PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Números Reais e Corpos Ordenados Completos

por

Eliane Coradi dos Santos

Orientador do Trabalho:
Prof. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Preprint PROFMAT 03 (2017)

31 de Março, 2017

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Números Reais e Corpos Ordenados Completos

Eliane Coradi dos Santos
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
e-mail: elianecoradi@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho estabelecemos a unicidade de um corpo ordenado completo caracterizando a unicidade do conjunto dos números reais.

Palavras-Chave: corpos ordenados; números reais.

Ao se introduzir os irracionais, frequentemente no 9º ano do ensino fundamental, tem-se dificuldades com a complexidade da estrutura matemática dos números reais, que não é facilmente transposta ao nível escolar. Em parte, isso pode ser explicado pela dificuldade técnica na construção desse conjunto numérico, apresentada nos cursos superiores de Matemática, como é o caso dos cortes de Dedekind ou as sequências de Cauchy. Nessas construções geralmente é deixado ao largo a unicidade de um corpo ordenado completo, não sendo evidente em que medida construções diferentes possam produzir o mesmo corpo. Nesse sentido, o presente trabalho é destinado aos professores de matemática, tratando nas seções 1 e 2 de caracterizar o que se entende por "unicidade" de um corpo ordenado completo, utilizando para isso corpos genéricos e não uma construção particular. Com isso, pretende-se dar ao professor justificativas matemáticas que lhe permitam abordar os números irracionais com maior clareza.

1 Corpos Ordenados Completos

O conjunto dos números reais é caracterizado como um corpo ordenado completo. Por vezes, no processo de construção e caracterização das estruturas desse conjunto, costuma-se fazer referência à unicidade de um corpo ordenado completo. Essa é a maneira utilizada para justificar que as construções feitas por meio de cortes de Dedekind e sequências de Cauchy, por exemplo, produzem os números reais.

Não faremos aqui uma construção dos números reais, nem utilizaremos alguma construção particular desse conjunto para verificar a unicidade de um corpo ordenado completo. Ao invés disso caracterizaremos a unicidade de maneira genérica, explicitando as propriedades dos corpos ordenados completos relevantes nesse processo.

1.1 Corpos

Nesta seção, apresentamos uma descrição informal dos conjuntos dos naturais, inteiros e racionais, explicitando as relações e operações que serão utilizadas ao longo do texto. Um tratamento formal para a construção desses conjuntos, bem como suas propriedades algébricas pode ser encontrado em [2].

Indicamos por $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ o *conjunto dos números naturais* munido das operações usuais de soma e produto. Dado $n \in \mathbb{N}$, indicamos por $-n$ o número negativo que somado a n produz como resultado 0. O conjunto $\mathbb{Z}$, dos *números inteiros*, pode ser pensado compreendendo o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o número 0, e o conjunto $-\mathbb{N}$ dos números negativos. As operações de soma e produto em $\mathbb{N}$ naturalmente estendem-se às operações de soma e produto em $\mathbb{Z}$ preservando a comutatividade, associatividade e distributividade do produto sobre a soma. Por meio disso é possível verificar que

$$(-n)\cdot k = n\cdot(-k) = -n\cdot k \qquad \text{e} \qquad (-n)\cdot(-k) = n\cdot k$$

para todos os números naturais n e k.

Costumeiramente pensamos no conjunto $\mathbb{Q}$ dos *números racionais*, formado pelos quocientes de inteiros da forma $\frac{p}{q}$, em que $q \neq 0$. As definições familiares de soma e produto de racionais são as seguintes:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+qm}{qn}$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$$

Além da validade da comutatividade, associatividade e distributividade do produto sobre a soma há a existência de um inverso multiplicativo isto é, se $r \in \mathbb{Q}$ com $r \neq 0$, existe $r^{-1} \in \mathbb{Q}$ de modo que $r \cdot r^{-1} = 1$. Na realidade, se $r = \frac{p}{q} \neq 0$, então $p \neq 0$ de modo que $r^{-1} = \frac{q}{p}$. Essas propriedades em $\mathbb{Q}$ são sintetizadas numa estrutura algébrica chamada de corpo.

Definição. Chamamos de *corpo* a um conjunto $\mathbb{F}$ munido de uma operação de adição $+$ e multiplicação $\cdot$ que satisfazem as propriedades:

A1) Comutativa da adição: $a + b = b + a$ para todos os $a, b \in \mathbb{F}$;

A2) Associativa da adição: $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos os $a, b, c \in \mathbb{F}$;

A3) Existência do elemento neutro da adição: existe $0 \in \mathbb{F}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{F}$;

A4) Existência do oposto: dado $a \in \mathbb{F}$ existe $-a \in \mathbb{F}$ tal que $a + (-a) = 0$;

A5) Comutativa da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$ para todos os $a, b \in \mathbb{F}$;

A6) Associativa da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todos os $a, b, c \in \mathbb{F}$;

A7) Existência do elemento neutro da multiplicação: existe $1 \in \mathbb{F}$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{F}$;

A8) Existência do inverso: dado $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$;

A9) Distributiva da multiplicação em relação à adição: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todos os $a, b, c \in \mathbb{F}$.

Além do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ há outros conjuntos numéricos que satisfazem as propriedades A1 a A9, como o conjunto $\mathbb{C}$, dos números complexos, e o próprio conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais. A seguir apresentaremos dois exemplos de corpos que surgem nesse contexto.

A extensão de $\mathbb{Q}$ por $\sqrt{2}$. Considere o conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ definido como

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$$

e munido das operações usuais de soma e produto de números reais. Pode-se verificar que as propriedades A1 a A9 são satisfeitas. Para ilustrar isso, vamos verificar a propriedade A8. Dado $a = r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, com $a \neq 0$, observe que $r, s \neq 0$. Vamos verificar que $a^{-1} = \dfrac{1}{r + s\sqrt{2}}$ é um elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
a^{-1} &= \frac{1}{r + s\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{r + s\sqrt{2}} \cdot \frac{r - s\sqrt{2}}{r - s\sqrt{2}} \\
&= \frac{r - s\sqrt{2}}{r^2 - 2s^2} \\
&= \left(\frac{r}{r^2 - 2s^2} \right) - \left(\frac{s}{r^2 - 2s^2} \right) \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

uma vez que $r^2 - 2s^2 \neq 0$, dado que $\sqrt{2}$ é irracional e $r, s \in \mathbb{Q}$.

Corpos finitos. Dado $p \in \mathbb{N}$ considere o conjunto $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ com as operações de soma $\oplus$ e produto $\odot$ definidas por

$$\begin{aligned}
a \oplus b &= \text{ resto da divisão de } a + b \text{ por } p; \\
a \odot b &= \text{ resto da divisão de } a \cdot b \text{ por } p.
\end{aligned}$$

Nesse caso, observe que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um corpo se, e somente se, p for um número primo. Para mais detalhes veja [3].

Se a é um elemento de um corpo $\mathbb{F}$ observe que a propriedade A7 nos dá $a \cdot 1 = a$. Nesse caso, "1" é o elemento neutro da multiplicação de $\mathbb{F}$, e não o número natural 1. Assim, não é imediato, por exemplo, que "2" seja um elemento de $\mathbb{F}$ a fim de que se tenha $a + a = 2 \cdot a$. Para ajustar essa situação definimos recursivamente que

$$\begin{aligned}
1 \cdot a &= a \\
n \cdot a &= (n-1) \cdot a + a \qquad \text{para } n > 1,\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Costumamos escrever na ao invés de $n \cdot a$. Dessa maneira, na é o elemento de $\mathbb{F}$ obtido pela soma de n parcelas do elemento a, isto é,

$$na = a + a + a + \cdots + a.$$

Outra consequência imediata das propriedades de corpo é a unicidade do inverso, permitindo-nos concluir que $b^{-1} = \frac{1}{b}$ e portanto que $ab^{-1} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ para $a, b \in \mathbb{F}$ e $b \neq 0$.

1.2 Ordem e Completude

No caso dos números reais, [1] argumenta que a construção desses números tenha sido motivada pela tentativa de se estabelecer uma correspondência com os pontos de uma reta geométrica (denominada de reta real). Desse modo, escolhidos dois pontos dessa reta e sendo determinados como 0 (zero) e 1 (um) ficam também determinados todos os demais inteiros nesta reta, podendo os mesmos ser localizados com a utilização de um compasso. Operações algébricas podem então ser efetuadas valendo-se de manipulações geométricas.

Tal correspondência geométrica evidencia uma noção de "positividade" que nos permite "comparar" números por meio do comprimento de segmentos. Matematicamente essa noção pode ser descrita em termos de ordem.

Definição. Dizemos que um corpo $\mathbb{F}$ é um *corpo ordenado* quando existe um conjunto $P \subset \mathbb{F}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

P1) Se $a, b \in P$ então $a + b \in P$ e $ab \in P$;

P2) Lei da tricotomia: se $a \in \mathbb{F}$ exatamente uma das seguintes possibilidades se verifica:

i) $a \in P$
ii) $-a \in P$
iii) $a = 0$

Os elementos do conjunto P, descrito na definição, são chamados de elementos *positivos* de $\mathbb{F}$ e os elementos a para os quais $-a \in P$ são chamados de elementos *negativos* de $\mathbb{F}$. Indicando por $-P$ o conjunto dos negativos de $\mathbb{F}$, temos $\mathbb{F} = P \cup \{0\} \cup (-P)$.

Como consequência das propriedades de P podemos definir uma relação de ordem total em $\mathbb{F}$ dizendo que $a < b$ se e somente se $b - a \in P$. Com isso, vale que:

i. Dados $a, b \in F$ tem-se: $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$;

ii. Dados $a,b,c \in \mathbb{F}$ com $a < b$ e $b < c$ então $a < c$;

iii. Dados $a,b,c \in \mathbb{F}$ se $a < b$ então $a + c < b + c$;

iv. Dados $a,b,c \in \mathbb{F}$ com $a < b$ e $0 < c$ então $a \cdot c < b \cdot c$.

A demonstração dessas propriedades é direta. Por exemplo, no caso de (*iii*), se $a < b$ então $b - a \in P$. Logo, dado $c \in \mathbb{F}$, temos $(b+c)-(a+c) = b - a \in P$, mostrando que $a + c < b + c$.

Uma relação de ordem parcial é introduzida escrevendo $a \le b$ para indicar que $a < b$ ou $a = b$. Nesse caso temos propriedades análogas às (*ii*) a (*iv*). Além disso, caso se tenha simultaneamente $a \le b$ e $b \le a$, a lei da tricotomia fornece que $a = b$.

Pode-se verificar que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. De fato, basta observar que, colocando $P = \mathbb{Q}^+ = \{p/q \mid p,q \in \mathbb{N}\}$, as propriedades P1, P2 e P3 são satisfeitas. O mesmo não acontece com $\mathbb{C}$, em que não é possível definir uma ordem compatível com as operações de adição e multiplicação.

Dado um corpo ordenado $\mathbb{F}$, indicamos por $1_{\mathbb{F}}$ seu elemento neutro da multiplicação. Como vimos antes podemos escrever $n \cdot 1_{\mathbb{F}}$ para a soma de n parcelas de $1_{\mathbb{F}}$, isto é,

$$n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}.$$

Chamamos de *característica* de um corpo $\mathbb{F}$ ao menor natural n para o qual se tenha $n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0$. Caso esse n exista, dizemos que $\mathbb{F}$ tem característica n e, caso contrário, que $\mathbb{F}$ tem característica 0. Observe que o corpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tem característica p, enquanto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ tem característica 0.

Proposição. *Todo corpo ordenado tem característica* 0.

Demonstração. Se $\mathbb{F}$ é um corpo ordenado, então $1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}}^2 > 0$. Logo, $n \cdot 1_{\mathbb{F}} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Como consequência, todo corpo ordenado é infinito. Isso permite definir a função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$, como $\varphi(n) = n \cdot 1_{\mathbb{F}}$, que claramente preserva as operações de soma e produto, e é injetora. Portanto, por abuso de linguagem, podemos imaginar que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{F}$ identificando o elemento $n \in \mathbb{N}$ com sua imagem $n \cdot 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$.

De modo semelhante, tomando o elemento neutro da multiplicação $1_{\mathbb{F}}$, e um número racional $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ definimos o elemento $\frac{k}{n} 1_{\mathbb{F}} = \frac{k \cdot 1_{\mathbb{F}}}{n \cdot 1_{\mathbb{F}}} \in \mathbb{F}$. Isso nos permite estender a função φ a uma função $\hat{\varphi} : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}$ onde $\hat{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} 1_{\mathbb{F}}$. Novamente pode-se verificar que essa extensão preserva as operações de soma e produto e é injetora. Logo, por abuso de linguagem, podemos imaginar que $\mathbb{Q}$ é um subconjunto de $\mathbb{F}$. Isso indica que todo corpo ordenado possui como subconjunto uma cópia dos racionais. Nesse sentido, é natural pensar que $\mathbb{Q}$ é o menor corpo ordenado.

Considere um subconjunto $A \subset \mathbb{F}$. Um número $b \in \mathbb{F}$ será chamado *limitante superior* para A se $a \leq b$ para todo $a \in A$. Dá-se o nome de *supremo* ao menor limitante superior de A, quando existir, indicando-o por $\sup A$. Quando se tem $\sup A \in A$, esse número é chamado de *máximo* de A, e indicado por $\max A$. De maneira análoga, chamamos de *ínfimo* e indicamos por $\inf A$ ao maior dos limites inferiores de A, quando esse número existir. Isto é, $\inf A = -\sup(-A)$ onde colocamos $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Caso se tenha $\inf A \in A$, esse número é chamado de *mínimo* de A e indicado por $\min A$.

Definição. Um corpo ordenado $\mathbb{F}$ é dito ser *completo* se todo conjunto limitado superiormente possui supremo.

Pode-se verificar que o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais é completo. Esse fato geralmente é estabelecido por meio de uma particular construção, como cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy. A própria correspondência entre $\mathbb{R}$ e uma reta geométrica, implicitamente, lança mão desse fato.

Há, entretanto, corpos ordenados que não são completos, como é o caso de $\mathbb{Q}$. Para estabelecer isso, utilizamos a identificação de $\mathbb{N}$ como um subconjunto de um corpo ordenado $\mathbb{F}$, juntamente com a Propriedade Arquimediana, estabelecida na proposição a seguir.

Proposição (Propriedade Arquimediana). *Se $\mathbb{F}$ é um corpo ordenado completo, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Dessa forma, como $\mathbb{N} \neq \varnothing$ e $\mathbb{F}$ é completo, existe $s = \sup \mathbb{N}$. Então $n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $n+1 \leq s$, levando a que $n \leq s-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que $s-1$ seria um limitante superior menor que o supremo, uma contradição. ■

Para verificar que $\mathbb{Q}$ não é completo, considere o subconjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2 \right\}.$$

Vamos mostrar que A não possui supremo. Observe que A é não vazio e limitado superiormente por $\frac{3}{2}$, 2, etc. Dado um limitante superior racional $\frac{a}{b}$ para A, obviamente temos $\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 2$. A Propriedade Arquimediana garante a existência de um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{2ab}{a^2 - 2b^2}$. Dessa forma, dividindo numerador e denominador por b^2 temos $n > \frac{\frac{2ab}{b^2}}{\frac{a^2-2b^2}{b^2}}$. Manipulando a expressão obtemos $\frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\frac{1}{n} > 2$, de onde segue que

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\frac{1}{n} > 2.$$

Dessa forma, dado qualquer limitante superior $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ para A, é possível obter $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{a}{b} - \frac{1}{n}$ seja também um limitante superior. Segue disso que não existe um menor limitante superior de A em $\mathbb{Q}$.

Corolário. *Dado um número real* $\varepsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Demonstração. Suponhamos. por absurdo, que $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se assim fosse, teríamos $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, contradizendo a Propriedade Arquimediana. ■

Recordemos um corpo ordenado $\mathbb{F}$ possui como subconjunto uma cópia dos racionais, que por abuso de linguagem indicaremos também por $\mathbb{Q}$. Se $\mathbb{F}$ é completo, o resultado a seguir estabelece que essa cópia de $\mathbb{Q}$ contida em $\mathbb{F}$ é *densa* em $\mathbb{F}$, isto é, entre quaisquer dois elementos distintos de $\mathbb{F}$ existirá um número racional.

Proposição. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo ordenado completo e $a,b \in \mathbb{F}$ com $a < b$, então existe um número racional $r \in \mathbb{Q}$, tal que $a < r < b$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $0 < a < b$, de modo que $b - a > 0$. Pelo corolário, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que, $\frac{1}{n} < b - a$, de onde se conclui que $nb > na + 1$. Dessa forma, o conjunto $S = \{m \in \mathbb{N} \mid m > na\}$ é não vazio e, por se tratar de um subconjunto de naturais, possuirá um menor elemento, que indicaremos por p. Isso significa que $p > na \geq p - 1$. Logo $nb > na + 1 \geq p > na$. Dividindo os membros dessa desigualdade por n tem-se então que $b > \frac{p}{n} > a$. Tomando então $r = \frac{p}{n}$ temos o resultado procurado. Para o caso $a = 0$ consideramos $\frac{b}{2} < b$. Pelo raciocínio anterior, existe $r \in \mathbb{Q}$, de modo que $a < \frac{b}{2} < r < b$. Para o caso $a < b \leq 0$, observe que $0 \leq -b < -a$. Pelo que foi demonstrado antes existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $-b < r < -a$. Logo, $a < -r < b$, como queríamos. ■

A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{F}$ ainda permite obter qualquer elemento de $\mathbb{F}$ como o supremo de um determinado subconjunto de racionais. Isso é o que veremos na próxima parte.

2 Corpos Ordenados Completos e Unicidade

Na parte anterior apresentamos diferentes exemplos de corpos, sendo que alguns eram ordenados. Ainda que tecnicamente diferentes, alguns corpos são realmente indistinguíveis, do ponto de vista algébrico. Esse era, por exemplo, o caso das cópias de $\mathbb{Q}$ contidas em diferentes corpos ordenados. Essa ideia de "equivalência" é descrita de forma matematicamente precisa por meio da noção de isomorfismo, como descreve a definição a seguir.

Definição. Sejam $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$ dois corpos ordenados, e indiquemos por P_1 e P_2 seus respectivos conjuntos de elementos positivos. Uma correspondência um a um $\psi : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ é dita ser um *isomorfismo* se:

i. $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$ para todos os $a, b \in \mathbb{F}_1$;

ii. $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$ para todos os $a, b \in \mathbb{F}_1$;

iii. Se $a \in P_1$ então $\psi(a) \in P_2$.

Grosseiramente, podemos dizer que ψ é um isomorfismo de corpos ordenados se preservar as operações de soma, produto e a ordem. Se utilizarmos o símbolo $<$ para representar a relação de ordem tanto em $\mathbb{F}_1$ quanto em $\mathbb{F}_2$ (sem perigo de confusão), a condição (*iii*). Pode ser entendida simplesmente como: dados $a, b \in \mathbb{F}_1$ com $a < b$ então $\psi(a) < \psi(b)$.

Dado um corpo ordenado $\mathbb{F}$, cujo elemento neutro do produto é $1_{\mathbb{F}}$, vamos definir uma função $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}$ como

$$\psi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} 1_{\mathbb{F}}, \qquad \text{para todo } \frac{k}{n} \in \mathbb{Q} .$$

Aqui estamos usando a notação já introduzida antes que $\frac{k}{n} 1_{\mathbb{F}} = \frac{k 1_{\mathbb{F}}}{n 1_{\mathbb{F}}}$. Não é difícil verificar que ψ, assim definida, será um isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ e um subconjunto de $\mathbb{F}$. Por essa razão que dizemos que $\psi(\mathbb{Q})$ é uma cópia de $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{F}$. Esta ideia juntamente com a noção de supremo, permitirá estabelecer a equivalência entre dois corpos ordenados completos, seguindo a linha de raciocínio proposta em [2].

Sejam $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ dois corpos ordenados, e indiquemos por $1_{\mathbb{F}}$ e $1_{\mathbb{G}}$ seus respectivos elementos neutros da multiplicação, e por $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ as respectivas cópias de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$. Por meio dos isomorfismos entre $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ e $\mathbb{Q}$, e entre $\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ e $\mathbb{Q}$, observe que há um isomorfismo natural $\psi : \mathbb{Q}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ dado por:

$$\psi\left(\frac{k}{n}1_{\mathbb{F}}\right)=\frac{k}{n}1_{\mathbb{G}}, \qquad \text{para todo } \frac{k}{n}\in\mathbb{Q}\ .$$

Nosso objetivo será estender ψ a um isomorfismo entre $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$. Isso será feito por meio da noção de supremo e da densidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ em $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$, respectivamente, no teorema a seguir.

Teorema. *Sejam $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ dois corpos ordenados completos. Então $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ são isomorfos, isto é, existe uma função bijetora $\hat{\psi}:\mathbb{F}\to\mathbb{G}$ que satisfaz:*

(1) $\hat{\psi}(a+b)=\hat{\psi}(a)+\hat{\psi}(b)$ para todos os $a,b\in\mathbb{F}$;

(2) $\hat{\psi}(ab)=\hat{\psi}(a)\hat{\psi}(b)$ para todos os $a,b\in\mathbb{F}$;

(3) Dado $a\in\mathbb{F}$ com, $a>0$ então $\hat{\psi}(a)>0$.

Antes de prosseguir demonstrando o teorema, observe que podemos pensar nos elementos de $\mathbb{F}$ sendo de dois tipos: racionais (caso um elemento pertença a $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$), ou como o supremo de um conjunto de racionais (pela densidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ em $\mathbb{F}$). De fato, dado $a\in\mathbb{F}$ a densidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ em $\mathbb{F}$ nos fornece, para cada $n\in\mathbb{N}$, um racional $r_n\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ tal que:

$$a-\frac{1}{n}<r_n<a.$$

Dessa forma, temos $a=\sup\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$. Da unicidade do supremo, por sua vez, observe que podemos também escrever $a=\sup\{r\leq a\,|\,r\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\}$. Essa será a ideia usada para a construção do isomorfismo $\hat{\psi}$ no teorema.

Demonstração. Observe que ψ está definida de $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ a valores em $\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ por meio da

$$\psi\left(\frac{k}{n}1_{\mathbb{F}}\right)=\frac{k}{n}1_{\mathbb{G}}, \qquad \text{para todo } \frac{k}{n}\in\mathbb{Q}.$$

Pelo que vimos antes, $\psi:\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\to\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ é um isomorfismo entre as cópias de $\mathbb{Q}$ contidas em $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$. Nosso objetivo será estender ψ a um isomorfismo de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{G}$. Para tanto, dado $a\in\mathbb{F}$ observe que $a=\sup\{r\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\,|\,r\leq a\}$. Assim, podemos colocar

$$\hat{\psi}(a)=\sup\{\psi(r)\in\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}\,|\,r\leq a\}$$

Observe que se $r=\frac{k}{n}1_{\mathbb{F}}$ temos $\hat{\psi}(r)=\hat{\psi}\left(\frac{k}{n}1_{\mathbb{F}}\right)=\frac{k}{n}1_{\mathbb{G}}=\psi(r)$, mostrando que $\hat{\psi}$ coincide com a definição apresentada previamente. Esse fato, juntamente com a unicidade do supremo, mostra que $\hat{\psi}:\mathbb{F}\to\mathbb{G}$ está bem definida.

Para verificar que $\hat{\psi}$ é injetora considere $a,b\in\mathbb{F}$ com $a\neq b$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a<b$. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ é denso em $\mathbb{F}$, existe $r\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ de modo que $a<r<b$. Da definição de $\hat{\psi}$, observe que $\hat{\psi}(a)<\hat{\psi}(r)$. Por outro lado, existirá $s\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ de modo que $r<s<b$. Segue disso, que $\hat{\psi}(r)<\hat{\psi}(b)$. Logo, $\hat{\psi}(a)<\hat{\psi}(b)$. Isso estabelece que $\hat{\psi}$ é injetora, e também verifica a propriedade (3).

Para verificar que $\hat{\psi}$ é sobrejetora, dado $b\in\mathbb{G}$, observe que $b=\sup\{s\in\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}\mid s\leq b\}$. Tomemos então $A=\{r\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\mid\psi(r)\leq b\}$. Note que existe $s\in\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$ tal que $s>b$. Isso nos permite obter, por meio do isomorfismo entre $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{G}}$, um limitante superior de A. Como $\mathbb{F}$ é completo, A possui supremo, que indicaremos por a. Por construção, segue então que $\hat{\psi}(a)=b$, mostrando que $\hat{\psi}$ é sobrejetora.

Para verificar a propriedade (1), observe que o fato de $\mathbb{F}$ ser completo juntamente com a unicidade do supremo implicam que

$$a+b=\sup\{s\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\mid s\leq a\}+\sup\{t\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\mid t\leq b\}=\sup\{r\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\mid r\leq a+b\}.$$

Disso segue que

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(a)+\hat{\psi}(b)&=\sup\{\psi(s)\mid s\leq a,\ s\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\}+\sup\{\psi(t)\mid t\leq b,\ t\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\}\\
&=\sup\{\psi(s)+\psi(t)\mid s+t\leq a+b,\ s,t\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\}\\
&=\sup\{\psi(s+t)\mid s+t\leq a+b,\ s,t\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\}\\
&=\sup\{\psi(r)\mid r\leq a+b,\ r\in\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}\}\\
&=\hat{\psi}(a+b)
\end{aligned}$$

A propriedade (2) é verificada de maneira análoga, concluindo a demonstração do teorema. ■

O isomorfismo $\hat{\psi}$ estabelece que quaisquer corpos ordenados completos podem ser identificados. Dessa maneira pode-se dizer que *há um único corpo ordenado completo*, que indicamos por $\mathbb{R}$. Sendo assim, é natural falar na construção de $\mathbb{R}$ por meio de cortes de Dedekind, na construção por meio de sequências de Cauchy, ou mesmo por meio de decimais.

3 Conclusão

Observamos, ao longo do trabalho, que um fato fundamental para se estabelecer o isomorfismo entre dois corpos ordenados completos foi a identificação de uma cópia dos racionais dentro de cada um. Uma vez caracterizadas essas cópias, sua densidade nos respectivos corpos completos forneceram o ingrediente necessário à construção do isomorfismo procurado. Ainda que fosse evidente a estrutura dessas cópias dos racionais, procuramos sempre distingui-las para deixar claro a que corpo estávamos nos referindo em cada construção. Esse isomorfismo mostrou ainda que, independentemente da construção adotada para um corpo ordenado completo, ela produzirá invariavelmente o conjunto dos números reais.

Finalmente, procuramos apresentar definições e demonstrações em linguagem acessível propondo, na medida do possível, processos construtivos. Por essa razão esperamos que esse trabalho sirva como fonte de consulta para professores da Educação Básica, dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Referências

[1] FORAM, J. *Fundamentals of Real Analysis.* New York: CRC Press, 1991.

[2] HALMOS, P. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

[3] HARDY, G., WRIGHT, E. *An Introduction to Theory of Numbers*. Fourth edition. London: Oxford University Press, 1975.