

---

# Caleidociclos

*Reginaldo Alexandre Da Silva*

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Reginaldo Alexandre Da Silva**

## Caleidociclos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

**USP – São Carlos**  
**Março de 2017**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D229c Da Silva, Reginaldo Alexandre  
Caleidociclos / Reginaldo Alexandre Da Silva;  
orientador Sérgio Luís Zani. - São Carlos - SP,  
2017.

113 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação  
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Caleidociclo. 2. Simetria axial. 3. Simetria  
rotacional. 4. Polígonos. 5. Poliedros. 6. Teorema  
de Pitágoras. 7. Aplicação da lei dos cossenos.  
8. Aplicação da relação fundamental da trigonometria.  
I. Zani, Sérgio Luís, orient. II. Título.



**Reginaldo Alexandre Da Silva**

## Kaleidocycles

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

**USP – São Carlos**  
**March 2017**



*Dedico este trabalho à todos os meus professores,  
desde o meu primeiro ano escolar até os atuais,  
sem eles muito do que conquistei não seria possível.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Agradeço primeiramente à minha esposa Ana Maria, que me deu muito apoio, principalmente nos deveres da casa, me dando mais tempo para os estudos; e minha filha Sofia que muitas vezes teve que entender que a pouca atenção que teve nesse período foi para que eu pudesse me empenhar mais nesse trabalho.

Também agradeço aos meus amigos de turma do PROFMAT, afinal foram muitas horas estudando juntos nas aulas regulares, nas dúvidas via internet, nas semanas intensivas de estudo na USP, nos debates acalorados, até mesmo sem salas de estudos.

Por fim, agradeço ao ICMC pela possibilidade de concluir este trabalho da rede PROFMAT nesta unidade.



*“Viver e não ter a vergonha de ser feliz,  
Cantar (e cantar e cantar),  
A beleza de ser um eterno aprendiz”  
(Gonzaguinha)*





# RESUMO

DA SILVA, R. A.. **Caleidociclos**. 2017. 113 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Os caleidociclos têm sido utilizados como forma artística de apresentação de imagens, pinturas ou como parte de trabalhos artísticos, principalmente de imagens com simetrias; talvez os mais conhecidos sejam os trabalhos de M. C. Escher. As poucas publicações encontradas da teoria matemática envolvida nos caleidociclos dão base para imaginar e criar aplicações no desenvolvimento de habilidades e competências trabalhadas na escola. Para aumentar as possibilidades de aplicações de conceitos, teoremas e relações matemáticas estudadas no ensino básico, o presente trabalho apresenta algumas propostas de atividades utilizando os caleidociclos. As propostas foram elaboradas de acordo com o nível de ensino, ou seja, simetrias para o 7º ano, teorema de Pitágoras para os 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, lei dos cossenos e relação fundamental da trigonometria para a 1ª série e volume e área de superfície de sólidos geométricos para 2ª série do Ensino Médio; algumas das propostas apresentam variações para se adequar ao nível de desenvolvimento em que a turma se encontra. Todos os moldes utilizados e outras possibilidades de caleidociclos, incluindo sólidos encaixantes aos caleidociclos, foram organizados ao final deste trabalho em um dos apêndices. Há também um apêndice com outros tipos de sólidos geométricos com movimentos, que podem ser usados no mesmo intuito de aplicação diferenciada da geometria espacial.

**Palavras-chave:** Caleidociclo, Simetria axial, Simetria rotacional, Polígonos, Poliedros, Teorema de Pitágoras, Aplicação da lei dos cossenos, Aplicação da relação fundamental da trigonometria.



# ABSTRACT

DA SILVA, R. A.. **Caleidociclos**. 2017. 113 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Kaleidocycles have been used as an artistic form of presentation of pictures, paintings or a part of artworks, especially images with symmetries; perhaps the best known works are M. C. Escher's. The few found publications of the mathematical theory related to these three-dimensional rings give rise to imagine and create applications for developing skills to be worked in classroom. In order to increase the possibility of applications of concepts, theorems and mathematical relations, the present work proposes some activities dealing with kaleidocycles. The proposals were prepared in accordance with the student's level of education, i.e., symmetries for the 7th grade, the Pythagorean theorem for the 8th and 9th grades, law of cosines and the fundamental relation of trigonometry, volume and surface area of geometric solids for high school students; some of the proposals have variations to suit the level of development in which the class is at. All the molds used and other possibilities of kaleidocycles, including solids which fit into kaleidocycles, were organized at the end of this dissertation in one of the appendices. There is also an appendix with other types of mobile geometric solids that can be used in the same purpose in different applications of spatial geometry.

**Key-words:** Kaleidocycles, Symmetry of reflection, Rotational symmetry, Polygon, Polyhedron, Pythagorean theorem, Application of the law of cosines, Application of the fundamental relation of trigonometry.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Simetrias na Natureza e nas Construções . . . . .	27
Figura 2 – Pontos na reta e fora dela . . . . .	28
Figura 3 – Eixo de Simetria Axial e Espelhamento . . . . .	29
Figura 4 – Rotação $\theta$ de $P$ a partir de $O$ . . . . .	29
Figura 5 – Simetrias Rotacionais do ponto $P$ a partir de $O$ com ângulo $\theta$ . . . . .	30
Figura 6 – Simetria Rotacional de $60^\circ$ . . . . .	30
Figura 7 – Exemplos de polígonos . . . . .	31
Figura 8 – Exemplos de polígonos simples . . . . .	32
Figura 9 – Região interna e ângulo interno . . . . .	33
Figura 10 – Polígonos Regulares . . . . .	33
Figura 11 – Polígono Convexo e Não-Convexo . . . . .	34
Figura 12 – Região Poligonal . . . . .	34
Figura 13 – Exemplos de Poliedros . . . . .	35
Figura 14 – Poliedros convexo e não-convexo . . . . .	35
Figura 15 – Poliedros Regulares . . . . .	36
Figura 16 – Caleidociclo . . . . .	37
Figura 17 – Caleidociclos fechados variados com imagens axial e rotacionalmente simétricas . . . . .	38
Figura 18 – Exemplo de caleidociclo com seis tetraedros não-regulares . . . . .	38
Figura 19 – Caleidociclo regular de oito tetraedros regulares e caleidociclo não-regular de oito tetraedros . . . . .	39
Figura 20 – Caleidociclo regular de dez tetraedros regulares localizado no espaço . . . . .	39
Figura 21 – Caleidociclo de oito tetraedros regulares . . . . .	41
Figura 22 – Oito tetraedros regulares . . . . .	41
Figura 23 – Secção transversal do caleidociclo de oito tetraedros regulares . . . . .	42
Figura 24 – Tentativa de caleidociclo fechado com tetraedros regulares . . . . .	42
Figura 25 – Corte transversal da tentativa . . . . .	43
Figura 26 – Hexágono do Corte Transversal . . . . .	44
Figura 27 – Caleidociclo fechado com oito tetraedros não-regulares . . . . .	44
Figura 28 – Caleidociclo fechado com dez tetraedros não-regulares . . . . .	45
Figura 29 – Sequência da construção da reflexão . . . . .	48
Figura 30 – Trabalhos de Simetria Axial em papel A3 realizados por alunos de 7º ano . . . . .	49
Figura 31 – Exemplos para criar simetria rotacional . . . . .	52
Figura 32 – Simetria Rotacional com e sem Simetria Axial . . . . .	52

Figura 33 – Exemplo de como montar o caleidociclo - parte 1 . . . . .	53
Figura 34 – Exemplo de como montar o caleidociclo - parte 2 . . . . .	56
Figura 35 – Planificação com oito tetraedros regulares . . . . .	60
Figura 36 – Triângulo isósceles de base $a$ e altura $l/2$ . . . . .	62
Figura 37 – Planificação do caleidociclo fechado com 12 tetraedros (base hexagonal) . . . . .	64
Figura 38 – Sequência da construção da malha . . . . .	66
Figura 39 – Notações para o triângulo isósceles . . . . .	67
Figura 40 – Metade do triângulo isósceles da Figura 39 . . . . .	68
Figura 41 – Triângulo Isósceles da Malha . . . . .	69
Figura 42 – Triângulo Isósceles base para malha . . . . .	69
Figura 43 – Milagre Shinsei e seus caleidociclos . . . . .	71
Figura 44 – Medidas do tetraedro a partir do cubo . . . . .	72
Figura 45 – Planificação de dois tetraedros do Milagre Shinsei . . . . .	72
Figura 46 – Planificação de metade do caleidociclo . . . . .	73
Figura 47 – Cubo invertível . . . . .	73
Figura 48 – Cubo invertível e suas medidas . . . . .	74
Figura 49 – Planificação de metade do Cubo Invertível . . . . .	76
Figura 50 – Os dois caleidociclos do Milagre Shinsei . . . . .	77
Figura 51 – Milagre Shinsei . . . . .	77
Figura 52 – Milagre Shinsei Modificado . . . . .	78
Figura 53 – Poliedro com “buraco” interno . . . . .	79
Figura 54 – Quatro posições com forma de triângulo equiláteros . . . . .	80
Figura 55 – O caleidociclo lembrando um cubo . . . . .	80
Figura 56 – Caleidociclo de Seis Tetraedros com Desenhos . . . . .	88
Figura 57 – Caleidociclo de Seis Tetraedros sem Desenhos . . . . .	89
Figura 58 – Caleidociclo Fechado com 12 Tetraedros . . . . .	90
Figura 59 – Caleidociclo Cubo Invertível . . . . .	91
Figura 60 – Raio Do Cubo Invertível . . . . .	92
Figura 61 – Terça Parte do Caleidociclo Cubo Invertível . . . . .	93
Figura 62 – Terça Parte do Raio do Cubo Invertível . . . . .	94
Figura 63 – Caleidociclo Milagre de Shinsei - Metade do Molde . . . . .	95
Figura 64 – Caleidociclo Milagre de Shinsei - Molde com dois tetraedros . . . . .	96
Figura 65 – Caleidociclo Milagre de Shinsei - 4 Moldes com dois tetraedros . . . . .	97
Figura 66 – Caleidociclo de 8 Tetraedros Regulares . . . . .	98
Figura 67 – Metade do Caleidociclo de 8 Tetraedros Regulares - Parte 1 . . . . .	99
Figura 68 – Metade do Caleidociclo de 8 Tetraedros Regulares - Parte 2 . . . . .	100
Figura 69 – Caleidociclo Fechado de 8 Tetraedros . . . . .	101
Figura 70 – Caleidociclo Fechado de 10 Tetraedros . . . . .	102
Figura 71 – Cilindro alto . . . . .	104

Figura 72 – Molde do cilindro alto . . . . .	105
Figura 73 – Cilindro baixo . . . . .	107
Figura 74 – Modelo do cilindro baixo . . . . .	108
Figura 75 – HyperQBS . . . . .	110
Figura 76 – Molde pequeno do HyperQBS . . . . .	112
Figura 77 – Molde grande do HyperQBS . . . . .	113





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	21
2	CONCEITOS INTRODUTÓRIOS: SIMETRIAS E OBJETOS GEOMÉTRICOS . . . . .	27
2.1	Simetria . . . . .	27
2.1.1	<i>Simetria Axial</i> . . . . .	28
2.1.2	<i>Simetria Rotacional</i> . . . . .	29
2.2	Polígonos . . . . .	31
2.3	Poliedros . . . . .	34
3	CALEIDOCICLOS . . . . .	37
3.1	Caleidociclos com Tetraedros Regulares . . . . .	40
3.2	Caleidociclos Fechados (Tetraedros Não-Regulares) . . . . .	42
4	ENSINO DE SIMETRIAS POR MEIO DOS CALEIDOCICLOS . . . . .	47
4.1	Pré-requisitos . . . . .	47
4.1.1	<i>Simetria axial: proposta de atividade</i> . . . . .	48
4.1.2	<i>Simetria rotacional: proposta de atividade</i> . . . . .	51
4.2	Proposta de Atividade: simetria com o caleidociclo . . . . .	53
5	TEOREMA DE PITÁGORAS, LEI DOS COSSENOS E RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA: APLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DO CALEIDOCICLO . . . . .	59
5.1	Caleidociclo com Tetraedro Regular: altura de face . . . . .	59
5.2	Caleidociclo fechado e as relações das medidas . . . . .	61
5.3	Propostas de Atividades . . . . .	64
5.3.1	<i>Ensino Fundamental: 8º e 9º anos</i> . . . . .	64
5.3.2	<i>Ensino Médio: 1ª série</i> . . . . .	66
6	CALEIDOCICLO: VOLUME E ÁREA DE SUPERFÍCIE . . . . .	71
6.1	O Milagre Shinsei . . . . .	71
6.2	Cubo Invertível . . . . .	73
6.3	Propostas de Atividades . . . . .	76
6.3.1	<i>O Milagre Shinsei</i> . . . . .	76

6.3.2	<i>Cubo Invertível</i> . . . . .	79
7	<b>CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	83
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	85
<b>APÊNDICE A</b>	<b>MOLDES DOS CALEIDOCICLOS</b> . . . . .	87
<b>APÊNDICE B</b>	<b>SÓLIDOS LOUCOS</b> . . . . .	103
B.1	<b>Cilindro Alto</b> . . . . .	103
B.2	<b>Cilindro Baixo</b> . . . . .	106
B.3	<b>HyperQBS</b> . . . . .	109

---

## INTRODUÇÃO

---

Nos últimos anos tem-se falado muito no fracasso do ensino da matemática. No último relatório divulgado do PISA (Programa para Avaliação Internacional de Estudantes) de 2012, o Brasil atingiu uma pontuação média de 391,5 em matemática, ficando classificado em nível 1, o mais baixo da escala de proficiência que vai até nível 6.

Vitti (1999, p. 19) afirma que:

O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não são um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos.

Esse fracasso, tem alimentado muitas pesquisas sobre os motivos e também, sobre possibilidades de mudanças dessa situação. Vitti (1999, p. 32) lembra alguns fatores:

A matemática carrega o estigma de ser considerada uma disciplina chata, difícil e abstrata. Muitos pais procuram consolar seus filhos quando revelam que também tinham dificuldades em aprender matemática, ou até mesmo que escolheram uma área para sua formação profissional que não utilizasse matemática.

É muito comum ouvirmos cotidianamente comentários afirmando que a Matemática é chata, inclusive por colegas professores de outras áreas. Nas reuniões de pais e mestres, quando fala o professor de matemática, sempre surge comentários sobre como a disciplina é difícil e como os pais sempre tiveram dificuldades nessa área, ou ainda, durante conversas particulares com pais e alunos, os pais comentam que consolam os filhos falando da dificuldade da disciplina, como se isso fosse uma ajuda para o aluno superar as dificuldades, quando na verdade estão dando motivos para que se conformem com as dificuldades que apresentam.

De acordo com Johnson e Rising (1972 apud VITTI, 1999, p. 32) “muitas pessoas têm orgulho em manifestar ignorância em matemática. Poucos adultos admitem que foram fracos

estudantes de história mas muitos pais de alunos enunciam o fato de que eles nunca entenderam matemática.”

Outros fatores que também são citados na literatura a respeito do fracasso na aprendizagem matemática é, em alguns casos, causados pelos professores que utilizam a matemática como algo punitivo. [Vitti \(1999, p. 19\)](#) ilustra com um exemplo:

Muitos alunos trazem consigo lembranças terríveis de fatos ocorridos nas aulas de matemática, como o relatado por uma aluna, cujo professor, na tentativa de manter a disciplina na sala de aula, obrigou-a a fazer 50 cópias da tabuada do 2 ao 9. Quem poderá sentir algum prazer em aprender algo que é colocado em forma de castigo, de punição, por estar conversando em uma aula?

Diante dessa realidade e com a sugestão apresentada pelo PROFMAT, escolhemos trabalhar com a elaboração de propostas de atividades que apresentem curiosidades aos alunos e a partir delas, discutam a matemática envolvida de várias formas, seja como arte, descrição, classificação, construção, adaptação, definição, etc.

[D’Ambrosio \(2001, p. 31\)](#), quando fala sobre a natureza da matemática e seu ensino, afirma:

É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranha. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico.

Entendemos que quando D’Ambrósio diz que a matemática ensinada nas escola é morta, do ponto de vista de motivação contextualizada, ele se refere ao tipo de estímulo que os alunos são expostos para encontrar significação no estudo. Esse fato pode estar relacionado com metodologias de ensino em que são apresentados apenas os estímulos históricos da época e nenhum estímulo atual.

Utilizando o caleidociclo, podemos estimular o aluno a utilizar habilidades matemáticas já interiorizadas por eles e também desenvolver habilidades e competências novas. Ao se deparar com uma curiosidade, o aluno desperta a vontade de entender o funcionamento da novidade, e essa vontade é urgente, não pode ser para depois. Isso abre a janela para interiorizar habilidades matemáticas novas.

De acordo com [Moysés \(2006, p. 23-24\)](#), Vygotsky modificou a relação estímulo-resposta da época dele, introduzindo um novo elemento que chamou de signo – instrumento psicológico por excelência – que mediatizava a relação do estímulo com o estímulo associado.

[Moysés \(2006, p. 25\)](#) ainda exemplifica essa relação citando o hábito de culturas primitivas em fazer marcas nos troncos de árvores e pedras para registrar o número de caças. Nessa situação, as caças são os estímulos, a quantidade de caças é o estímulo associado (resposta ao

estímulo) e as marcações são os signos, ou seja, o instrumento mediador para se lembrar da associação entre as caças e a quantidade de caças.

Nesse sentido, ao falarmos que precisamos estimular nossos alunos ao estudo matemático, falamos de apresentar um estímulo, que no caso desse trabalho, é o caleidociclo. Entendemos a linguagem matemática como o signo que Vygosty nos apresentou, pois é ela o instrumento de mediatização entre os estímulos vivenciados no cotidiano com o estímulo associado que é a abstração. Assim, entendemos a importância de apresentar um estímulo sempre que possível nas aulas de matemática, para que o signo seja interiorizado e faça sentido na sua realidade.

[Borin \(2007, p. 9\)](#) motiva a introdução de jogos nas aulas de matemática como:

[...] a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Apesar do caleidociclo não se tratar de um jogo, ele contém a ideia do trabalho matemático de forma lúdica assim como no jogo. O caleidociclo também tem a chance de desbloquear a relação do aluno com a matemática e de motivar a interação com ela. Algumas das propostas apresentadas nesse trabalho também levam em consideração opções de trabalho em conjunto, dando a oportunidade de desenvolvimento coletivo/social matemático.

[Duval \(1972 apud BRASIL, 1977, p. 2\)](#) alerta que:

Muitas vezes, invoca-se Piaget para afirmar que o domínio excelente da linguagem é extrínseco à aprendizagem da matemática. O fato é verdadeiro, na medida em que Piaget mostrou que a lógica se desenvolve a partir da ação e, portanto, que as manipulações dos objetos devem ter a prioridade sobre o manejo verbal (das operações). Não se deve cansar de repetir isto sempre. Mas, não se deve esquecer que isso vale, essencialmente, para o estágio das operações concretas (7 a 11 anos).

Assim, é essencial o uso de curiosidades, jogos, brinquedos e objetos nos anos iniciais e na transição para os anos finais do Ensino Fundamental, sempre mediando e estimulando a generalização das ideias e auxiliando em uma possível formalização. Porém, de acordo com [Fraisse e Piaget \(\[19 - - ?\] apud BRASIL, 1977, p. 3\)](#):

Lá pelos 11/12 anos, com um patamar de equilíbrio aos 14/15 anos, inicia-se uma última fase de construção das operações próprias da infância e da adolescência. Seu caráter mais evidente é que o sujeito não fica mais obrigado a raciocinar diretamente, apenas, sobre objetos concretos ou suas manipulações (operações de classe, de relações, de números e operações espaço-temporais), mas de tornar-se capaz de deduzir, operatoriamente, a partir de simples hipóteses enumeradas verbalmente (lógica das proposições). Como consequência disto, a forma destas novas estruturas operatórias dissociam-se de seu conteúdo, donde a possibilidade de um raciocínio hipotético-dedutivo ou formal.

Com isso, lembramos da importância de, no Ensino Médio, frizarmos a formalização teórica e utilizar questões paralelas com hipóteses para estimular a abstração e não apenas se prenderem a manipulação dos caleidociclos, como estão presentes nas propostas de atividades para este público. Isso não quer dizer que não há importância no uso dos objetos, mas que podem ser exploradas outras situações abstratas a partir deles.

Por tudo isso é que nos motivamos a desenvolver e apresentar sugestões de sequências didáticas com caleidociclos para aplicação em alguns dos anos finais do Ensino Fundamental e também da possibilidade do desenvolvimento de atividades para trabalhar habilidades e competências desejadas para o Ensino Médio.

A simetria é um dos assuntos previstos no Currículo de Matemática das escolas públicas do Estado de São Paulo para o 7º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de identificar simetrias por meio da leitura; comparar e interpretar imagens simétricas; reconhecer padrões geométricos em diferentes imagens como forma de desenvolver uma melhor apreciação estética das linguagens do desenho, pintura, arquitetura etc.

O teorema de Pitágoras está previsto no Currículo para o final do 8º ano e retomada no 9º ano. Nessa retomada no 9º ano, recomenda-se trabalhar aplicações do teorema para desenvolver a habilidade de reconhecer a utilização do teorema em problemas. Assim, o trabalho com caleidociclos com centro fechado pode ser utilizado para esse fim.

A relação fundamental da trigonometria e a lei dos cossenos estão previstas para a 1ª série do Ensino Médio com objetivo de desenvolver habilidades que possibilitem aos alunos enfrentar situações-problema envolvendo as razões trigonométricas em diferentes contextos e generalizar o Teorema de Pitágoras com a Lei dos Cossenos. Nesse contexto, o cálculo das medidas necessárias para uma planificação de um caleidociclo de centro fechado contribui para perceber a utilização tanto da relação fundamental da trigonometria como da lei dos cossenos.

Na 2ª série do Ensino Médio, o Currículo prevê o desenvolvimento de habilidades relacionadas à geometria espacial como reconhecer e nomear prismas; relacionar elementos geométricos e algébricos; sintetizar e generalizar fatos obtidos de formas concretas. Nesse aspecto os caleidociclos podem ajudar no que se refere ao cálculo de volumes e áreas de superfícies, inclusive proporcionando demonstrações de razões de volumes em relação a prismas e também de volumes constantes quando a área de superfície varia.

Desse modo, organizamos a dissertação da seguinte forma:

- Capítulo 1: Introdução com visão global da matemática, embasamento e especificação do problema com a sugestão de possibilidade de solução
- Capítulo 2: Conceitos de simetria axial e rotacional e conceitos de polígonos e poliedros.
- Capítulo 3: Definição de caleidociclos, exemplos e classificação.

- Capítulo 4: Simetrias axial e rotacional com caleidociclos.
- Capítulo 5: Teorema de Pitágoras, lei dos cossenos e relação fundamental da trigonometria com aplicações na construção de caleidociclos de centro aberto e fechado.
- Capítulo 6: Volume e área de superfície de caleidociclos e sua relação com prismas.
- Capítulo 7: Conclusão e considerações finais.

Temos também dois Apêndices, o primeiro com moldes de caleidociclos citados neste trabalho e o segundo com apresentação de outros três sólidos móveis que podem contribuir com o desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas como os caleidociclos.

Esperamos assim, que esse trabalho venha contribuir no estudo geométrico e algébrico de forma diferenciada, mas relacionada diretamente com os elementos formais do estudo dessas áreas matemáticas.

Por fim, esclarecemos que para a construção de muitas das figuras elaboradas pelo autor foram usados os softwares livre GeoGebra 5.0 e GIMP e as imagens de caleidociclos são fotos tiradas de caleidociclos construídos e fotografados pelo autor.





---

# CONCEITOS INTRODUTÓRIOS: SIMETRIAS E OBJETOS GEOMÉTRICOS

---

Neste capítulo iremos enunciar conceitos matemáticos que serão utilizados para abordar o assunto principal deste trabalho. Caso o leitor já esteja familiarizado com tais conceitos, poderá seguir para o capítulo 3 onde iniciaremos a definição e características dos caleidociclos.

## 2.1 Simetria

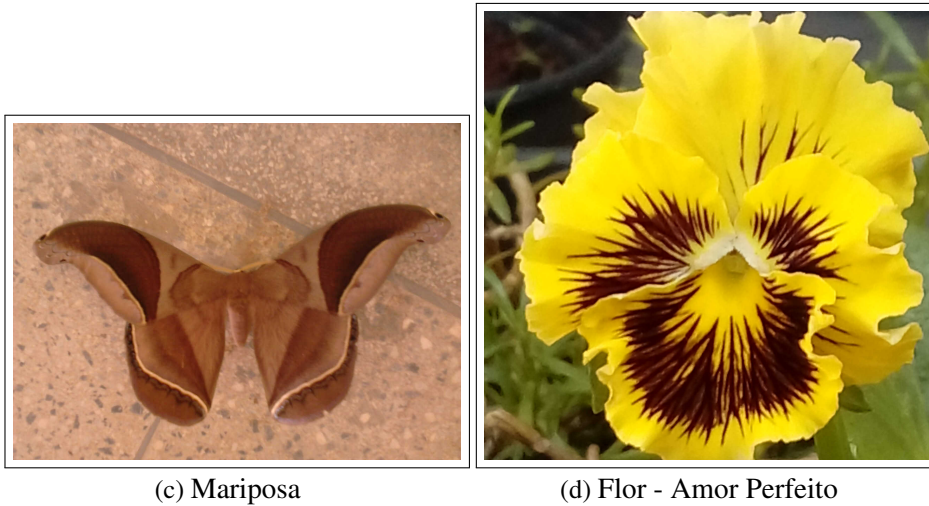
A ideia de simetria geralmente é relacionada com Arte e Natureza mais do que com a Matemática. É natural essa relação já que encontramos simetria facilmente na natureza e de forma agradável aos olhos.

Figura 1 – Simetrias na Natureza e nas Construções



(a) Rosa dos ventos - Observatório -  
USP - São Carlos

(b) Borboleta



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos utilizar dois tipos principais de simetria nesse trabalho, a simetria axial (ou de Reflexão) e a rotacional. Para isso, vamos defini-las e também definir alguns outros elementos importantes para o trabalho.

### 2.1.1 Simetria Axial

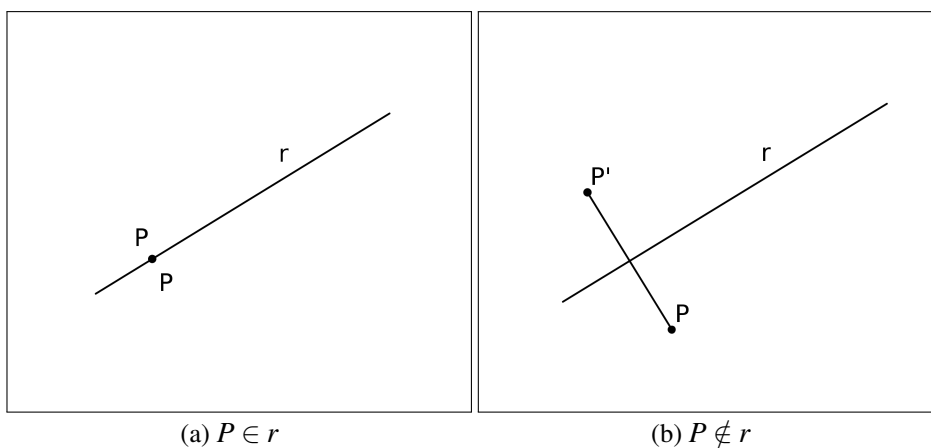
**Definição 1.** Seja  $r$  uma reta no plano  $\Pi$ . A *simetria axial* em torno da reta  $r$  é a função  $R_r$  definida por

$$R_r(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in r \\ P' & \text{se } P \notin r \text{ de forma que } r \text{ seja a mediatriz de } \overline{PP'} \end{cases},$$

para todo ponto  $P \in \Pi$  e  $r$  é chamada *eixo de simetria*.

Observe as figuras a seguir

Figura 2 – Pontos na reta e fora dela

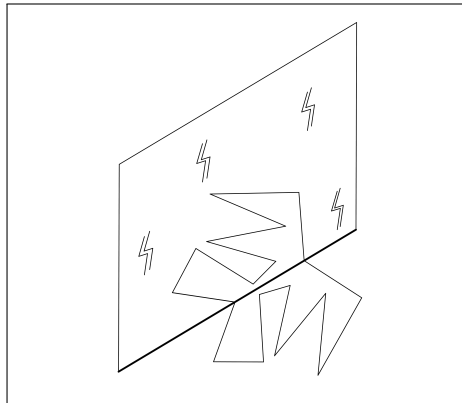


Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 2.** Uma figura plana se diz ter simetria axial quando podemos traçar uma reta  $r$  dividindo a figura em duas partes de modo que uma das partes é a imagem da outra por uma simetria axial de eixo  $r$ .

De maneira menos rigorosa, podemos dizer que uma figura possui simetria axial quando podemos traçar uma reta imaginária (eixo de simetria axial) dividindo a figura em duas partes em que uma dessas partes aparenta ser um espelhamento da outra. Como na figura:

Figura 3 – Eixo de Simetria Axial e Espelhamento

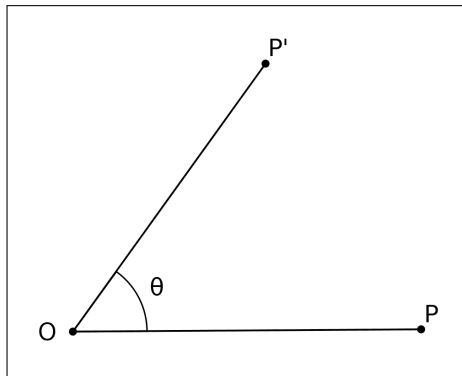


Fonte: Elaborada pelo autor.

### 2.1.2 Simetria Rotacional

**Definição 3.** Seja  $O$  um ponto do plano  $\Pi$ . Uma *rotação* a partir de  $O$  é uma função  $R_\theta$  definida por  $R_\theta(P) = P'$  com  $P$  um ponto do plano  $\Pi$ ,  $OP = OP'$ ,  $\widehat{POP'} = \theta$ . Dizemos então, que o ponto  $P$  sofreu uma rotação  $\theta$  a partir do ponto  $O$ .

Figura 4 – Rotação  $\theta$  de  $P$  a partir de  $O$



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 4.** Seja  $O$  e  $P$  pontos do plano  $\Pi$ ,  $\theta$  um ângulo divisor de  $360^\circ$  e  $\alpha = k \cdot \theta$  com  $k \in \{1, 2, \dots, 360/\theta\}$ , chamamos de *simetria rotacional de  $P$  a partir de  $O$  com rotação  $\theta$*  o

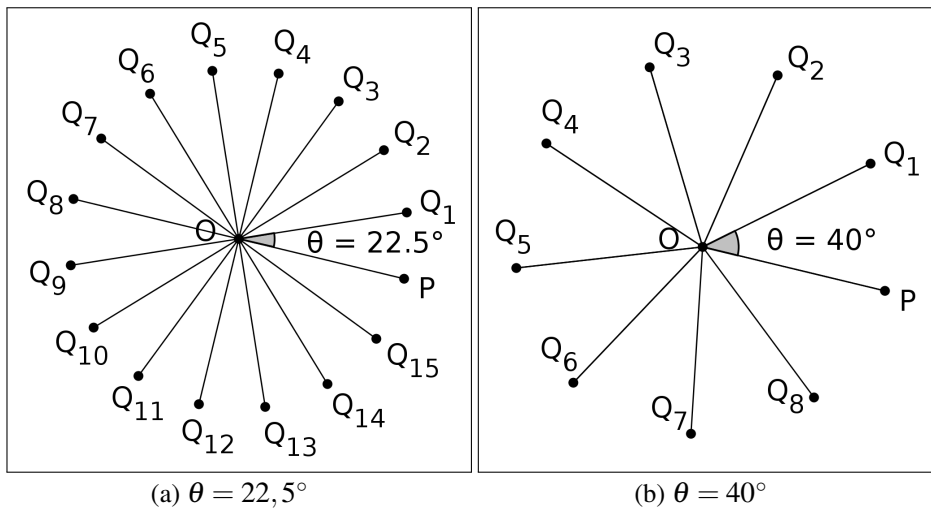
conjunto  $S$  definido como

$$S = \{Q \in \Pi \mid R_\alpha(P) = Q \text{ a partir de } O\}$$

e chamamos  $O$  de *centro de simetria rotacional*.

Exemplos de Simetria Rotacional:

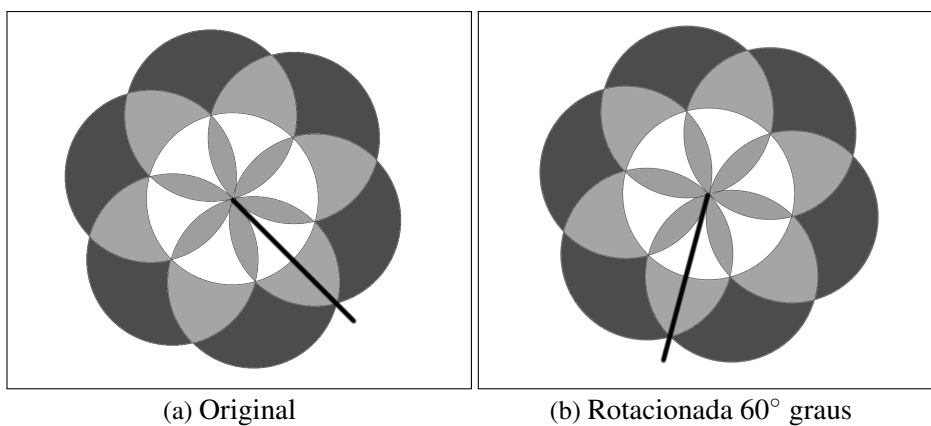
Figura 5 – Simetrias Rotacionais do ponto  $P$  a partir de  $O$  com ângulo  $\theta$

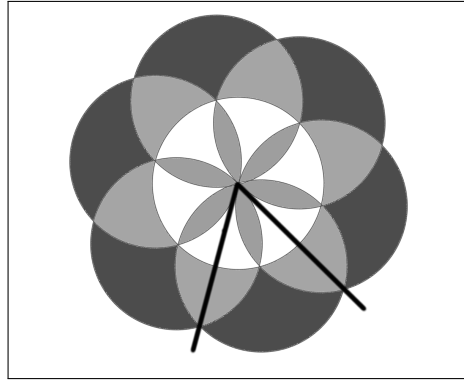


**Definição 5.** Uma figura plana se diz ter simetria rotacional quando podemos encontrar simetria rotacional para cada ponto da figura com um ângulo  $\theta$  e centro de simetria rotacional  $O$  fixos.

De maneira mais didática, podemos dizer que em uma figura há simetria rotacional se, ao rotacionarmos  $\theta$  graus a partir de um referencial  $O$ , a figura não aparenta ter sido rotacionada. Veja:

Figura 6 – Simetria Rotacional de  $60^\circ$





(c) Ângulo destacado

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 2.2 Polígonos

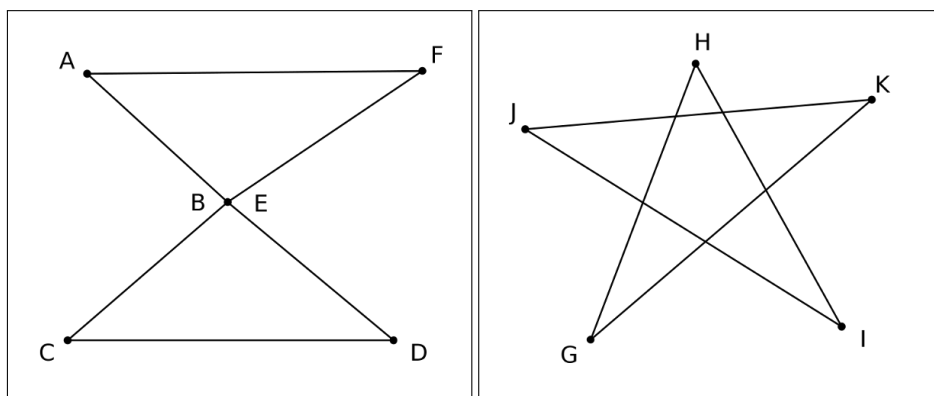
**Definição 6.** Um *polígono* é uma figura geométrica plana formada por um número finito de pontos  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n (n \geq 3)$  e  $V_1$  é o consecutivo de  $V_n$  e pelos segmentos de reta  $V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, \dots, V_{n-1}V_n, V_nV_1$ , satisfazendo a seguinte propriedade:

- i) Três a três pontos consecutivos não são colineares.

Os pontos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  são chamados *vértices* do polígono e os segmentos  $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_nV_1$  são os *lados*.

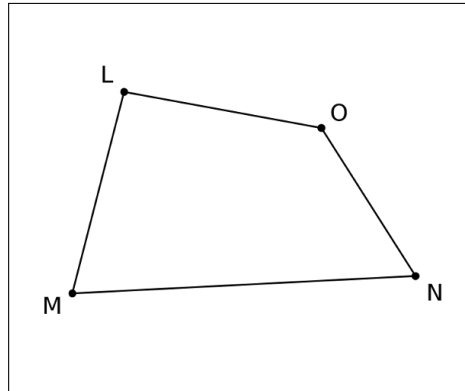
Exemplos:

Figura 7 – Exemplos de polígonos



(a) Hexágono

(b) Pentágono



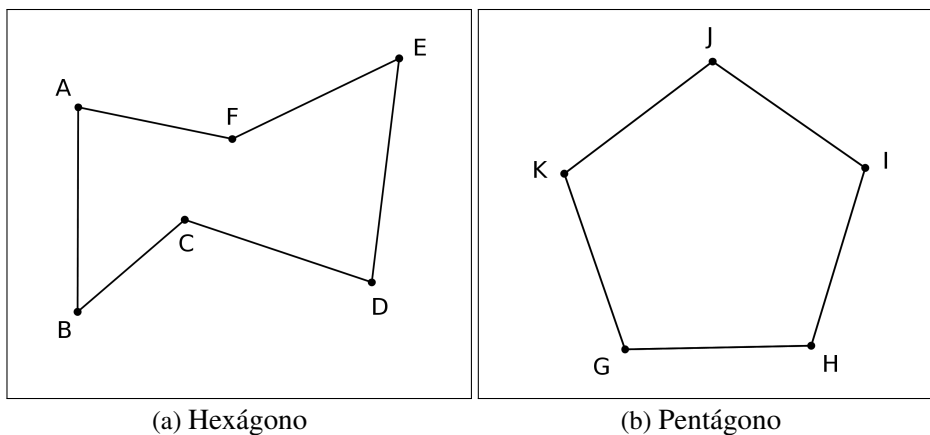
(c) Quadrilátero

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 7.** Chamamos de *polígono simples* todo polígono em que não haja interseção entre os lados não consecutivos.

Veja alguns exemplos:

Figura 8 – Exemplos de polígonos simples



(a) Hexágono

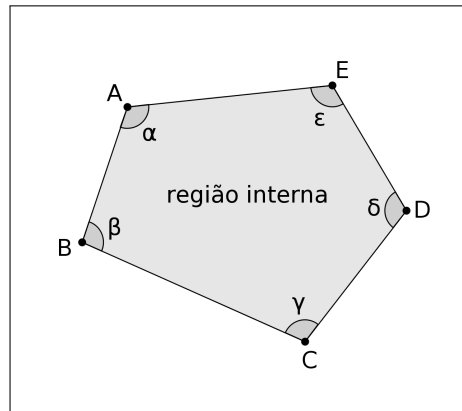
(b) Pentágono

Fonte: Elaborada pelo autor.

A região do plano limitada e delimitada pelos lados do polígono é chamada *região interna* do polígono e o ângulo de cada vértice que está sobre a região interna é chamado *ângulo interno* do polígono.

A figura 9 ilustra a região interna do polígono  $ABCDE$  e os ângulos internos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  e  $\epsilon$ .

Figura 9 – Região interna e ângulo interno

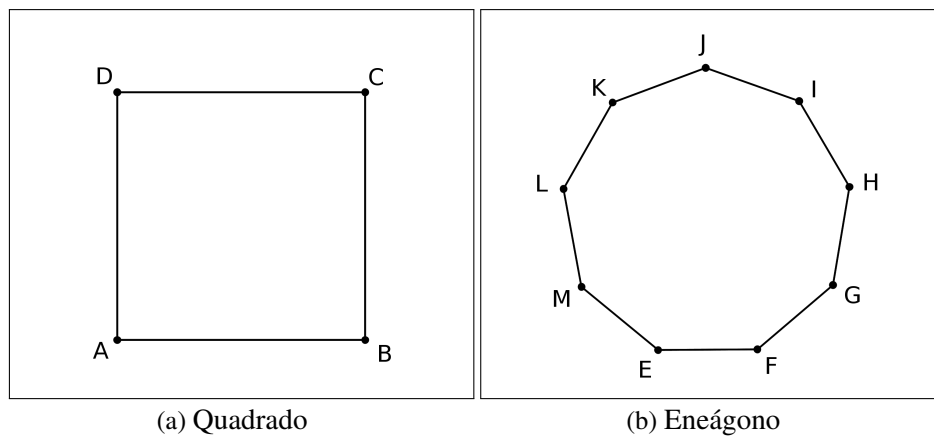


Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 8.** Um polígono é dito *polígono regular* quando seus lados são congruentes entre si e seus ângulos internos também são congruentes entre si.

Exemplos de polígonos regulares:

Figura 10 – Polígonos Regulares



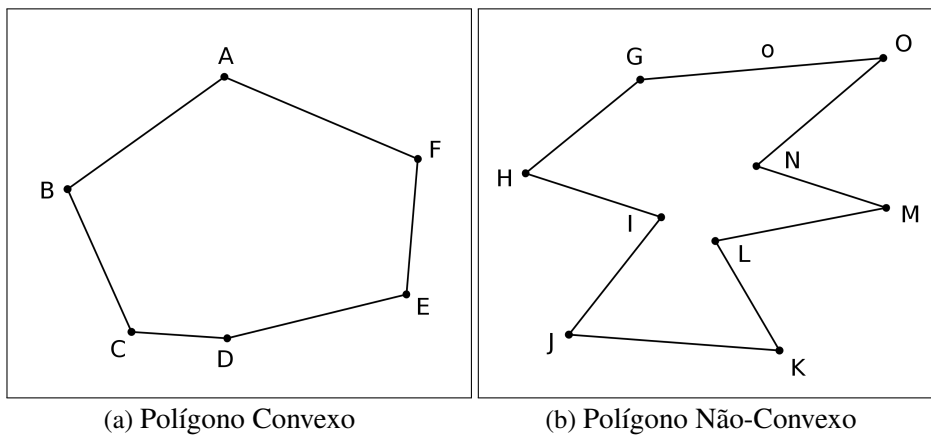
(a) Quadrado

(b) Eneágono

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 9.** Se toda reta que passa por quaisquer dois vértices consecutivos de um polígono simples deixa os outros vértices em um mesmo semiplano, dizemos que esse é um *polígono convexo*.

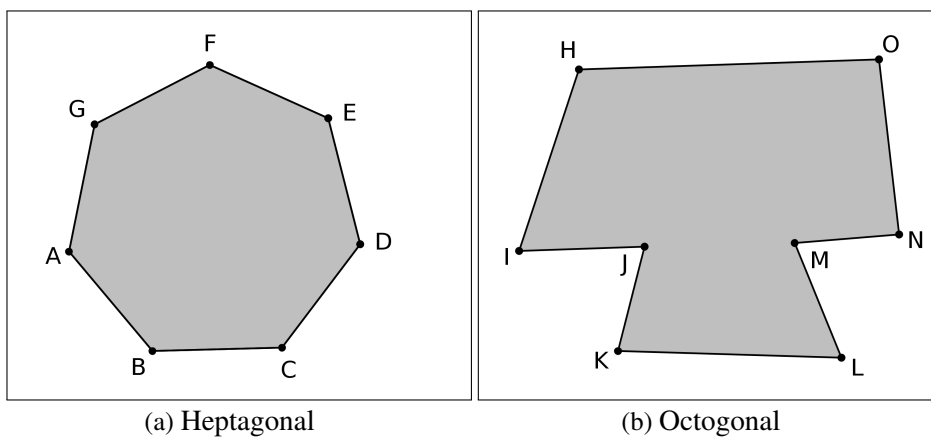
Figura 11 – Polígono Convexo e Não-Convexo



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 10.** Uma *região poligonal* é a união do polígono com a região interna determinada por ele.

Figura 12 – Região Poligonal



Fonte: Elaborada pelo autor.

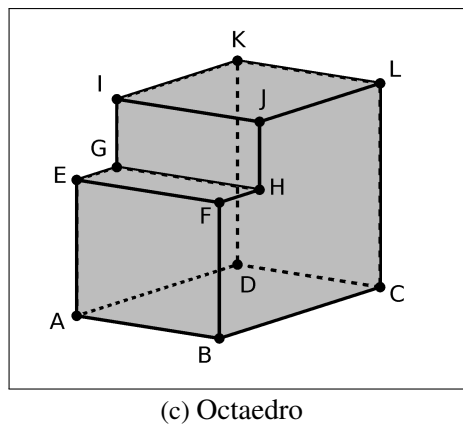
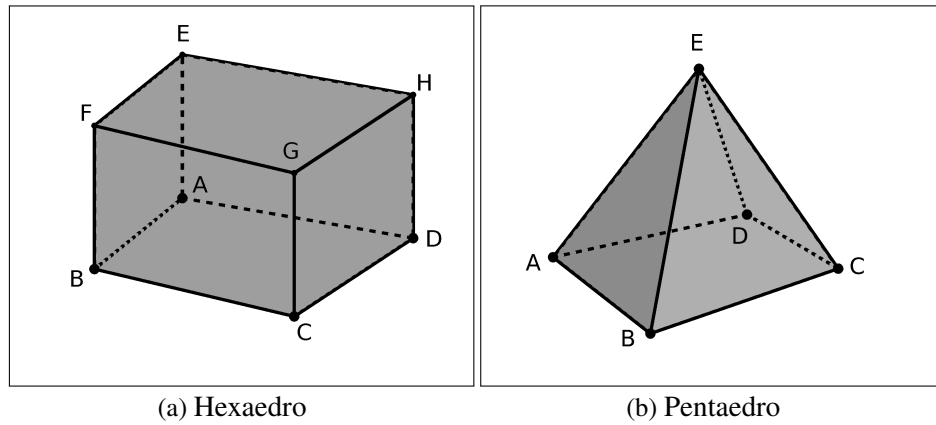
## 2.3 Poliedros

**Definição 11.** Um *poliedro* é uma região espacial limitada e delimitada por um número finito de regiões poligonais, chamadas *faces* do poliedro, com as seguintes propriedades:

- i) Duas faces se intersectam ou em um vértice, ou em um lado comum, ou não há interseção.
- ii) Cada lado de uma face é comum a exatamente duas faces.



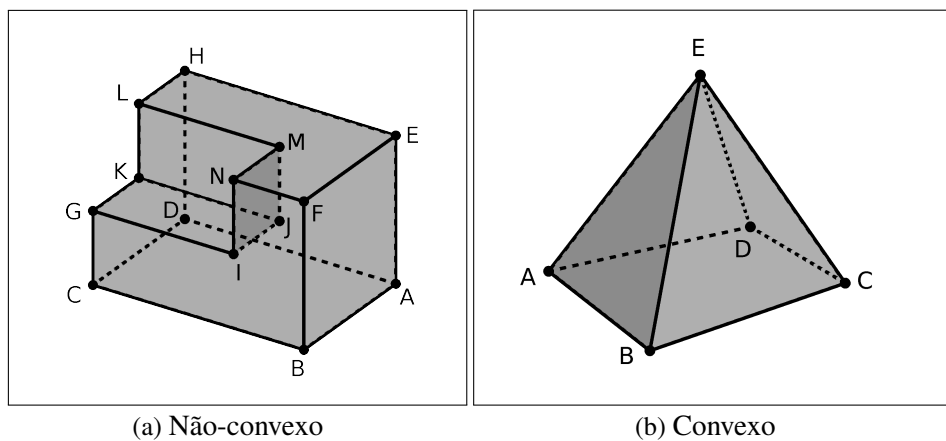
Figura 13 – Exemplos de Poliedros



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 12.** Dado um poliedro qualquer, se o plano de cada face deixar as outras faces em um mesmo semiespaço, dizemos que ele é um *poliedro convexo*.

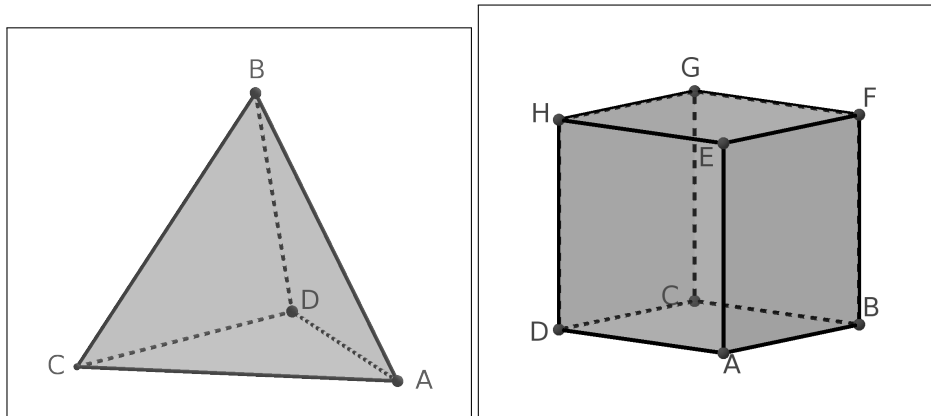
Figura 14 – Poliedros convexo e não-convexo



Fonte: Elaborada pelo autor.

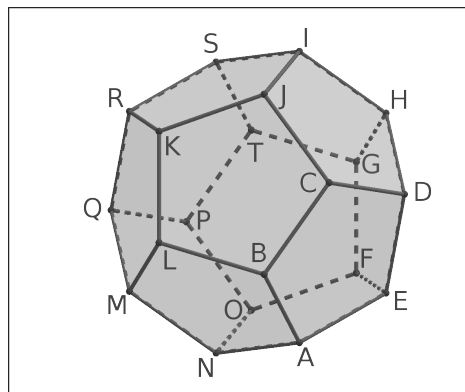
**Definição 13.** Um poliedro convexo é dito *regular* quando suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices possuem o mesmo número de arestas concorrentes.

Figura 15 – Poliedros Regulares



(a) Tetraedro Regular

(b) Cubo



(c) Dodecaedro Regular

Fonte: Elaborada pelo autor.

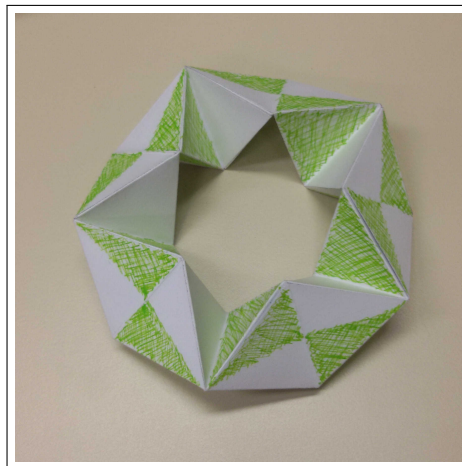
---

## CALEIDOCICLOS

---

Trazemos, nesse capítulo, o significado e definição de caleidociclo, exemplos e algumas classificações. Nas seções, detalhamos algumas propriedades e relações matemáticas encontradas nos caleidociclos que serão utilizadas nas propostas de atividades posteriores.

Figura 16 – Caleidociclo



Fonte: Elaborada pelo autor.

A palavra caleidociclo vem da junção dos termos gregos Kálos [bonito] + eídos [forma] + kiklos [ciclo/anel]

Figura 17 – Caleidociclos fechados variados com imagens axial e rotacionalmente simétricas



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 14.** *Caleidociclo* é um anel tridimensional circular composto por uma cadeia de tetraedros idênticos com as seguintes propriedades:

- i) dois tetraedros estão ligados por uma única aresta em comum;
- ii) cada tetraedro está ligado a exatamente dois outros tetraedros por arestas opostas;

Figura 18 – Exemplo de caleidociclo com seis tetraedros não-regulares

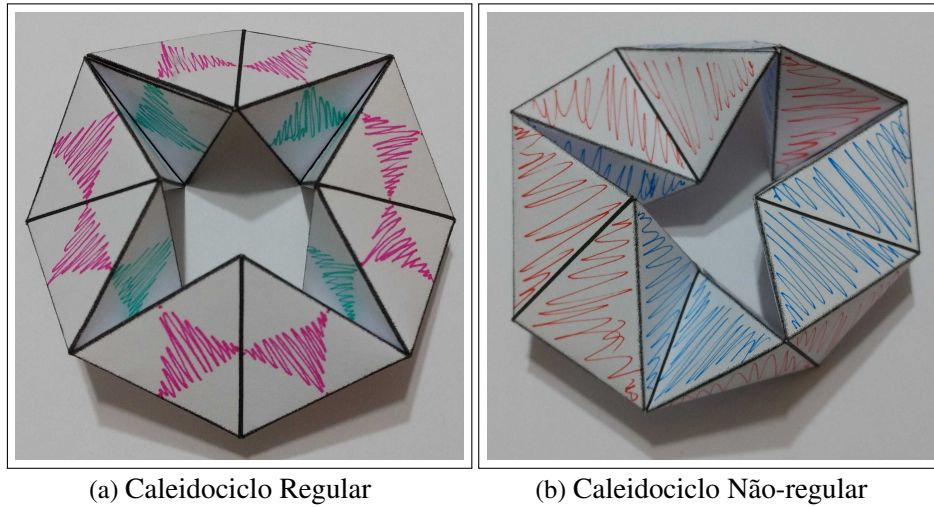


Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma característica que o torna especial é a possibilidade de torcê-lo continuamente para dentro ou para fora na medida em que mostra diferentes faces dos tetraedros.

**Definição 15.** Um caleidociclo é chamado *caleidociclo regular* quando as arestas de ligação de um tetraedro são ortogonais, caso contrário, é chamado *caleidociclo não-regular*.

Figura 19 – Caleidociclo regular de oito tetraedros regulares e caleidociclo não-regular de oito tetraedros

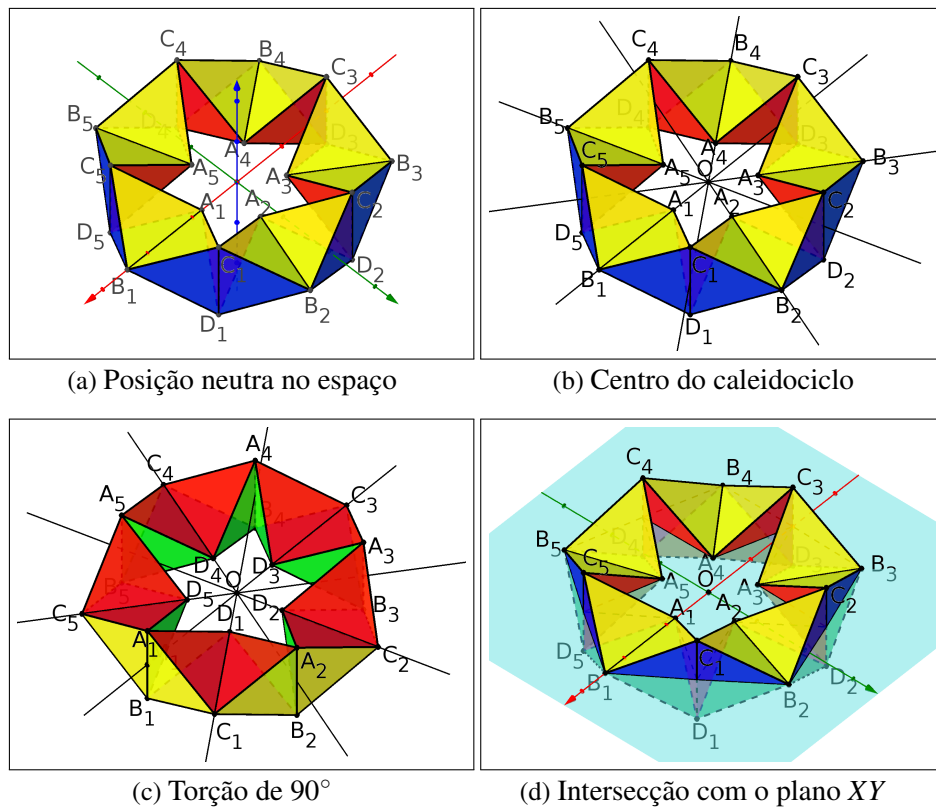


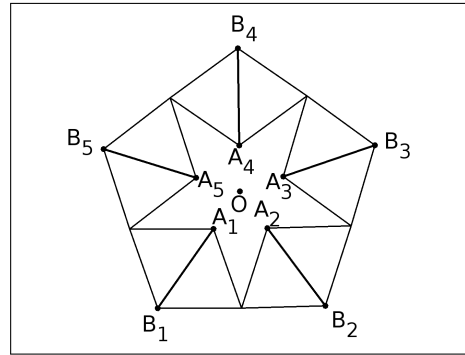
Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste trabalho, serão utilizados apenas os caleidociclos regulares e, por simplicidade, iremos nos referir apenas como caleidociclos, caso necessário, deixaremos evidente quando não se tratar de um caleidociclo regular.

Todo caleidociclo regular pode ser posicionado no espaço canônico como no exemplo da figura 20a:

Figura 20 – Caleidociclo regular de dez tetraedros regulares localizado no espaço





(e) Secção Transversal

Nestas posições, que chamaremos *posição neutra no espaço*, as arestas de ligação estarão paralelas ao eixo  $Z$  ou pertencentes ao plano  $XY$ . No exemplo 20a,  $\overline{C_iD_i}$  são as arestas paralelas ao eixo  $Z$  e  $\overline{A_iB_i}$  são as arestas pertencentes ao plano  $XY$ .

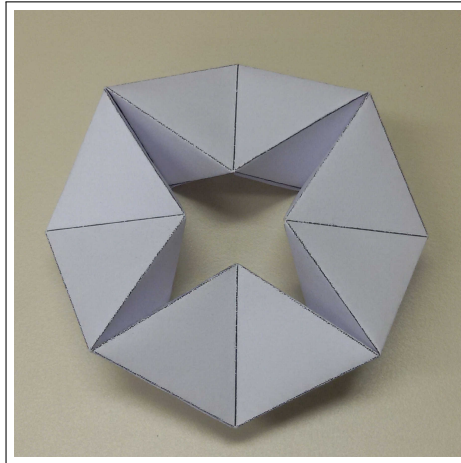
As retas suporte das arestas que estão contidas no plano  $XY$  se intersectam em um ponto chamado *centro do caleidociclo*. Na figura 20b, o centro do caleidociclo é o ponto  $O$  que, neste caso, coincide com a origem do espaço. Na figura 20c, podemos perceber que ao torcer o caleidociclo em  $90^\circ$  há uma alteração no posicionamento das arestas de ligação; as arestas  $\overline{A_iB_i}$  estão agora paralelas ao eixo  $Z$  e  $\overline{C_iD_i}$  estão contidas no plano  $XY$  e com suas retas suporte se intersectando no ponto  $O$  centro do caleidociclo, porém esta nova posição também é uma posição neutra no espaço.

Na figura 20d temos a intersecção do plano  $XY$  com o caleidociclo na posição neutra; essa intersecção é chamada *secção transversal* e está destacada na figura 20e que será utilizada na definição 16.

### 3.1 Caleidociclos com Tetraedros Regulares

Esse tipo de caleidociclo é regular, composto por oito tetraedros regulares no mínimo e não há uma quantidade máxima. A impossibilidade de compor um caleidociclo com menos de oito tetraedros regulares será tratada na seção 3.2.

Figura 21 – Caleidociclo de oito tetraedros regulares



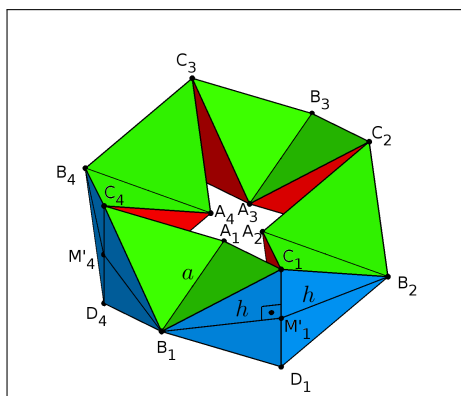
Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que neste caleidociclo o centro é vazado, ou seja, em nenhuma posição de torção, o centro ficará fechado. Outra observação importante é que o número de tetraedros sempre é par no caso de serem tetraedros regulares, pois caso seja um número ímpar, ao tentar fechar a cadeia de caleidociclos para compor o anel, teremos extremidades com arestas perpendiculares, o que contraria a definição de caleidociclo estando ligados a apenas um ponto (a interseção das arestas) e não a aresta em comum.

Vamos definir algumas medidas e formas encontradas nos caleidociclos.

Dado um caleidociclo regular de oito tetraedros em posição neutra no espaço como na figura a seguir,

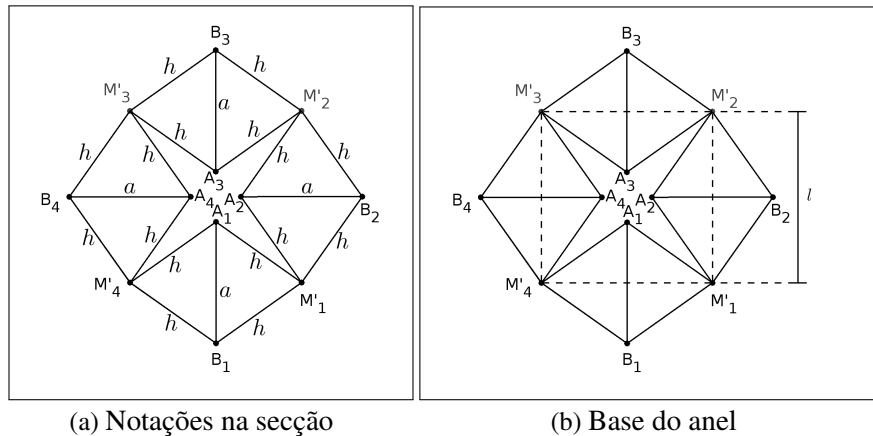
Figura 22 – Oito tetraedros regulares



Fonte: Elaborada pelo autor.

fazendo-se uma secção transversal, como visto no início deste capítulo na figura 20d, e definindo  $a$  a medida das arestas,  $h$  as alturas das faces e  $l$  a medida dos segmentos  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\overline{M_2M_3}$ ,  $\overline{M_3M_4}$ ,  $\overline{M_4M_1}$ , temos

Figura 23 – Seção transversal do caleidociclo de oito tetraedros regulares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, definimos:

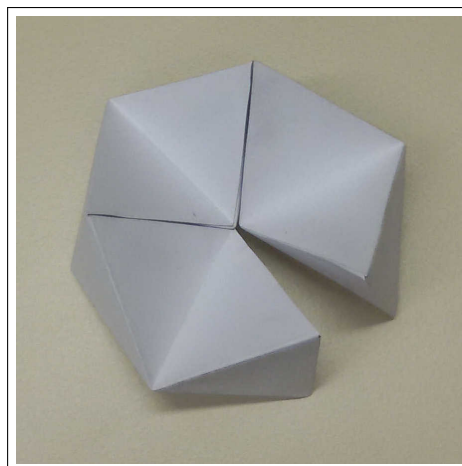
**Definição 16.** O quadrado tracejado apresentado na figura 23b é chamado *base do anel*.

A relação entre a aresta  $a$ , a altura de face  $h$  e o lado  $l$  da base do anel iremos trabalhar no Capítulo 5 utilizando as propostas de atividades relacionadas com o Teorema de Pitágoras.

### 3.2 Caleidociclos Fechados (Tetraedros Não-Regulares)

Se quiser fazer um caleidociclo de centro fechado com tetraedros regulares, na tentativa, iremos descobrir que não é possível, veja a imagem:

Figura 24 – Tentativa de caleidociclo fechado com tetraedros regulares



Fonte: Elaborada pelo autor.

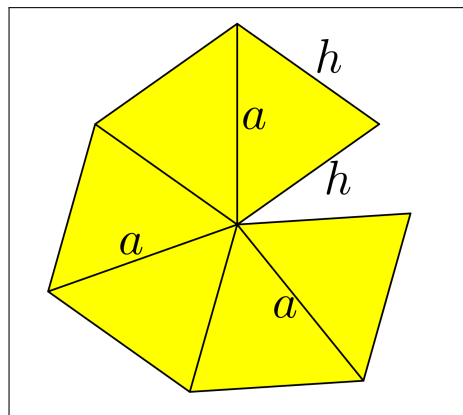
Podemos justificar esse fato analisando como deveria ser a base desse anel. O estudo de ladrilhamento do plano com figuras geométricas nos dá um caminho. Ao pôr polígonos idênticos



com um vértice comum e sem sobreposição, de forma a recobrir todo o plano ao redor desse vértice, é necessário que a medida do ângulo desse vértice seja um divisor de  $360^\circ$ .

Como estamos utilizando tetraedros regulares, o corte transversal, como feito na figura 23 fica como na imagem:

Figura 25 – Corte transversal da tentativa



Fonte: Elaborada pelo autor.

No corte transversal, vemos que ao redor do vértice central aparecem triângulos isósceles com aresta  $a$  e altura  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . O vértice comum do centro do caleidociclo é composto por um dos vértices desses triângulos da secção transversal, contendo o ângulo  $\alpha$  formado entre  $a$  e  $h$ . Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + h^2 - 2ah \cos \alpha \\ 2ah \cos \alpha &= a^2 \\ 2 \cos \alpha &= \frac{a}{h} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{2h} \end{aligned}$$

como

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

segue que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

portanto

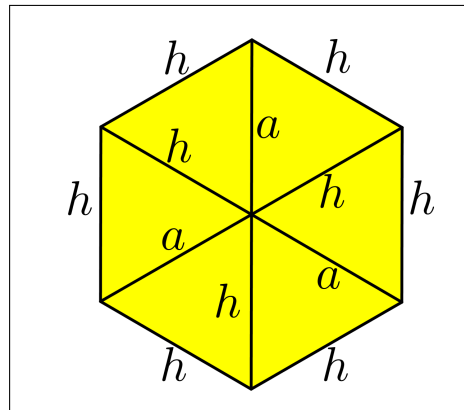
$$\alpha \approx 54,7356$$

pois  $0 < \alpha < \pi/2$ .

Assim, o ângulo  $\alpha$  não é divisor de  $360^\circ$  e portanto não é possível formar um caleidociclo fechado com seis tetraedros regulares.

Para conseguirmos fechar o caleidociclo de seis tetraedros, é necessário esticarmos os tetraedros (alterar as medidas) de forma a conseguirmos um hexágono regular no corte transversal.

Figura 26 – Hexágono do Corte Transversal

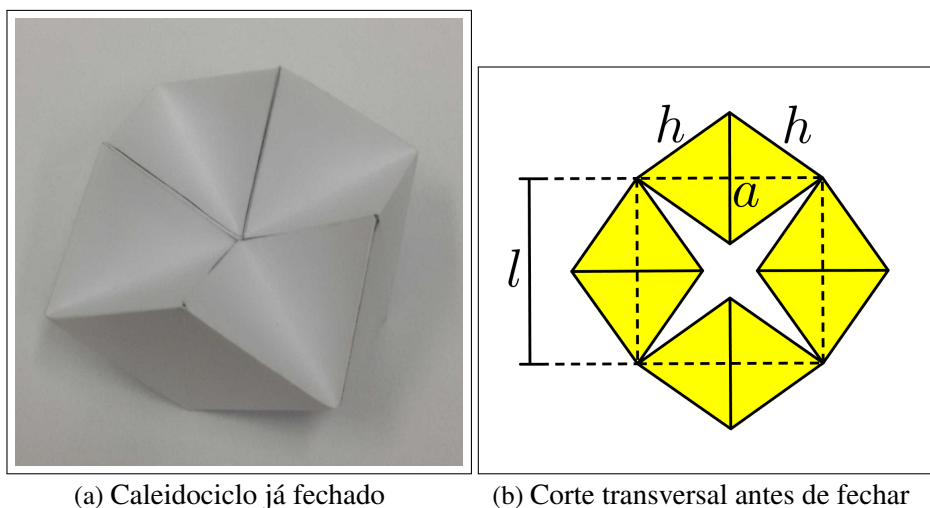


Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, os tetraedros deixam de ser regulares, as arestas de ligação  $a$  ficam com a mesma medida da altura  $h$  das faces triangulares isósceles dos tetraedros e as arestas que não são de ligação podem ser definidas como  $b$ . As relações entre as medidas do tetraedro serão abordadas no Capítulo 5 ao apresentar formas de se trabalhar o Teorema de Pitágoras na construção do molde/planificação do caleidociclo.

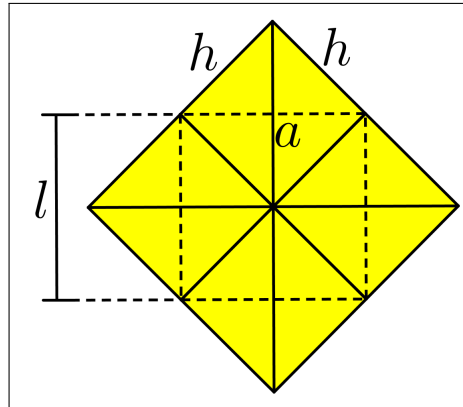
O mesmo acontece com o caleidociclo de oito tetraedros. Para que possamos fechá-lo, é necessário mudanças nas medidas dos tetraedros, que deixam de ser regulares. Veja a figura 27:

Figura 27 – Caleidociclo fechado com oito tetraedros não-regulares



(a) Caleidociclo já fechado

(b) Corte transversal antes de fechar



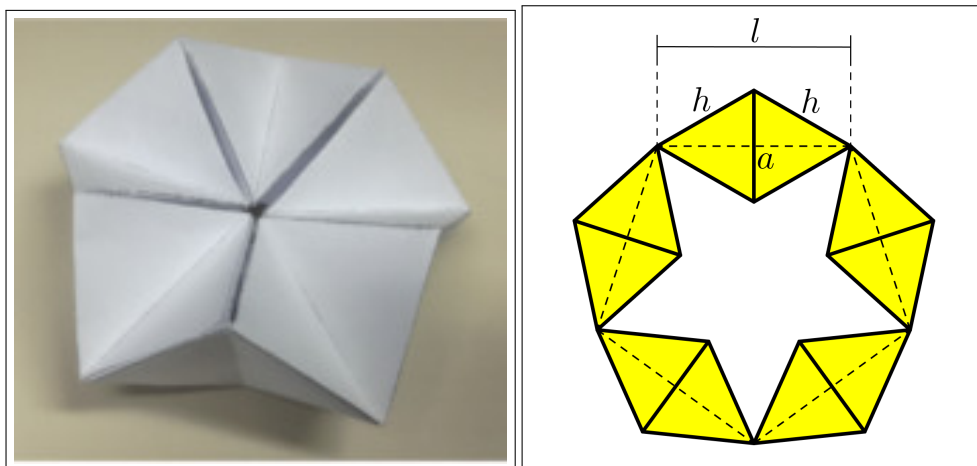
(c) Corte transversal após fechar

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vale destacar que, na figura 27b, a medida  $h$  é a altura do triângulo equilátero, face do tetraedro regular, já na figura 27c, a medida  $h$  é a altura do triângulo isósceles do tetraedro que não é mais regular. Além disso, a aresta  $a$  de ligação é aumentada e as outras arestas que não são de ligação  $b$  terão medidas diferentes de  $a$ , como visto no comentário abaixo da figura 26.

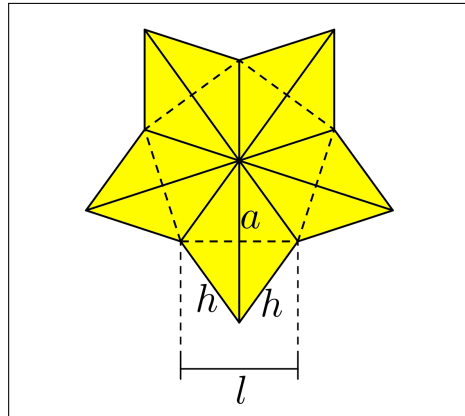
Mais um exemplo de caleidociclo fechado, agora com dez tetraedros.

Figura 28 – Caleidociclo fechado com dez tetraedros não-regulares



(a) Caleidociclo já fechado

(b) Corte transversal antes de fechar



(c) Corte transversal após fechar

Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que nesse caso, a base do caleidociclo é um pentágono regular e assim como na figura 27, a medida  $h$  da figura 28b corresponde à altura do triângulo equilátero, face do tetraedro regular, e na figura 70, a medida  $h$  é a altura do triângulo isósceles do tetraedro que não é mais regular.

---

# ENSINO DE SIMETRIAS POR MEIO DOS CALEIDOCICLOS

---

---

O currículo do Ensino Fundamental - Anos Finais do Estado de São Paulo sugere o estudo de simetrias no 7º ano e apresenta uma proposta que explora as ideias de simetria axial e rotacional em objetos do dia a dia, na natureza, em malhas quadriculadas e malhas de pontos.

Apresentamos uma proposta de atividade envolvendo os caleidociclos para que sejam desenvolvidas competências e habilidades como:

- identificação, comparação e interpretação de simetrias;
- apreciação das linguagens do desenho, pintura, arquitetura, etc, com base nos padrões geométricos;
- manipulação de formas geométricas planas e espaciais, e
- criação de imagens com simetria axial e rotacional.

## 4.1 Pré-requisitos

Para trabalhar com a simetria axial e rotacional com os caleidociclos, é necessário que os alunos tenham visto as noções do que seja cada uma delas. Não há a necessidade de que seja a definição matemática formal, mas no mínimo as noções básicas como, por exemplo, a forma como foi citado em Conceitos Introdutórios.

É possível trabalhar com os alunos a construção de imagens com simetria axial e rotacional antes de lidar com os caleidociclos.

### 4.1.1 Simetria axial: proposta de atividade

Material necessário:

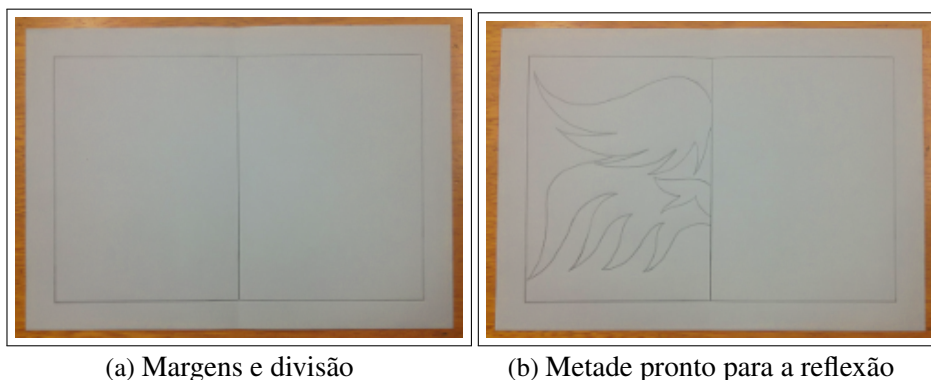
- uma folha de papel sulfite;
- uma régua milimetrada;
- um lápis preto nº 2;
- uma borracha branca e
- lápis de cor (caso queiram colorir).

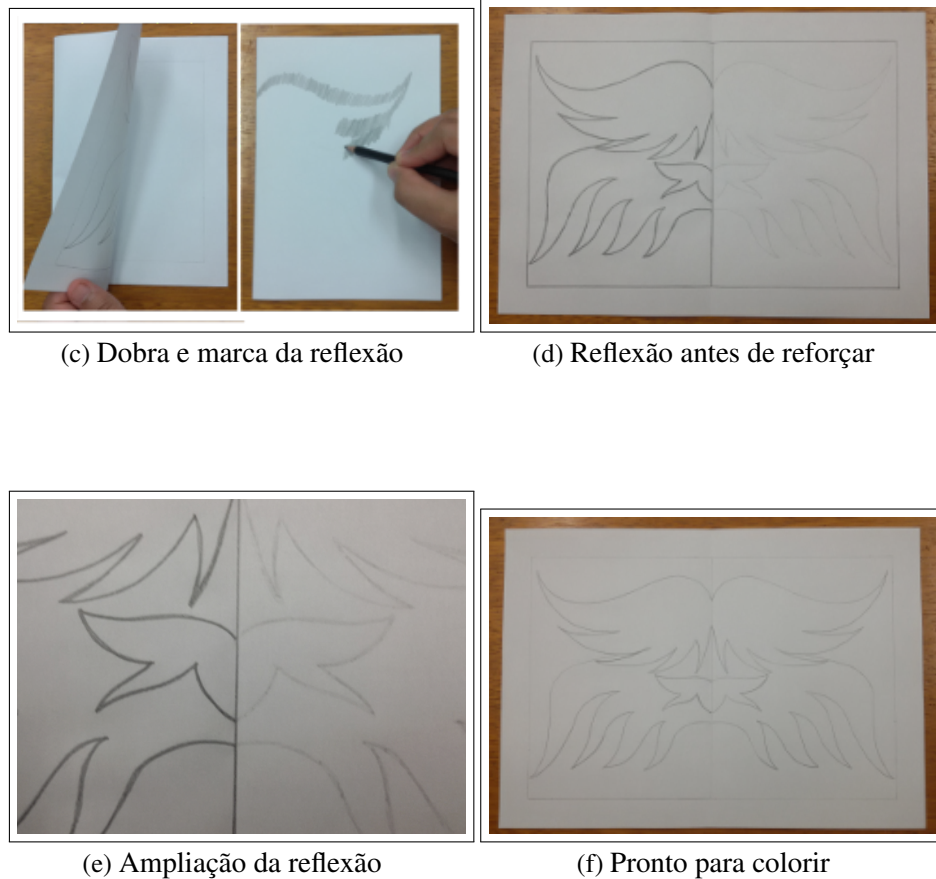
Fazer margem de 2 cm no papel sulfite e dobrar a folha ao meio na horizontal (ou vertical se preferir) para facilitar o traçado de uma linha dividindo a área de desenho ao meio. Aconselha-se fazer essa divisão fraca, pois há a possibilidade dela ser apagada ao terminar a construção da simetria e iniciar a coloração.

Para iniciar o desenho em si, peça aos alunos que façam um desenho livre em uma das metades da folha. Pode sugerir o desenho de metade de alguma imagem conhecida com simetria axial ou não, ou ainda, utilização livre de linhas curvas, retas, etc. Peça aos alunos que dê preferência a desenhos com linhas bem definidas e sem muito detalhamento, isso facilitará a reflexão da imagem.

Após concluir o desenho, os alunos deverão dobrar a folha ao meio fazendo com que o desenho fique por dentro da dobra. Com o lápis preto inclinado, deverão fazer movimentos de zigue-zague por trás do desenho, pressionando de forma que a imagem fique marcada na outra metade da folha. Veja uma sequência na imagem a seguir:

Figura 29 – Sequência da construção da reflexão





Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma outra forma para não dobrar a folha, caso queiram fazer em um painel, é copiar o desenho feito com uma folha de caderno fina ou folha de papel vegetal, marcando pontos de referência como os cantos da margem, e virar essa folha sobre a metade sem desenho, como se estivesse virando uma folha em um caderno. Feito isso e alinhados os pontos de referência, devemos fazer os movimentos de zigue-zague com o lápis, como citado anteriormente.

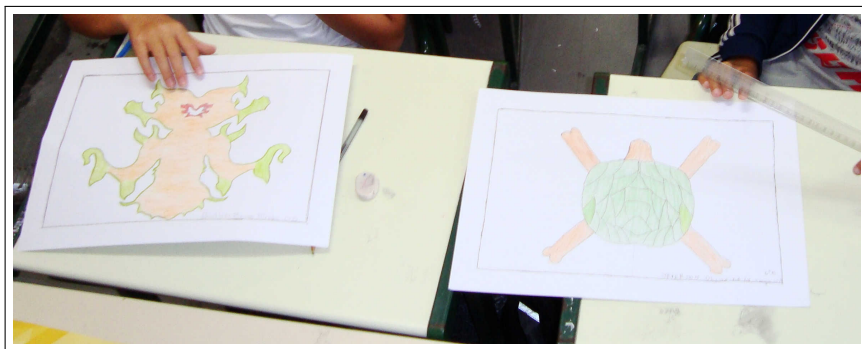
Em ambos casos, a reflexão fica com linhas fracas, que devem ser reforçadas em seguida.

Seguem algumas imagens de trabalhos realizados em sala:

Figura 30 – Trabalhos de Simetria Axial em papel A3 realizados por alunos de 7º ano



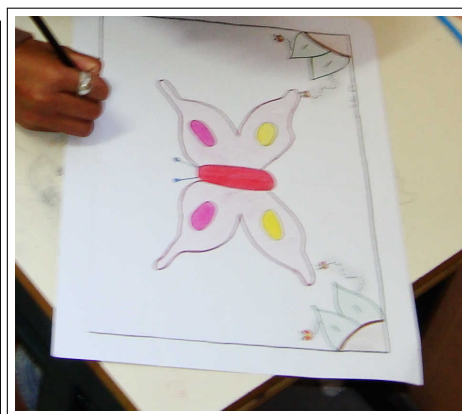
(a)



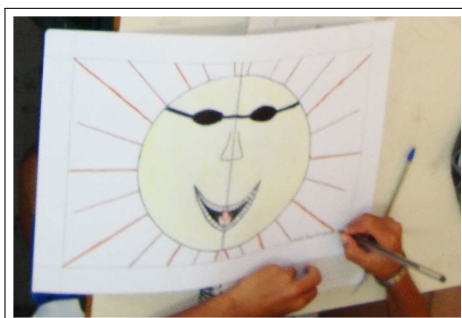
(b)



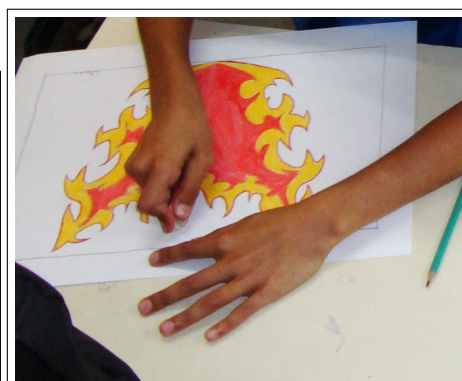
(c)



(d)

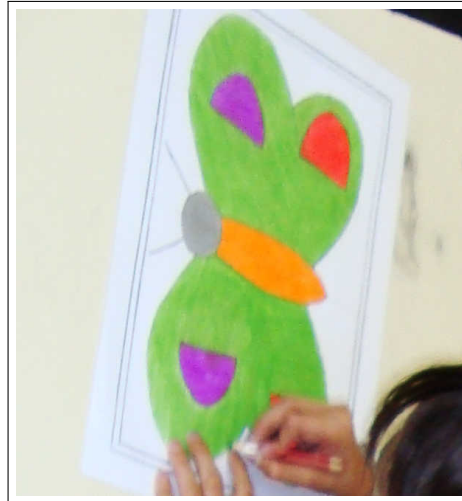


(e)



(f)





(g)

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.1.2 *Simetria rotacional: proposta de atividade*

Material necessário:

- uma folha de papel sulfite;
- uma régua milimetrada;
- um compasso;
- um transferidor e
- uma folha de papel vegetal (ou folha de caderno fina).

É possível a criação da imagem rotacionalmente simétrica sem a utilização do compasso, pois ele será utilizado apenas para criar uma borda para a imagem. O transferidor também pode ser substituído por esquadros, ficando limitado aos ângulos de rotação possíveis de serem criados utilizando estes instrumentos.

Para dar início, construir margem de 2 cm e marcar um ponto central na folha, que pode ser localizado com medidas ou simplesmente traçando as diagonais da folha de forma fraca e apagando-as assim que marcar o centro.

Com o compasso, traçar uma circunferência no centro da folha de forma a ocupar o máximo de espaço dentro da margem. Decidir de quantos graus será o ângulo de simetria rotacional, lembrando que o valor desejado deve dividir  $360^\circ$  em partes iguais. O exemplo a seguir utiliza simetria rotacional de  $120^\circ$ .

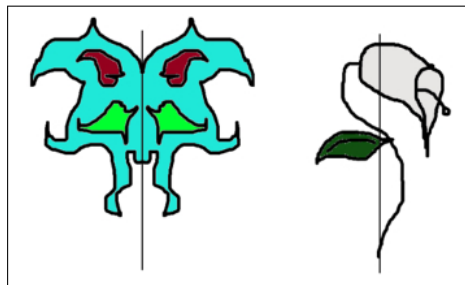
Seguindo com a construção, dividir a circunferência em seis partes iguais de  $60^\circ$  cada. Essa divisão será para que possamos utilizar duas imagens distintas na rotação, caso deseje apenas uma imagem, pode ser feito apenas em três partes de  $120^\circ$ , ou da forma que preferir.

Nesse momento já é possível a construção do desenho, que deverá estar sobre uma das divisões dos setores, que será a referência para que seja repetida no ângulo de  $120^\circ$ .

O desenho pode ser simétrico axial tendo como eixo de simetria a divisória dos setores, mas não é necessário que seja.

Seguem as imagens que são utilizadas no exemplo, uma com simetria axial e outra não.

Figura 31 – Exemplos para criar simetria rotacional

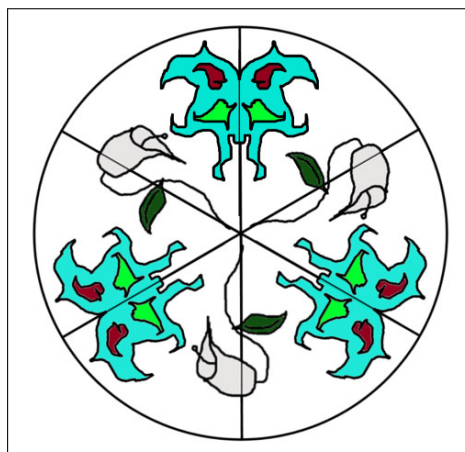


Fonte: Elaborada pelo autor.

Para reproduzir a imagem exata na rotação de  $120^\circ$  basta usar a folha de papel vegetal, copiar a imagem incluindo o eixo de referência até o centro de rotação, pintar de lápis preto nº 2 a parte de trás da folha de papel vegetal onde está a cópia do desenho e posicionar no eixo de rotação  $120^\circ$  onde a imagem deve ser idêntica.

Caso haja mais imagens a ser reproduzidas, basta seguir o mesmo procedimento, até que todas elas apareçam idênticas na rotação desejada.

Figura 32 – Simetria Rotacional com e sem Simetria Axial



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4.2 Proposta de Atividade: simetria com o caleidociclo

Material necessário:

- molde do caleidociclo disponível no Apêndice A figura 56
- tesoura
- cola
- lápis de cor (ou canetinhas)

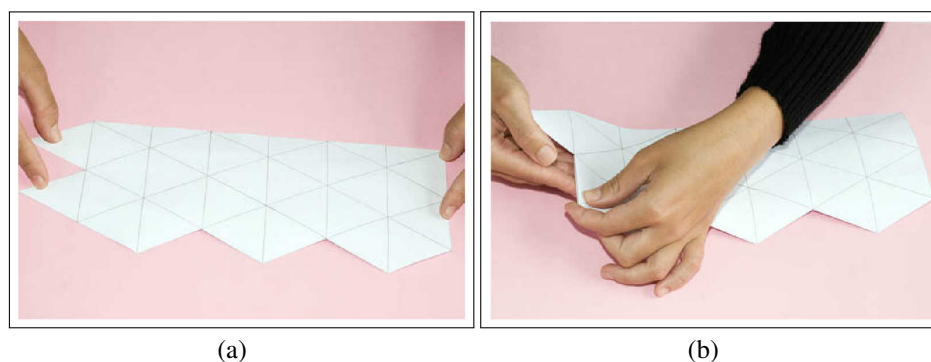
A proposta tem variações de acordo com o nível de habilidades que a turma se encontra. Por isso, apresentamos primeiramente a proposta para turmas em nível básico que contempla o reconhecimento e identificação das simetrias.

Entregue o molde para cada um dos alunos e peça para darem cores ao desenho antes de iniciar o recorte. Lembre-os que deverão estar atentos para utilizar as mesmas cores nas partes correspondente a uma imagem.

Após a coloração, já se pode recortar o contorno do molde e iniciar a dobra em todas as linhas retas. Para facilitar a montagem, dê a sugestão de dobrarem para os dois lados e marcar a dobra com uma régua (vincar a dobra).

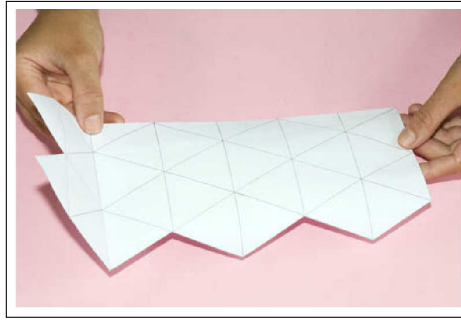
Para concluir, basta ajustar a peça como na figura 33 e utilizar cola. Sugerimos a utilização de cola branca, sem excesso e bem espalhada, principalmente se utilizarem papel sulfite, pois outros tipos de cola dificultam esta etapa por não colarem direito ou exigirem maior pressão.

Figura 33 – Exemplo de como montar o caleidociclo - parte 1

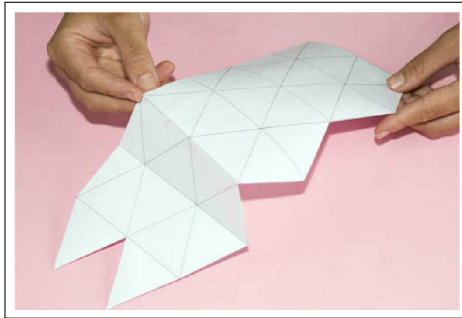




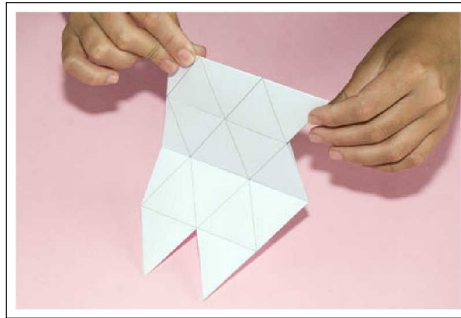
(c)



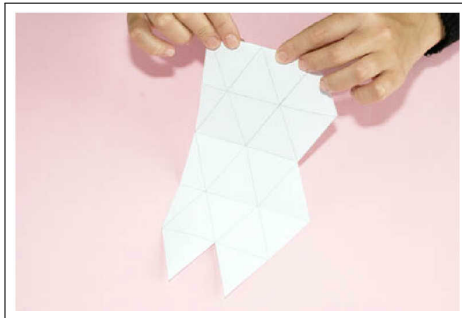
(d)



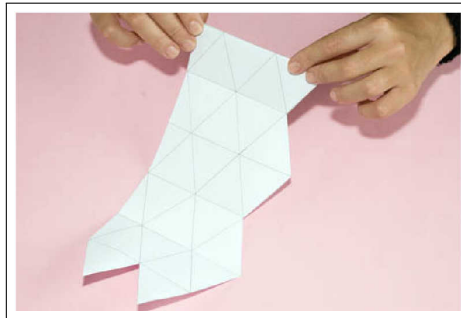
(e)



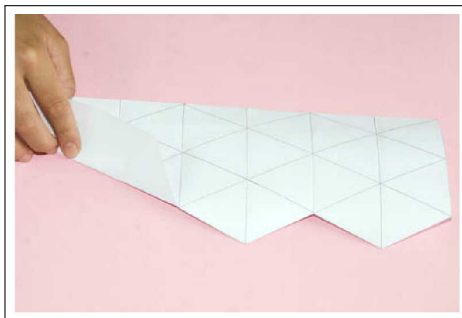
(f)



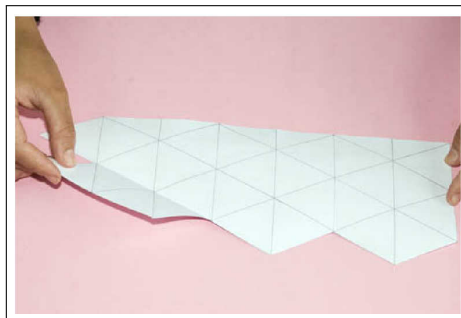
(g)



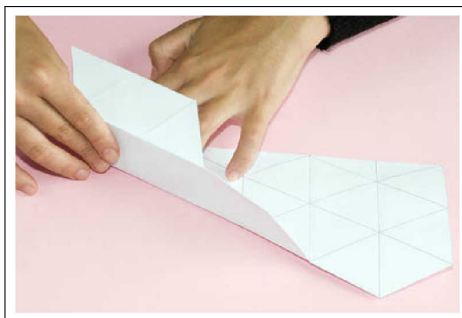
(h)



(i)



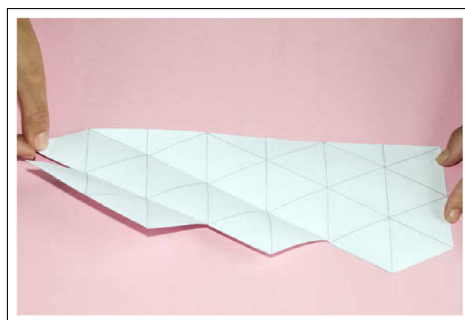
(j)



(k)



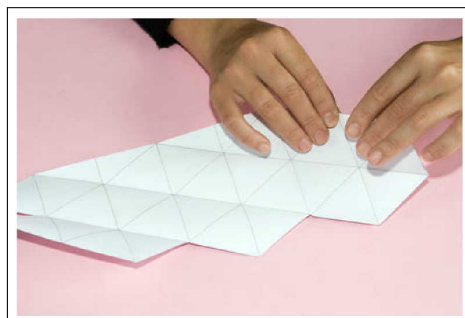
(l)



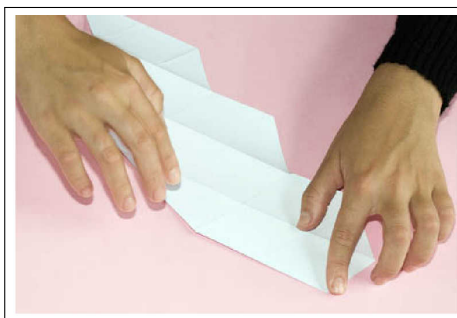
(m)



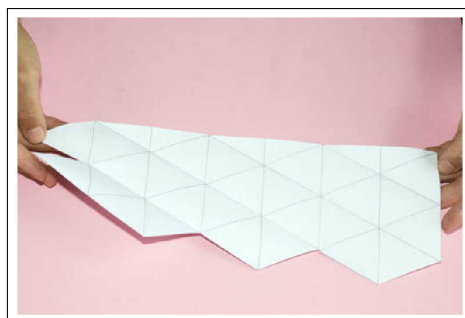
(n)



(o)



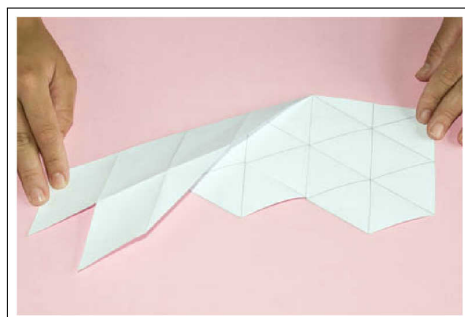
(p)



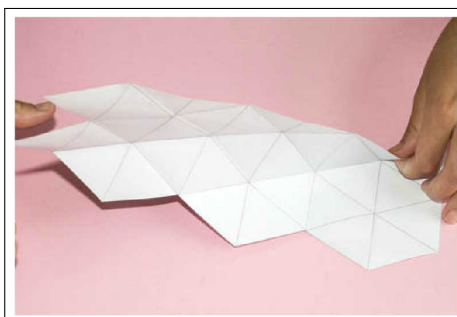
(q)



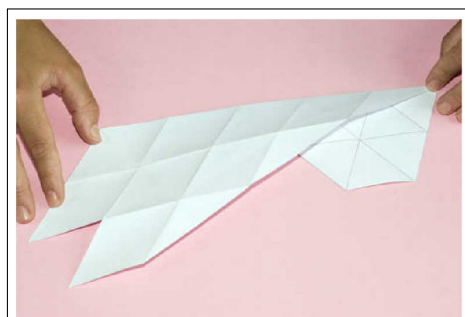
(r)



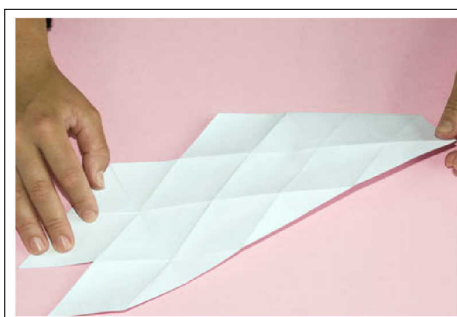
(s)



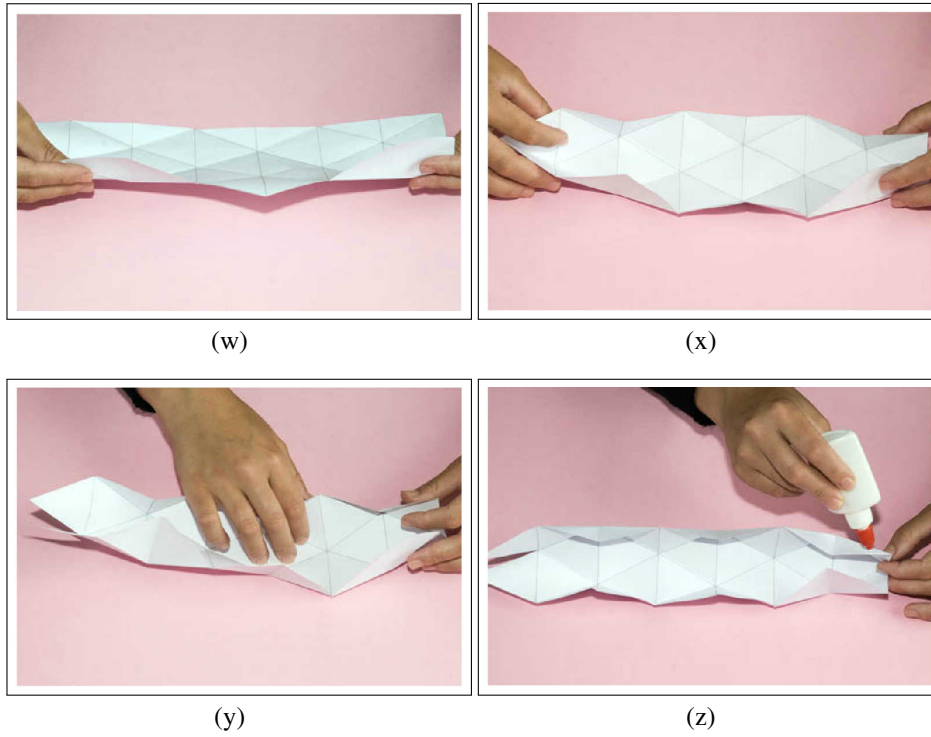
(t)



(u)

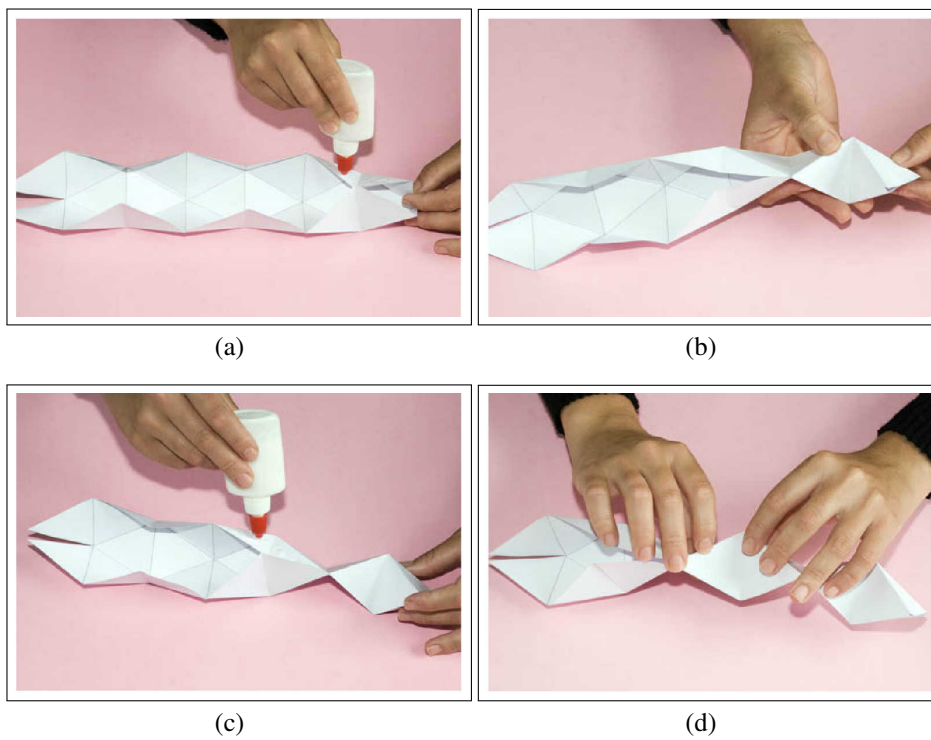


(v)

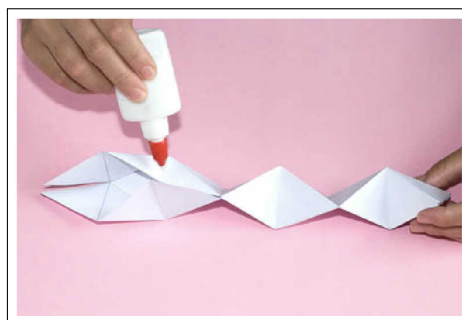


Fonte: Brasil (b).

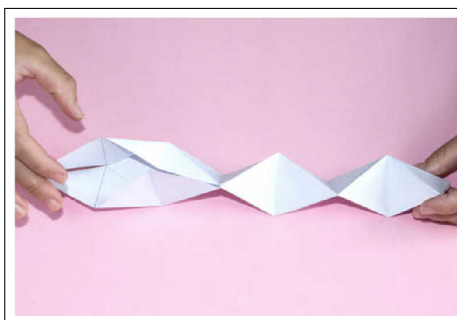
Figura 34 – Exemplo de como montar o caleidociclo - parte 2







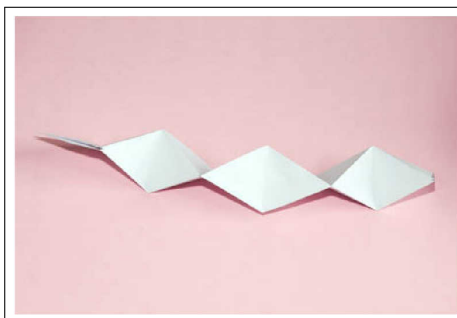
(e)



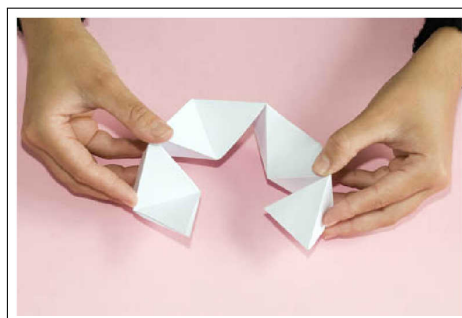
(f)



(g)



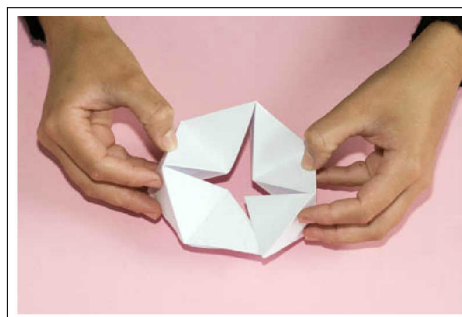
(h)



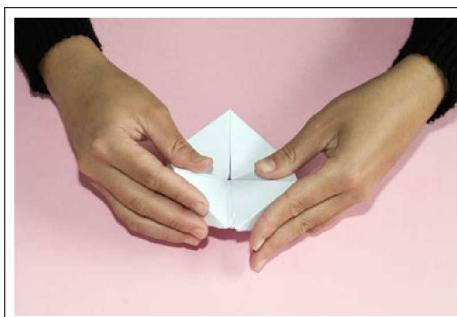
(i)



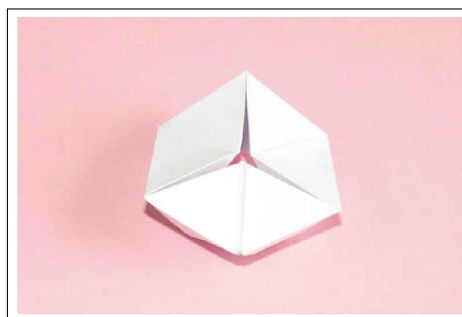
(j)



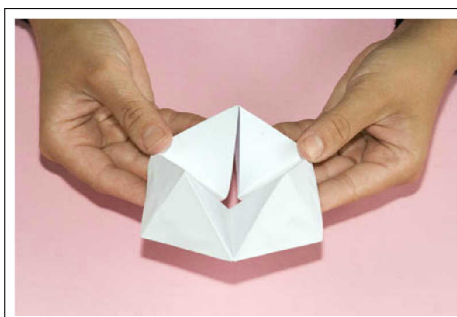
(k)



(l)



(m)



(n)

É possível ver essa sequência no endereço <[http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/midias/experimentos/Geometria\\_e\\_arte/construindo.html](http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/midias/experimentos/Geometria_e_arte/construindo.html)>.

A primeira variação serve para turmas em nível adequado, cujas habilidades se destacam na capacidade de identificar e construir simetrias. Para esse grupo sugerimos o molde sem imagens da figura 57 Apêndice A e que sejam indicadas quais as faces que completam uma imagem, deixando ao aluno a tarefa de criar as imagens, colori-las e concluir o processo de montagem.

Uma segunda variação é indicada para turmas em nível avançado em que além das habilidades anteriores, os alunos são capazes de localizarem as regiões do molde que se completam, a fim de criarem as imagens que aparecerão como simetria rotacional (e com possibilidade de terem simetria axial localmente também). Nessa situação, incentiva-se mais o raciocínio e abstração na tarefa de prever as faces do molde que irão se relacionar no caleidociclo.

Caso haja interesse, ainda para o grupo de nível básico, é possível utilizar um molde sem imagens (Apêndice A, figura 57), montar o caleidociclo e então criar as imagens. Para isso, aconselha-se o uso de canetinhas, pois não haverá a necessidade de aplicar muita pressão ao desenhar como teria com lápis de cor.



---

# TEOREMA DE PITÁGORAS, LEI DOS COSSENO E RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA: APLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DO CALEIDOCICLO

---

---

Tradicionalmente, as aplicações do Teorema de Pitágoras estão relacionadas com alturas e sombras de prédios, portões de madeira com sarrafo na diagonal, estruturas de madeira para telhados, distância entre três cidades, rampas, escadas e escadarias, entre outras. Saindo um pouco dessa tradição, propomos a construção do molde dos caleidociclos como forma de perceber a necessidade do conhecimento do teorema e aplicá-lo nessa construção.

As seções a seguir, apresentam casos em que o teorema será utilizado na planificação dos caleidociclos. Durante a construção, há imagens para acompanhar o processo, mas os moldes em si, estão disponíveis no Apêndice [A](#).

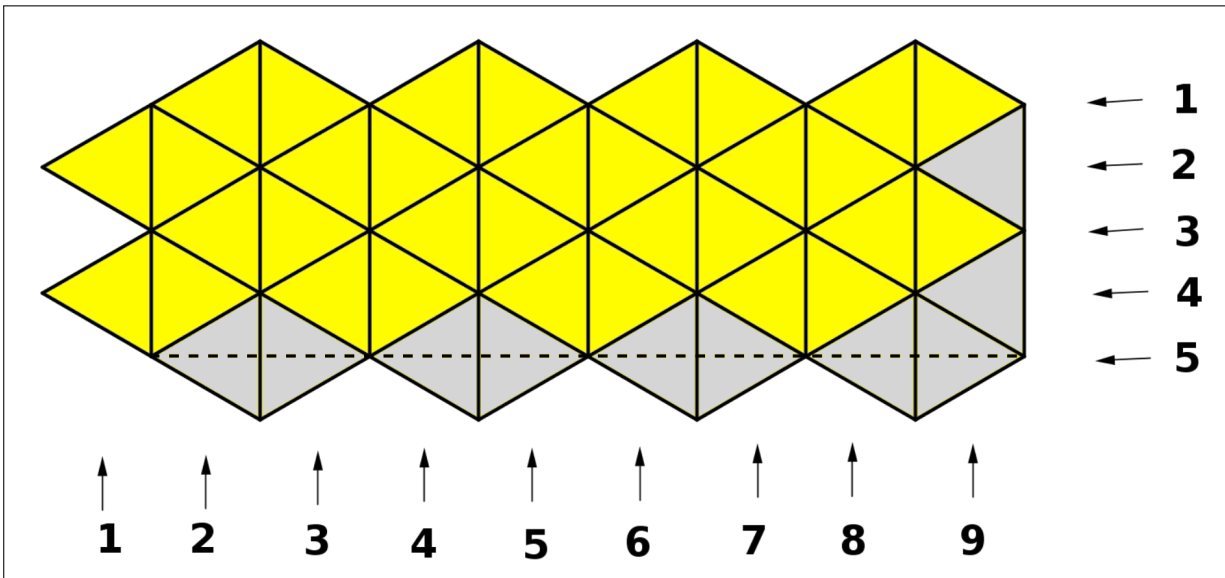
## 5.1 Caleidociclo com Tetraedro Regular: altura de face

A planificação para o tetraedro regular não tem segredos, pois como as faces dos tetraedros são triângulos equiláteros, basta criar uma malha com triângulos equiláteros.

O número de triângulos que devemos por na planificação, pode ser descrito usando linhas e colunas de triângulos equiláteros. Como visto no Capítulo [3](#), os caleidociclos com tetraedros regulares possuem número par de tetraedros sendo no mínimo oito. Assim, o número de colunas de triângulos da planificação deverá ser nove, uma a mais para usar como aba na colagem; o mesmo ocorre para as linhas, como são necessários quatro triângulos para fazer um tetraedro, utilizaremos cinco linhas de triângulos, uma a mais para usar como aba de colagem.

A planificação abaixo é de um caleidociclo com oito tetraedros regulares.

Figura 35 – Planificação com oito tetraedros regulares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como visto na figura 23, temos no corte transversal a aresta  $a$ , a altura de face  $h$  e a medida  $l$  do lado da base quadrada do anel que está tracejada. Mostraremos primeiro a relação entre a altura de face e a aresta.

Como a altura de um triângulo equilátero o divide em dois triângulos retângulos congruentes, usando o teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}
 a^2 &= (a/2)^2 + h^2 \\
 h^2 &= a^2 - (a/2)^2 \\
 h^2 &= \frac{4a^2 - a^2}{4} \\
 h &= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \\
 h &= \frac{a\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Relacionando o lado  $l$  da base do anel com a aresta  $a$

$$\begin{aligned}
 h^2 &= (l/2)^2 + (a/2)^2 \\
 h^2 &= \frac{l^2 + a^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Como  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{3a^2}{4} &= \frac{l^2 + a^2}{4} \\ 3a^2 - a^2 &= l^2 \\ 2a^2 &= l^2 \\ a\sqrt{2} &= l \\ a &= \frac{l\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Mais algumas mudanças de variáveis, e ficamos com  $h$  também em função de  $l$ .

$$\begin{aligned}h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{l\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} \\ h &= \frac{l\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Apesar de não ser necessário efetuar esses cálculos para a construção do molde dos caleidociclos de tetraedros regulares, a relação entre a altura de face, a aresta e o lado da base do anel serve de introdução para as planificações com tetraedros não regulares.

Para construir a planificação de qualquer outro caleidociclo com tetraedros regulares, basta acrescentar um número par de colunas na planificação anterior, ou seja, se quiséssemos fazer um caleidociclo com 14 tetraedros regulares, bastaria acrescentar seis colunas ao molde, resultando 15 colunas e 5 linhas de triângulos equiláteros. E o raciocínio é o mesmo para caleidociclos com quantidades maiores de tetraedros regulares.

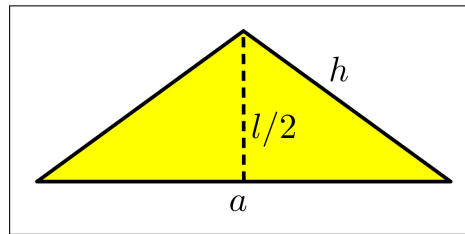
## 5.2 Caleidociclo fechado e as relações das medidas

Veremos que as relações entre as medidas dos tetraedros e o lado da base do anel são um pouco diferentes das vistas na seção anterior. Um dos fatos que leva a esse raciocínio é que, para conseguirmos fechar o caleidociclo, é necessário modificar o tetraedro e assim, modificar o ângulo dos vértices que se encontram no centro, como visto no capítulo 3, seção 3.2.

Consideraremos inicialmente o caleidociclo fechado de dez tetraedros para relacionarmos as medidas.

Na figura 70, da seção transversal do caleidociclo, temos a medida  $l$  do lado da base do anel, a aresta  $a$  e altura de face  $h$ . Primeiramente, destacamos um dos triângulos de base  $a$  e altura  $l/2$ :

Figura 36 – Triângulo isósceles de base  $a$  e altura  $l/2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ângulo  $\alpha$  tem medida  $36^\circ$ , pois divide a circunferência central do caleidociclo em 10 partes iguais. A partir da lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} h^2 &= h^2 + a^2 - 2ah \cos 36^\circ \\ 2ah \cos 36^\circ &= a^2 \\ h &= \frac{a^2}{2a \cos 36^\circ} \\ h &= \frac{a}{2 \cos 36^\circ}. \end{aligned}$$

Destacando agora, um dos triângulos retângulos formados pelos segmentos  $a/2, h$  e  $l/2$ , e utilizando o teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{a}{2 \cos 36^\circ}\right)^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{4} \\ \frac{a^2}{4 \cos^2 36^\circ} &= \frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{4} \\ \frac{a^2}{\cos^2 36^\circ} &= a^2 + l^2 \\ \frac{a^2 - a^2 \cos^2 36^\circ}{\cos^2 36^\circ} &= l^2 \\ a^2(1 - \cos^2 36^\circ) &= l^2 \cos^2 36^\circ \\ a^2 \sin^2 36^\circ &= l^2 \cos^2 36^\circ \\ a^2 &= \frac{l^2 \cos^2 36^\circ}{\sin^2 36^\circ} \\ a^2 &= l^2 \cot^2 36^\circ \\ a &= l \cot 36^\circ. \end{aligned}$$

Para que possamos deixar tudo em função de  $l$ , basta fazer mais uma substituição

$$\begin{aligned}h &= \frac{a}{2 \cos 36^\circ} \\h &= \frac{l \cot 36^\circ}{2 \cos 36^\circ} \\h &= \frac{l}{2 \operatorname{sen} 36^\circ}.\end{aligned}$$

Agora, para construir um caleidociclo fechado de dez tetraedros, basta definir a medida  $l$  do lado da base do anel pentagonal, pois

$$\begin{aligned}a &= l \cdot \cot 36^\circ \\h &= \frac{l}{2 \operatorname{sen} 36^\circ}.\end{aligned}$$

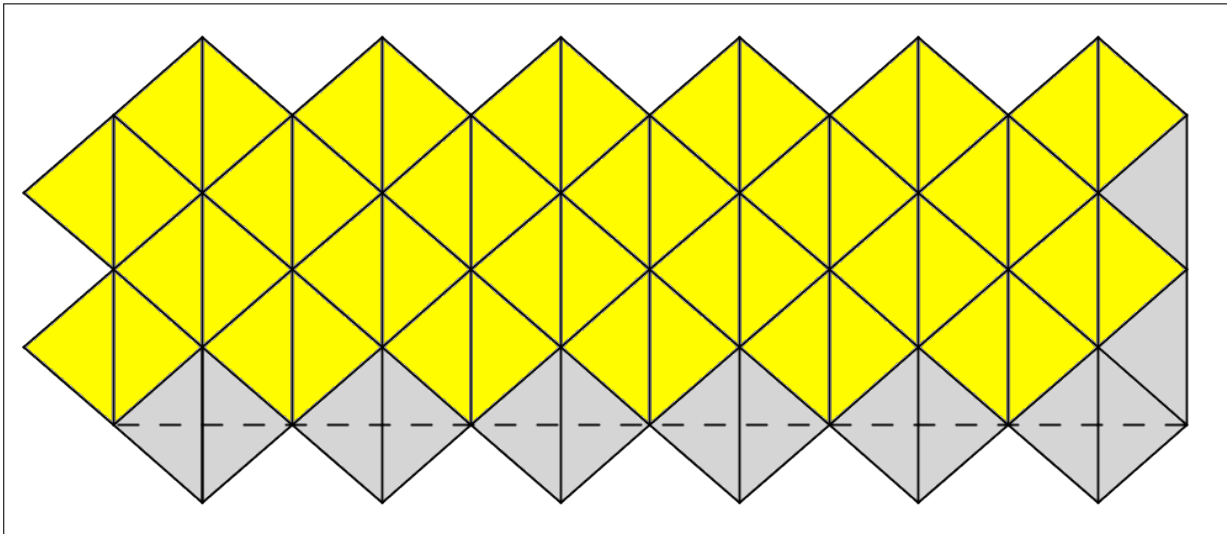
Podemos generalizar essas relações. Dado  $n$  o número de lados da base do anel, com  $n \geq 3$ , e  $l$  a medida do lado da base, temos

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{360^\circ}{2n} \\a &= l \cdot \cot \alpha \\h &= \frac{l}{2 \operatorname{sen} \alpha}.\end{aligned}$$

Assim, se quisermos fazer um caleidociclo fechado de base hexagonal de lado  $l = 5$  cm, teremos as medidas

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{360^\circ}{2 \cdot 6} = 30^\circ \\a &= 5 \cdot \cot 30^\circ \approx 8,66 \text{ cm} \\h &= \frac{5}{2 \operatorname{sen} 30^\circ} = 5 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Figura 37 – Planificação do caleidociclo fechado com 12 tetraedros (base hexagonal)



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5.3 Propostas de Atividades

Como nesse capítulo apresentamos conhecimentos matemáticos presentes no currículo do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio, apresentamos propostas diferentes para cada objetivo.

### 5.3.1 Ensino Fundamental: 8º e 9º anos

Material necessário:

- molde do caleidociclo de oito tetraedros regulares disponível no Apêndice A, figura 68
- lápis, borracha e papel (para os cálculos)
- régua milimetrada
- compasso

Primeiramente, entregue o molde aos alunos, seja individualmente ou em grupos, e peça para que recorte no contorno e montem o caleidociclo. Caso seja a primeira atividade com caleidociclo da turma, deve-se ter uma atenção especial para que façam todas as dobras corretas e a finalização com a colagem.

Depois que os alunos exploraram os movimentos do caleidociclo, o professor deve apresentar a definição de base do anel do caleidociclo, lembre-se que é possível mostrar a imagem 23 do corte transversal.

Após a definição da base do anel, deve-se questionar: “Como podemos garantir que a base do anel do caleidociclo tenha 10 cm de lado?”.

Caso nenhum aluno tenha sugerido a utilização da altura de face do caleidociclo, analise novamente a imagem 23 atentando para as medidas envolvidas.

As medidas  $h$  e  $a$  dos triângulos que aparecem na secção transversal, são respectivamente, da altura de face e da aresta dos tetraedros. Também é possível relacionar a medida  $l$  do lado da base do anel com o triângulo citado.

O professor pode informar a relação da altura de face  $h$  com a aresta  $a$ , que é  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  visto na seção 5.1, ou orientar os cálculos no triângulo equilátero para dedução dela.

Feito isso, deve-se iniciar o cálculo da relação entre a aresta  $a$  e o lado  $l$  observados na secção.

$$\begin{aligned} h^2 &= (l/2)^2 + (a/2)^2 \\ h^2 &= \frac{l^2 + a^2}{4}. \end{aligned}$$

Como  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

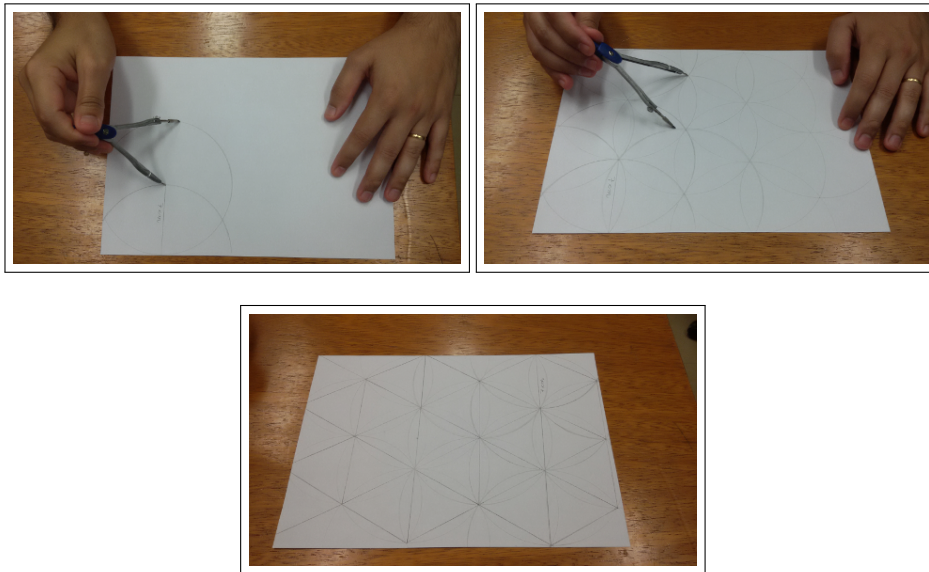
$$\begin{aligned} \frac{3a^2}{4} &= \frac{l^2 + a^2}{4} \\ 3a^2 - a^2 &= l^2 \\ 2a^2 &= l^2 \\ a\sqrt{2} &= l \\ a &= \frac{l\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para que o lado  $l$  da base do anel seja 10 cm, é necessário que

$$\begin{aligned} a &= \frac{l\sqrt{2}}{2} \\ a &= \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} \\ a &= 5 \cdot \sqrt{2} \\ a &\approx 7 \text{ cm.} \end{aligned}$$

E com ajuda de um compasso, os alunos podem fazer a malha triangular da medida desejada sempre utilizando a ponta seca do compasso nas intersecções das circunferências, como mostram as figuras a seguir.

Figura 38 – Sequência da construção da malha



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dependendo da medida adotada para o lado  $l$  da base do anel, a folha A4 poderá ser pequena para compor uma malha suficiente para o caleidociclo. Sugerimos que utilizem a folha A3 para esses casos ou incentivem os alunos a juntarem duas malhas para completarem o caleidociclo.

### 5.3.2 Ensino Médio: 1ª série

Material necessário:

- molde do caleidociclo disponível no Apêndice A, figuras 68 e 69
- tesoura
- cola
- lápis de cor (ou canetinhas)
- sulfite
- régua
- compasso

Primeiramente, entregue o molde aos alunos, seja individualmente ou em grupos, e peça para que recortem no contorno e montem o caleidociclo. Caso seja a primeira atividade com



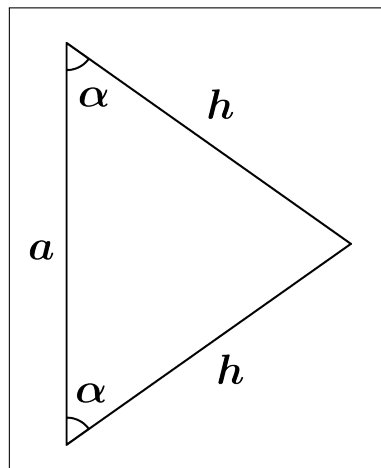
caleidociclo da turma, deve-se ter uma atenção especial para que façam todas as dobras corretas e a finalização com a colagem.

Depois dos alunos explorarem os caleidociclos, provavelmente já terão percebido que, apesar dos dois terem oito tetraedros, um deles é fechado no centro do anel e o outro não. A partir dessa constatação, o professor deve aguçar a curiosidade questionando qual deve ser a relação entre as medidas do triângulo da malha, para que seja garantido que o caleidociclo seja de centro fechado.

O professor pode apresentar o cálculo utilizado para definir a forma geral das medidas, mostrando a utilização da lei dos cossenos.

Seja  $n$ , o número de lados da base do anel;  $l$ , a medida do lado da base do anel;  $a$ , a aresta comum a dois tetraedros do caleidociclo;  $h$ , a altura de face dos tetraedros com base  $a$ ;  $\alpha$ , é o ângulo formado entre  $h$  e  $a$ .

Figura 39 – Notações para o triângulo isósceles



Fonte: Elaborada pelo autor.

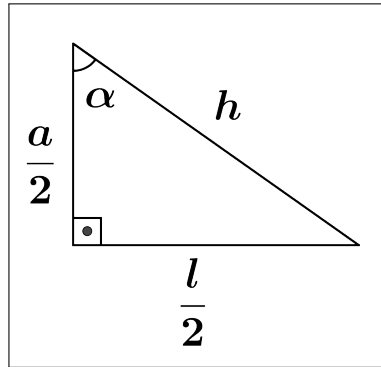
Usando as notações da Figura 39 e utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} h^2 &= h^2 + a^2 - 2ah \cos \alpha \\ 2ah \cos \alpha &= a^2 \\ h &= \frac{a^2}{2a \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$h = \frac{a}{2 \cos \alpha}. \quad (I)$$

Agora, por meio do triângulo retângulo

Figura 40 – Metade do triângulo isósceles da Figura 39



Fonte: Elaborada pelo autor.

e utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2. \quad (\text{II})$$

Substituindo I em II, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} &= \frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{4} \\ \frac{a^2}{\cos^2\alpha} - a^2 &= l^2 \\ \frac{a^2 - a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= l^2 \\ \frac{a^2(1 - \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} &= l^2 \end{aligned}$$

e utilizando a relação fundamental da trigonometria, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= l^2 \\ a^2 \sin^2\alpha &= l^2 \cos^2\alpha \\ a^2 &= \frac{l^2 \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ a^2 &= l^2 \cot^2\alpha \\ a &= l \cot\alpha. \end{aligned}$$

Deixando  $h$  em função de  $l$ , temos:

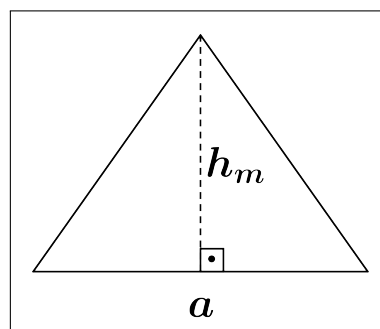
$$h = \frac{l \cot \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$h = l \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

$$h = \frac{l}{2 \sin \alpha}.$$

Assim, a malha a ser construída deve ser de triângulos isósceles de base  $a = l \cot \alpha$ ,  $h_m = \frac{l}{2 \sin \alpha}$  e  $\alpha = \frac{360}{2n}$ .

Figura 41 – Triângulo Isósceles da Malha



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base nesses dados, definidos o número  $n$  de lados e a medida  $l$  do lado do anel do caleidociclo, peça aos alunos para calcularem os valores de  $\alpha$ ,  $a$  e  $h$ .

Por exemplo, se  $n = 6$  e  $l = 3$  cm, temos:

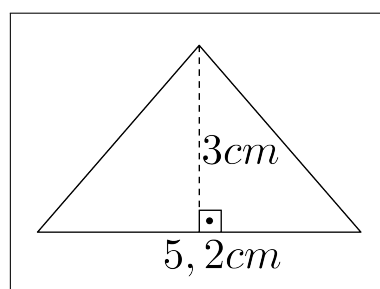
$$\alpha = 30^\circ$$

$$a \approx 5,2 \text{ cm}$$

$$h_m = 3 \text{ cm}.$$

E o triângulo base para a malha é

Figura 42 – Triângulo Isósceles base para malha



Fonte: Elaborada pelo autor.

De forma semelhante à proposta feita anteriormente para os 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, o professor pode entregar a folha de sulfite e deixar que eles criem uma malha, utilizando a régua e compasso, com as medidas que quiserem ou que forem eleitas pela turma.

Existe a possibilidade do professor ir induzindo a turma a chegar nas relações descritas acima, porém, isso depende muito do nível de aprendizagem da turma que apenas o professor poderá avaliar e decidir o que for melhor, para que a atividade não se torne desinteressante.

---

## CALEIDOCICLO: VOLUME E ÁREA DE SUPERFÍCIE

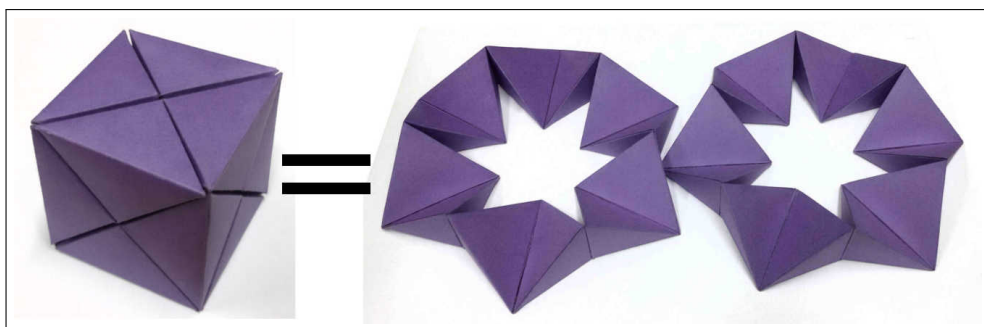
---

As habilidades matemáticas envolvidas nos cálculos de volume e área de superfície estão presentes no currículo da 2ª série do Ensino Médio do Estado de São Paulo. Nele, apresenta-se o cálculo do volume e área de prismas, pirâmides e cilindros.

Apresentamos alguns caleidociclos que podem ser usados para trabalhar com essas habilidades.

### 6.1 O Milagre Shinsei

Figura 43 – Milagre Shinsei e seus caleidociclos

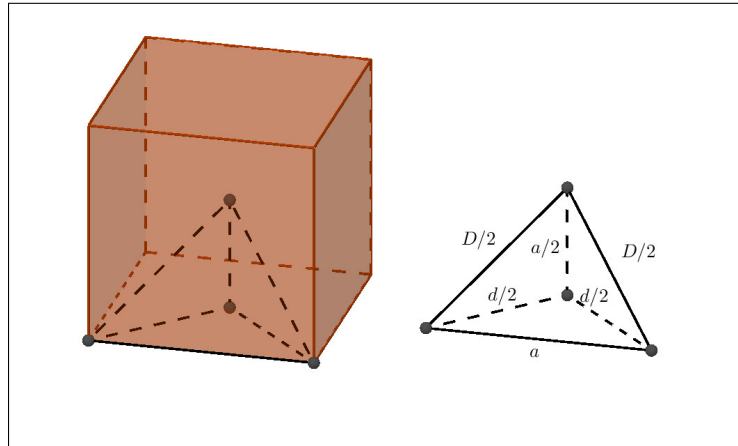


Fonte: Elaborada pelo autor.

É composto por dois caleidociclos abertos cada um contendo doze tetraedros não regulares. Juntos, esses caleidociclos podem formar um cubo. A partir do cubo formado por eles, é possível calcular uma aproximação do volume do caleidociclo. O tetraedro utilizado é especial, pois três de suas faces são triângulos retângulos.

As medidas necessárias para a construção do tetraedro desse caleidociclo, podem ser retiradas a partir do cubo que se deseja formar com os dois caleidociclos.

Figura 44 – Medidas do tetraedro a partir do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor.

$a$  = aresta do cubo

$d$  = diagonal do quadrado (face do cubo)

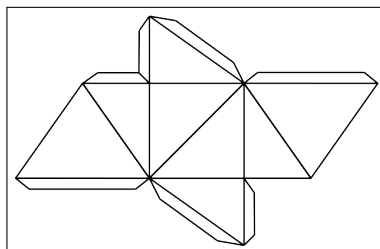
$D$  = diagonal do cubo

Dada a medida  $a$  da aresta, podemos calcular as medidas necessárias para se construir uma planificação para o caleidociclo. Pois

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}.$$

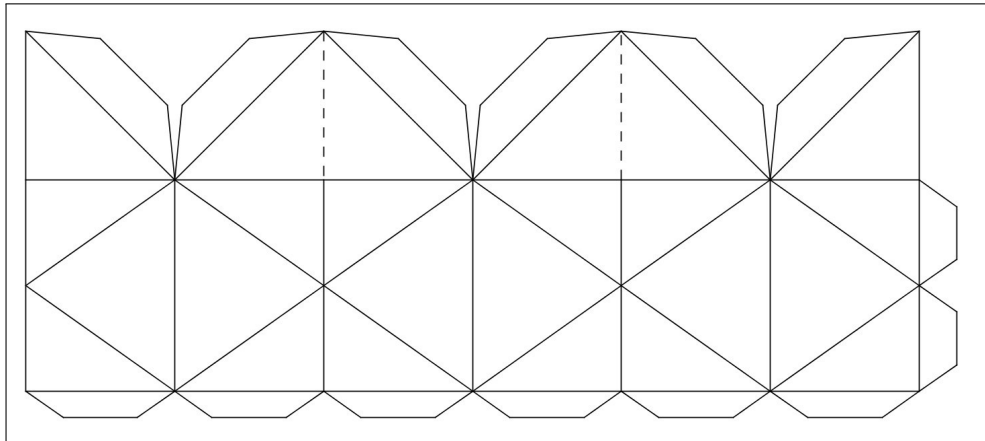
Figura 45 – Planificação de dois tetraedros do Milagre Shinsei



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um molde que pode ser usado é a planificação de metade de um dos caleidociclos (Figura 46), sendo assim necessário quatro desses moldes para construir os dois caleidociclos que compõem o Milagre Shinsei.

Figura 46 – Planificação de metade do caleidociclo



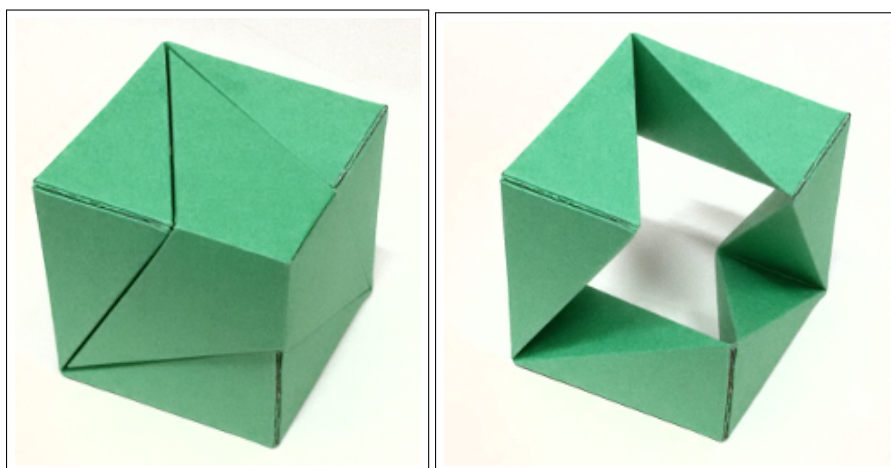
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse molde, devemos ficar atentos aos dois segmentos pontilhados que indicam corte no molde além do corte no contorno. Sugerimos também que seja unida as duas metades antes de ir fechando os tetraedros.

## 6.2 Cubo Invertível

Este caleidociclo é formado por seis tetraedros de faces idênticas. Cada face tem formato de triângulo retângulo e em dois desses triângulos ocorrem que um dos catetos tem metade da medida do outro cateto.

Figura 47 – Cubo invertível



(a) Cubo Invertível 01

(b) Cubo Invertível 02



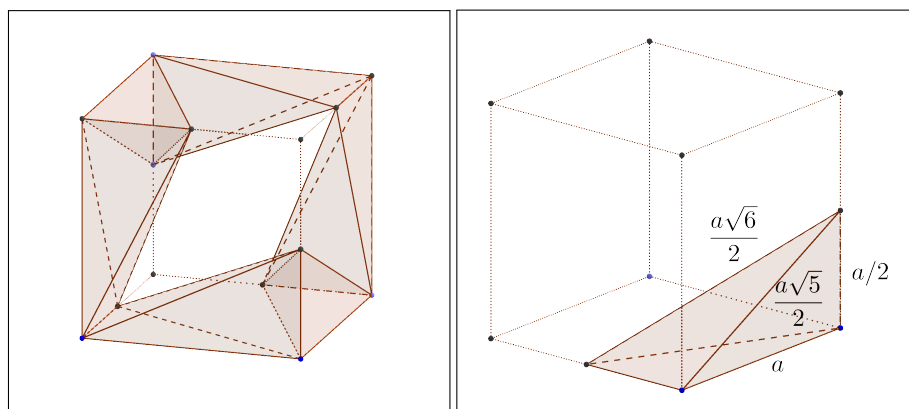
(c) Cubo Invertível 03

Fonte: Elaborada pelo autor.

O nome dele vem do fato de lembrar a forma de um cubo em uma determinada posição de sua torção. Além disso, ele pode formar um cubo ao completar o espaço com outras duas peças chamadas *raio do cubo invertível* que também está disponibilizada no Apêndice A figura 60.

As medidas para a construção da planificação deste caleidociclo, pode ser feita a partir do cubo no qual ele está contido como mostram as figuras a seguir.

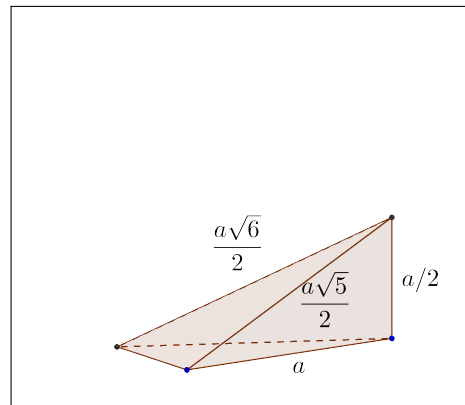
Figura 48 – Cubo invertível e suas medidas



(a) Tetraedro dentro do cubo

(b) Tetraedro destacado





(c)

Fonte: Elaborada pelo autor.

As medidas foram calculadas utilizando o Teorema de Pitágoras. Nos triângulos retângulos pertencentes as faces do cubo, denotando por  $h_1$  a hipotenusa, temos:

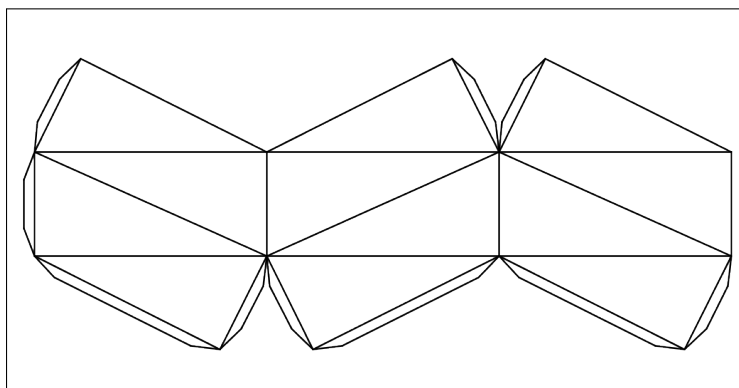
$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \\ h_1^2 &= \frac{a^2}{4} + a^2 \\ h_1 &= \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \\ h_1 &= \frac{a\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Para os triângulos retângulos do tetraedro que estão no interior do cubo e, denotando por  $h_2$  a hipotenusa deles, temos:

$$\begin{aligned} h_2^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ h_2^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} \\ h_2 &= \sqrt{\frac{6a^2}{4}} \\ h_2 &= \frac{a\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Apresentamos metade do molde para que se possa verificar uma possível montagem.

Figura 49 – Planificação de metade do Cubo Invertível



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembramos que todos os moldes utilizados estão disponíveis no Apêndice A.

## 6.3 Propostas de Atividades

Dividimos esta seção em duas partes para que possamos analisar os casos para cada um dos caleidociclos apresentados nas seções 6.1 e 6.2.

### 6.3.1 O Milagre Shinsei

Material necessário:

- molde do Milagre Shinsei disponível no Apêndice A figura 63
- tesoura
- cola

O professor deve distribuir um molde para cada aluno, pedir que monte o molde e auxiliar nesta tarefa para que o caleidociclo fique o melhor possível. Há a possibilidade de deixar que cada aluno faça seus dois caleidociclos ou que cada aluno faça um deles e depois formem duplas para compor o cubo, ou ainda, em casos de necessidade de reduzir ao máximo o tempo da construção, em quartetos, em que cada aluno recortará e dobrará metade de um dos caleidociclos. Assim, a cada dois alunos haverá um caleidociclo e a cada quatro alunos será possível compor um cubo.

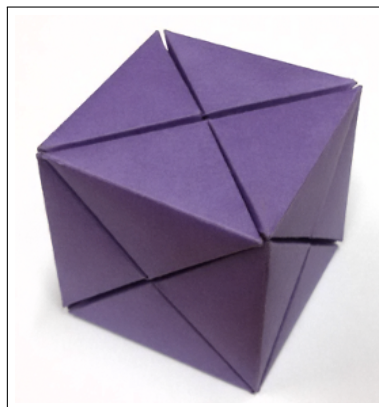
Figura 50 – Os dois caleidociclos do Milagre Shinsei



Fonte: Elaborada pelo autor.

Feitos os caleidociclos, peça aos alunos que tentem formar um cubo utilizando dois caleidociclos. Provavelmente alguns irão descobrir a possibilidade de formar outros poliedros nessa tentativa, isso será interessante para as próximas etapas, mas o professor deverá insistir que concluem a etapa da construção do cubo.

Figura 51 – Milagre Shinsei



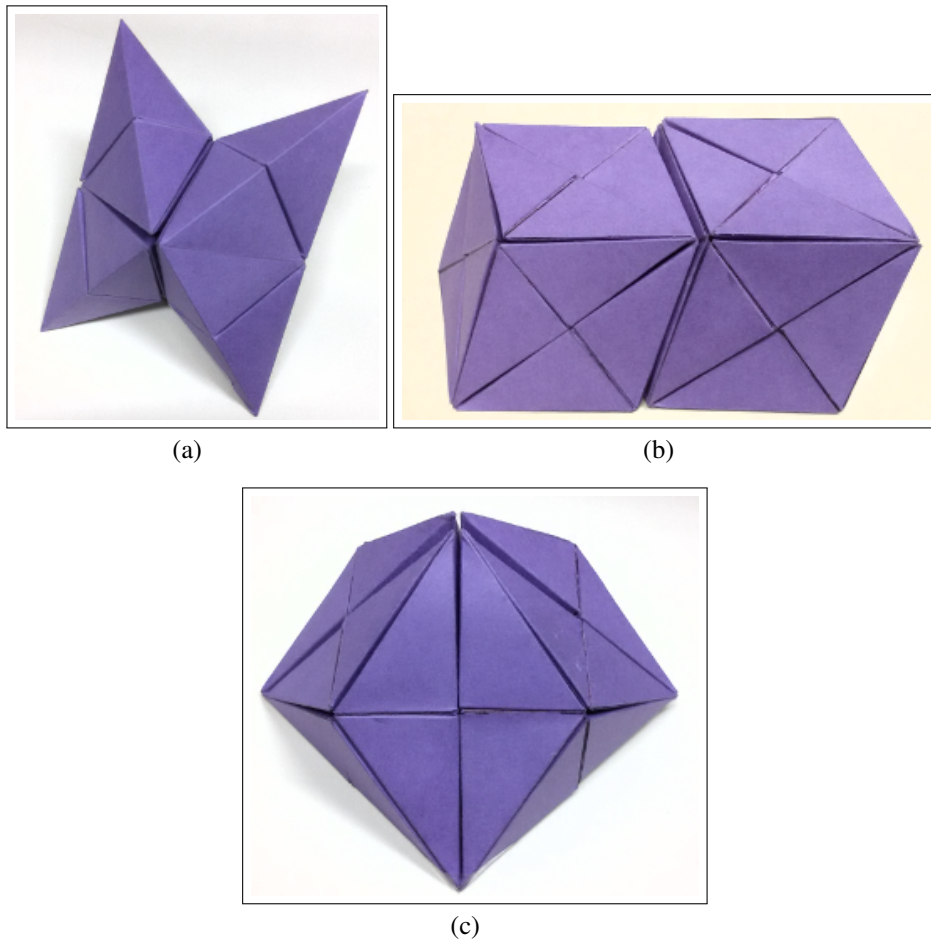
Fonte: Elaborada pelo autor.

As medidas do molde pode variar durante a impressão dos mesmos, por isso é importante que não se apeguem as medidas reais nos poliedros, mas sim a medida da aresta que deve ser adotada para os cálculos das áreas. A adoção da medida pode ser feita pelo professor ou sugerida pelos alunos.

Após a construção do cubo e adotada a medida da aresta, peça aos alunos que calculem o volume e a área do cubo. Incentive-os a concluir que um caleidociclo possui volume igual a metade do volume do cubo e que cada tetraedro dos caleidociclos possui  $\frac{1}{24}$  do volume do cubo.

Feito isso, é hora de modificar o poliedro. Peça a eles que formem outro poliedro utilizando os dois caleidociclos. Abaixo temos alguns poliedros que podem aparecer.

Figura 52 – Milagre Shinsei Modificado

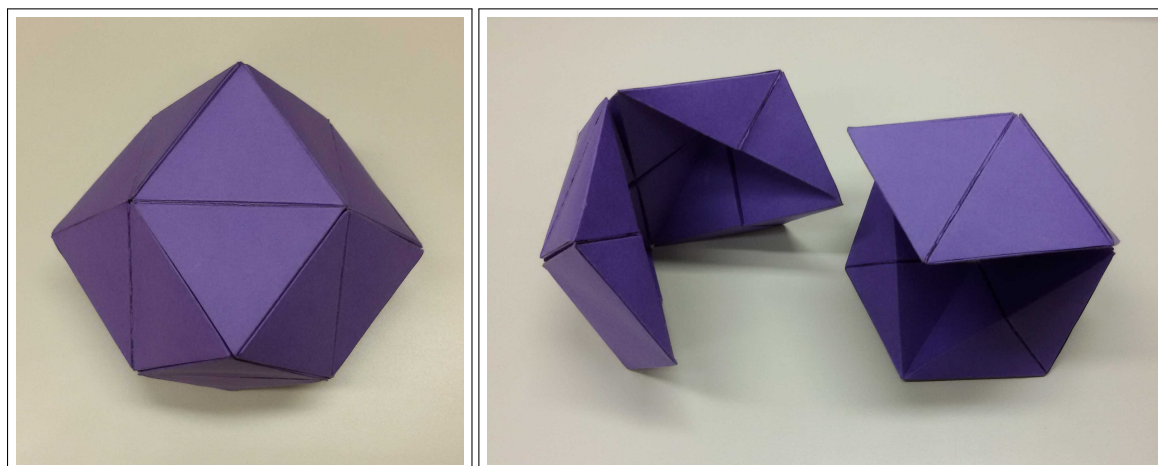


Fonte: Elaborada pelo autor.

Se o professor desejar, poderá relembrar as definições de poliedro convexo e não-convexo conforme eles forem formando os poliedros.

Após completarem algum poliedro, explore a ideia do volume desses poliedros serem iguais ao do cubo, independente do formato, atentando apenas para que não haja nenhum espaço interno ao novo poliedro que não contenha tetraedros. Veja um exemplo não desejado:

Figura 53 – Poliedro com “buraco” interno



(a) Aparentemente correto

(b) Aberto, com “buracos”

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, questione sobre a área de superfície dos poliedros. Peça que calculem as áreas e analisem se confere com a resposta dada anteriormente. É nesse momento que deve ficar claro que mesmo tendo volume constante, a área de superfície pode variar de acordo com o poliedro formado.

O professor pode avaliar a participação dos alunos ou ainda pedir que respondam as perguntas em uma folha para registro de atividade avaliativa, assim como pode ser registrado as imagens com câmera fotográfica e publicá-las nos murais, blog, jornal ou página da escola. O material ainda pode ser aproveitado em possíveis feiras de ciências.

### 6.3.2 *Cubo Invertível*

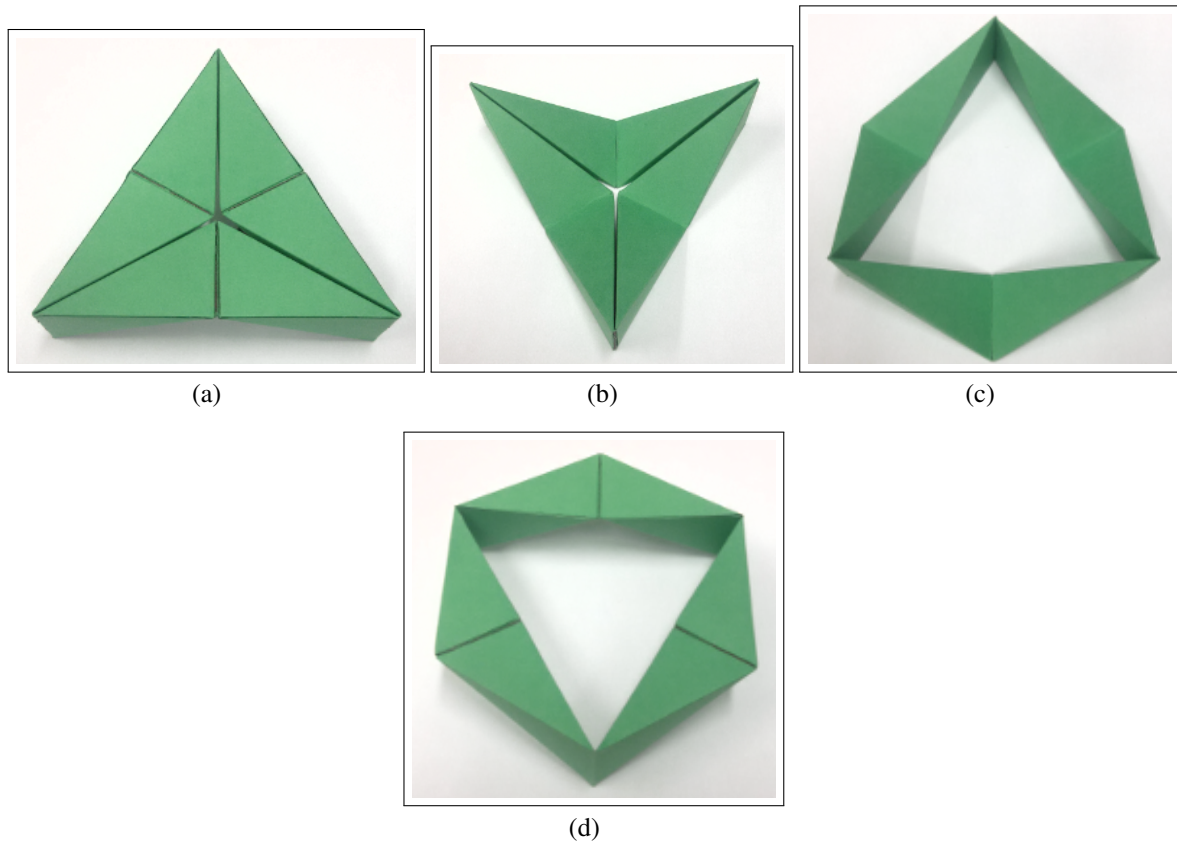
Material necessário:

- molde do Cubo Invertível disponível no Apêndice A figura 59
- tesoura
- cola

Assim que distribuir o molde para todos os alunos, peça para recortarem e colarem formando o caleidociclo. É possível, assim como na proposta anterior, que se faça em duplas para diminuir o tempo gasto na montagem.

O professor pode pedir que os alunos movimentem o caleidociclo de forma a encontrarem o formato de triângulos equiláteros em quatro formas diferentes, seja vazado ou preenchido.

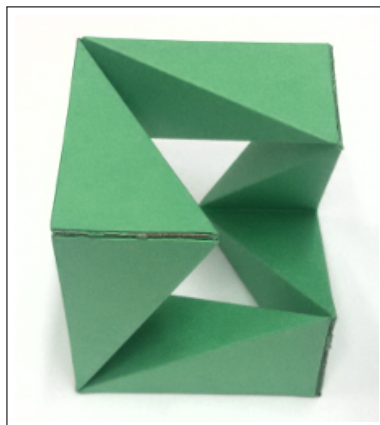
Figura 54 – Quatro posições com forma de triângulo equiláteros



Fonte: Elaborada pelo autor.

Depois de manipular o caleidociclo com a atividade anterior, peça aos alunos que movimentem o caleidociclo até encontrarem uma posição que lembre um cubo; é aconselhável que fique claro que o caleidociclo sozinho não irá formar um cubo, mas que, em determinada posição ele aparenta parte de um cubo.

Figura 55 – O caleidociclo lembrando um cubo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes de calcular o volume do caleidociclo, é interessante propor aos alunos uma estimativa aproximada do volume em relação ao volume do cubo aparente. Feito isso, defina uma medida da aresta e cobre o cálculo do volume do caleidociclo a partir do volume de um dos tetraedros, lembrando que as medidas do tetraedro, em relação à aresta do cubo, podem ser encontradas na seção 6.2.

Por fim, peça que mostrem que o volume do caleidociclo é um terço do volume do cubo.

Assim como na proposta anterior, o professor pode utilizar essas atividades como avaliações.





---

## CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

O objetivo principal deste trabalho foi alcançado, ou seja, apresentamos propostas de atividades com caleidociclos diferenciados que possam contribuir com a aprendizagem de habilidades e competências matemáticas. As propostas variaram conforme o nível de ensino e ano, além de variações de acordo com o nível de aprendizado das turmas.

Durante a sistematização de atividades já aplicadas anteriormente por nós, surgiram novas ideias que foram elaboradas e apresentadas neste trabalho, outras possibilidades se mostraram durante algumas demonstrações e generalizações, como por exemplo a utilização da lei dos cossenos para generalizar medidas necessárias na construção de malhas de caleidociclos fechados.

Deixamos evidente que há uma necessidade de aprofundamento das relações matemáticas presentes nos caleidociclos e possíveis demonstrações em afirmações relacionadas ao número de tetraedros necessário para se formar um caleidociclo, ou definir e explorar os caleidociclos cujo centro se alterna entre fechado e aberto, ou ainda definir e explorar caleidociclos com anel retorcido.

O estudo dessas variações dos caleidociclos, além do valor científico matemático, pode trazer novas aplicações de habilidades e competências possíveis de serem trabalhadas nos Ensinos Fundamental e Médio.



## REFERÊNCIAS

---

---

ALVES, C. M. F. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2014. Nenhuma citação no texto.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas: Uma estratégia para as aulas de matemática**. 6<sup>a</sup>. ed. São Paulo: CAEM-IME-USP, 2007. v. 6. 100 p. (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática - CAEM, v. 6). Citado na página 23.

BRASIL. Ministério da Educação. **Simetria** — [S.l.:s.n., 20 – –]. (Série Plano de Aula; Matemática). 10 p. Nenhuma citação no texto.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação - Produção de Conteúdos Educacionais Digitais Multimídia para Matemática. **Caleidociclos** — [S.l.:s.n., 20 – –]. (Série Guia do Professor: conteúdos digitais). Disponível em: <[http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/midias/experimentos/Geometria\\_e\\_arte/index.html](http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/midias/experimentos/Geometria_e_arte/index.html)>. Acesso em: 24 set. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

BRASIL, L. A. S. **Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da Matemática**. [S.l.]: Forense-Universitária, 1977. Citado na página 23.

BUSH, L. M. A group theoretic approach to kaleidocycles and cubeocycles. **The Journal of the Summer Undergraduate Mathematical Science Research Institute (SUMSRI)**, Miami, p. 24, 2003. Disponível em: <<http://www.units.muohio.edu/sumsri/sumj/2003/kaleidocycles.pdf>>. Acesso em: 24 set. 2014. Nenhuma citação no texto.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: Da teoria à prática**. 8<sup>a</sup>. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001. 120 p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Citado na página 22.

DUVAL, R. [**Aprendizagem Matemática**]. Estrasburgo: [s.n.], 1972. Citado na página 23.

FOLDPLAY. **Make your very own photo kaleidocycle**. Disponível em: <<http://foldplay.com/kaleidocycle.action>>. Acesso em: 24 set. 2014. Nenhuma citação no texto.

FRAISSE, P.; PIAGET, J. **Traité de Psychologie Expérimentale**. Paris: Presses Universitaires de France - PUF, [19 – – ?]. 224 p. (Traité Psycholo, Tome 7). Citado na página 23.

JOHNSON, D. A.; RISING, G. R. **Guidelines for Teaching Mathematics**. Belmont, Califórnia: Wadsworth Publishing Company, 1972. Citado na página 21.

LIMA, E. L. **Isometrias**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 94 p. (Coleção do Professor de Matemática). Nenhuma citação no texto.

MATHEMATISCHE BASTELEIN. **Kaleidocycles**. Disponível em: <<http://www.mathematische-basteleien.de/kaleidocycles.htm>>. Acesso em: 24 set. 2014. Nenhuma citação no texto.

- MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 214 p. Nenhuma citação no texto.
- MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. 7<sup>a</sup>. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006. 176 p. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico). Citado na página 22.
- OLIVEIRA, S. R. de. Espelhos e simetrias. **Matemática Multimídia**, p. 12, [20 – –]. Nenhuma citação no texto.
- PAPER MODELS OF POLYHEDRA. **Pictures of Kaleidocycles**. Disponível em: <<http://www.korthalsaltes.com/cuadros.php?type=ka>>. Acesso em: 24 set. 2014. Nenhuma citação no texto.
- REIS, E. R. S. dos. **Estudo de simetria e seu ensino no nível fundamental e médio**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, Universidade de São Paulo - USP, São Carlos, 2013. Nenhuma citação no texto.
- SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** — 1. ed. atual. São Paulo: SE, 2011. 72 p. Nenhuma citação no texto.
- SILVA, A. M. **Simetrias planas e alguns problemas de ladrilhamento**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013. Nenhuma citação no texto.
- THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM. **Mathematics and Computer Science Library**. Disponível em: <<http://www.ma.huji.ac.il/~library/models.htm#plastic>>. Acesso em: 25 set. 2014. Nenhuma citação no texto.
- TINOCO, M. J. **Isometrias**. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2012. Nenhuma citação no texto.
- VITTI, C. M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2<sup>a</sup>. ed. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1999. 103 p. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. 168 p. (Coleção Psicologia e Pedagogia). Nenhuma citação no texto.
- VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 13. ed. São Paulo: Icone, 2014. 228 p. (Coleção Educação Crítica). Nenhuma citação no texto.
- WALKER, W.; SCHATTSCHEIDER, D. **Caleidociclos de M. C. Escher**. São Paulo: Taschen Editora, 1997. 40 p. Nenhuma citação no texto.
- WEYL, H. **Symmetry**. 5. ed. Princeton, New Jersey: Princenton University Press, 1952. 168 p. Nenhuma citação no texto.

---

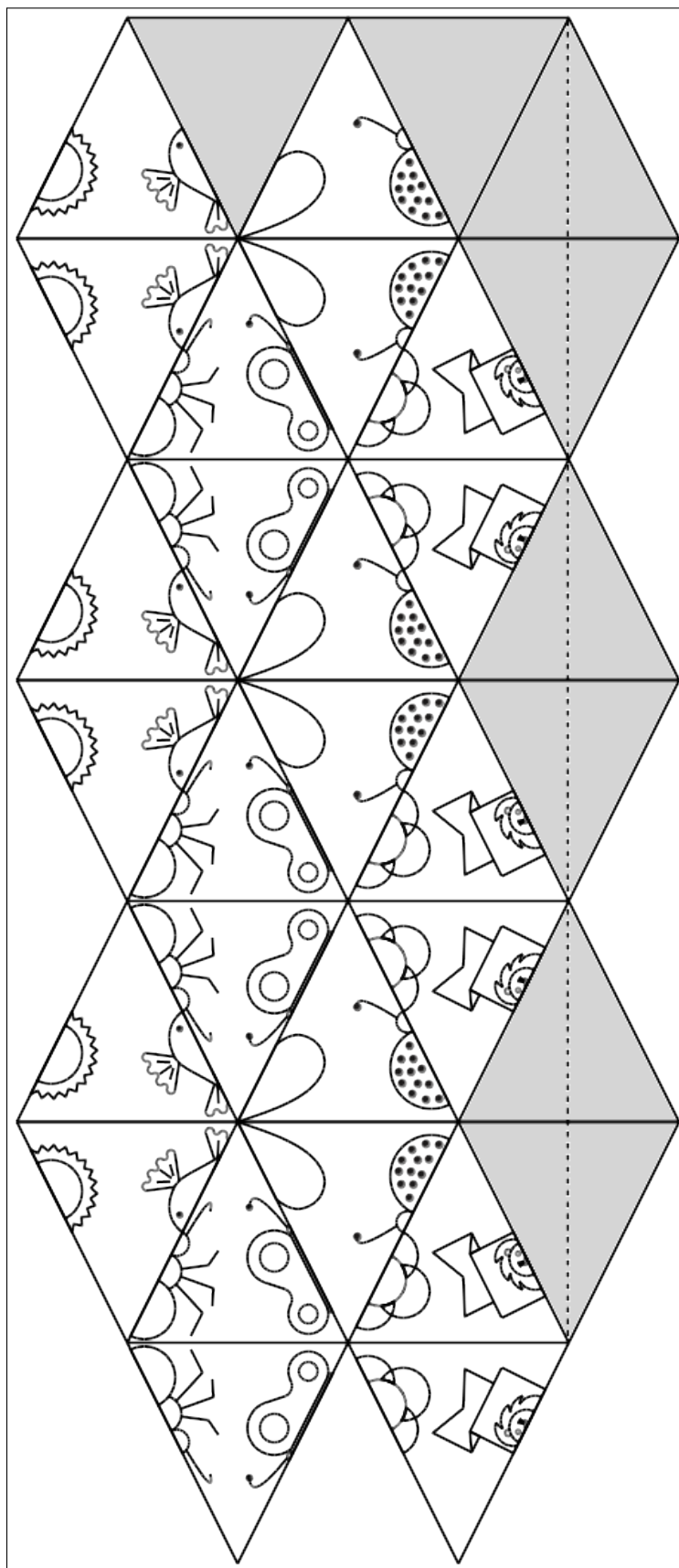
## MOLDES DOS CALEIDOCICLOS

---

---

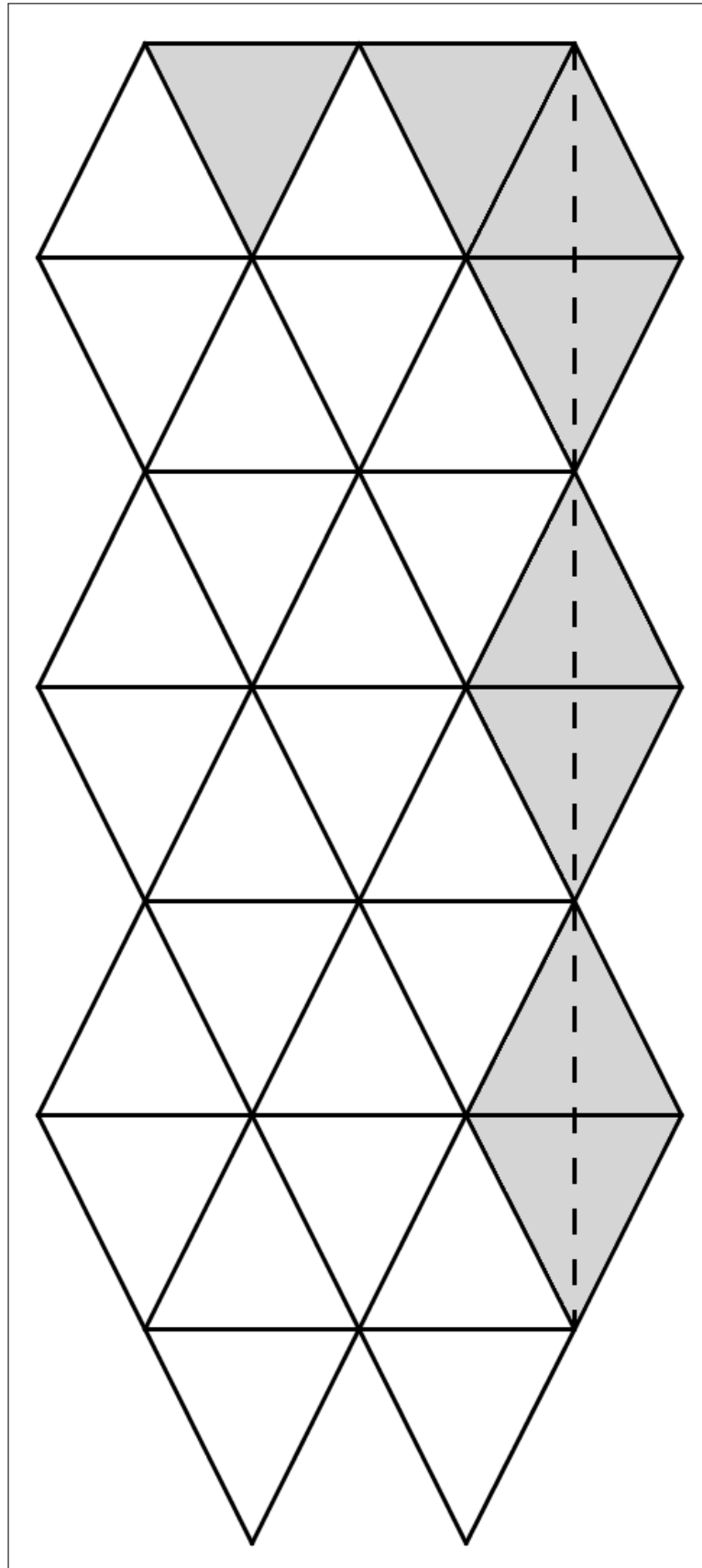
Os moldes dos caleidociclos usados neste trabalho estão a seguir. Existem muitos outros moldes ou sites em que se possa encontrar outros moldes. Nas referências existem alguns links onde poderão ser encontradas mais opções.

Figura 56 – Caleidociclo de Seis Tetraedros com Desenhos



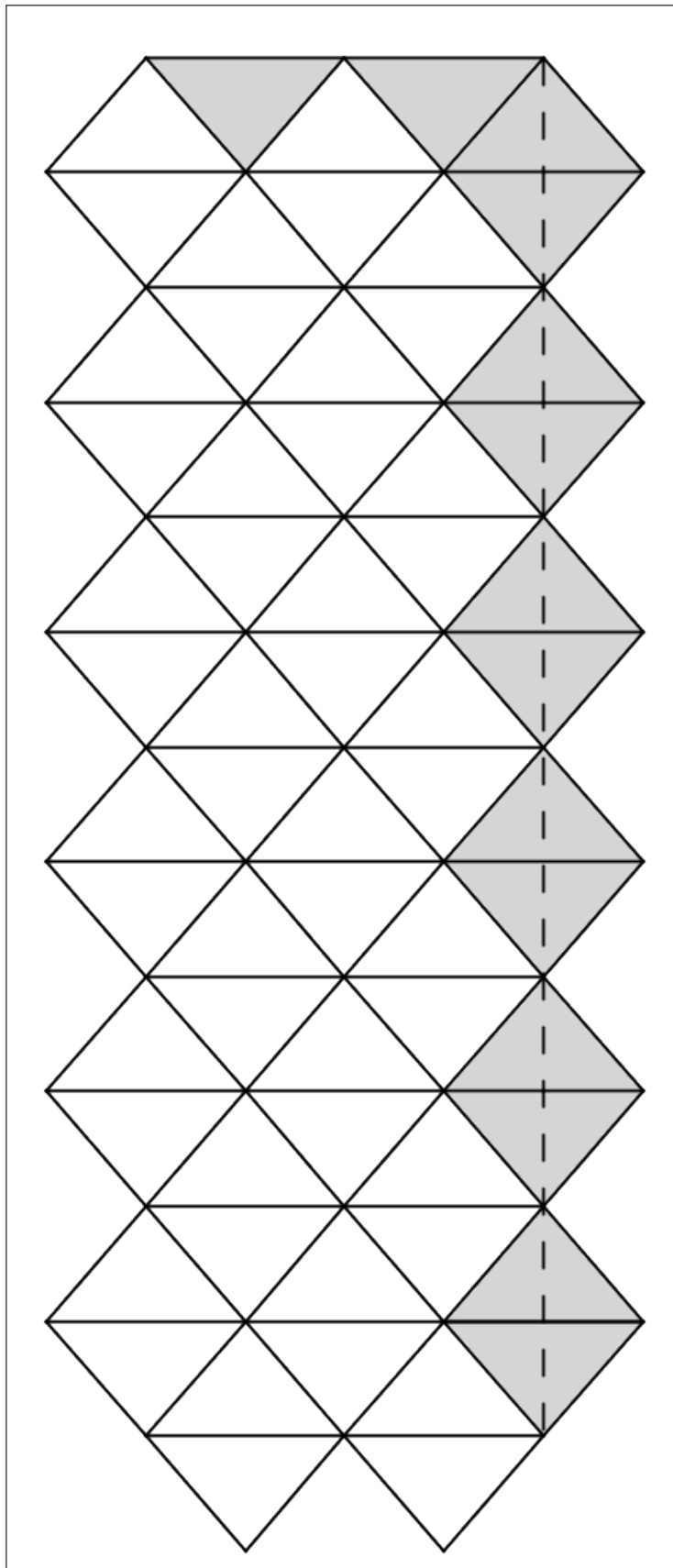
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 57 – Caleidociclo de Seis Tetraedros sem Desenhos



Fonte: Elaborada pelo autor.

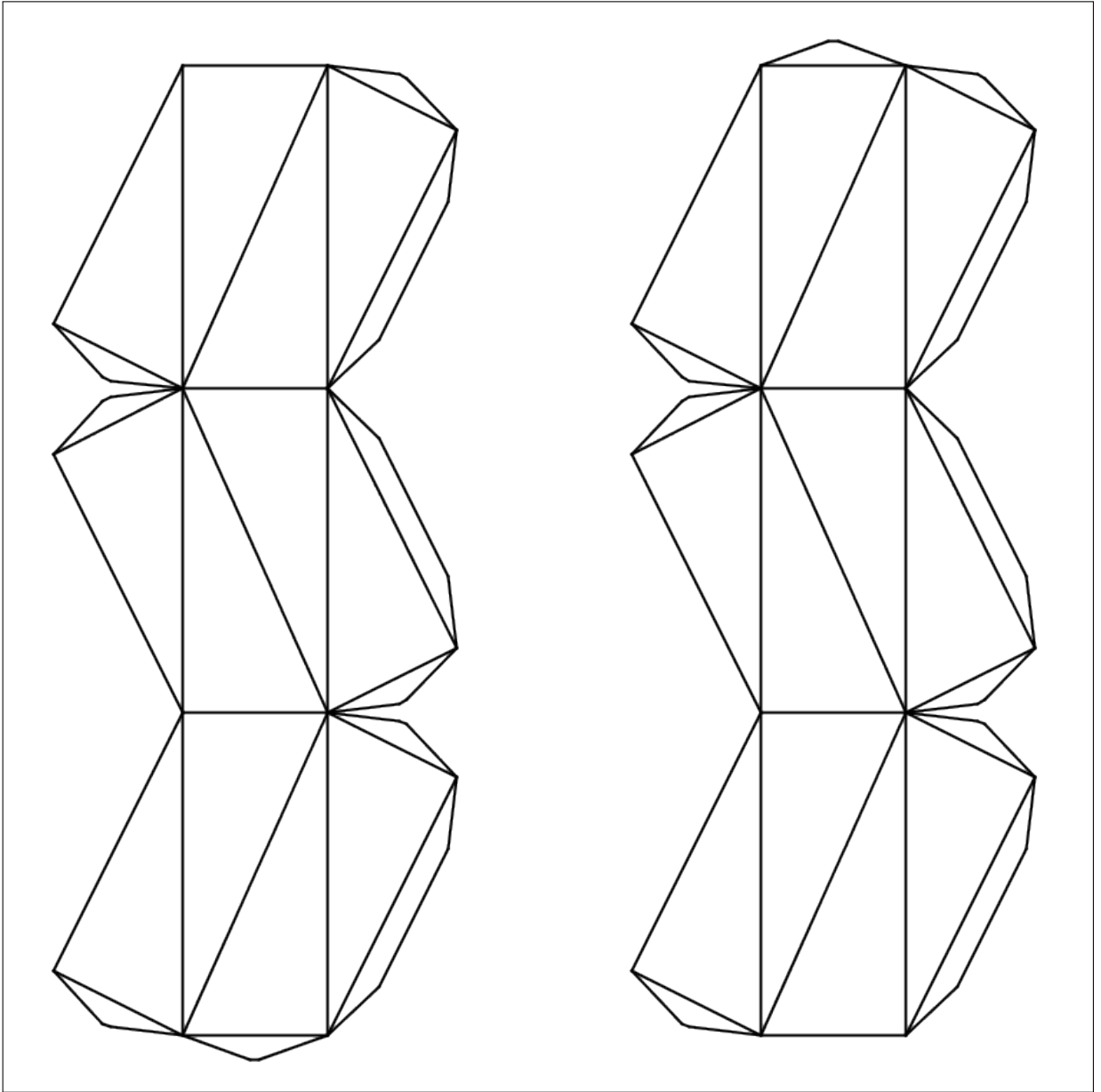
Figura 58 – Caleidociclo Fechado com 12 Tetraedros



Fonte: Elaborada pelo autor.

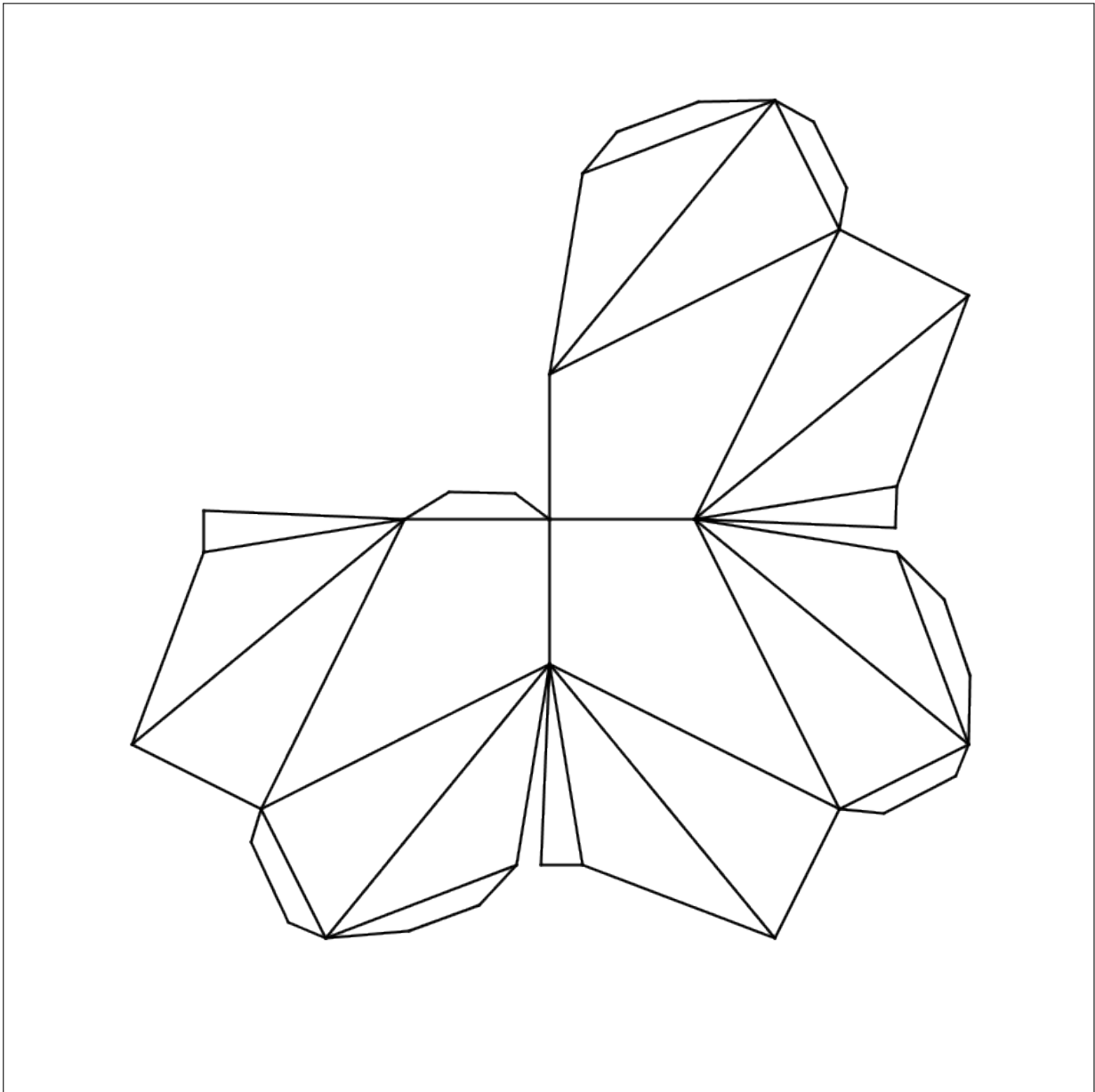


Figura 59 – Caleidociclo Cubo Invertível



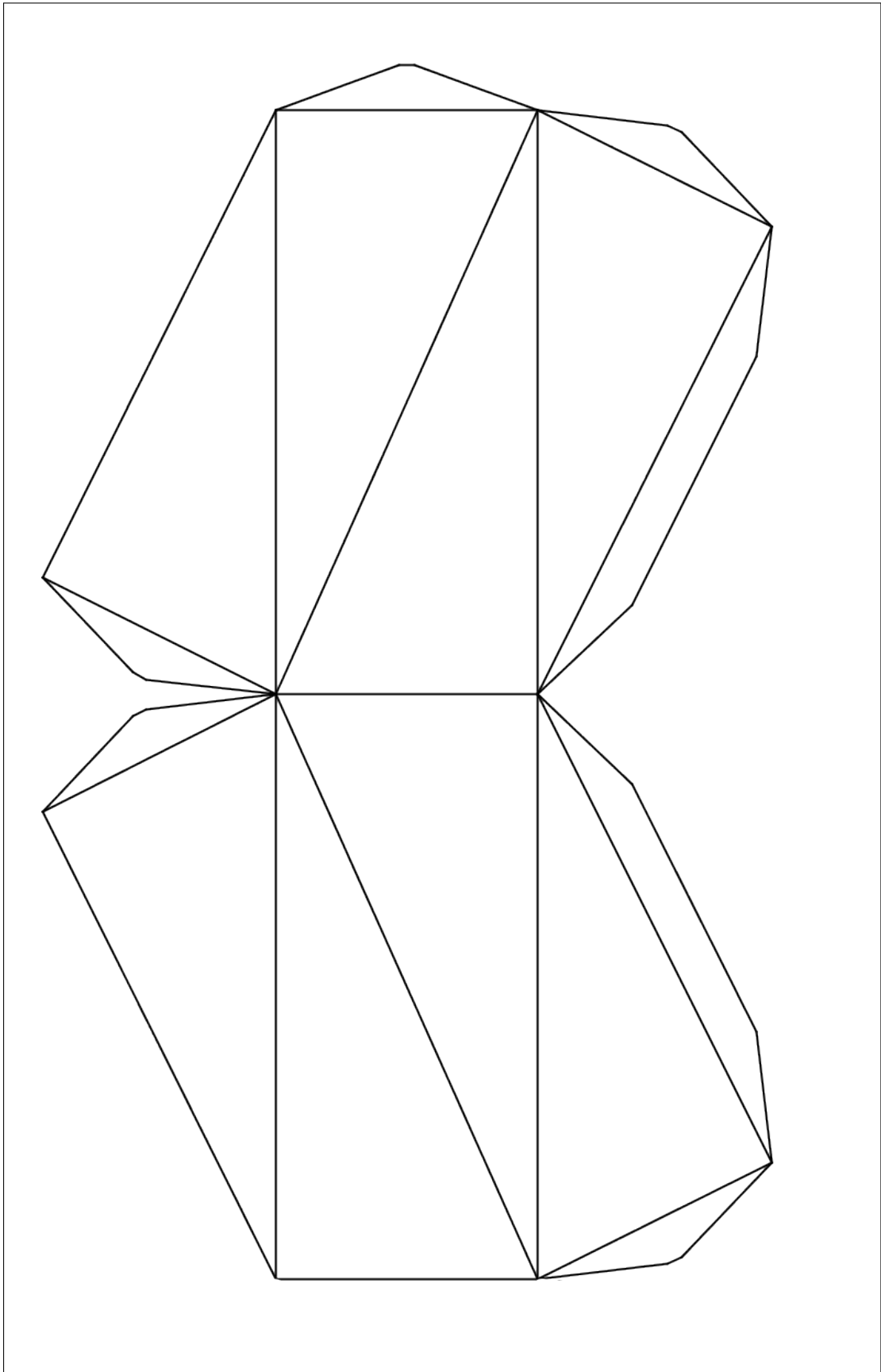
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 – Raio Do Cubo Invertível



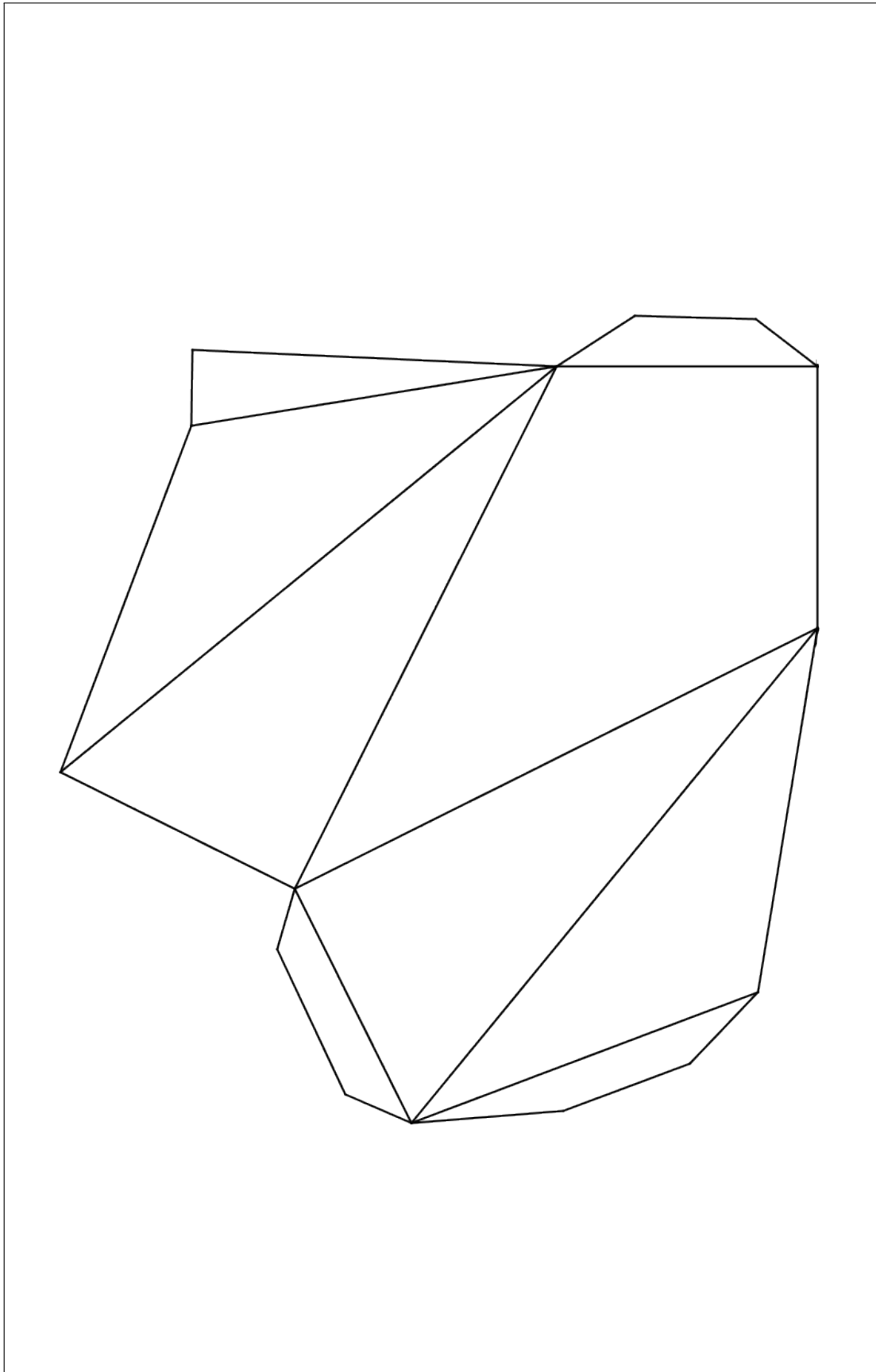
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 61 – Terça Parte do Caleidociclo Cubo Invertível



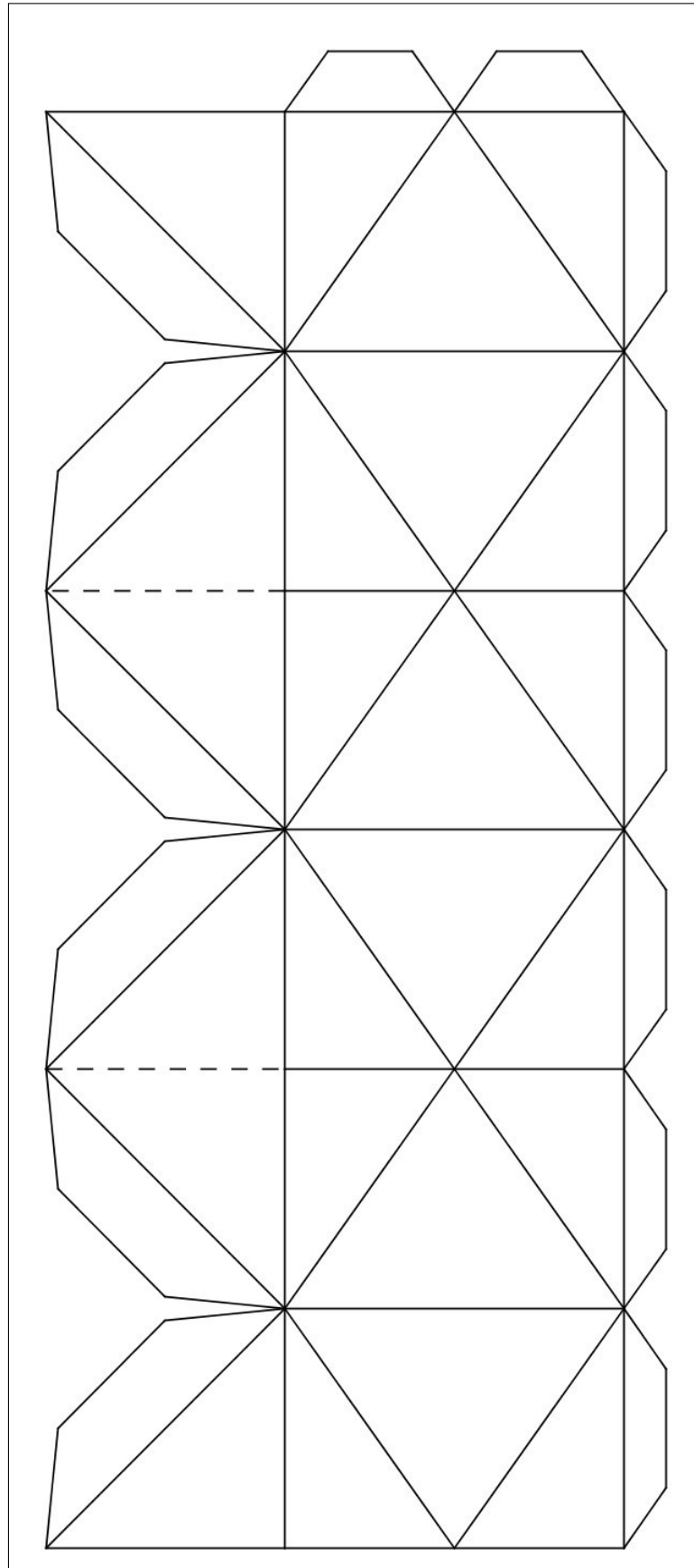
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Terça Parte do Raio do Cubo Invertível



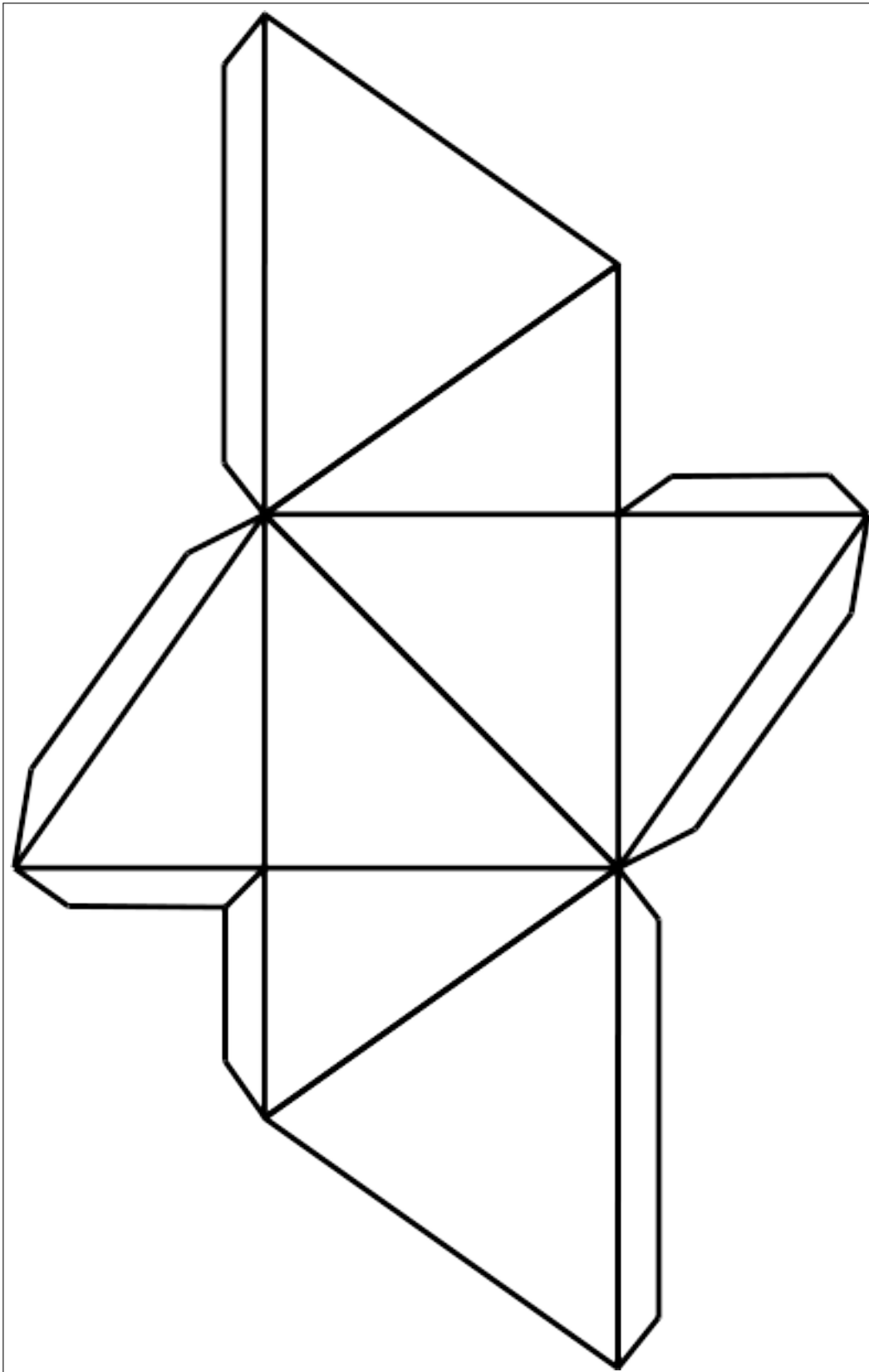
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 63 – Caleidociclo Milagre de Shinsei - Metade do Molde



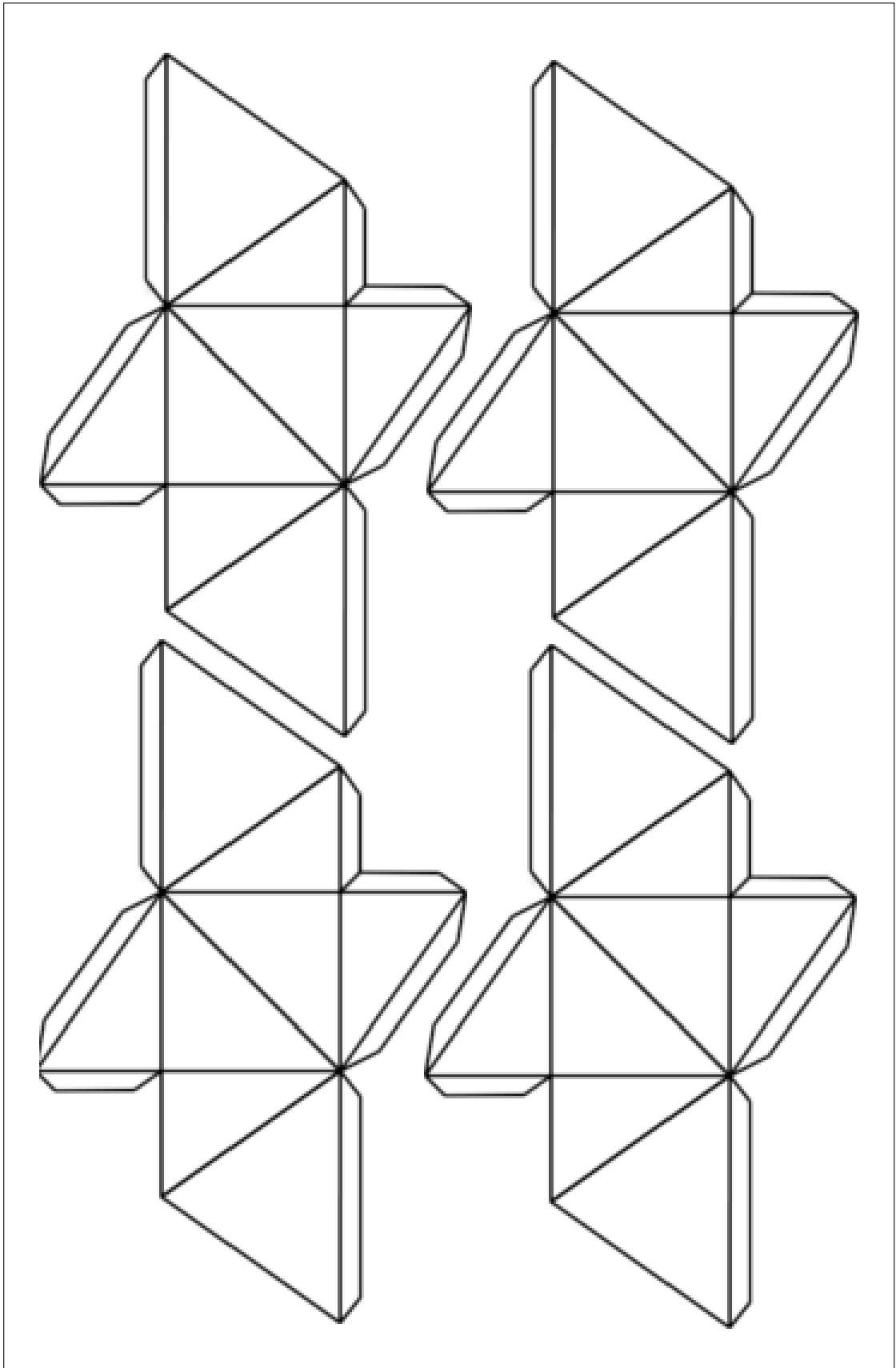
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Caleidociclo Milagre de Shinsei - Molde com dois tetraedros



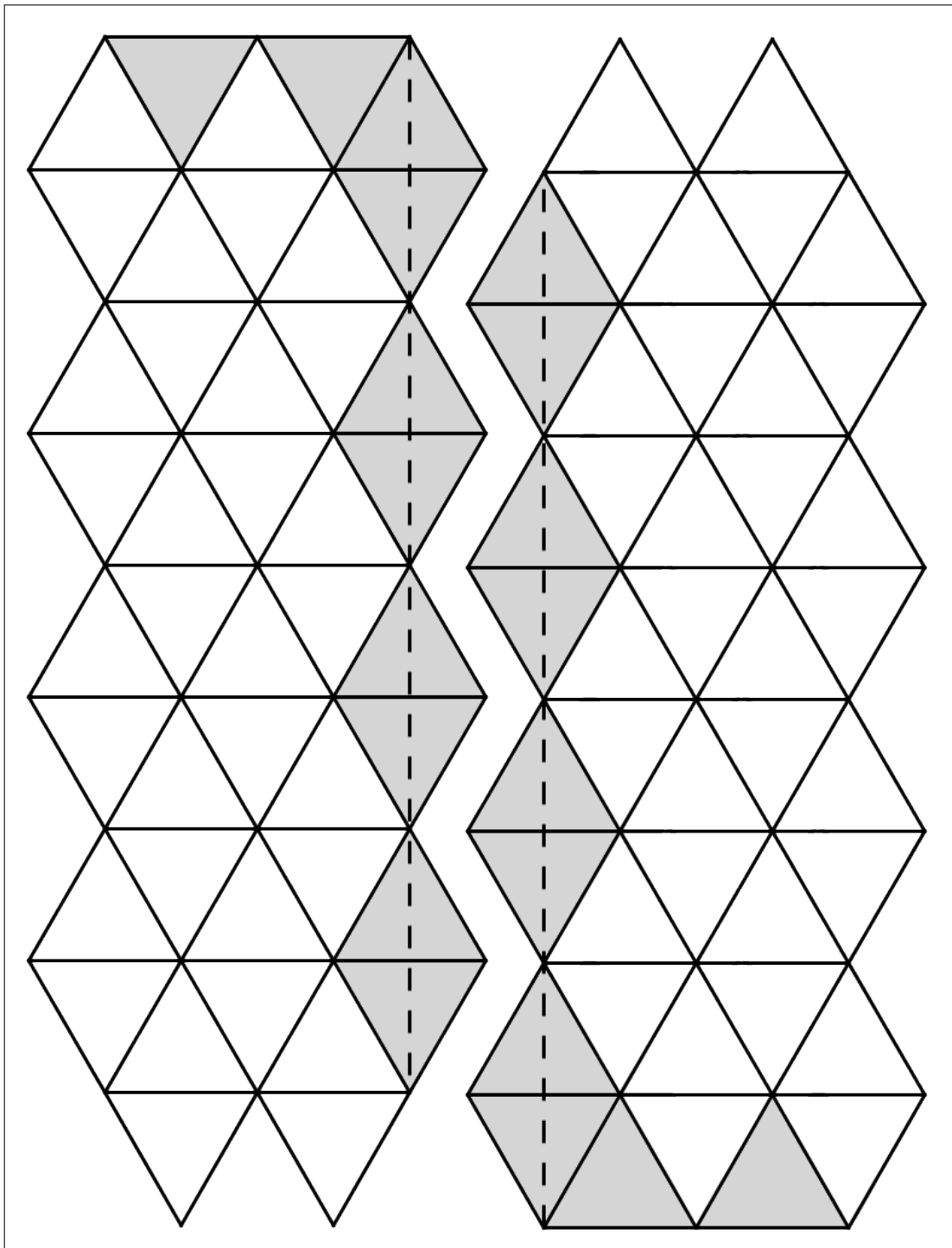
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Caleidociclo Milagre de Shinsei - 4 Moldes com dois tetraedros



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 – Caleidociclo de 8 Tetraedros Regulares

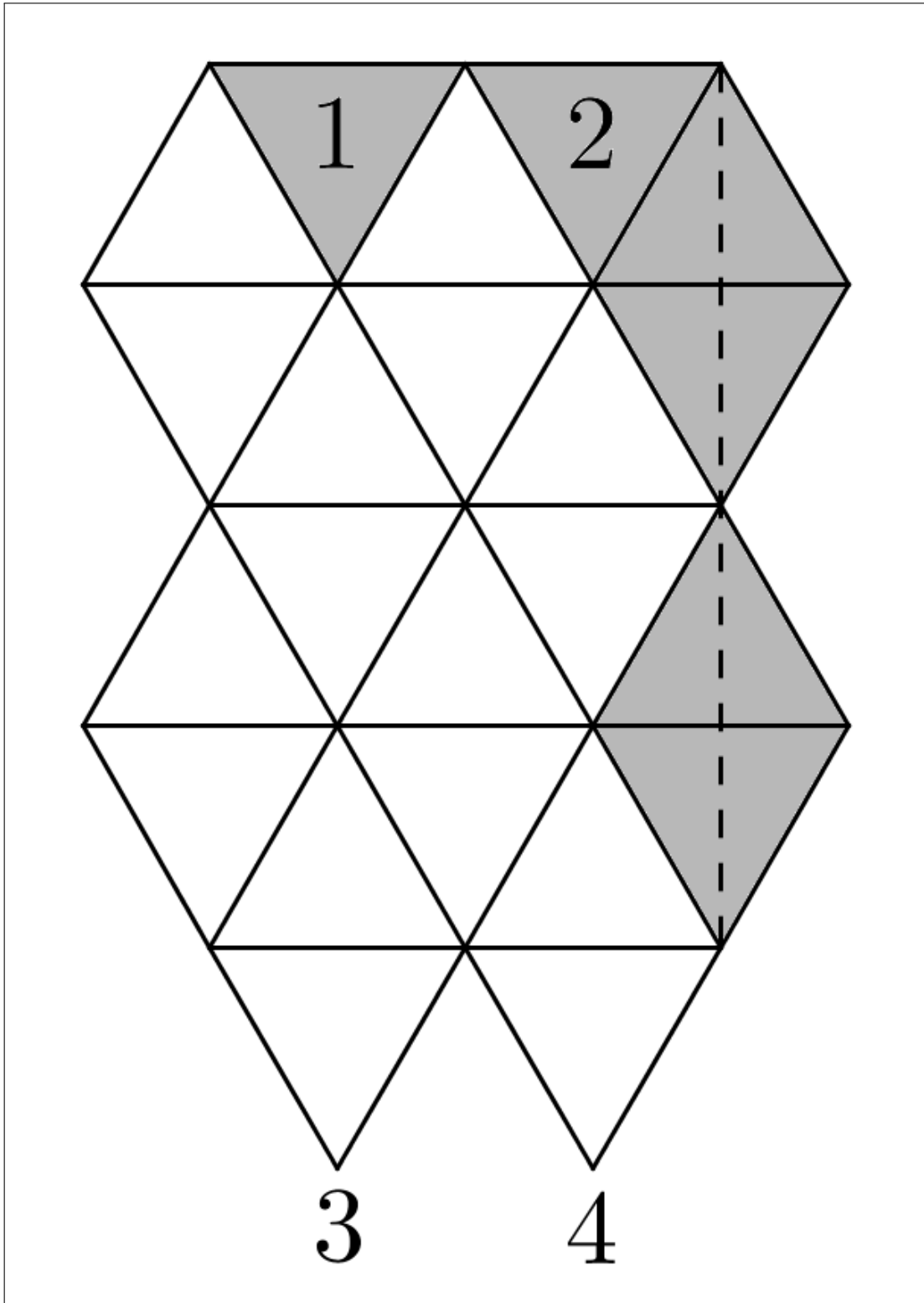


Fonte: Elaborada pelo autor.



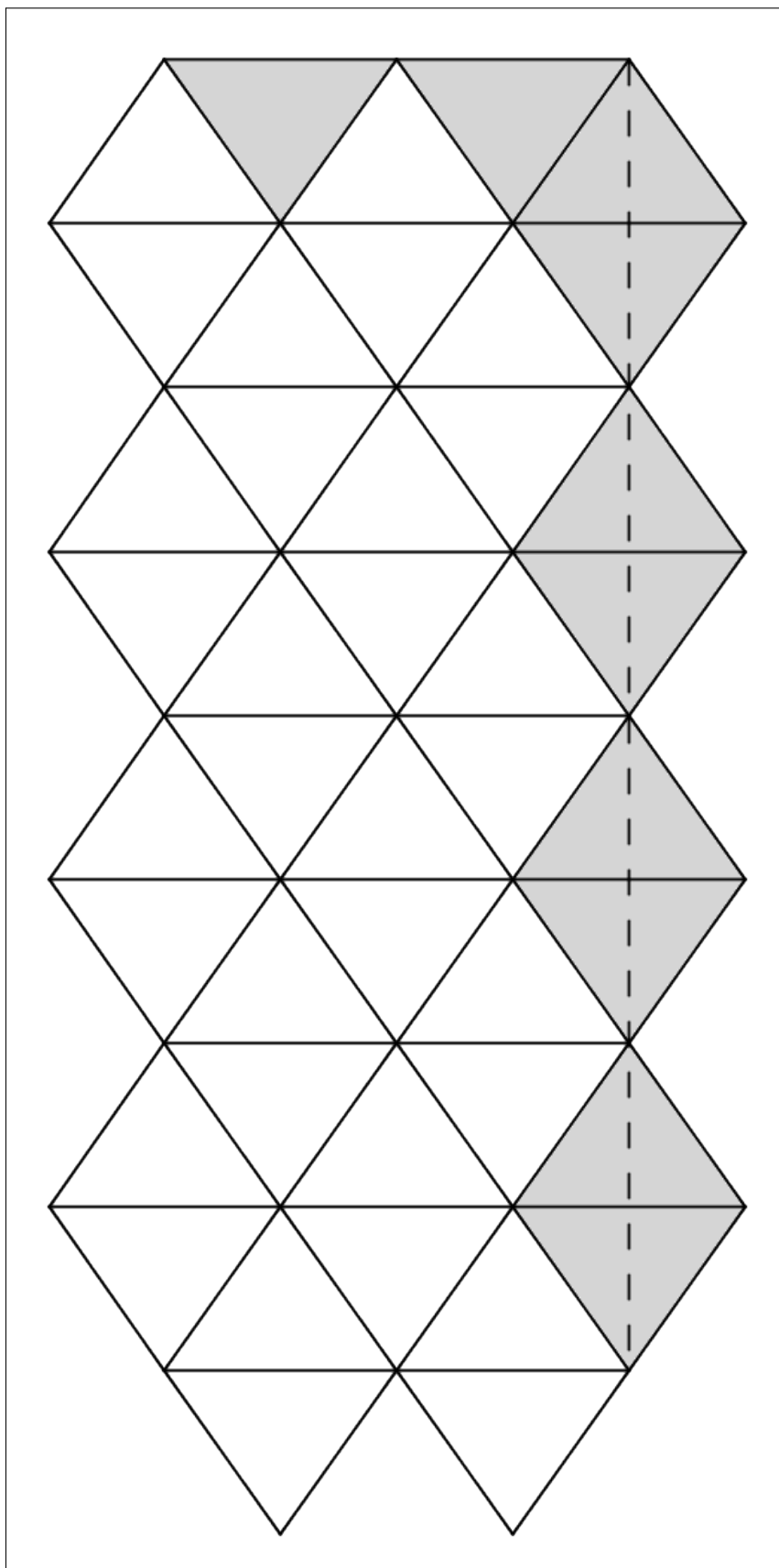


Figura 68 – Metade do Caleidociclo de 8 Tetraedros Regulares - Parte 2



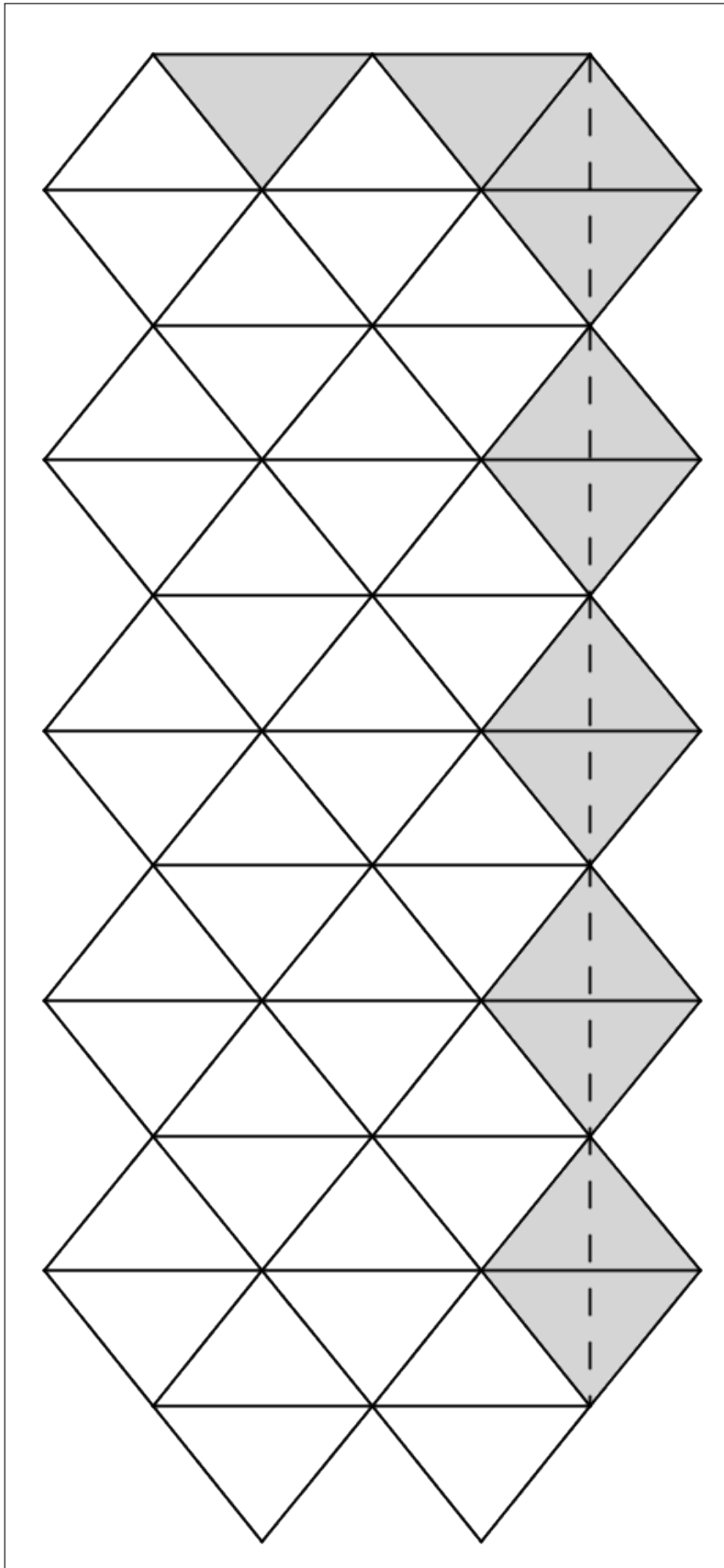
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 69 – Caleidociclo Fechado de 8 Tetraedros



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 70 – Caleidociclo Fechado de 10 Tetraedros



Fonte: Elaborada pelo autor.

---

## SÓLIDOS LOUCOS

---

Sólidos loucos são figuras geométricas espaciais com as seguintes características:

- compostos de sólidos menores;
- os componentes estão ligados por arestas;
- os componentes podem ser movimentados formando outros sólidos.

Os sólidos loucos podem ser construídos facilmente com papel. No meio digital, é conhecido como *crazy paper* ... onde o nome final varia. Os mais comuns são *cylinder* e *cube*.

Esses sólidos podem ser utilizados para atividades com alunos desde 6<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental para trabalhar com figuras tridimensionais até o final do Ensino Médio para relacionar volume e área de superfície. Não é obrigatório encaixar sua construção com algum conteúdo específico, pois alguns alunos não tiveram a oportunidade de ver algo diferente nos anos que seriam mais indicados e por isso trazem o lúdico e nova perspectiva do conhecimento matemático a qualquer momento da vida escolar ou depois dela.

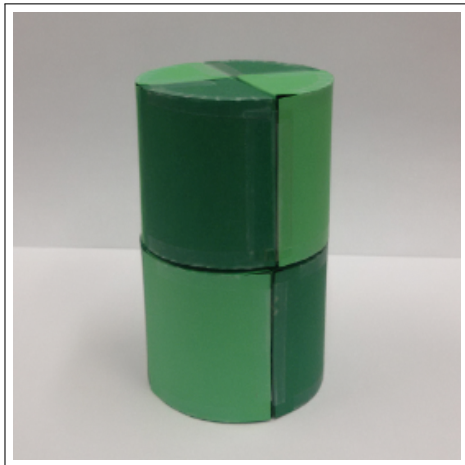
Oficinas podem ser desenvolvidas em programas de interação da escola com a comunidade como, por exemplo, o programa Escola da Família, no estado de São Paulo.

Seguem moldes e imagens de alguns dos sólidos loucos encontrados no meio digital.

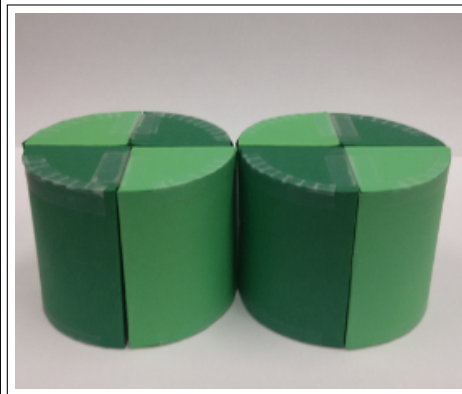
### B.1 Cilindro Alto

Este cilindro é subdividido em oito sólidos iguais. Cada sólido está ligado a outros dois e cada ligação ocorre por meio de uma aresta comum.

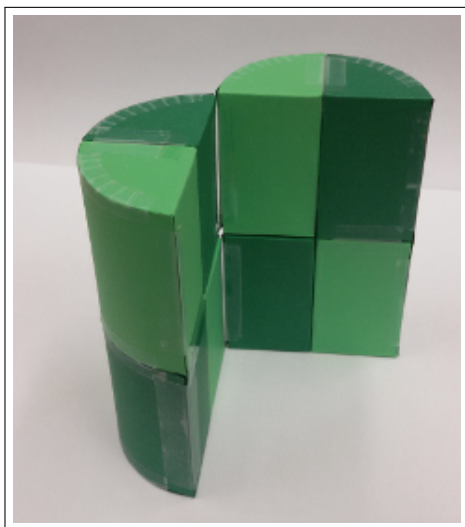
Figura 71 – Cilindro alto



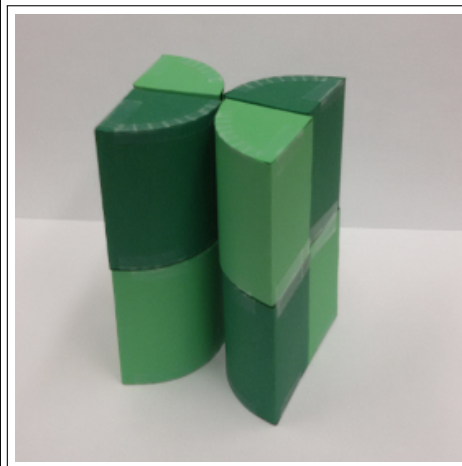
(a) Posição inicial



(b) Metades horizontais



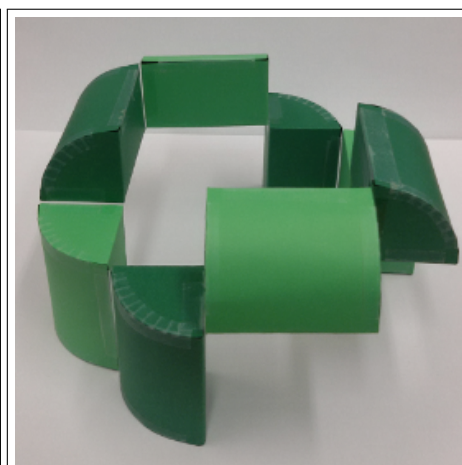
(c) Metades Verticais



(d) Metades Verticais Opostas



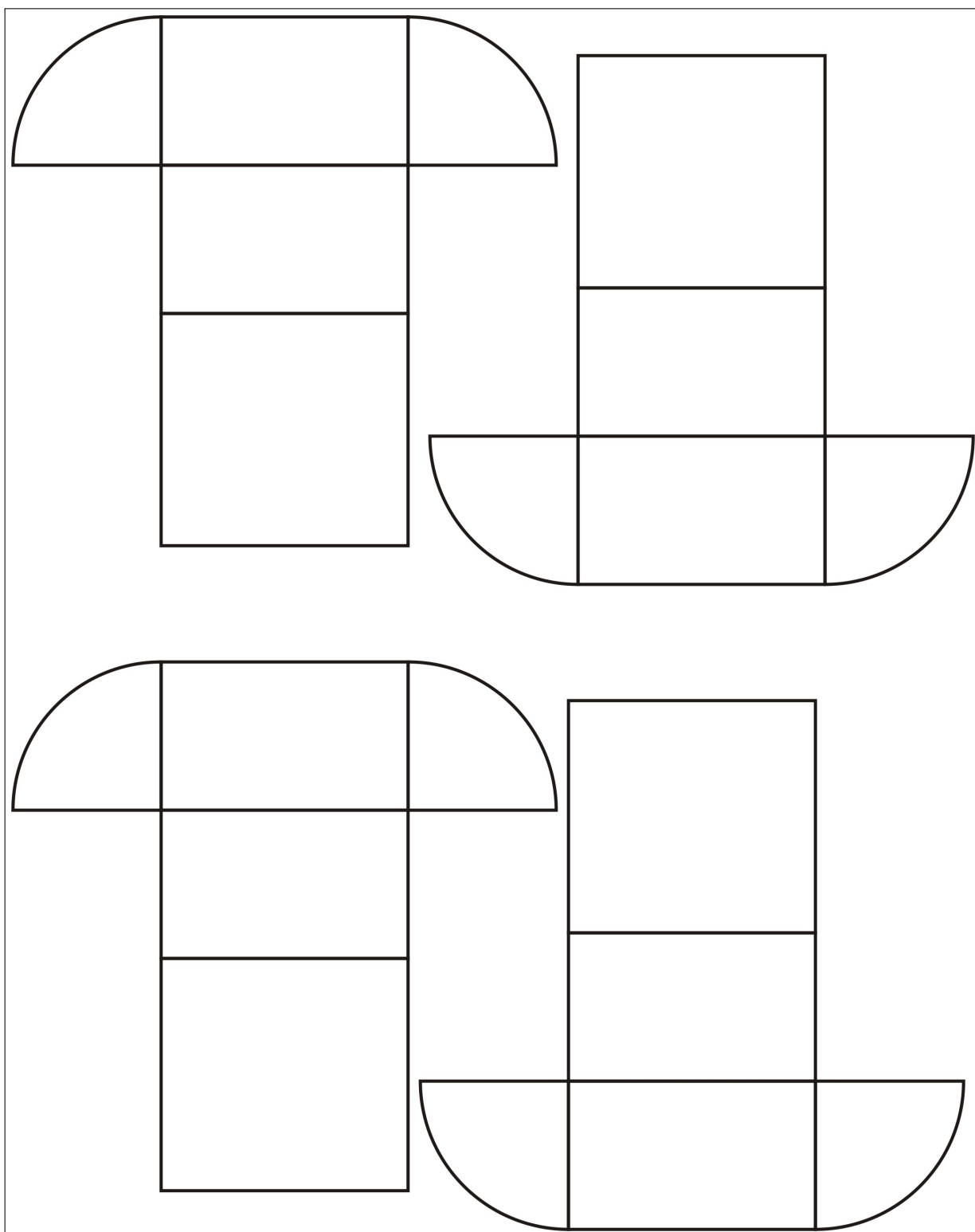
(e) Cubo vazio



(f) Arestas de ligação

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 72 – Molde do cilindro alto



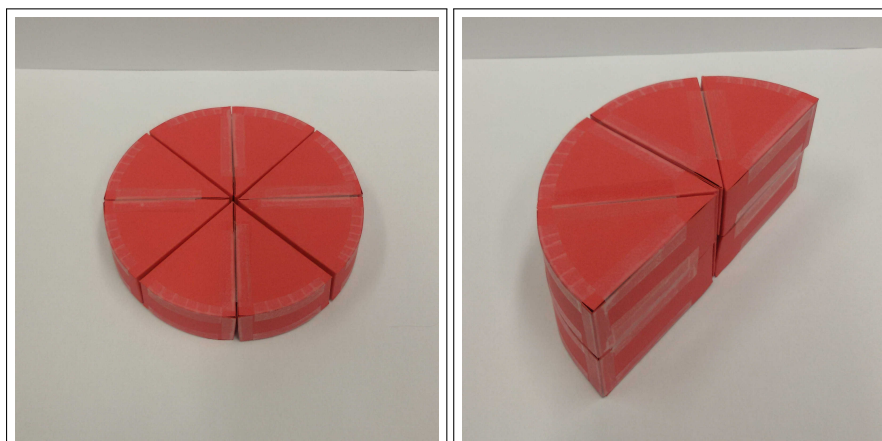
Fonte: Elaborada pelo autor.

## **B.2 Cilindro Baixo**

Cilindro subdividido em oito sólidos iguais. Cada sólido está ligado a outros dois e a ligação entre dois deles é por meio de uma aresta. Este cilindro é mais baixo que o anterior e não tem sobreposição de partes na posição inicial.

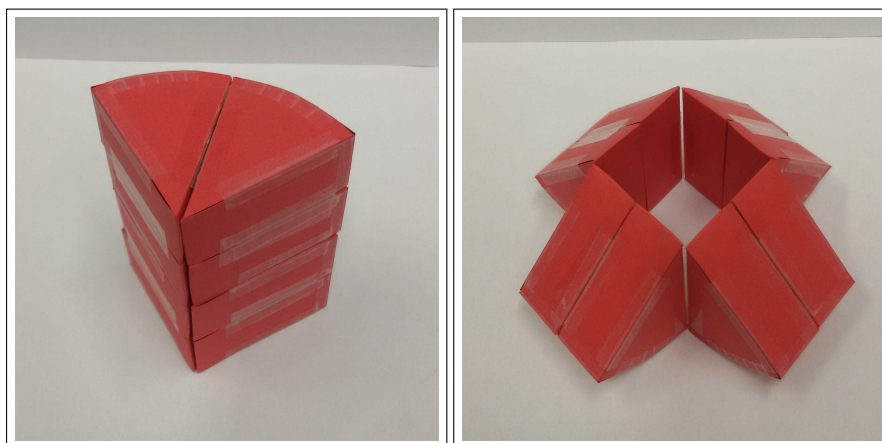


Figura 73 – Cilindro baixo



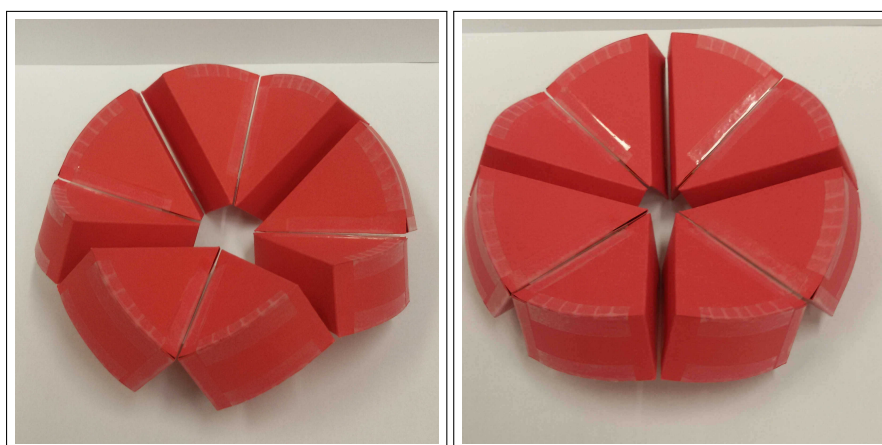
(a) Posição inicial

(b) Metades sobrepostas



(c) Quartos sobrepostos

(d) Oitavos

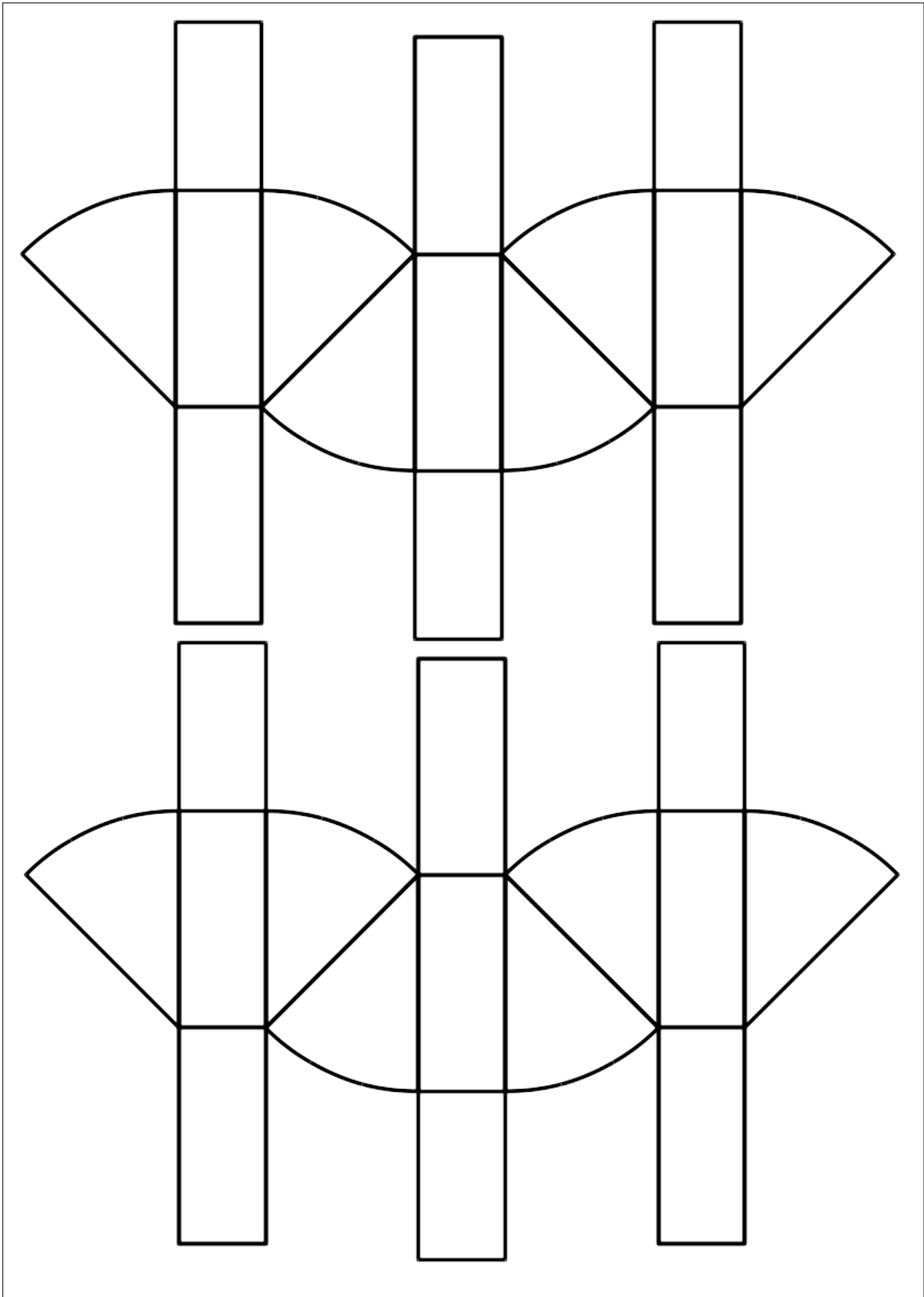


(e) Arestas de ligação 1

(f) Arestas de ligação 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 74 – Modelo do cilindro baixo



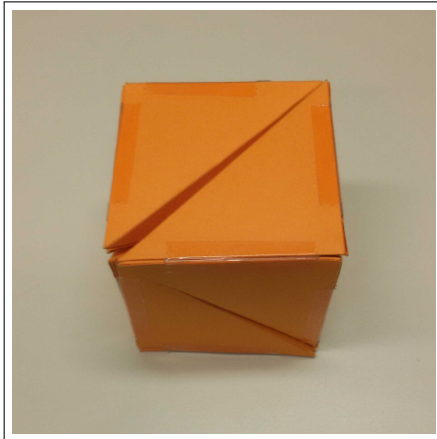
Fonte: Elaborada pelo autor.

## **B.3 HyperQBS**

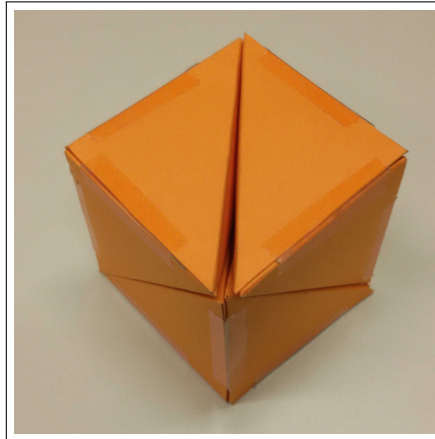
HyperQBS é um cubo dividido em 12 tetraedros com base em metade da face do cubo e vértice da pirâmide no centro do cubo. Cada tetraedro está ligado a outros dois por uma aresta comum.

Veja algumas imagens de possibilidades de formas com o hyperQBS e em seguida dois moldes.

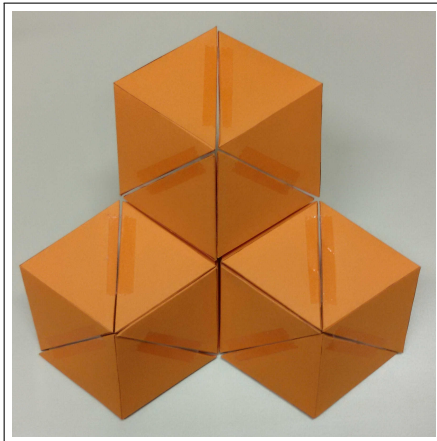
Figura 75 – HyperQBS



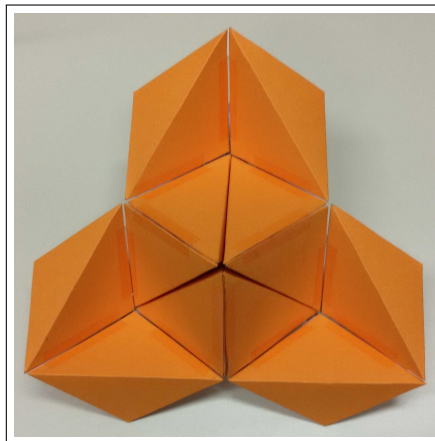
(a) Cubo



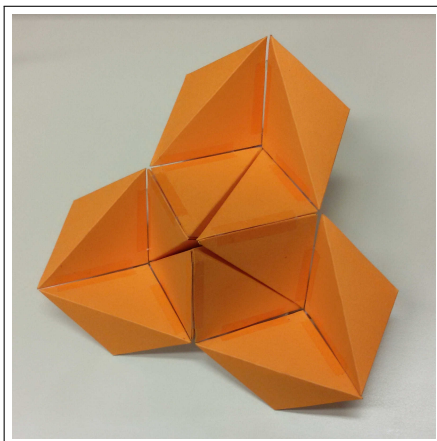
(b) Cubo - perfil



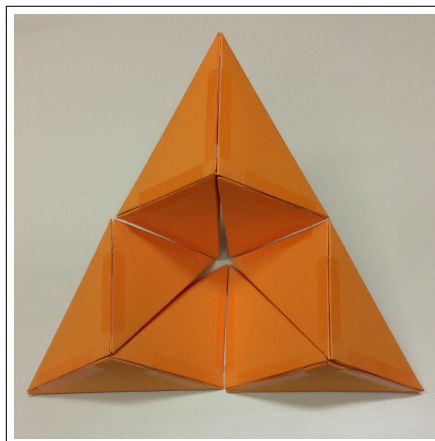
(c) Trio de losangos



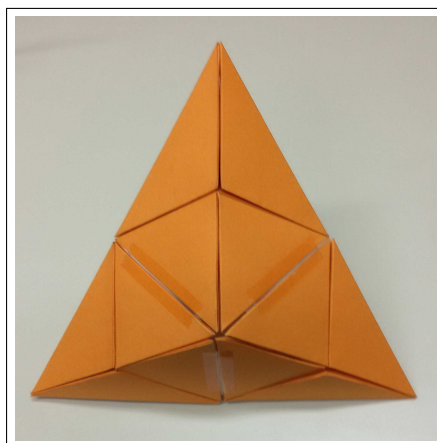
(d) Cubo em canto



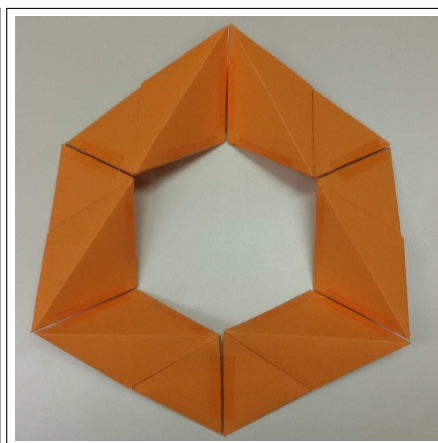
(e) Cubo em canto - perfil



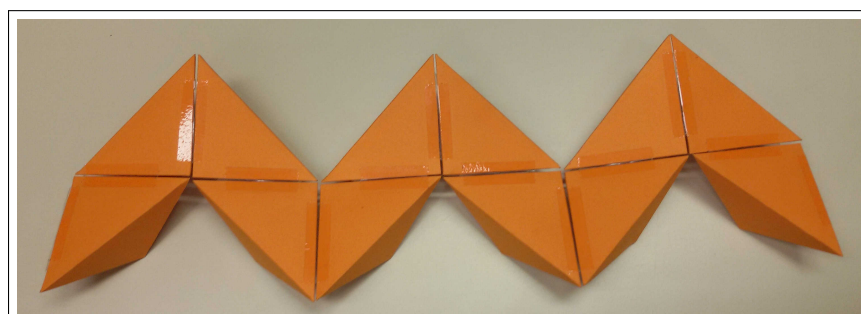
(f) Pirâmide com corte cúbico



(g) Pirâmide



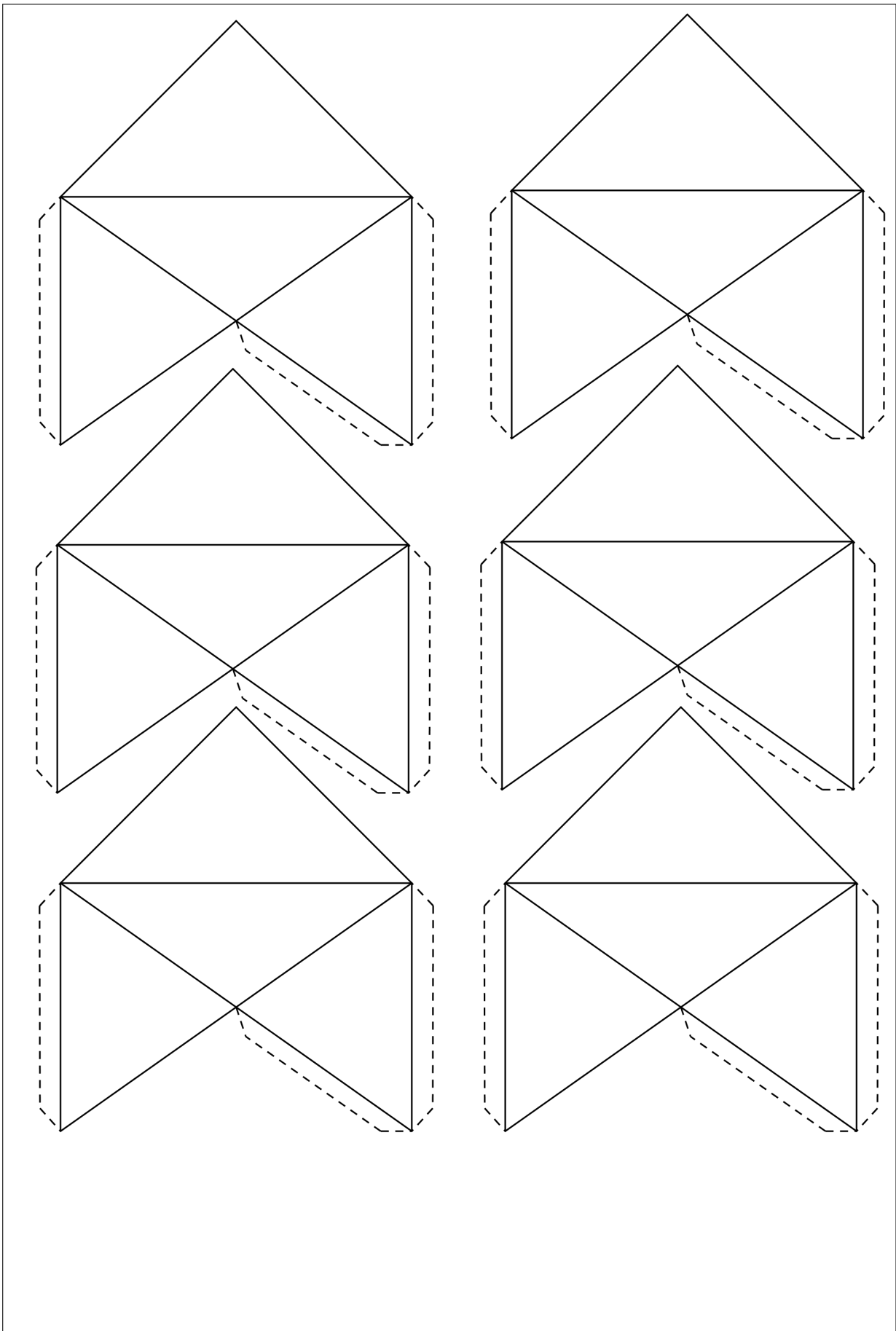
(h) Contorno Hexagonal



(i) Arestas de ligação

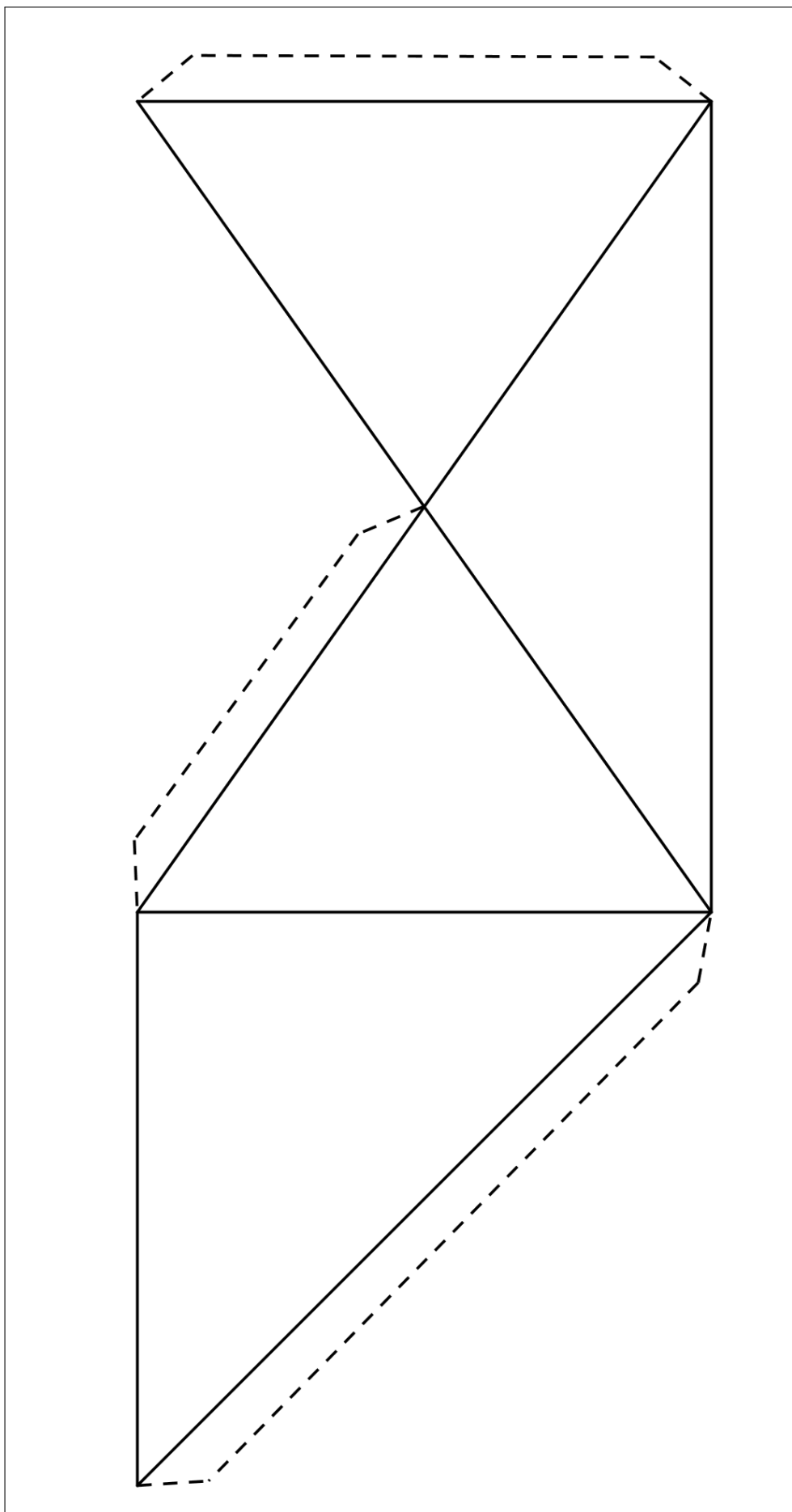
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 76 – Molde pequeno do HyperQBS



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 77 – Molde grande do HyperQBS



Fonte: Elaborada pelo autor.