Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, Demonstração e Aplicação.

Anna Thecya Oliveira Lima

Teresina
2016

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, Demonstração e Aplicação.

Anna Thecya Oliveira Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador
Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

Teresina
2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

B238u Lima, Anna Thecya Oliveira

Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, Demonstração e Aplicação./ Anna Thecya Oliveira Lima. - Teresina, 2016.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Pós-Graduação em Matemática, UniversidadeFederal do Piauí,

Orientador: Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

1. Teorema de Menelaus. 2. Teorema de Ceva. 3. Colinearidade. 4. Concorrência. I. Título

CDD 516.32

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestra em matemática** intitulada: **Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, Demonstração e Aplicação**, defendida por **Anna Thecya Oliveira Lima** em **09 / 09 / 2016** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Me. Mário Gomes dos Santos (UFPI)
Presidente da Banca examinadora

Dr. Gilvan Lima de Oliveira (UFPI)
Examinador Interno

Edson da Silva Lira

Me. Edson da Silva Lira (IFMA)
Examinador Externo

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus que sempre, em todos os momentos da minha vida, me deu forças e coragem para alcançar todos os meus propósitos, e até agora, deu tudo certo!

Estou finalizando um ciclo de muitos que ainda virão, e sei que sempre vou está preparada para encarar, por que me sinto tão abençoada e acompanhada de pessoas que me apoiam e que torcem por mim.

Não posso deixar de mencionar algumas pessoas que foram importantes nessa caminhada, como: meus pais, Edna e Raimundo, e minha irmã Rayanna, que me viram passar noites e mais noites sem dormir, estudando e me dedicando.

Também quero agradecer aos meus companheiros de estudo. O grupo do whatsapp PROFMAT-BRASIL, comandado pelo Bruno Glasses, o que seria de mim durante o curso se não fosse os vídeos e as sugestões de estudo. Meu amigo Kelson, que no último ano foi super prestativo, ao meu amigo Marcelo Gama que nessa etapa final foi primordial para que esse estudo fosse concretizado e aos professores, que de alguma forma sempre contribuem com aprendizados e ensinamentos. Ao meu orientador, professor Mário, por todo seu conhecimento, apoio e disponibilidade.

Enfim, só tenho a agradecer por tudo, e que eu continue com a minha missão de melhorar e transformar a educação do nosso país. Já estou pronta para a próxima etapa. Partiu!

RESUMO

O objetivo principal desse trabalho é a apresentação dos Teoremas de Menelaus e de Ceva, e como se relacionam. O primeiro trata da colinearidade de três pontos sobre as retas suportes dos lados de um triângulo. O segundo se refere à concorrência de três segmentos que unem cada vértice a qualquer ponto do lado oposto de um triângulo. Inicialmente faremos uma breve exposição das biografias e obras dos criadores desses teoremas, os matemáticos, Menelaus (ano 100 d.c) e Ceva (1648), que apesar de 15 séculos de diferença de seus nascimentos, tem seus nomes interligados a esses dois importantes teoremas. Destacaremos de forma pontual algumas definições básicas de geometria euclidiana, relacionadas aos triângulos, como: proporcionalidade de segmentos, congruência e semelhança de triângulos, cálculo de áreas e trigonometria. Depois será exposto, de forma detalhada para facilitar o entendimento dos alunos e professores do ensino médio, as diferentes apresentações e demonstrações do Teorema de Menelaus e de Ceva, mostrando que são elementares e de fácil assimilação pelos os alunos, motivando, assim, a abordagem desse tema em sala de aula. Ao final faremos outras considerações sobre os teoremas, com a finalidade de mostrar sua abrangência, e apresentaremos algumas aplicações de questões de concursos e de olimpíadas relacionadas com os Teoremas de Menelaus e de Ceva.

Palavras-chave: Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva, Colinearidade, Concorrência.

ABSTRACT

The main objective of this work is the presentation of theorems of Menelaus and Ceva, and how they relate. The first addresses the collinearity of three points on the straight brackets of the sides of a triangle. The second relates to competition three segments joining each vertex to any point on the opposite side of a triangle. Initially we will make a brief presentation of the biographies and works of the creators of these theorems, mathematicians, Menelaus (year 100 a.c) and Ceva (1648), who despite 15 centuries of their births difference, have their names linked to these two important theorems . We highlight in a timely manner some basic definitions of Euclidean geometry, related to triangles, such as proportionality segments, congruence and similarity of triangles, areas of calculus and trigonometry. Then it will be exposed in detail to facilitate understanding of students and high school teachers, the various presentations and demonstrations of Menelaus theorem and Ceva, showing that they are elementary and easy assimilation by the students, motivating thus approach this issue in the classroom. At the end we will make further consideration of the theorems, in order to show its scope, and present some applications contests issues and Olympics of Mathematics related to theorems of Menelaus and Ceva.

Keywords: Menelaus theorem, Theorem of Ceva, Colinearity, Competition.

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

A	Ponto A
AB	Segmentos definidos pelos pontos A e B
$\overline{AB}$	Medida do segmento definido pelos pontos A e B
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta definida pelos pontos A e B
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta definida pelos pontos A e B
$\angle A\widehat{B}C$	Ângulo definido pelos pontos A, B e C
$m(\angle A\widehat{B}C)$	Medida do ângulo definido pelos pontos A, B e C
$\triangle ABC$	Triângulo definido pelos pontos A, B e C
$\cong$	Congruentes
$\sim$	Semelhante
$\parallel$	Paralelo

Sumário

Introdução

A Geometria é um campo da matemática muito amplo e cheio de detalhes, por isso alguns teoremas, ao longo da Educação Básica, não são citados e demonstrados. Como exemplo, temos os teoremas de Menelaus e de Ceva. Segundo SILVA (2015) [14] até na maioria das nossas universidades, esses teoremas não fazem parte da matriz curricular da matéria de Geometria Plana, o que mostra o déficit de conhecimento na formação dos professores, e consequentemente, do alunado que ficam impedidos de resolver situações-problemas que envolvam esses assuntos. No entanto, em cursos de preparação para olimpíadas de Matemática e acesso as escolas militares, há uma abordagem significativa sobre os teoremas citados.

Conforme MACEDO (2014) [8], nas ultimas décadas, teoremas como o de Menelaus e o de Ceva, foram excluídos dos livros didáticos do Ensino Básico sem qualquer justificativa, levando, naturalmente, as escolas abandonarem seus estudos. Contudo, as demonstrações de tais teoremas são de fácil entendimento e, portanto, perfeitamente adequadas ao nível de conhecimento básico, e renegá-los aos alunos, principalmente do Ensino Médio, priva-os de conhecer conceitos que podem facilitar as resoluções de diversos problemas propostos em vestibulares concorridos no país, como os das escolas militares, Instituto Militar de Engenharia (IME) e Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), e nas diversas olimpíadas de Matemática existentes.

Este trabalho, além de contribuir com ensino da geometria, tem como foco atingir o maior número de alunos e professores do ensino médio, e também mostrar que é possível trabalhar as demonstrações do Teorema de Menelaus e de Ceva tendo somente como pré-requisito o conhecimento básico de geometria euclidiana, ministrado no ensino médio.

A escolha deste tema justifica-se pelo interesse em motivar os docentes para importância da abordagem desses teoremas em sala de aula, desde a citação, às construções de diversas formas de demonstrações do Teorema de Menelaus e de Ceva, contribuindo para desenvolvimento do conhecimento teórico e prático dos alunos.

Os objetivos deste trabalho, além de apresentar os Teoremas de Menelaus e de Ceva, são: compreender como se aplicam os conceitos dos teoremas em situações problemas; construir diversos tipos de demonstrações retomando conceitos vistos anteriormente; e minimizar as dificuldades existentes na abordagem desses teoremas pelo docente em sala de aula.

Segundo POSAMENTIER e SALKIND (1996, apud MARTINS [7], 2015, p.36), diz que:

> [...] problemas que tratam de Colinearidade e Concorrência são normalmente complicados, trabalhosos e, consequentemente, impopulares entre os alunos. Entretanto, dois teoremas famosos reduziram essas dificuldades: o primeiro é creditado a Menelaus, relacionado à colinearidade de pontos, e o segundo, ao matemático, italiano, Ceva, relacionado à concorrência de retas.

Já, para EVES (1972, apud MARTINS [7], 2015, p.36), "os teoremas de Menelaus e Ceva são teoremas poderosos que lidam de forma elegante com muitos problemas sobre colinearidade de pontos e concorrência de retas". E, MUNIZ NETO (2013, apud MARTINS [7], 2015, p.36), afirma que tem que "dá muita importância a esses dois teoremas clássicos, pois servem de base para demonstrar diversos outros teoremas e resolver uma série de problemas de olimpíadas de Matemática".

As demonstrações que foram desenvolvidas, neste trabalho, tiveram auxilio de assuntos da geometria euclidiana plana, como: Teorema de Tales, congruência e semelhança de triângulos, lei dos senos, razões trigonométricas, e conteúdos que foram trabalhados ao longo do PROFMAT. Portanto, acreditamos que os alunos do Ensino Médio, estão aptos a entender, desenvolver e aplicar, as demonstrações que serão enunciadas neste trabalho, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, BRASIL (1988, p.41) [10], diz que:

> A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Segundo SILVA (2015) [14], o Teorema de Menelaus é assim denominado em razão de seu descobridor, o astrônomo e geômetra Menelaus de Alexandria, nascido por volta do ano 70 dC, em Alexandria, no Egito antigo. Apesar de existirem poucos registros de trabalhos daquela época, notou-se que Menelaus teve grande influencia na evolução da trigonometria esférica e na astronomia. Participou da Escola de Alexandria, uma das maiores escola de matemática da antiga civilização mediterrânea. Também, desenvolveu vários tratados, observações astronômicas, livros sobre geometria, trabalhos sobre trigonometria, textos sobre mecânica e estudos sobre aceleração da gravidade.

Por volta do ano 100 dC, Menelaus escreveu "O Livro das Proposições Esféricas", foi o único que chegou até os dias atuais, com tradução em árabe, sendo considerado o trabalho mais antigo sobre trigonometria esférica. O escrito possui três volumes. O Livro III faz uma abordagem sobre o desenvolvimento da trigonometria esférica. É neste trabalho que encontramos o teorema que leva o seu nome, uma valiosa contribuição para geometria de todos os tempos. Com a divulgação de sua obra, pelos matemáticos, Pappus (290 - 347) e Proclus (412 - 485), seu nome se tornou mais conhecido. Supõe-se que Menelaus tenha morrido por volta de 130 dC, em Alexandria.

Depois de permanecer por muitos séculos no esquecimento, o Teorema de Menelaus volta à tona com Giovanni Ceva, matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico, nascido em 01 de setembro de 1647, em Habsburgo, Empire (hoje Itália), que apesar de suas atividades profissionais como servidor público a serviço do Duque de Mântua, buscou espaço e tempo para desenvolver suas pesquisas e estudos nas áreas das ciências, especialmente Geometria e Hidráulica.

Em 1670, Ceva entra na Universidade de Pisa, e por dois anos, tentou resolver o problema da quadratura do circulo, mesmo sem sucesso, continuou suas pesquisas. Após sua estadia em Pisa, em 1678, publica a obra: *De lineis retos se invicem secantibus statica constructio*, (estática da construção das linhas retas que cortam outra), contendo o Teorema de Ceva, que surgiu com a percepção de que a expressão demonstrada por Menelaus, também poderia resolver os problemas relacionados às cevianas. Naquela época, este trabalho não teve tanta repercussão, até que o matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), revendo o trabalho de Ceva, reconheceu a importância do mesmo, sendo considerado o mais importante resultado da geometria sintética do triângulo no período compreendido entre a Matemática da antiga Grécia e o século XIX.

Existem inúmeras demonstrações dos Teoremas de Menelaus e de Ceva. Para o presente trabalho apresentaremos, primeiramente, o Teorema de Menelaus e de Ceva na versão simples, sendo três demonstrações, para o Teorema de Menelaus, e quatro, para o Teorema de Ceva. Depois serão expostas as demonstrações na versão completa desses teoremas. As escolhas não foram feitas ao acaso, procuramos apresentar demonstrações que além de utilizarem conceitos e conteúdos trabalhados durante o PROFMAT, também fossem elementares de modo a facilitar o entendimento dos alunos e professores do ensino médio, motivando, assim, a abordagem desse tema em sala de aula.

Por serem simples e de abordagem prática para as aulas de Matemática no Ensino Médio, a primeira demonstração foi desenvolvida utilizando o Teorema de Tales. Já segunda demonstração é explicada com auxilio da relação entre áreas. Por fim, apresentamos uma demonstração via semelhança de triângulos.

Neste mesmo sentido, prosseguiremos com os quatro modos de demonstrar o Teorema de Ceva. A primeira demonstração é desenvolvida com auxilio do Teorema de Menelaus. É uma demonstração interessante, devido à ligação existente entre esses dois teoremas. A segunda demonstração foi desenvolvida via relação entre áreas. A terceira, utilizando-se Teorema de Tales e semelhança de triângulos. E, por último, apresentamos uma demonstração a partir da trigonometria, especificamente a Lei dos Senos.

Apesar de ser um trabalho simples, mas sem desprezar o rigor matemático, esperamos proporcionar algum aprendizado e alcançar o maior número de alunos e professores do Ensino Médio.

De posse dessas considerações, concluímos esta dissertação com algumas aplicações de questões de concursos e de olimpíadas de Matemática relacionadas com os teoremas, e outras considerações finais, mostrando abrangência e a utilidade da teoria apresentada.

1 Alguns conceitos da geometria euclidiana

Neste capitulo adotaremos os conceitos, teoremas e algumas convenções que serão necessários para desenvolver as demonstrações dos Teoremas de Menelaus e de Ceva, de forma clara e didática.

1.1 Alguns elementos da geometria plana

Em razão do objetivo deste trabalho ser o resgate dos teoremas de Menealus e de Ceva, estamos considerando que o leitor está familiarizado com os conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana, as ideias de ponto, reta e plano; as definições de ângulos, tipos de ângulos e ângulos definidos por uma transversal a duas retas paralelas; as definições de triângulos e tipos de triângulos e segmentos.

Definição 1. Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do conjunto desses pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Observação 1: O segmento AB é indicado por $\overline{AB}$ e $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X | X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$, conforme a figura 1.1 abaixo:

Figura 1.1: Segmento AB

Observação 2:

i) Os pontos A e B são as extremidades do segmento $\overline{AB}$ e os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmentos $\overline{AB}$.

ii) Se os pontos A e B coincidem, o segmento é nulo.

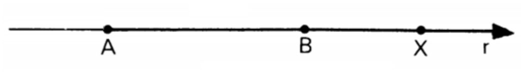

Figura 1.2: Semirreta $\vec{AB}$

Definição 2. Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto de pontos X tais que B está entre A e X é semi-reta AB, indicada por $\overrightarrow{AB}$

Observação 3. O ponto A é a origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X | B$ está entre A e $X\}$, conforme figura 1.2 abaixo:

Observação 4: Se A está entre B e C, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ditas semirretas opostas, conforme figura 1.3 abaixo:

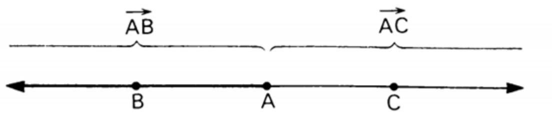

Figura 1.3: Semirretas opostas $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$

Definição 3: Dois segmentos de reta são consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro, ou seja, uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro.

Exemplo 1: Observe a figura 1.4 de segmentos consecutivos

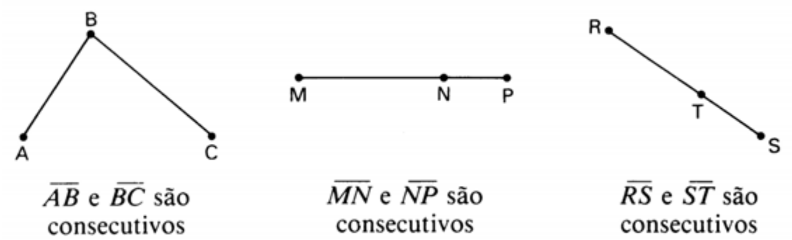

Figura 1.4: Segmentos consecutivos

Definição 4: Dois segmentos de reta são ditos colineares se, e somente se, estão na mesma reta.

Exemplo 2: Observe a figura 1.5 de segmentos colineares.

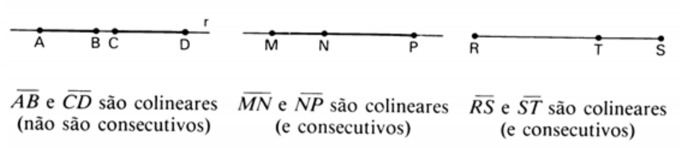

Figura 1.5: Segmentos colineares

Definição 5: Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes, se e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade, ou seja, não têm pontos internos comuns.

Exemplo 3: Observe a figura 1.6 de segmentos adjacentes.

Figura 1.6: Segmentos adjacentes

Definição 6: A congruência de segmentos satisfaz as seguintes condições:

(i) Reflexiva: Todo segmento é congruente a si mesmo ($\overline{AB} \equiv \overline{AB}$)

(ii) Simétrica: Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$

(ii) Transitiva: Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$

Definição 7: Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tomando-se a semirreta qualquer de origem R os segmentos adjacentes $\overline{RP}$ e $\overline{PT}$, tais que $\overline{RP} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{PT} \equiv \overline{CD}$, dizemos que o segmento $\overline{RT}$ é soma de com $\overline{AB}$ cxom $\overline{CD}$ (Figura 1.7)

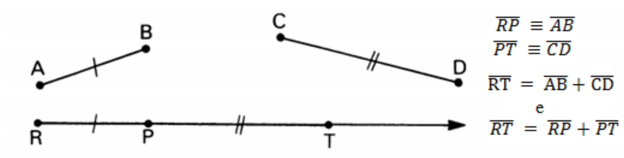

Figura 1.7: Adição de segmentos

Observação 5: Dizemos que o segmento $\overline{RS}$ é múltiplo do segmento $\overline{AB}$ segundo n, quando o segmento $\overline{RS}$ é a soma de n segmentos congruentes a $\overline{AB}$.
Notação: $\overline{RS} = n.\overline{AB}$. Se $\overline{RS} = n.\overline{AB}$, dizemos que $\overline{AB}$ é submúltiplo de $\overline{RS}$ segundo n. (Figura 1.8).

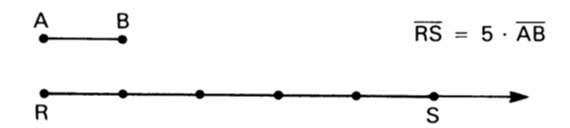

Figura 1.8: Segmentos múltiplos e submúltiplos

Definição 8: A medida de um segmento é mesmo que o comprimento do segmento. A notação usada para a medida do segmento $\overline{AB}$ é dada por AB. A medida de um segmento, não nulo, é um número real positivo associado ao segmento de forma que:

i) Segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes. Ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow AB = CD$

ii) Se um segmento é maior que o outro, sua medida é maior que deste outro. Ou seja, $\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow AB > CD$

iii) A um segmento soma está associado uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas. Ou seja, $\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow RS > AB + CD$

Definição 9: A razão entre dois segmentos é igual a razão dos números que exprimem as medidas com a mesma unidade.

Exemplo 4 : Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos que admitem uma submedida comum u, que está m vezes em $\overline{AB}$ e n vezes em $\overline{CD}$. Ou seja, $AB = mu$ e $CD = nu$. A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é igual à razão entre suas medidas, ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{AB}{CD} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}$$

Definição 10: (Divisão de um segmento interiormente): Diz-se que o ponto M divide interiormente um segmento $\overline{AB}$ na razão k $(k > 0)$ quando M é interior ao segmento e $\dfrac{MA}{MB} = k$ (Figura 1.9).

Definição 11: (Divisão de um segmento exteriormente): Diz-se que o ponto N divide exteriormente um segmento $\overline{AB}$ na razão k $(k > 0)$ quando N é exterior ao segmento e $\dfrac{NA}{NB} = k$ (Figura 1.9).

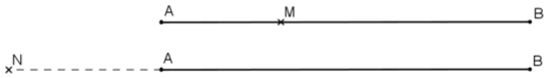

Figura 1.9: Divisão de um segmentos por um ponto

Definição 12: Dois segmentos são proporcionais a dois outros segmentos se à razão dos dois primeiros é igual à razão dos outros dois. Indica-se está proporção de segmentos por

$$AB : CD = A'B' : C'D' \text{ ou } \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Observação 6: Na proporção de segmentos $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$, chamamos AB e $C'D'$ de extremos e os termos CD e $A'B'$, de meios.

Propriedade 1 (Propriedade Fundamental das Proporções de Segmentos): Qualquer que seja a proporção de segmentos, o produto dos extremos é igual ao dos meios. Indica-se está propriedade de segmentos por

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Leftrightarrow AB \cdot C'D' = CD \cdot A'B'$$

Demonstração. Sejam $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ segmentos tais que, nessa ordem, formem a seguinte proporção $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$. Agora, multiplicaremos cada membro da igualdade por $b \cdot d$, e assim, teremos:

$$\frac{AB}{CD} \times (b \cdot d) = \frac{A'B'}{C'D'} \times (b \cdot d) \Leftrightarrow AB \cdot C'D' = CD \cdot A'B'$$

Propriedade 2: Em toda proporção de segmentos a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo), assim como a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto). Indica-se esta propriedade de segmentos por:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{CD}{AB} + 1 = \frac{C'D'}{A'B'} + 1 \Leftrightarrow \frac{CD}{AB} + \frac{AB}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'} + \frac{A'B'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{AB} = \frac{A'B' + C'D'}{A'B'}$$

e

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} + 1 = \frac{A'B'}{C'D'} + 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} + \frac{CD}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} + \frac{C'D'}{C'D'} \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{CD} = \frac{A'B' + C'D'}{C'D'}$$

Já o segundo será

$$\frac{CD}{AB}=\frac{C'D'}{A'B'}\Leftrightarrow\frac{CD}{AB}-1=\frac{C'D'}{A'B'}-1\Leftrightarrow\frac{CD}{AB}-\frac{AB}{AB}=\frac{C'D'}{A'B'}-\frac{A'B'}{A'B'}\Leftrightarrow\frac{CD-AB}{AB}=\frac{C'D'-A'B'}{A'B'}$$

$$\Leftrightarrow\frac{CD-AB}{AB}\cdot(-1)=\frac{C'D'-A'B'}{A'B'}\cdot(-1)\Leftrightarrow\frac{AB-CD}{AB}=\frac{A'B'-C'D'}{A'B'}$$

e

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}\Leftrightarrow\frac{AB}{CD}-1=\frac{A'B'}{C'D'}-1\Leftrightarrow\frac{AB}{CD}-\frac{CD}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}-\frac{C'D'}{C'D'}\Leftrightarrow\frac{AB-CD}{CD}=\frac{A'B'-C'D'}{C'D'}$$

Propriedade 3 : Em toda proporção de segmentos, a soma (ou a diferença) dos antecedentes está para soma (ou a diferença) dos consequentes, assim como cada antecedente está para seu consequente. Indica-se esta propriedade por

I) $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}\Leftrightarrow\dfrac{AB+CD}{A'B'+C'D'}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$

II) $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}\Leftrightarrow\dfrac{AB-CD}{A'B'-C'D'}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$

Demonstração. Seja $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ segmentos tal que, nessa ordem, formem a seguinte proporção $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$. Permutando os meios, teremos $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{CD}{C'D'}$. Aplicando a definição 14, teremos: $\dfrac{AB+A'B'}{A'B'}=\dfrac{CD+C'D'}{C'D'}$. Agora, permutando os meios, obtemos: $\dfrac{AB+A'B'}{CD+C'D'}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$. Já, no segundo caso, considere $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ segmentos tal que, nessa ordem, formem a seguinte proporção $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$. Permutando os meios, teremos $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{CD}{C'D'}$. Aplicando a definição 14, teremos: $\dfrac{AB-A'B'}{A'B'}=\dfrac{CD-C'D'}{C'D'}$. Agora, permutando os meios, obtemos: $\dfrac{AB-A'B'}{CD-C'D'}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$.

Proposição 1 (Unicidade do ponto divisor) : Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão k, existe apenas um ponto M que divide interiormente e apenas um ponto N que divide esse segmento nessa razão.

Demonstração. Considere que inicialmente exista um ponto M' que divida interiormente o segmento $\overline{AB}$ na mesma razão k que o ponto M, também interior ao segmento, conforme figura 1.10. Então, $k=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{M'A}{M'B}$.

Figura 1.10: Unicidade do ponto divisor interior um segmento

Aplicando a definição 14 da proporção de segmentos, obtemos que:

$$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{M'A + M'B}{M'B} \Leftrightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{M'B} \Leftrightarrow MB = M'B \Leftrightarrow M \equiv M'$$

Analogamente, considere que exista um ponto N' que divida exteriormente o segmento $\overline{AB}$ na mesma razão k que o ponto N, também exterior ao segmento $\overline{AB}$, conforme a figura 1.11. Então, $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{N'A}{N'B}$.

Figura 1.11: Unicidade do ponto divisor exterior um segmento

Aplicando, novamente a definição 14, teremos:

$$\frac{NB - NA}{NB} = \frac{N'B - N'A}{N'B} \Leftrightarrow \frac{AB}{NB} = \frac{AB}{N'B} \Leftrightarrow NB = N'B \Leftrightarrow N \equiv N'$$

Portanto, M e N são pontos únicos que dividem o segmento $\overline{AB}$ interiormente e exteriormente, respectivamente, na razão k.

Teorema 1 (Teorema de Tales): Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais quaisquer segmentos proporcionais.

Lema 1: Os triângulos com alturas iguais têm áreas proporcionais às medidas das bases dos triângulos.

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com a mesma altura em relação às bases BC e EF, respectivamente, conforme a figura 1.12.
Calculando as áreas dos triângulos, teremos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC \quad \text{e} \quad S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot EF$$

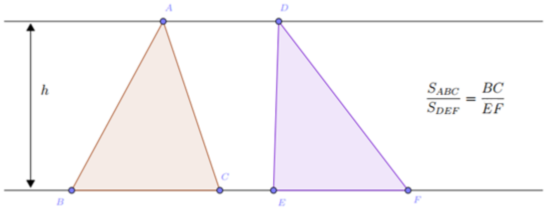

Figura 1.12: Proporcionalidade: área-base

Note que: $\dfrac{S_{ABC}}{BC} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{S_{DEF}}{EF} \Leftrightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \dfrac{BC}{EF}$

Proposição 2: Dados um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P que não pertence a nenhum dos seus lados, se a semirreta $\overrightarrow{AP}$ intercepta o segmento $\overline{BC}$ no ponto L, então $\dfrac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \dfrac{BL}{LC}$.

Demonstração. Conforme figura 1.13 abaixo existem dois casos (a) e (b):

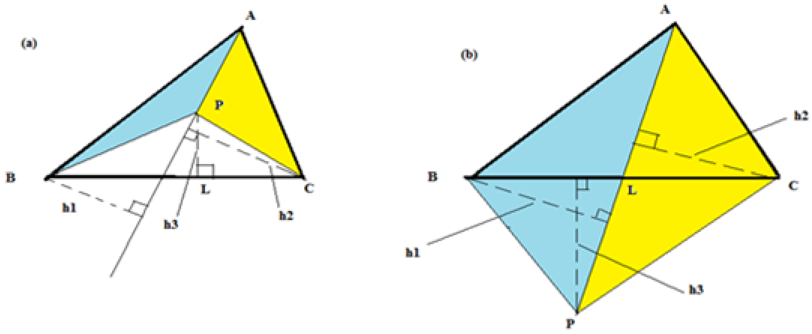

Figura 1.13: Razão: área-base

Observe que os triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PBL$ têm a mesma altura h_1 em relação às bases PA e PL, respectivamente. E, também, os triângulos $\triangle PAC$ e $\triangle PLC$ têm a mesma altura h_2 em relação às bases PA e PL, respectivamente. Aplicando o Lema 1, teremos:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{AP}{PL} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}} \Leftrightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}}$$

Usando novamente o Lema 1 nos triângulos $\triangle PBL$ e $\triangle PLC$ têm a mesma altura h_3 em relação às bases BL e LC, respectivamente, concluímos:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{S_{PBL}}{S_{PLC}} = \frac{BL}{LC}$$

Teorema 2: Dois triângulos são ditos congruentes se tem ordenadamente congruentes os três lados e os três ângulos.

Exemplo 5: Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, conforme a figura 1.14 abaixo.

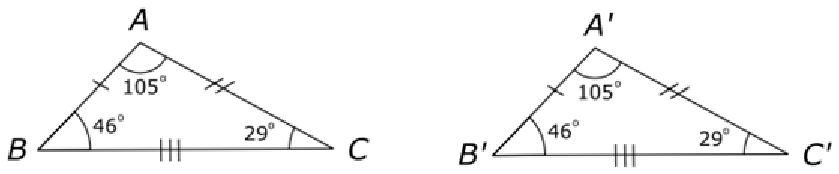

Figura 1.14: Congruência dos triângulos ABC e $A'B'C'$

Observação 7: O símbolo usado para indicarmos a congruência é ($\equiv$) . Logo, teremos que:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \text{ se } \begin{cases} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{cases} \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases}$$

Corolário 1 (1º Caso de congruência – LAL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e um ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.

Exemplo 6: Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL, conforme a figura 1.15 abaixo.

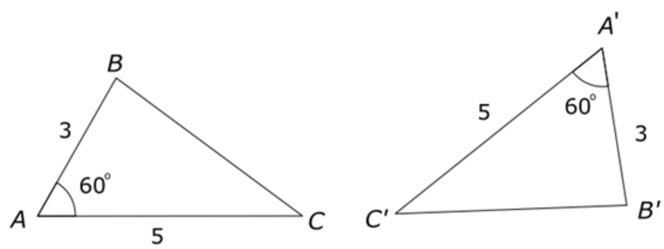

Figura 1.15: Caso LAL de congruência dos triângulos ABC e $A'B'C'$

Observação 8: A notação usada para o caso LAL de congruência dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, será:

$$\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ AC \equiv A'C' \end{cases} \quad \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \underset{\text{def}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ BC \equiv B'C' \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases}$$

Corolário 2 ($2^{\underline{o}}$ Caso de congruência – ALA): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e um lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes.

Exemplo 7: Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso ALA, conforme a figura 1.16 abaixo.

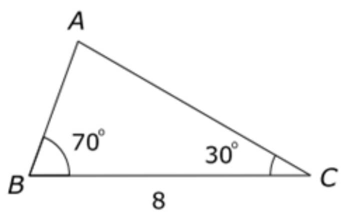

Figura 1.16: Caso ALA de congruência dos triângulos ABC e $A'B'C'$

Observação 9: A notação usada para o caso ALA de congruência dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, será:

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ BC \equiv B'C' \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases} \quad \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \underset{\text{def}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} AB \equiv A'B' \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ AC \equiv A'C' \end{cases}$$

Corolário 3 ($3^{\underline{o}}$ Caso de congruência – LLL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.

Exemplo 8: Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL, conforme a figura 1.17 abaixo.
Observação 10: A notação usada para o caso LLL de congruência dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, será:

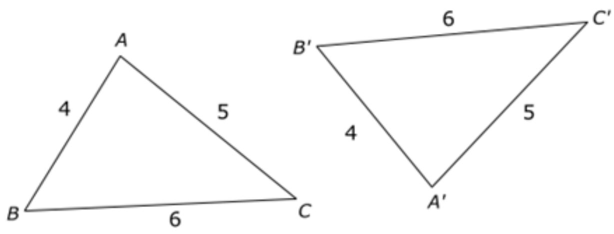

Figura 1.17: Caso LLL de congruência dos triângulos ABC e $A'B'C'$

$$\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{cases} \underset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \underset{\text{def}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases}$$

Corolário 4 (**4º Caso de congruência** – LAA_0): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.

Exemplo 9: Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAA_0, conforme a figura 1.18 abaixo.

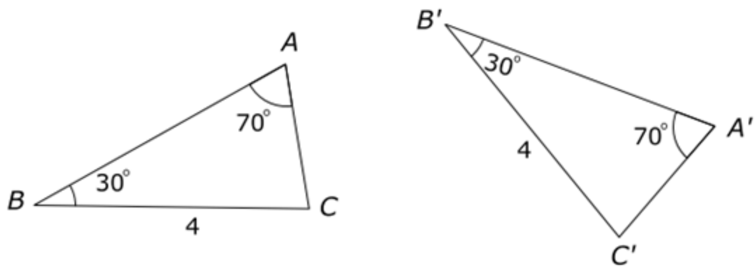

Figura 1.18: Caso LAA_0 de congruência dos triângulos ABC e $A'B'C'$

Observação 11: A notação usada para o caso LAA_0 de congruência dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, será:

$$\begin{cases} BC \equiv B'C' \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \end{cases} \underset{LAA_0}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \underset{\text{def}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \\ AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \end{cases}$$

Corolário 5 ($5^{\underline{o}}$ Caso de congruência – Especial): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes.

Exemplo 10: Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso especial, conforme a figura 1.19 abaixo.

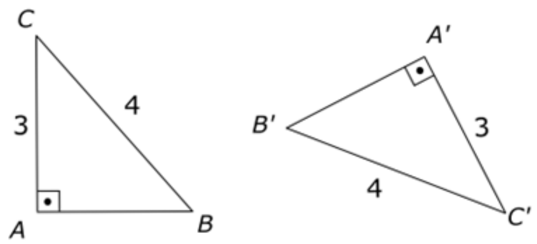

Figura 1.19: Caso de congruência especial dos triângulos ABC e $A'B'C'$

Corolário 6: Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais.

Observação 12: Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.

Exemplo 11: A figura 1.20 mostra que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

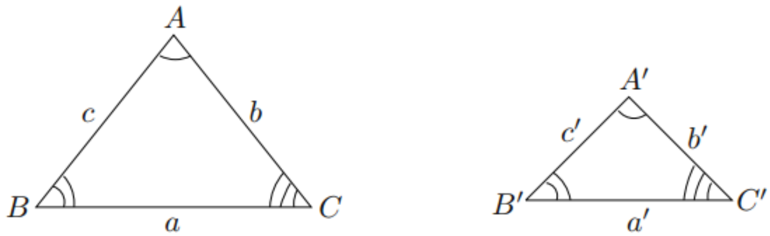

Figura 1.20: Triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes

Observação 13: O símbolo usado para indicarmos a semelhança é ($\sim$). Logo, teremos que:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{se} \quad \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases}$$

e também $\left\{ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k, \right.$ (k é a razão de semelhança)

Teorema 3 (Teorema Fundamental): Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Corolário 7 (1º Caso de congruência – AA): Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes

Observação 14: A notação usada para o caso AA de semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, conforme a figura 1.21, será:

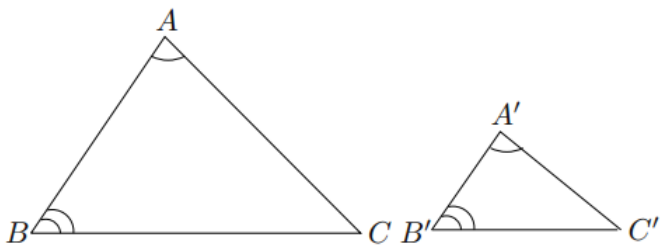

Figura 1.21: Caso de semelhança AA dos triângulos ABC e $A'B'C'$

$$\begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Corolário 8 (2º Caso de congruência – LAL): Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então eles são semelhantes.

Observação 15: A notação usada para o caso LAL de semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, conforme a figura 1.22, será

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

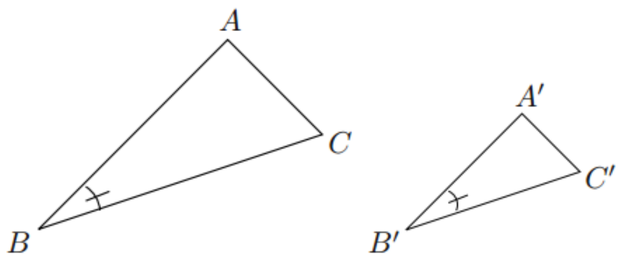

Figura 1.22: Caso de semelhança LAL dos triângulos ABC e $A'B'C'$

Corolário 9 (3º **Caso de congruência** – **LLL**): Se dois triângulos têm lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Observação 16: A notação usada para o caso LLL de semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, conforme a figura 1.23, será:

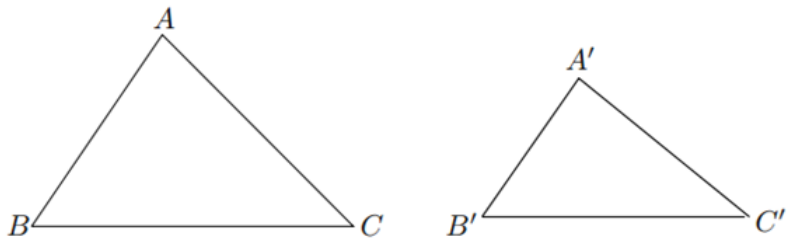

Figura 1.23: Caso de semelhança LLL dos triângulos ABC e $A'B'C'$

$$\left\{ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \right. \qquad \Longrightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Teorema 4 (Lei dos senos): Em um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro do circulo circunscrito ao triângulo, ou seja:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R$$

Teorema 5 (Teorema da bissetriz interna): Bissetriz interna de um triângulo é o segmento de reta com extremidades em um vértice e no lado oposto a esse vértice e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes. Além disso, a bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Teorema 6 (Teorema da bissetriz externa): Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto, então ficam determinados, nesta reta, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

2 O Teorema de Menelaus

Apresentaremos, neste capítulo, três demonstrações da versão simples do Teorema de Menelaus e uma demonstração da versão completa. As demonstrações da versão simples versarão sobre: A primeira será demonstrada, principalmente, com auxilio do Teorema de Tales; A segunda, através das relações entre áreas de triângulos; E, a terceira, pela semelhança de triângulos. Já a versão completa, teremos a demonstração da recíproca que envolverá a unicidade do ponto divisor.

2.1 Enunciados do Teorema de Menelaus - Versão simples

O Teorema de Menelaus na forma básica pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema 1. (Teorema de Menelaus - Versão Simples) Sejam L, M, N pontos nas retas suportes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, do triangulo $\triangle ABC$ e diferentes do vértices. Se estes pontos são colineares, então: $\dfrac{NA}{NB} \cdot \dfrac{LB}{LC} \cdot \dfrac{MC}{MA} = 1$

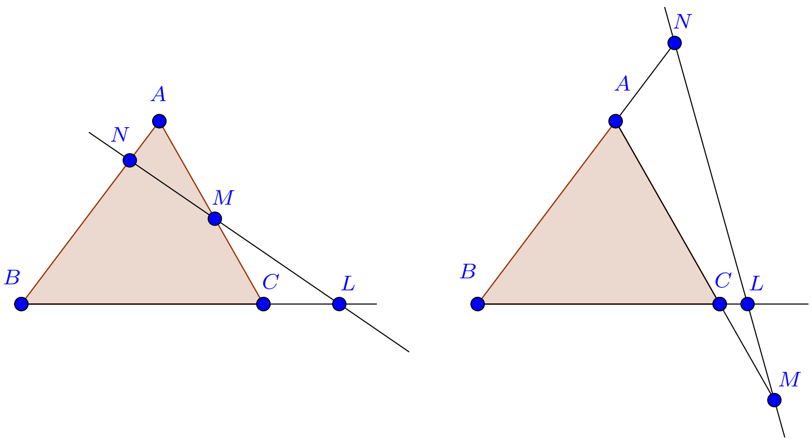

Figura 2.1: Teorema de Menelaus - Versão Simples

2.1.1 Demonstração da versão simples do Teorema de Menelaus

Por se tratar de um teorema relevante e que envolve muitos problemas de colinearidades em triângulos, serão expostas as demonstrações usando basicamente a geometria plana. As três demonstrações são apresentadas nas subseções seguintes.

2.1.2 Demonstração via Teorema de Tales

Seja o $\triangle ABC$, e sejam L, M e N pontos colineares pertencentes as retas ou prolongamentos das retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente. Para efeito didático, dividiremos esta demonstração em dois casos distintos, conforme figura 2.2.

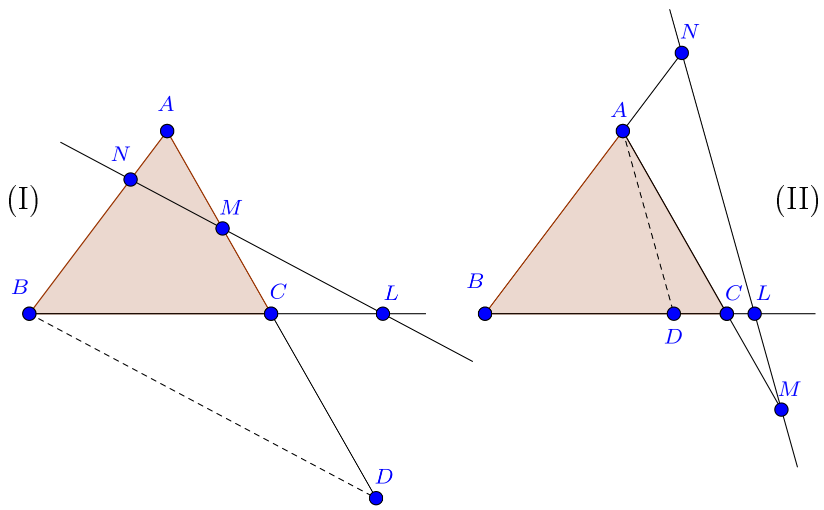

Figura 2.2: Menelaus - Via Teorema de Tales

Demonstração. Para o caso I, traçaremos o segmento $\overline{BD}$ paralelo à reta $\overleftrightarrow{NL}$ que intercepta o prolongamento do lado $\overline{AC}$ no ponto D. Note que podemos usar o Teorema de Tales, os segmentos paralelos $\overline{BD}$ e $\overline{MN}$ cortam as secantes $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ em partes proporcionais. Então, teremos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MD} \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{MD}{MA} = 1 \tag{2.1}$$

Agora, tomando os segmentos paralelos $\overline{NL}$ e $\overline{BD}$ sobre as transversais $\overline{BL}$ e $\overline{MD}$, pelo Teorema de Tales, teremos:

$$\frac{CD}{MC} = \frac{BC}{CL} \Leftrightarrow \frac{MC + CD}{MC} = \frac{CL + BC}{CL}$$

Como $MC + CD = MD$ e $CL + BC = BL$, teremos:

$$\frac{MD}{MC} = \frac{BL}{CL} \Leftrightarrow \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MD} = 1 \tag{2.2}$$

Multiplicando, as igualdades 2.1 e 2.2, membro a membro, obtemos:

$$\left(\frac{NA}{NB}\cdot\frac{MD}{MA}\right)\cdot\left(\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MD}\right)=1\cdot 1\Leftrightarrow\frac{NA}{NB}\cdot\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}=1$$

Já, para o caso II, traçaremos o segmento $\overline{AD}$ paralelo à reta $\overleftrightarrow{NL}$, com D no segmento $\overline{BC}$. Pelo Teorema de Tales, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{NL}$ coram as secantes $\overline{BN}$ e $\overline{BL}$ em partes proporcionais. Assim teremos:

$$\frac{BA}{AN}=\frac{BD}{DL}\Leftrightarrow\frac{BA+AN}{AN}=\frac{BD+DL}{DL}$$

Como, $BA+AN=BN$ e $BD+DL=BL$, teremos:

$$\frac{BN}{AN}=\frac{BL}{DL}\Leftrightarrow\frac{NA}{NB}\cdot\frac{LB}{LD}=1 \tag{2.3}$$

Analogamente, tomando os segmentos paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{MN}$ cortados pelas transversais $\overline{AM}$ e $\overline{DL}$, pelo Teorema de Tales, teremos:

$$\frac{AC}{CM}=\frac{DC}{CL}\Leftrightarrow\frac{AC+CM}{CM}=\frac{DC+CL}{CL}$$

Como, $AC+CM=AM$ e $DC+CL=DL$, teremos:

$$\frac{AM}{CM}=\frac{DL}{CL}\Leftrightarrow\frac{MC}{MA}\cdot\frac{LD}{LC}=1 \tag{2.4}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 2.3 e 2.4, obtemos:

$$\left(\frac{NA}{NB}\cdot\frac{LB}{LD}\right)\cdot\left(\frac{MC}{MA}\cdot\frac{LD}{LC}\right)=1\cdot 1\Leftrightarrow\frac{NA}{NB}\cdot\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}=1$$

■

2.1.3 Demonstração via áreas

Sejam L, M e N os pontos que relacionam as razões que dividem, respectivamente, os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$ com as respectivas áreas, $S_{MBL}=X$, $S_{MAL}=Y$ e $S_{MAB}=Z$, conforme a figura 2.3.

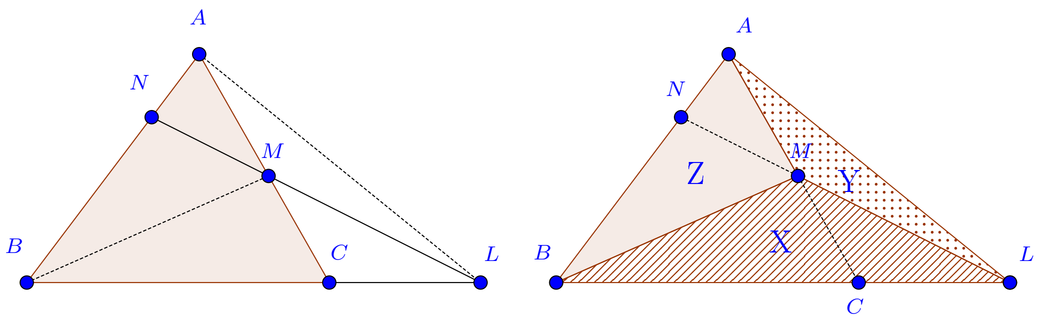

Figura 2.3: Menelaus - Via Áreas

Demonstração. Observe que o ponto M não pertence a nenhum dos lados do triângulo ΔLAB e como a semirreta $\overleftrightarrow{LM}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ no ponto N, então pela Proposição 2, temos que:

$$\frac{S_{MAL}}{NA} = \frac{S_{MBL}}{NB} \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{S_{MAL}}{S_{MBL}} = \frac{Y}{X} \tag{2.5}$$

Note também que, asemirreta $\overleftrightarrow{AM}$ intercepta o segmento $\overline{BL}$ no ponto C, então pela Proposição 2, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{S_{MAB}}{BC} = \frac{S_{MAL}}{LC} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{BC}{LC} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAL}} = \frac{Z}{Y} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{BC + LC}{LC} = \frac{S_{MAB} + S_{MAL}}{S_{MAL}} = \frac{Z+Y}{Y} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora observe que os triângulos ΔABM e ΔMBC que tem a mesma altura h_1 em relação às bases $\overline{AM}$ e $\overline{MC}$ respectivamente, o mesmo ocorrendo para os triângulos ΔAML e ΔMCL que possuem altura h_2 em relação às mesmas bases. Então, pelo Lema 1, temos que:

$$\frac{S_{MAB}}{MA} = \frac{S_{MBC}}{MC} \Leftrightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{MBA}} = \frac{MC}{MA}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{MAL}}{MA} = \frac{S_{MCL}}{MC} & \Leftrightarrow \frac{S_{MCL}}{S_{MAL}} = \frac{MC}{MA} \\ & \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{S_{MBC}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MCL}}{S_{MAL}} \\ & \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{S_{MBC} + S_{MCL}}{S_{MAB} + S_{MAL}} = \frac{X}{Z+Y} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 2.5, 2.6 e 2.7, obtemos:

$$\left(\frac{NA}{NB}\right) \cdot \left(\frac{LB}{LC}\right) \cdot \left(\frac{MC}{MA}\right) = \left(\frac{Y}{X}\right) \cdot \left(\frac{Z+Y}{Y}\right) \cdot \left(\frac{X}{Z+Y}\right) = 1$$

2.1.4 Demonstração via semelhança de triângulos

Primeiramente, faremos a demonstração usando semelhança em um triângulo qualquer, e depois, em um triângulo retângulo.

Considere P um ponto que esteja sobre a reta de Menelaus, e L, M e N pontos colineares, tal que no caso I, seja traçado um segmento $\overline{PC}$ paralelo a $\overline{AB}$. E, para o caso II, seja traçado o segmento $\overline{PB}$ paralelo a $\overline{AC}$, conforme figura 2.4 abaixo.

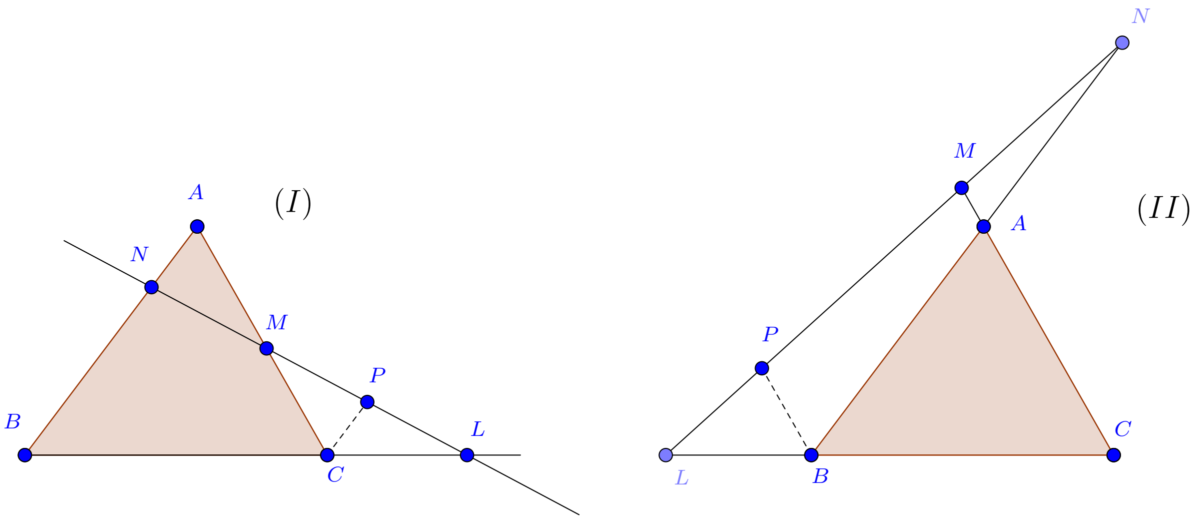

Figura 2.4: Menelaus - Via Semelhança de Triangulo Qualquer

Demonstração. Iniciaremos com a demonstração do caso dafigura 2.4. Das semelhanças entre os triângulos temos que:

(i) Os triângulos $\Delta NBL \sim \Delta PCL$ possuem um ângulo em comum e dois ângulos correspondentes. Portanto, temos: $$\frac{LB}{LC} = \frac{NP}{PC} \Leftrightarrow \frac{LB}{LC} \cdot \frac{PC}{NB} = 1 \qquad (2.8)$$

(ii) Os triângulos $\Delta AMN \sim \Delta CPM$ possuem um um ângulo oposto pelo vértice e dois ângulos altermos internos. Assim, temos: $$\frac{NA}{PC} = \frac{MA}{MC} \Leftrightarrow \frac{NA}{PC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \qquad (2.9)$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 2.8 e 2.9, e simplificando o valor comum PC, teremos:

$$\left(\frac{LB}{LC} \cdot \frac{PC}{NB}\right) \cdot \left(\frac{NA}{PC} \cdot \frac{MC}{MA}\right) = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Já, para o caso II, temos que das semelhanças entre os triângulos:

(iii) $\Delta MCL \sim \Delta PLB$, pois possuem um ângulo em comum e dois ângulos correspondentes. Portanto, temos: $\dfrac{LB}{LC} = \dfrac{PB}{MC} \Leftrightarrow \dfrac{LB}{LC} \cdot \dfrac{MC}{PB} = 1$ (2.10)

(iv) $\Delta NPB \sim \Delta NMA$ possuem um ângulo em comum e dois ângulos correspondentes. Portanto, temos: $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{MA}{PB} \Leftrightarrow \dfrac{NA}{NB} \cdot \dfrac{PB}{MA} = 1$ (2.11)

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 2.10 e 2.11, e simplificando o valor comum PB, teremos:

$$\left(\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{PB}\right) \cdot \left(\frac{NA}{PC} \cdot \frac{PB}{MA}\right) = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

■

Demonstração. Agora, demonstraremos este teorema usando semelhança em triângulos retângulos.

A partir dos vértices A, B e C do triangulo $\triangle ABC$, traçaremos as alturas relativas aos triângulos $\triangle ANM$, $\triangle BNL$, $\triangle CLM$, respectivamente. Sejam Q, R e P os pés de tais alturas e h_a , h_b, e h_c seus respectivos comprimentos. Note que há semelhança de triângulos retângulos, pois $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ e $\overline{CP}$ são perpendiculares à reta de Menelaus e paralelas entre si, conforme figura 2.5

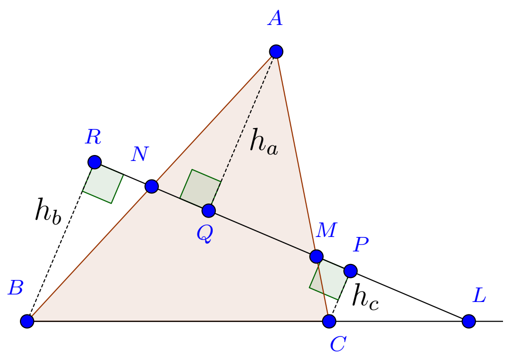

Figura 2.5: Menelaus - Via Semelhanças de Triângulos Retângulos

Observe que:

(v) $\triangle BRL \sim \triangle CPL$, pois possuem um ângulo em comum e um ângulo reto. Portanto, temos: $\dfrac{LB}{LC} = \dfrac{h_b}{h_c}$. (2.12)

(vi) $\triangle CPM \sim \triangle AQM$, pois possuem um ângulo oposto pelo vértice e um ângulo reto. Portanto, temos: $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{h_c}{h_a}$. (2.13)

(vii) $\triangle BRN \sim \triangle AQN$, pois possuem um ângulo oposto pelo vértice e um ângulo reto. Portanto, temos: $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{h_a}{h_b}$. (2.14)

Multiplicando, membro a membro, as relações 2.12, 2.13 e 2.14, obtemos:

$$\left(\frac{LB}{LC}\right) \cdot \left(\frac{MC}{MA}\right) \cdot \left(\frac{NA}{NB}\right) = \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} \cdot \frac{h_a}{h_b} \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

■

Diante do exposto, seguiremos, agora com a demonstração do Teorema de Menelaus na versão completa.

2.2 Enunciados do Teorema de Menelaus - Versão completa

O Teorema de Menelaus na forma completa pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema 2. (Teorema de Menelaus - Versão Completa) Sejam três pontos L, M e N, localizados, respectivamente, nas retas suportes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ de um triangulo $\triangle ABC$ qualquer e diferentes dos vértices. Entao, L, M e N são colineares se, e somente se

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \tag{2.8}$$

2.2.1 Demonstração da versão competa do Teorema de Menelaus

Suponhamos que os pontos L, M e N são colineares. A partir dos vértices A, B e C do triangulo $\triangle ABC$, traçaremos as alturas de comprimentos h_1, h_2 e h_3 relativas aos triângulos AMN, BNL e CLM, respectivamente. E sejam Q, R e S os pés de tais alturas, conforme a figura 2.6.

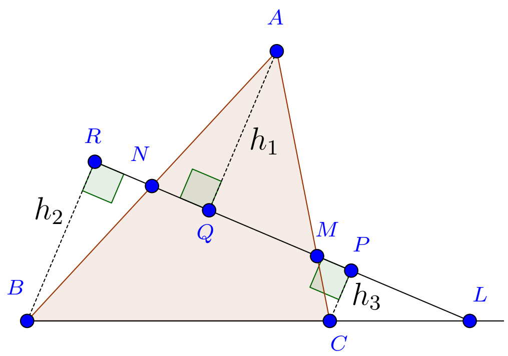

Figura 2.6: Menelaus - Segmentos Orientados

Note que há semelhança de triângulos retângulos, pois $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ e $\overline{CP}$ são perpendiculares à reta de Menelaus e paralelas entre si. Assim, teremos:

(viii) $\triangle BRL \sim \triangle CPL$, pois possuem um ângulo em comum e um ângulo reto.
Portanto, temos: $\dfrac{LB}{LC} = \dfrac{h_2}{h_3}$. (2.16)

(ix) $\triangle CPM \sim \triangle AQM$, pois possuem um ângulo oposto pelo vértice e um ângulo reto.
Portanto, temos: $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{h_3}{h_1}$. (2.17)

(x) $\triangle BRN \sim \triangle AQN$, pois possuem um ângulo oposto pelo vértice e um ângulo reto.
Portanto, temos: $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{h_1}{h_2}$. (2.18)

Multiplicando, membro a membro, as três igualdades, teremos o seguinte resultado:

$$\left(\frac{LB}{LC}\right) \cdot \left(\frac{MC}{MA}\right) \cdot \left(\frac{NA}{NB}\right) = \left(\frac{h_2}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{h_3}{h_1}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Para mostrar a recíproca e, assim, justificar a versão completa, provaremos que: Se L, M e N são pontos nas retas suportes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, do triangulo $\triangle ABC$, diferentes dos vértices e a equação $\dfrac{NA}{NB} \cdot \dfrac{LB}{LC} \cdot \dfrac{MC}{MA} = 1$ é satisfeita, então estes três pontos são colineares.

Demonstração. Sejam L, M e N pertencentes as retas suportes dos lados do triangulo $\triangle ABC$ e diferentes de seus vértices de modo que $\dfrac{NA}{NB} \cdot \dfrac{LB}{LC} \cdot \dfrac{MC}{MA} = 1$

Tracemos a reta $\overline{LM}$. Seja P o ponto de interseção de $\overline{LM}$ com $\overline{AB}$. Portanto, L, M e P são colineares. Pelo Teorema de Menelaus, temos que:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \tag{2.9}$$

Comparando 2.8 e 2.9, temos que:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}$$

Pela definição 16, da unicidade do pontodivisor, os pontos P e N coincidem, logo $P = N$. Portanto, os pontos N, L e M são colineares. ■

3 O Teorema de Ceva

Apresentaremos, neste capitulo, três demonstrações da versão simples do Teorema de Ceva e uma demonstração da versão completa, que trata da concorrência de segmentos das retas que unem cada vértice de um triangulo a um ponto situado sobre a reta suporte do lado oposto.

3.1 Enunciado do Teorema de Ceva - Versão simples

O Teorema de Ceva na forma simples pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema 3. (Teorema de Ceva - Versão Simples) Sejam L, M e N pontos, respectivamente, sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triangulo $\triangle ABC$. As cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ intersectam-se em um ponto P, então

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

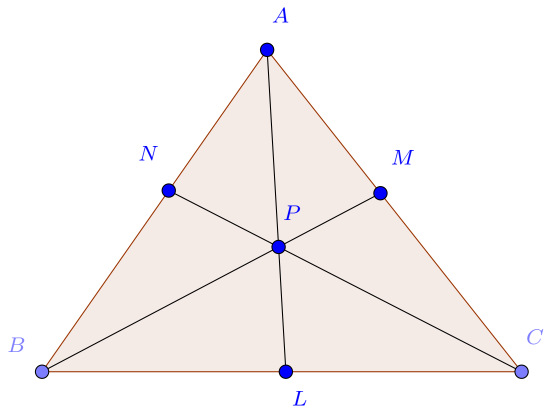

Figura 3.1: Teorema de Ceva - Versão Simples

3.1.1 Demonstrações da versão simples do Teorema de Ceva

As demonstrações que serão apresentadas podem ser trabalhada no ensino médio, pois envolve relação entre áreas, Teorema de Tales, Semelhança de Triângulos e Trigonometria. As quatro demonstrações serão desenvolvidas a seguir.

3.1.1.1 Demonstração via Teorema de Menelaus

Demonstração. Suponhamos que as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ se intersectam no ponto P. Note que podemos desmembrar a figura I em a e b da seguinte forma:

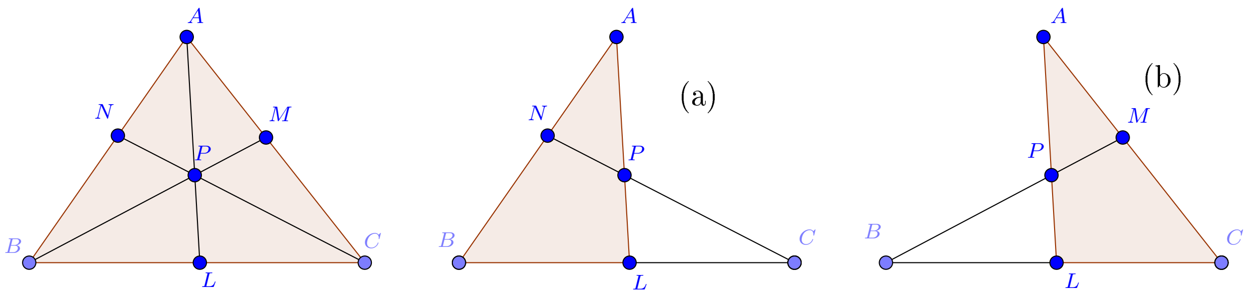

Figura 3.2: Ceva - Via Teorema de Menelaus

Ao aplicar o Teorema de Menelaus no triângulo $\triangle ABL$ e a transversal $\overleftrightarrow{NPC}$, conforme a figura 3.2(a) teremos:

$$\frac{NA}{NB}\cdot\frac{CB}{CL}\cdot\frac{PL}{PA}=1 \tag{3.1}$$

Agora, aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo $\triangle ALC$ e a transversal $\overleftrightarrow{BPM}$, conforme a figura 3.2(b) teremos:

$$\frac{PA}{PL}\cdot\frac{BL}{BC}\cdot\frac{MC}{MA}=1 \tag{3.2}$$

Multiplicando 3.1 e 3.2, membro a membro, teremos:

$$\left(\frac{NA}{NB}\cdot\frac{CB}{CL}\cdot\frac{PL}{PA}\right)\cdot\left(\frac{PA}{PL}\cdot\frac{BL}{BC}\cdot\frac{MC}{MA}\right)=1\cdot 1\Leftrightarrow\frac{NA}{NB}\cdot\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}=1$$

■

3.1.1.2 Demonstração via áreas

Demonstração. Sejam L, M e N os pontos que associam as razões que dividem respectivamente, os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triangulo $\triangle ABC$, com as respectivas áreas, $S_{BPC}=X$, $S_{APC}=Y$ e $S_{APB}=Z$, conforme a figura 3.3

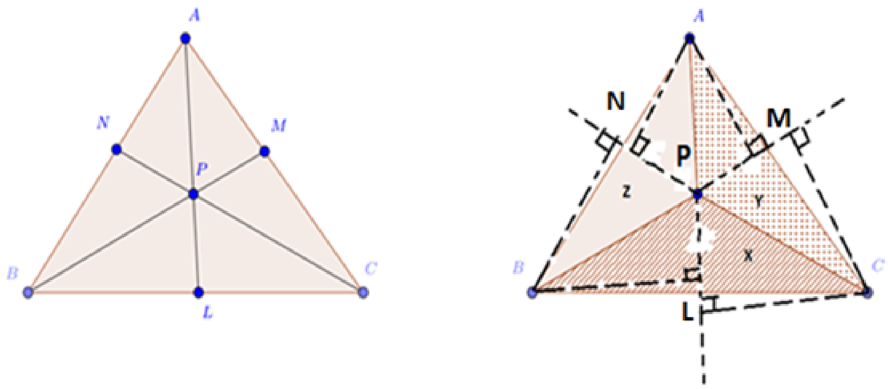

Figura 3.3: Ceva: Via Áreas

Observe que o ponto P não pertence a nenhum dos lados do triângulo $\triangle ABC$. Como a semirreta $\overleftrightarrow{CP}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ no ponto N, então pela Proposição 2, temos que:

$$\frac{S_{APC}}{NA} = \frac{S_{BPC}}{NB} \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{Y}{X} \tag{3.3}$$

Note também que a semirreta $\overleftrightarrow{AP}$ intercepta o segmento $\overline{BC}$ no ponto L. Então, pela Proposição 2, temos que:

$$\frac{S_{APB}}{LB} = \frac{S_{APC}}{LC} \Leftrightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{Z}{Y} \tag{3.4}$$

Agora observe que a semirreta $\overleftrightarrow{BP}$ intercepta o segmento $\overline{AC}$ no ponto M. Então, pela Proposição 2, temos que:

$$\frac{S_{BPC}}{MC} = \frac{S_{APB}}{MA} \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{X}{Z} \tag{3.5}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 3.3, 3.4 e 3.5, obtemos:

$$\left(\frac{NA}{NB}\right) \cdot \left(\frac{LB}{LC}\right) \cdot \left(\frac{MC}{MA}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{X}\right) \cdot \left(\frac{Z}{Y}\right) \cdot \left(\frac{X}{Z}\right) = 1$$

■

3.1.1.3 Demonstração via Teorema de Tales e semelhança de triângulos

Demonstração. Sejam $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ E $\overline{CN}$ as cevianas que concorrem no ponto P no triângulo $\triangle ABC$. Agora, traçaremos pelo ponto A uma reta r paralela a reta suporte do lado $\overline{BC}$, e prolongaremos as cevianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ até interceptar a reta r nos pontos E e D, respectivamente, segundo ilustração da figura 3.4.

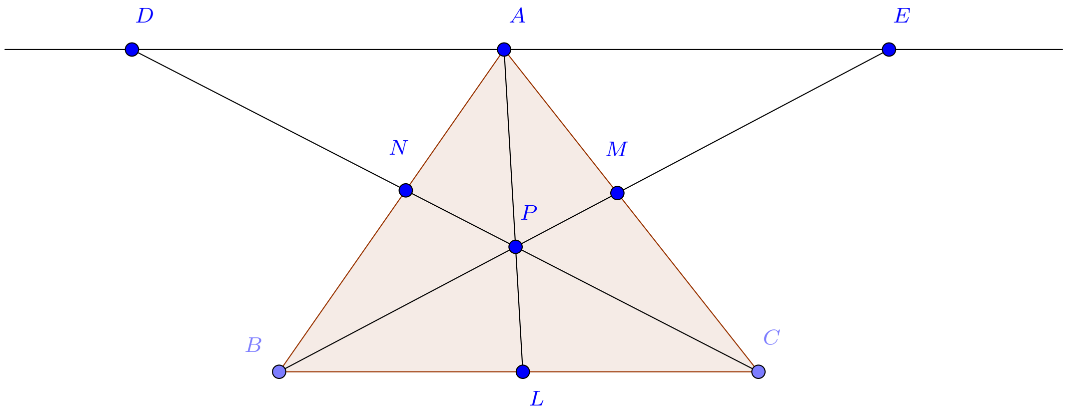

Figura 3.4: Ceva: Via Teorema de Tales e Semelhanças de Triângulos

Note que os triângulos $\triangle DNA \sim \triangle BNC$, pois o par de ângulos, $\angle D\widehat{A}N$ e $\angle N\widehat{B}C$ e $\angle A\widehat{D}N$ e $\angle N\widehat{C}B$, são congruentes, e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Logo, pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AD}{BC} \tag{3.6}$$

Observe, também, que os triângulos $\triangle EMA \sim \triangle BMC$, pois os pares de ângulos, $\angle E\widehat{A}M$ e $\angle M\widehat{C}B$, $\angle A\widehat{E}M$ e $\angle M\widehat{B}C$ são congruentes e $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$. Logo, pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE} \tag{3.7}$$

E pela Proposição 2, os triângulos $\triangle AEP \sim \triangle LBP$ e também os triângulos $\triangle DAP \sim \triangle CLP$. Aplicando o Teorema de Tales, nos dois casos, teremos:

$$\frac{AP}{PL} = \frac{EA}{LB} \tag{3.8}$$

e

$$\frac{AP}{PL} = \frac{AD}{LC} \tag{3.9}$$

De 3.8 e 3.9, temos que:

$$\frac{EA}{LB} = \frac{AD}{LC} \Leftrightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD} \tag{3.10}$$

Multiplicando as igualdades 3.7 e 3.10 e simplificando, teremos:

$$\left(\frac{NA}{NB} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{LB}{LC}\right) = \left(\frac{AD}{CB} \cdot \frac{CB}{AE} \cdot \frac{AE}{AD}\right) \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{LB}{LC} = 1$$

■

O Teorema de Ceva também pode ser apresentado na sua forma trigonométrica.

Teorema 4. (Ceva trigonométrico - Versão Simples) Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam N, L e M pontos sobre os lados segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Então, as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são concorrentes se,

$$\frac{\text{sen}\,\angle A\widehat{C}N}{\text{sen}\,\angle B\widehat{C}N} \cdot \frac{\text{sen}\,\angle B\widehat{A}L}{\text{sen}\,\angle L\widehat{A}C} \cdot \frac{\text{sen}\,\angle C\widehat{B}M}{\text{sen}\,\angle M\widehat{A}B} = 1$$

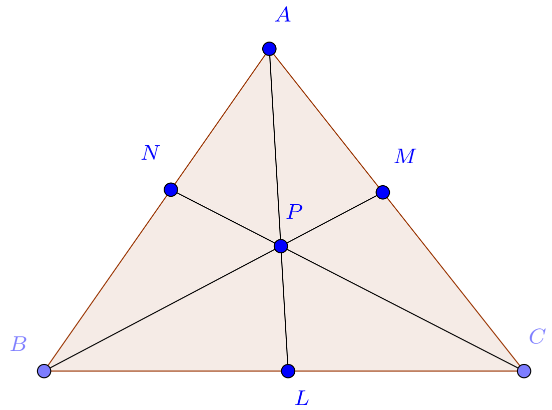

Figura 3.5: Ceva Trigonométrico

3.1.1.4 Demonstração do Teorema de Ceva trigonométrico via Lei dos senos

Suponhamos que as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são concorrentes em P. Observando os triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ e $\triangle CPA$ e aplicando a lei dos senos, respectivamente, teremos:

$$\frac{BP}{\text{sen}\,B\widehat{A}L} = \frac{AP}{\text{sen}\,M\widehat{B}A} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,M\widehat{B}A}{\text{sen}\,B\widehat{A}L} = \frac{AP}{BP} \tag{3.11}$$

$$\frac{BP}{\text{sen}\,B\widehat{C}N} = \frac{CP}{\text{sen}\,C\widehat{B}M} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,B\widehat{C}N}{\text{sen}\,C\widehat{B}N} = \frac{BP}{CP} \tag{3.12}$$

$$\frac{PC}{\text{sen}\,C\widehat{A}L} = \frac{AP}{\text{sen}\,A\widehat{C}N} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,C\widehat{A}L}{\text{sen}\,A\widehat{C}N} = \frac{PC}{PA} \tag{3.13}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades 3.11, 3.12 e 3.13 ,teremos:

$$\left(\frac{\text{sen}\,M\widehat{B}A}{\text{sen}\,B\widehat{A}L}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen}\,B\widehat{C}N}{\text{sen}\,C\widehat{B}N}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen}\,C\widehat{A}L}{\text{sen}\,A\widehat{C}N}\right) = \left(\frac{AP}{BP}\right) \cdot \left(\frac{BP}{CP}\right) \cdot \left(\frac{PC}{PA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\text{sen}\,A\widehat{C}N}{\text{sen}\,B\widehat{C}N}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen}\,B\widehat{A}L}{\text{sen}\,L\widehat{A}C}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen}\,C\widehat{B}M}{\text{sen}\,M\widehat{B}A}\right) = \left(\frac{PA}{BP}\right) \cdot \left(\frac{BP}{PC}\right) \cdot \left(\frac{CP}{AP}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,A\widehat{C}N}{\text{sen}\,B\widehat{C}N} \cdot \frac{\text{sen}\,B\widehat{A}L}{\text{sen}\,L\widehat{A}C} \cdot \frac{\text{sen}\,C\widehat{B}M}{\text{sen}\,M\widehat{B}A} = 1$$

Diante disso, continuaremos a exposição das demonstrações do Teorema de Ceva na versão completa.

3.2 Enunciado do Teorema de Ceva - Versão completa

O teorema de Ceva na forma completa pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 5. (Teorema de Ceva - Versão Completa) Sejam L, M e N pontos, respectivamente, sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$. As cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ intersectam-se em um ponto P, se e somente se,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

3.2.1 Demonstração da versão completa do Teorema de Ceva

Demonstração. Suponhamos que as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ do triângulo $\triangle ABC$ concorrem no ponto P. Traçaremos pelo ponto A uma reta r paralela à reta suporte do lado $\overline{BC}$. Agora, prolongaremos as cevianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ até interceptar a reta r, nos pontos E e D, respectivamente, conforme a figura 3.6.

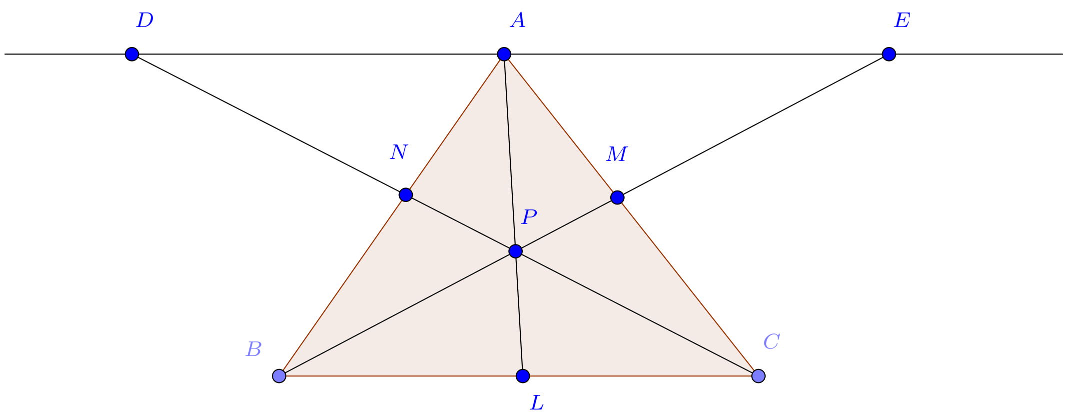

Figura 3.6: Ceva Via Teorema de Tales

Note que os triângulos:
1º) $\triangle DNA \sim \triangle CNB$. Logo, teremos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AD}{CB} \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{AD}{CB} \tag{3.14}$$

2º) $\triangle BPC \sim \triangle EPD$. Logo, teremos:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD} \tag{3.15}$$

2º) $\triangle MAE \sim \triangle CMB$. Logo, teremos:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE} \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE} \tag{3.16}$$

Multiplicando as relações 3.14, 3.15 e 3.16, membro a membro e simplificando,teremos:

$$\left(\frac{NA}{NB}\right) \cdot \left(\frac{LB}{LC}\right) \cdot \left(\frac{MC}{MA}\right) = \left(\frac{AD}{CB}\right) \cdot \left(\frac{AE}{AD}\right) \cdot \left(\frac{CB}{AE}\right) \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Diante do exposto, provaremos a recíproca: Dado um triângulo $\triangle ABC$ e os pontos N, L e M sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Se ocorrer que

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

Então as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ concorrem no mesmo ponto P.

Considere um ponto P, tal que esse ponto seja interseção das cevianas $\overline{AL}$ e $\overline{BM}$. E seja Q o ponto formado pela ceviana traçada a partir do vértice C até o lado $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$, passando pelo ponto P, conforme a figura 3.7

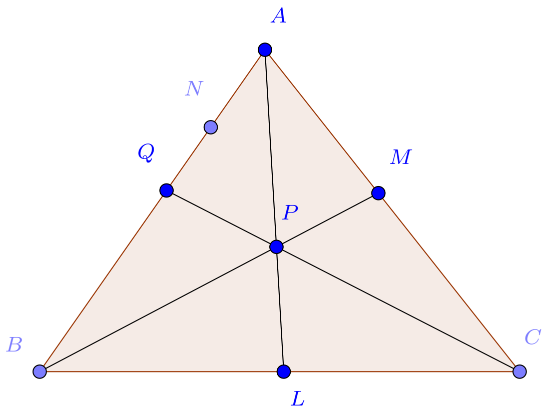

Figura 3.7: Recíproca da versão completa do teorema da Ceva.

Note que é valido que: $\dfrac{QA}{QB} \cdot \dfrac{LB}{LC} \cdot \dfrac{MC}{MA} = 1$

Por hipótese, temos que: $\dfrac{NA}{NB} \cdot \dfrac{LB}{LC} \cdot \dfrac{MC}{MA} = 1$

Logo, dessas relações, teremos que : $\dfrac{QA}{QB} = \dfrac{NA}{NB}$

Pela definição 16, da unicidade do ponto divisor, temos que: $Q = N$.

Portanto, as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são cocorrentes. ■

4 Aplicações dos Teoremas de Menelaus e de Ceva

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações dos teoremas de Menelaus e de Ceva.

Apesarem de serem pouco difundidas no ensino médio, algumas olimpíadas de Matemática e concursos exploram problemas cujas soluções dependem dos conhecimentos destes teoremas.

As atividades propostas estão acompanhadas de figuras ilustrativas e com suas respectivas resoluções, constituindo como uma sugestão de trabalho para o ensino da geometria plana nas séries do ensino médio, embora alguns exercícios possam ser aplicados no 9º ano do ensino fundamental.

Nos subcapítulos serão enunciados 6 (seis) problemas utilizando os teoremas de Menelaus e Ceva.

4.1 Aplicações do Teorema de Menelaus

Atividade 1 (OBM): No triangulo $\triangle ABC$, D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e E ponto sobre o lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{BE} = 2.\overline{EC}$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

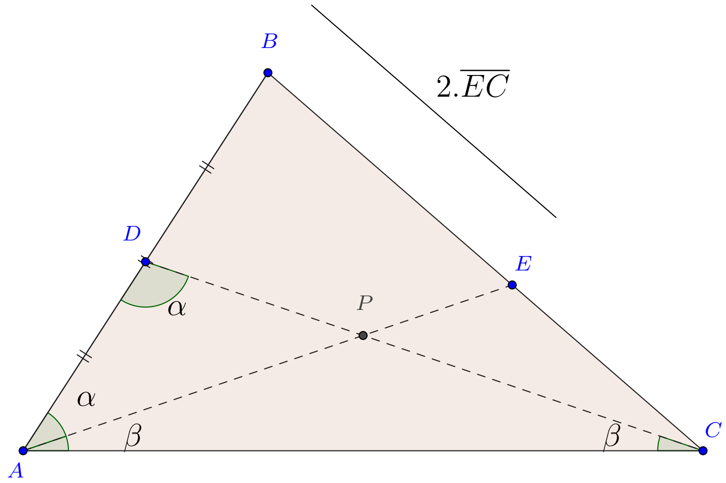

Figura 4.1: Atividade 1 - Menelaus

Solução:

Por construção, traçaremos as cevianas $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ e seja o ponto P de interseção desses segmentos. Seja α um ângulo talque $\alpha = \angle ADC = \angle BAE \Leftrightarrow \alpha = \angle ADP = \angle DAP$. Como $\alpha = \angle ADP = \angle DAP$, então o triângulo $\triangle ADP$ é isósceles coom $\overline{AP} \equiv \overline{DP}$. Aplicando o Teorema de Menelaus, ao triângulo $\triangle BCD$, uma vez que os pontos A, P e E são colineares, obtemos:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{PC}{PD}.\frac{AD}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{2}{1}.\frac{CP}{DP}.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow CP = DP,$$

e, consequentemente, $AP = CP$. Agora seja $\alpha = \angle DAP = \angle ADP$ e $\beta = \angle CAP = \angle ACP$. Observe que no triangulo ACD a soma dos ângulos internos será:

$$(\alpha + \beta) + \beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

.

Como $\angle BAC = \alpha + \beta$, teremos $\angle BAC = 90^\circ$.

Atividade 2: Em um triangulo $\triangle ABC$, seja M o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e N o pé da bissetriz interna relativa ao vértice B. Prolongue a semirreta $\overrightarrow{CB}$ até o ponto D, tal que $\overline{DB} = \overline{AB}$. Se $\overline{BN}$ intersecta $\overline{DM}$ em P, prove que $\angle BAP = \angle ACB$.

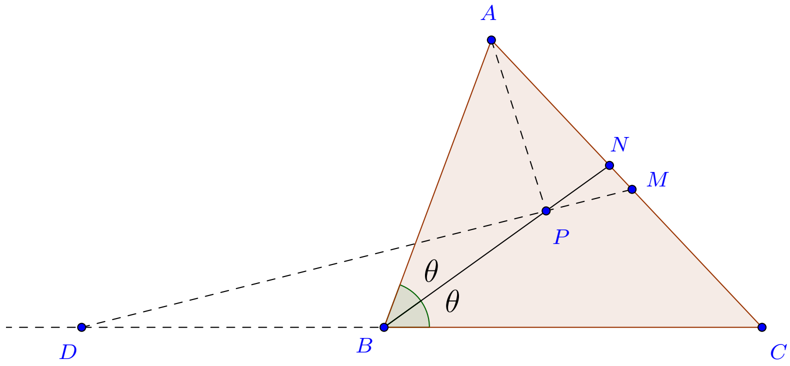

Figura 4.2: Atividade 2 - Menelaus

Solução:

Sejam $a = BC, b = AC, c = AB$. Usando o teorema da bissetriz interna, em relação à bissetriz interna $\overline{BN}$, obtemos

$$\frac{c}{AN} = \frac{a}{b - AN} \Rightarrow AN = \frac{bc}{a + c}$$

Daí, $MN = AM - NA = \dfrac{b}{2} - \dfrac{bc}{a+c} \Rightarrow MN = \dfrac{b(a-c)}{2(a+c)}$. Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo BCN, em relação ao terno de pontos colineares D, P e M, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{PB}{PN}\cdot\frac{MN}{MC}\cdot\frac{DC}{DB}=1 &\Leftrightarrow \frac{PB}{PN}\cdot\frac{\frac{b(a-c)}{2(a+c)}}{\frac{b}{2}}\cdot\frac{a+c}{c}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{PB}{PN}\cdot\frac{b(a-c)}{2(a+c)}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{a+c}{c}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{PB}{PN}\cdot\frac{a-c}{c}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{PB}{BN-PB}\cdot\frac{a-c}{c}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{PB}{BN-PB}=\frac{c}{a-c}\\
&\Leftrightarrow PB\cdot(a-c)=(BN-PB)\cdot c\\
&\Leftrightarrow a\cdot PB-c\cdot PB=c\cdot BN-c\cdot PB\\
&\Leftrightarrow a\cdot PB=c\cdot BN\\
&\Leftrightarrow BC\cdot PB=AB\cdot BN\\
&\Leftrightarrow \frac{PB}{BN}=\frac{AB}{BC}
\end{aligned}
$$

Como N é o pé da bissetriz interna relativa ao vértice B, então $\angle ABP\equiv\angle NBC$. Sabendo que $\angle ABP\equiv\angle NBC$ e $\dfrac{BP}{BN}=\dfrac{AB}{BC}$, segue que os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle CBN$ são semelhantes pelo caso AA. Logo, $\angle BPA\equiv\angle ACB$.

4.2 Aplicações do Teorema de Ceva

Atividade 3 Em um triângulo $\triangle ABC$ com um ângulo reto em B, são traçadas a bissetriz interior $\overline{BD}$ e as cevianas $\overline{AM}$ e $\overline{CL}$ concorrentes no ponto O. Sabendo que $AB=2BC$, $2CM=5BM$ e $BL=2$cm, encontre o valor do segmento $\overline{BC}$.

Solução. Seja $x=BC$. Então $AB=2x$. Seja $2CM=5BM=x$. Então $CM=\dfrac{x}{2}$ e $BM=\dfrac{x}{5}$. Como $BL=2$cm, então $AL=AB-BL\Leftrightarrow AL=2x-2$, conforme a figura 4.3

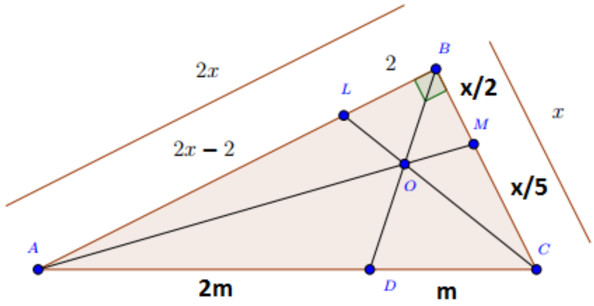

Figura 4.3: Figura 4.3: Atividade 3 - Ceva

Atividade 4 Em um triângulo $\triangle ABC$ são traçadas um bissetriz interior $\overline{BQ}$, uma mediana $\overline{AM}$ e uma ceviana $\overline{CP}$, concorrentes entre si. Se $AP = 4$cm, Se $AQ = 6$cm e Se $QC = 9$cm, calcule a medida do segmento $\overline{PQ}$.

Solução:

Seja $PQ = x$, $MB = MC = y$ e $PB = z$, conforme a ilustração 4.4

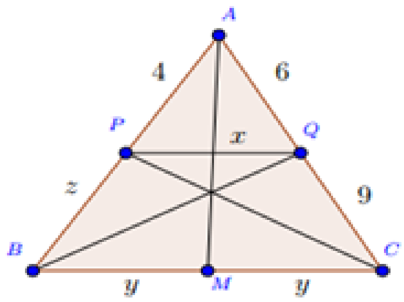

Figura 4.4: Figura 4.4: Atividade 4 - Ceva

Como as três cevianas $\overline{BQ}$, $\overline{AM}$ e $\overline{CP}$ são concorrentes, podemos aplicar o Teorema de Ceva. Então teremos:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{z} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{9}{6} \cdot = 1 \Leftrightarrow \frac{36y}{6yz} = 1 \Leftrightarrow \frac{36}{6z} = 1 \Leftrightarrow 6z = 36 \Leftrightarrow z = 6$$

Logo, o segmento $\overline{PB}$ mede 6cm. Note que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$. Então, pelo Teorema de Tales, $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$. Como $\overline{BQ}$ é bissetriz interna então $\angle PBQ \equiv \angle QBC$ e $\angle QBC \equiv \angle BQP$, pois são altermos internos. Logo, o triângulo $\triangle BPQ$ é isósceles. Portanto, $x = 6$, ou seja, o segmento $\overline{PQ}$ mede 6cm.

Atividade 5 (Canadá 1998): Seja $\triangle ABC$ um triangulo com $\angle BAC = 40°$ e $\angle ABC = 60°$. Sejam D e E pontos sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, tais que $\angle CBD = 40°$ e $\angle BCE = 70°$. Se os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ se intersectam no ponto F, mostre que $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

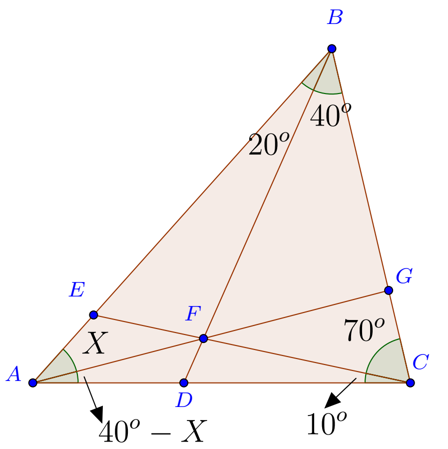

Figura 4.5: Atividade 5 - Ceva

Solução:

Note que:

(i) Se $\angle ABC = 60°$ e $\angle CBD = 40°$, então $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 60° - 40° = 20°$, ou seja, $\angle ABD = 20°$.

(ii) Como a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ é igual a $180°$ e sabendo que, se $\angle BAC = 40°$ e $\angle ABC = 60°$, então $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180° \Leftrightarrow \angle ACB + 40° + 60° = 180° \Leftrightarrow \angle ACB = 80°$.

(iii) Se $\angle ACB = 80°$ e $\angle BCE = 70°$, então $\angle ACE = \angle ACB - \angle BCE = 80° - 70° = 10°$, ou seja, $\angle ACE = 10°$.

Seja G o ponto de interseção entre as retas $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e $\angle BAG = x$. Então $\angle CAG = \angle BAC - \angle BAG = 40° - x$. Pelo Teorema de Ceva trigonométrico, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen}(\angle BAG)}{\operatorname{sen}(\angle CAG)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle ACE)}{\operatorname{sen}(\angle BCE)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle CBD)}{\operatorname{sen}(\angle ABD)} = 1 \\
\Leftrightarrow &\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(40° - x)} \cdot \frac{\operatorname{sen} 10°}{\operatorname{sen} 70°} \cdot \frac{\operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 20°} = 1 \\
\Leftrightarrow &\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} 10° . \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen}(40° - x) . \operatorname{sen} 70° . \operatorname{sen} 20°
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} 40° = 2. \operatorname{sen} 20° \cos 20°$, e $\operatorname{sen} 70° = \cos 20°$, então temos:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} x. \operatorname{sen} 10°.2. \operatorname{sen} 20°. \cos 20° = \operatorname{sen}(40° - x). \cos 20°. \operatorname{sen} 20° \\
&\Leftrightarrow 2. \operatorname{sen} x. \operatorname{sen} 10° = \operatorname{sen}(40° - x) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} x. \operatorname{sen} 10° = \frac{1}{2}. \operatorname{sen}(40° - x)
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, temos:

$$\operatorname{sen} x. \operatorname{sen} 10° = \operatorname{sen} 30°. \operatorname{sen}(40° - x)$$

E como $\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \dfrac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(x - 10°) - \cos(x + 10°)}{2} = \frac{\cos(x - 10°) - \cos(70° - x)}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos(x - 10°) - \cos(x + 10°) = \cos(x - 10°) - \cos(70° - x) \\
&\Leftrightarrow \cos(x + 10°) = \cos(70° - x) \\
&\Rightarrow x + 10° = 70° - x \\
&\Rightarrow 2x = 60° \\
&\Rightarrow x = 30°
\end{aligned}$$

A soma dos ângulos internos do triângulo $\angle AGB$ é $180°$, ou seja,

$$\angle AGB + \angle BAG + \angle ABG = 180° \Leftrightarrow \angle AGB = 180° - \angle BAG - \angle ABG = 180° - 30° - 60° = 90°$$

Logo, $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

4.3 Aplicação do Teorema de Menelaus e de Ceva

Atividade 6 (OBM 2015 - Reformulada): Seja um triangulo $\triangle ABC$ escaleno e $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ as bissetrizes internas, com D sobre $\overline{BC}$, E sobre $\overline{AC}$ e F sobre $\overline{AB}$. Seja P um ponto de interseção das retas suporte dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{FE}$, com $P \in \overline{BC}$. Calcule a medida do ângulo $\angle DAP$.

Solução:

Seja P a interseção das retas BC e EF. Afirmamos que $P \in \overrightarrow{BC} \backslash BC$.

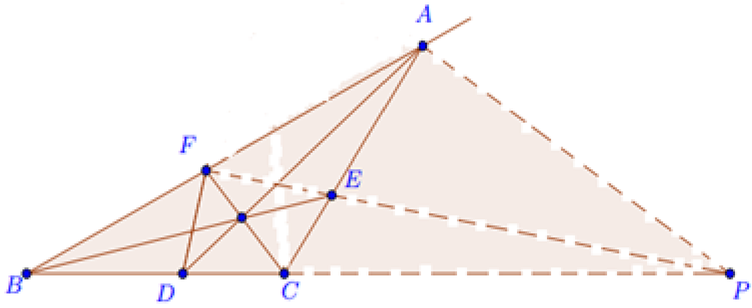

Figura 4.6: Figura 4.6: Atividade 6 - Menelaus e Ceva

Ao aplicar o Teorema de Ceva no triângulo $\triangle ABC$, teremos

$$\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DA} = 1 \Leftrightarrow \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{DB}{DA} (4.1)$$

Agora, ao aplicar o Teorema de Menelaus ao triângulo $\triangle ABC$, em relação ao terno de pontos colineares F, E e P, obtemos:

$$\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{PC}{PB} = 1 \Leftrightarrow \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{PB}{PC} (4.2)$$

Das igualdades (4.1) e (4.2), teremos: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{PB}{PC} \Leftrightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{PC}{PB}$ (4.3)

Pelo Teorema da bissetriz interna aplicado ao $\triangle ABC$, temos: $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{DC} \Leftrightarrow \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$ (4.4)

De (4.3) e (4.4), obtemos: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PC}{PB} \Leftrightarrow \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PC}{AC}$ (4.5)

Com essa relação de proporção (4.5), concluímos que $\overleftrightarrow{AP}$ é bissetriz externa do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao vértice A. Somando os seguintes ângulos, obtemos a seguinte igualdade:

$$\angle BAD + \angle DAC + 2 \cdot \angle CAP = 180^\circ \quad (4.6)$$

Como $\overline{AD}$ é bissetriz interna, então $\angle BAD = \angle DAC$ (4.7). Substituindo (4.6) em (4.7), teremos:

$$2 \cdot \angle DAC + 2 \cdot \angle CAP = 180^\circ \Leftrightarrow \angle DAC + \angle CAP = 90^\circ \Rightarrow \angle DAP = 90^\circ$$

5 Considerações finais

Este trabalho tem como foco atingir o maior número de alunos e professores do ensino médio, e também mostrar que é possível trabalhar as demonstrações do Teorema de Menelaus e de Ceva tendo somente como pré-requisito o conhecimento básico de geometria euclidiana, ministrado no ensino médio.

Para tornar o trabalho autossuficiente e facilitar a abordagem do tema, foram, primeiramente, expostos alguns conceitos da geometria euclidiana, para depois apresentar diversas formas de demonstração, envolvendo Teorema de Tales, Semelhança de triângulos, Relação entre áreas e a Lei dos Senos, cabendo a melhor escolha para o entendimento, desenvolvimento da demonstração e aplicação nos problemas com esses propósitos.

As demonstrações foram divididas em uma versão simples e outra completa, devido ao fato de apreciação didática e, principalmente, para que os alunos e professores percebam a diferença ao trabalhar com medidas geométricas, aquelas que não levam em conta a orientação, e as medidas algébricas, que já consideram a orientação do segmento. Alguns autores como, FERREIRA (2015) [5], DE FREITAS (2015) [6], MARTINS (2015) [7] e MACEDO (2014) [8], comentam sobre a diferença entre a versão simples e a versão completa dos teoremas, ou apenas exibem os teoremas utilizando medidas geométricas de comprimento.

De acordo com DE FREITAS (2015) [6], a versão simples do teorema de Menelaus, é válida parcialmente, pois a recíproca é falsa. Um contraexemplo simples ocorre quando os pontos L, M e N são médios dos lados do triângulo ABC. Neste caso, os pontos não são colineares, mas o produto das razões é igual a um. Contudo, MARTINS (2015) [7], afirma que, "se o professor ou o aluno têm ciência dessa particularidade e toma o devido cuidado no momento da resolução de um problema, pode aplicar o teorema recíproco de Menelaus na sua versão simples".

De acordo com as pesquisas desenvolvidas, ainda existe outras formas de apresentação dos Teoremas de Menelaus e de Ceva, que podem ser exploradas pelo publico alvo, mostrando abrangência e a utilidade da teoria apresentada.

Esperamos que realmente esta dissertação motive os docentes para abordagem desses teoremas em sala de aula, desde a compreensão da aplicação dos conceitos nas situações problemas, às construções de diversas formas de demonstrações do Teorema de Menelaus e de Ceva, contribuindo desta forma para desenvolvimento do conhecimento teórico e prático dos alunos, reduzindo as dificuldades existentes na abordagem desses teoremas pelo docente em sala de aula, e consequentemente, acrescentando no ensino da geometria euclidiana tanto no ensino médio, como nas séries finais do ensino fundamental.

Referências

1 ALVES, D. S. *Os teoremas esquecidos pelos professores de geometria plana do ensino médio*. Dissertação. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2015.

2 CALDERANO, G. L. de T. *A geometria projetiva como forma de intervenção: um olhar a partir dos teoremas de menelaus e ceva*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2012.

3 CHAVES, J. J. F. *Teoremas de Pappus*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.

4 DOLCE, O. NICOLAU, J. *Fundamentos de matemática elementar. Geometria plana*. Vol.9. Ed. Atual. São Paulo, 1993.

5 FERREIRA, F. L. S. *Ensinar e aprender geometria*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Goias. Jataí, 2015.

6 FREITAS, V. P. de. *Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Amazonas. Manaus, 2013.

7 MARTINS, R. A. *Colinearidade e concorrência em olimpíadas internacionais de matemática: uma reflexão voltada para o ensino da geometria plana no Brasil*. Dissertação (Mestrado). Universidade de Brasília. Brasília, 2015.

8 MACEDO, D. M. R. *Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte, 2014.

9 Mentor. (2015, junho 16). *Teorema da bissetriz externa: Demonstração*. 2015 [Video file].

10 PCNEM. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio bases legais*. Brasília 58p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/sed/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 01 de agosto de 2016.

11 MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

12 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 10 agosto de 2016.

13 ROCHA, H. B. V. L da. *Problemas selecionados de geometria plana.*. Parnaíba: Sieart, 2016.

14 SILVA, J. C. da. *Os Teoremas de Menelaus e Ceva*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2015.

15 SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMATICA. Disponivel em: <http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA13/2014-2/unidade8-2.pdf>. Acesso em: 09 de agosto de 2016.

16 THIAGO, C. *Curso de geometria*. niv.2. aula. 14. POLOS OLIMPICOS DE TREINAMENTOS. Disponiel em: <file:///C:/Users/AnnaThecya/Downloads/EXERCICIOS%20DE%20MENELUS-%20E%20CEVA%20DO%20POTI.pdf>. Acesso: 08 de agosto de 2016.