PROFMAT **Departamento de Matemática**
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Números Reais e Expansões Decimais

por

Antonio Luiz Ribeiro de Sousa

Orientador do Trabalho:
Prof. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Preprint PROFMAT 03 (2017)

31 de Março, 2017

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Números Reais e Expansões Decimais

Antonio Luiz Ribeiro de Sousa
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
e-mail: antonioluizribeirodesousa@yahoo.com.br

Resumo

Neste trabalho construímos o conjunto dos números reais por meio de expansões decimais, mostrando que a construção leva a um corpo ordenado completo.

Palavras-Chave: corpos ordenados; representação decimal; números reais.

Desde o ensino básico a representação decimal é utilizada em conjunto com a de frações para se trabalhar os números racionais. Nesse sentido, o presente trabalho é destinado aos professores de matemática, apresentando uma construção dos números reais por meio de expansões decimais, resgatando a familiaridade com esses números, advinda do caso racional. Com isso, pretende-se dar ao professor justificativas e ferramentas matemáticas que lhe permitam abordar os números irracionais com maior clareza em sala de aula possibilitando, inclusive, o tratamento de uma larga classe de exemplos.

1 O Conjunto dos Decimais

Frequentemente a construção dos números reais é feita por meio de sequências de Cauchy [6] ou por cortes de Dedekind [1,4]. Estas formas de construção fogem ao contexto escolar dos níveis fundamental e médio, onde a apresentação é feita, na maioria das vezes, como um conjunto obtido pela simples reunião dos números racionais com os irracionais [2,9]. A dificuldade de caracterização dos irracionais, bem como a falta de ferramentas matemáticas para lidar com esses números por vezes dificulta a compreensão do tema e estabelece pressupostos errôneos, tal como o de que os irracionais são raros. Nesse nível de ensino é utilizada a forma decimal dos racionais que, em nossa ótica, pode ser estendida permitindo aos professores uma abordagem de diversos aspectos envolvendo os números irracionais. Vale ressaltar a inexistência de referências bibliográficas para essa forma de abordagem, o que em certa medida explica a dificuldade dos professores em tratar os números reais como uma extensão natural da representação decimal para os racionais..

Segundo as ideias propostas em [5], definiremos o conjunto $\mathbb{D}$, dos números decimais, cujos elementos são representados na forma $a,b_1b_2b_3...b_k...$ com $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq b_i \leq 9$, $i \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, essa parece ser a forma de escrita dos números reais, quando observados na sua expansão decimal. Definiremos adição e multiplicação em $\mathbb{D}$, verificando a validade das propriedades de corpo e a compatibilidade com uma relação de ordem. Com isso será possível provar que $\mathbb{D}$ é um corpo ordenado completo, sendo, portanto, isomorfo a $\mathbb{R}$.

1.1 Decimais Finitos e Infinitos

O número $a,b_1b_2b_3...b_k...$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b_1, b_2, ..., b_k, ... \in \{0,1,2,...,9\}$ será denominado *decimal finito*, quando existir $k \in \mathbb{N}$ de modo que $b_i = 0$ para $i \geq k$. Para que cada decimal tenha uma única representação, admitiremos daqui por diante que se tivermos $b_i = 9$ para todo $i > 0$ com $i \in \mathbb{N}$, será adicionado uma unidade à parte inteira desse decimal, por exemplo, o número 15,999... será escrito como 16,000... De forma análoga, ocorrendo que, a partir de um certo $b_k \neq 9$ tivermos $b_i = 9$ para todo $i \geq k+1$ com $i,k \in \mathbb{N}$, então, será adicionado uma unidade à casa decimal b_k sendo que a partir dela teremos $b_i = 0$ para todo $i \geq k+1$ com $i,k \in \mathbb{N}$. Por exemplo, o número 8,5999... será escrito como 8,6000... . E por fim objetivando facilitar a escrita de tais números, assumiremos que se a partir de um certo índice k tivermos $b_i = 0$ para todo $i \geq k+1$ com $i,k \in \mathbb{N}$ então suprimiremos a escrita dos algarismos nulos. Por exemplo, o número 16,0000... será escrito como 16 e, analogamente, o número 137,1250000... será escrito como 137,125.

O número $a,b_1b_2b_3...b_k...$ será denominado *decimal infinito* quando o mesmo não for decimal finito e, nesse caso, será classificado de duas maneiras: ou será número decimal infinito e periódico, ou, número decimal infinito e não periódico.

O número $a,b_1b_2b_3\ldots b_kc_1c_2c_3\ldots c_rc_1c_2c_3\ldots c_r\ldots$ é chamado de *decimal periódico*, pois, a partir do k-ésimo termo da sua parte decimal temos o bloco de dígitos $c_1c_2c_3...c_r$

que se repete infinitamente e, a este bloco, damos o nome de *período*. Por exemplo, o número 29,23174174174... é um decimal infinito e periódico e tem como período o bloco 174.

1.2 Decimais e Racionais

Dado um decimal finito da forma $a,b_1b_2b_3...\ b_k$, verificaremos que é possível escrevê-lo como $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ mostrando que todo decimal finito é um número racional. Para isso, considere $x = a,b_1b_2b_3...b_k$. Multiplicando esse número por 10^k temos $10^k \cdot x = ab_1b_2b_3...b_k$. Dessa forma, obtemos

$$x = \frac{ab_1b_2b_3...b_k}{10^k}$$

com $ab_1b_2 \dots b_k \in \mathbb{Z}$ (o número formado por a seguido dos algarismos $b_1, b_2, \dots, b_k$) mostrando que

$$a,b_1b_2b_3...b_k = \frac{ab_1b_2b_3...b_k}{10^k}$$

Isso permite concluir que todo decimal finito é um número racional, por exemplo, considere o decimal finito $15,874$. Realizando as operações descritas acima temos

$$15,874 = \frac{15874}{10^3}.$$

Analogamente aos decimais finitos, os decimais infinitos e periódicos também podem ser escritos como frações. Para tanto, considere

$$x = a,b_1b_2b_3 \dots b_k c_1c_2c_3 \dots c_r c_1c_2c_3 \dots c_r \dots$$

multiplicando esse número por 10^k vem

$$10^k \cdot x = ab_1b_2b_3...b_k, c_1c_2c_3...c_r c_1c_2c_3 \dots c_r \dots$$

Já que o período de x é constituído por um bloco de r algarismos, multiplicando novamente por 10^r obtemos

$$10^{k+r} \cdot x = ab_1b_2b_3...b_k c_1c_2c_3...c_r, c_1c_2c_3...c_r c_1c_2c_3...c_r...$$

Fazendo a diferença entre a última e a penúltima igualdades obtemos

$$10^k \cdot \left(10^r - 1\right) \cdot x = ab_1b_2b_3 \dots b_k c_1c_2c_3 \dots c_r, c_1c_2c_3 \dots c_r \dots - \ ab_1b_2b_3 \dots b_k, c_1c_2c_3 \dots c_r \dots$$

isto é

$$10^k \cdot \left(10^r - 1\right) \cdot x = ab_1b_2b_3 \ldots b_k c_1 c_2 c_3 \ldots c_r - \; ab_1b_2b_3 \ldots b_k$$

Fazendo

$$ab_1b_2b_3 ... b_k c_1c_2c_3 ... c_r - ab_1b_2b_3 ... b_k = w$$

temos $10^k \cdot (10^r - 1) \cdot x = w$

de onde se conclui que

$$a, b_1b_2b_3 \ldots b_k c_1c_2c_3 \ldots c_r c_1 c_2 c_3 \ldots c_r \ldots = \frac{w}{10^k \cdot \left(10^r - 1\right)},$$

mostrando que x é uma fração, costumeiramente chamada de *fração geratriz* do decimal periódico $a, b_1b_2b_3 \ldots b_k c_1c_2c_3 \ldots c_r c_1c_2c_3 \ldots c_r \ldots$.

Para exemplificar o processo, considere o decimal periódico $2{,}42153153153\ldots$ Refazendo passo a passo temos

$$x = 2{,}42153153153\ldots$$

$$10^2 \cdot x = 242{,}153153153\ldots$$

$$10^3 \cdot 10^2 \cdot x = 242153{,}153153\ldots$$

$$10^5 \cdot x = 242153{,}153153153\ldots$$

Fazendo então a subtração

$$10^3 \cdot 10^2 \cdot \; x = 242153{,}153153153\ldots$$

$$-$$

$$10^2 \cdot x = 242{,}153153153\ldots$$

obtemos $10^2 \cdot (10^3 - 1) \cdot x = 242153{,}153153153\ldots - 242{,}153153153\ldots$ Efetuando então as operações encontramos $99900 \cdot x = 241911$. logo, $x = \dfrac{241911}{99900}$ e portanto

$$2{,}42153153153\ldots = \frac{241911}{99900}.$$

Com base no que foi visto até aquí, vamos verificar que existe uma cópia de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{D}$. De fato, basta considerarmos os números decimais finitos juntamente com os números decimais infinitos e periódicos e as equivalências expostas anteriormente. Isso nos leva a concluir que dado um desses decimais é possível encontrar a fração $\dfrac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. A recíproca dessa afirmação não é tão imediata. Para verifica-la, vamos analisar um decimal da forma

$$x = a,b\overline{c} = a,b_1 \ldots b_k c_1 \ldots c_r c_1 \ldots c_r \ldots = a,b_1 \ldots b_k \overline{c_1 \ldots c_r},$$

em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b_1,\ldots b_k, c_1,\ldots,c_r \in \{0,1,\ldots,9\}$. Temos $10^k x = ab,\overline{c}$. Logo,

$$y = 10^k x - ab = 0,\overline{c_1 \ldots, c_r}.$$

Também,

$$10^r y - c = y,$$

de onde se tem que $(10^r - 1)y = c$. Dessa forma,

$$(10^r - 1)(10^k x - ab) = c$$

$$10^k (10^r - 1)x - (10^r - 1)ab = c$$

$$10^k (10^r - 1)x = (10^r - 1)ab + c$$

Observe que o lado direito da última igualdade é um inteiro. Logo, para mostrar que um racional x possui a expansão decimal na forma dada é necessário obter naturais k e r de modo que o número $10^k(10^r - 1)$ seja o denominador de x. Para isso, escrevemos $x = \frac{p}{q}$ com $q = 2^i 5^j d$, de modo que 2 e 5 não dividam d. Observe que se escolhermos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > i, j$ então $10^n x$ não possuirá fatores 2 e 5 em seu denominador. Dessa maneira, a questão se reduz a obter $r \in \mathbb{N}$ de modo que $10^r - 1$ cancele o fator d, restante no denominador de x. Isso é equivalente a dizer que d divide $10^r - 1$, ou ainda, que $10^r \equiv 1 \bmod d$. Como, por hipótese, $\mathrm{mdc}(10, d) = 1$, o Teorema de Euler-Fermat garante que $10^{\phi(d)} \equiv 1 \bmod d$, sendo $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função de Euler definida como a quantidade de naturais menores ou iguais a d e coprimos com d. Para mais detalhes a respeito do Teorema de Euler-Fermat e da função de Euler veja [3].

1.3 Decimais Não Periódicos e Ordem

O número $a,b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$ será chamado *decimal infinito e não periódico* quando o mesmo não for um decimal finito e nem um decimal infinito e periódico, por exemplo, 12,1010010001…

Dois decimais $x = a,b_1 b_2 \ldots b_k \ldots$ e $y = c,d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$ são ditos *iguais* quando $a = c$, $b_1 = d_1$, $b_2 = d_2, \ldots, b_k = d_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De maneira semelhante, diremos que x é maior do que y, e escreveremos $x > y$, quando $a > c$ ou, se $a = c$, deveremos ter $b_1 > d_1$, caso $b_1 = d_1$, então deverá ocorrer $b_2 > d_2$ e assim por diante, até que se tenha $b_i > d_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$.

Usaremos a notação $x \leq y$ quando $x < y$ ou $x = y$. Nesse caso, temos:

Proposição. *A relação definida acima, é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{D}$, isto é,*

P1) Para todo $x \in \mathbb{D}$ tem-se $x \leq x$;

P2) Dados $x, y, z \in \mathbb{D}$ tais que $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$;

P3) Dados $x, y \in \mathbb{D}$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

P4) Para todos os $x, y \in \mathbb{D}$ tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Demonstração. Para provar P3, considere

$$x = a, b_1 b_2 \ldots b_k \ldots \qquad \text{e} \qquad y = c, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$$

como a e c são números inteiros, vale que se $a \leq c$ e $c \leq a$ então $a = c$. Analogamente, teremos $b_i \leq d_i$ e $d_i \leq b_i$, de onde se concluie que $b_i = d_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para provar P4 sejam

$$x = a, b_1 b_2 \ldots b_k \ldots \qquad \text{e} \qquad y = c, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$$

pela lei da tricotomía nos números inteiros vale que ou $a < b$, ou $a = b$, ou $b < a$, dai, se $a < b$ teremos $x \leq y$ ou, se $b < a$, teremos $y \leq x$. Caso ocorra $a = b$ a comparação segue para b_i e d_i e, nesse caso, vale o que acontecer primeiro, isto é, se $b_i < d_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ então $x \leq y$, porém, se $d_i < b_i$ teremos $y \leq x$. Caso aconteça que $b_i = d_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ vale qualquer uma das desigualdades. As propriedades P1 e P2 são demonstradas de maneira semelhante.■

1.4 Construção do Supremo e do Ínfimo em $\mathbb{D}$

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{D}$, recordemos que $z \in \mathbb{D}$ será um limitante superior de A caso se tenha $a \leq z$ para todo $a \in A$. Indicaremos por $\sup A$ ao menor dos limitantes superiores de A, caso este exista. Caso $\sup A \in A$ indicaremos esse número, como de costume, por $\max A$.

Teorema. *Todo subconjunto de $\mathbb{D}$, limitado superiormente, possui supremo.*

Demonstração. Considere um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{D}$, limitado superiormente. Vamos verificar que A possui supremo. Para isso indiquemos por *a,* a maior parte inteira de todos os decimais de A. Se $z \in \mathbb{D}$ é um limitante superior de A, tem-se $a \leq z$. Uma vez que a é inteiro, considere os decimas de A iniciados por a, isto é, da forma $a,b_1b_2b_3\ldots$ com $b_i \in \mathbb{N}$ $i = 1,2,3,\ldots$. Dentre esses tomamos aquele que possui o maior algarismo dos décimos, que indicamos por c_1. Logo, por construção, tem-se $a,c_1 < z$. Procedendo sucessivamente desse modo, obtemos

$$s = a,c_1c_2c_3\ldots$$

com $s \leq z$. Por outro lado, por construção, observe que s é limitante superior de A. Como z é um limitante superior arbitrário, segue que $s = \sup A.$ ■

Como exemplo dessa construção, considere $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq r < 1\}$. Nesse caso, o processo apresentado no teorema fornece o supremo $s = 0,999\ldots$ Entretanto, pelo que assumimos de início para a definição da representação decimal temos, de fato, $s = 1$, já que $0,999\ldots$ é outra representação para o inteiro 1.

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{D}$ e limitado inferiormente, podemos fazer de forma análoga construções para a obtenção do ínfimo.

1.5 Adição e Multiplicação em $\mathbb{D}$

Diferentemente de outras construções, a soma e a multiplicação em $\mathbb{D}$ requerem uma atenção especial, pois essas serão efetuadas sobre decimais infinitos. Entretanto, essa dificuldade pode ser superada com o auxílio do supremo, cuja construção foi descrita anteriormente.

Dados dois decimais $x, y \in \mathbb{D}$ com

$$x = a,b_1b_2\ldots b_k\ldots \qquad \text{e} \qquad y = c,d_1d_2\ldots d_k\ldots,$$

considere o conjunto S_k, formado pelas somas parciais de decimais finitos, obtidos de forma estanque, a partir dos números x e y, isto é, colocando

$$S_k = \left\{ \left(a+b\right),\ \left(a,b_1 + c,d_1\right),\ \ldots\ ,\ \left(a,b_1b_2\ldots b_k +\ c,d_1d_2\ldots d_k\right) \right\}$$

com $k \in \mathbb{N}$, então S é definido como

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \ .$$

Observe que os elementos de S são decimais finitos. Como S é não vazio e limitado superiormente, ele possui supremo em $\mathbb{D}$. Dessa forma, definimos a operação de *adição* em $\mathbb{D}$ como

$$x + y = \sup S \, .$$

Para exemplificar essa construção considere os decimais infinitos

$$x = 15{,}313313331\ldots \qquad \text{e} \qquad y = 10{,}010010001...$$

Temos

$$x + y = \sup\{25;\ 25{,}3;\ 25{,}32;\ 25{,}323;\ 25{,}3233;\ 25{,}32332;\ldots\}$$

Dessa forma,

$$x + y = 25{,}323323332\ldots$$

Proposição. *A adição de elementos em $\mathbb{D}$ satisfaz às propriedades:*

A1) Associativa: para todos os $x, y, z \in \mathbb{D}$ vale que

$$x + (y + z) = (x + y) + z \, ;$$

A2) Comutativa: para todos os $x, y \in \mathbb{D}$, vale que

$$x + y = y + x \, ;$$

A3) Existência de elemento neutro: existe $0 \in \mathbb{D}$ tal que para todo $x \in \mathbb{D}$ vale

$$x + 0 = x \, ;$$

A4) Existência do oposto: para todo $x \in \mathbb{D}$, existe $-x \in \mathbb{D}$ tal que

$$x + (-x) = 0 \, .$$

Demonstração. Provaremos aqui apenas propriedade comutativa A2. As demais são obtidas de maneira semelhante. Observe que pela definição da adição temos

$$x + y = \sup S_1$$

com

$$S_1 = \{a + c;\ a{,}b_1 + c{,}d_1;\ a{,}b_1b_2 + c{,}d_1d_2;\ ...\} \, .$$

Analogamente,

$$y + x = \sup S_2$$

com

$$S_2 = \{c + a;\ c{,}d_1 + a{,}b_1;\ c{,}d_1d_2 + a{,}b_1b_2;\ ...\} \, .$$

Porém, os elementos dos conjuntos S_1 e S_2 são números racionais, que por sua vez satisfazem à propriedade comutativa para a adição. Logo, $S_1 = S_2$ e $\sup S_1 = \sup S_2$. Dessa forma $x + y = \sup S_1 = \sup S_2 = y + x$.■

Podemos definir uma multiplicação em $\mathbb{D}$ por meio de uma construção bastante semelhante à que fizemos para a adição. Considere dois decimais $x, y \in \mathbb{D}$ com

$$x = a,b_1b_2\ldots b_k\ldots \qquad \text{e} \qquad y = c,d_1d_2\ldots d_k\ldots,$$

que por hora assumimos serem positivos. Definimos o conjunto P, formado pelas multiplicações parciais de decimais finitos obtidos a partir dos números x e y, isto é, colocando

$$P_k = \left\{ \left(a \cdot b\right),\ \left(a,b_1 \cdot c,d_1\right),\ \ldots\ ,\ \left(a,b_1b_2\ldots b_k \cdot\ c,d_1d_2\ldots d_k\right) \right\}$$

com $k \in \mathbb{N}$, o conjunto P será dado por

$$P = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k\ .$$

Uma vez que P é não vazio e limitado superiormente, ele possui supremo em $\mathbb{D}$. Desse modo, definimos a operação de *multiplicação* em $\mathbb{D}$ como sendo

$$x \cdot y = \sup P.$$

Casos envolvendo decimais negativos são construídos de maneira semelhante.

Considere, a título de exemplo para essa construção, os números

$$x = 2{,}313313331... \qquad \text{e} \qquad y = 5{,}212112111...$$

Temos

$$x \cdot y = \sup\{2 \cdot 5;\ 2{,}3 \cdot 5{,}2;\ 2{,}31 \cdot 5{,}21;\ 2{,}313 \cdot 5{,}212;\ 2{,}3133 \cdot 5{,}2121;$$
$$2{,}31331 \cdot 5{,}21211; 2{,}313313 \cdot 5{,}212112;\ \ldots\},$$

ou seja,

$$x \cdot y = \sup\{10;\ 11{,}96;\ 12{,}0351;\ 12{,}055356;\ 12{,}05715093;$$
$$12{,}0572261841;\ 12{,}057246447056;\ \ldots\}.$$

Proposição. *A multiplicação de elementos em $\mathbb{D}$ satisfaz as propriedades:*

M1) Associativa: para todos os $x, y, z \in \mathbb{D}$, vale que

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\ ;$$

M2) Comutativa: para todos os $x, y \in \mathbb{D}$, vale que

$$x \cdot y = y \cdot x\ ;$$

M3) Existência do elemento neutro: existe $1 \in \mathbb{D}$ *tal que para todo* $x \in \mathbb{D}$, *vale*

$$x \cdot 1 = x\ ;$$

M4) Existência do elemento inverso: para todo $x \in \mathbb{D}$, $x \neq 0$, *existe* $y \in \mathbb{D}$ *com*

$$x \cdot y = 1.$$

M5) Propriedade distributiva em relação à soma: para todos os $x, y, z \in \mathbb{D}$ *temos que*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

M6) Compatibilidade do produto com a relação de ordem: para todos os $x, y, z \in \mathbb{D}$, *com* $z > 0$, *se* $x \leq y$ *então vale que,*

$$x \cdot z \leq y \cdot z.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que os decimais são positivos. Casos envolvendo decimais negativos são tratados de forma semelhante, apenas adaptando as construções apresentadas aqui.

Vamos começar demonstrando a propriedade comutativa M2. Para isso, considere dois decimais

$$x = a,b_1b_2b_3\ldots b_k\ldots \qquad \text{e} \qquad y = c,d_1d_2d_3\ldots d_k\ldots$$

Da definição de multiplicação temos que

$$x \cdot y = \sup P_1$$

sendo

$$P_1 = \{a \cdot c;\ a,b_1 \cdot c,d_1;\ a,b_1b_2 \cdot c,d_1d_2;\ \ldots;\ a,b_1b_2...b_k \cdot c,d_1d_2...d_k;\ \ldots\ \}$$

com $k \in \mathbb{N}$, do mesmo modo, temos também por definição que

$$y \cdot x = \sup P_2$$

e

$$P_2 = \{c \cdot a;\ c,d_1 \cdot a,b_1;\ c,d_1d_2 \cdot a,b_1b_2;\ \ldots\ ;\ c,d_1d_2...d_k \cdot a,b_1b_2...b_k \cdot;\ \ldots\ \}$$

com $k \in \mathbb{N}$. Como os elementos de P_1 e P_2 são decimais finitos, observe que

$$a \cdot c = c \cdot a$$

$$a,b_1 \cdot c,d_1 = c,d_1 \cdot a,b_1$$

$$a,b_1b_2 \cdot c,d_1d_2 = c,d_1d_2 \cdot a,b_1b_2$$

$$a,b_1b_2b_3 \cdot c,d_1d_2d_3 = c,d_1d_2d_3 \cdot a,b_1b_2b_3$$

e assim por diante. Logo, $P_1 = P_2$, e portanto $\sup P_1 = \sup P_2$. Dessa forma,

$$x \cdot y = \sup P_1 = \sup P_2 = y \cdot x\,.$$

Para demonstrar a propriedade P4, da existência do inverso, considere $x \in \mathbb{D}$, $x \neq 0$, dado por

$$x = a,b_1b_2b_3\ldots b_k\ldots$$

A sequência formada pelos decimais finitos

$$a;\ \ a,b_1;\ \ a,b_1b_2;\ \ a,b_1b_2b_3;\ \ldots\ a,b_1b_2b_3\ldots b_k;\ \ldots$$

é crescente, e por essa razão a sequência

$$\frac{1}{a};\ \ \frac{1}{a,b_1};\ \ \frac{1}{a,b_1b_2};\ \ \frac{1}{a,b_1b_2b_3};\ \ldots;\ \frac{1}{a,b_1b_2b_3};\ \ldots$$

é decrescente. Por isso, definimos $y \in \mathbb{D}$ como

$$y = \inf\left\{\frac{1}{a};\frac{1}{a,b_1};\frac{1}{a,b_1b_2};\frac{1}{a,b_1b_2b_3};\frac{1}{a,b_1b_2b_3...b_k};\ldots\right\}.$$

Da definição de multiplicação, segue então que $x \cdot y = 1$.■

As propriedades de adição e multiplicação, juntamente com a ordem e o processo de construção do supremo, mostram que $\mathbb{D}$ é um corpo ordenado completo. Portanto, esse deve ser isomorfo a $\mathbb{R}$ estabelecendo-se o que afirmamos de início, acerca de construção dos reais por meio de expansões decimais.

A representação decimal permite analisar situações envolvendo os irracionais, lançando mão da familiaridade no tratamento dado aos racionais. Veja algumas:

- É possível obter e manipular exemplos explícitos de irracionais, tais como: $0{,}1010010001\ldots$; $17{,}75375337533375333\ldots$; dentre outros;

- Os exemplos dados no texto mostram formas explicitas para o cálculo numérico de somas e produtos de irracionais. Além disso, é possível verificar que a soma (ou o produto) de irracionais nem sempre resulta em um irracional, como é o caso em $0{,}40440444\ldots + 0{,}04004000\ldots = 0{,}4444\ldots = \dfrac{4}{9}$.

- Um ponto mais sutil pode ser ainda observado. A representação decimal de um número racional possui, em sua forma, muito mais restrições que a de um número irracional. Isso indica que parece existir uma "quantidade" menor de racionais, já que a representação decimal de um irracional pode ser tão aleatória quanto se deseje. Na realidade, pode-se verificar que os racionais são enumeráveis, enquanto os irracionais não.

- A maneira que apresentamos o supremo, a soma e o produto de decimais sempre destacam um processo construtivo, que pode ser transposto para a sala de aula para se analisar propriedades numéricas com auxílio de um computador ou calculadora. Por exemplo, não seria adequado provar que $\sqrt{2}$ é irracional no 9º ano do ensino fundamental. Entretanto, pode-se explorar a representação decimal desse número, verificando tanto quanto se possa que a mesma não é periódica.

2 Conclusão

Uma vez estabelecido que o conjunto dos decimais é um corpo ordenado completo, obtemos de fato os números reais, agora como uma extensão do corpo dos racionais ao qual agregamos os decimais infinitos e não periódicos. Apesar de abstrata, essa construção mostra-se promissora, na medida em que permite o tratamento numérico de diversas situações concretas. Cremos que ela possibilite a idealização de estratégias pedagógicas significativas para a sala de aula, atacando a falsa ideia de que o universo dos números irracionais seja restrito a uns poucos exemplos numéricos citados nos livros didáticos.

Finalmente, procuramos apresentar definições e demonstrações em linguagem acessível propondo, na medida do possível, processos construtivos que permitem explorar situações numéricas concretas. Por essa razão esperamos que esse trabalho sirva como fonte de consulta para professores da Educação Básica, dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, dada a escassez de referências que explorem a representação decimal para os irracionais.

Referências

[1] CARAÇA, B. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

[2] GIOVANNI, J., BONJORNO, J. *Matemática Fundamental - Uma Nova Abordagem*. São Paulo: FTD, 2011.

[3] HARDY, G., WRIGHT, E. *An Introduction to Theory of Numbers*. Fourth edition. London: Oxford University Press, 1975.

[4] LIMA, E., *et al*. *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[5] RITT, J. *Theory of Functions.* Fifth printing. Oxford: King's Crown Press, 1960.

[6] ROMANO, R. *Cálculo Diferencial e Integral: Funções de uma Variável*. São Paulo: Atlas, 1983.

[9] VASCONCELLOS, M., ANDRINI, A. *Coleção Praticando Matemática.* 9º ano, segunda edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2011