) = \lambda \cdot \frac{t}{n}$ . Nesse sentido, para encontrar uma expressão para o cálculo da  $P(X, t)$  probabilidade da variável  $X$  em  $k$  sucessos no intervalo de tempo  $t$ , necessita apenas de calcular o limite da distribuição Binomial com parâmetros  $n$  e  $\frac{\lambda \cdot t}{n}$ . Assim, dada a distribuição Binomial definida pela expressão  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ , como  $p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$ , logo  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ , aplicando limite ( $n \rightarrow \infty$ ) a expressão fica:

$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ , como  $p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p$ , logo:

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (2.11)$$

Resolvendo a equação (2.11) tem-se:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda \cdot t}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda \cdot t}{n}\right)^{n-k} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Desenvolvendo o número Binomial  $\binom{n}{k}$  e aplicando a propriedade da potência, a equação (2.12) fica:

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots (n - k + 1)(n - k)!}{k! \cdot (n - k)!} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} \quad (2.13)$$

Simplificando  $(n - k)!$  e desenvolvendo a potência  $n^k$ , logo a equação (2.13) fica:

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots (n - k + 1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k\text{-vezes}}} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} \quad (2.14)$$

Colocando  $n$  em evidência e organizando os fatores, logo a equação (2.14) fica:

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} \right] \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (2.15)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n}\right) = 0$  para  $a \in \mathbb{R}$ , assim a equação (2.15) fica:

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (2.16)$$

Para todo  $n$  natural, tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}$ , assim substituindo e aplicando o limite em (2.16), a equação de Poisson passa a ser:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Portanto, a probabilidade da variável  $X$  em  $k$  sucessos no intervalo de tempo  $t$  ocorrer é definida pela equação  $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$ , com  $\lambda$  um número real, igual ao número esperado de possibilidades que ocorrem num dado intervalo de tempo e  $e$  é base do logaritmo natural ( $e = 2,71828\dots$ ).

**Observação 2.5.3.** *Na teoria da probabilidade e na estatística, a distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.*

### 3 MÉTODO MONTE CARLO E SUAS APLICAÇÕES

Nos capítulos anteriores, foram vistas as definições, propriedades e toda a teoria matemática sobre probabilidade necessárias para o entendimento das aplicações com técnicas aplicadas pelo Método Monte Carlo em diversos problemas de diversas áreas do conhecimento, os quais serão apresentados.

Portanto, sendo este o foco deste trabalho, o capítulo tem o objetivo de mostrar a aplicação do Método Monte Carlo em soluções de situações problemas em diversos campos da ciência. Serão expostos diversos problemas de aplicações, que contribuirão para um ensino da probabilidade, e servirão de forma clara e objetiva como um referencial para todos os profissionais em especial da área de Matemática do Ensino Básico e acadêmicos dos cursos de exatas.

#### 3.1 MÉTODO MONTE CARLO

O objetivo inicial da probabilidade era o tradicional problema da resolução de cálculos tradicionais pelas técnicas de amostragem, e, posteriormente, com experimentos que caracterizem conjuntos com infinitos pontos. Com o advento de números aleatórios, surgiu a necessidade de analisarmos esses problemas através de outras formas, que nesse caso será feito pelo Método Monte Carlo.

Pode-se ver em (COSTA et al., 2002), que o Matemático Stanislaw Ulan, em 1946, tentou calcular, através do tradicional método da análise combinatória, as probabilidades de sucesso de uma determinada jogada de um jogo de paciência. Depois de muitos cálculos, *Ulan* percebeu que a alternativa mais correta seria realizar "n jogadas", por exemplo, 200 ou cinco mil, e verificar a quantidade de cada resultado obtido. Nessa mesma época, o método pelas técnicas de amostragem não era usado, pelo fato de os cálculos serem demorados e até sujeito a erros. O ramo da matemática experimental ou aplicada que possui ligação aos experimentos envolvendo números aleatórios é conhecido como o Método Monte Carlo, e as suas aplicações estendem às diversas áreas de conhecimento, por exemplo, à Matemática, à Física, às Ciências Econômicas, às Ciências Médicas e outras.

Segundo ALLEN C.R. (1995), durante a Segunda Guerra Mundial, por meio do projeto Manhattam, Ulan cunhou a aplicação do método (Monte Carlo) para a difusão aleatória de Nêutrons num determinado material radioativo. Isso devido à similaridade das grandes simulações estatísticas através dos jogos de azar, sendo que Monte Carlo (capital do Principado de Mônaco) concentrava cassinos, apostas e jogos.

Rotineiramente, hoje em dia, o Método Monte Carlo é utilizado em diversos campos, com simulações de fenômenos físicos complexos, através dos estudos dos modelos nucleares, até uma simples simulação realizada em um jogo da mega sena.

Conforme o experimento, a Matemática pura ou teórica tem pontos fortes que são a sua abstração e generalidade. A modelagem do problema pode ser feita rigorosamente e compreender o funcionamento completo a partir de uma análise teórica. Contudo, a mesma matemática que carrega pontos fortes também carrega fraqueza, pois em problemas de grande complexidade, em termos teóricos determinísticos, a modelagem do problema será mais difícil. Nesse sentido, o Método Monte Carlo, tem uma ideia principal na abordagem dos problemas que é:

aproveitar ao máximo a força da análise teórica, e ao mesmo tempo evitar suas fraquezas, substituindo a teoria por experimento, onde quer que a primeira falhe (COSTA et al., 2002, p. 1).

Dessa forma, o estudo da probabilidade com as aplicações terá sua concentração em aplicações de alguns modelos aplicando o Método Monte Carlo de forma elementar, por meio de um gerador de "números aleatórios" para uma simulação Estatística.

### 3.1.1 Caracterização do Método Monte Carlo

O método Monte Carlo consiste na solução de um problema através de um processo aleatório, de maneira que os parâmetros do processo escolhido sejam as variáveis desconhecidas a calcular (BUSLENKO N. P.; SHVIDER YU. A; SRAGIVICH, 1966). Pela determinação dos dados estatísticos do processo aleatório, faz-se a aproximação das variáveis desconhecidas. A base do método Monte Carlo é a utilização de funções de probabilidade obtidas a partir da teoria apropriada. Assim, para fazer a simulação pelo Método Monte Carlo, têm-se os principais componentes de uma simulação que são:

- a) Função densidade de probabilidade: modelo matemático em questão;
- b) Um Gerador de números aleatórios;
- c) Amostragem dos dados a serem simulados;
- d) Contagem dos dados: os resultados de interesse são armazenados;
- e) Estimativa de erro: uma estimativa de erro estatístico como função do número de testes pode ser avaliada;
- f) Paralelismo e vetorização: algoritmos que permitem que o método Monte Carlo seja implementado com mais eficiência e rapidez podem ser avaliados.

O sucesso nos resultados pela simulação através do Método Monte Carlo dependerá de alguns fatores, tais como:

- a) o modelo matemático escolhido tem que ser adequado para o problema;
- b) um bom Gerador dos números pseudo-aleatórios;
- c) as variáveis de entrada com boa caracterização;
- d) quantidade de simulações feitas para a análise final;
- e) um intervalo de abrangência com o máximo de confiança.

Em situações em que as condições do método convencional não são atendidas, o método Monte Carlo torna-se uma ferramenta com grande vantagem e pode ser utilizada, pois:

- a) o modelo matemático adequado para a análise não apresenta uma linearidade;
- b) a distribuição de probabilidade da grandeza de saída afasta-se significativamente da normal (média).

**Observação 3.1.1.** *O método da Simulação por Monte Carlo é particularmente útil, quando modelos matemáticos complexos estão envolvidos, nos quais é difícil ou inconveniente determinar as derivadas parciais exigidas pelo método clássico, ou quando a grandeza medida não pode ser explicitamente expressa em razão das grandezas de influência.*

### 3.2 GERAÇÃO DE NÚMEROS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS PARA AS APLICAÇÕES EM SIMULAÇÕES

Atualmente, para a área de simulação, considera-se, por exemplo, a modelagem do número de pessoas a comparecer em uma festa. Pode-se determinar que o total de pessoas a comparecer à festa cairá numa faixa conhecida, por exemplo, em torno de um percentual atribuído, de acordo com as características da festa, dia e horário que são inerentes ao próprio acontecimento. Assim, os métodos de simulação estocástica<sup>1</sup> são baseados em habilidade de geração e números aleatórios que representam uma variável aleatória que será distribuída uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ . Têm-se que as primeiras técnicas utilizadas para gerar números aleatórios utilizavam processos físicos,

<sup>1</sup> Métodos de simulação estocástica são procedimentos que envolvem a geração de números aleatórios (pseudo-aleatórios) com o objetivo de explorar o espaço de incerteza ou campo de possibilidades de um dado fenômeno físico ou qualquer outro tipo de variável de estudo cujo comportamento possa ser quantificado matematicamente

que até então são aceitos como aleatórios, por exemplo, jogar moedas, lançamento de dados, roletas e entre outros. Nesse sentido, essa prática não será possível gerar valores aleatórios dentro de uma distribuição uniforme, porquanto, nesse caso, gerará, de forma determinística, uma sequência de valores que parecem ser aleatórios e uniformemente distribuídos nesse intervalo. No entanto, tem-se que a saída dos números aleatórios é gerada a partir de um algoritmo que não será de forma verdadeiramente aleatória. Nesse sentido, esses números gerados formam uma sequência numérica que tem a formidade aleatória estatística, pois estão sendo gerados por um processo de maneira determinística. Neste caso, pode-se definir como números Pseudoaleatórios<sup>2</sup>. Assim, a aleatoriedade dos métodos de simulação para a geração de números aleatórios se baseia na geração de uma sequência  $\overline{x}_i$  de variáveis aleatórias independentes  $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \dots, \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i$  uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 1]$ . Diante de tudo isso, os pioneiros da teoria de computação, ao invés de desenvolver em máquinas mais eficientes para gerar números aleatórios, propuseram a geração de números pseudoaleatórios que se "assemelham" aos números aleatórios, através de sequências determinísticas. Tem-se como exemplo, Von Neumann, que propôs o método "middle square": iniciado com **8653**, eleva-se ao quadrado e obtém-se (**74874409**) e consequentemente extraem-se seus elementos do meio com quatro dígitos (8744), e depois eleva-se ao quadrado novamente e assim por diante o processo continua.

Os primeiros experimentos descritos datam do século *XVIII*, como exemplo o experimento de Buffon<sup>3</sup>, uma das mais famosas tabelas de números supostamente aleatórios, a RAND<sup>4</sup>, continha 1 milhão de dígitos gerados por ruídos eletrônicos. Entretanto, para a grande maioria das tabelas de números aleatórios obtidos por processos físicos foram detectados vícios e dependências.

### 3.2.0.1 Propriedades dos números aleatórios

Toda número aleatório ao ser gerado pertence a uma seqüência  $X$  de números aleatórios,  $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  e terá sempre como propriedades, a uniformidade e independência. Todo número aleatório  $x_i$  é uma amostra independente de uma distribuição uniforme e contínua no intervalo  $[0, 1]$ , então, o número aleatório terá uma função densidade de probabilidade  $F(x)$  dada por:

<sup>2</sup> Pseudo-aleatório tem como radical **Pseudo** que é um termo de origem grega, *pseudos/pseudos* que significa de forma literal "mentira" ou "falsidade", que nesse caso o número Pseudo-aleatório somente se aproxima de algumas das propriedades dos números aleatórios.

<sup>3</sup> experimento que será estudado em item específico.

<sup>4</sup> A Million Random Digits with **1 000 000** Normal Deviates é um livro de 1955 da RAND Corporation. O livro, composto principalmente por uma tabela de números aleatórios, foi um dos trabalhos mais importantes do século 20 na área de estatísticas e números aleatórios. Foi produzido a partir de 1947 por uma simulação eletrônica de uma roleta ligada a um computador, em que os resultados foram, então, cuidadosamente filtrados e testados antes de ser usados para gerar a tabela.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \text{ fora do intervalo,} \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

A distribuição da sequência dos números aleatórios estão representados no gráfico da figura (16).

Figura 16: Função Densidade de Probabilidade de números aleatórios.



Fonte: O autor, 2016.

Assim, para cada número aleatório tem-se que a esperança matemática  $E(X)$  definida pela equação (2.5) tem como valor:

$$E(x) = \mu_{x_i} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) d(x) \quad (3.1)$$

Como o número aleatório  $x_i$  está definido no intervalo  $[0, 1]$ , o valor esperado definido pela equação(3.1) fica:

$$E(x) = \mu_{x_i} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) d(x) = \int_0^1 x d(x) = \left. \frac{x^2}{2} + C \right|_0^1 = \frac{1^2}{2} + C - \left( \frac{0^2}{2} - C \right) = \frac{1}{2}$$

Como a variável  $X$  é contínua, tem-se que a variância é definida por:

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(x))^2 \cdot P(x_i) \cdot f(x) d(x) = \int_0^1 \left[ x^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] d(x) = \int_0^1 \left[ x^2 - \frac{1}{4} \right] d(x). \quad (3.2)$$

Resolvendo (3.2), tem-se que:

$$Var(x) = \int_0^1 \left[ x^2 - \frac{1}{4} \right] d(x) = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot x + C \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot 1 + C - \left( \frac{0^3}{3} - \frac{0}{4} \cdot 0 - C \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

Neste caso, pode-se afirmar que o desvio padrão por sua vez é dado por:

$$\sigma^2(x) = Var(x) \Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

Para garantir uma série de números aleatórios de forma desejada, o gerador desses números tem que possuir algumas propriedades desejadas como:

- a) A geração dos números deve ser de forma eficiente computacionalmente, pois muitas vezes a simulação necessitará de uma geração de um conjunto de até mesmo, milhões de números aleatórios em cada execução, sendo que o intervalo de tempo desse processamento deve ser mínimo;
- b) A escolha do período deve ser longo, sendo que a escolha de um pequeno período pode ocorrer que a sequência numérica tenha repetição da sequência de números;
- c) Os sucessivos valores devem ser independentes e uniformemente distribuídos: a correlação entre os diversos valores gerados deve ser pequena, pois, de maneira significativa, pode indicar dependência entre elas.

**Observação 3.2.1.** *Para melhor compreender por que existem vários métodos geradores de números aleatórios e por que alguns são considerados melhores do que outros, exemplifica-se como estes geradores operam. A técnica empregada mais comum faz uso de uma relação recursiva para a qual, o próximo número na sequência é uma função do último ou dos dois últimos números gerados, isto é,  $x_i = (f_{i-1}, f_{i-2}, f_{i-3}, \dots)$ .*

### 3.2.1 Geradores de números aleatórios

Para a geração de números aleatórios uniforme (*GNA*) existem grande número de algoritmos disponíveis. Dentre eles, pode-se citar: deslocamento de registro, congruência linear, Fibonacci, congruência inversa e entre outros. Neste trabalho será apresentado o método do meio-de-quadrado apenas para conhecimento histórico, sendo que nesta seção será feita a descrição do algoritmo da Congruência linear por ser utilizado moderadamente.

Praticamente em todos os geradores de números aleatórios uniforme (GU), utilizam-se fórmulas recursivas (recorrências). Assim, os termos iniciais da sequência  $u_i = u_1, u_2, u_3, \dots, u_{i-1}, u_i$ , com  $1 \leq i \leq n$  são conhecidos como "SEMENTE (Seet)" de uma simulação, e, na maioria das vezes, são números inteiros e positivos, que podem ser escolhidos pelo próprio simulador ou pelo usuário.

**Observação 3.2.2.** *Se, na simulação, o número inicial (SEMENTE) for escolhido pelo computador, na maioria utiliza-se o relógio interno, que para cada execução do programa será fornecido um número sempre diferente.*

Em alguns ambientes de programação, a condição das operações aritméticas com inteiros deve ter a preocupação com os arredondamentos, pois sempre existe uma

limitação na representação numérica de inteiros positivos. Neste caso, é importante conhecer o maior inteiro positivo  $K$ , de tal maneira que os inteiros que pertençam ao intervalo  $[0, K]$  tenham representação na máquina utilizada (FILHO, 2000). Para toda máquina que utilize registros binários (bits) para a representação dos números inteiros, tem-se um valor mais adequado para esse número  $K = 2^k - 1$  ou  $K = 2^k$  (HIGHAM, 2002)

### 3.2.1.1 Método do gerador meio-de-quadrado

Por volta de 1946, Jonh Von Neumann sugeriu um dos primeiros algoritmos para obter uma sequência de números pseudo-aleatórios, que consiste em uma sequência de inteiros  $u_i = u_1, u_2, u_3, \dots, u_{i-1}, u_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , onde  $1 \leq x_i \leq 10^k - 1$ , que, a partir da sequência  $X$ , obtém-se a sequência  $\bar{x}_i = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i$  de números aleatórios distribuídos de forma uniformemente dentro do intervalo  $(0, 1)$ , e é um número de  $k$  dígitos (decimais segundo a ideia de Neumann). Assim, o valor de  $k$  é sempre escolhido de acordo com a capacidade da máquina de forma que  $K > 10^k - 1$ , que é o maior inteiro que a máquina consegue representar. Os valores da sequência de  $\bar{x}_i$  são gerados pela divisão de  $\bar{x}_i = \frac{u_i}{10^k}$ . Como o intervalo dessa sequência não inclui os extremos 0 e 1, o algoritmo nunca vai obter os valores para  $\bar{x}_i = 0$  e  $\bar{x}_i = 1$ . Os valores dos números da sequência obtida por esse método são gerados a partir dos termos intermediários (centrais) do valor de  $(\bar{x}_{i-1})^2$ . Por exemplo, se para números de  $k = 3$  dígitos, e dando um valor inicial (Semente)  $x_1 = 235$  tem-se que elevando-se ao quadrado e seguindo a operação, obtém-se a seguinte sequência:

$$x_1 = 235 \Rightarrow (235)^2 = 05\mathbf{5225} \Rightarrow x_2 = 522$$

$$x_2 = 522 \Rightarrow (522)^2 = 27\mathbf{2484} \Rightarrow x_3 = 248$$

$$x_3 = 248 \Rightarrow (248)^2 = 6\mathbf{1504} \Rightarrow x_4 = 150$$

$$x_4 = 150 \Rightarrow (150)^2 = 2\mathbf{2500} \Rightarrow x_5 = 250$$

$$x_5 = 250 \Rightarrow (250)^2 = 6\mathbf{2500} \Rightarrow x_6 = 250$$

e assim por diante. Mas, se observar, esse método não é tão confiável, pois, se na geração de um número ao quadrado, os termos intermediários forem zero os demais serão sempre zero ou se os termos intermediários forem iguais, também os demais serão sempre iguais, o que não garante uma boa qualidade na sequência. No processo aplicado, obteve-se uma sequência  $u_i = (235, 522, 248, 150, 250, 250, \dots)$  de

números inteiros e o número aleatório é definido por  $\bar{x}_i = \frac{u_i}{10^k}$ , assim a sequência fica:  $\bar{x}_i = (0,235; 0,522; 0,248; 0,150; 0,250; 0,250, \dots)$

### 3.2.1.2 Método gerador: congruência linear

Um dos primeiros métodos de congruência linear foi proposto por (LEHMER, 1969) para serem usados em simulação de variáveis pseudo-aleatórias. O gerador baseia-se em uma sequência  $x_i$  que é obtida a partir de uma recursão (recorrência linear) da forma  $x_{n+1} \equiv (ax_n + c) \bmod m$ , com  $m, n \geq 0$ . O valor inicial  $x_0$  é chamado de Semente (Seed),  $a$  multiplicador,  $c$  o incremento e  $m$  é o módulo da divisão. Os termos  $x_i$ , com  $0 \leq i \leq n$  da sequência uniforme, são obtidos por  $\bar{x}_i = \frac{x_i}{m}$ . Se para  $c = 0$  o gerador será da forma multiplicativo e caso contrário ( $c \neq 0$ ) aditivo. Se for utilizada, por exemplo, a sequência de números inteiros proposta por (GENTLHE, 1998), na qual, foi gerada utilizando  $a = 12; c = 0; m = 2^5 - 1 = 31$  e uma semente  $x_0 = 9$ , ele obterá, pela congruência linear  $u_{n+1} = (a \cdot u_n + c) \bmod m = 12 \cdot u_n \cdot \bmod 31$ , os seguintes valores:

para  $n = 0 \Rightarrow u_1 = 12 \cdot u_0 \cdot \bmod 31 = 12 \cdot 9 \cdot \bmod 31 = 108 \bmod 31 \equiv 15 \Rightarrow u_1 = 15$   
 para  $n = 1 \Rightarrow u_2 = 12 \cdot u_1 \cdot \bmod 31 = 12 \cdot 15 \cdot \bmod 31 = 180 \bmod 31 \equiv 25 \Rightarrow u_2 = 25$   
 para  $n = 2 \Rightarrow u_3 = 12 \cdot u_2 \cdot \bmod 31 = 12 \cdot 25 \cdot \bmod 31 = 300 \bmod 31 \equiv 21 \Rightarrow u_3 = 21$   
 para  $n = 3 \Rightarrow u_4 = 12 \cdot u_3 \cdot \bmod 31 = 12 \cdot 21 \cdot \bmod 31 = 252 \bmod 31 \equiv 4 \Rightarrow u_4 = 4$   
 para  $n = 4 \Rightarrow u_5 = 12 \cdot u_4 \cdot \bmod 31 = 12 \cdot 4 \cdot \bmod 31 = 48 \bmod 31 \equiv 17 \Rightarrow u_5 = 17$

Seguindo esse raciocínio, obtém-se a sequência:

$u_i = (9, 15, 25, 21, 4, 17, 18, 30, 19, 11, 8, 3, 5, 29, 7, 22, 16, 6, 10, 27, 14, 13, 1, 12, 20, 23, 28, 26, 2, 24, 9, \dots)$  de números inteiros positivos no intervalo  $(0, 31)$ . Pode-se notar que após o termo  $u_{30} = 24$ , a sequência começa a repetição, pois  $12 \cdot 24 \bmod 31 \equiv 9$ . Assim, a sequência de números aleatórios compreendidos no intervalo  $(0, 1)$  é definida dividindo os números da seqência  $u_i$  por  $m = 31$ , então:

$\bar{x}_i = (0.29032, 0.48387, 0.80645, 0.67741, 0.12903, \dots, \bar{x}_{30} = 0.77419, 0.29032, \dots)$ . Neste caso, uma boa escolha de forma adequada para  $a, c$  e  $m$  definirá as características teóricas e empíricas do gerador. Assim, para um  $c \neq 0$ , o gerador terá um período ( $P$ ) máximo  $P = m = 2^k$  e  $P = m = 2^k - 1$  para  $c = 0$ , com  $k$  um número (bits) que é o maior inteiro que a máquina consegue representar.

### 3.2.2 Geradores para geração de variáveis aleatórias

Nesta seção, serão mostrados métodos e procedimentos por meios computacionais para a geração de variáveis aleatórias para algumas das diversas distribuições teóricas de probabilidades. Uma das necessidades pode ser atestada nos sistemas de "filas" e entre outros, pois, nesse caso, poderá sempre estimar o tempo entre chegadas de clientes em um certo tipo de atendimento. Para os serviços, pode-se estimar tempo

de realização ou demandas por cada produto de aceitação ou não no mercado. Pode-se avaliar também a probabilidade de haver prejuízo ao lançar um determinado produto. Neste caso, muitas vezes são elementos que possuem a natureza aleatória e assim necessitam de uma simulação, e sempre mantêm suas características (FILHO, 2008).

Assim, para a geração de números aleatórios terá a necessidade computacional, com base em uma prévia geração de uma sequência de números aleatórios ( $NA$ ) de forma uniforme distribuído no intervalo  $(0, 1)$ . Neste caso, a partir de um gerador (métodos) será gerado uma sequência  $X_i$  de variáveis aleatórias dentro de um determinado intervalo  $[a, b]$ , com função de densidade de probabilidade  $f(x)$  para contínuo e  $p(x)$  para discreta. Para a geração de variáveis aleatórias tem a existência de pelo menos cinco métodos básicos, que são: transformação inversa, transformação direta, convolução, aceitação/rejeição e propriedades especiais. O tipo de distribuição e da eficiência que busca o método no processo, interfere na geração dessas variáveis. Neste trabalho não há preferência em detalhes dos métodos em particular, mas neste caso, tem-se a ideia de como será a escolha da distribuição de probabilidade para mostrar a forma como se apresenta, e para que tenha uma visão em qual programa utilizar.

### 3.2.2.1 Distribuição discreta: distribuição de Poisson

Dentro de inúmeras distribuições teóricas para variáveis aleatórias discretas possíveis de serem geradas de formas pseudo-aleatórias, dentre elas: geométrica, Poisson e Empírica discreta, mas para esse trabalho, detalhar-se-á o procedimento associado apenas à distribuição de Poisson. A distribuição de Poisson expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo, desde que estes eventos ocorram independentemente de quando ocorreu o último evento. Assim, a probabilidade da variável  $X$  em  $k$  sucessos no intervalo de tempo  $t$  ocorrer é definida pela equação  $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$ , com  $\lambda$  um número real, igual ao número esperado de ocorrências que ocorrem num dado intervalo de tempo e  $e$  é base do logaritmo natural ( $e = 2,71828\dots$ ). Assim, para essa distribuição, o tratamento computacional em geração de uma variável aleatória por Poisson, tendo, como uma aplicação do método da aceitação/rejeição, que:

- a) considerar  $n = 0$  e  $P(X) = 1$ ;
- b) por meio de um método gerar um número aleatório  $\bar{x}_i$  e substituir  $P(X)$  por  $P(X) \cdot \bar{x}_i$ ;

- c) Se  $P(X) < (\lambda)^{-\lambda t}$ , aceitar  $X = n$ , caso contrário, rejeitar  $n$  atual, fazer  $n = n + 1$  e repetir os passos do item  $b$ .

Neste caso, há uma ideia dos métodos em testar sua aceitação/rejeição para ser gerado. Assim, pode-se verificar uma necessidade de se gerar mais números aleatórios para serem utilizados na geração de uma única variável, pois, nem sempre os valores aleatórios que são gerados satisfarão a condição dada.

O método de Poisson, para uma longa simulação, no caso de uma aplicação em que o valor esperado  $\lambda = 15$ , a ineficiência computacional é muito grande, neste caso, a distribuição normal torna-se mais adequada para simulação computacional para ter uma boa aproximação (LAW; E., 1991).

### 3.2.2.2 Geração de distribuição contínua : Distribuição uniforme

Dentre inúmeras distribuições contínuas, com possibilidades pseudoaleatórias de serem geradas, tais como: triangular, exponencial, normal e uniforme. Nesse caso, para efeito de entendimento deste trabalho, apresentar-se-á em particular, os procedimentos apenas do método da distribuição uniforme.

Dada uma sequência  $X_n$  de variáveis aleatórias, uma variável aleatória  $X_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , tem sua distribuição uniforme sobre um intervalo  $[a, b]$ , se a sua função densidade de probabilidade (FDP) for dada por:  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ , com  $a \leq x \leq b$ . Dentre as técnicas utilizadas para obter uma variável aleatória  $X_i$  uniformemente distribuída no intervalo é a da transformação inversa, que é definida como:

$X = a + (b - a) \cdot [NA](\bar{x}_i)$ , sendo,  $a, b$  os extremos do intervalo e  $[NA](\bar{x}_i)$ . Para esse método, tem-se como parâmetros apenas os valores extremos do intervalo, pois os passos devem ser considerados:

- primeiramente gerar um número aleatório  $[NA](\bar{x}_i)$  por um método adequado;
- obter uma sequência de variável  $X = a + (b - a) \cdot [NA](\bar{x}_i)$ .

Nota-se que nesse método não há necessidade de um teste para sua aceitação/rejeição, pois, para quaisquer números aleatórios gerados, a variável aleatória  $X_i$  estará distribuída de forma uniforme no intervalo  $[a, b]$ .

### 3.2.3 Software para geração de números aleatórios

Como visto, o Método Monte Carlo-MMC consiste basicamente em um método totalmente estatístico, com previsões probabilísticas de tal evento ocorrer em um determinado experimento, pois o Método Monte Carlo tem a ideia de simulação. A

ajuda de um "Software" vai permitir simular qualquer processo, em que a solução dependa de fatores aleatórios.

Assim, os programas (software) servirão para gerar aleatoriamente  $\bar{X}_i$  sucessivos números aleatórios em tempo rápido (curto) para uma geração de variável aleatória, a fim de que sejam feitos "testes" contra um modelo de probabilidade (distribuição de função de probabilidade) adequada, para que seja dada como retorno de uma estimativa, o qual é sempre inversamente proporcional ao número de interações. Neste caso, o erro padrão ( $EP$ ) =  $\xi$  é dado pela equação :  $\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ , onde  $\sigma$  é o desvio padrão da variável aleatória  $\bar{X}_i$  e  $N$  o número de interações. Como é definido um erro estimado, e não se pode medir o tamanho da magnitude desse erro, assim, constrói-se um intervalo de confiança  $I_C$ , baseados numa distribuição amostral para esse estimador. Assim, por exemplo, um intervalo de 95% de confiança, a partir de uma escolha de uma amostra com sua média amostral  $\bar{\mu}_{x_i}$  e admitindo-se que  $\sigma_{\bar{x}_i}$  é dado pelo intervalo:

$$I_C = (\bar{\mu}_{x_i} - 1,96\sigma_{\bar{x}_i}, \bar{\mu}_{x_i} + 1,96\sigma_{\bar{x}_i}) \quad (3.3)$$

Mesmo com esse percentual de confiança, o intervalo pode ou não conter o parâmetro  $\mu = E(x)$  (BUSSAB; MORETTIN, 2003).

Pode-se perceber que, quanto maior o número de interações, menor será o erro em torno de um valor (média). Atualmente, existem no mercado inúmeros "Software" para a geração de números aleatórios, como, por exemplo: Random Number Generator - RNG<sup>5</sup>. Com **Random Number Generator**, o usuário gerará números aleatórios em diversas áreas e finalidades. Os números gerados aleatoriamente poderão ser editados e copiados para uma área de transferência e colados em outros aplicativos para a realização da simulação de uma determinada amostra. Para o entendimento do Método Monte Carlo-MMC, foram desenvolvidos dois programas em *python* "Pi1" e "Pi2" com o mesmo propósito para a estimativa do valor de  $\pi$ , sendo que o primeiro mostra, conforme o número de interações, o valor estimado para  $\pi$ ; enquanto o segundo, além do valor de  $\pi$ , mostra também em um gráfico que quanto maior o número de interações, mais próximo do valor se aproxima. Os dois códigos para a compilação do valor encontram-se no ANEXO deste trabalho.

Assim, para todos os tipos de escolha de um *Software*, a geração de números aleatórios é válida para o Método Monte Carlo-MMC como um todo. Neste caso, por ser um programa de fácil acesso e manipulação, um gerador para a simulação é a utilização do Microsoft Excel, pois, a princípio, o Microsoft Excel já tem em sua base um bom gerador de números randômicos, que pode ser gerado através de uma função "**=ALEATÓRIO()**", na qual gerará um número pseudo-aleatório entre 0 e 1. Neste caso, essa função "**=ALEATÓRIO()**" é uma função de distribuição de probabilidade distribuída

<sup>5</sup> software livre, disponível em: <http://randomnumbergenerator.intemodino.com/pt/gerador-de-numeros-aleatorios.html>.

uniformemente no intervalo  $]0, 1[$ . Além desta função, o Microsoft Excel possui outros tipos de distribuição, tais como:

a) Distribuição uniforme contínua:

$$= a + (b - a) * ALEATÓRIO();$$

b) Distribuição Normal ou de Gauss:

$$= INV.NORM.(ALEATÓRIO()); \mu; \sigma);$$

c) Ou pela barra de "ferramentas" pela opção "Dados", "Análise de dados" e "Geração de número aleatório", dentro dessa opção é só escolher qual o tipo de distribuição adequada para ser gerada.

### 3.3 APLICAÇÕES DO MÉTODO MONTE CARLO-MMC

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações com o uso do Método Monte Carlo-MMC como uma ferramenta de análise de problemas através de simulação com o emprego de um *Software*. As aplicações serão na área da Matemática, Ciências Sociais: Economia, Física e Ciências Médicas: Medicina e Saúde.

#### 3.3.1 Matemática

Serão apresentados dois métodos para aproximação do valor do  $\pi$  (apesar de ser um experimento determinístico) através de um programa desenvolvido para mostrar o método da "Agulha de Buffon" e dois programas desenvolvidos em *python* para fins de mostrar a aproximação por lançamento de dardos em um alvo circular de raio unitário inscrito em um quadrado, e uma aplicação para mostrar a sua aplicabilidade para aproximar o cálculo de área de figuras através de uma fotografia.

##### 3.3.1.1 Aproximação do valor de $\pi$

Na matemática, o número  $\pi$  é uma proporção numérica que tem origem na relação entre o comprimento (perímetro) de uma circunferência e seu diâmetro; por outras palavras, se uma circunferência tem perímetro  $C$  e diâmetro  $D$ , então o valor de  $\pi$  tem um valor aproximado definido pela razão entre seu perímetro e seu diâmetro, ou seja,  $\pi \sim \frac{C}{D}$ .

Diante das buscas em encontrar as aproximações adequadas para o valor de  $\pi$ , existem  $n$  formas de se obter a aproximação de  $\pi$ , que seja através de métodos numéricos. Neste caso, considera-se  $\pi$  um número irracional e transcendente, de forma que todos os métodos utilizados para o valor desse número irracional sempre serão por

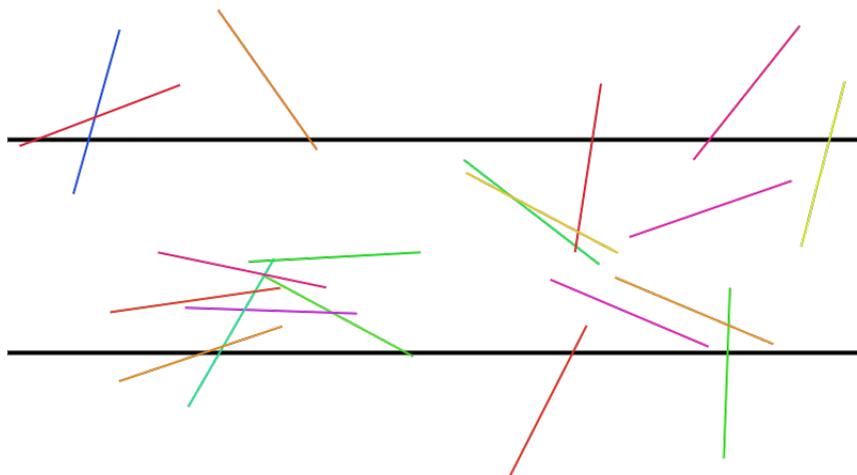
aproximações, aproximações sucessivas e/ou séries infinitas de somas, multiplicações e divisões.

Os métodos apresentados consistem basicamente em gerar aleatoriamente  $N$  sucessivos pontos aleatórios através dos programas desenvolvidos que serão então "testados" em um modelo desenvolvido para tal fim. Os dois programas levam basicamente ao mesmo resultado. O primeiro método será o da "Agulha de Buffon" e o do lançamento de dardos em um alvo.

Agulha de Buffon:

Dentre os problemas mais antigos de probabilidade e geometria, encontra-se o problema da "Agulha de Buffon", que foi enunciado pela primeira vez em 1777, que tem como envolvimento o lançamento aleatório de agulhas num plano com  $n$  linhas paralelas (ver Figura 17), com o principal objetivo de calcular a probabilidade da agulha cruzar uma das linhas (COSTA et al., 2002, p. 4).

Figura 17: Lançamento de agulhas num plano.

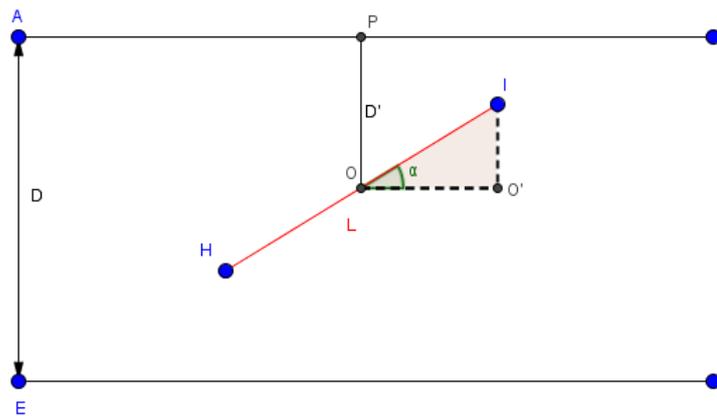


Fonte: (CARVALHO, 2016).

Neste caso, o matemático e naturalista francês Conde de Buffon tinha o grande interesse em saber qual era a probabilidade de uma agulha de comprimento  $L$  quando lançada em um plano com  $n$  retas paralelas de mesma distância  $D$  de tocar uma

dessas retas (com  $L \leq D$ ). Assim, ao lançar uma agulha (de comprimento  $L$ ), em um plano, pode-se observar a ocorrência de duas variáveis:  $D'$ , a distância do centro da agulha a uma das retas mais próxima, e um ângulo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ) em que a agulha cai, formando um ângulo com uma reta passando pelo seu centro e paralela às retas do plano. Neste caso, pode-se perceber facilmente que a distância  $D'$  ( $0 \leq D' \leq \frac{D}{2}$ ) terá um valor máximo sempre menor ou igual a  $\frac{D}{2}$ . Ver gráfico (18) para verificar a definição.

Figura 18: Agulha de Buffon de comprimento  $L$  num plano.



Fonte: O autor, 2016.

Diante da situação apresentada da agulha no plano, sabe-se definir bem se ocorreu ou não o toque da agulha com uma das linhas paralelas. Ao analisar o que já foi formulado, tem-se que a agulha no plano tem as configurações de um ponto no plano e pode-se ter a situação de conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  do conjunto  $(0, \frac{D}{2}) \times (0, \pi)$ . Na figura (18), considerando o  $\triangle OO'I$  retângulo em  $O'$ , pode-se notar que:

- o segmento  $\overline{OI}$  mede  $\frac{L}{2}$  e é definido como hipotenusa do triângulo retângulo  $OO'I$ ;
- o segmento  $\overline{O'I}$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ .

Como o seguimento  $\overline{O'I}$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ , então pela definição trigonométrica de seno do ângulo  $\alpha$ , tem-se que:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{O'I}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{O'I}}{\frac{L}{2}} \Rightarrow \overline{O'I} = \frac{L}{2} \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Diante de todas as condições, o problema é basicamente definir para qual valor do ângulo  $\alpha$  a agulha cruza ou toca umas das retas paralelas. Pelo que foi definido, pode-se notar que essa agulha só vai cruzar ou tocar umas das retas quando o valor da distância  $D'$  for sempre menor que a distância  $\overline{O'I}$ , neste caso, quando o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  for sempre maior que a distância do centro da agulha a umas das retas

paralelas. Assim, a agulha só vai tocar ou cruzar umas das retas paralelas, em uma linguagem Matemática, quando:  $D' \leq \frac{l}{2} \cdot \text{sen}(\alpha)$ . Neste caso, "Buffon" conseguiu mostrar que a probabilidade de uma agulha tocar ou cruzar umas das retas ficou definida pela expressão:  $p = \frac{2L}{\pi D}$ , denominada de probabilidade geométrica, pois a sua demonstração tem como conceito de integral, já que foge do ensinamento na educação básica. Caso o leitor queira verificar como foi definida a probabilidade, essa demonstração encontra-se nos artigos de (COSTA et al., 2002) e (LINS, 2004) de forma clara e objetiva. A partir do experimento de "Buffon", Pierre Simon Laplace<sup>6</sup> viu no experimento a possibilidade de estimar o valor de  $\pi$ , pois se tem que no lançamento de agulhas, a probabilidade é definida por:

$$p = \frac{2L}{\pi D} \quad (3.4)$$

Mas se tem também que em  $N$  lançamentos e  $k$  sucessos de que essas agulhas toquem ou cruzem uma das retas, logo, pode-se definir também que a probabilidade pode ser definida como sendo a razão entre o número de sucessos e o números de lançamentos, assim:

$$p = \frac{k}{N} \quad (3.5)$$

Neste caso, substituindo o valor de  $p$  da equação (3.5) em (3.4), tem-se:

$$\frac{k}{N} = p = \frac{2L}{\pi D} \quad (3.6)$$

Resolvendo a equação (3.7) tem-se que:

$$\frac{k}{N} = p = \frac{2L}{\pi D} \Rightarrow \pi \approx \frac{2NL}{Dk} \quad (3.7)$$

Com a utilização do programa<sup>7</sup> desenvolvido a fim de simular a estimativa do valor de  $\pi$  utilizando o método da "Agulha de Buffon", foram feitos 4 interações com 300, 1000, 12000 e 100000 lançamentos de agulhas respectivamente, utilizando uma distância de  $1u.m$  e uma escala para a agulha em 0.8, foram obtidas as seguintes aproximações para  $\pi$ , conforme figuras e a tabela (3)abaixo:

- 1) No lançamento de 300 agulhas, o número de agulhas que tocou ou cruzou umas das retas foram num total de 160, com um valor estimado para  $\pi \approx 3$ ;
- 2) Para o lançamento de mil agulhas, o número que tocou ou cruzou uma das retas foram num total de 525, com um valor estimado para  $\pi \approx 3,047619$ ;
- 3) Para o lançamento de doze mil agulhas, o número que tocou ou cruzou umas das retas foram num total de 6107, com um valor estimado para  $\pi \approx 3,143933$ . Pode-se

<sup>6</sup> **Pierre-Simon**, Marquês de Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 de março de 1749 — Paris, 5 de março de 1827) Matemático, astrônomo e físico francês

<sup>7</sup> Disponível em: <http://www.projeto.siud.com.br/>

notar que esta interação já possui um número até razoável de lançamentos, e para uma estimativa de 2 duas casas decimais, o aluno, já pode perceber que conforme a quantidade de lançamentos, o programa gerará um valor estimado bem próximo do valor conhecido;

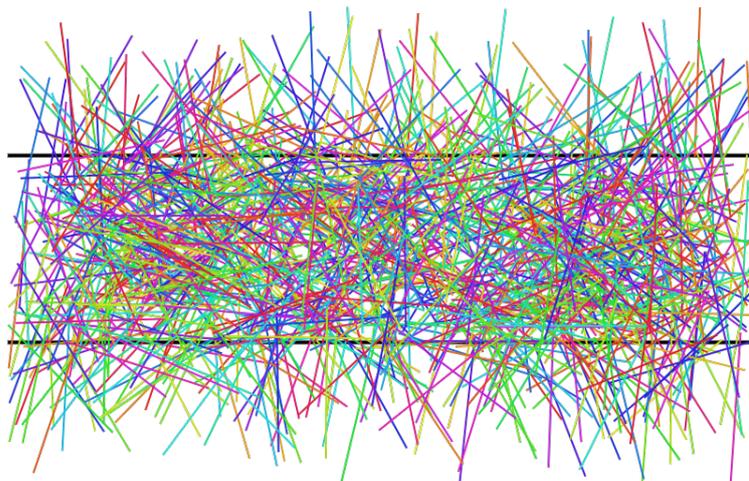
- 4) Para o lançamento de cem mil agulhas, o número que tocou ou cruzou uma das retas foi num total de 50898, com um valor estimado para  $\pi \approx 3,143541$ .

Figura 19: Lançamento de 300 agulhas no plano.



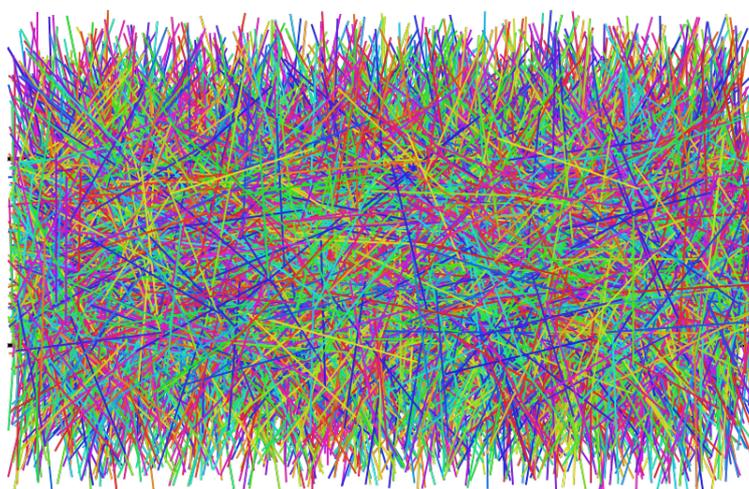
Fonte: (CARVALHO, 2016).

Figura 20: Lançamento de 1000 agulhas no plano.



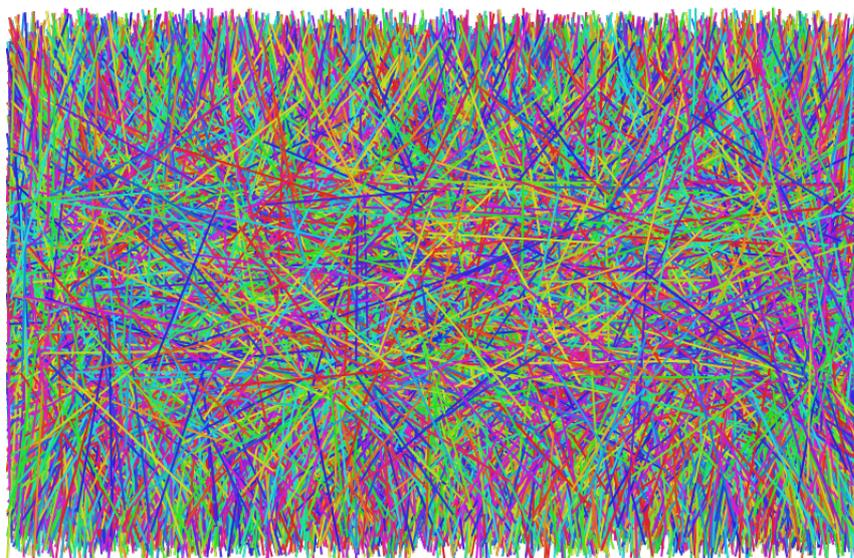
Fonte: (CARVALHO, 2016).

Figura 21: Lançamento de 12000 agulhas no plano.



Fonte: (CARVALHO, 2016).

Figura 22: Lançamento de 100000 agulhas no plano.



Fonte: (CARVALHO, 2016).

Tabela 3: Método: agulha de Buffon.

N	K = sucessos	estimativa de $\hat{\pi}$	erro ( $\hat{\pi} - \pi$ )
300	160	3,00	-0,141592
1000	525	3,047619	-0,093973
12000	6107	3,143933	0,002341
100000	50898	3,143541	0,001949

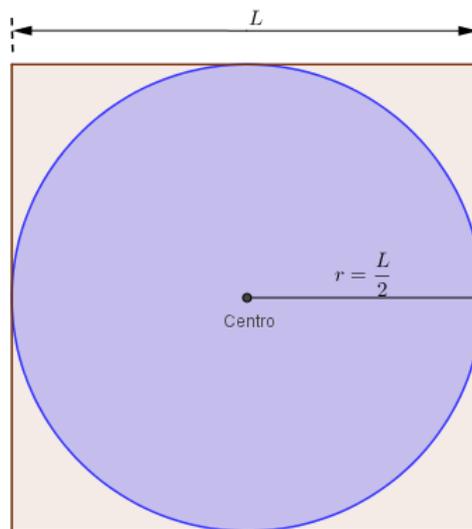
Fonte: Autor, 2016

Para esse experimento, com uma escala da agulha em 0.8 o valor para  $\pi$  é percebido com lançamentos a partir de 10000, sendo que para uma outra escolha da escala da agulha, por exemplo 0.5, as interações acima possuirão outras estimativas. Para que possa ter uma boa estimativa, deverão ser feitos lançamentos superiores a 100000.

Método do círculo:

O experimento consiste em lançar **dardos** em um quadrado de lado  $L$  com o objetivo de acertar um alvo circular inscrito com o espaço amostral definido em  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq \frac{L}{2}\}$ . Neste caso, tomemos um quadrado de lado  $2 \text{ u.m}$  conforme ( Figura 23).

Figura 23: Método do círculo.



Fonte: Autor, 2016

Assim, considerando que todos os dardos lançados atinjam o alvo, tem-se que a probabilidade de que o alvo seja acertado é dada pela razão entre as áreas do círculo e do quadrado, ou seja:  $\frac{A_c}{A_q} = p$ . Sabe-se, que a área de um círculo de raio  $r$  é definida por:  $A_c = \pi \cdot r^2$ , e a área do quadrado de lado  $L$  por  $A_q = L^2$ . Como o quadrado é de lado  $L = 2$ , então o raio do círculo fica  $r = 1$ . Nesse caso, a probabilidade fica determinada por:

$$p = \frac{A_c}{A_q} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (3.8)$$

Considerando que em  $N$  lançamentos pode-se obter  $k$  sucessos de acertar o alvo, então tem-se uma probabilidade frequentista definida por:  $p = \frac{k}{N}$ . Neste caso, pelo método do círculo, pode-se estimar o valor de  $\pi$ , pois se considerarmos o experimento em lançar  $N$  dardos no alvo, pode-se contar quantos desse atingem o círculo, assim substituindo  $p = \frac{k}{N}$  na equação (3.8) obtém-se:

$$\frac{k}{N} = \frac{A_c}{A_q} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{k}{N} \quad (3.9)$$

Para o experimento, foram desenvolvidos dois programas na linguagem *python*<sup>8</sup> para a estimativa de  $\pi$ , na qual foram considerados dois conjuntos  $A = [-1, 1]$  e  $B = [-1, 1]$ , um ponto  $P$  para o alvo (quadrado), nesse caso o ponto  $P$  é um par ordenado  $(x, y)$  tal que  $P = \{(x, y) \in AxB | x \in A \text{ e } y \in B\}$ , já para os pontos do círculo, têm a forma de:  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

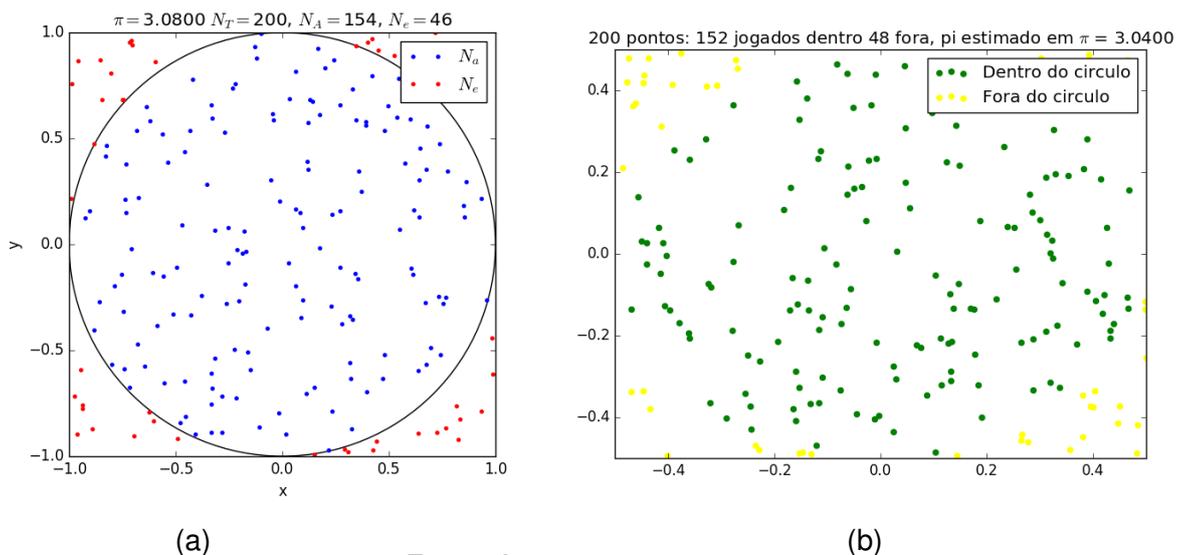
Neste caso, ao fazer  $N$  lançamentos no alvo, o programa gera  $n$  pares de pontos  $P_i$  da forma  $(x, y)$  com as variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  de forma distribuída uniformemente no intervalo  $[-1, 1]$ , sendo que a variável gerada possui a distribuição de Bernoulli  $P(x, y)$ , definida como:

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{para } \textit{fora do círculo}, \\ 1, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Neste caso, a aproximação (estimativa) para  $\pi$  será dada por:  $\hat{\pi} = 4 \cdot \frac{k}{N} = 4 \cdot E(P)$ , com  $E(P)$ , a esperança matemática de  $P$ .

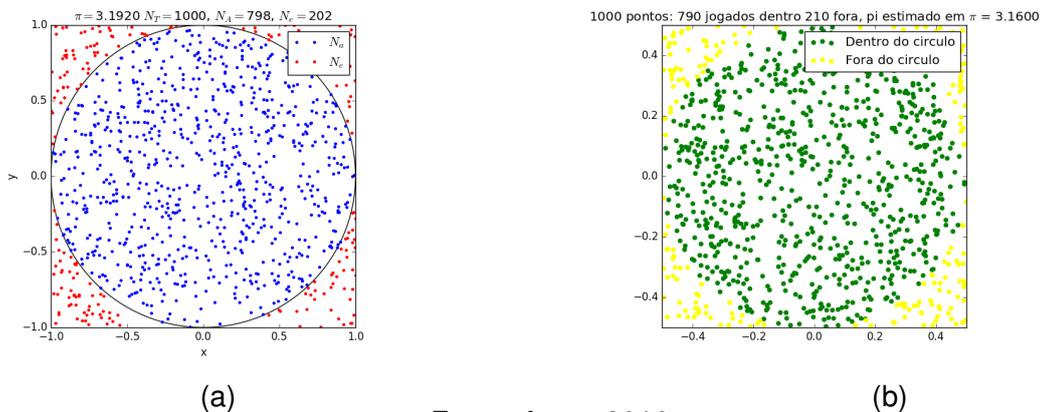
Com a utilização dos programas  $Pi1$  e  $Pi2$  que foram desenvolvidos para fazer a estimativa do valor de  $\pi$  no método do círculo, foram feitas as simulações com 200, 1000, 8000, 12000 e 100000 lançamentos de dardos nos dois programas representados em (a) e (b) respectivamente dos programas  $Pi1$  e  $Pi2$ , conforme gráficos representados pelas figuras e o quadro da tabela (4) abaixo:

Figura 24: 200 dardos lançados no alvo.



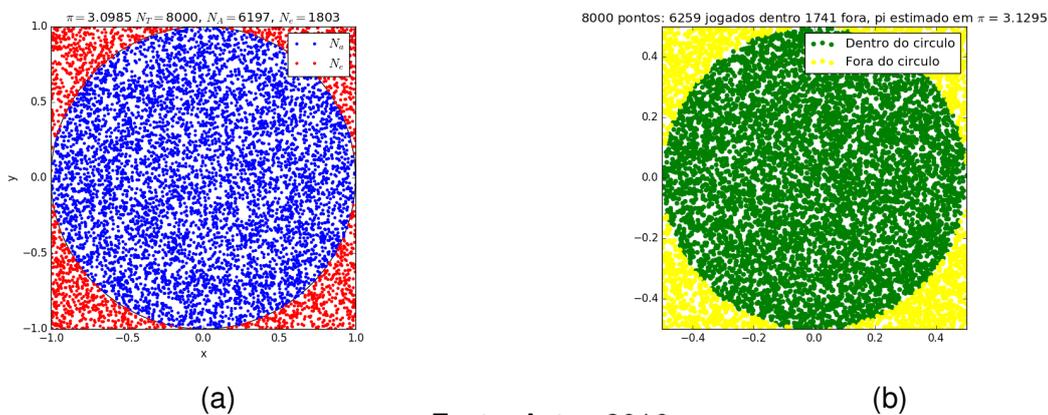
<sup>8</sup> O código fonte dos dois programas encontra-se em anexo deste trabalho.

Figura 25: 1000 dardos lançado no alvo.



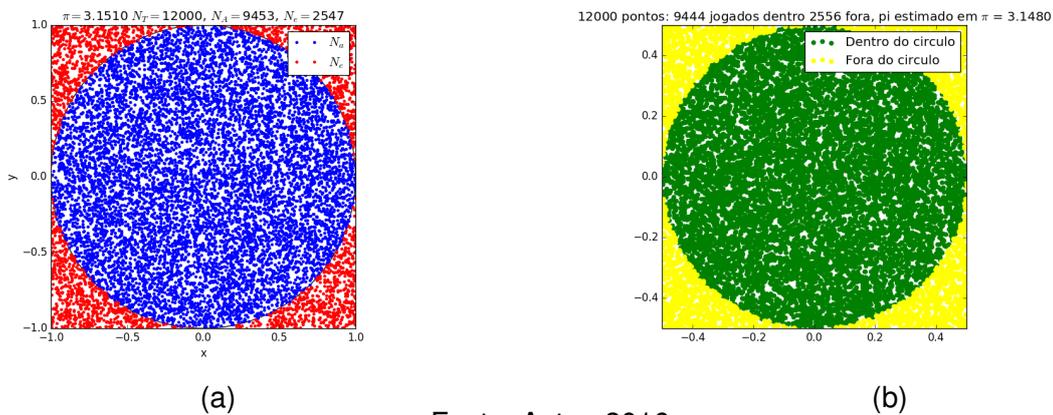
Fonte: Autor, 2016.

Figura 26: 8000 dardos lançados no alvo.



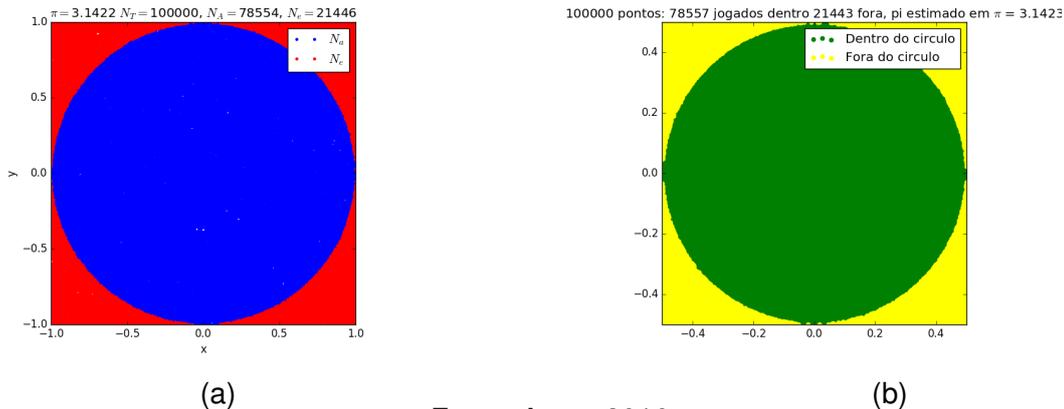
Fonte: Autor, 2016.

Figura 27: 12000 dardos lançados no alvo.



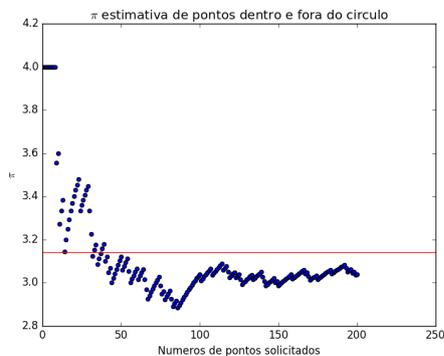
Fonte: Autor, 2016.

Figura 28: 100000 dardos lançados no alvo.



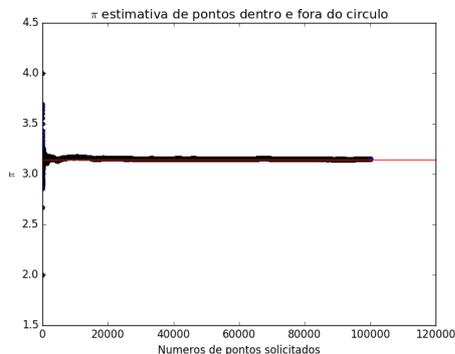
Fonte: Autor, 2016.

Figura 29: Comportamento dos pontos em torno do valor de  $\pi$  com 200 lançamentos.



Fonte: Autor, 2016

Figura 30: Comportamento dos pontos em torno do valor de  $\pi$  com 100000 lançamentos.



Fonte: Autor, 2016.

Tabela 4: Método: Círculo

$N$	$K = (Pi1)$	$\hat{\pi} (Pi1)$	$\text{erro}(Pi1)=(\hat{\pi} - \pi)$	$K = (Pi2)$	$\hat{\pi} (Pi2)$	$\text{erro}(Pi2)=(\hat{\pi} - \pi)$
200	154	3,0800	-0,0615	152	3,0400	-0,1015
1000	798	3,1920	0,0505	790	3,1600	0,0185
8000	6197	3,0985	-0,0430	6259	3,1295	-0,0112
12000	9453	3,1510	0,0095	9444	3,1480	0,0065
100000	78554	3,1422	0,0007	78557	3,1423	0,0008

Fonte: Autor, 2016

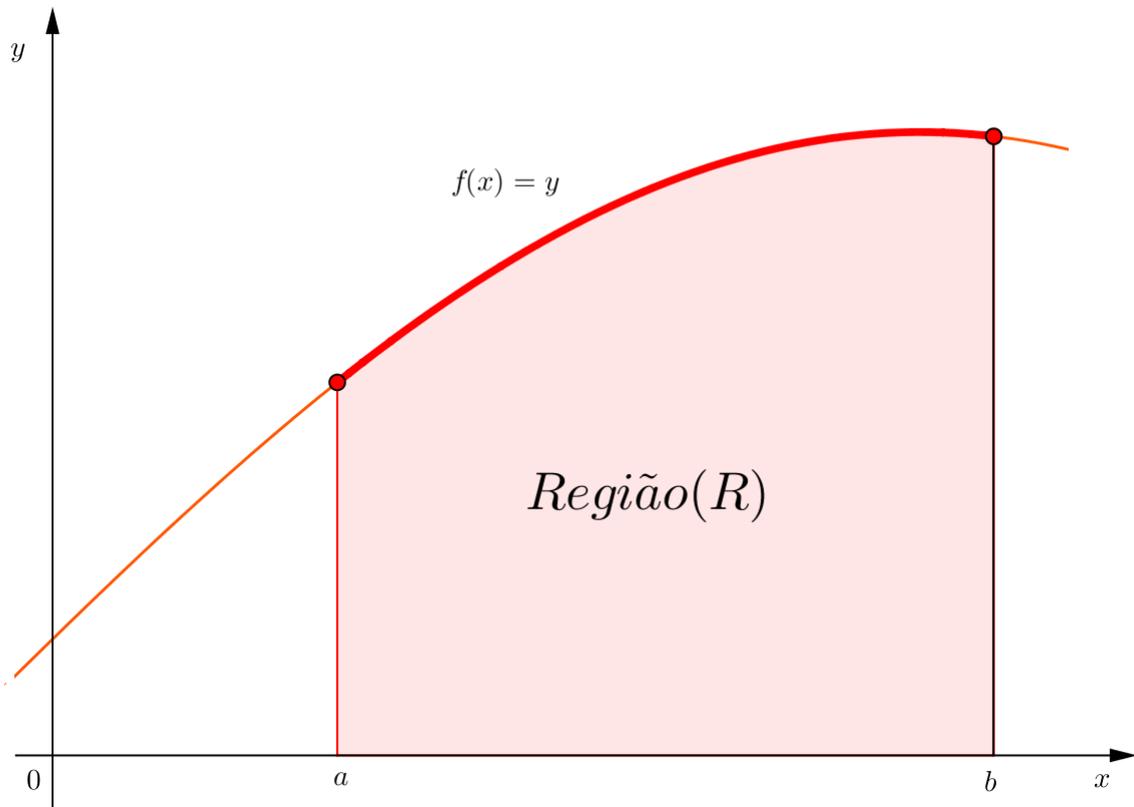
Nos dois casos, para a aproximação do valor de  $\pi$ , pode-se perguntar para que fazer a simulação, pois já é um experimento determinístico e já existem cálculos para determinar o valor de  $\pi$  de forma correta. Neste caso, o que importa no ensino de probabilidade é que isso ocorre de tal forma que os estudantes têm a chance de verificar situações em que, para determinados experimentos, há maneiras distintas desses eventos serem explorados para que possa ser verificada a aleatoriedade, variação, incertezas e as previsibilidades que ocorrem dentro do estudo da Probabilidade. No sentido das imulações apresentadas, o valor de 100000 interações para o Método Monte Carlo não é muito significativo, porém o valor estimado do valor de  $\pi$  nas simulações não foi o suficiente ser tão real do valor real de  $\pi$ , apesar das simulações serem feitas com poucas interações, pode-se perceber que a aproximação converge para um valor real de  $\pi$ .

### 3.3.1.2 A ideia para a aproximação do cálculo de áreas de figuras

Nesta subseção será apresentada uma ideia de como calcular a área de uma figura sob uma região formada por uma função dada com uma aproximação do valor dessa área pelo Método Monte Carlo e verificado pela definição clássica (aplicação da integral definida). Também baseado no trabalho de (COURA, 2014) será apresentada, como sugestão, uma técnica para aproximar a área de uma região formada por uma figura cuja função matemática é desconhecida.

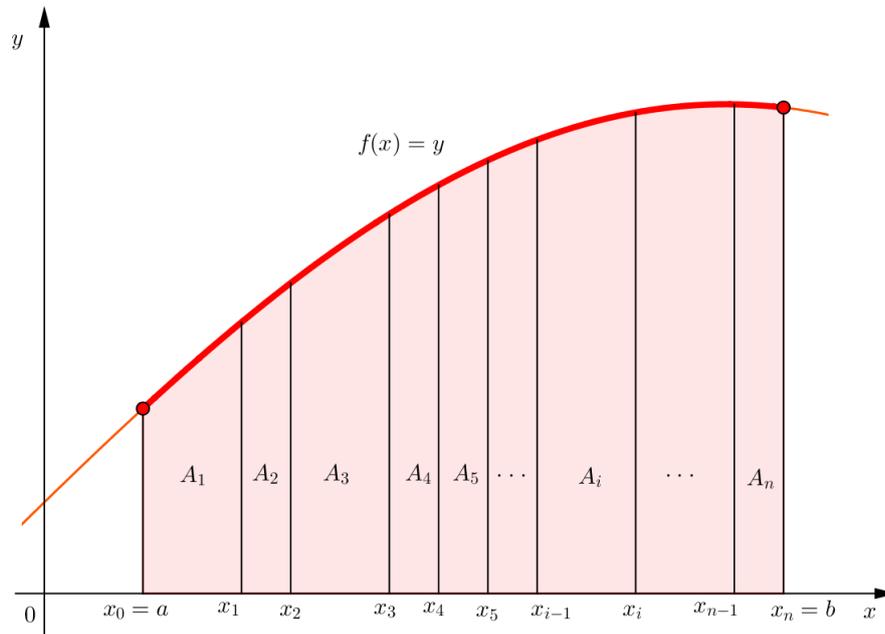
De acordo com (STEWART, 2011) ao tentar resolver um problema para encontrar o valor da área de uma região  $R_S$  que se encontra definida por uma curva do tipo  $f(x) = y$  em um intervalo  $[a, b]$ , conforme mostra (Figura 31) abaixo, ela está definida por uma função contínua ( $f(x) \geq 0$ , e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  ambas paralelas ao eixo das ordenadas.

Figura 31: Área definida por uma curva.



Fonte: Autor, 2016.

Assim, a área da região limitada no intervalo  $[a, b]$  é formada pelo conjunto  $S_R = \{(x, y) | x \in [a, b] \text{ e } y \in [0, f(x)]\}$ . No caso em que a região é formada por lados retos é fácil definir a sua área, por exemplo: no cálculo da área de uma região  $R$  definida por um retângulo de base ( $b$ ) e altura ( $h$ ), tem-se sua área definida pelo produto da base pela altura, ou seja,  $S_r = b \cdot h$ ; já para os polígonos pode ser obtida dividindo em triângulos, pois a área do triângulo é a metade da base ( $b$ ) pela altura ( $h$ ), assim  $S_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$  ou por outra equação que defina a área de um triângulo, assim tem-se que a área do polígono é a soma das áreas dos triângulos, ou seja,  $S_P = \sum_{i=1}^n S_{\Delta_i}$ . Para as figuras de regiões  $R$  irregulares com seus lados em forma de curvas, tem-se uma ideia da estimativa para a sua área conforme (Figura 32), que neste caso, basta subdividir o intervalo  $[a, b]$  de comprimento  $L = b - a$  em  $N$  faixas com  $K$  subintervalos  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ , com comprimentos iguais a  $\Delta_{L_i} = x_i - x_{i-1}$  e  $\Delta_{L_n} = \frac{b-a}{N}$  para as faixas com mesmo comprimento.

Figura 32: Divisão do intervalo  $[a, b]$  em  $N$  faixas.

Fonte: Autor, 2016.

Pode-se notar que a área total da região  $R$  da figura é dada pela soma de todas as subáreas  $A_i$ , assim:

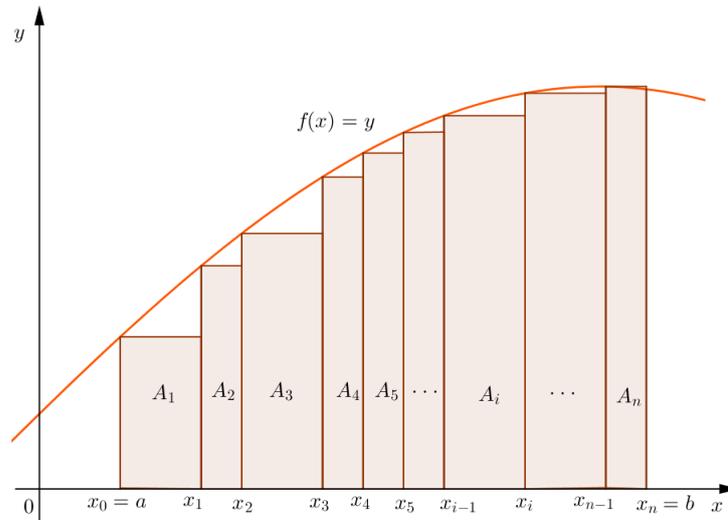
$$S(R) = \sum_{i=1}^n A_i$$

Como a região  $R$  foi dividida em  $N$  subintervalos (faixas) de mesma largura, pode-se estimar um valor para a área com base em figuras conhecidas, como, por exemplo, formando retângulos. Neste caso, os retângulos formados possuem como base ( $\Delta_L = \frac{b-a}{N}$ ) com alturas  $H$ , as extremidades de  $f(x_i)$  dos subintervalos.

Para os triângulos formados pelas alturas de extremidades  $f(x_i)$  à esquerda (Figura 33), a área estimada dessa região  $R_{interna}$  é menor que a área total da região  $R$ ; já a área dos triângulos de extremidades à direita (Figura 34) possui uma área maior que a região  $R$ , assim se pode afirmar que a área da região  $R$  tem um valor estimado no intervalo  $[R_{interna}, R_{externa}]$ . Como nos dois casos são conhecidas suas dimensões, logo a área de cada retângulo é definida por:

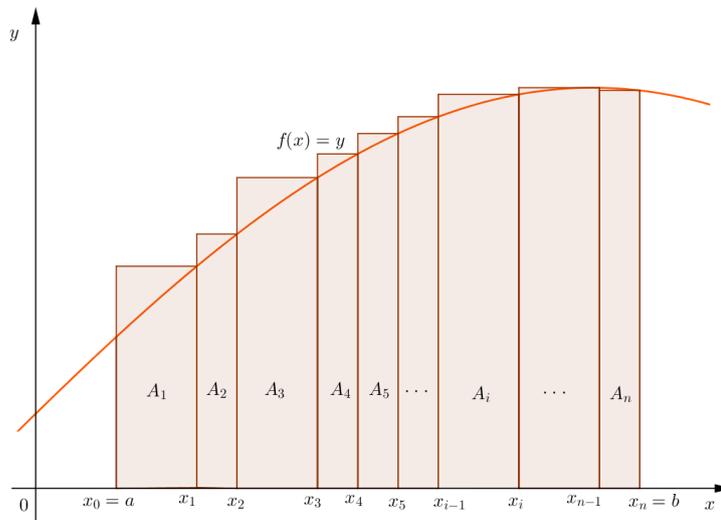
$$S(A_i) = \left(\frac{b-a}{N}\right) \cdot f(x_i). \quad (3.10)$$

Figura 33: divisão em retângulos de alturas  $f(x_i)$  de extremidades esquerda.



Fonte: (STEWART, 2011) Adaptado.

Figura 34: divisão em retângulos de alturas  $f(x_i)$  de extremidades direita.



Fonte: (STEWART, 2011) Adaptado.

Neste caso, a área estimada para a região  $\bar{R}_i$  formada pelos retângulos de base  $(\frac{b-a}{N})$  e altura  $f(x_i)$  é dada por:

$$S(\bar{R}_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{N}\right) \cdot f(x_i) \tag{3.11}$$

com  $x_i$  a extremidade  $f(x_i)$  esquerda ou direita do retângulo. Assim, para quaisquer

números de subintervalos (faixas), a área da figura definida pela região  $R$  tem seu valor estimado sempre no intervalo:  $A(\bar{R}_{internos}) \leq S(R) \leq A(\bar{R}_{externos})$ . Pode-se notar que quanto maior o número de interações (subdivisão em subintervalos), as áreas das regiões geradas pelos retângulos inferiores e superiores tendem a serem iguais e assim se aproxima do valor estimado da área da região  $R$  gerada pela função  $f(x) = y$ . E que, para toda interação, a área está em algum lugar do intervalo das áreas inferiores e superiores, que para  $N$  faixas todos os valores ficaram em torno da média dos intervalos, assim a área tem seu valor estimado pela média aritmética simples do intervalo, ou seja,  $S(R) = (\frac{\bar{R}_{internos} + \bar{R}_{externos}}{2})$ , que a ideia de estimar a área da região neste caso é dada pelo uso da ("probabilidade Geométrica")<sup>9</sup>, pois nesse caso pode-se fazer uma análise de possibilidades do evento (encontra a área) por método geométrico, tais como: por pontos lançados ou por blocos de regiões de mesma área e definir a partir dessas informações para chegar a uma estimativa da área de uma região formada por uma determinada função  $f(x) = y$ .

A ideia de área como soma das áreas definidas pela divisão da região  $R$  em subdivisões em faixas (subintervalos), conforme gráfico (32) permite dar uma definição preliminar de maneira informal de integral definida para o cálculo dessa área pelo método clássico.

**Definição 3.3.1.** *Dada uma região  $R$  formada por uma função  $f(x)$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , a área  $S(R)$  é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximados:*

$$S(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \left( \frac{b-a}{N} \right) \quad (3.12)$$

**Definição 3.3.2 (Integral Definida).** *Seja uma função  $f(x)$  contínua no intervalo  $[a, b]$ . Então a soma das áreas sob o gráfico da função  $f(x)$  no intervalo é denotado por  $\int_a^b f(x)dx$  (MUNEM; FOULIS, 1982). Logo tem-se que  $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \left( \frac{b-a}{N} \right)$  (Figura 32).*

Sendo que a expressão  $\int_a^b f(x)dx$  é denominada como a integral definida de  $a$  até  $b$  de  $f(x)dx$ , e a função é chamada de integrando, e os valores de  $a$  e  $b$  do intervalo são chamados de limites inferior e superior. Neste caso, o uso de limite não significa de estar se tratando do limite de uma função. Por ser tratar de um tema até então desconhecido para os estudantes do ensino básico, técnico e tecnológico, o estudo de integral ficará apenas nas definições preliminares com ideia básica de áreas, pois a

<sup>9</sup> Em problemas de probabilidade geométrica, os possíveis acontecimentos podem ser representados por pontos de um segmento de reta, por figuras planas, por áreas ou ainda por sólidos. Desde que o número desses acontecimentos seja usualmente não contável, assim a probabilidade usual é razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Mas, pode-se ainda definir essa probabilidade de um evento de uma maneira natural e calculá-la por meio de considerações geométricas.

notação da integral definida se assemelha com a definição de integral indefinida. Assim, percebe-se que a integral definida é um número real ( $\mathbb{R}$ ) definido pela área da figura de uma região  $R$ , enquanto que a integral indefinida é uma função  $F(x)$  chamada de primitiva mais uma constante  $K \in \mathbb{R}$  que é uma constante arbitrária.

No caso em que uma função  $f(x) = y$  for definida num intervalo não necessariamente contínua, a divisão do intervalo  $[a, b]$  da região da figura em  $N$  subintervalos (Figura 35)  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ , que no intervalo  $[a, b]$  existe um  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  dessa divisão que é denominado de partição  $\wp$  com comprimento (norma) igual a  $\|\wp\| = \Delta_{L_i} = x_i - x_{i-1}$ . Neste sentido, para cada subintervalo o seu comprimento é dado por  $\Delta_{L_n} = x_n - x_{n-1}$  com  $1 \leq n \leq \infty$ , sendo que os subintervalos não necessariamente precisam serem do mesmo comprimento  $L$  (MUNEM; FOULIS, 1982). A norma da partição em  $\wp$  ( $\|\wp\|$ ) é o maior dos

Figura 35: divisão do intervalo em  $N$  subintervalos.



Fonte: Autor, 2016.

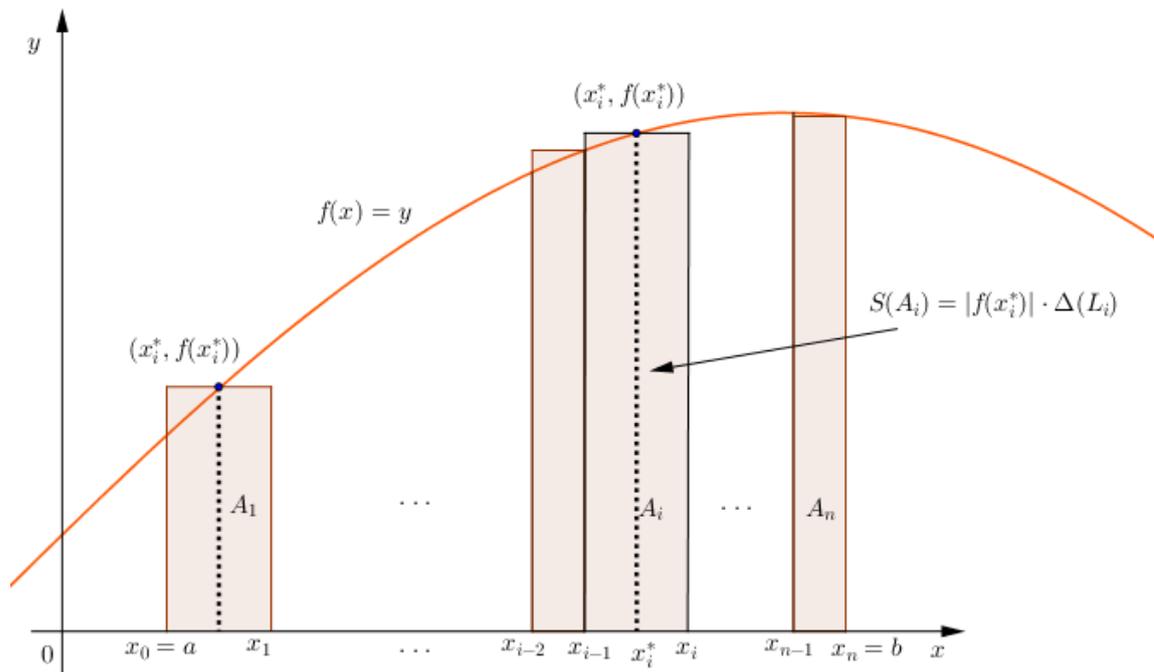
números dos subintervalos. Neste caso, os comprimentos  $\Delta_{L_i}$  podem ter pelo menos dois (2) subintervalos com o mesmo comprimento, assim, para que os subintervalos tenham o mesmo comprimento, sua norma fica definida por:  $\|\wp\| = \frac{b-a}{N}$

Se considerar que um subintervalo de uma  $i$ -ésima partição  $\wp$  (figura 36) possui um número  $x_i^*$  da  $i$ -ésima partição, formará sempre um retângulo de base  $\Delta_{L_i} = x_i - x_{i-1}$  e uma altura  $|f(x_i^*)|$ , pois o ponto  $(x_i^*, f(x_i^*))$  pertence a função.

Pode-se notar que para qualquer retângulo da partição  $\wp$  é possível determinar sua área, assim qualquer área sempre será dada pelo produto da base ( $\Delta_{L_i} = x_i - x_{i-1}$ ) pela altura ( $f(x_i^*)$ ), assim a soma ( $\sum_{i=1}^n S(A_i)$ ) de todas as áreas do intervalo  $[a, b]$  com divisão em subintervalos dos retângulos dada pela partição é denominada de soma de *Riemann*<sup>10</sup>. Como  $S(A_i) = |f(x_i)| \cdot \Delta(L_i)$ , logo a soma de *Riemann* poderá ser dada como:  $\sum_{i=1}^n \Delta(x_i) \cdot f(x_i^*)$ . Neste caso, a soma de *Riemann* representa uma boa aproximação para a integral definida para a obtenção da área de uma figura definida em uma região  $R$  (MUNEM; FOULIS, 1982). A partir dessa ideia, pode-se dar uma definição analítica para a integral definida.

<sup>10</sup> Terminologia usada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann

Figura 36: Área de um triângulo do  $i$ -ésimo subintervalo.



Fonte: (MUNEM; FOULIS, 1982), Adaptado.

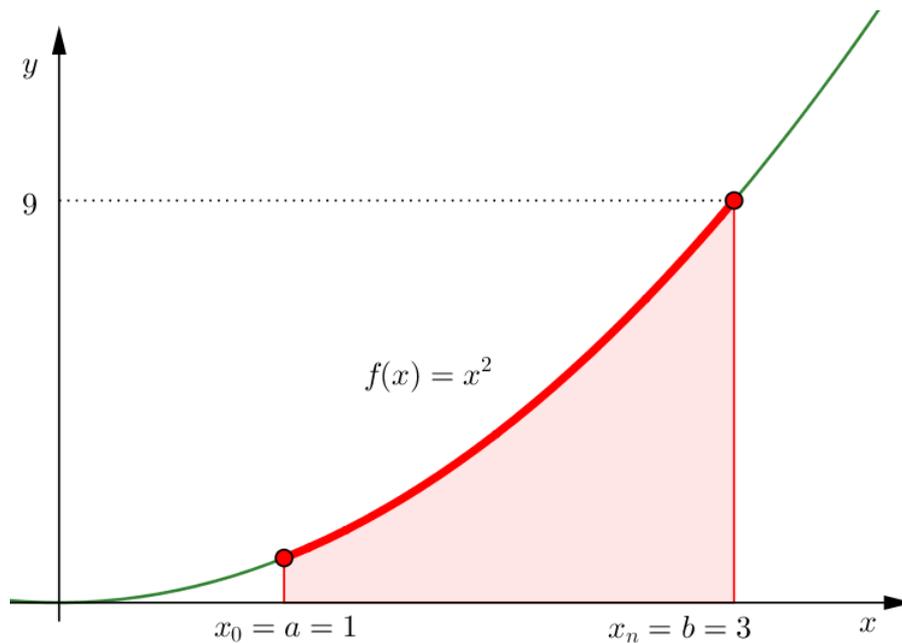
**Definição 3.3.3 (Integral Definida-Analítica).** Dada uma função  $f(x)$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , ao dividir o intervalo em  $N$  subintervalos de mesmo comprimento, com extremidades  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  desses subconjuntos, se para todos pontos amostrais  $x_i^*$  desses subintervalos, de maneira que o ponto selecionado  $x_i^*$  esteja no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1} - x_i]$  e que o limite exista, então a integral definida da função  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta(L_i) \tag{3.13}$$

Neste caso, para as aplicações será utilizado o cálculo pelo método clássico apenas para mostrar o valor após a solução dada pelo Método Monte Carlo.

**Exemplo 3.3.1.** Usar a ideia de subdivisões em retângulos para estimar a área da região  $R$  definida pela parábola  $f(x) = x^2$  no intervalo de 1 até 3 (região definida no gráfico da Figura (37)) (STEWART, 2011) adaptado.

**Solução:** A estimativa da área sera feita por dois experimentos (1 e 2) conforme descritos abaixo:

Figura 37: Área sob a curva  $f(x) = x^2$ .

Fonte: Autor, 2016.

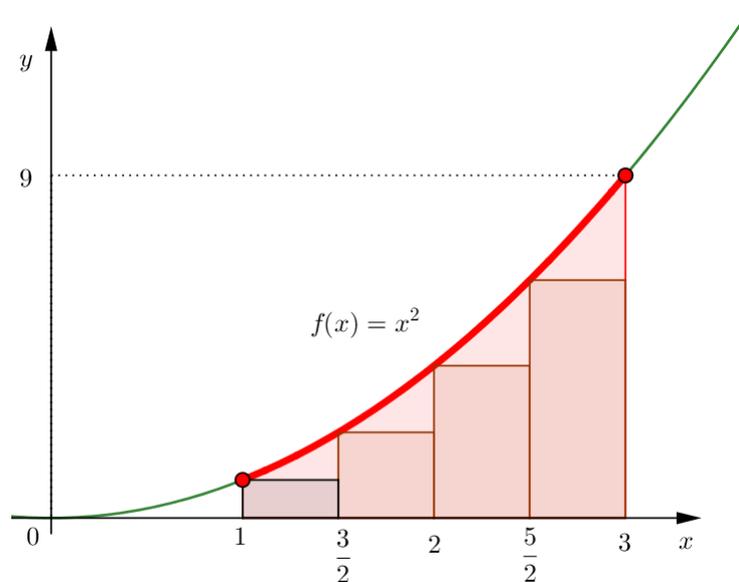
**Experimento 1:** Geração de Retângulos Inferiores e Superiores a curva da função pelo Método Monte Carlo-MMC.

Neste experimento, será usada a divisão da região em  $N$  faixas que formará retângulos com as bases formadas pelos comprimentos dos subintervalos (não necessariamente de mesmo comprimento) e as alturas (número aleatórios gerados no intervalo de 1 a 3) são os valores de  $f(x_i) = x_i^2$ . Para a divisão da região em 4 faixas, por ser poucas faixas, o cálculo pode ser feito de forma direta sem necessidades de nenhum recurso computacional, apenas utilizando a divisão em retângulos menores conforme (Figura 38) com as suas alturas definidas pelas extremidades esquerdas dos subintervalos  $[1, \frac{3}{2}]$ ,  $[\frac{3}{2}, 2]$ ,  $[2, \frac{5}{2}]$  e  $[\frac{5}{2}, 3]$ , todos com bases iguais a  $\delta_{L_i} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$ . A soma das áreas desses retângulos estimados é dada por:  $\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{N} \cdot f(x_i^*)$ , assim substituindo os valores, tem-se que:

$$S[R(L_{e4})] = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4+9+16+25}{4}\right) = \frac{54}{8} = 6,75 \text{ u.a.}$$

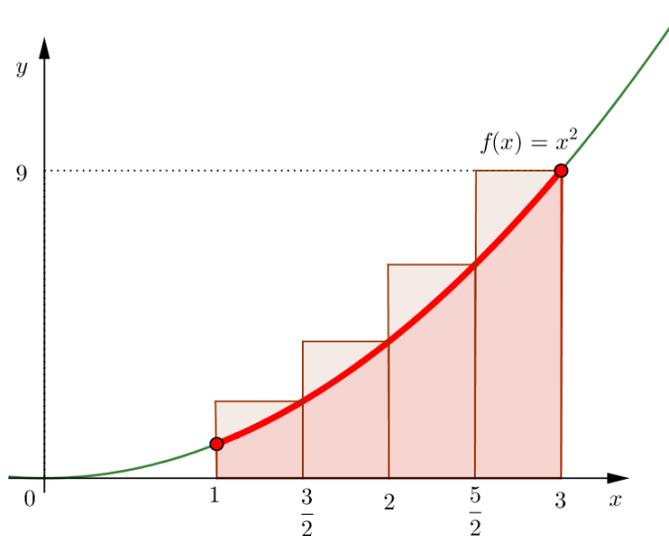
Considerando a divisão da região ainda em 4 faixas, o cálculo estimado também pode ser feito utilizando a divisão em retângulos maiores conforme Figura (39) com as suas alturas definidas pelas extremidades direita dos subintervalos  $[1, \frac{3}{2}]$ ,  $[\frac{3}{2}, 2]$ ,  $[2, \frac{5}{2}]$  e  $[\frac{5}{2}, 3]$ , todos com bases iguais a  $\Delta_{L_i} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$ .

Figura 38: Divisão em 4 faixas: retângulos menores.



Fonte: Autor, 2016.

Figura 39: Divisão em 4 faixas: retângulos maiores.



Fonte: Autor, 2016.

Neste caso, a soma das áreas dos subintervalos desses retângulos maiores tem valor estimado em:

$$S[R(L_{d4})] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (3)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9+16+25+36}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{86}{4} = 10,75u.a$$

Ao analisar os gráficos (Figura 37), (Figura 38) e (Figura 39) nota-se que a área  $S$  da região  $R$  da curva  $x^2$  no intervalo  $[a, b]$  está estimada entre as áreas das regiões definidas pelos retângulos menores e maiores, assim:  $S[R(L_{e_4})] \leq S(R) \leq S[R(L_{d_4})]$ . No caso da divisão em 4 faixas da região, a área da região  $R$  está estimada entre  $6,75 \text{ ua} \leq S(R) \leq 10,75 \text{ ua}$ . Sendo que um possível valor da área  $S$  da região é um valor que está estimado em algum lugar no intervalo  $6,75 \text{ u.a} \leq S(R) \leq 10,75 \text{ u.a}$ , que se pode estimar melhor ainda um valor próximo à média desse intervalo, ou seja:  $S(R) \cong \frac{6,75+10,75}{2} = \frac{17,75}{2} = 8,75 \text{ u.a}$ , portanto a área da região  $R$  tem um valor estimado em  $8,75 \text{ u.a}$ , que não é uma boa estimativa, pois, pelo Método Monte Carlo, uma única simulação não tem um valor próximo do real. Neste caso, pode-se dizer que aumentando o número de faixas ( $N \mapsto \infty$ ) obter-se-á uma estimativa melhor do valor dessa área, assim, será usado o recurso computacional, o programa Microsoft Excel, rodado no sistema operacional Windows, com 6 interações com divisões em 8, 20, 50 100, 1000 e 10000 faixas com comprimentos  $\Delta L_i = x_{i-1} - x_i$ , que gerará números ( $x_i^*$ ) aleatoriamente pela função  $= a + (b - a) * \text{ALEATÓRIO}()$  DO EXCEL distribuídas de maneira uniforme no intervalo  $[a, b]$ , com as suas alturas definidas com as extremidades do lado esquerdo ( $x_{e_i}$ ) e as extremidades do lado direito ( $x_{d_i}$ ) dos subintervalos.

A partir das simulações realizadas pelo recurso computacional conforme modelo descrito na Figura (40) para as interações 8, 20, 50 100, 1000 e 10000, obtiveram-se as seguintes aproximações para o valor da área (Tabela 5)

Figura 40: Modelo usado no Excel para as simulações.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K					
INTERVALO	NÚMERO DE FAIXAS (N)		TOTAL DE SUBINTERVALOS (N)	EXTREMIDADES DOS RETÂNGULOS	ALTURA (MENOR)	BASE DO RETÂNGULO	ÁREA (INFERIOR)	ALTURA (MAIOR)	ÁREA (SUPERIOR)						
1	3			1,000000000000	1,000000000000										
K = (N-1)	Nº Aleatorios			1											
1		Para gerar um número aleatório em "B6", utilizar a função = $\$A\$2+(\$B\$2-\$A\$2)*\text{ALEATÓRIO}()$ , que gera um número entre o intervalo [a,b]. Para gerar os demais basta selecionar a célula de entrada e com o "mouse" arrastar o cursor até a quantidade K=(N-1) desejada	2	Copie os números gerados na coluna "B" e cole na coluna "F3" entre os valores "1" e "3". Para colar na coluna "F" clicar com o botão direito do "mouse" e na opção "colar especial" selecionar a opção "valores"	2	O valor da altura é definida por = $E5^2$ . Para os demais seleccione a célula e com o "mouse" arrastar o cursor até a célula da linha N(i).	O valor da base em "H3" é definida por = $E7-E6$ . Para os demais seleccione a célula e com o "mouse" arrastar o cursor até a célula da linha N(i-1).	O valor da área inferior em "I3" é definida por = $G6*F6$ . Para os demais seleccione a célula e com o "mouse" arrastar o cursor até a célula da linha N(i-1).	O valor da área superior em "J3" é definida por = $F7^2$ . Para os demais seleccione a célula e com o "mouse" arrastar o cursor até a célula da linha N(i-1).	O valor da área inferior em "K3" é definida por = $H6*J6$ . Para os demais seleccione a célula e com o "mouse" arrastar o cursor até a célula da linha N(i-1).					
2			3												
.			.												
.			.												
.			.												
(N-1)					N(i-1)										
			N(i)	3,0000000000000000	9,0000000000000000										
				Comprimento do intervalo [a, b]		Representa a soma das áreas dos retangulos inferiores.		Representa a soma das áreas dos retangulos superiores.		Valor estimado da área =					
				Estimativa da área: Média entre a somas dos retangulos inferiores e superiores.											

Fonte: Autor, 2016.

Tabela 5: Estimativa da área pelo Método Monte Carlo

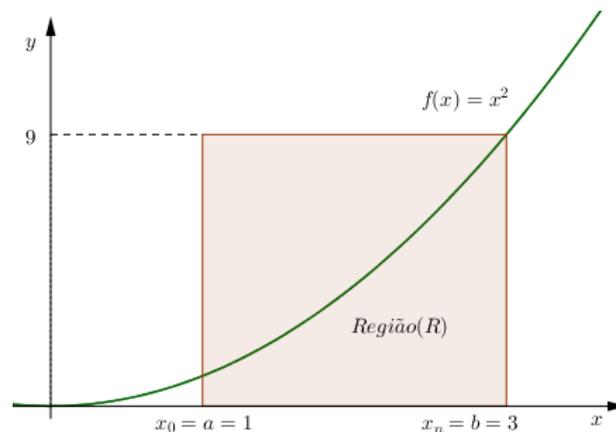
$N$	Quantidade de números	$S(R_{e_n})$	$S(R_{d_n})$	$S(R) \cong \frac{S(R_{e_n})+S(R_{d_n})}{2}$
4	3	6,750000	10,750000	8,750000
8	7	7,330551	10,084252	8,708654
20	19	8,092016	9,259057	8,675536
50	49	8,366999	8,971407	8,669203
100	99	8,506460	8,828410	8,667435
1000	999	8,651149	8,682197	8,666673
10000	9999	8,665075	8,668257	8,666666

Fonte: Autor, 2016

Na simulação apresentada no **Experimento 1**, pode-se perceber que quanto maior for o número de faixas (subintervalos), a área da figura definida pela função  $f(x) = x^2$  tem sua área convergindo para  $\frac{26}{3}$ .

**Experimento 2:** O experimento consiste em lançar (gerar) **pontos** em um retângulo de comprimento  $C = 3 - 1 = 2 \text{ u.m}$  e altura ( $H = f(3) = 9 \text{ u.m}$ ) com o objetivo de gerar pontos para preencher a região da curva da função  $f(x) = x^2$  inscrito no espaço amostral definido pelo retângulo de base 2 e altura  $H = 9$  conforme gráfico (Figura 41).

Figura 41: Método da geração de pontos dentro do retângulo.



Fonte: Autor, 2016

Assim, considerando que todos os pontos lançados (gerados) atinjam o retângulo, tem-se que a probabilidade de que o ponto atinja a área da região (R) é dada pela razão entre as áreas da região (R) e o retângulo, ou seja:  $\frac{S_{Região(R)}}{S_r} \approx p$ . Sabe-se que a área da curva é definida por  $S_{Região(R)} = \int_a^b f(x)dx$  e a área do retângulo de comprimento (base)  $C$  e altura  $H$  é definida por:  $S_r = C \cdot H$ . Neste caso, como a ideia

é estimar a área da região (R), então a probabilidade está determinada por:

$$p \approx \frac{S_{Região(R)}}{S_r} = \frac{\int_1^3 f(x)dx}{2 \cdot 9} = \frac{\int_1^3 f(x)dx}{18} \tag{3.14}$$

Considerando que em  $N$  lançamentos (geração de números aleatórios para a formação de pontos) pode-se obter  $k$  sucessos de acertar a região (R). Assim se tem uma probabilidade frequentista definida por:  $p = \frac{k}{N}$ . Neste caso, pelo método da área, pode-se estimar o valor da área da região (R) formada pela curva  $f(x)$  com o eixo  $ox$  no intervalo  $[1, 3]$ , pois se considerarmos o experimento em lançar (gerar)  $N$  pontos (P) de coordenadas  $(x, f(x))$ , poderemos contar quantos desse atingem a região (R) dessa curva, assim, substituindo  $p = \frac{k}{N}$  na equação (3.14), obtém-se:

$$\frac{k}{N} \approx \frac{S_{Região(R)}}{S_r} = \frac{S_{Região(R)}}{2 \cdot 9} = \frac{S_{Região(R)}}{18} \Rightarrow S_{Região(R)} = 18 \cdot \frac{k}{N} \tag{3.15}$$

Para esse experimento, foi desenvolvida uma técnica com o programa *Excel* conforme o quadro demonstrativo da Figura (42) para a estimativa da área da região (R) no intervalo  $[1, 3]$ , em que foram considerados dois conjuntos  $A = [1, 3]$  e  $B = [0, 9]$ , um ponto P de coordenadas  $(x, y)$  para o lançamento no (retângulo). Nesse caso, o ponto P é um par ordenado  $(x, y)$  tal que  $P = \{(x, y) \in A \times B | x \in A \text{ e } y \in B\}$ , que serão gerados números  $x_i$  e  $y_i$  aleatoriamente pela função  $[= a + (b - a) * ALEATÓRIO()]$  DO EXCEL distribuídas de maneira uniforme no intervalo  $[a, b]$  de cada coordenada. Neste caso, ao gerar  $N$  pontos (lançamentos) no retângulo, o programa analisa  $n$  pares de pontos  $P_i$  da forma  $(x, y)$  com a geração da variável aleatória  $X$ , e a variável gerada possui a distribuição de Bernoulli  $P(x, y) = X$ , definida como:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{para } y_i > f(x_i), \\ 1, & \text{se } y_i \leq f(x_i) \end{cases}$$

Figura 42: Modelo usado no Excel para geração de pontos aleatórios.

	A	B	C	D	E	G	H	I	J	K	L	M	N
1		INTERVALOS					PONTOS DENTRO						
2			Mínimo	Máximo			PONTOS FORA						
3		x	1	3									
4		Y	0	9									
5		Nº DE INTERAÇÕES					SIMULAÇÕES						
6		COORDENADAS			VARIÁVEIS		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	MÉDIA
7		x	y	f(x)									
8							PONTOS DENTRO						
9						PONTOS FORA							

Conforme o quadro demonstrativo (Figura 42), foram gerados os números aleatórios das coordenadas  $x$  e  $y$  para a geração da variável aleatória  $X$  com os seguintes comandos:

- Geração da coordenada (abscissa)  $x$ : para a geração de números aleatórios inserir na célula B8 o comando =  $\$C\$3 + (\$D\$3 - \$C\$3) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula B8 e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Geração da coordenada (ordenada)  $V$ : para a geração de números aleatórios inserir na célula C8 o comando =  $\$C\$4 + (\$D\$4 - \$C\$4) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula C8 e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Geração do valor da função  $f(x)$ : neste caso inserir na célula D8 o comando =  $(B8)^2$  e em seguida selecionar a célula D8 e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Geração da variável aleatória  $X$ : inserir na célula E8 o comando =  $SE(C8 >= D8; 0; 1)$  e em seguida selecionar a célula E8 e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações, assim o programa fará a comparação e dará como retorno 0 ou 1, em seguida, na última célula do intervalo das variáveis, inserir um comando para contar todas as células com o valor 1.

Foram desenvolvidos para fazer a estimativa da área da região (R) 100, 2000, 10000 e 650000 interações com 6 simulações  $S_i$ , com  $1 \leq i \leq 6$  em cada interação, e obtiveram-se os seguintes resultados da probabilidade dos pontos pertencerem a região (R) da função e da estimativa da área, conforme apresentada na Tabela (6):

Tabela 6: Número de pontos dentro da região (R), para 100, 2000, 10000 e 65000 interações.

N	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	Média	$p = \frac{Média}{N}$	$S_R \approx 18 \cdot p$
100	49	54	53	46	42	49	48,83	0,4883	8,79
2000	966	970	971	948	974	1004	972,17	0,4861	8,7495
10000	4809	4786	4847	4864	4882	4713	4816,83	0,4817	8,6703
65000	31199	31238	31285	31242	31300	31455	31286,50	0,4813	8,66395

Fonte: Autor, 2016

Neste caso, como foram feitas em cada interação 6 simulações, a probabilidade dos pontos pertencerem à região (R) delimitada pela função no intervalo [1, 3] ficou definida pela equação:

$$p \approx \frac{\bar{k}}{N} \approx \frac{S_{Região(R)}}{S_r} \Rightarrow S_{Região(R)} \approx 18 \cdot \frac{\bar{k}}{N} \quad (3.16)$$

com  $\frac{\bar{k}}{N} = \frac{\text{Número médio de pontos dentro da região } (R)}{\text{Número de pontos gerados}}$ . Neste caso, os resultados deste experimento já era até esperado, pois a cada aumento do números de pontos, diminuimos o erro médio relativo, o que significa que a probabilidade dos pontos pertencerem à região  $(R)$  aumenta em grande proporção, assim quanto maior o número de pontos gerados, mais próxima é a razão entre o número de pontos dentro da região  $(R)$  e o número gerado. Assim, nos dois experimentos o aluno poderá perceber que a área da região está estimada em um valor convergindo para  $8,66 \dots$ , pois essas estimativas estão bem próximas do valor real que é de  $S_R = \frac{26}{3}$ , esse valor é obtido aplicando o cálculo da integral  $\int_1^3 x^2 dx$ . Resolvendo a integral  $\int_1^3 x^2 dx$ , obtém-se:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}, \text{ portanto o valor da área da região } (R) \text{ definida no intervalo } [1, 3] \text{ é } S_{\text{Região}} = \frac{26}{3} u.a.$$

Cálculo de áreas para qualquer figura:

Neste caso, será apresentada uma ideia para a técnica de estimar a área de uma região através de uma figura, aplicando o Método Monte Carlo, com o uso do conceito de probabilidade geométrica. A partir do conhecimento de uma região delimitada por uma figura, é possível estimar sua área mesmo que não seja uma figura que tenha uma boa definição conhecida, por exemplo, a de uma figura que defina um triângulo.

Para este experimento, terá que ter conhecimentos de estatística, razão, proporção, escalas de conversão de unidades, e dentre outros. A ideia principal não é obter de imediato a área real e sim que o aluno possa ter uma percepção que, para resolver questões de cálculo, não é necessário o real conhecimento em saber resolver pelos métodos clássicos e que possa perceber que essa estimativa possa ser feita utilizando ferramentas probabilísticas.

**Definição 3.3.4 (Razão).** A razão entre dois números  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 0$ , é o quociente entre  $a$  e  $b$  ( $\frac{a}{b}$ ).

**Definição 3.3.5 (Escala).** É uma razão  $(E)$ , que tem como valor um número real, definido pela razão entre:

$$E = \frac{\text{Comprimento entre dois pontos do desenho}}{\text{comprimento real da distância dos dois pontos}} \quad (3.17)$$

Para obter a escala  $(E)$ , as duas grandezas têm que estar na mesma unidade de medida =  $u.m.$

Nas aplicações, os valores podem estar expressos em qualquer unidade, mas, na maioria das vezes, utilizam-se unidades representadas no Sistema Internacional = S.I, com seus múltiplos ou submúltiplos. Para a unidade fundamental, tem-se o

metro ( $m$ ), metro quadrado ( $m^2$ ), metro cúbico ( $m^3$ ), para as unidades de comprimento, área e volume respectivamente, e todos poderão ter sua conversão para os múltiplos (utilizados para grandes unidades) ou submúltiplos (para pequenas unidades). Para a transformação de unidades no Sistema métrico decimal, conforme Tabelas (7), (8) e (9), utiliza-se o método do deslocamento, que para cada deslocamento de unidade à direita a ser transformada multiplica-se por  $10^n$ ,  $10^{2n}$  e  $10^{3n}$ , já para a esquerda divide-se por  $10^n$ ,  $10^{2n}$  e  $10^{3n}$ , para as unidades de comprimento, área e volume respectivamente, com  $n$ , o número de unidade a ser deslocada.

Tabela 7: Conversão de  $1m$  em múltiplos e submúltiplos.

$Km$	$hm$	$dam$	<b>m</b>	$dm$	$cm$	$mm$
$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10}$	<b>1</b>	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Autor, 2016

Tabela 8: Conversão de  $1(m)^2$  em múltiplos e submúltiplos.

$Km^2$	$hm^2$	$dam^2$	$m^2$	$dm^2$	$cm^2$	$mm^2$
$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^2}$	<b>1</b>	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Fonte: Autor, 2016

Tabela 9: Conversão de  $1(m)^3$  em múltiplos e submúltiplos.

$Km^3$	$hm^3$	$dam^3$	$m^3$	$dm^3$	$cm^3$	$mm^3$
$\frac{1}{10^9}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^3}$	<b>1</b>	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-9}$

Fonte: Autor, 2016

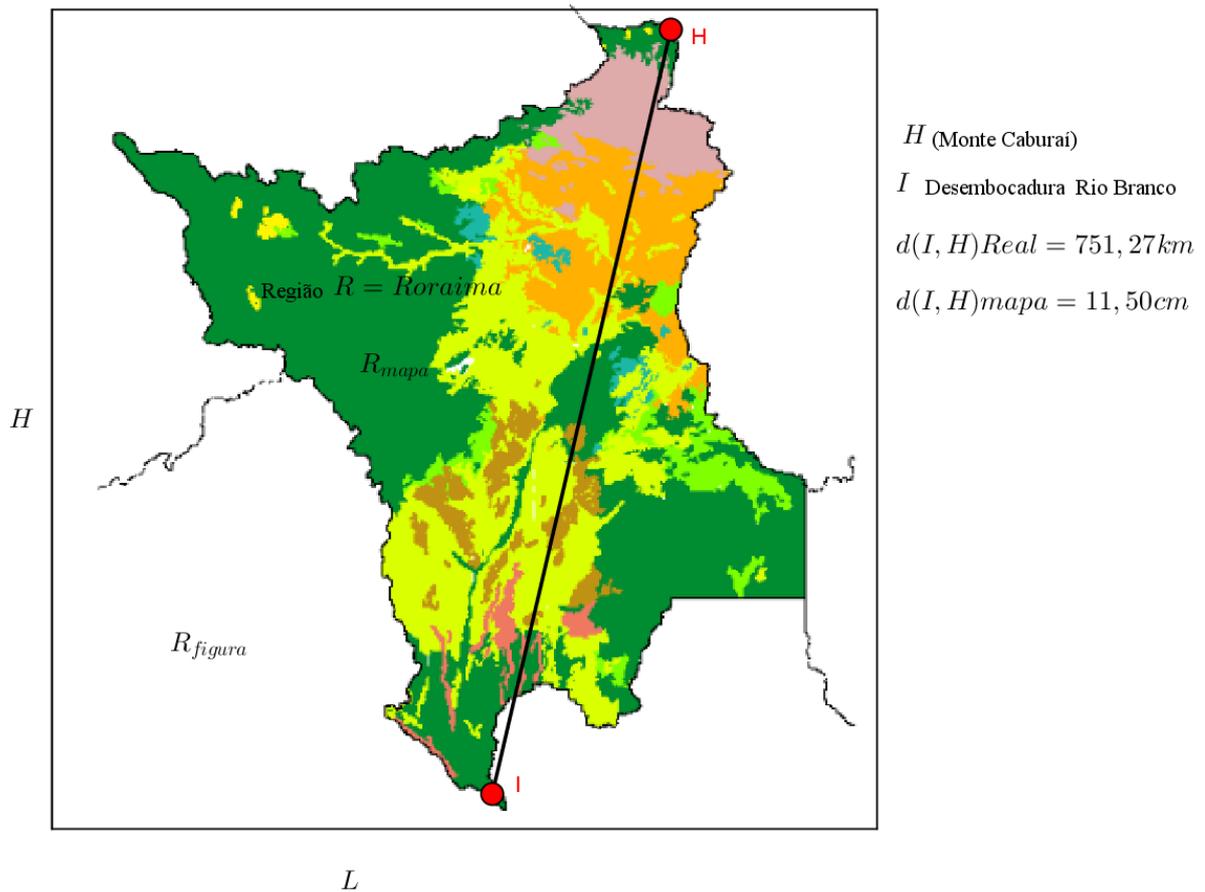
Para essa ideia e como sugestão para este experimento, tem-se o mapa do Estado de Roraima-RR Figura(43) com uma região  $R$  com uma área ( $S_M =$  área do contorno do mapa a ser determinada) e uma figura de área ( $S_F =$  área de um retângulo com comprimento  $L$  e altura  $h$ ) conforme Figura (44)

Figura 43: Imagem de satélite: mapa do Estado de Roraima.



Fonte: (Google Earth), Adaptado.

Figura 44: Mapa do Estado de Roraima.



Fonte: Autor, 2016.

Neste caso, a razão entre as áreas da região do mapa ( $S_m$ ) e da figura ( $S_f$ ), determina a probabilidade de que  $N$  pontos de coordenadas  $(x, y)$  lançados na figura, atinjam a região do mapa, ou seja, a probabilidade é definida pela equação:  $p \approx \frac{S_m}{S_f}$ . Assim, no lançamento de  $N$  pontos na figura, a probabilidade é a razão entre o número de pontos dentro da região desejada e o total de pontos lançados na região da figura. Para este experimento, utiliza-se um programa que gerará números aleatórios  $x$  e  $y$  que formarão um ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  da região da figura e se verifica o ponto gerado (sorteado) pertença ou não a região da área do mapa. Assim, verifica-se a probabilidade desse evento ter ocorrido ou não. Com esses pontos, a partir da figura com o seu mapa já inserido será gerada a variável aleatória  $X$  definida por:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{para } P \text{ fora da área do mapa,} \\ 1, & \text{se } P \text{ dentro da área} \end{cases}$$

Com uma distribuição de *Bernoulli* de parâmetro  $p$ , em que  $p$  é a probabilidade de um ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  estar dentro da região do mapa (área desejada).

Para ter uma boa estimativa da área do mapa, é necessário subdividir a malha em  $K$  quadrículos com a menor área possível, que a imagem (mapa) dentro da malha tenha uma proporção razoável e que seja conhecida pelo menos uma medida real entre dois pontos da região a ser determinada pela área. Assim, quanto maior o número de pontos gerados, tem-se uma área que se aproxima da real, pois quanto maior o número, essa proporção se aproxima da probabilidade para um  $N \mapsto \infty$ .

A partir dos conceitos apresentados, para qualquer região delimitada dentro de uma malha quadriculada, vale sempre a relação:

$$\frac{S_{\text{figura}}}{S_{\text{malha}}} \approx \frac{\text{Número médio de pontos dentro do mapa}}{\text{Número de pontos gerados}} \quad (3.18)$$

**Exemplo 3.3.2 (Estimativa da área do Estado de Roraima).** *Estimar a área do Estado de Roraima pelo Método Monte Carlo, utilizando a distância entre a Desembocadura Rio Branco, no Sul do Estado, de coordenadas geográficas (LATITUDE: 1°24'34,62" S), (LONGITUDE: 61°50'38,22" O) e o Monte Caburaí ao extremo norte do Estado.*

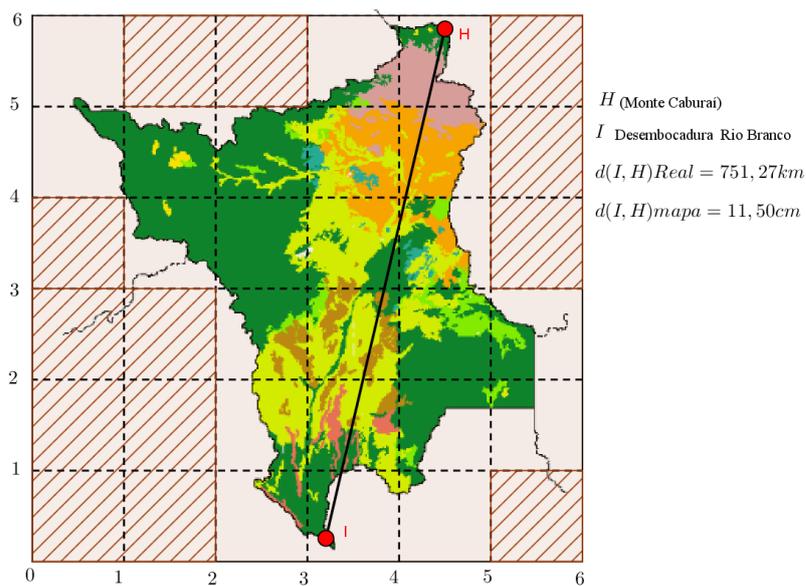
### Solução:

Para este experimento, será estimada a área do Estado de Roraima por meio do recurso do programa *Excel*. Foram utilizados para a área do estado de Roraima  $224299\text{km}^2$  e uma distância entre a Desembocadura do Rio Branco ao Monte Caburaí uma distância de  $751,27\text{km}$ , valores extraídos do aplicativo do *Google Earth*<sup>11</sup> conforme imagem de satélite definida na Figura (43). A partir da imagem de satélite do Estado de Roraima, com o uso do program *Geogebra*<sup>12</sup>, a imagem foi inserida em uma malha de um quadrilátero de  $12\text{cm}$  de comprimento (largura) por  $12\text{cm}$  de altura, e a malha foi dividida em três partes de maneira que a primeira ficasse com seus quadrículos de  $2\text{cm}$  Figura (45); a segunda com  $1\text{cm}$  Figura (46) de lados e a terceira com  $0,5\text{cm}$  Figura (47). Se for feita a divisão em quadrículos de menor lado, pode-se perceber que quanto maior for essa divisão mais próximo um ponto  $P$  gerado aleatório se aproxima da probabilidade de pertencer ao mapa (imagem).

<sup>11</sup> **Google Earth** é um programa de computador desenvolvido e distribuído pela empresa estadunidense do Google cuja função é apresentar um modelito tridimensional do globo terrestre, construído a partir de mosaico de imagens de satélite obtidas de fontes diversas, imagens aéreas (fotografadas de aeronaves) e GIS 3D.

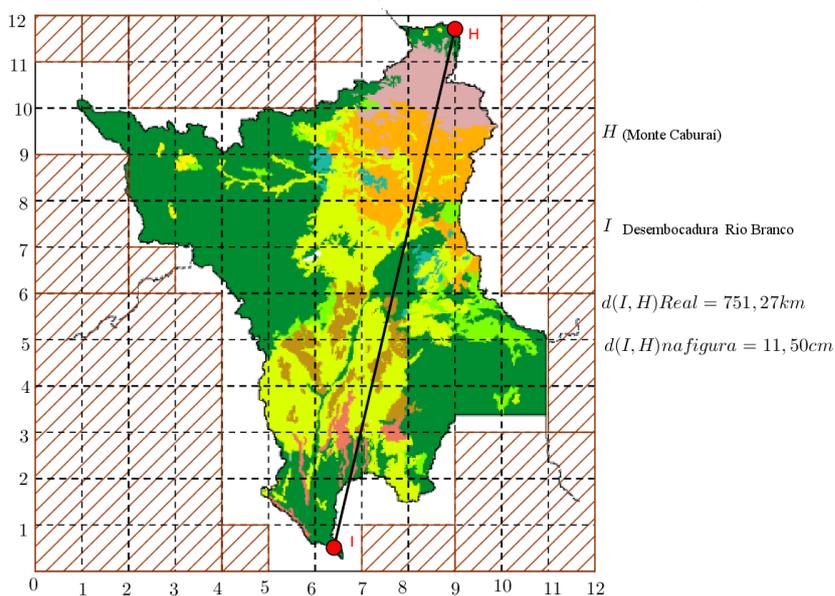
<sup>12</sup> **GeoGebra** (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única *Graphical User Interface*-GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da *General Public License*-GNU, e é escrito em linguagem *Java*, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

Figura 45: Mapa quadriculado em quadrado de  $12\text{cm} \times 12\text{cm}$ : quadrículos de  $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ .



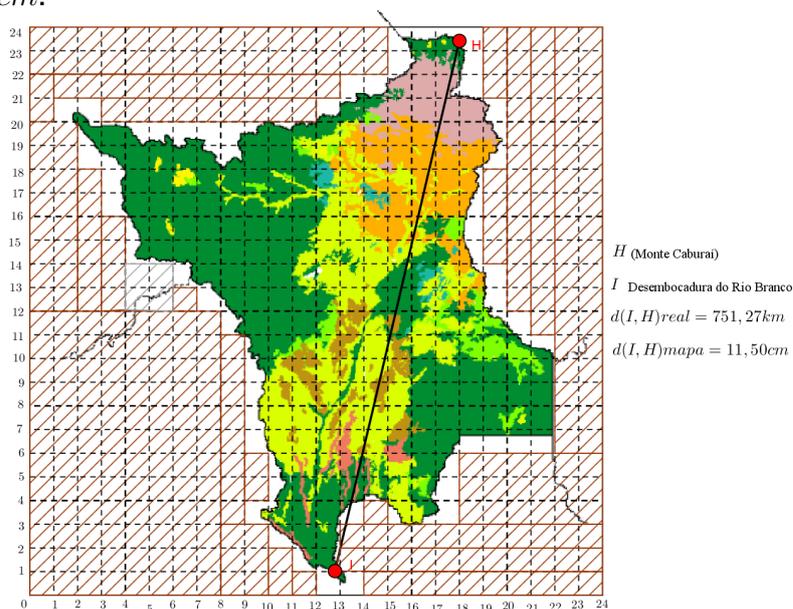
Fonte: Autor, 2016.

Figura 46: Mapa quadriculado em quadrado de  $12\text{cm} \times 12\text{cm}$ : quadrículos de  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ .



Fonte: Autor, 2016.

Figura 47: Mapa quadriculado em quadrado de  $12cm \times 12cm$ : quadrículos de  $0,5cm \times 0,5cm$ .



Fonte: Autor, 2016.

Por meio do programa *Geogebra* também foi definida a medida aparente entre Desembocadura do Rio Branco e Monte Caburá pelo segmento  $\overline{IH}$  com um valor de  $11,5cm$  de distância. Como os valores da distância real da Desembocadura Rio Branco ao Monte Caburá e a distância no mapa estarão na mesma unidade de medida (em cm), logo a relação (3.18) passa a ser dada por:

$$\frac{S_{mapa}}{S_{Roraima}} \approx \frac{(distância\ real\ da\ desembocadura\ ao\ Monte\ Caburá\ na\ figura\ em\ cm)^2}{(distância\ da\ desembocadura\ ao\ Monte\ Caburá\ em\ cm)^2} \quad (3.19)$$

Para cada subdivisão da malha, definiram-se as regiões com os intervalos em que os pontos  $P = (x, y)$  estejam fora do mapa, para os experimentos, os pontos em que seu quadrículo possuir uma pequena parte que seja do contorno do mapa por menor que seja, será considerado como dentro do mapa, senão serão considerados pontos fora do mapa. Neste caso, será apresentada uma ideia de simulação para a divisão da malha em quadrículos de  $2cm$  com 50, 1000 e 10000 interações (pontos) com 5 simulações cada interação. Neste caso, para a geração dos números aleatórios para as coordenadas  $x$  e  $y$ , usou-se o programa *Excel*, conforme modelo da Figura (48) apenas para mostrar a estimativa da divisão da malha em quadrículos de  $2cm$  (as demais divisões são dadas para a visualização da ideia dessa aproximação), e a partir da distribuição uniforme discreta no intervalo  $[a, b]$ , em que foi usado no *Excel* o comando  $[= a + (b - a) * ALEATÓRIO()]$  ou em um programa capaz de gerar milhões de números aleatórios, o que o recurso do Excel não é possível por ser limitado.

Apesar desses pontos serem gerados de maneira *pseudo-aleatório*, mesmo assim "simulam" um comportamento de números aleatórios.

Figura 48: Modelo para geração de pontos no Excel da malha dividida em quadrados de  $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		intervalo			Nº DE PONTOS	Pontos dentro	SIMULAÇÕES				
2		Mínimo	Máximo			0	Simulação 1	Simulação 2	Simulação 3	Simulação 4	Simulação 5
3		0	6								
4		N	x	y	Variáveis						
5		1				Média					
6		2									
7		3				Area Mapa					
8		4									
9		5									
10		6				Area(Roraima)					
		.	.	.	.	Proporção					
		.	.	.	.						
		.	.	.	.						

Fonte: Autor, 2016.

Conforme o quadro (Figura 48), foram gerados os números aleatórios das coordenadas  $x$  e  $y$  para a geração da variável aleatória  $X$  com os seguintes comandos:

- Geração da coordenada (abscissa)  $x$ : para a geração de números aleatórios inserir na célula  $C5$  o comando  $=B\$3 + (C\$3 - B\$3) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula  $C5$  e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Geração da coordenada (ordenada)  $V$ : para a geração de números aleatórios inserir na célula  $D5$  o comando  $=B\$4 + (C\$4 - B\$4) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula  $D5$  e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Geração da variável aleatória  $X$ : inserir na célula  $E5$  o comando para verificar as condições dos pontos fora do mapa, verificado na Figura (45), e em seguida selecionar a célula  $E5$  e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações. Assim o programa fará a comparação e dará como retorno 0 ou 1. Em seguida, na última célula do intervalo das variáveis, inserir um comando para contar todas as células com o valor 1.

Foram desenvolvidas para fazer a estimativa da área do Estado de Roraima 50, 200, 10000 interações com 5 simulações  $S_i$ , com  $1 \leq i \leq 5$  em cada interação, e obtiveram-se os seguintes resultados da probabilidade dos pontos pertencerem ao mapa do Estado na figura e da estimativa da área, conforme apresentado na tabela (10):

Tabela 10: Número de pontos dentro do mapa do Estado de Roraima.

N	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	Média	$p = \frac{Média}{N}$	$S_{Roraima}(km)^2$	Proporção
50	43	44	40	41	44	42	0,8480	521140	2,3242
200	159	173	166	177	162	167	0,8370	514380	2,2932
10000	8303	8386	8350	8276	8340	8340	0,8331	511984	2,2882

Fonte: Autor, 2016

Ao analisar o mapa apresentado na Figura (45), pode-se perceber que, quando foi feita a distribuição dos pontos de forma uniforme no intervalo em uma malha de  $144cm^2$ , em 36 quadrículos de lado  $2cm$ , e com os critérios estabelecidos para os pontos pertencerem ou não ao mapa, obteve-se nesse experimento um total de 23 quadrículos de  $4cm^2$  cada, dos 36 de total da malha, gerando assim uma probabilidade ( $p$ ) de pontos dentro do mapa de proporção  $p \approx \frac{23}{36} \Rightarrow p \approx 0,6388$ . Dessa forma pela equação (3.18) o mapa ocupa uma área de  $92cm^2$  em relação à área da malha que é de  $144cm^2$  e, pela equação (3.19), a área do Estado de Roraima é estimada em  $S_{Roraima} \approx 392631km^2$  com 1,7504 vezes a área real do Estado de Roraima. Neste caso, pode-se perceber que o experimento com dados na Tabela (10), apesar de não apresentar uma boa aproximação, o aluno tem a capacidade de perceber que, quanto maior o número de pontos gerados, melhor será essa estimativa.

Para os mapas apresentados nas Figuras (46) e (47), com subdivisões em quadrículos de lados  $1cm$  e  $0,5cm$  respectivamente cada, não foram feitas simulações com o programa *Excel*, devido às limitações que o recurso apresenta, mas pode-se perceber que:

- a) Para a subdivisão da malha em quadrículos de  $1cm$  de lado de forma uniforme no intervalo em 144 quadrículos de lado  $1cm$ , e com os critérios estabelecidos para os pontos pertencerem ou não ao mapa, obteve-se nesse experimento um total de 75 quadrículos de  $1cm^2$  cada dos 144 de total da malha, gerando assim uma probabilidade ( $p$ ) de pontos dentro do mapa de proporção de  $p \approx \frac{75}{144} \Rightarrow p \approx 0,5208$ , e pela equação (3.18), o mapa ocupa uma área de  $75cm^2$  em relação à área da malha que é de  $144cm^2$ , e pela equação (3.19), a área do Estado de Roraima é estimada em  $S_{Roraima} \approx 320079km^2$  com 1,4279 vezes a área real do Estado de Roraima e;
- b) Para a subdivisão da malha em quadrículos de  $0,5cm$  de lado de forma uniforme no intervalo em 576 quadrículos de lado  $0,5cm$ , e com os mesmos critérios para os pontos pertencerem ou não ao mapa, obteve-se nesse experimento um total de 258 quadrículos de  $0,25cm^2$  cada dos 576 de total da malha, gerando assim uma probabilidade ( $p$ ) de pontos dentro do mapa de proporção de  $p \approx \frac{258}{576} \Rightarrow p \approx 0,4479$ , e pela equação (3.18) o mapa ocupa uma área de  $64,50cm^2$  em relação

à área da malha que é de  $144cm^2$  e, pela equação (3.19), a área do Estado de Roraima é estimada em  $S_{Roraima} \approx 275268km^2$  com 1,2272 vezes a área real do Estado de Roraima.

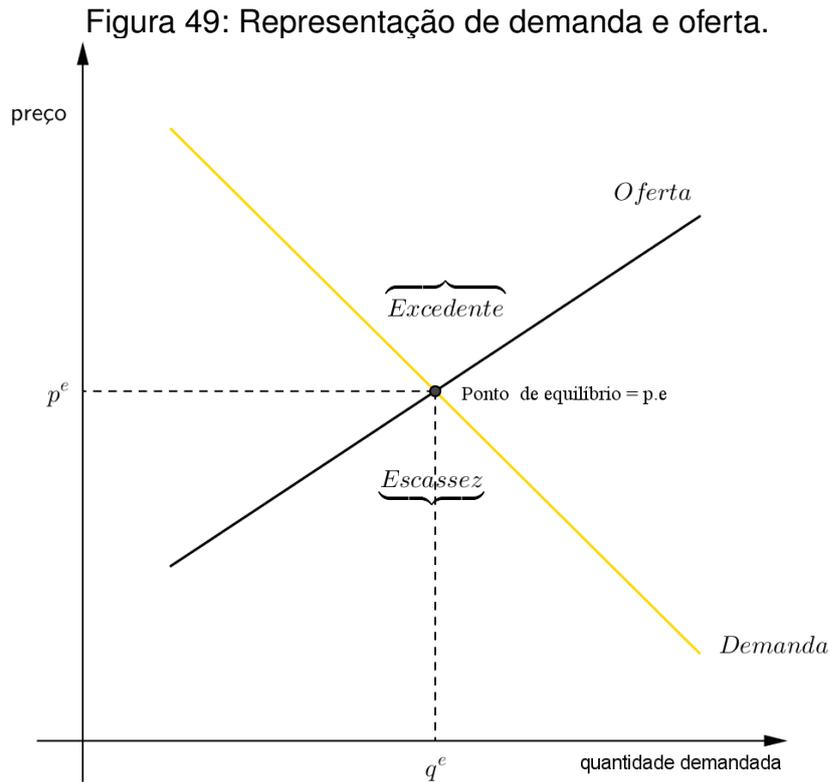
Pode-se perceber que a proporção diminui conforme ocorre a subdivisão da malha em  $K$  quadrículos de lados  $L$ . Assim, essa ideia de gerar pequenos quadrados de mesma área, e em seguida gerar  $N$  pontos ( $P$ ), fará com que o erro relativo médio diminua, pois à medida que diminui o lado do quadrículo, diminui também a quantidade desses quadrículos que possuíam parte desses pontos no contorno do mapa. Neste sentido, aproxima-se cada vez mais da área do mapa na figura, e em consequência o aumento de interações nessa subdivisão. Dado o critério de decisão, quanto menor a área do quadrado, mais próxima é a probabilidade desses pontos estarem dentro do contorno do mapa. Assim, para ter uma boa estimativa da área, é necessário que faça subdivisões com o maior número possível de quadrículos com o menor lado possível.

### 3.3.2 Ciências Econômicas

No estudo de oferta e demanda em economia, envolve-se uma abordagem de situações em que para determinado produto a ser colocado no mercado, existem, no cenário econômico, variáveis que possam interferir principalmente na questão de lucro/prejuízo desse produto para a empresa. Segundo (VASCONCELLOS; OLIVEIRA; BARBIERI, 2011), "a quantidade demandada, bem como a sua quantidade ofertada, depende de inúmeros fatores". No entanto, dentre esses fatores, pode-se ter como o mais relevante o seu preço. Neste caso, se mantidos constantes alguns fatores, quanto maior o preço de uma mercadoria, menor a sua procura, ou seja, a quantidade demandada do produto diminui. Em contrapartida, a quantidade ofertada aumenta, quando o preço do produto aumenta, conforme ilustra o gráfico (Figura 49).

Neste caso, pode-se dizer que a curva da demanda é inversamente proporcional ao preço, ou seja, quanto menor o preço, maior será a demanda do produto, já a oferta é diretamente proporcional ao preço. O ponto de equilíbrio faz com que a demanda e a oferta sejam iguais, provando que nesse ponto a empresa não terá lucro e nem prejuízo. Assim, pretende-se apresentar uma aplicação do Método Monte Carlo para avaliar dependendo de uma variável incerta, se ao lançar um determinado produto no mercado as condições no cenário econômico, a empresa terá prejuízo ou lucro. Tal resultado se dá por meio da análise de riscos desse produto que ao ser lançado no mercado, verifica-se a probabilidade dele dar prejuízo a empresa. Para a análise, serão consideradas as seguintes situações:

- a) **Preço de venda de um produto:** é valor que após a análise do custo somado às despesas variáveis e fixas proporcionais, gere lucro líquido;



Fonte: Autor, 2016.

- b) **Custo total:** é a soma de todos os custos da despesa, custo fixo (C.F) mais o custo variável (C.V);
- b) **Lucro Total:** é a diferença entre a receita total (R.T) e a despesa total (D.T).

**Exemplo 3.3.3.** *Uma empresa deseja lançar um produto X no mercado, e após pesquisas de mercado, verificou-se que a o valor da demanda média do produto ficou em torno de R\$13000,00, com um desvio padrão estimado em R\$3800,00, e obtiveram-se também os seguintes dados:*

- a) **Preço de venda:** com preço mínimo de R\$20,00 e máximo de R\$30,00;
- b) **Custo de despesas fixas** de R\$50000;
- c) **Custo da matéria prima:** com o menor custo de R\$8,00 e maior custo de R\$12,00.

Além disso, a mão de obra da produção será feita por 4 empresas (fornecedores), conforme Tabela (11):

Tabela 11: Custo da mão de obra de 4 empresas.

Fornecedor/Empresa	f(mínimo)(%)	f(máximo)(%)	Custo de Mão de Obra (R\$)
ABA	0	15	4,5
BCA	16	35	5
ECO	36	80	7
TAL	81	100	8

Fonte: Autor, 2016

Conforme os dados, avaliar através de simulações (Método Monte Carlo), e estimar uma probabilidade dessa empresa ter prejuízo ao lançar esse produto no mercado [(VASCONCELLOS; OLIVEIRA; BARBIERI, 2011), adaptado].

### Solução:

Neste experimento, será feita uma simulação Estocástica com o uso do programa Microsoft *Excel*, rodado no sistema operacional Windows. Será criado um cenário com 20, 50 e 100 interações com 5 simulações para cada cenário, que serão gerados números aleatoriamente usando o comando  $= a + (b - a) \cdot ALEATÓRIO()$  DO EXCEL distribuídas de maneira uniforme no intervalo  $[a, b]$ , para os custos da matéria-prima e para o preço de venda, para a demanda será usado o comando  $(= INV.NORM(ALEATÓRIO(); demanda\ média; Desvio\ padrão))$ , já para o custo da mão de obra, usa-se o comando  $(= PROCV(ALEATÓRIO(); f(mínima): valor\ da\ mão\ de\ obra\ máxima; 3; VERDADEIRO))$  conforme o quadro demonstrativo disposto na Figura (50) e com os seguintes comandos:

- Para a geração dos cenários: inserir a partir da célula *A3* a quantidade de interações a serem realizadas;
- Para a demanda: para a geração de números aleatórios inserir na célula *B3* o comando  $= INV.NORM(ALEATÓRIO(); MÉDIA; DP)$  e em seguida selecionar a célula *B3* e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Preço de venda: inserir na célula *C3* o comando  $= \$J\$3 + (\$J\$4 - \$J\$3) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula *C3* e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Custo da matéria prima: inserir na célula *D3* o comando  $= \$M\$3 + (\$M\$4 - \$M\$3) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula *D3* e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- Custo da mão de obra: inserir na célula *E3* o comando  $= PROCV(ALEATÓRIO(); \$K\$10 : \$N\$13; 4; VERDADEIRO)$  e em seguida selecionar a célula *E3* e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;

- f) Custo fixo: como o custo fixo é constante, inserir o valor em todas as células a partir da  $F3$  até a quantidade de interações;
- g) Para a obtenção do lucro, usar o comando  $a = (C3 - D3 - E3) \cdot B3 - F3$  a partir da célula  $G3$  até o número de interações desejadas;
- h) Lucro Médio: inserir na célula  $K15$  o comando  $=MEDIAA(intervalo da coluna G3)$ ;
- i) Desvio padrão: inserir na célula  $K16$  o comando  $=DESVPAD(intervalo da coluna G3)$ ;
- j) Cálculo da probabilidade ( $p < 0$ ):  
 inserir na célula  $K17$  o comando  $"=DIST.NORM(0;K15;K16;VERDADEIRO)"$ .

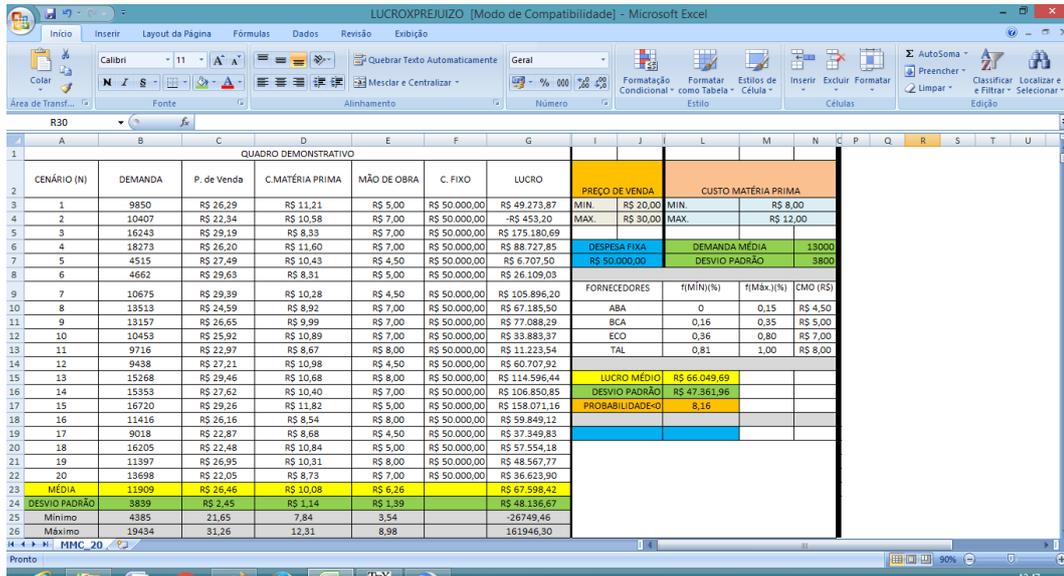
Figura 50: Quadro demonstrativo com o uso do Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	L	M	N			
1	QUADRO DEMONSTRATIVO														
2	CENÁRIO (N)	DEMANDA	P. de Venda	C. MATÉRIA PRIMA	MÃO DE OBRA	C. FIXO	LUCRO	PREÇO DE VENDA		CUSTO MATÉRIA PRIMA					
3	1	CÉLULA B3	CÉLULA C3	CÉLULA D3	CÉLULA E3	CÉLULA F3	CÉLULA G3	MIN.	R\$ 20,00	MIN.	R\$ 8,00				
4	2							MAX.	R\$ 30,00	MAX.	R\$ 12,00				
5	3							DESPESA FIXA		DEMANDA MÉDIA		13000			
6	4							R\$ 50.000,00		DESVIO PADRÃO		3800			
7	5							FORNECEDORES					f(MÍN)(%)	f(Máx.)(%)	CMO (R\$)
8	6							ABA					0	0,15	R\$ 4,50
9	7							BCA					0,16	0,35	R\$ 5,00
10	8							ECO					0,36	0,80	R\$ 7,00
11	.							TAL					0,81	1,00	R\$ 8,00
12	.														
13	.														
14								LUCRO MÉDIO		#DIV/0!					
15								DESVIO PADRÃO		#DIV/0!					
16								PROBABILIDADE<0							
17															

Fonte: Autor, 2016.

Neste caso, a avaliação será feita por meio de análise de dados estatísticos. Será analisado, com a geração de números aleatórios para 20, 50 e 10000 cenários, com 5 simulações ( $S_i$ , com  $1 \leq i \leq 5$ ), conforme o exemplo apresentado na Figura (51) para uma amostra de 20 cenários, que faz uma análise por dados estatísticos, pelo qual usam-se as medidas de tendência central, medidas de dispersão, bem como análise do intervalo de confiabilidade. Neste caso, o uso do recurso do programa *Excel* dará apenas uma ideia do uso do Método Monte Carlo como uma ferramenta útil para que possa auxiliar na análise de riscos, pois, para ter uma boa estimativa, o cenário teria que ser de pelo menos 200000 interações, o que fica prejudicado pelo programa *Excel* devido às limitações de linhas, mas, com o uso de outros programas, é possível ter uma estimativa com erros praticamente ínfimos.

Figura 51: Análise do prejuízo no lançamento do produto X no mercado com um cenário de 20 interações.



Fonte: Autor, 2016.

Após a geração de números aleatórios para 20, 50 e 10000 cenários, com 5 simulações ( $S_i$ , com  $1 \leq i \leq 5$ ), obtiveram-se os seguintes dados com seus resultados apresentados nas Tabelas (12),(13) e (14) respectivamente e os dados médios apresentados na Tabela (15).

Tabela 12: Dados da geração do cenário com 20 interações.

Critérios	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	Média
Lucro Médio	61152,89	50583,02	42970,84	69032,57	54190,60	55585,98
D.P	57777,34	45731,69	43677,17	53882,74	41739,16	48561,62
Probabilidade(%) < 0	14,49	13,43	16,26	10,01	9,71	12,78

Fonte: Autor, 2016

Tabela 13: Dados da geração do cenário com 50 interações.

Critérios	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	Média
Lucro Médio	71314,98	76071,48	55359,78	75245,28	52795,49	66213,20
D.P	56182,88	54382,28	58310,55	55359,03	50392,90	54925,53
Probabilidade(%) < 0	10,22	8,09	17,12	8,70	14,74	11,77

Fonte: Autor, 2016

Tabela 14: Dados da geração do cenário com 10000 interações.

Critérios	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	Média
Lucro Médio	62558,92	62533,34	62459,65	61694,81	62529,24	62355,19
D.P	56821,72	56365,86	56207,31	56302,76	56316,17	56402,76
Probabilidade(%) < 0	13,55	13,36	13,32	13,66	13,34	13,45

Fonte: Autor, 2016

Tabela 15: Quadro resumo dos dados da geração de 20, 50 e 10000 interações com valores médios em cada cenário.

Cenários	Lucro Médio (R\$)	Desvio Padrão (R\$)	Probabilidade(%) < 0
20	55585,98	48561,62	12,78
50	66213,20	54925,53	11,77
10000	62355,19	56402,76	13,45

Fonte: Autor, 2016

Ao analisar os cenários apresentados, verificou-se que a estimativa da empresa ter prejuízo ao lançar o produto  $X$  no mercado tem uma probabilidade menor que 14% com um intervalo de confiabilidade de 95%, apesar de ter uma análise com um número de cenários pequeno para o Método Monte Carlo. Mesmo assim, pode-se perceber que as possibilidades da empresa ter prejuízo variam entre 13 e 14, conforme dados gerados pelas simulações feitas no cenário de 10000 interações.

### 3.3.3 Física

A aplicação do Método Monte Carlo na Física é sempre rica; em especial esse método tem estudos em vários fenômenos da Física, como em determinar a temperatura em pontos de determinada chapa de aço, na Física Nuclear e entre outros. Neste caso, será descrita apenas a aplicação em cálculo de distância percorrido por um "ponto material" em um determinado intervalo de tempo. Assim, inicialmente é determinada na Física como um **passeio aleatório discreto** na trajetória de um "ponto material". Isso significa um caminho aleatório a partir de um ponto inicial, dirigido ao longo do caminho em intervalos de tempo, que liga sucessões de pontos desse caminho a uma velocidade nesses pontos, sendo que a direção do ponto de partida desse caminho é escolhido de maneira aleatória. Cada ponto das possíveis direções de partida em cada ponto ao longo desse caminho terá a mesma probabilidade de ocorrer (HOWARD; RORRES, 2001).

**Propriedade 3.3.1 (Propriedades do passeio aleatório).** *Seja  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_i$ , com  $0 \leq i \leq n$  uma sucessão de passeios aleatórios, todos começando em um mesmo ponto do caminho inferior (tempo) especificado. Sejam  $t_0^*, t_1^*, t_2^*, t_3^*, \dots, t_i^*$  os tempos*

nos pontos do caminho de cada intervalo de tempo  $\Delta t_i = t_{i-1} - t_i$  associado a uma velocidade nesse intervalo que foram gerados ao longo desses passeios aleatórios. Então, o valor médio desses intervalos de tempo tende à velocidade no ponto desse intervalo especificado, quando o número  $N$  de passeios aumenta indefinidamente, tem-se uma estimativa da distância percorrida por esse "ponto material" (HOWARD; RORRES, 2001).

A propriedade (3.3.1) é uma consequência direta da propriedade do teorema do valor médio, sendo que sua demonstração não será necessária, devido ao **passeio aleatório discreto** envolver conceitos elementares de probabilidade, que já foram descritos e definidos no capítulo 1 e capítulo 2 deste trabalho. Para o experimento, será analisado o problema da distância percorrida em um dado intervalo de tempo por um "ponto material".

Considere um "corpo material" em um caminho com os tempos  $(t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_i)$  com velocidade  $[V(t_i)]$  em cada dado instante  $(v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_i)$ . Neste sentido, a distância percorrida é o inverso da velocidade, pois se a velocidade permanecer constante em todo intervalo de tempo, então o movimento será uniforme ( $M.U$ ), e sua distância percorrida é dada por:  $\Delta S = V \cdot \Delta t$  (STEWART, 2011).

No caso desse estudo, em cada intervalo de tempo ( $\Delta t = t_{i-1} - t_i$ ), a velocidade varia no intervalo. Suponha que um determinado "ponto material" mova-se a uma velocidade determinada pela função  $f(t) = V$  num dado intervalo de tempo  $[a, b]$ , desde que  $f(t) \geq 0$ . Considerando que nesse intervalo de tempo sejam registradas as velocidades  $v(t_0), v(t_1), v(t_2), v(t_3), \dots, v(t_i)$  de mesma maneira que a velocidade tenha uma proximidade de uma velocidade constante. Neste caso, em cada subintervalo, terá sempre uma leitura de um intervalo de tempo  $\Delta t_i = t_{i-1} - t_i$  com uma velocidade  $V = f(\Delta t_i)$ , portanto a distância percorrida nesse intervalo é aproximadamente dada pela área definida pelo retângulo de base  $\Delta S_i = \Delta t_i \cdot f(t_i)$  e altura  $f(t_i)$ .

Assim, pode-se perceber que o valor da área de cada região determinada em cada um desses subintervalos dar-se-á ideia da distância percorrida pelo "ponto material" naquele intervalo de tempo. Logo, a distância total percorrida ao longo do intervalo de tempo  $[a, b]$  é aproximadamente:

$$\Delta S_e = f(t_0) \cdot \Delta t_0 + f(t_1) \cdot \Delta t_1 + \dots + f(t_{i-1}) \cdot \Delta t_{i-1} = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i \quad (3.20)$$

para as alturas definidas nas extremidades esquerdas de tempo de cada retângulo, e a distância com retângulos de alturas definidas pelas extremidades direitas ficam determinada por:

$$\Delta S_d = f(t_1) \cdot \Delta t_1 + f(t_2) \cdot \Delta t_2 + \dots + f(t_i) \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t_i \quad (3.21)$$

Para (STEWART, 2011) a distância real percorrida pelo "ponto material" é definida pelo limite da soma, quando  $n$  cresce, tal que:

$$\Delta S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t_i \quad (3.22)$$

Pelas equações (3.20) e (3.21) pode-se perceber que quanto maior for a medição da velocidade em um dado intervalo de tempo, melhor será a estimativa da distância percorrida, e como as equações definem áreas inferiores e superiores à curva da função. Neste caso, a média entre as duas áreas definirá melhor a estimativa da distância percorrida, logo:

$$\Delta S = \frac{\Delta S_e + \Delta S_d}{2} \quad (3.23)$$

**Exemplo 3.3.4.** *A nasa lançou em 7 de maio de 1992 o ônibus espacial Endeavour STS – 49, com o propósito de instalar uma peça no satélite de comunicação do INTELSAT. Os dados do quadro da Tabela (16) fornecidos pela NASA mostram a velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares. Neste caso, qual a altura acima da superfície da Terra do Endeavour após 62 segundos depois do lançamento?*

Tabela 16: Dados do lançamento do ônibus espacial.

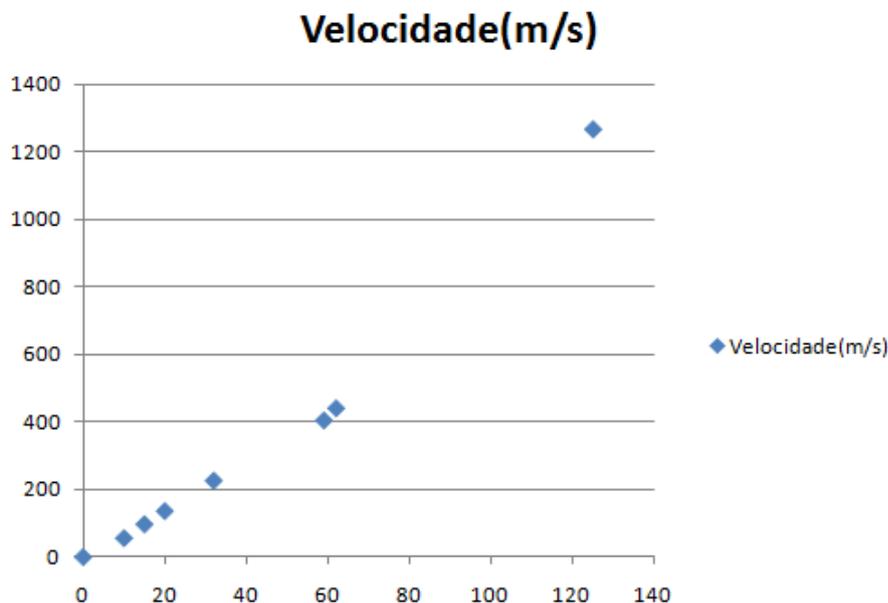
EVENTO	TEMPO (s)	V(m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56
Fim da manobra de inclinação	15	97
Regulador de pressão a 89%	20	136
Regulador de pressão a 67%	32	226
Regulador de pressão a 104%	59	404
Pressão dinâmica máxima	62	440
Separação dos foguetes auxiliares	125	1265

Fonte: NASA.

### Solução:

Considere o gráfico de dispersão representado na Figura (52) gerado pelo programa Excel.

Ao analisar o comportamento dos pontos  $(t, f(t))$ , pode-se perceber que o conjunto de pontos não segue uma linearidade, assim é necessário fazer um ajuste desses pontos.

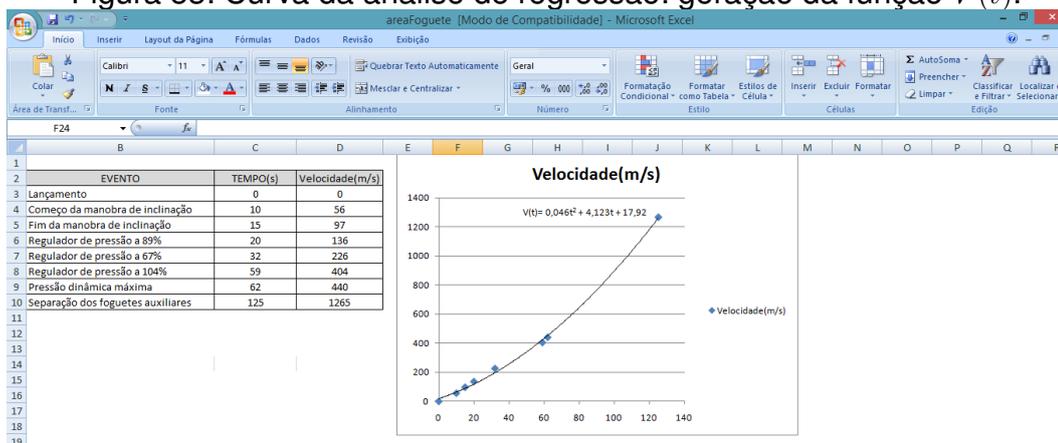
Figura 52: Comportamento dos pontos  $(t_i, f(t_i))$ .

Fonte: Autor, 2016.

Nesse caso, será feita uma análise de regressão com o uso do programa *Excel*, pois, para qualquer conjunto de dados, a análise de regressão sempre determinará uma reta ou uma curva (polinomial) que se ajustará melhor a eles minimizando a soma dos erros quadráticos, e esse método é conhecido como "Mínimo Quadrados"(NEUFELD, 2003). O *Excel* tem uma capacidade com certos números de opções para permitir a análise de regressão para um conjunto de dados. Isso inclui uma "ferramenta de análise" e várias funções que são acessadas pelo assistente de função com uma opção no assistente de gráfico. Assim, foi utilizado neste experimento o assistente de função conforme quadro da Figura (53) que foi obtido de acordo com a sequência dos comandos:

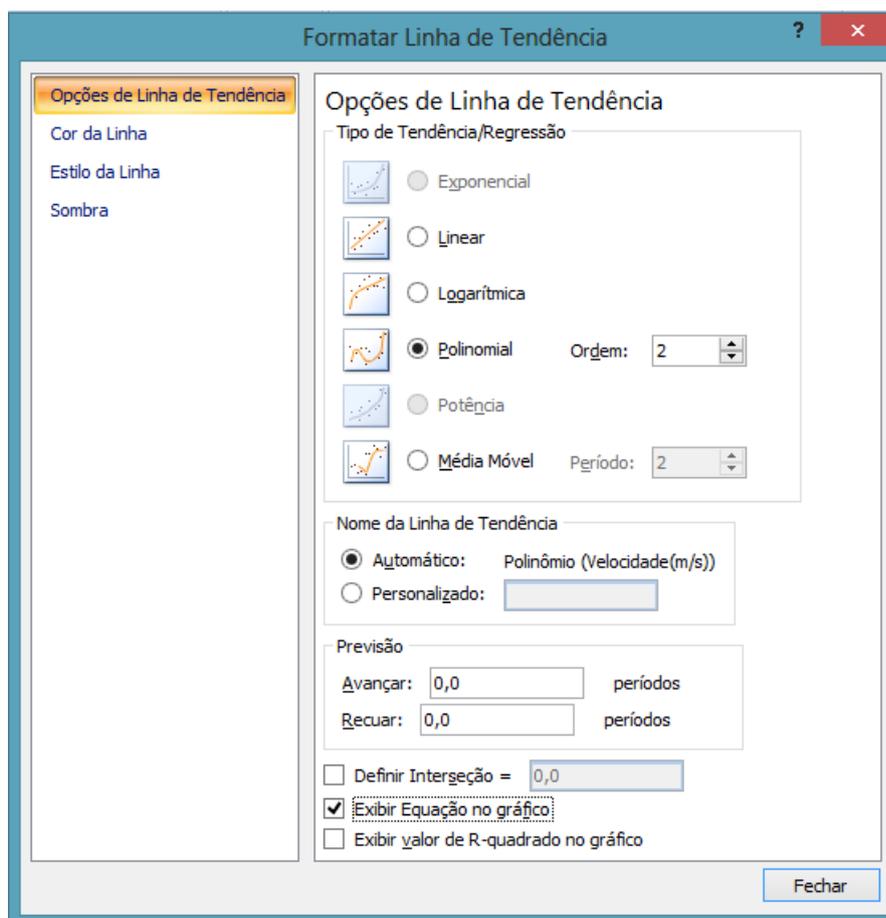
- Criar uma tabela com os dados nas colunas *B*, *C* e *D*;
- Selecione o intervalo de células "C2 : D10" e em seguida, na barra de ferramentas, selecione o menu "Inseri" gráfico de "Dispersão: somente com marcadores";
- Para gerar a curva: clicar com o botão direito do *mouse* em qualquer um dos marcadores, selecionar o comando "Adicionar linha de tendência", marcar as opções conforme mostra a Figura (54) e clicar em fechar. Em seguida, gerará o gráfico com o ajuste e com a equação polinomial da regressão, ver (Figura 55).

Figura 53: Curva da análise de regressão: geração da função  $V(t)$ .



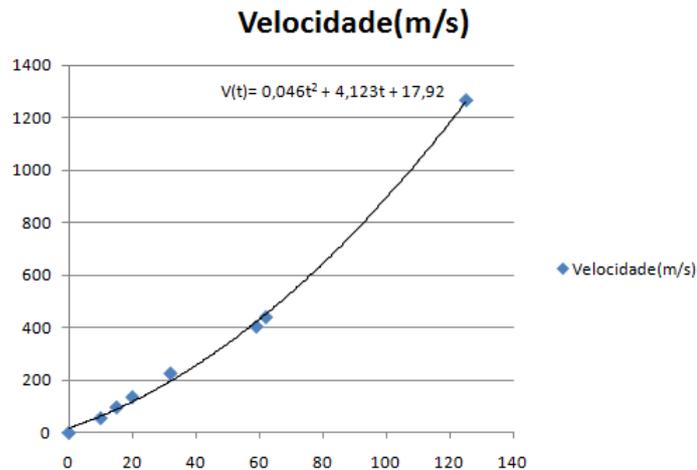
Fonte: Autor, 2016.

Figura 54: Quadro demonstrativo: Opções de Linha de Tendência.



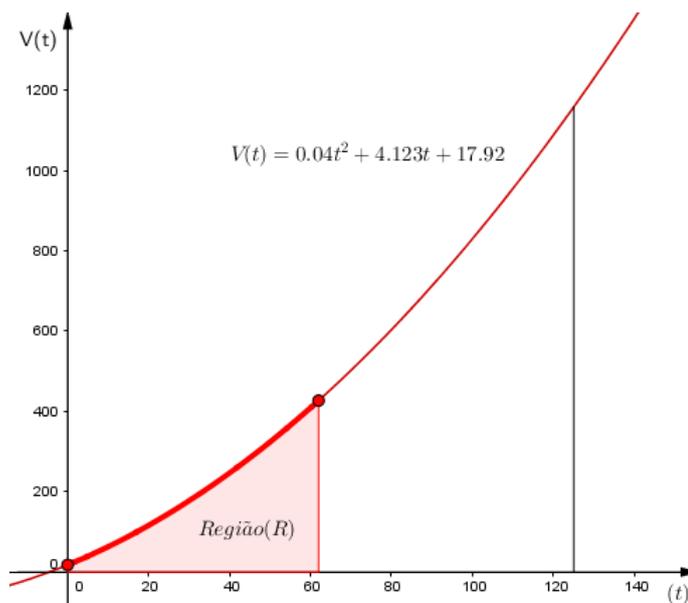
Fonte: Autor, 2016.

Figura 55: Geração da função: curva da análise de regressão.



Fonte: Autor, 2016.

Neste caso, a partir do ajustamento dos valores, a área da região ( $R$ ) da curva da função  $V(t) = 0,04 \cdot t^2 + 4,123 \cdot t + 17,92$  conforme gráfico da Figura (56) será a estimativa da altura do foguete após 62 segundos depois do lançamento, assim  $\Delta H \approx S_{Região}$ . Para este experimento, o cálculo da área será feito por dois métodos aplicando o Método Monte Carlo-MMC.

Figura 56: Gráfico da função  $V(m/s) \times t(s)$ .

Fonte: Autor, 2016.

**Métoto 1:**

Neste método, será feita por Geração de Retângulos Inferiores e Superiores, a curva da função pelo Método Monte Carlo-MMC. Assim, pode-se estimar a área (distância/altura percorrida) usando a divisão da região em  $N$  faixas que formará retângulos com as bases formadas pelos comprimentos dos subintervalos (não necessariamente de mesmo comprimento) e as alturas (número aleatórios gerados no intervalo de 0 a 62) com os valores de  $V(t_i) = 0,04 \cdot t_i^2 + 4,123 \cdot t_i + 17,92$ . Para uma boa estimativa, pelo Método Monte Carlo, uma única simulação não tem um valor próximo do real. Neste caso, pode-se dizer que aumentando o número de faixas ( $N \mapsto \infty$ ) obter-se-á uma estimativa melhor do valor dessa área. Assim, será usado o recurso computacional o programa *Microsoft Excel*, rodado no sistema operacional Windows, com 3 interações e divisões em 100, 1000 e 10000 faixas (retângulos) com comprimentos (bases)  $\Delta T_i = t_{i-1} - t_i$ , que serão gerados números ( $t_i^*$ ) aleatoriamente pela função  $[= a + (b - a) \cdot ALEATÓRIO()]$  DO EXCEL distribuídas de maneira uniforme no intervalo  $[a, b]$ , com as suas alturas definidas com as extremidades do lado esquerdo ( $t_{e_i}$ ) e as extremidades do lado direito ( $t_{d_i}$ ) dos subintervalos. A partir das simulações realizadas pelo recurso computacional conforme modelo descrito na Figura (57) para as interações 100, 1000 e 10000, obteve-se as seguintes aproximações (Tabela 17) para o valor da área:

Figura 57: Quadro demonstrativo para o uso do cálculo da área da curva.

INTERVALO	NÚMERO DE FAIXAS (N)	TOTAL DE SUBINTERVALOS (N)	EXTREMIDADES DOS RETÂNGULOS	ALTURA (MENOR)	BASE DO RETÂNGULO	ÁREA (INFERIOR)	ALTURA (MAIOR)	ÁREA (SUPERIOR)	
0	62		0,000000000000	0,000000000000					
1		1	Copie os números gerados na coluna "C" e cole na coluna "G" entre os valores "0" e "62". Para colar na coluna "G" clique com o botão direito do "mouse" e na opção "colar especial" selecionar a opção "valores"	O valor da altura em "H3" é definida por $=0,04*(G3)^2+4,123*(G3)+17,92$ . Para os demais selecione a célula e com o "mouse" arraste o cursor até a célula da linha N(i).	O valor da base em "B3" é definida por $=H3*I3$ . Para os demais selecione a célula e com o "mouse" arraste o cursor até a célula da linha N(i-1).	O valor da área inferior em "J3" é definida por $=0,04*(G4)^2+4,123*(G4)+17,92$ . Para os demais selecione a célula e com o "mouse" arraste o cursor até a célula da linha N(i-1).	O valor da área superior em "L3" é definida por $=I3*K3$ . Para os demais selecione a célula e com o "mouse" arraste o cursor até a célula da linha N(i-1).		
N(i-1)		N(i-1)							
N(i)		N(i)	62,00000000000000	427,30600000000000	Comprimento do intervalo [a, b]	Representa a soma das áreas dos retângulos inferiores.	Valor estimado da área	Representa a soma das áreas dos retângulos superiores.	Estimativa da área: Média entre a somas das áreas dos retângulos inferiores e superiores.

Fonte: Autor, 2016.

Tabela 17: Estimativa da altura do foguete após 62s do lançamento.

$N$	Quantidade de números	$S(R_{e_n})$	$S(R_{d_n})$	$S(R) \cong \frac{S(R_{e_n})+S(R_{d_n})}{2}$
100	99	11973,81	12454,15	12213,98
1000	999	12187,12	12239,21	12213,16
10000	9999	12210,61	12215,70	12213,15

Fonte: Autor, 2016

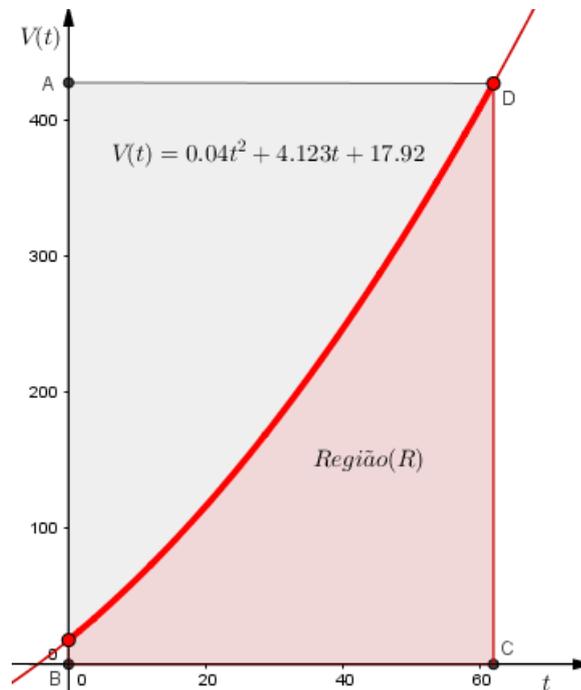
Pelas simulações, pode-se notar que com 10000 interações é possível notar que a área já converge para um valor, gerando várias simulações, pode-se perceber que

o valor da área é estimado em **12213,15 u.a**, assim a altura do foguete 62s após o lançamento é:  $\Delta H \approx 12213,15 m$ .

### Método 2:

O experimento consiste em lançar (gerar) **pontos** em um retângulo de comprimento  $C = 62$  e altura ( $H = V(62) = 427,31$ ) com o objetivo de gerar pontos para preencher a região da curva da função  $V(t_i) = 0,04 \cdot t_i^2 + 4,123 \cdot t_i + 17,92$  inscrita no espaço amostral definido pelo retângulo de vértices  $ABCD$  conforme a Figura (58).

Figura 58: Método da geração de pontos na curva.



Fonte: Autor, 2016

Assim, considerando que todos os pontos lançados (gerados) atinjam o retângulo, tem-se que a probabilidade de que o ponto atinja a área da região (R) é dada pela razão entre as áreas da região (R) e o retângulo, ou seja:  $\frac{S_{Região(R)}}{S_{ABCD}} \approx p$ . Sabe-se, que a área da curva é definida por  $S_{Região(R)} = \int_a^b V(t)dt$  e a área do retângulo de comprimento (base)  $C$  e altura  $H$  é definida por:  $S_{ABCD} = C \cdot H$ . Neste caso, como a ideia é estimar a área da região (R), então a probabilidade fica determinada por:

$$p \approx \frac{S_{Região(R)}}{S_{ABCD}} = \frac{\int_0^6 2V(t)dt}{62 \cdot 427,31} = \frac{\int_0^6 2V(t)dt}{26493,22} \quad (3.24)$$

Considerando que em  $N$  lançamentos (geração de pontos) pode-se obter  $k$  sucessos de acertar a região ( $R$ ). Então tem-se uma probabilidade frequentista definida

por:  $p = \frac{k}{N}$ . Neste caso, pelo método da área, pode-se estimar o valor da altura  $H$  alcançada pelo ônibus espacial, pois se considerarmos o experimento em lançar (gerar)  $N$  pontos ( $P$ ) de coordenadas  $(t, V(t))$ , poderemos contar quantos desses atingem a região ( $R$ ) da curva  $V(t) = y$ . Assim, substituindo  $p = \frac{k}{N}$  na equação (3.24), obtém-se:

$$\frac{k}{N} \approx \frac{S_{Região(R)}}{S_{ABCD}} = \frac{\int_0^6 2V(t)dt}{62 \cdot 427,31} = \frac{\int_0^6 2V(t)dt}{26493,22} \Rightarrow S_{Região(R)} = 26497,22 \cdot \frac{k}{N} \quad (3.25)$$

Para esse experimento, foi desenvolvida uma técnica com o programa *Excel* conforme o quadro demonstrativo da Figura (59) para a estimativa da altura após 62s do lançamento do ônibus espacial, em que foram considerados dois conjuntos  $A = [0; 62]$  e  $B = [0; 427, 31]$ , um ponto  $P$  de coordenadas  $(t, V)$  para o lançamento no (retângulo). Nesse caso, o ponto  $P$  é um par ordenado  $(t, V)$  tal que  $P = \{(t, V) \in A \times B | t \in A \text{ e } V \in B\}$ , que serão gerados números  $t_i$  e  $V_i$  aleatoriamente pela função  $[= a + (b - a) * ALEATÓRIO()]$  DO EXCEL distribuída de maneira uniforme no intervalo  $[a, b]$ . Neste caso, ao gerar  $N$  pontos (lançamentos) no retângulo, o programa analisa  $n$  pares de pontos  $P_i$  da forma  $(t, V)$  com a geração da variável aleatória  $X$ , e a variável gerada possui a distribuição de Bernoulli  $P(t, V) = X$ , definida como:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{para } V_i \geq V(t_i), \\ 1, & \text{se } V_i < V(t_i) \end{cases}$$

Figura 59: Quadro demonstrativo para a geração de pontos aleatórios.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	
1		INTERVALOS						PONTOS DENTRO											
2			Mínimo	Máximo				PONTOS FORA											
3		t	0	62															
4		V	0	427,31															
5		Nº DE INTERAÇÕES						SIMULAÇÕES											
6		COORDENADAS																	
7		t	V	V(t)	VARIÁVELS			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	MÉDIA	
8								PONTOS DENTRO											
9								PONTOS FORA											

Fonte: Autor, 2016

Conforme o quadro demonstrativo (Figura 59), foram gerados os números aleatórios das coordenadas  $t$  e  $V$  para a geração da variável aleatória  $X$  com os seguintes comandos:

- a) Para a geração da coordenada (abscissa)  $t$ : para a geração de números aleatórios inserir na célula B8 o comando  $= \$C\$3 + (\$D\$3 - \$C\$3) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula B8 e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;

- b) Para a geração da coordenada (ordenada)  $V$ : para a geração de números aleatórios, inserir na célula  $C8$  o comando =  $\$C\$4 + (\$D\$4 - \$C\$4) \cdot ALEATÓRIO()$  e em seguida selecionar a célula  $C8$  e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- c) Para a geração do valor da função  $V(t)$ : neste caso inserir na célula  $D8$  o comando =  $0,04 * (B8)^2 + 4,123 * (B8) + 17,92$  e em seguida selecionar a célula  $D8$  e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações;
- d) Para a geração da variável aleatória  $X$ : inserir na célula  $E8$  o comando =  $SE(C8 >= D8; 0; 1)$  e em seguida selecionar a célula  $E8$  e com o *mouse* arrastar até o número desejado de interações, assim o programa fará a comparação e dará como retorno 0 ou 1. Em seguida, na última célula do intervalo das variáveis, inserir um comando para contar todas as células com o valor 1.

Foram desenvolvidas para fazer a estimativa da área da região ( $R$ ) 2000, 10000 e 62000 interações com 10 simulações ( $S_i$ , com  $1 \leq i \leq 10$ ) em cada interação, e obtiveram-se os seguintes resultados da probabilidade dos pontos pertencerem à região ( $R$ ) da função, conforme apresenta na Tabela (18) os valores médios:

Tabela 18: Número de pontos dentro da região ( $R$ ), para 2000, 10000 e 62000 interações.

N	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	Média
2000	908	921	916	953	933	916	948	921	935	938	928,90
10000	4534	4543	4623	4577	4621	4608	4571	4580	4500	4745	4595,20
62000	28712	28660	28504	28509	28535	28550	28426	28592	28575	28571	28563,40

Fonte: Autor, 2016

Neste caso, como foram feitas em cada interação 10 simulações, a probabilidade dos pontos pertencerem à região ( $R$ ) delimitada pela função no intervalo  $[0, 62]$  fica definida pela equação:

$$p \approx \frac{\bar{k}}{N} \approx \frac{S_{Região(R)}}{S_{ABCD}} \Rightarrow S_{Região(R)} = \Delta H \approx S_{ABCD} \cdot \frac{\bar{k}}{N} \tag{3.26}$$

com  $\frac{\bar{k}}{N} = \frac{\text{Número médio de pontos dentro da região } (R)}{\text{Número de pontos gerados}}$ .

Neste caso, conforme a equação (3.26) tem-se que a probabilidade para as interações 2000, 10000 e 62000 são respectivamente a:  $p(2000) = \frac{92890}{2000} = 0,46445$ ;  $p(10000) = \frac{459520}{10000} = 0,45952$  e  $p(62000) = \frac{2856320}{62000} = 0,46070$ . Usando a relação da equação (3.26), com os valores da probabilidade para a interação de 2000 pontos e área do retângulo de vértices  $ABCD$  com  $S_{ABCD} = 26493,22u.a$ , encontramos uma área estimada para a região ( $R$ ), assim a área é:  $S_{Região(R)} \approx 26493,22 \cdot p(2000) = 26493,22 \cdot 0,46445 \Rightarrow S_{Região(R)} = 12304,78u.a$ . Como a área estima uma distância, logo pode-se

dizer que a altura do ônibus após  $62s$  do lançamento encontrava-se a:  $\Delta H \approx 12304,78m$  de altitude, o que gerou uma estimativa não tão próxima da real, pois há grande oscilação na estimativa da área entre as simulações, mas já deu para perceber que quanto maior o número de pontos, melhor será essa estimativa. Já para as interações de 10000 e 62000 pontos teve uma estimativa de:  $S_{Região(R)} \approx 26493,22 \cdot p(10000) = 26493,22 \cdot 0,45952 \Rightarrow S_{Região(R)} = \Delta H \approx 12174,16m$  e  $S_{Região(R)} \approx 26493,22 \cdot p(62000) = 26493,22 \cdot 0,46070 \Rightarrow S_{Região(R)} = \Delta H \approx 12205,43m$  respectivamente. Neste caso, os resultados deste experimento já eram até esperados, pois a cada aumento no número de pontos, diminuímos o erro médio relativo, o que significa que a probabilidade dos pontos pertencerem à região ( $R$ ) aumenta em grande proporção. Assim quanto maior o número de pontos gerados, mais próxima é a razão entre o número de pontos dentro da região ( $R$ ) e o número gerado. Neste caso, a estimativa da altura é um valor estimado em  $12205,43m$ , que é inferior à altura real que é de  $12213,15m$  obtida pelo cálculo da integral da função.

### 3.3.4 Ciências médicas

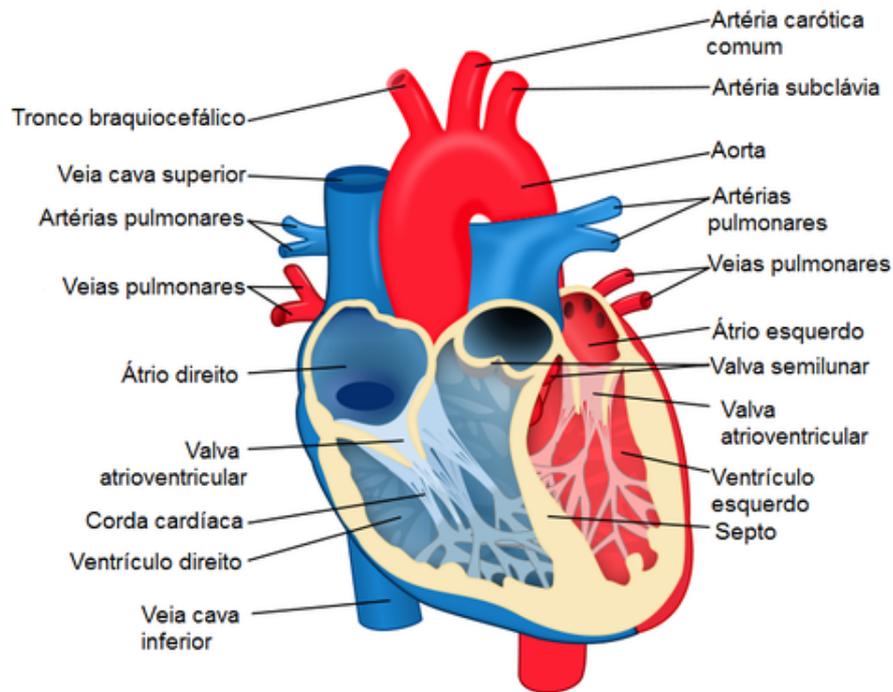
O Método Monte Carlo tem sua aplicabilidade na modelagem de problemas em relação às Ciências Médicas. Assim, nesta subseção, será apresentado o uso da técnica do Método Monte Carlo na saúde, uma das subáreas. Será visto que, com a aplicação de contraste na aorta do coração, pode-se medir a capacidade (volume) de sangue bombeado, que nesse caso o processo é chamado de capacidade cardíaca.

#### 3.3.4.1 Capacidade cardíaca

O sistema cardiovascular humano, conforme gráfico (Figura (60)), é responsável pela circulação do sangue, por onde são transportados todos os nutrientes e o oxigênio pelo corpo. Já o coração é um órgão desse sistema e tem como principal função bombear o sangue através dos vasos sanguíneos para todo o corpo e que depois retorna do corpo pelas duas veias: primeiro entra no átrio direito do coração e é bombeado para os pulmões pelas artérias pulmonares, isso ocorre para fazer a oxigenação, em seguida retorna para o átrio esquerdo por meio das veias pulmonares e pela aorta circula para todo o resto do corpo (STEWART, 2011). A Figura (60) tem essa representação.

Assim, o volume que é bombeado pelo coração em um dado intervalo de tempo  $[0, t]$  com uma taxa de fluxo na aorta é denominado de capacidade cardíaca, denotado por  $F$  e medido em litros por minuto ( $L/min$ ). Para medir essa capacidade, é usado o *método da diluição do contraste*. Nesse caso, injeta-se o contraste no átrio direito para que ele escoar do coração para a aorta, e em seguida uma sonda é inserida na aorta e mede concentração desse contraste que sai do coração em um dado intervalo

Figura 60: Sistema cardiovascular humano.



Fonte: (STEWART, 2011), Adaptado.

de tempo, até que todo o contraste injetado acabe. Seja  $c(t)$ , uma função que mede a concentração do contraste num dado intervalo de tempo  $[0, t]$ . Como  $c(t)$  é uma função e sua concentração é medida em um intervalo de tempo  $[0, t]$ , se para dado  $t_i^*$  vai sempre existir um  $c(t_i^*)$  pertencente a função, nesse caso se dividir o intervalo em subintervalos de comprimento  $\Delta t = t_{i-1} - t_i$ , então a concentração nesse subintervalo é estimada aproximadamente pela equação:

$$(\text{concentração}) \cdot (\text{volume}) = A = c(t)(F \cdot \Delta t) \quad (3.27)$$

com  $F$  sendo a vazão desse contraste que é a capacidade cardíaca desejada. Se o intervalo subdividir-se em  $N$  faixas (intervalos de tempo) de mesmo comprimento  $\Delta t = \frac{t}{N}$ , então o total de concentração desse contraste definido na equação (3.27) fica definido por:

$$\sum_{i=1}^n c(t)F\Delta t = F \cdot \sum_{i=1}^n c(t)\Delta t \quad (3.28)$$

assim, de acordo com (STEWART, 2011) quanto maior for a subdivisão do intervalo de tempo, tem-se que a quantidade de contraste  $A$  injetada no corpo definida na equação (3.28) reduz na equação:

$$A = F \int_0^t c(t)dt \Rightarrow F = \frac{A}{\int_0^t c(t)dt} \quad (3.29)$$

em que a quantidade a ser injetada de contraste  $A$  é conhecida e as leituras de concentração num dado intervalo de tempo são definidas pela integral  $\int_0^t c(t)dt$ , na qual é obtida usando a Regra de Simpson, em que a definição é dada por (MUNEM; FOULIS, 1982) da seguinte maneira:

**Definição 3.3.6 (Regra de Simpson).** *Seja a função  $f$  de Riemann integrável e definida no intervalo fechado  $[a, b]$ . Para cada inteiro positivo  $n$ , define-se:*

$$S_{2n} = \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \quad (3.30)$$

com  $\Delta X = \frac{b-a}{2n}$  e  $y_k = f(a + k\Delta x)$  para  $0 \leq k \leq 2n$ . Então  $S_{2n} \approx \int_a^b f(x)dx$ , assim tem-se uma boa aproximação quando  $n$  tende ao infinito no sentido de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \int_a^b f(x)dx$ .

Comparando a definição da Regra de Simpson com a integral que mede a concentração de contraste que passa na aorta em um dado intervalo de tempo, pode-se afirmar que:  $\Delta x$  é o intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) que será feita a leitura e  $y_k$  é a leitura da concentração do contraste  $c(t)$  no intervalo de tempo. Neste caso, o Método Monte Carlo poderá ser usado para determinar a concentração de contraste num intervalo de tempo, pois essa concentração poderá ser definida pela aproximação da área de uma região definida pela função  $c(t)$ .

**Exemplo 3.3.5.** *Em um paciente, será injetado 6mg de contraste, com suas concentrações desse mesmo contraste (mg/L) serão modeladas pela função  $c(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-0,6t}$ , com  $0 \leq t \leq 10$ , onde  $t$  é medido em segundos. Nessas condições, determinar a capacidade cardíaca para o método de diluição do contraste nesse paciente [(STEWART, 2011), adaptado].*

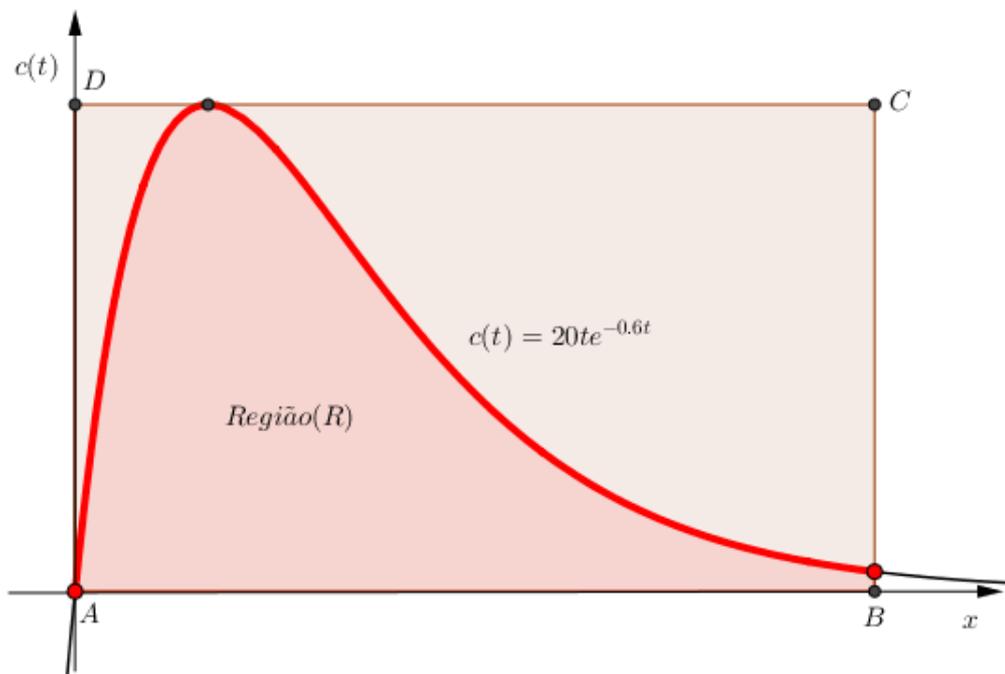
### Solução:

Neste caso, têm-se os seguintes dados:

$A = 6mg$ ;  $t = 10s$  intervalo de tempo para a medição da concentração. Pela equação (3.29) a capacidade cardíaca  $F$  é definida por:  $F = \frac{A}{\int_0^t c(t)dt}$ . Logo, a capacidade cardíaca é:  $F = \frac{6}{\int_0^{10} 20 \cdot t \cdot e^{-0,6t} dt}$ . Como a quantidade de concentração  $QC$  no intervalo de tempo é definida pela função, logo a quantidade é definida pela área da região (R) da função da Figura (61), assim:  $S_R = \int_0^{10} 20 \cdot t \cdot e^{-0,6t} dt \Rightarrow S_R \approx QC$ .

Para o valor da área será aplicado o **experimento 1** da solução do problema (3.3.1) descrito em (3.3.1.2) baseado nos mesmos critérios estabelecidos para aquele experimento. Assim, será usado o recurso computacional do programa *Microsoft Excel*, rodado no sistema operacional Windows, com 3 interações e divisões em 100, 1000 e 10000 faixas com comprimentos  $\Delta_{L_i} = t_{i-1} - t_i$ , que serão gerados números ( $t_i^*$ ) aleatoriamente pela função  $= a + (b - a) * ALEATÓRIO()$  DO EXCEL distribuídas de maneira

Figura 61: Curva de modelagem da concentração de contraste.



Fonte: Autor, 2016.

uniforme no intervalo  $[0, 10]$ , com as suas alturas definidas com as extremidades do lado esquerdo ( $t_{e_i}$ ) e as extremidades do lado direito ( $t_{d_i}$ ) dos subintervalos.

A partir das simulações realizadas pelo recurso computacional, conforme modelo descrito em (3.3.1.2), apenas para as interações 100, 1000 e 10000, obtiveram-se as seguintes aproximações (Tabela 19) para o valor estimado da área:

Tabela 19: Estimativa da concentração de contraste injetada.

$N$	Quantidade de números	$S(R_{e_n})$	$S(R_{d_n})$	$S(R) \cong \frac{S(R_{e_n})+S(R_{d_n})}{2}$
100	99	54,8158	54,2788	54,5473
1000	999	54,5839	54,5974	54,5974
10000	9999	54,5911	54,5921	54,5916

Fonte: Autor, 2016

Assim, a concentração de contraste no intervalo de tempo  $[0,10]$  é de  $QC = 54,5916 \frac{s \cdot mg}{L}$ . Logo a capacidade cardíaca do paciente é de:

$F = \frac{6}{\int_0^{10} 20 \cdot t \cdot e^{-0.6t} dt} = \frac{6mg}{545916 \frac{s \cdot mg}{L}} \Rightarrow F = 0,109907018L/s$ ., multiplicando por 60, logo a capacidade cardíaca é:  $F = (0,109907018L/s) \cdot 60 \Rightarrow F = 6,59L/min$ . Portanto a capacidade cardíaca para  $6mg$  de contraste injetado é de  $6,59L/min$ . Esse valor estimado pelo Método é praticamente próximo do real, que pode ser obtido usando a definição de Integral definida de *Riemann*.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresenta-se neste trabalho uma abordagem do estudo do Método Monte Carlo com aplicações em diversas áreas do conhecimento. Diante disso, mostrou-se que ter conhecimento das teorias probabilísticas de uma variável aleatória é muito importante para o entendimento das aplicações do Método. Assim, ressalta-se aqui que apesar de atualmente esse método não ser praticado e exigido em soluções de problemas com a vida e com práticas, ele é de grande importância podendo ser trabalhado com os conceitos e dar ideia de modelos a resolver problemas com modelos matemáticos adequados.

Durante o período de ensinamento, pode-se concordar que, dos conteúdos abordados, as aplicações sempre são deixadas somente para o final, por acharem muitas vezes complexos ou por acreditarem que não são capazes em aprenderem de maneira clara, assim o Método Monte Carlo, para o ensino médio, não exige uma técnica complexa.

Assim, as aplicações abordadas, se levadas em consideração as demais disciplinas, podem desenvolver no ensino uma interdisciplinaridade. Também criaram algumas situações de problemas com estrutura de solução de várias formas, o que pode dar estímulo aos alunos e muitas vezes fazer com que eles tenham estímulos e resolvam até mesmo por curiosidade. As aplicações apresentadas neste trabalho foram abordadas utilizando unicamente os recursos com conhecimentos de programas em algumas linguagens de programação que com poucos conhecimentos podem ser desenvolvidos e com o recurso do *Excel*, que pode ser ensinado aos alunos do Ensino Básico Técnico e Tecnológico. Assim, por ser um dos recursos de fácil acesso e de entendimento, o método pode ser trabalhado em sala de aula para dar outra visão na solução de problemas.

O Método Monte Carlo, em várias aplicações apresentadas neste trabalho, parece ser repetido, isso é devido à propriedade de caracterização para o método, ou seja, pelo fato de as aplicações apresentarem características semelhantes. Diante disso, os experimentos, em especial, foram usados onde se descreveu o comportamento de cada número aleatório gerado, cujos fenômenos próprios em seus comportamentos, existem, tais como: cálculo de área, curva de demanda, distância percorrida, etc.

Em algumas aplicações, na maioria das vezes, houve a necessidade de estudar e estender outras teorias importantes em outras áreas. Contudo, esse estudo não aprofundou, e sim uma leitura para que nas aplicações tivesse um melhor entendimento. No capítulo 3, foram apresentadas uma abordagem do Método Monte Carlo e várias aplicações com abordagem ao Ensino Médio. No entanto, neste trabalho, foi feita

uma abordagem com uma ideia do método, podendo assim ser ampliado com mais aplicações do Método Monte Carlo com características de soluções complexas em outras áreas da Ciência.

Portanto, as aplicações apresentadas demonstram o quanto essa técnica de solucionar problemas por Monte Carlo tem sua importância. Diante de tudo isso, com este trabalho, espera-se que possa ser usado como um apoio no ensino de Matemática assim como ser um referencial para os professores e alunos que desejarem desenvolver técnicas em solucionar problemas de diversas áreas usando o Método Monte Carlo.

## REFERÊNCIAS

- ALLEN C.R., e. a. **Introduction to Monte Carlo Methods**. *Free Software Foundation*, Computational Science education Project, 1995. Acesso em: 03 de outubro 2015.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 24 março 2016.
- BUSLENKO N. P., G.; SHVIDER YU. A, S.; SRAGIVICH. *The Monte Carlo Method*. Oxford: Pergamon Press, 1966.
- BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2003. único. 507 p.
- CARVALHO, H. L. d. *Sistema de aproximação de  $\pi$  Pelo método de Buffon*. Modificação, adaptação (para o Brasil) e reestruturação para PHP, JavaScript+HTML5 Higor Lopes (2016), 2016. Disponível em: <<http://www.projeto.siud.com.br/>>. Acesso em: 19 novembro 2016.
- COSTA, M. M. et al. Métodos de monte carlo e aproximações de  $\pi$ . *Free Software Foundation*, Laboratório de Mat Aplicada, 2002. Disponível em: <<http://www.feferraz.net>>. Acesso em: 03 de outubro 2015.
- COURA, A. d. S. **Experimentos com Probabilidade e Estatísticas**: Jankenpon, monte carlo, variáveis antropométricas. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL), UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS- INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA, Campinas-SP, 2014.
- FILHO, A. A. D. A simulação de variáveis aleatórias e os métodos monte carlo na quadratura multidimensional. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA), UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, Caxias do Sul-RS, 2000.
- FILHO, P. J. d. F. *Introdução à Modelagem e Simulação de Sistemas*. 2. ed. Florianópolis-SC: Visual Books, 2008. 372 p.
- GENTLHE, J. *Random Number generation and Monte carlo methods*. New york: Springer, 1998.
- HIGHAM, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2002. v. 2.
- HOWARD, A.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookma, 2001. unico. 572 p.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 321 p.
- LAW, A. M.; E., W. D. kelton J. *Simulation modeling and analysis*. 2. ed. New York: Mc Graw-Hill, 1991. v. 2.

- LEHMER, D. H. *Mathematical methods in large-scale computing units proceedings*. Cambridge: Harvard University Press, 1969.
- LEONARDO, F. M. d. *Conexões com a Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. v. 2. 317 p.
- LINS, L. D. Agulha de buffon. *Free*, Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, 2004. Disponível em: <<http://www.cin.ufpe.br/~ldl/buffon.pdf>>. Acesso em: 15 de outubro 2015.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; FERNADEZ. *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios Coleção do Professor de Matemática*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 383 p.
- MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. *Cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1982. v. 1. 605 p.
- NEUFELD, J. L. *Estatística aplicada à administração usando excel*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice hall, 2003. unico. 434 p.
- SMOLE, k. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V. ***Matemática: Ensino Médio***. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. v. 2. 448 p.
- STEWART, j. *Cálculo*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. v. 1. 535 p.
- VASCONCELLOS, M. A. S. de; OLIVEIRA, R. G. de; BARBIERI, F. *Manual de microeconomia*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2011. 374 p.

## **Anexos**

## A CÓDIGOS DOS PROGRAMAS PARA SIMULAÇÃO

Os códigos para compilação para a execução dos programas foram desenvolvidos apenas para fins acadêmicos para estimar do valor de  $\pi$ , na linguagem *Python*, sendo desenvolvidos dois na mesma linguagem ( $Pi1$ ) e ( $Pi2$ ) para mostrar que lançando a mesma quantidade de dardos gera um valor estimado diferente, o que mostra que a cada interação são gerados novas variáveis aleatórias com as características que satisfazem a distribuição de probabilidade.

Listagem A.1: Código da simulação: pi1.py

---

```

#-*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt

Nt = 55000
Na = 0

fig = plt.figure(111).add_subplot(111, aspect='equal')
circle1=plt.Circle((0,0),1,color='k')
circle1.set_fill(False)
plt.gcf().gca().add_artist(circle1)
xy_ax=[]
xy_ay=[]
xy_ex=[]
xy_ey=[]
for i in range(Nt):
    x = random.uniform(-1,1)
    y = random.uniform(-1,1)
    if x**2+y**2 <= 1:
        xy_ax.append(x)
        xy_ay.append(y)
        #plt.plot(x,y, '.b')
        Na = Na + 1
    else:
        xy_ex.append(x)
        xy_ey.append(y)
        #plt.plot(x,y, '.r')
Ne = Nt-Na
pi = 4 * (float (Na)) / (float (Nt))
str="$\pi= $" + "{0.real:.4f}".format(pi)+ "$\ N_T=$"+str(Nt)+ ", " + "
    $N_A=$"+str(Na)+", "+"$N_e=$"+str(Ne)

```

```
plt.plot(xy_ax,xy_ay,'b.',label='$N_a$')
plt.plot(xy_ex,xy_ey,'r.',label='$N_e$')
plt.title(str)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()

print("Pi = ",pi)
plt.show()
```

---

Fonte: LIMA, L. F.

---

#### Listagem A.2: Código da simulação: pi2.py

---

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

from __future__ import division
from random import random
from math import pi
import matplotlib.pyplot as plt
"""
    Script para criar pontos dentro de um circulo inscrito em um quadrado de
    lado L. (codigo de uso livre para fins educacionais). $\\pi$.
"""

def rain_drop(length_of_field=1):
    """
    Simula uma chuva de pontos.
    """
    return [(0.5 - random()) * length_of_field, (0.5 - random()) *
            length_of_field]

def is_point_in_circle(point, length_of_field=1):
    """
    Retorna verdadeiro se o ponto for inscrito no circulo
    """
```

```

"""
return (point[0]) ** 2 + (point[1]) ** 2 <= (length_of_field / 2) ** 2

def plot_rain_drops(drops_in_circle , drops_out_of_circle , length_of_field
=0, format='pdf') :
    """ Funcao para desenhar os pontos a serem jogados no circulo """
    number_of_drops_in_circle = len(drops_in_circle)
    number_of_drops_out_of_circle = len(drops_out_of_circle)
    number_of_drops = number_of_drops_in_circle +
        number_of_drops_out_of_circle
    plt.figure(111).add_subplot(111,aspect='equal')
    plt.xlim (-length_of_field / 2, length_of_field / 2)
    plt.ylim (-length_of_field / 2, length_of_field / 2)
    plt.scatter([e[1] for e in drops_in_circle], [e[0] for e in
        drops_in_circle], color='green', label="Dentro do circulo")
    plt.scatter([e[1] for e in drops_out_of_circle], [e[0] for e in
        drops_out_of_circle], color='yellow', label="Fora do circulo")
    plt.legend(loc="best")
    plt.title("%s pontos: %s jogados dentro %s fora , pi estimado em $\pi$ =
        %.4f" % (number_of_drops, number_of_drops_in_circle ,
        number_of_drops_out_of_circle , 4 * number_of_drops_in_circle /
        number_of_drops))
    plt.savefig("%s_pontos.%s" % (number_of_drops, format))

def rain(number_of_drops=1000, length_of_field=1, plot=True, format='png',
dynamic=False) :
    """
    Criando os pontos e jogando no circulo (com pontos fora e dentro).
    """
    number_of_drops_in_circle = 0
    drops_in_circle = []
    drops_out_of_circle = []
    pi_estimate = []
    for k in range(number_of_drops):
        d = (rain_drop(length_of_field))
        if is_point_in_circle(d, length_of_field):
            drops_in_circle.append(d)
            number_of_drops_in_circle += 1
        else:
            drops_out_of_circle.append(d)
    if dynamic: # A opcao dinamica se definida como True ira plotar
        novas quedas (isso pode ser usado para criar animacao da
        simulacao)
        print "Criando os pontos: %s" % (k + 1)

```

```

        plot_rain_drops(drops_in_circle , drops_out_of_circle ,
                       length_of_field , format)
        pi_estimate.append (4 * number_of_drops_in_circle / (k + 1)) #
        Isso atualiza a lista com a estimativa mais nova para pi.
# Traz as estimativas de pi
plt.figure()
plt.scatter(range(1, number_of_drops + 1), pi_estimate)
max_x = plt.xlim()[1]
plt.hlines(pi, 0, max_x, color='red')
plt.xlim(0, max_x)
plt.title("$\pi$ estimativa de pontos dentro e fora do circulo")
plt.xlabel("Numeros de pontos solicitados")
plt.ylabel("$\pi$")
plt.savefig("estimativa_de_%s_pontos_dentro_e_fora.png" %
            number_of_drops)

if plot and not dynamic:
    # Se a opcao plot for passada e matplotlib estiver instalada, esta
    # Ela da o conjunto final de pontos
    plot_rain_drops(drops_in_circle , drops_out_of_circle ,
                   length_of_field , format)

return [number_of_drops_in_circle , number_of_drops]

if __name__ == "__main__":
    # Executar o script
    from sys import argv
    number_of_drops = 10000 # <<<Coloque aqui o numero de pontos a serem
        jogados no circulo>>>
    if len(argv) > 1: # Se o argumento passar, entao mude o numero de
        pontos a serem jogados.
        number_of_drops = eval(argv[1])
    # Dois conjuntos de simulacao(comentar o pi).
    #r = rain(number_of_drops, plot=True, format='png', dynamic=True)
    r = rain(number_of_drops, plot=True, format='png', dynamic=False)
    # Escrever na tela:
    print "_____ "
    print "%s pontos" % number_of_drops
    print "pi estimado em:"
    print "\t%s" % (4 * r[0] / r[1])
    print "_____ "

```